

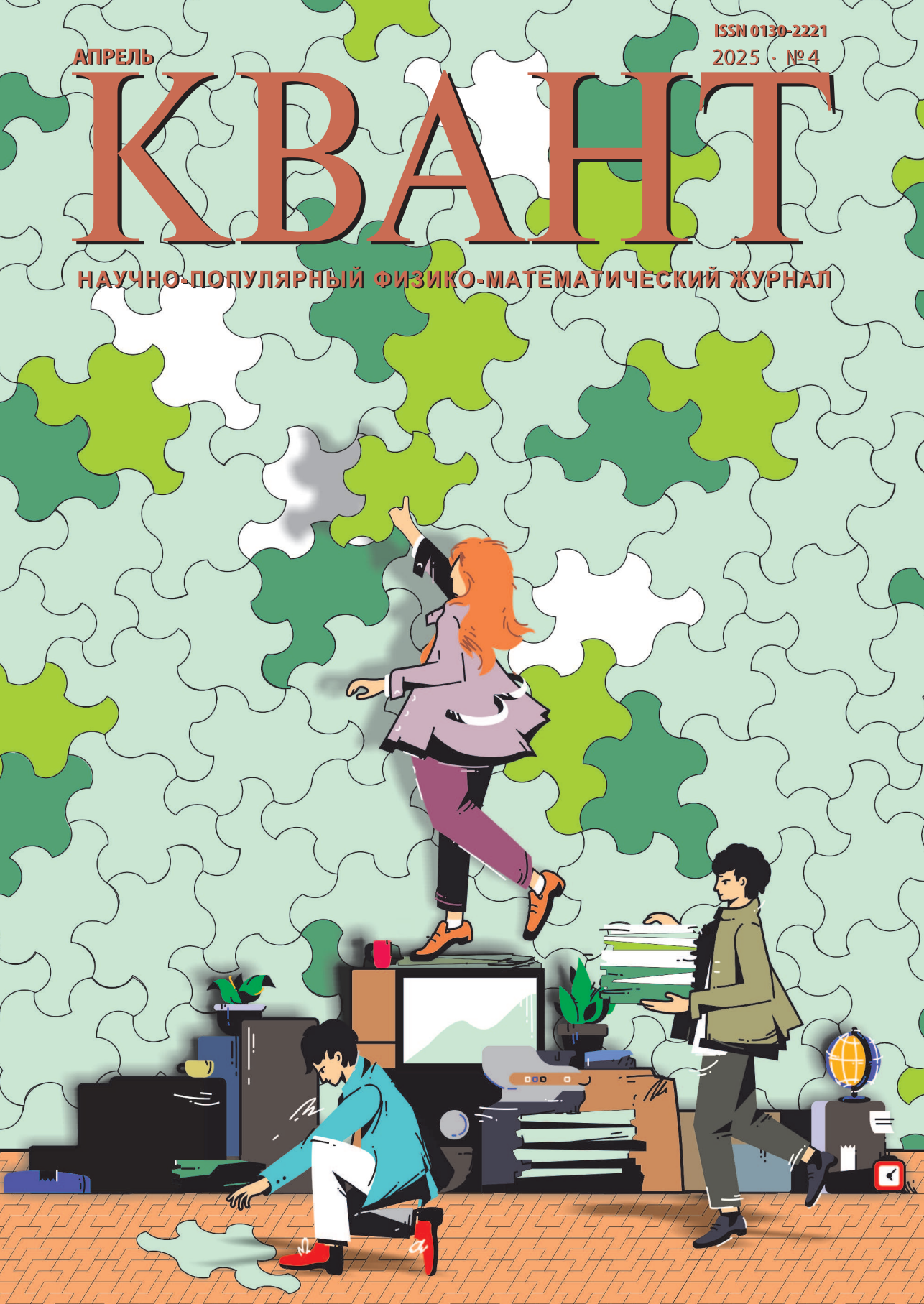
АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221

2025 · № 4

КВАНТ

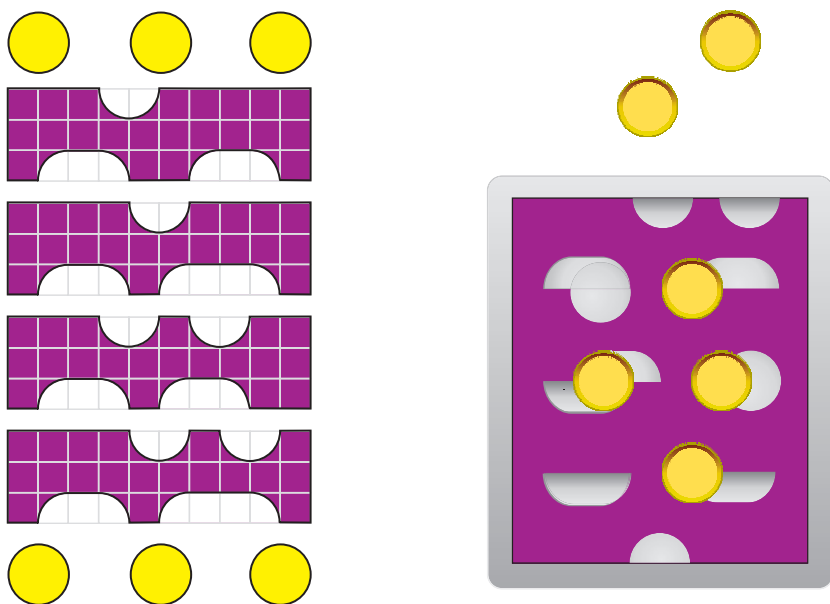
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





Эту головоломку придумал известный японский дизайнер головоломок Юю Асака (Yuu Asaka). Авторское название головоломки — «Oleo 10».

Четыре прямоугольника размером 10×3 легко разместить в прямоугольной рамке размером 10×12 , они ложатся в ней плотно без зазоров. Но если в этих прямоугольниках сделать вырезы так, как показано на рисунке слева, то в рамку, кроме «прямоугольников», а точнее, того, что от них осталось, можно положить еще 6 кругов радиуса 1. Задача игрока — найти способ это сделать.



Головоломку несложно изготовить самостоятельно. Все фигурки легко вырезать из картона, игровое поле — прямоугольник 10×12 — можно нарисовать на бумаге. Можно также распечатать головоломку на 3D-принтере (см. фотографию на рисунке справа).

Решение удивительно элегантно и неожиданно! Не в наших правилах подсказывать, но все же скажем, что если вы будете искать стандартное решение, то с головоломкой вам не справиться.

Желаем удачи!

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Апериодические плитки. *Х.Нурлигареев*
- 9 Композиты и вокруг. *Л.Ашкинази*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 15 Ампер – «Ньютон электричества» (к 250-летию со дня рождения). *Л.Белопухов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 22 Задачи M2838–M2841, F2845–F2848
- 24 Решения задач M2826–M2829, F2833–F2836

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 30 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Как раскрывать скобки правильно? *А.Антропов*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 35 Лыдина с хвостом. *С.Варламов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 39 Парадоксы плоского конденсатора. *С.Козел*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

- 44 Еще одна дверь в математику

ОЛИМПИАДЫ

- 46 Региональный этап LI Всероссийской олимпиады школьников по математике
- 49 Заключительный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 48 Задачи 29–32
- 54 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (64)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Апериодические плитки»*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

Апериодические плитки

Х. НУРЛИГАРЕЕВ

Периодические замощения

Предположим, что у нас есть некоторый многоугольник и копировальная машина, с помощью которой можно изготовить неограниченное количество его копий. Эти копии мы будем называть *плитками*.

Зададимся следующим вопросом: существует ли замощение плоскости этими плитками без пробелов и наложений?

В простейших случаях ответ можно получить, непосредственно прикладывая плитки друг к другу. Например, нетрудно заметить, что треугольными плитками плоскость замостить возможно, независимо от формы треугольника. Действительно, два одинаковых треугольника всегда можно совместить так, чтобы они образовали параллелограмм (рис. 1). Из таких паралле-

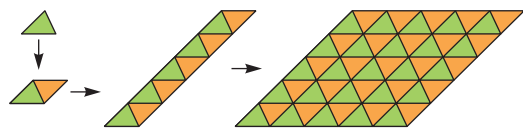


Рис. 1

лограммов легко составить полоску и этими полосками замостить плоскость.

То же самое справедливо и для четырехугольников. Два одинаковых четырехугольника можно сложить так, чтобы они образовали шестиугольник с попарно параллельными равными сторонами (рис. 2). Из таких шестиугольников мы снова сначала составляем полоску, и затем полосками замощаем плоскость.

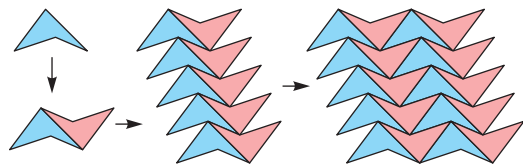


Рис. 2

А вот только шестиугольными плитками, изображенными на рисунке 3, обойтись не получится: видно, что в вырезанный угол просто не влезет полностью никакая часть такого шестиугольника.

Как быть, если наш многоугольник имеет более сложную форму? Было бы естественно применить тот же метод, что сработал для треугольников и четырехугольников. А именно, сложить из нескольких плиток *кластер*, похожий на параллелограмм, из которого можно сначала собрать полоску, а затем распространить эту полоску на всю

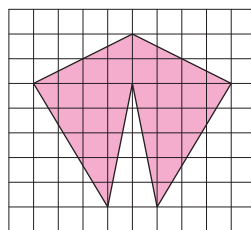


Рис. 3

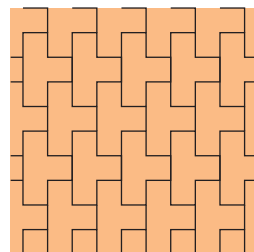


Рис. 4

плоскость. Например, для тетрамино в форме буквы Т такой кластер состоит всего из одной плитки (рис. 4), для пентамино в форме буквы П — из двух плиток (рис. 5), а для пятиугольника, который можно получить, разрезав правильный шестиугольник на три равные части, — из трех (рис. 6).

Полученные замощения являются периодическими. Более точно, замощение называется *периодическим*, если найдутся хотя

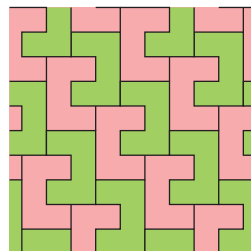


Рис. 5

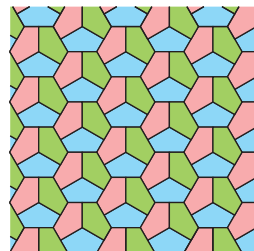


Рис. 6

бы два таких направления, что замощение можно совместить с самим собой, сдвинув в этом направлении.

В рассмотренных примерах мы образовывали полосу из кластера, сдвигая его в одном из таких направлений. А сдвигая полосу уже в другом направлении, получали все замощение целиком.

Как искать кластер, который можно периодически продолжить до замощения всей плоскости? Можно действовать следующим образом. Поместим первую плитку в центр, а затем попробуем обложить ее другими плитками со всех сторон всеми возможными способами. На каждом шаге будем проверять, не получился ли у нас уже искомый кластер. Если первый слой удалось сформировать, но кластер еще не найден, добавим второй слой вокруг начальной плитки и так далее. Скорее всего, этот процесс завершится достаточно быстро: либо мы найдем периодическое замощение, либо на каком-то этапе процесс застынет. На сегодняшний день не известны примеры плиток, для которых такой процесс требует более шести слоев (см. [1]).

Апериодические замощения

Может ли случиться так, что мы сумеем обложить плитку сколь угодно большим числом слоев, но не существует кластера, который бы продолжался до периодического замощения? Это означало бы (хотя мы и не будем обосновывать этот факт строго), что плоскость можно замостить данными плитками, но ни одно из возможных замощений не будет периодическим. Плитки, обладающие таким свойством, а также любые замощения ими называют *апериодическими*.

До недавнего времени существование апериодических плиток было под вопросом. При этом апериодические наборы плиток, т.е. когда в копировальную машину можно положить не один многоугольник, а несколько разных, были известны уже довольно давно. Так, еще в

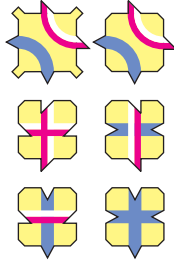


Рис. 7

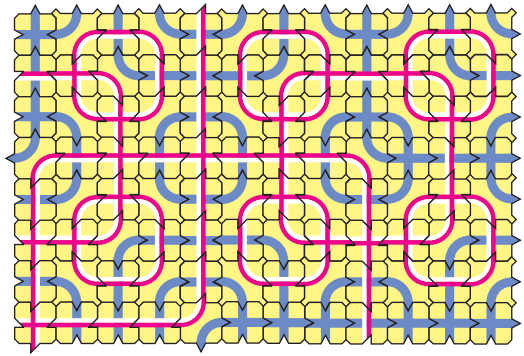


Рис. 8

1971 году Рафаэль Робинсон обнаружил апериодический набор из 6 многоугольников, копиями которых можно замостить плоскость, но только непериодическим образом. Этот набор изображен на рисунке 7, а одно из возможных замощений – на рисунке 8 (см. [2]). Раскраска плиток нужна для доказательства непериодичности замощения.

В 1974 году Роджер Пенроуз предложил апериодический набор из двух плиток (рис. 9 и 10). Плитки прикладываются так, чтобы синие вершины совмещались с синими, а красные с красными.

В течение последующих четырех десятилетий ученые безуспешно пытались найти апериодическую плитку. Наконец, в марте 2023 года Дэвид Смит, Джозеф Майерс, Крейг Каплан и Хаим Гудман-Штраус представили пример многоугольника, который

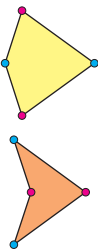


Рис. 9

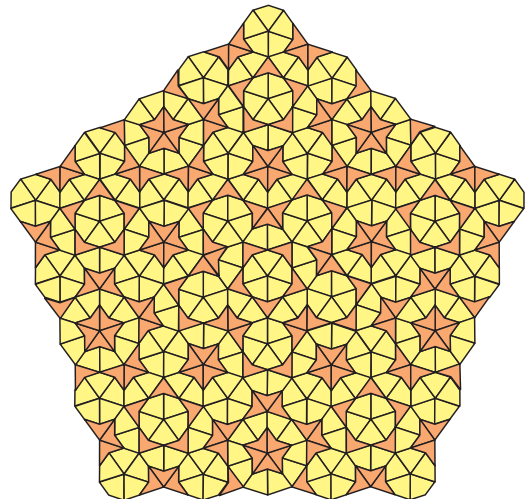


Рис. 10

допускает исключительно аperiодические замощения (см. [3]). Это 13-угольник, составленный из восьми одинаковых четырехугольников, каждый из которых получается разрезанием равностороннего треугольника на три равные час-

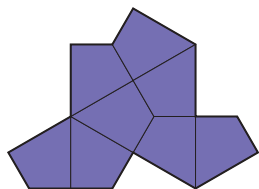


Рис. 11

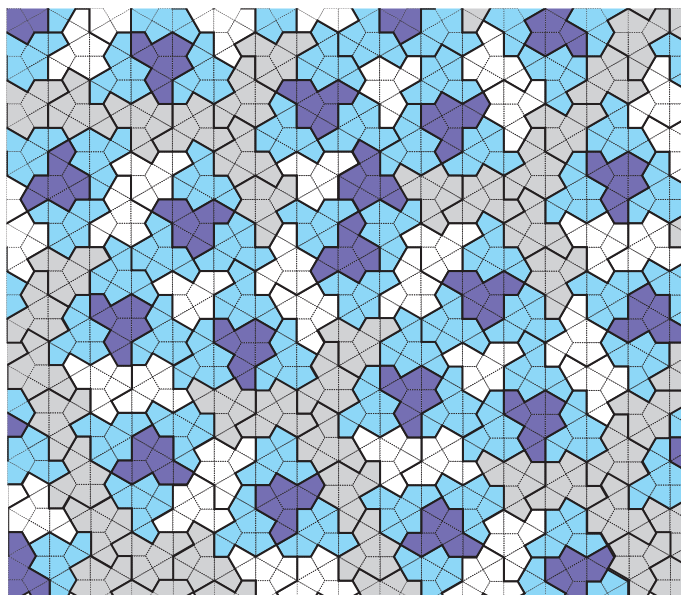


Рис. 12

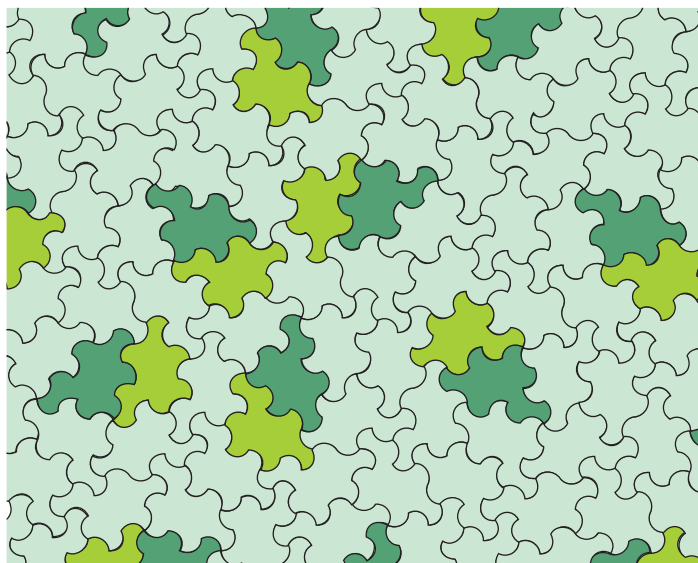


Рис. 13

ти (рис. 11). Благодаря своей характерной форме 13-угольник получил название «шляпа». Фрагмент замощения «шляпами» представлен на рисунке 12.

Если присмотреться к замощению «шляпами», то станет ясно, что плитки в этом замощении ориентированы по-разному. Серые, белые и голубые плитки можно совместить друг с другом не переворачивая, тогда как синие необходимо перевернуть,

чтобы они в точности накладывались на остальные плитки.

Можно показать, что из «шляп» невозможно составить замощение, не переворачивая часть плиток. Фигура, которая лишена этого недостатка, была придумана теми же авторами и была названа «привидением» (рис. 13).

Своими очертаниями «привидение» смутно напоминает «шляпу», и это не случайно. Оно было получено из «шляпы» некоторой деформацией, которая позволила создать бесконечное семейство фигур, копиями каждой из которых можно замостить плоскость только неperiодически. Границы «привидения» представляют собой дуги окружностей, но при желании их можно заменить ломаными линиями, чтобы фигура стала многоугольником. Выбор дуг в качестве границ обусловлен, прежде всего, эстетическими соображениями.

Самоподобные замощения

Вернемся к замощению «шляпами» и наметим основные идеи, которые привели Д.Смита, Д.Майерса, К.Каплана и Х.Гудман-Штрауса к их открытию.

Для того чтобы понять структуру изображенного на рисунке 12 замощения, нам будет полезно познакомиться с так называемыми *самоподобными замощениями*

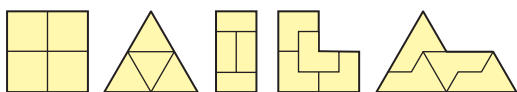


Рис. 14

(см. [4]), хотя как раз замощения «шляпами» таковыми не являются.

Будем говорить, что фигура является самоподобной, если ее можно разбить на несколько равных частей, каждая из которых подобна исходной фигуре. Например, самоподобными являются такие фигуры, как квадрат, равносторонний треугольник, прямоугольник «домино», уголок из трех клеток и составленный из шести равносторонних треугольников «сфинкс» (рис. 14).

Определим следующий процесс *инфляции-дефляции*. Один шаг этого процесса заключается в том, что мы сначала разбиваем данную фигуру на подобные части согласно приведенной схеме, а затем «раздуваем» их таким образом, чтобы в итоге каждая из частей сравнялась по размеру с исходной фигурой (рис. 15).

Можно не ограничивать себя одним шагом, а продолжить разбивать получающиеся на предыдущих шагах фигуры на меньшие части, «раздувая» их до изначального размера, а затем повторяя все вновь и вновь. Оказывается, если делать это определенным образом, в пределе мы получим замощение всей плоскости копиями исходной фигуры.

Не вдаваясь в детали и не приводя строгих определений и доказательств, отметим однако, что процесс перехода к пределу гораздо тоньше, чем может показаться на первый взгляд. Так, очень многое зависит от того, как именно располагать на плоскости «раздутые» фигуры относительно кластера, полученного на предыдущем шаге

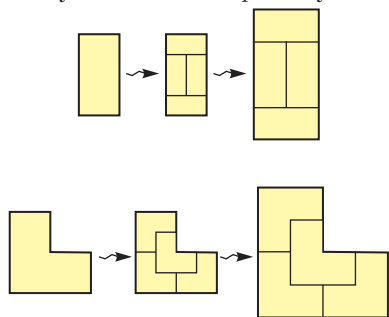


Рис. 15

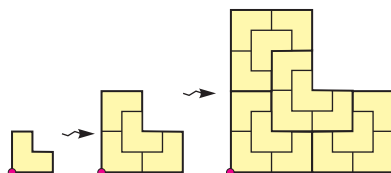


Рис. 16

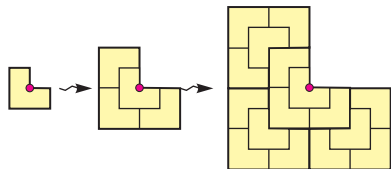


Рис. 17

процесса инфляции-дефляции. Например, если на осях координат всегда располагать внешние стороны уголка, то получится замощение лишь четверти плоскости (рис. 16), а если внутренние – то трех четвертей плоскости (рис. 17).

Кроме того, было бы неверно думать, что после применения конечного числа шагов процесса инфляции-дефляции обязательно возникает какой-то фрагмент этого замощения. Например, если мы рассмотрим разбиение домино на четыре параллельные доминошки меньшего размера, то после нечетного числа шагов у нас будут возникать фрагменты горизонтального замощения, а после четного – фрагменты вертикального замощения (рис. 18).

Замощение, полученное предельным переходом, является самоподобным. Это означает, что составляющие его плитки (плитки первого уровня) могут быть объединены в макроплитки (плитки второго уровня), подобные исходным. Замощение, образованное этими макроплитками, обладает тем свойством, что любой конечный фрагмент, который в нем встречается, подобен некоторому кластеру, имеющемуся

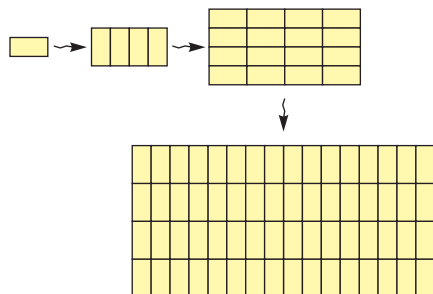


Рис. 18

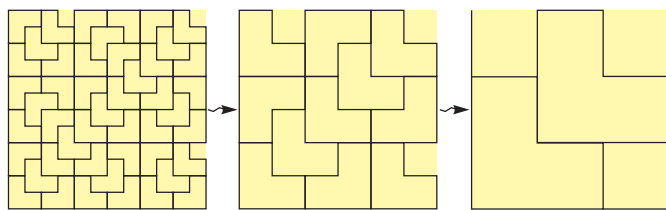


Рис. 19

в исходном замощении. Однако сами замощения плитками первого и второго уровня, вообще говоря, различны. Это означает, что они не могут быть совмещены ни одним преобразованием подобия.

Полученные макроплитки также могут быть объединены в еще большие плитки и так далее. Тем самым, укрупнение возможно на любом шаге, и плитки k -го уровня, будучи сгруппированными определенным образом, образуют плитки $(k+1)$ -го уровня. Таким образом, возникает бесконечная иерархия замощений, соответствующих плиткам разных уровней. Например, на рисунке 19 изображены первые три ступени такой иерархии для самоподобного замощения уголками.

Иерархии самоподобных замощений различаются в зависимости от того, сколько-ни способами на каждом уровне может быть проведено укрупнение. Если таких возможностей несколько, то иерархия называется *слабой*. Таковыми являются, например, замощение плоскости квадратами или равносторонними треугольниками. Например, на рисунке 20 показано четыре возможных способа сгруппировать квадратные плитки по четыре так, чтобы получились макроплитки.

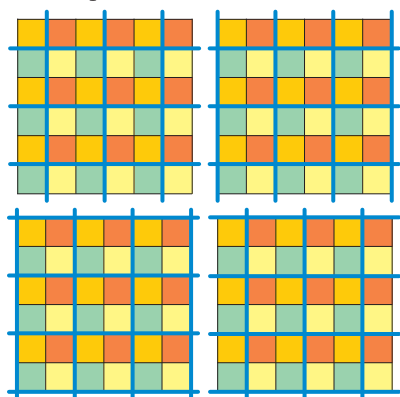


Рис. 20

Если же каждый раз укрупнение можно провести единственным образом, то иерархия замощений называется *строгой* – таковы самоподобные замощения фигурами «домино», уголками и «сфинксами» (см. рис. 14).

Оказывается, самоподобные замощения со строгой иерархией в большинстве своем обладают рядом типичных свойств. Так, они непериодические, но любой конечный фрагмент встречается в каждом таком замощении бесконечно много раз. Рассмотрим, почему так получается, на примере замощения уголками.

Предположим, что какое-то из самоподобных замощений уголками является периодическим, т.е. остается неизменным при некотором сдвиге. Тогда плитки k -го уровня должны переходить в плитки k -го уровня для каждого k . Однако если k достаточно большое, то плитка k -го уровня столь велика, что при рассматриваемом сдвиге накладывается сама на себя. Для самоподобных замощений со слабой иерархией это не составляет проблемы, что можно видеть на примере замощения квадратами. Но для строгих иерархий мы сразу приходим к противоречию, поскольку укрупнение плиток на каждом уровне возможно единственным способом, а значит, любые две плитки k -го уровня не пересекаются. Таким образом, самоподобное замощение уголками, да и вообще любое самоподобное замощение со строгой иерархией непериодично.

Теперь рассмотрим какой-нибудь конечный фрагмент самоподобного замощения уголками. Заметим, что при последовательном укрупнении все плитки из этого фрагмента на каком-то шаге окажутся внутри одной большой-большой плитки (рис. 21),

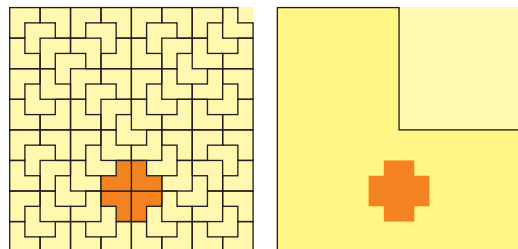


Рис. 21

для определенности k -го уровня. Это означает, что любая такая плитка k -го уровня также содержит искомый фрагмент. Ясно, что плиток k -го уровня бесконечно много, ведь они тоже составляют замощение плоскости. Следовательно, любой конечный фрагмент встречается в самоподобном замощении бесконечно много раз.

Важно отметить, что хотя любое самоподобное замощение уголками является непериодическим, в то же время нетрудно привести пример и периодического замощения этими плитками (рис. 22).

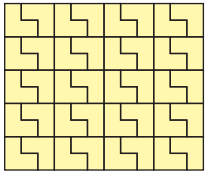


Рис. 22

То же самое справедливо и для всех остальных самоподобных фигур, упомянутых выше. Вопрос, существует ли самоподобная аперидическая плитка, т.е. такая плитка, замостить плоскость которой можно только самоподобными замощениями со строгой иерархией, на сегодняшний день остается открытым. Однако есть ощущение, что ответ на него положительный.

Имеется как минимум две причины так думать. Во-первых, известно немало самоподобных аперидических наборов, состоящих из двух плиток. Например, ту же строгую иерархию, что мы видели у уголков, дает набор из двух плиток, изображенных на рисунке 23 (здесь, прикладывая плитки друг к другу, нужно соблюдать согласованность цветов: розовые области должны касаться розовых, желтые – желтых, а зеленые – зеленых). При этом периодических замощений этот набор не допускает.

А во-вторых, открытые недавно аперидические плитки хотя и не самоподобны сами по себе, но идеям строгих иерархий близки.

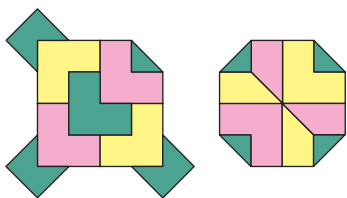


Рис. 23

Аперидичность замощения «шляпами»

На примере замощения «шляпами» мы вкратце обсудим, как идеи строгих иерархий реализуются в этом конкретном случае.

Выделим четыре базовых кластера, в которые можно объединить вместе несколько «шляп» (рис. 24). Первый из них, Н-кластер, включает в себя четыре плитки, одна из которых перевернута. Еще два – Р-кластер и F-кластер – складываются из двух плиток, составленных вместе. Наконец, последний кластер – Т-кластер – представляет собой не что иное, как одну «шляпу».

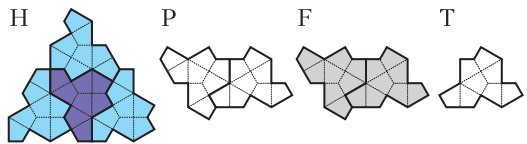


Рис. 24

На первый взгляд может показаться, что Р-кластер и F-кластер не отличаются между собой. Однако присмотревшись к типичному замощению «шляпами» (см. рис. 12), становится понятно, что F-кластеры всегда группируются по три, образуя фигуру, похожую на пропеллер. Поэтому если мы символически заменим кластеры на метapлитки упрощенной формы, то соответствующие Р-кластеру и F-кластеру метapлитки будут различаться: первая из них – параллелограмм, а вторая – параллелограмм с отрезанной вершиной (рис. 25).

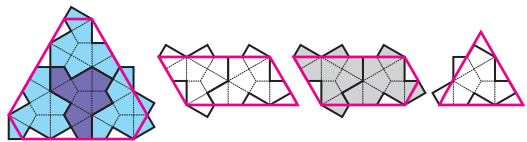


Рис. 25

Описанные выше четыре кластера собираются в еще большие кластеры, соединяющиеся между собой по тем же правилам, что и исходные, но большего размера. Такое укрупнение возможно единственным образом и продолжается до любого уровня. Первые три уровня для Н-кластера продемонстрированы на рисунке 26.

Таким образом, кластеры образуют строгую иерархию, что в пределе дает нам

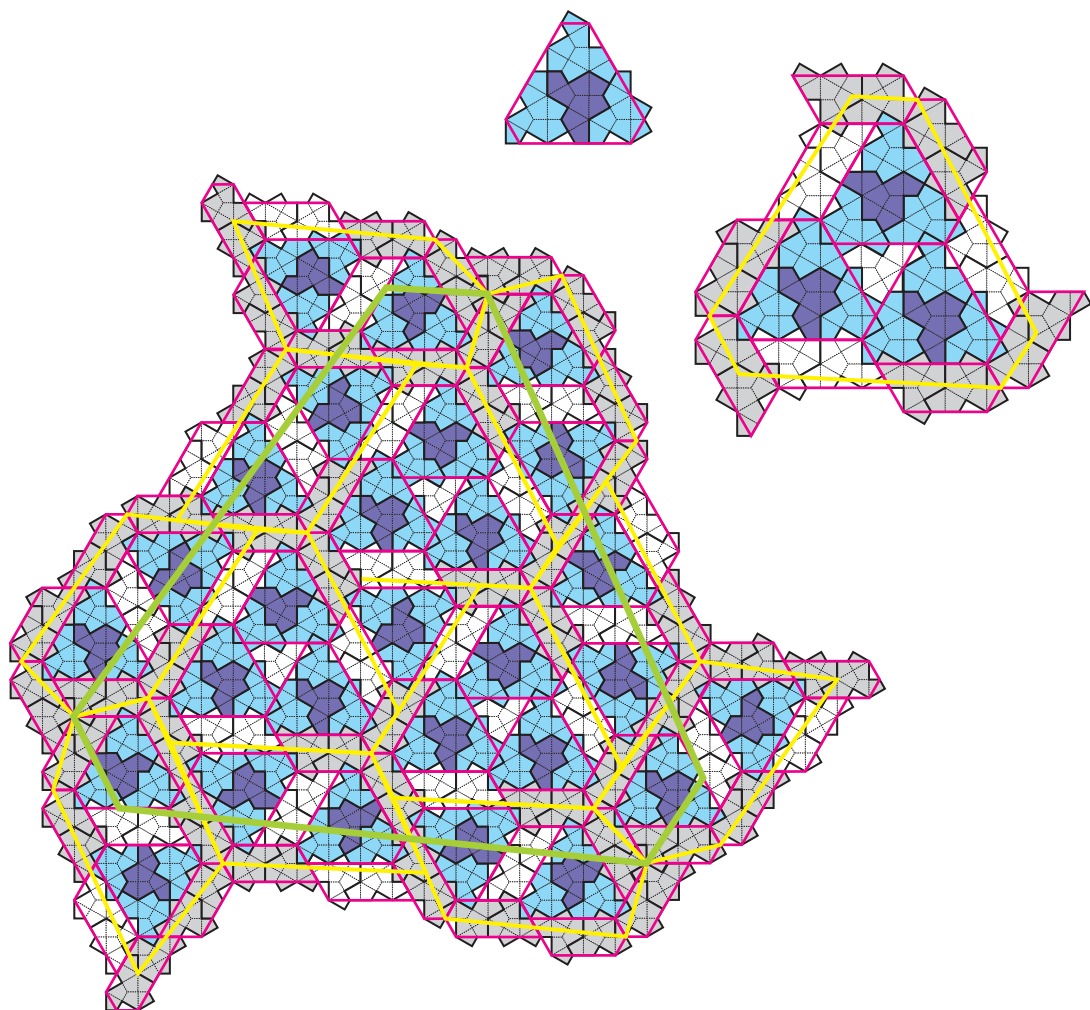


Рис. 26

непериодическое замощение плоскости. Кроме того, можно доказать, что никакими другими способами приложить плитки друг к другу невозможно. Поэтому любое замощение «шляпами» будет подчиняться описанной строгой иерархии и окажется непериодическим.

Отметим, что полученное предельным переходом замощение «шляпами», в отличие от описанных выше самоподобных замощений уголками, самоподобным не является. Иными словами, ни кластеры первого уровня не подобны кластерам второго уровня (ни вообще какого-либо еще уровня), ни метаплитки упрощенной формы разных уровней (как, например, мета-

плитки, изображенные на рисунке 26 красным, желтым и зеленым) не подобны друг другу. И, тем не менее, «шляпа» является примером аperiодической плитки – первой в своем роде, но далеко не единственной.

Литература

1. Х.Нурлигареев. Плитки и числа Хееша. – «Квантик», 2019, №10.
2. Х.Нурлигареев. Мозаика Робинсона. – «Квантик», 2020, №10.
3. D.Smith, J.Myers, C.Kaplan, C.Goodman-Strauss. Anaperiodic monotile. – Combinatorial Theory, 2024, vol.4, is.1.
4. Н.Долбилин. Самоподобные мозаики. – «Квант», 1988, №2.

КОМПОЗИТЫ И ВОКРУГ

Л.АШКИНАЗИ

Про что можно сказать «это новое»

Вещи состоят из материалов, материалы состоят из индивидуальных веществ и смесей. Вещества – это молекулы, молекулы состоят из атомов, атомы – из элементарных частиц. Все вроде бы просто, но в этой простой цепочке есть проблемы.

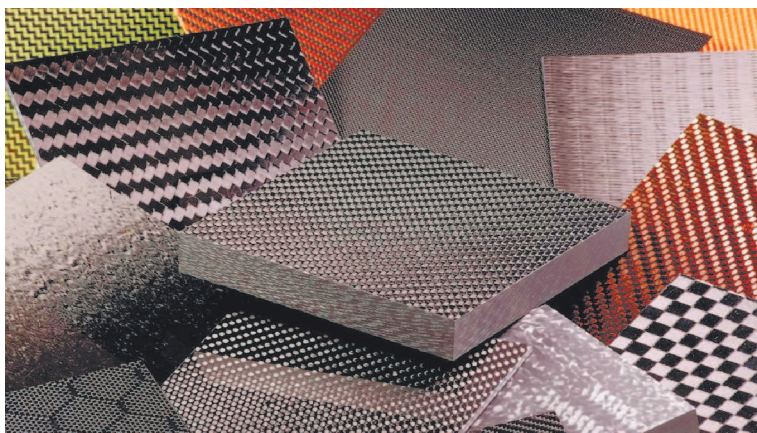
Некоторые элементарные частицы сами состоят из элементарных частиц; например, протон и нейтрон состоят из кварков. Когда хотят подчеркнуть различие, говорят «составные элементарные частицы» и «фундаментальные элементарные частицы», т.е. не составные. Впрочем, из контекста обычно понятно, о чем речь, так что это не вопрос.

А как вы отнесетесь к записи $Pb_{1,01}O$ или, скажем, $TiO_{1,25}$? Конечно, это не молекулы – так обозначают, как принято говорить, «нестехиометрические соединения». Хотя называть их соединениями тоже не вполне правильно – у них нет фиксированного состава. Взяли кусок PbO и посредством диффузии ввели в него немного Pb . А потом еще немного, а затем еще и еще. И в итоге на 100 атомов O в этом конкретном куске приходится 101 атом Pb . Или взяли TiO да и проделали то же самое. Только теперь избыток не металла, а неметалла, причем не какой-то 1%, а целых 25%. Такое тоже бывает.

Далее, является ли молекулой кристалл алмаза? Иногда так говорят, но называть

его молекулой неправильно, хотя состав у него, вроде бы, фиксированный. Однако так может быть, если он идеально чистый, без примесей, а этого не бывает. И кроме того, вот контрольный вопрос: а какая у этой «молекулы» молекулярная масса?

Теперь задумаемся – что из приведенного списка может быть создано новое, не существующее на данный момент ни в природе, ни, как говорят, во «второй природе», т.е. в мире, созданном человеком? Новые вещи – ничего удивительного, люди их создают непрерывно, и мы видим новые вещи каждый день в интернете и в магазине. Новые материалы существуют – на-



пример, новые сплавы, новые полимеры, а еще есть «композиционные материалы». Обычный пример – железобетон. Это хороший материал, но плохой пример, и мы это еще обсудим.

А бывают ли новые вещества, новые атомы, новые элементарные частицы? Новые элементарные частицы – да, бывают, например тетракварк и пентакварк. Разумеется, это составные частицы. Новые фундаментальные частицы можно было

бы получить, если бы удалось «разобрать» на части кварк (но эту идею не освоила даже фантастика). Да и что с ними делать?

Новые атомы – да, их физика создавать умеет, это атомы трансуранов, в том числе и тех, которых нет в природе. Это уточнение необходимо потому, что некоторые трансураны, которые в таблице находятся недалеко от урана, могут возникать и естественным путем и поэтому в природе встречаются, хотя и очень редко. Новыми молекулами химиков вообще удивить трудно, они их создают регулярно. Но существуют объекты, которые хотя и состоят из атомов, но не являются молекулами – у них нет фиксированного состава и молекулярной массы. Например, это могут быть кристаллы, в частности – алмаз. Кристалл, важный для техники, потому что самый твердый, а значит, применяющийся как абразив.

Алмаз знаменит еще и уникально высокой теплопроводностью, поэтому он перспективный материал для полупроводниковых и электровакуумных приборов. Во всяком таком приборе при работе выделяется тепло (КПД не бывает 100%), если его не отводить, прибор расплавится. Тепло уносится системой жидкостного или воздушного охлаждения, но для того чтобы добраться до хладагента (воды или воздуха), теплу нужно пробраться через корпус прибора. У алмаза теплопроводность в несколько раз выше, чем у любых других веществ, а значит, поток тепла, который можно в этом случае отвести, в несколько раз больше. И вообще, любой материал, у которого какой-то параметр имеет уникальное значение, почти наверняка применяется так, что именно это значение и используется.

Однако не про всякий кристалл можно сказать, что он «не молекула». Например, из молекул состоят так называемые *жидкие кристаллы*, а также твердые CO_2 , S, N_2O_4 и многие органические соединения. Это – кристаллы, но в узлах решеток у них не одиночные атомы, а молекулы (для серы – S_8). Из молекул могут состоять не только кристаллы, но и аморфные вещества, например кварцевое стекло.

А можно ли создать новый, не существующий в природе кристалл или новое аморфное вещество? Да, раз можно создать новую молекулу, то много таких молекул при не слишком высокой температуре составят твердое тело – аморфное или кристаллическое. А можно ли создать из молекул композиционный материал? Разумеется, да – хотя бы смешав два типа молекул (например, H_2O и CO_2) и заморозив «это».

С кристаллами можно поступить и хитрее. Например, можно при выращивании кристалла периодически вносить в него примеси или вообще изменять его состав, чередуя, скажем, слои GaAs и AlAs или слои Si и SiGe. То, что у нас получится, называется *сверхрешеткой*, и такой кристалл ведет себя как некое новое вещество. Параметры этого нового вещества будут зависеть от параметров использованных веществ и примесей (назвать сразу можно плотность), а также еще от формы включений и их расположения. Естественно, что не всякие два вещества можно использовать, «чередую слои». Одно из условий, которому должны удовлетворять эти вещества, вы, наверное, сможете назвать (этот параметр даже упоминается в школьном учебнике).

Новые материалы

Но это еще не все. Новым материалом будет и материал, состоящий из какого-то известного материала и воздуха. Например, представьте себе металлическую губку, в которой, скажем, 2/3 объема занимает воздух. Что вы скажите насчет ее теплопроводности и электропроводности? Вроде бы очевидно, что они должны быть меньше, чем у компактного материала без включений воздуха, но насколько? Если вам трудно рассуждать в терминах «проводимости», думайте в терминах «удельного сопротивления» (это величина, обратная проводимости).

Изготовить такой материал можно разными способами, например методом так называемой *порошковой металлургии* – взять порошок, насыпать его в форму и нагреть. Благодаря поверхностной диф-

фузии, т.е. миграции по поверхности атомов, порошинки «спекутся». Мы получим губку, причем проницаемую – как обычная губка. Если нагревать наш объект достаточно долго и сильно (диффузия зависит от температуры экспоненциально), а еще лучше одновременно прикладывая давление, то можно получить компактный сплошной материал.



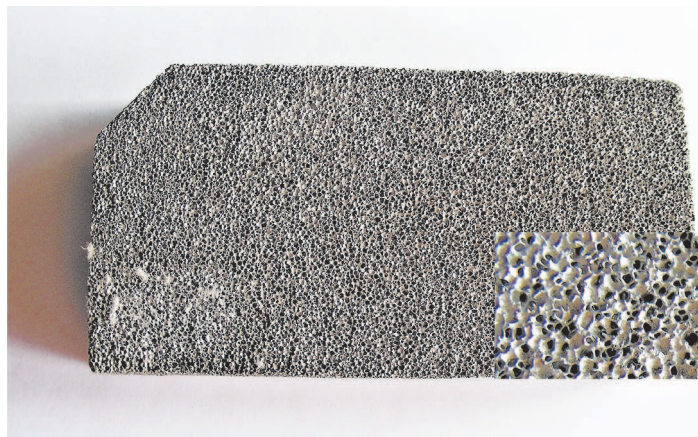
Медная губка

Попутно заметим – это не означает, что мы получим материал с такими же параметрами, как изначально сплошной, например, металл после литья или проката. Состав будет такой же (с точностью до примесей), но свойства будут зависеть от структуры: моно- или поликристалл, от размера, формы и ориентации кристаллов, наличия разнообразных дислокаций. А все это зависит от того, что именно делали с этим веществом, как его обрабатывали, превращая в новый материал.

Рассмотрим пористый материал на основе металла и будем считать, что поры в нем сферические и одинаковые. Как зависят тепло- и электропроводность, прочность и модуль Юнга (жесткость) от объемной доли пор и от их размера? Оказывается, если поры сферические, то изменение всех величин пропорционально их объемной

доле, а зависимость от размера слабая. Теперь все то же самое, когда поры не сферические, а цилиндрические (или эллиптические) с большим отношением длины к диаметру или когда это нанотрубки. В этом случае ответ зависит от ориентации пор относительно направления электрического тока, потока тепла и приложения сил. Если большая часть пор ориентирована примерно одинаково, то может ли полученный материал оказаться анизотропен? Попробуйте рассмотреть крайнюю ситуацию (это вообще универсальный прием), когда поры бесконечно длинные, т.е. пронизывают кусок материала насквозь. И еще вопрос похитрее. Мы пока не обращали внимания на то, закрытые поры или открытые. На какие параметры это может повлиять и как? Что вы скажете, если второй материал не металл, а резина или мягкий (с низкой жесткостью) полимер?

А теперь представьте себе, что поры заполнены материалом, имеющим теплопроводность или электропроводность существенно больше, чем у окружающей среды, например – это металлические включения в полупроводник или диэлектрик. Что будет тогда с тепло- и электропроводностью? Можно рассмотреть и ситуацию, когда



Никелевая губка; в правом нижнем углу – с увеличением

поры или включения не вытянутые, а, наоборот, сплюснутые, вплоть до тонких листиков. Если тепло- и электропроводящие включения вытянуты и ориентированы по току или потоку тепла, то тепло- и электропроводность будут большими. Если же это листики, расположенные поперек тока или потока, то их влияние будет мало. Сейчас стали появляться попытки использовать при создании композиционных материалов маленькие кусочки графена – это тот самый случай.

Пористый материал в технике композиционным материалом называть не будут, потому что воздух считать материалом как-то странно. Хотя его можно использовать именно как материал, смешивая с жидким материалом, даже с металлом. Например, смешивая воздух с алюминием, получают металлическую пену и охлаждают ее до затвердевания. И есть еще одна большая группа не вполне композиционных материалов, когда один из компонентов используется в некоем предварительном состоянии и он принципиально изменяется в процессе изготовления. Это ни что иное, как клей или компаунд. Изначально они жидкие, а после пропитки полимеризуются и затвердевают. Ими очень часто пропитывают, во-первых, обмотки электродвигателей, электромагнитов, трансформаторов и дросселей, а во-вторых, все, что сделано из волокон, лент и вообще тканей, естественных и искусственных. Полимеризация и затвердевание могут происходить, например, потому, что перед пропиткой эпоксидная смола смешивается со вторым веществом, иницирующим полимеризацию (его обычно называют отвердителем).

Смыслов в такой пропитке несколько. Материал перестает быть гигроскопичным, перестает впитывать воду. Увеличивается теплопроводность материала потому, что именно поры, заполнен-

ные воздухом, делают материал теплоизолятором. (Белые медведи хорошо это знают.) Далее, нити из многих материалов имеют высокую прочность или продольную жесткость, их трудно порвать и растянуть. Однако из нитей можно сделать свитер и штаны, но ни крыло самолета, ни байдарку сделать из одних нитей нельзя. Пропитка и затвердевание превращают пучок нитей в жесткий материал.

Мы пришли к идее классических композиционных материалов.

Кого называют композитами

Итак, пусть у нас есть материал, из которого можно сделать прочную нить, но в виде компактного куска прочность его невелика. Классические примеры – графит и стекло. Чтобы сделать из нитей что-то жесткое, есть три способа.

Первый вариант – положить толстый слой нитей, свободных или переплетенных (ткань), в какую-то емкость, залить, например, эпоксидной смолой и полимеризовать. Мы получим материал в виде куска, который можно обрабатывать разными способами. Этот материал окажется анизотропным – он будет прочным и жестким в направлении нитей, а если это ткань, то в двух направлениях. Существует трехмерное плетение, в этом случае материал будет прочным и жестким в трех направлениях. Но для всего этого нужно соблюдение одного условия, касающегося взаимодействия нитей и заливки – какого? Кстати, если вы заглядывали внутрь



Болт из трехмерного углерод-углеродного композита

компьютера или радио-аппаратуры, то видели именно композит – печатные платы делают из текстолита или стеклотекстолита. Учтите, что «литос» – это камень по-гречески, остальное понятно. А «текстус» – ткань по-латыни. (Так что вы говорите на большем количестве языков, чем вам кажется.)

Другой вариант, если нити или ткань не лежат свободно, а натянуты на какой-то каркас, «оправку». Тогда мы получим не просто материал, а готовую деталь. Про такие детали обычно говорят «сделана из композита»;

это не совсем точно, но такова традиция. Кстати, тут уместно вспомнить о железобетоне. Его часто приводят как пример композиционного материала, но это неточно, причем дважды. Во-первых, он не «материал», его ни пилят и не строгают, он возникает сразу как деталь. Во-вторых, и без стальной арматуры он композит – в нем есть камешки (гравий), песок и цемент.

Третий вариант применим, когда мы имеем дело с углеродной нитью. Если поместить углеродную нить в среду CH_4 при давлении 15 торр (2000 Па, или 0,02 атм) и температуре 1100 °С (это один из примеров, используются и другие среды и режимы), то на ее поверхности начнет осаждаться углерод со скоростью 0,1 мкм/ч. При этом в тех местах, где нити касались друг друга, «шкурка» на нитях оказывается общей, т.е. нити срастаются, и мягкая деталь из углеродного волокна становится жесткой. Этот материал (его используют и как материал) называют «углерод-углеродный композит». Кстати, известны способы получения стеклянных покрытий, поэтому можно было бы попробовать получить аналогичный композит из стекла.

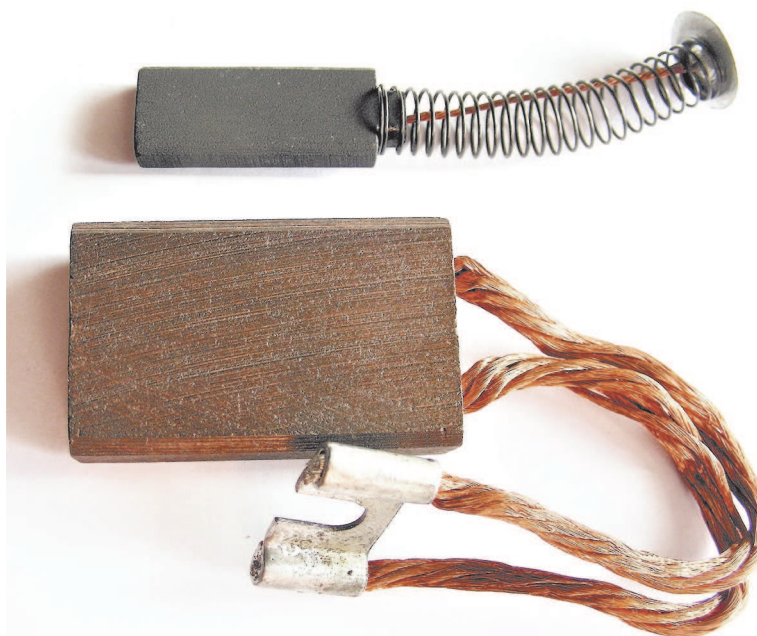


Коаксиальный нагреватель из углерод-углеродного композита. В каждом из элементов ток протекает по трубе и по центральному стержню в противоположных направлениях – это сделано для ослабления внешнего магнитного поля

Параметры композита всегда зависят от параметров материалов, которые в него вошли, а также от их количества, от структуры (поры, сферические частицы, эллипсоиды, лепестки, нити) и от взаимодействия материалов (диффузии и адгезии). Если бы стекловолокно или углеродное волокно не склеивались со смолой, то стеклотекстолит или композит из углеродного волокна и эпоксидной смолы не были бы прочными и жесткими. В этом случае при приложении усилий к материалу и начале деформации нити отделялись бы от смолы и прочность материала зависела бы от прочности смолы, которая меньше, чем прочность нитей. Вы можете попробовать оценить, какую прочность (на сдвиг и на отрыв) должно иметь соединение нити и смолы, чтобы материал не терял прочности. Очевидно, что прочность соединения должна быть не меньше прочностей смолы и материала нитей.

Несколько примеров

Магнитодиэлектрики. Сердечники трансформаторов, дросселей и электромагнитов делают из ферромагнетика. Выбор конкретного материала зависит преж-



Щетки электродвигателей: вверху — графитовая, внизу — меднографитовая, выводы медные. Обратите внимание на различие цвета трех материалов

де всего от частоты, на которой работает устройство, необходимой магнитной проницаемости и индукции магнитного поля. Для низких частот естественное решение — железо. Но оно — проводник, значит, будут токи Фуко, тепловыделение, падение КПД. Известное традиционное решение — сердечник из пластин, но это не всегда удобно.

Решение — берут порошок железа, частички размером в несколько микрон, покрывают их тонким изолирующим слоем и прессуют для получения сердечника нужных размеров.

Биметаллические контакты реле. Контакты мощных реле должны иметь низкое сопротивление, потому что по ним протекает большой ток. Казалось бы, выбор очевиден — медь или серебро. Но эти металлы мягкие, при нагреве их прочность становится недостаточной для работы — контакты «свариваются». Надо поднять твердость материала, не слишком жертвуя проводимостью.

Решение — медью пропитывают вольфрамовую губку.

Оксидный катод электровакуумных приборов.

Термоэлектронная эмиссия увеличивается при уменьшении работы выхода. В качестве материала с низкой работой выхода используют оксиды элементов второй группы, чаще всего тройной оксид $(\text{BaSrCa})\text{O}$. При рабочих температурах 700–800 °С и в вакууме за счет ускоренного испарения кислорода у такого материала нарушается стехиометрия, он обогащается барием и становится полупроводником. Тем не менее, в некоторых случаях его сопротивление оказывается слишком большим.

Решение — в катод добавляют частички металла (Ni).

Меднографитовые щетки электрических двигателей. Щетки для электродвигателей должны иметь низкий коэффициент трения, поэтому графит — естественное и традиционное решение. Однако у графита велико сопротивление, а при работе с большими токами это нежелательно.

Решение — щетки делают из композита графит-медь, прессованной смеси порошков.

Композиционные и вообще новые материалы, как область работы, имеют следующие особенности.

- Поскольку все, что делается, делается из чего-то, то материаловед без работы никогда не останется.

- По этой же причине требования к материалам разнообразны и часто изменяются.

- Для работы в этой области нужно знать разные области физики и некоторые области химии.

Так что учитесь, работайте и наслаждайтесь!

Ампер – «Ньютон электричества» (к 250-летию со дня рождения)

Л. БЕЛОПУХОВ

КОГДА МЫ НАЗЫВАЕМ ЕДИНИЦУ силы «ньютон», невольно возникает величественный образ создателя классической физики Исаака Ньютона. С электрическими единицами дело обстоит по-другому. Названия единиц редко ассоциируются в памяти с реальными личностями, носившими эти имена. А между тем Джеймс Максвелл, завершивший создание теории электрических явлений, назвал Ампера, в честь которого названа единица силы тока «ампер», *Ньютоном электричества*.

Детство, юность и зрелые годы Ампера

Андре-Мари Ампер (1775–1836) родился во французском городе Лионе, в семье крупного торговца шелковыми тканями, изготовлением которых этот город славился на всю Европу.

Глава семьи был не просто торговцем, он был образованным и умным человеком. Он рано подметил необычные способности сына. Андре еще не было трех лет, он не умел называть числа, но когда играл с мелкими камешками или бобами, то рядом с двумя кучками он выкладывал третью, в которой число предметов было равно их сумме в двух кучках – проверял правила арифметики.

Отец решил не отдавать сына в школу, а дать ему домашнее образование. Он не скупился находить для него самых лучших учителей. Становясь старше, Андре не только показал незаурядные математи-

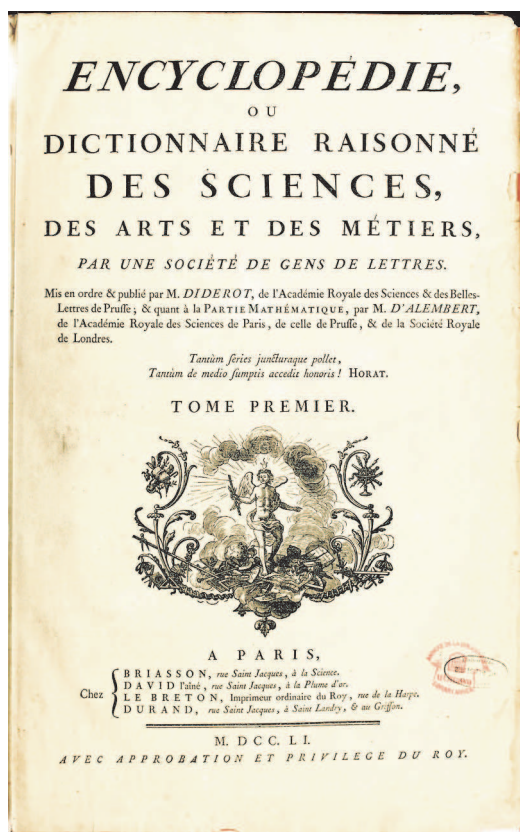
ческие способности, но и проявил необычайный интерес ко всему на свете – и к географии, и к биологии, и к технике.

В 1751 году в Париже началось издание многотомной «Энциклопедии, или Толкового словаря наук, искусств и ремесел». Это была не самая первая энциклопедия, однако она отличалась не только полнотой, но и всем своим духом свободного знания, не ограниченного ни религиозными, ни политическими соображениями.

Два замечательных человека задумали и осуществили это издание. Это были Дени Дидро, философ и филолог, и Жан Лерон Д’Аламбер, математик и физик. Они нашли спонсоров для начала издания; в дальнейшем оно стало подписным и сто-



Андре-Мари Ампер



Титульный лист книги «Энциклопедия, или Толковый словарь наук, искусств и ремесел»

ило довольно дорого, поскольку издавать его приходилось не во Франции, а в основном в Швейцарии. Дидро и Д'Аламбер привлекли к написанию статей выдающихся ученых того времени и сами были авторами многих статей. Можно считать, что эта эпоха получила в истории одно из названий «век просвещения» в том числе и благодаря этой энциклопедии. В 1765 году вышел последний, семнадцатый том основного текста энциклопедии и продолжалось одиннадцатитомное издание иллюстраций (гравюр). Впоследствии было издано еще семь томов статей, в основном посвященных новым достижениям науки и техники, которые тогда уже стремительно развивались.

Несмотря на высокую стоимость, отец Ампера был одним из самых верных подписчиков и имел у себя все 35 томов.

Заметим кстати, что в России тогда полностью иметь всю энциклопедию могла себе позволить только императрица Екатерина II.

Так вот, Андре Ампер, имевший в домашней библиотеке эту энциклопедию, в свои 14 лет том за томом прочитал все семнадцать томов. И не просто прочитал, а изучил и запомнил очень многое из них. Так что слова, часто встречающиеся в биографиях Ампера, что он имел энциклопедическое образование, имеют под собой совершенно конкретную основу.

Но самый большой интерес у него вызывали математика и естественные науки. В 12 лет его домашним учителем математики стал преподаватель из Лионского колледжа. Он спросил у мальчика, умеет ли он извлекать квадратные корни. Андре ответил, что нет, но зато он умеет интегрировать. Вскоре занятия прекратились, потому что учитель заявил, что его знаний не хватает для обучения такого ученика.

Безмятежная юность Ампера закончилась, когда ему было 14 лет. Грянула Великая французская революция, которую потом называли «буржуазной». Но вначале она не была такой, поскольку на ее знаменах наряду со «свободой» и «братством» было и «равенство», что не могло понравиться богатым людям. И в 1793 году в Лионе вспыхнул мятеж против якобинской диктатуры. Мятеж был жестоко подавлен. Как участник и один из руководителей мятежа, отец Ампера был гильотинирован, а все имущество семьи было конфисковано.

Восемнадцатилетний юноша тяжело пережил смерть отца и был вынужден думать о средствах к существованию. Он стал частным преподавателем математики, а через несколько лет – преподавателем физики и химии в гимназии маленького городка. С этого времени началась преподавательская деятельность Ампера, продолжавшаяся всю его жизнь. Основной целью этой деятельности он поставил перестройку преподавания физики в средней и высшей школе.



POURIER,
(Joseph)

Membre de la Légion d'honneur.

Membre de l'Académie des sciences.
Né le 12 mai 1768 à Auxerre (Yonne).
Mort le 7 mai 1830 à Paris.

Жан-Батист Фурье

Амперу удалось заинтересовать своими идеями математика и физика Жан-Батиста Фурье (1768–1830), который при Наполеоне занимался не только наукой, но и административной работой. В 1802 году Фурье стал президентом (губернатором) департамента Изер, где в это время жил и работал Ампер. Он способствовал назначению Ампера в 1804 году преподавателем, а в 1807 году профессором знаменитой Политехнической школы в Париже,



Электрический двигатель, подаренный Джоулем Кельвину в 1842 году

созданной для подготовки высокообразованных технических специалистов, обладающих глубокими знаниями физико-математических наук.

Первые 10 лет работы Ампера в Политехнической школе были омрачены тяжелыми событиями в его личной жизни – смертью первой жены, неудачной второй женитьбой на вздорной и ограниченной особе и смертью горячо им любимой матери. В эти годы он занимается только математикой. Его работы по теории рядов и дифференциальным уравнениям увенчались избранием в Академию наук по математическому отделению.

Затем математик Ампер стал заниматься химическими исследованиями. Независимо от Авогадро он открыл закон равенства молярных объемов различных газов и сделал первую попытку классификации химических элементов на основе их свойств. Уточняя молярные веса (точнее – молярные массы) химических соединений, Ампер открыл, что в плавиковой кислоте содержится неизвестный элемент. Он предложил назвать его фтором (по-гречески *разрушающий*).

Но ученым, получившим мировую известность, он стал благодаря своим исследованиям в области электромагнетизма. Годом рождения этой науки стал 1820 год, а следствием этого стало превращение 19 века, «века пара», в современную эпоху, названную «веком электричества». Приводить в движение станки на заводах постепенно стали не паровые машины или турбины, а электродвигатели.

Эрстед и его открытие

Пятнадцатого февраля 1820 года датский ученый Ганс Христиан Эрстед (1777–1851), профессор химии Копенгагенского университета, читал студентам очередную лекцию по натурфилософии. Этот предмет (с греко-римским названием) объединял физику, химию, биологию и геологию. Темой лекции было тепловое действие электрического тока, который тогда называли электрическим конфликтом (по-



Ганс Христиан Эрстед

ложительного и отрицательного электричества или анода и катода электрической батареи).

На столе перед лектором стояла электрическая батарея (вольтов столб), лежали медные стержни, зажимы для их подсоединения к батарее и другие предметы, среди которых была и магнитная стрелка (как бы большой компас). Стержни, подключенные к батарее, нагревались и можно было с их помощью разогреть и даже вскипятить воду – прообраз электрической плитки. Сегодня в таком опыте не было бы ничего интересного. Но ведь это происходило тогда, когда единственным источником быстрого нагрева был только огонь – до закона Джоуля–Ленца было еще далеко.

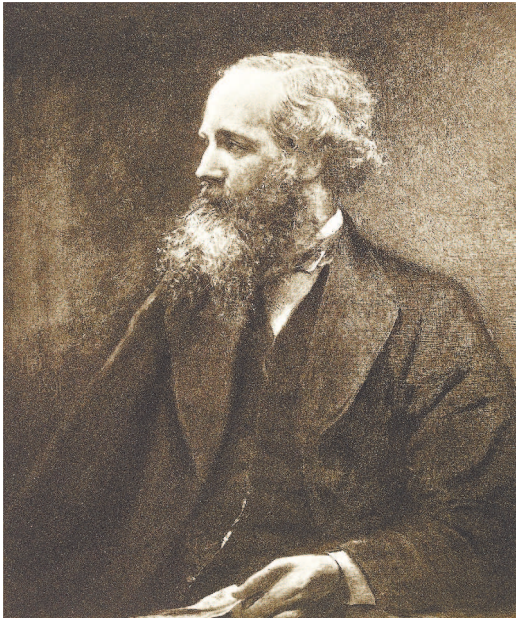
Случайно магнитная стрелка оказалась вблизи от одного из стержней. И один из студентов заметил, что при включении тока стрелка дрогнула и немного отклонилась от своего «законного» направления на север. Сам Эрстед вначале этого и не заметил, он говорил о тепловом действии тока. Но когда студент рассказал о своем

наблюдении, Эрстед заинтересовался. Сначала он решил, что на стрелку повлияло механическое воздействие рубильника при нажиме на него. Стол задрожал, и это передалось магнитной стрелке. Однако когда ее поместили на отдельный стол, явление повторилось.

Эрстед оставил все опыты, которыми он занимался, и стал изучать это совершенно новое и неожиданное явление. Эрстед заказал более мощную батарею и стержни из более чистой меди. Фактически он получил значительно более сильный ток в стержнях, и магнитная стрелка стала реагировать на ток гораздо сильнее. При включении тока она поворачивалась почти на 90° и показывала уже не на север, а на восток или запад. Она располагалась по касательной к воображаемым окружностям, центры которых находились на стержне с током. Действие тока на стрелку было как бы боковым.

Эрстед понимал, что он открыл неизвестное науке явление. Согласно господствовавшим тогда взглядам, электричество и магнетизм – это разные явления. Магнетизм проявляется только для веществ, содержащих железо, тогда как электрические силы действуют между предметами, сделанными из самых разных материалов. Но опыты свидетельствовали о связи между электричеством и магнетизмом. Эта связь оказалась непростой, и описать ее математическими формулами Эрстед не сумел. Он только представил чертежи и рисунки явления поворота стрелки. А 21 июля 1820 года в Копенгагене вышла из печати четырехстраничная брошюра на латыни, названная Эрстедом «Опыты, касающиеся действия электрического конфликта на магнитную стрелку». Понимая всю важность открытия, Эрстед в тот же день разослал брошюру во все европейские научные учреждения и научные журналы.

После опубликования своих трудов Эрстед совершил путешествие по научным центрам Европы. Его встречали с большим энтузиазмом и приняли в почетные члены многих академий наук. В частности, он



Джеймс Клерк Максвелл

стал почетным членом Петербургской академии. На родине Эрстед был удостоен звания государственного советника, получил дворянство и много заслуженных наград. Но слава не вскружила ему голову. Он продолжал заниматься электрическими явлениями, задолго до Максвелла предсказал, что свет представляет собой электромагнитное явление, поскольку на него действуют и электричество, и магнетизм. Он был блестящим лектором и популяризатором науки. Организовал общество по распространению естествознания, читал специальные просветительские лекции для женщин. Материально поддерживал своего тезку, маленького Ганса Христиана, будущего великого датского писателя Ганса Христиана Андерсена.

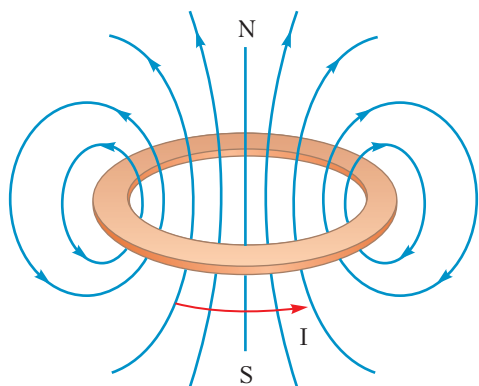
Эрстед становится национальным героем. Когда он скончался в марте 1851 года, в последний путь его провожали двести тысяч датчан во главе с королевской семьей, дипломатами, правительственными деятелями, учеными и студентами. Датчане ощущали его смерть как личную потерю. Он стал первым датчанином, известным всему миру, не считая Гамлета, «литературного» датчанина.

Рождение электродинамики

После того, как в июле 1820 года Эрстед разослал свою брошюру, события развивались в таком темпе, который был непредставим для неторопливой науки того времени. Работа Эрстеда появилась в начале августа в Женеве, где в это время находился французский физик Франсуа Араго. Когда он повторил опыт Эрстеда в Женевском университете, то среди присутствующих ученых раздался возглас: «Это переворот!». Потрясенный Араго спешно возвращается в Париж и 4 сентября делает доклад на заседании Академии. Хотя Париж ближе к Копенгагену, чем Женеве, брошюра Эрстеда здесь еще не получена. С особым вниманием слушает сообщение Араго академик Ампер. Он чувствует, что должен принять от Эрстеда эстафету его открытия. И начинает действовать.

Всего лишь две недели понадобились Амперу, чтобы сделать эпохальное открытие: всякий электрический ток обладает магнитным свойством, которое может проявиться как воздействие этого свойства на другой ток, а не только на магнитную стрелку. Магнетизм может двигать провод с током. На заседании Академии наук 21 сентября Ампер заявил: «Я свел все магнитные явления к чисто электрическим явлениям». А еще через неделю он продемонстрировал, что две спирали с током (он назвал их *соленоидами*) взаимодействуют точно так же, как постоянные магниты. Если же внутри спиралей вставить железные стержни, то взаимодействие соленоидов усиливается в сотни раз. Ампер объяснил это тем, что внутри железа существуют *молекулярные токи*, похожие на токи в соленоидах. Множество этих круговых токов создает магнитную силу постоянных магнитов даже и без спиральной обмотки, по которой течет ток.

Ампер установил, что магнитные силы, действующие на электрические токи, не совсем обычны, как это и подозревал Эрстед. В отличие от кулоновских сил, они действуют боковым образом (*правило левой руки*). В частности, магнитное влия-



Виток с током, вращающийся в магнитном поле Земли

ние соленоида с током (или постоянного магнита) может заставить вращаться кольцевой ток, создавая не только силу, но и момент силы. И Ампер продемонстрировал прообраз электромотора – проволочное кольцо с током от батареи, которое вращается в магнитном поле Земли.

Боковое действие магнитной силы взаимодействия между двумя параллельными проводами приводит к тому, что если направления токов в двух параллельных проводах совпадают, то провода притягиваются друг к другу. А если направления токов противоположны, то провода отталкиваются. Ампер измерил силы взаимодействия для притяжения и отталкивания двух параллельных токов. Они оказались прямо пропорциональны произведению величин токов I_1 и I_2 и обратно пропорциональны расстоянию между проводами r .

Основываясь на измерениях Ампера, Био и Савар сформулировали для величины удельной силы взаимодействия, т.е. вектора магнитной индукции, что

$$\Delta B \sim \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}.$$

В этом выражении $I \Delta l$ – это элемент тока, рождающего магнитную силу, r – расстояние от элемента тока до той точки пространства, где определяется магнитная индукция ΔB от этого элемента тока, α – угол между векторами $\Delta \vec{l}$ и $\vec{r}$. Математик, физик и астроном Пьер Лаплас (1749–1828) придал закону Био–Савара

изящную математическую форму, введя понятия бесконечно малого (дифференциального) векторного элемента $I \vec{dl}$ и бесконечно малого вектора магнитной индукции $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = k \frac{[I \vec{dl} \times \vec{r}]}{r^3},$$

а также для модуля вектора дифференциальной магнитной индукции:

$$dB = k \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}.$$

Коэффициент k в этих выражениях определяется из опыта (и зависит от выбора системы единиц). Эти выражения в учебниках по физике носят уже тройное имя: закон Био–Савара–Лапласа. Ампер тут же заметил, что с помощью интегрирования можно установить еще более общий закон для определения магнитной индукции. Как математик, он назвал этот общий закон *теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции* и показал, что из этого общего закона можно получить любые выражения для магнитных сил и моментов этих сил.

В 1827 была издана монография Ампера, подводящая итог всем его работам. Он назвал ее «Теория электродинамических



Электродвигатели разной мощности

явлений, выведенная исключительно из опыта». Многочисленные последующие переиздания этой книги назывались просто «Электродинамика». Не только это слово впервые прозвучало в физике. Ампер ввел и много других терминов – *электростатика*, *напряжение*, *электродвижущая сила*. Но он не претендовал на изобретение электродвигателя, хотя и описал принцип его действия, он не видел перспектив его применения. Слишком слабый ток давали тогдашние батареи и слишком быстро разряжались.

Всего лишь два года оставалось до великого открытия Фарадея закона электромагнитной индукции, на основе которого через полвека Эдисоном и Тесла были созданы генераторы электрического тока. А другие изобретатели создали электродвигатели, принцип работы которых Ампер предложил за полвека до этого.

Неизвестно, как отнесся Ампер к открытию Фарадея, он в это время перестал заниматься физикой. Главной причиной этого было тяжелое заболевание горла и легких, ограничившее возможность профессорской деятельности. Он мог теперь только контролировать преподавание математики и естественных наук, но он не мог не творить. Он участвовал в спорах о развитии жизни на Земле, предвосхищая при этом будущую теорию Дарвина. Однако больше всего в эти последние годы жизни его стала занимать философия науки и, в первую очередь, классификация наук. Он высказал мысль о том, что в будущем должна появиться наука об общих закономерностях процессов управления и дал название такой науке – *кибернетика*. Через сто с лишним лет его предвидение оправдалось.

Умер Ампер во время одной из своих поездок по проверке преподавания физики в лицеях Марселя. Там он и был похоронен. Но впоследствии, по завещанию его сына, прах был перезахоронен в Париже, рядом с могилой сына.



Памятник Амперу в Лионе

Памятники Амперу есть в Париже, Лионе и других городах. Его именем, кроме единицы силы тока, названы во французских городах улицы, площади, школы и лицеи, станция метро в Лионе, электрический паром в Норвегии и микроархитектура графического процессора.

Но главная память – в словах Максвелла об Ампере: «Экспериментальное исследование, посредством которого Ампер установил закон взаимодействия электрических токов, представляет собой одно из самых блестящих достижений науки. Его работа совершенна по форме, безупречна по точности и выражена в формуле, из которой можно вывести все явления и которая должна оставаться основной формулой электродинамики».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2838–M2841 предлагались на XLVI Турнире городов.

Задачи Ф2845–Ф2848 предлагались на заключительном этапе LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи M2838–M2841, Ф2845–Ф2848

M2838. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, несколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нем стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%.

А. Шаповалов

M2839. Дано натуральное число k . В стране, валюта которой – тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платеж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное значение n ?

А. Шаповалов

M2840. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 1). Биссектрисы углов B и C

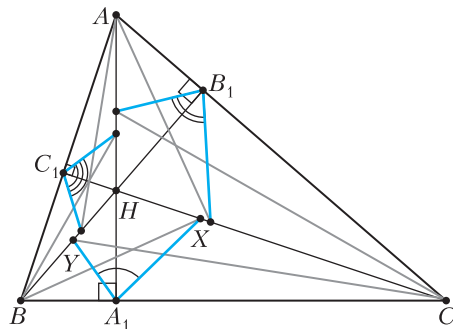


Рис. 1

треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α . Аналогично определим β и γ . Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.

А. Доledenok

M2841*. Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в черный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася – к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?

А. Грибалко

Ф2845. Из пункта A , расположенного на одном берегу реки шириной l , переправляется на противоположный берег небольшая моторная лодка (рис. 2). Берега реки

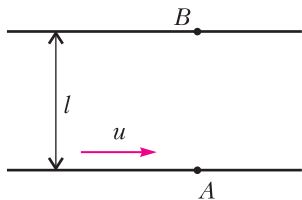


Рис. 2

параллельны друг другу. Скорость течения реки везде одинакова и равна u . На противоположном берегу реки на одном перпендикуляре к берегам с пунктом A расположен пункт B . Скорость лодки относительно воды постоянна по величине и равна $2u$, а ее вектор в течение всего времени переправы перпендикулярен прямой BC , где C — центр лодки. В некоторый момент времени t_1 скорость лодки относительно берега перпендикулярна линии берега.

- 1) В каком направлении лодка начала движение из пункта A : по течению или против течения?
- 2) Найдите угол ABC в момент времени t_1 .
- 3) На каком расстоянии от пункта B будет находиться лодка, когда она достигнет противоположного берега реки?
- 4) На каком расстоянии от пункта B будет находиться лодка в момент времени t_1 ?
- 5) Найдите радиус кривизны траектории лодки в системе отсчета берега для двух случаев: а) в момент старта из пункта A ; б) в момент времени t_1 .

А.Шишкина

Ф2846. На горизонтальной поверхности находятся два тела: длинная доска высотой h и однородный цилиндр радиусом $R = 2h$, которые касаются друг друга (рис. 3). Масса цилиндра равна M . Коэффициенты трения между цилиндром и поверхностью,

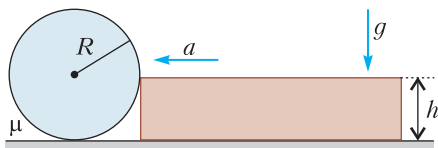


Рис. 3

а также между самими телами одинаковы и равны μ . Доска движется с постоянным горизонтальным ускорением a , направленным перпендикулярно линии контакта с цилиндром. Ускорение свободного падения равно g . При каких значениях ускорения a доски цилиндр не будет поворачиваться вокруг горизонтальной оси, если коэффициент трения μ может принимать любые значения больше нуля?

А.Ившин, Е.Васенин, А.Вергунов

Ф2847. В цилиндрическом сосуде, установленном вертикально в поле силы тяжести, под массивным горизонтальным поршнем массой $m = 100$ кг содержится одноатомный идеальный газ. Над поршнем — вакуум. Поршень находится в равновесии и может перемещаться вдоль стенок сосуда практически без трения. Поршень закрепляют в этом равновесном положении, после чего кладут на него гирю массой M . Затем поршень освобождают. При дальнейшем движении поршня с гирей его минимальное расстояние $h_{\min}$ до дна сосуда в два раза меньше исходного расстояния $h_0 = 1,0$ м. Определите:

- 1) массу гири M ;
 - 2) модуль максимального ускорения $a_{\max}$ поршня с гирей в процессе движения;
 - 3) модуль максимальной скорости $v_{\max}$ поршня с гирей в процессе движения.
- Через длительное время поршень остановился.
- 4) Найдите расстояние h до дна сосуда, на котором будет находиться поршень в состоянии нового термодинамического равновесия.

Теплоемкость сосуда и поршня пренебрежимо мала, теплоотдача в окружающую среду отсутствует. При движении поршня от исходного положения до его первой остановки процессы в газе можно считать равновесными. Масса газа много меньше массы поршня. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

А.Аполонский

Ф2848. В бесконечной электрической цепи, фрагмент которой представлен на рисунке 4, каждая треугольная ячейка содержит три источника с одинаковыми

внутренними сопротивлениями r , но разными ЭДС $\mathcal{E}$, $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$, причем полярность подключения источников с одной и той же ЭДС периодически меняется.

1) Чему равны разности потенциалов $\varphi +$ и $\varphi -$ между плюсом и минусом каждого источника в данной цепи?

2) Определите силы токов через все источники в данной цепи.

3) Какое сопротивление R_1 покажет омметр при подключении к плюсу и минусу источника с ЭДС $\mathcal{E}$, находящегося в данной цепи? Какие сопротивления R_2 и R_3 покажет прибор, если сделать то же самое с источниками с ЭДС $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$ соответственно? Будут ли зависеть показания омметра от полярности его подключения?

4) Один из источников с ЭДС $2\mathcal{E}$ заменили другим источником с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r/2$. Какова в этом случае будет сила тока I , текущего через замененный источник?

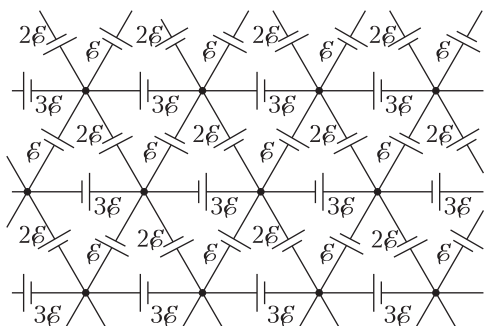


Рис. 4

Величины $\mathcal{E}$ и r считайте известными. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

А.Киреев, Л.Колдунов

Решения задач M2826–M2829, Ф2833–Ф2836

M2826. В квадрате $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки E и F так, что $BE = BF$. Пусть L – середина EF , N – середина DF , O – центр квадрата, а K – точка пересечения прямых AL и DF (рис. 1). Докажите, что точки C , K , L , O , N лежат на одной окружности.

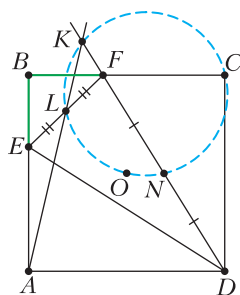


Рис. 1

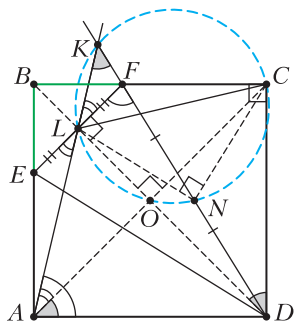


Рис. 2

Из соображений симметрии ясно, что точка L лежит на диагонали BD (рис. 2). Угол $\angle LOC$ прямой, так как его стороны лежат на диагоналях квадрата. Точки C , F , L , D лежат на одной окружности с диаметром FD , и, тем самым, с центром N . Поэтому $\angle LNC = 2\angle LDC = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Значит, точки O и N лежат на окружности с диаметром LC .

Далее, по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle LKF = \angle LFD - \angle KLF = \angle LED - \angle KLF.$$

Так как $EF \parallel AC$, а точки L , E , A , D лежат на одной окружности (с диаметром DE), то

$$\angle LKF = \angle LED - \angle KLF =$$

$$= \angle LAD - \angle KAC = \angle CAD = 45^\circ.$$

Поскольку $ON \parallel BC$, имеем $\angle LON = 135^\circ$. Следовательно, $\angle LKN + \angle LON = 180^\circ$, т.е. точка K лежит на описанной окружности четырехугольника $LONC$. Таким образом, все пять точек C , K , L , O , N лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Замечание. В предложенной конструкции можно обнаружить еще несколько любопытных фактов. Например, из доказанно-

го равенства $\angle LKF = 45^\circ$ следует, что точки K, B, F, L лежат на одной окружности, откуда $\angle BKD = 90^\circ$. Далее, пусть X — точка пересечения прямых BK и CD . Тогда наша окружность ($CKLON$) является окружностью девяти точек треугольника BXD , поскольку она проходит через середину O стороны BD , а также через основания высот BC и DK . Читатель может продолжить список интересных наблюдений.

А.Палеев

M2827. Про положительные числа a, b, c известно, что из отрезков длиной $a^{2024}, b^{2024}, c^{2024}$ можно составить треугольник. Докажите, что можно уменьшить одно из чисел a, b, c в 2024 раза и получить числа a', b', c' так, чтобы из отрезков с длинами a', b', c' также можно было составить треугольник.

Положим $n = 2024$. Без ограничения общности будем считать, что $a \leq b \leq c$. По условию $a^n + b^n > c^n$.

Уменьшим a в n раз, так что $a' = \frac{a}{n}, b' = b, c' = c$. Так как $a' \leq b' \leq c'$, нам достаточно проверить одно неравенство треугольника: $a' + b' > c'$. Подставим: $a' + b' = \frac{a}{n} + b$. Возведем в n -ю степень и разложим по биному:

$$(a' + b')^n = \left(b + \frac{a}{n}\right)^n = b^n + n \cdot b^{n-1} \cdot \frac{a}{n} + \dots,$$

где троеточие — это сумма нескольких положительных слагаемых. Отсюда

$$(a' + b')^n > b^n + b^{n-1}a \geq b^n + a^n,$$

что больше c^n . Окончательно получаем $(a' + b')^n > c^n = (c')^n$, откуда $a' + b' > c'$.

Л.Шатунов

M2828. Максим задал многочлен $f(x)$ степени n . Саша хочет отгадать его (зная n). За ход Саша может назвать некоторый отрезок $[a; b]$, и Максим назовет в ответ максимальное значение $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Сможет ли Саша отгадать $f(x)$ за конечное количество шагов?

Ответ: сможет.

Саше достаточно назвать $n + 1$ непересекающихся отрезков. Докажем, что максимальные значения многочлена на этих отрезках

однозначно задают f . Предположим противное: пусть нашлись два многочлена f и g с одинаковыми максимумами. Пусть один из названных отрезков это $[a; b]$, и пусть максимальное значение M на этом отрезке для $f(x)$ достигается в точке $c \in [a; b]$, а для $g(x)$ — в точке $d \in [a; b]$. Тогда, поскольку $g(c) \leq M$ и $f(d) \leq M$, получаем, что $f(c) - g(c) \geq 0$, $f(d) - g(d) \leq 0$. Значит, по теореме о принятии промежуточного значения непрерывной функцией, на отрезке между точками c и d найдется точка x_0 , для которой $f(x_0) - g(x_0) = 0$. Аналогично, для каждого названного Сашей отрезка в нем найдется корень уравнения $f(x) - g(x) = 0$. Так как отрезки не пересекаются, эти корни различны. Получается, что многочлен $f(x) - g(x)$ степени не более n имеет не менее $n + 1$ корней. Значит, этот многочлен тождественно равен 0, а тогда f и g — тождественно равные многочлены. Задача решена.

Существуют и другие (в том числе конструктивные) алгоритмы восстановления загаданного многочлена f .

Например, идея может быть такой. Если Саша назовет $2n$ непересекающихся отрезков, то хотя бы на $n + 1$ из них производная f' будет сохранять знак $f' \geq 0$ или $f' \leq 0$ (так как если f' не тождественно равна 0, то у нее не более $n - 1$ корней) и f будет на этих отрезках монотонной функцией. На таких отрезках максимальные значения функции совпадают со значением f в одном из концов отрезка. Если зафиксирован выбор $n + 1$ отрезков монотонности и на каждом из них сделан выбор левого или правого конца, в котором определено значение f , то мы получаем ситуацию, когда знаем значения многочлена в заданных $n + 1$ точках. Но тогда его можно однозначно восстановить (например, по интерполяционной формуле Лагранжа). Указанных выборов (отрезков и концов) — конечное количество $\left(C_{2n}^{n+1} \cdot 2^{n+1}\right)$. Тем самым, у нас конечное множество многочленов-кандидатов. Теперь Саше достаточно назвать отрезок, на котором множества значений этих многочленов-кандидатов не пересекаются (этот отрезок можно взять в

малой окрестности любой точки, в которой значения всех многочленов-кандидатов различны).

М.Дидин

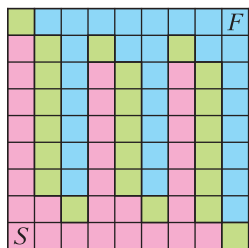
M2829*. Дан клетчатый квадрат $3m \times 3m$, где $m \geq 2$ – натуральное число. Лягушка сидит в клетке S , находящейся в левом нижнем углу. Она хочет попасть в клетку F , находящуюся в правом верхнем углу. Лягушка может перепрыгивать вправо или вверх в соседнюю клетку. Некоторые клетки липкие. Попав в липкую клетку, лягушка не сможет двигаться дальше. Множество клеток X назовем блокирующим, если лягушка не сможет попасть из S в F в случае, если липкими являются в точности клетки множества X . Блокирующее множество назовем минимальным, если при удалении из него любой клетки оно перестает быть блокирующим.

а) Докажите, что найдется минимальное блокирующее множество, в котором не менее $3m^2 - 3m$ клеток.

б) Докажите, что в любом минимальном блокирующем множестве не более $3m^2$ клеток.

Клетки заданного блокирующего множества X покрасим в зеленый цвет; в красный цвет покрасим все клетки, в которые можно попасть из клетки S (не заходя в клетки множества X); в синий цвет покрасим все клетки, из которых можно попасть в клетку F (не заходя в клетки множества X).

а) Предъявим пример минимального блокирующего множества, состоящего из $3m^2 - 2m + 2$ клеток. На рисунке показан случай $m = 3$: в верхней строке покрасим зеленым клетку 1 (самую левую); во второй строке – клетки 2, 4, 7, ... (далее все клетки с номерами, дающими оста-



ток 1 при делении на 3); в строках с третьей по $(3m - 2)$ -ю покрасим зеленым клетки 2, 5, 8, ... (все клетки с номерами, дающими остаток 2 при делении на 3); в последних двух строчках делаем покраску симметрично первым двум строкам относительно центра квадрата. Нетрудно видеть, что этот пример удовлетворяет условию, и здесь зеленым покрашено $3m^2 - 2m + 2$ клеток.

б) Обозначим через r , g , b количества красных, зеленых и синих клеток соответственно. Поскольку X – блокирующее множество, ни одна из клеток не покрашена в более чем один цвет, так что $r + g + b \leq 9m^2$.

Проведем из каждой красной клетки стрелку в соседнюю клетку справа (если она есть) и в соседнюю клетку сверху (если она есть). Тогда количество A проведенных стрелок не более $2r$. С другой стороны, концом каждой стрелки служит либо красная клетка, либо зеленая клетка. При этом в каждую красную клетку, за исключением S , входит хотя бы одна стрелка (так как в нее можно по стрелкам пройти из S). В каждую зеленую клетку также входит хотя бы одна стрелка, иначе выбрасывание этой зеленой клетки не изменит множества красных клеток, в частности, по-прежнему из S нельзя будет добраться до F – противоречие с минимальностью нашего блокирующего множества. Значит, количество стрелок не менее чем $r - 1 + g$. Имеем оценки на A сверху и снизу: $r - 1 + g \leq A \leq 2r$, откуда $g \leq r + 1$.

Аналогичным рассуждением для синих клеток получаем оценку $g \leq b + 1$. Тогда

$$3g = g + g + g \leq g + (r + 1) + (b + 1) = (g + r + b) + 2 \leq 9m^2 + 2.$$

$$\text{Отсюда } g \leq \left\lfloor \frac{9m^2 + 2}{3} \right\rfloor = 3m^2.$$

Наша задача решена, однако точный ответ на вопрос о наибольшем возможном количестве клеток в минимальном блокирующем множестве мы не получили. Читатель может подумать, можно ли еще улучшить оценку или пример.

Ф2833. Длина подводной лодки $L = 100$ м, диаметр корпуса $D = 10$ м, толщина стальных стенок корпуса $h = 10$ см. Модуль Юнга стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Подводная лодка погрузилась на глубину $H = 200$ м и не движется относительно воды. Как изменилась ее длина? Лодка пришла в движение со скоростью $v = 10$ м/с относительно воды. Оцените величину дополнительного изменения длины лодки.

Плотность воды ρ по величине близка к значению 10^3 кг/м³. На глубине 200 м давление воды сжимает лодку, а стальные стенки сдерживают внешнее давление. Сила давления воды равна произведению давления $\rho g H$ на площадь поперечного сечения лодки $\pi D^2/4$, которое тоже немного изменилось, но этим изменением мы пренебрежем. Сила «сдерживания» со стороны стенок лодки равна $\pi D h \cdot E \Delta L/L$. Итак,

$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot \rho g H = \pi D h \cdot E \frac{\Delta L}{L}.$$

Из этого соотношения находим изменение длины лодки:

$$\Delta L = \frac{(D/4) \rho g H L}{h E} = 2,5 \text{ см.}$$

Если двигатели лодки крутят гребные винты, расположенные на одном конце лодки, то вода, оказывающая сопротивление движению лодки, давит с другого конца, и эти силы дополнительно сдавливают лодку. Величина дополнительного давления пропорциональна произведению плотности воды на квадрат скорости движения, т.е. величине порядка 10^5 Па. Это в 20 раз меньше давления слоя воды над лодкой, поэтому дополнительное укорочение длины лодки будет равным по порядку величины $2,5 \text{ см}/20 \approx 1 \text{ мм}$. А с учетом того, что корпус лодки сделан обтекаемым, нашу оценку нужно уменьшить в 3–4 раза. Таким образом, реально корпус дополнительно укоротится приблизительно на 0,3 мм.

В.Подводный

Ф2834. Две параллельные друг другу плоские тонкие горизонтальные металли-

ческие пластины (листы) находятся на расстоянии L (порядка 1 см) друг от друга. Нижний лист лежит на поверхности из льда при температуре 0°C . Верхний лист является дном сосуда, в котором кипит вода, и его установившаяся температура равна 100°C . Между этими металлическими листами находится воздух при атмосферном давлении. Горизонтальные размеры листов очень большие (много больше 1 см). Температура воздуха между листами зависит от расстояния до нижнего листа. Какой формулой описывается эта зависимость? Воздух прозрачен для всех длин волн. Листы абсолютно черные, т.е. поглощают все излучение, которое на них падает. Какова мощность теплопередачи от верхнего листа к нижнему, приходящаяся на 1 м^2 площади? Для справки: теплопроводность воздуха при атмосферном давлении и при температуре 0°C равна $0,0244 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$.

В данном случае работают два механизма теплопередачи: излучение и теплопроводность. Конвекции нет, потому как температура воздуха с высотой растет. Согласно условию, воздух прозрачен; это означает, что работа двух механизмов теплопередачи может рассматриваться независимо. Проще всего, естественно, найти мощность потока тепла, который обеспечивается механизмом излучения:

$$W = \sigma (T_{\text{верх}}^4 - T_{\text{нижн}}^4) = 782,6 \text{ Вт}/\text{м}^2 \approx \approx 783 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Здесь температуры берутся по шкале Кельвина, а $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана.

Известно, что длина свободного пробега молекул воздуха в любом месте между листами значительно меньше геометрических размеров листов и расстояния между ними. Поскольку состояние газа во времени стабилизировано, то это означает, что и запас энергии, и импульс газа между листами со временем не изменяются, т.е. процесс стационарный. А раз так, то давление

во всех местах газа должно быть одинаковым:

$$p = nkT = \text{const.}$$

Длина свободного пробега λ молекул определяется концентрацией n и размером (диаметром) D молекул:

$$\lambda = (\sqrt{2}n\pi D^2)^{-1} = B T = \Delta x.$$

Здесь $B = k(\sqrt{2}p\pi D^2)^{-1}$, k – постоянная Больцмана, а p – давление газа. Поэтому «шаг», или элементарное смещение, по координате вверх должен выбираться из этого соотношения. Поток молекул сверху-вниз компенсируется потоком молекул снизу-вверх, поэтому выполняется соотношение

$$n_x \sqrt{T_x} = n_{x+\lambda} \sqrt{T_{x+\lambda}} = A.$$

И, в дополнение, в любом сечении сохраняется поток тепла:

$$n_x T_x^{3/2} - n_{x+\lambda} T_{x+\lambda}^{3/2} = \text{const.}$$

А с учетом равенства во всех местах давления воздуха можно получить такое соотношение:

$$\Delta T_\lambda \cdot A = \text{const.}$$

Это означает, что на длине свободного пробега молекул изменение температуры одинаково. Следовательно, расстояние между листьями L связано с температурами листов следующим образом:

$$L = (T_{\text{верх}}^2 - T_{\text{нижн}}^2) \cdot \text{const.}$$

Иными словами, температура растет с расстоянием x от холодного нижнего листа по закону

$$T_x = \sqrt{T_{\text{нижн}}^2 + \frac{x(T_{\text{верх}}^2 - T_{\text{нижн}}^2)}{L}}.$$

Из этой формулы получаем

$$2\Delta T T_x = \Delta x \frac{T_{\text{верх}}^2 - T_{\text{нижн}}^2}{L}.$$

Следовательно, градиент температуры вблизи нижнего листа равен

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_{\text{верх}}^2 - T_{\text{нижн}}^2}{2LT_{\text{нижн}}} = 118 \text{ К/см.}$$

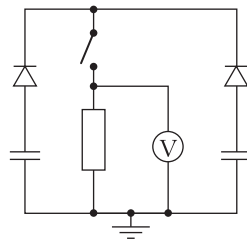
При таком градиенте температур мощность потока тепла на 1 м^2 , обеспечиваемая теплопроводностью, составляет 288 Вт/м^2 .

А суммарная мощность потока тепла от верхнего листа к нижнему равна

$$288 \text{ Вт/м}^2 + 783 \text{ Вт/м}^2 = 1071 \text{ Вт/м}^2.$$

С.Варламов

Ф2835. В приведенной электрической схеме (см. рисунок) диоды идеальные, т.е.



открываются при напряжении, равном нулю, и в режиме пропускания тока имеют нулевое внутреннее сопротивление. Сначала ключ разомкнут, а одинаковые по емкости C конденсаторы заряжены до напряжений $+100 \text{ В}$ и $+50 \text{ В}$. Произведение CR равно 1 секунде. Через какое время после замыкания ключа идеальный вольтметр покажет напряжение 25 В ?

После замыкания ключа в момент времени $t = 0$ сначала ток пойдет только через диод, подключенный к конденсатору, заряженному до напряжения 100 В . В тот момент t_1 , когда напряжения на конденсаторах станут одинаковыми и равными 50 В , откроется и второй диод. Промежуток времени t_1 равен

$$t_1 = CR \ln 2.$$

С этого момента разряжаются сразу два конденсатора. Напряжение тоже должно уменьшиться в два раза, поэтому второй промежуток времени будет в два раза больше первого. Таким образом, от момента замыкания ключа до момента, когда вольтметр покажет 25 В , пройдет время

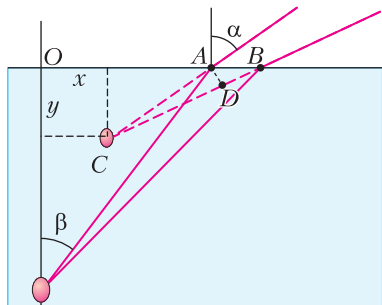
$$\Delta t = 3t_1 = 3CR \ln 2 = 2,08 \text{ с.}$$

В.Идеалов

Ф2836. Небольшой предмет находится на дне прозрачного водоема глубиной $h = 1 \text{ м}$. По какой траектории движется его наблюдаемое из воздуха изображение

при перемещении наблюдателя параллельно поверхности водоема? Каково максимальное расстояние между наблюдаемыми изображениями? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

В качестве единицы длины используем глубину водоема h (см. рисунок). Точку на



поверхности воды в точности над предметом будем считать началом координат. Введем безразмерные координаты x и y , через которые реальные координаты X по горизонтали вдоль поверхности воды и Y по вертикали вниз от начала координат выражаются такими соотношениями:

$$X = xh, \quad Y = yh.$$

Изображение предмета формируется на пересечении преломленных лучей. Как следует из рисунка,

$$OA = \operatorname{tg} \beta, \quad AB = \frac{d\beta}{\cos^2 \beta}.$$

Запишем закон преломления:

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

откуда (после дифференцирования) следует

$$\cos \alpha d\alpha = n \cos \beta d\beta.$$

Тогда

$$AC = \frac{AD}{d\alpha} = \frac{AB \cos \alpha}{d\alpha} = \frac{d\beta \cos \alpha}{d\alpha \cos^2 \beta} = \frac{\cos^2 \alpha}{n \cos^3 \beta}.$$

Используя следующие отсюда соотношения

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - n^2 \sin^2 \beta = n^2 \cos^2 \beta - (n^2 - 1),$$

а также тождество

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta,$$

найдем выражения для x и y :

$$x = OA - AC \sin \alpha =$$

$$= \operatorname{tg} \beta - \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{n \cos^3 \beta} = (n^2 - 1) \operatorname{tg}^3 \beta,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{n^2 - 1} \right)^{2/3} = \operatorname{tg}^2 \beta;$$

$$y = AC \cos \alpha = \frac{\cos^3 \alpha}{n \cos^3 \beta},$$

следовательно,

$$(ny)^{2/3} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = n^2 - \frac{n^2 - 1}{\cos^2 \beta} = 1 - (n^2 - 1) \left(\frac{x}{n^2 - 1} \right)^{2/3}.$$

Таким образом, безразмерные координаты изображения связаны соотношением

$$\left(\sqrt{n^2 - 1} \cdot x \right)^{2/3} + (n \cdot y)^{2/3} = 1.$$

В переменных $\tilde{x} = \sqrt{n^2 - 1} \cdot x$ и $\tilde{y} = n \cdot y$ уравнение траектории изображения принимает вид

$$\tilde{x}^{2/3} + \tilde{y}^{2/3} = 1.$$

Это – уравнение *астроиды*, т.е. траектории точки на окружности единичного радиуса, которая катится без проскальзывания по внутренней поверхности окружности радиусом 4. Противоположные точки астроиды имеют координаты $\tilde{y} = 0$, $\tilde{x} = \pm 1$. Расстояние между этими точками равно 2, что соответствует расстоянию между изображениями, равному

$$\frac{2 \text{ м}}{\sqrt{n^2 - 1}} = 2,28 \text{ м}.$$

В.Пойманов

Задачи

1. Из пунктов А и Б, расстояние между которыми 24 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста со скоростями 5 км/ч и 3 км/ч соответственно. В это же время из пункта Б вылетела муха со скоростью 10 км/ч. Долетев до первого туриста, она поворачивает и летит обратно до встречи со вторым туристом, потом снова поворачивает и летит навстречу первому и так далее, пока туристы не встретятся. По направлению из А в Б дует ветер со скоростью 2 км/ч — он влияет на скорость мухи, но не на скорости туристов. Сколько километров пролетит муха?

Л.Смирнова



2. В групповом турнире Лиги чемпионов четыре команды играют в два круга (в каждом круге каждые две команды играют друг с другом один раз). За победу начисляется 3 очка, за ничью 1, за поражение 0. В следующий этап выходят две лучшие команды.



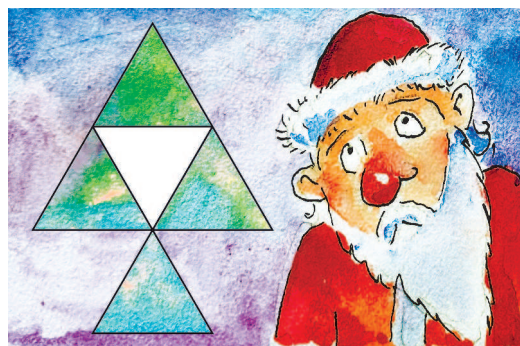
Эти задачи предлагались на XXIX Турнире имени А.П. Савина.

При равенстве очков у нескольких команд места определяются по сумме очков, набранных во встречах между ними. Если и эти показатели равны, то бросается жребий. Может ли случиться так, что какая-то команда обеспечит себе выход из группы после первого круга?

А.Заславский

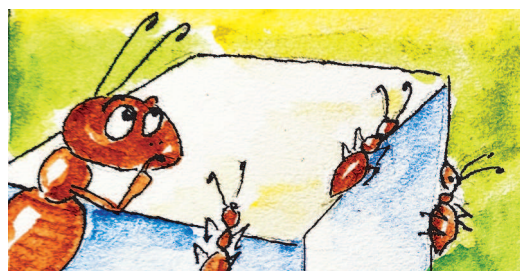
3. Разрежьте «елочку», составленную из четырех равносторонних треугольников, на три равные части.

К.Кноп



4. По каркасу единичного куба ползают муравьи. Они не могут находиться на расстоянии меньше 1 (по каркасу) друг от друга. При каком наибольшем количестве муравьев каждый сможет побывать во всех вершинах куба? (Муравьи могут как угодно менять скорость и стоять на месте, если нужно.)

Т.Голенищева-Кутузова



Как раскрывать скобки правильно?

А.АНТРОПОВ

КОГДА ВЫ РЕШАЕТЕ ЗАДАЧУ (особенно на олимпиаде или экзамене) и не можете свериться с ответом, важно уметь проверять свои рассуждения на правдоподобность. Как это вообще можно делать?

Есть несколько «стандартных» проверок. Например, если в задаче спрашивается о количестве способов, то ответом не может быть число $2^{100}/100$: ведь оно не является целым. В задаче по геометрии можно попробовать нарисовать достаточно точный чертеж (а лучше – несколько) и проверить, верен ли тот факт, который мы пытаемся доказать.

Часто сложнее заметить ошибку при раскрытии скобок. Например, как быстро проверить, что

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2?$$

Поскольку формула достаточно простая, можно подставить конкретные числа, например, $a = 2$, $b = 3$: $(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$. Но порой выражения, которые мы преобразуем, гораздо сложнее, и подставлять в них конкретные числа уже не так легко.

О том, как находить ошибки при раскрытии скобок, и пойдет речь в статье.

Комбинаторика и физика

Пример 1. При раскрытии скобок в выражении

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \quad (1)$$

осталось слагаемое abc . Докажем, что допущена ошибка.

Узнаете ли вы формулу (1)? Вы могли встречать ее (а точнее ее, поделенную на 16) в виде

$$p(p-a)(p-b)(p-c), \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Это подкоренное выражение в формуле Герона, выражающей площадь S треугольника через его стороны a , b и c :

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c) \times (a-b+c)(-a+b+c). \quad (2)$$

Так почему же после раскрытия скобок в правой части не может быть слагаемого abc ?

Ответить на этот вопрос нам помогут соображения размерности в физике. В чем измеряются величины a , b , c , величина S , величина abc , величина S^2 ? Ответы на эти вопросы суть метры, метры в квадрате, метры в кубе и метры в четвертой степени соответственно.

В левой части равенства (2) стоит величина, измеряющаяся в m^4 , точно так же и в правой части все выражения после раскрытия скобок должны измеряться в m^4 , поэтому слагаемого abc там быть не может.

Чтобы добавить этому рассуждению некоторой строгости, давайте немного по-особенному раскроем скобки в выражении $(x+y)(y+z)(z+x)$:

$$\begin{aligned} (x+y)(y+z)(z+x) &= \\ &= (xy+xz+yy+yz)(z+x) = xyz+xyx+ \\ &+ xzz+xzx+yyz+yux+yzz+yzx. \end{aligned}$$

Рассмотрим получившуюся сумму. Как в ней образовалось, например, слагаемое xzx ? Оно образовалось в результате умножения xz на x из третьей скобки:

$$\begin{aligned} (xy+xz+yy+yz)(z+x) &= \dots + xzx + \dots, \\ \text{а } xz \text{ в свою очередь образовалось из умножения } x \text{ из первой скобки на } z \text{ из второй скобки:} \\ (\underline{x}+y)(y+\underline{z})(z+x) &= \\ &= (xy+\underline{xz}+yy+yz)(z+x). \end{aligned}$$

Итак, xzx – это произведение x из первой скобки, z из второй скобки и x из третьей скобки:

$$(\underline{x}+y)(y+\underline{z})+(z+\underline{x})=\dots+xzx+\dots$$

Аналогично, слагаемое xyz – это произведение x из первой скобки, y – из второй, z – из третьей:

$$(\underline{x}+y)(\underline{y}+z)(\underline{z}+x)=xyz+\dots$$

а вот слагаемое yzx – это произведение y из первой скобки, z из второй и x из третьей:

$$(\underline{x}+\underline{y})(y+\underline{z})(z+\underline{x})=\dots+yzx.$$

С другой стороны, верно и обратное: если мы возьмем из первой, второй и третьей скобок некоторые слагаемые, то их произведение должно фигурировать после раскрытия скобок. Например,

$$\begin{aligned}(x + \underline{y})(\underline{y} + z)(z + \underline{x}) &= \\ &= (xy + xz + \underline{yy} + yz)(z + \underline{x}) = xyz + xyx + \\ &\quad + xzz + xzx + yuz + yux + yzz + yzx.\end{aligned}$$

В чем мы только что себя убедили?

Утверждение. Чтобы раскрыть скобки в некотором произведении, нужно рассмотреть все возможные способы выбрать из каждой скобки по слагаемому, перемножить выбранные слагаемые, а все полученные выражения сложить.

Теперь мы можем вернуться к ответу на вопрос, почему после раскрытия скобок в выражении (1) не может получиться слагаемое abc . Да просто потому, что каждое слагаемое после раскрытия скобок, как следует из утверждения, должно быть произведением четырех букв a , b или c , а не трех!

Другое следствие, которое можно получить из утверждения, состоит в том, что после раскрытия скобок в выражении $(a + b)^3$ должно быть восемь слагаемых: именно столько способов есть выбрать по одному слагаемому в каждой из скобок при раскрытии скобок в произведении

$$(a + b)(a + b)(a + b).$$

Однако тут стоит быть аккуратным по двум причинам.

Причина первая. Наверное, многие знают, что

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Можно заметить, что в выражении в правой части всего четыре слагаемых, хотя только что мы вроде бы доказали, что их должно быть восемь. Что же тут не так? Дело в том, что число 3 перед a^2b в данном случае означает, что слагаемое, равное a^2b , встретилось после раскрытия скобок три раза (а именно aab , aba и baa). Поэтому на самом деле в выражении справа $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ слагаемых, как и должно быть.

Вторую причину продемонстрируем на следующем равенстве, доказательство которого оставим до конца статьи:

$$\begin{aligned}(a - b)(b - c)(c - a) &= \\ &= ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a.\end{aligned}$$

В выражении справа всего шесть слагаемых, а не восемь, как, казалось, должно было бы быть. При этом нет никаких коэффициентов, которые скрывали бы за собой несколько слагаемых. Или есть? Наверное, вы уже догадались, что в правой части недостает двух слагаемых abc и $-abc$, которые взаимно уничтожились.

Прежде чем перейти к упражнению, хочется отдельно обратить внимание читателя на следующее. Если вы знаете, что равенство неверно, то доказать, что оно неверно, сильно проще: достаточно просто найти в одной из частей слагаемое, которого нет во второй. Проблема проверки равенств состоит в том, чтобы научиться замечать какие-то «смущающие» вещи! При выполнении упражнений мы рекомендуем вам учиться именно этому, а не просто формально доказывать неверность равенств.

Упражнение 1. Используя идеи однородности и количества слагаемых, объясните, почему не могут выполняться следующие равенства:

$$\text{а) } (a - b)c^2 + (b - c)a^2 + (c - a)b^2 = a + b + c - bc^2 - ca^2 - ab^2,$$

$$\begin{aligned}\text{б) } &a(a^2 - bc)(a^2 + bc) + b(b^2 - ac)(b^2 + ac) + \\ &+ c(c^2 - ab)(c^2 + ab) = a^5 + b^5 + c^5 - ab^2c - \\ &- 2abc^2,\end{aligned}$$

$$\text{в) } (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2,$$

$$\text{г) } (1 + xy)(1 + x)(1 + z) = (1 + xy)(1 + x + z + xz) = 1 + x + z + xy + xz + x^2yz,$$

$$\text{д) } (a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Симметрия

Вернемся к формуле Герона:

$$\begin{aligned}16S^2 &= \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).\end{aligned}$$

Попробуем с ее помощью вычислить площадь треугольника со сторонами 4, 5 и 6. Какую из переменных взять равной 4, какую 5, а какую 6? Понятно, что результат от этого не изменится: неважно, как именно называется та или иная сторона, площадь треугольника со сторонами 4, 5 и 6 определена однозначно.

Подставим $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$:

$$\begin{aligned}16S_1^2 &= \\ &= (4 + 5 + 6)(4 + 5 - 6)(4 - 5 + 6)(-4 + 5 + 6)\end{aligned}$$

и $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$:

$$16S_2^2 = \\ = (5 + 4 + 6)(5 + 4 - 6)(5 - 4 + 6)(-5 + 4 + 6).$$

В правых частях получились численно равные выражения. Каждое из них равно произведению суммы всех чисел и еще трех выражений, которые можно описать так: из суммы двух чисел вычитается третье.

Исходное выражение для $16S^2$ тоже можно было так описать: произведение суммы всех переменных и еще трех выражений, которые можно описать так: из суммы двух переменных вычитается третья. Тем самым, в выражение для $16S^2$ переменные a , b и c входят симметрично. Поэтому понятно, что при раскрытии скобок не может получиться, например, $2a^2c^2 - b^4$, ведь в это выражение переменные a и b входят не симметрично.

Определение 1. Будем говорить, что переменные a и b входят в некоторое выражение *симметрично* (или выражение симметрично относительно переменных a и b), если при перестановке их местами выражение не меняется.

А что значит не меняется? Ведь внешне выражения $a^2 + b^2$ и $b^2 + a^2$ различаются. Или еще один более яркий пример: выражения $a + (-a)$ и 0 выглядят уж совсем по-разному, но при этом $a + (-a) \equiv 0$. Под «не меняется» мы понимаем, что полученное выражение можно с помощью некоторых тождественных преобразований привести к исходному.

В формуле Герона, помимо переменных a и b , есть еще и переменная c , поэтому определение 1 придется обобщить.

Определение 2. Будем говорить, что переменные $a_1, a_2, \dots, a_n$ входят в некоторое выражение *симметрично* (или выражение симметрично относительно переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$), если при перестановке любых двух переменных местами выражение не меняется.

Например, поменяем в выражении

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$$

местами переменные a и c . Получится выражение

$$(c + b + a)(c + b - a)(c - b + a)(-c + b + a),$$

которое, как несложно заметить, можно преобразовать так, чтобы получилось исходное.

В то же время выражение $2a^2c^2 - b^4$ при замене местами a и b превращается в $2b^2c^2 - a^4$, которое, как ни преобразовывай, нельзя свести к исходному.

А что можно сказать про выражение

$$(a - b)(b - c)(c - a)? \quad (3)$$

Является ли оно симметричным относительно переменных a , b и c ? Попробуем, например, поменять местами переменные a и b :

$$(b - a)(a - c)(c - b) = -(a - b)(b - c)(c - a).$$

Видно, что произошла лишь смена знака, но все-таки выражение изменилось. Поэтому это выражение не симметрично относительно переменных a , b и c . Но все же есть в нем некая симметрия. Как ее можно было бы описать?

Определение 3. Выражение, зависящее от переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется *циклическим*, если оно не меняется при замене переменных по циклу: a_1 на a_2 , a_2 на a_3 , ..., a_n на a_1 .

Упражнения

2. Проверьте, что выражение (3) является циклическим.

3. Используя идеи симметричности и циклическости, объясните, почему не могут выполняться следующие равенства:

$$\text{а) } a(a^2 - bc)(a^2 + bc) + b(b^2 - ac)(b^2 + ac) + \\ + c(c^2 - ab)(c^2 + ab) = a^5 + b^5 + c^5 - ab^2c - 2abc^2,$$

$$\text{б) } (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = a^2b - ab^2 + \\ + a^2c - ac^2 + b^2c - bc^2 - 2abc - a^3 - b^3 - c^3,$$

$$\text{в) } (a - b + 1)(b - c + 1)(c - a + 1) = a^2b + ab^2 + a^2c + \\ + ac^2 + b^2c + bc^2 - a^2 - b^2 - c^2 - ab - bc - ca + 1.$$

4. Пусть a , b , c — длины сторон некоторого треугольника, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности, l_c — длина биссектрисы из угла, расположенного против стороны длиной c . Используя идеи симметричности, объясните, почему не могут выполняться следующие равенства:

$$\text{а) } r = \frac{2S}{(a + b - c)},$$

$$\text{б) } l_c = \frac{\sqrt{ac(a + b + c)(a + b - c)}}{(a + b)}.$$

5. а) Саша помнит, что длины отрезков от вершин треугольника ABC до точек касания с вписанной окружностью в каком-то порядке равны $p - a$, $p - b$, $p - c$, где a , b , c — длины сторон, а p — полупериметр, а также, что некоторые из отрезков равны между собой (рис. 1). Используя идеи симметричности, помогите Саше вспомнить, какой отрезок чему равен.

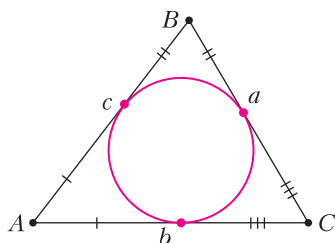


Рис. 1

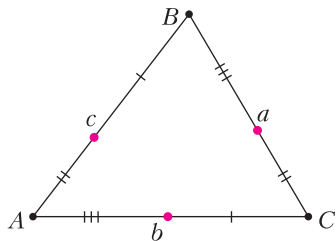


Рис. 2

б) Тот же вопрос, но про длины отрезков до точек касания с вневписанными окружностями (рис. 2).

Бином Ньютона и не только

Теперь, когда мы узнали некоторые свойства выражений, можно применить их не только для проверки, но и собственно для раскрытия скобок.

Пример 2 (бином Ньютона). Раскроем скобки в выражении

$$(a + b)^n = (a + b)(a + b) \dots (a + b) \text{ (} n \text{ раз)}$$

для некоторого натурального n .

Во-первых, мы уже знаем, что после раскрытия скобок получится сумма слагаемых, каждое из которых является произведением n переменных, а именно, есть k переменных b и $n - k$ переменных a для некоторого $k = 0, 1, 2, \dots, n$. А сколькими способами мы можем для данного k получить слагаемое $a^{n-k}b^k$? Например, сколькими способами можно получить слагаемое $a^{n-1}b$? Понятно, что n способами: ведь b можно выбрать из первой скобки, второй скобки, ..., n -й скобки.

Ответить на общий вопрос можно как минимум двумя способами, оба из них достаточно известны, поэтому мы опишем их достаточно коротко.

Первый способ. Каждое слагаемое $a^{n-k}b^k$ получилось из некоторой перестановки $n - k$ букв a и k букв b . Если бы все n букв были различными (например, $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}, b_1, b_2, \dots, b_k$), то таких перестановок было бы $n!$. Если теперь стереть индексы у всех букв a и всех букв b , то каждая перестановка будет

встречаться $k!(n - k)!$ раз: ведь именно таким количеством способов можно расставить индексы при буквах a и b . Итого, различных вариантов $\frac{n!}{k!(n - k)!}$.

Второй способ. Чтобы получить слагаемое $a^{n-k}b^k$, нам нужно из каких-то k скобок выбрать переменную b , а из всех остальных — переменную a . Это в точности число сочетаний из n по k : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$.

Тем или иным способом мы получим формулу, которую принято называть *биномом Ньютона*:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots \\ \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Пример 3. Раскроем скобки в выражении

$$(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Заметим, что это выражение симметрично относительно a, b и c , а также, что после раскрытия скобок до приведения подобных должно быть 9 слагаемых.

Одно из слагаемых очевидно: $a \cdot ab = a^2b$. Поскольку выражение симметрично, то после раскрытия скобок должно быть и слагаемое ab^2 , ведь оно получается из a^2b , если a и b поменять местами. Точно так же можно утверждать, что должно быть слагаемое b^2c , ведь оно получается из ab^2 , если a и c поменять местами. Аналогично должны быть слагаемые bc^2 , c^2a и ca^2 . Это уже 6 слагаемых. Осталось заметить, что еще будут три слагаемых abc , получаемых как $a \cdot bc$, $b \cdot ca$, $c \cdot ab$. Итого,

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = \\ = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc.$$

Упражнение 6. Раскройте скобки в выражении $(a + b)(b + c)(c + a)$. Чему равна разность между $(a + b + c)(ab + bc + ca)$ и $(a + b)(b + c)(c + a)$?

Пример 4. Раскроем скобки в выражении

$$(a - b)(b - c)(c - a).$$

Заметим, что это выражение циклично относительно a, b и c , а после раскрытия скобок должно быть 8 слагаемых.

Легко увидеть два слагаемых abc , которые взаимно уничтожаются:

$$(a - b)(\underline{b} - c)(\underline{c} - a)$$

и

$$(a - \underline{b})(b - \underline{c})(c - \underline{a}).$$

Кроме того, имеется слагаемое $-a^2b$:

$$(a-b)(b-c)(c-a),$$

а значит, с учетом цикличности, должны быть и слагаемые $-b^2c$ и $-c^2a$. Наконец, еще имеется слагаемое ab^2 :

$$(a-b)(b-c)(c-a),$$

а значит, с учетом цикличности, имеются и слагаемые bc^2 и ca^2 . Итого,

$$(a-b)(b-c)(c-a) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a.$$

Предлагаем закрепить рассказанное на следующих задачах.

Задачи

1. Раскройте скобки в формуле Герона.

2. Пусть x , y и z — положительные числа. Докажите, что если

$$x^2 + y^2 + z^2 < 2xy + 2yz + 2zx,$$

то из отрезков длины $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ можно сложить треугольник.

3. Докажите, что если $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$, то сумма каких-то двух из чисел a , b , c равна нулю.

4. Докажите, что если $ab^2 + bc^2 + ca^2 = a^2b + b^2c + c^2a$, то какие-то два из чисел a , b , c равны.

5. Какое получится выражение после раскрытия скобок в произведении

$$(1+a+a^2+a^3+\dots+a^9) \times \\ \times (1+a^{10}+a^{2\cdot10}+\dots+a^{9\cdot10}) \times \\ \times (1+a^{100}+a^{2\cdot100}+\dots+a^{9\cdot100})?$$

6. Докажите, что

$$abc(a+b+c)^3 - (ab+bc+ca)^3 = \\ = (a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab).$$

7. Докажите, что при условии $a+b+c+d=0$ выражение

$$(a+d)^2 + (b+d)^2 + (c+d)^2$$

симметрично относительно a , b , c и d .

8. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_s$ — целые неотрицательные числа, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$. Докажите, что коэффициенты при $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}$ после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(x_1 + x_2 + \dots + x_s)^n$ равны $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$. Эти коэффициенты называются мультиномиальными.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Льдина с ХВОСТОМ

С.ВАРЛАМОВ

НАБЛЮДАЕМЫЕ ИНОГДА НА НЕБЕ в ночное время «хвостатые» кометы приобретают свои хвосты, когда приближаются к Солнцу. Испаряющееся с поверхности ядра кометы вещество рассеивает солнечный свет и испытывает давление света. Поэтому хвосты комет чаще всего вытянуты в направлении от Солнца.

Конечно, в состав комет могут входить разные вещества, в их числе и вода. Попробуем разобраться с ней и оценить скорость испарения молекул воды с поверхности льда в космосе.

Представим себе ситуацию, когда на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля (но вдали от Земли), находится большая плоская льдина, ориентированная всегда перпендикулярно лучам Солнца. Состав льда такой же, как в земных условиях. Солнечная постоянная для расстояния от Солнца порядка 150 млн км равна $E = 1370$ Вт/м². Толщина льдины h гораздо меньше ее поперечных размеров. Лед с пузырьками воздуха в нем непрозрачен и отражает $3/4 = 75\%$ падающего на него излучения (выглядит белым). Понятно, что получаемая льдиной мощность компенсируется потерями тепла, и в результате устанавливается почти стационарное распределение температуры в объеме льдины. Постепенное уменьшение толщины льдины будет происходить за счет испарения молекул воды с поверхности льдины. Потери тепла связаны как с излучением, так и с испарением льда.

Лед характеризуется набором механических и тепловых параметров: плотностью $\rho = 900$ кг/м³, коэффициентом теплопровод-



ности $\alpha = 2 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}^2)$, скоростью распространения звуковых волн $v = 4 \text{ км/с}$, молярной теплотой испарения $L = 50 \text{ кДж/моль}$ при 0°C , удельной теплоемкостью $c = 2,1 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. Размер молекулы воды $D \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, молярная масса воды $M = 0,018 \text{ кг/моль}$.

Сначала найдем установившееся распределение температуры без учета испарения, а затем «включим» и этот механизм потери тепла. При очень большой толщине льдины можно считать, что температура стороны льдины, которая не освещается Солнцем, близка к нулю, т.е. $(T/h) \cdot \alpha \ll E \cdot 0,25$. В этом предположении найдем температуру освещенной Солнцем поверхности льдины, считая, что при установившейся температуре лед излучает как абсолютно черное тело (для ИК-диапазона излучения это справедливо):

$$\frac{E}{4} = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{К}^4 \cdot \text{м}^2)$ – постоянная Стефана–Больцмана, откуда

$$T = 279 \text{ К}$$

(т.е. она даже выше температуры плавления льда 273 К). Чтобы считать льдину очень толстой, требуется выполнение неравенства

$$h \gg \frac{4T\alpha}{E} = 1,6 \text{ м}.$$

Например, при толщине льдины в 10 м это неравенство уже удовлетворяется.

Получилось, что оценка для температуры обращенной к Солнцу поверхности кометы, если не учитывать испарение молекул, близка к точке плавления льда.

Оценим теперь мощность потерь тепла, обусловленную испарением молекул воды (понятно, что это будет лед, а не жидкая вода) при температуре 0°C , поскольку найденная без учета испарения температура совсем немного отличается от 273 К . Примем во внимание, что в космосе нет газового окружения, поэтому при вычислении теплоты испарения в космосе нет нужды

учитывать работу сил, с которыми испарившиеся молекулы действуют на окружающие тела. Таким образом, из величины теплоты испарения, которая приводится в справочниках для вещества при некоторой температуре, нужно удалить (вычесть) работу по расширению против силы давления, которую создает насыщенный пар вещества, равную для одного моля вещества RT .

Молекулы при тепловом движении могут изредка приобретать энергию, достаточную для того, чтобы вырваться из «плена», т.е. из глубокой потенциальной ямы, которую для них создали ближайшие соседки. Вероятность такого события (приобретения энергии) определяется величиной $\exp\left(1 - \frac{L}{RT}\right)$. А случится или нет такое событие, зависит от промежутка времени наблюдения.

Смена событий в твердом теле определяется временем, за которое звуковые волны проходят расстояние, равное размеру (диаметру) одной частицы вещества – молекулы воды в рассматриваемом случае. Чем больше промежуток времени, тем больше вероятность того, что событие за время наблюдения совершится. Если такое событие происходит с молекулой, находящейся на поверхности льда, то вероятность того, что скорость молекулы, которой досталась такая энергия, будет направлена в сторону от поверхности, равна примерно $1/6$. Частота смены событий ω определяется размером молекулы и скоростью распространения звуковых волн в твердой воде: $\omega \approx \frac{v}{D}$. Поэтому моле-

кула, находящаяся на поверхности с температурой 273 К, покидает ее за время порядка

$$\Delta t = \frac{6D}{v} \cdot \exp\left(+\frac{L}{RT} - 1\right) \approx 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Получается, что скорость уменьшения толщины льдины при температуре 273 К равна

$$\frac{D}{\Delta t} = \frac{v}{6} \cdot \exp\left(-\frac{L}{RT} + 1\right) = 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ м/с.}$$

Такой скорости испарения соответствует дополнительная мощность тепловых потерь, равная

$$\frac{\Delta W}{S} = \frac{D}{\Delta t} \cdot \frac{\rho}{M} \cdot (L - RT) = 1,86 \text{ кВт/м}^2.$$

Эта величина примерно в 5,4 раза больше мощности, получаемой льдом за счет частичного поглощения падающего на него излучения Солнца.

Итак, для температуры 0 °С суммарная мощность потерь в 6,4 раза больше, чем поглощаемая льдом мощность, равная $1,37 \text{ кВт/м}^2 / 4 \approx 0,34 \text{ кВт/м}^2$. Следовательно, не учитывать потери, связанные с испарением, в рассматриваемой ситуации просто некорректно!

Другой вариант для оценки установившейся температуры таков: пренебрегаем излучением, но учитываем испарение молекул. Уравнение для этого варианта имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{\Delta t} \cdot \frac{\rho}{M} \cdot (L - RT) &= v \cdot \frac{\rho}{M} \frac{L - RT}{6 \cdot \exp\left(+\frac{L}{RT} - 1\right)} = \\ &= W = \frac{E}{4} = 0,34 \text{ кВт/м}^2. \end{aligned}$$

Из этого соотношения ищется (с помощью компьютера) температура и получается

$$T \approx 258,66 \text{ К.}$$

А для этой температуры мощность излучения с одного квадратного метра составляет $W_{\text{изл}} \approx 254 \text{ Вт}$. Теперь при этой температуре $T \approx 259 \text{ К}$ мощности потерь на излучение и на испарение близки по величине. И опять получилось, что суммарные потери примерно на 70% больше поглощаемой мощности. Следовательно, нужно учесть и потери на излучение $W_{\text{изл}}$, и потери на испарение $W_{\text{исп}}$, а их сумму приравнять величине поглощаемой мощности $W = 0,34 \text{ кВт/м}^2$.

Уравнение для нахождения соответствующей температуры сложное (аналитически не решается):

$$\frac{v\rho L}{6M \cdot \exp\left(+\frac{L}{RT} - 1\right)} + \sigma T^4 = \frac{E}{4}.$$

Подбором значения температуры (с использованием компьютерных вычислений) находим суммарную мощность потерь тепла с 1 м² поверхности, равную поступающей мощности. Соответствующая температура равна

$$248,115 \text{ К} \approx 248 \text{ К} = -25 \text{ }^{\circ}\text{С.}$$

Получается, что при этой температуре механизм теплового излучения отвечает за потерю мощности порядка 215 Вт с одного квадратного метра. А оставшиеся приблизительно 127 Вт мощности теряются за счет испарения молекул с поверхности. Мощности на излучение (большая часть) и на испарение (меньшая часть) отличаются примерно в 1,7 раза.

Если учесть, что теплота испарения зависит от температуры и увеличивается с уменьшением температуры, то доля потерь энергии на излучение будет еще больше, а на испарение еще меньше. Но для льда при температуре 248 К теплота испарения всего на 322 Дж/моль больше, чем при 273 К, т.е. в формулах для вычислений нужно использовать величину $L = 50322 \text{ Дж/моль}$ вместо величины 50000 Дж/моль. Эта поправка дает совсем небольшое изменение температуры – получается 249,3 К, т.е. уточненная величина температуры всего на 1,2 градуса выше, чем 248,1 К.

Теперь учтем, что не вся поглощаемая льдом мощность идет на испарение молекул, а только 123,45 Вт/м². Теплота испарения равна 50322 Дж/моль. Вычислим скорость изменения со временем толщины толстой льдины высотой $h \gg 1,6 \text{ м}$. Эта скорость равна $v = 5,12 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}$. Иными словами, для того чтобы толщина льдины уменьшилась на 1 метр, требуется промежуток времени примерно 226 суток. Следовательно, льдина с начальной толщиной 100 метров уменьшит свою толщину до величины 2 метра примерно за 61 год! Для льдины такого размера уже потребуются учитывать тепловые потери не только с поверхности, освещаемой Солнцем, но и с той поверхности, на которую лучи Солнца не падают.

Рассмотрим теперь очень тонкую ледяную пластину, толщина которой h во много раз

меньше 1,6 м, например, $h = 1$ см. В этом случае потери тепла происходят не с одной поверхности (обращенной к Солнцу), а с двух поверхностей. Температуры этих поверхностей близки друг к другу, поскольку при малой толщине пластины хорошо работает механизм теплопроводности. При той же самой поступающей на каждый квадратный метр мощности $W = 0,34$ кВт/м² потери тепла с одной поверхности уменьшились в два раза. Следовательно, все вычисления можно повторить, только поступающую мощность нужно уменьшить в два раза. Тогда установившаяся температура будет равна 229,2 К. В таком случае большую часть потерь тепла обеспечивает излучение: $W_{\text{изл}} = 313$ Вт. На испарение расходуется оставшаяся мощность $W_{\text{исп}} = 29,5$ Вт. Получается, что для тонкой ледяной пластинки при температуре 229 К мощности потерь на излучение и на испарение отличаются примерно в 10 раз! Для полного испарения такой пластинки толщиной 1 см из льда потребуется промежуток времени примерно 9,5 суток.

Понятно, что для льдинки в форме, например, шарика с диаметром 1 см (такой размер могут иметь градинки) площади, с которых получается и отдается тепло, отличаются. Поглощаемая мощность поступает на площадь поперечного сечения шарика $\pi D^2/4$, а потери тепла происходят с поверхности шарика, площадь которой в 4 раза больше и равна πD^2 . Поэтому и для такого случая можно применить тот же самый способ вычислений, только поступающую на единицу площади мощность следует считать в 4 раза меньшей.

Вычислим температуру, а также оценим время испарения ледяного шарика для этого случая. Температура установится около 197 К. В пересчете на 1 м² поглощаемая мощность осталась такой же: 342,5 Вт/м². Но при вычисленной температуре мощность потерь на излучение, приведенная к 1 м², составит 341,6 Вт/м². А на испарение будет тратиться всего 1 Вт/м². Времени на испарение ледяного шарика с начальным радиусом 0,5 см потребуются 1,95 года ≈ 2 года. Таким образом, в этой ситуации (при температуре 197 К) потери на излучение в 340 раз больше потерь, связанных с испарением молекул.

Конечно, полученные величины температур и времен испарения следует считать оценочными. И реальность гораздо сложнее

использованной модели. Напомним, в нашей модели предполагалось, что лед непрозрачен, но для очень тонких слоев льда это несправедливо. Кроме того, поглощение и отражение солнечного излучения на самом деле зависит от угла падения на поверхность, а это обстоятельство не учитывалось при вычислении поглощаемой энергии солнечных лучей для шарика. Эти явления должны увеличить время испарения маленького кусочка льда.

Делаем вывод: зависимости от температуры мощности тепловых потерь, связанных с тепловым излучением, пропорциональной T^4 , и мощности потери тепла, связанной с испарением вещества, пропорциональной $\exp(-L/(RT))$, действительно разные. Полученные отличия долей общей мощности тепловых потерь при разных температурах для этих двух механизмов потерь тепла качественно соответствуют реальности. Иными словами, с ростом температуры мощность потерь, связанных с испарением, растет быстрее, чем мощность тепловых потерь за счет излучения. Сравниваются эти мощности для толстой льдины при температуре около 256 К = -17 °С. Эта температура установится на поверхности льдины, если она будет находиться ближе к Солнцу, чем Земля, на 25 млн км. Если льдина окажется на расстоянии от Солнца в два раза меньшем, чем расстояние от Земли до Солнца, то в этом случае при том же коэффициенте поглощения падающего на льдину излучения (25%) установившаяся на освещаемой поверхности температура станет равной 272 К и лед вот-вот начнет плавиться. При этом на испарение льда будет тратиться мощность примерно 1060 Вт/м², а на излучение с освещаемой поверхности 310 Вт/м². При дальнейшем уменьшении расстояния между Солнцем и льдиной лед растает и скорость испарения возрастет. Ну и, как следствие, появившийся водяной пар будет сдуваться солнечным излучением и образует заметный хвост.

Хвостатая льдина — это и есть возможный вариант кометы.

Понятно, что предложенный способ оценки скорости испарения молекул основан на классической модели тепловых явлений, и, возможно, он не очень точный. Но для объяснения рассмотренных явлений и процессов этого вполне достаточно.

Парадоксы плоского конденсатора

С. КОЗЕЛ

«Какие могут быть здесь парадоксы, – скажет читатель, – ведь это такая простая электрическая система». И действительно, что может быть проще плоского конденсатора? Из школьного учебника физики мы знаем, что так называют систему, состоящую из двух параллельно расположенных на небольшом расстоянии проводящих пластин, между которыми находится слой диэлектрика.

Если пластины (обкладки) конденсатора подсоединить к полюсам батареи, то на одной из них появится некоторый заряд $+q$, а на другой – заряд $-q$. Электрическое поле плоского конденсатора сосредоточено, в основном, в пространстве между пластинами. Это поле однородно, т.е. вектор напряженности одинаков во всех точках. Емкость плоского конденсатора выражается формулой

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d},$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора, S – площадь каждой пластины, d – расстояние между ними, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 – электрическая постоянная.

Казалось бы, все ясно. А между тем многие абитуриенты, «встретившись» на экзамене с плоским конденсатором, испытывают определенные затруднения. В ряде случаев они, опираясь, вроде бы, на хорошо известные факты, приходят к противоречивым результатам, и возникает парадоксальная ситуация. Разумеется, все эти парадоксы можно легко разрешить, если глубоко и неформально разобраться в законах электростатики. Приведем несколько примеров.

Парадокс 1

Рассмотрим заряженный плоский воздушный конденсатор. Разность потенциалов между его обкладками

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}.$$

Обратим внимание на то, что $\Delta\varphi$ пропорционально расстоянию d между пластинами конденсатора. Это значит, что, раздвигая пластины заряженного конденсатора, мы можем увеличивать разность потенциалов между ними. Зарядив, например, конденсатор до разности потенциалов 10 В и увеличив затем зазор d в 10^3 , 10^4 , ... раз, мы получим $\Delta\varphi$ равным, соответственно, 10^4 В, 10^5 В и т.д. Какой простой и хороший способ создания ускорителя заряженных частиц! Не правда ли?

Мы явно вступаем здесь в противоречие со здравым смыслом, который подсказывает нам, что еще один шаг, и мы придем к нарушению одного из основных принципов физики – закона сохранения энергии.

И все же, правильны или нет наши рассуждения? Обычно абитуриенты сразу отвечают, что такого быть не может, но далеко не все указывают физическую причину этого. А на самом деле все очень просто. Приведенная формула для емкости плоского конденсатора справедлива только при малых значениях d , т.е. когда d существенно меньше линейных размеров пластин. При больших зазорах между обкладками поле перестает быть однородным и разность потенциалов $\Delta\varphi$ перестает линейно зависеть от d .

Мы затронули здесь очень важный вопрос о пределах применимости физических результатов. Любая физическая модель всегда имеет ограниченную применимость. Нельзя, например, применять модель идеального газа к реальным газам при высоких давлениях и низких температурах. Формула для емкости плоского конденсатора перестает «работать», когда расстояние между обкладками становится достаточно большим и электрическое поле между ними оказывается неоднородным. Нельзя непосредственно применять закон Кулона для определения силы электрического взаимодействия между пластинами плоского конденсатора. К сожалению, абитуриенты нередко в этом случае пишут

формулу $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$, в то время как правильное выражение для силы имеет вид

$$F = q \frac{E}{2} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$$

(при этом сила не зависит от расстояния d).

Теперь сформулируем задачу для самостоятельного решения.

Задача 1. Попробуйте оценить, во сколько раз можно увеличить разность потенциалов между обкладками заряженного плоского конденсатора, если удалить их на очень большое расстояние друг от друга. Линейный размер пластин $a = \sqrt{S}$ и начальное расстояние d между ними считать известными.

Заметим, что такого рода задачи на оценки, где точный расчет затруднителен, играют в физике большую роль. Они требуют выбора упрощенной физической модели и позволяют оценить масштабы явления по порядку величины.

Парадокс 2

Возьмем заряженный и изолированный плоский конденсатор и просверлим в его пластинах два маленьких отверстия – одно напротив другого. При этом поле внутри конденсатора практически не изменится и останется однородным. Пусть через одно из отверстий в конденсатор влетает с небольшой начальной скоростью заряженная частица так, чтобы электрическое поле конденсатора ускоряло ее (рис. 1). (Для этого, очевидно, частица должна влетать в конденсатор через отверстие в одноименно заряженной пластине.)

Пролетев через конденсатор, частица вылетает из другого отверстия, приобретая дополнительную энергию $\Delta W = q\Delta\phi$. Теперь предлагается с помощью магнитного поля

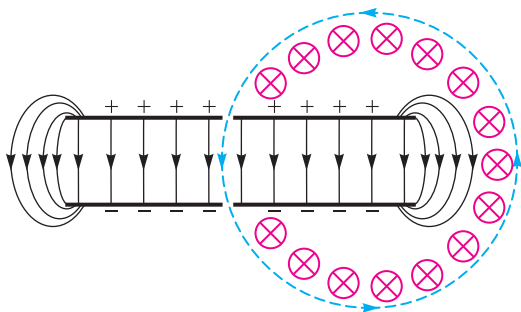


Рис. 1

изменить направление движения частицы таким образом, чтобы она снова влетела через первое отверстие в конденсатор. Напомним, что сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу, не совершает работы, так как она перпендикулярна вектору скорости частицы.

При повторном пролете через конденсатор частица вновь приобретет дополнительную энергию ΔW , в следующем цикле – еще ΔW и т.д. Мы с вами «изобрели» циклический ускоритель, который не нуждается в источнике энергии. Еще немного фантазии – и мы сконструируем так называемый вечный двигатель, работающий без потребления энергии!

К этому ошибочному результату мы пришли потому, что не приняли во внимание одно из фундаментальных свойств электростатического поля – его потенциальный характер. Потенциальность электростатического поля означает, что если из одной точки пространства в другую мы переносим заряженное тело, то работа электрических сил не зависит от формы пути, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Отсюда следует, что если заряженное тело переносить по замкнутой траектории, то при возвращении в исходную точку полная работа электрических сил обращается в ноль. (Напомним, что таким же свойством обладает и гравитационное поле.) Именно это свойство позволяет ввести понятия потенциальной энергии и потенциала.

В нашем случае при движении заряженной частицы внутри конденсатора электрическое поле ускоряет, а вне конденсатора – тормозит ее, и когда частица подлетает к отверстию в первой пластине, ее энергия принимает прежнее значение. Это означает, что в рассматриваемом примере мы принципиально не можем пренебрегать полем вне плоского конденсатора. Разумеется, оно значительно слабее поля между обкладками, но в нем частица пролетает гораздо больший путь; в результате в тормозящем поле вне конденсатора она теряет как раз ту энергию, которую сообщило ей ускоряющее поле внутри конденсатора.

Парадокс 3

Вот еще один пример, показывающий, что пренебрежение внешним полем плоского конденсатора (или, как его называют, полем

рассеяния) может привести к принципиально неверным выводам.

В школьном учебнике сказано, что тела, в том числе и проводящие, расположенные вне конденсатора, практически не влияют на его емкость. Чаше всего так и бывает. Пусть, например, вблизи обкладки плоского конденсатора расположена еще одна проводящая незаряженная пластина «а» (рис. 2). Эта пластина не изменит поля внутри конденсатора, и его емкость останется прежней. Поднесем теперь к конденсатору еще одну пластину – «б» и расположим ее вблизи второй обкладки конденсатора. И эта пластина не окажет влияния на емкость конденсатора.

Теперь соединим внешние незаряженные пластины проводником. Наш конденсатор оказался как бы вставленным внутрь проводящей коробки. Что при этом произойдет?

Многие абитуриенты утверждают, что и в этом случае поле между обкладками конденсатора не изменится (так как внешние пластины были не заряжены) и, следовательно, емкость конденсатора тоже не изменится. А между тем схема, изображенная на рисунке 2, при замкнутых крайних пластинах эквивалентна цепи из трех конденсаторов (рис. 3). Если все промежутки между пластинами одинаковы, то емкость такого сложного конденсатора равна $C = \frac{3}{2} C_0$, где C_0 – первоначальная емкость. Таким образом, емкость изменилась, а именно – увеличилась в 1,5 раза. Как это можно объяснить?

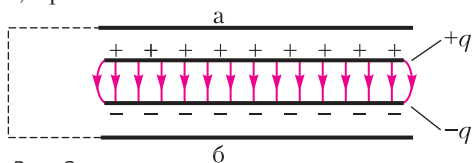


Рис. 2

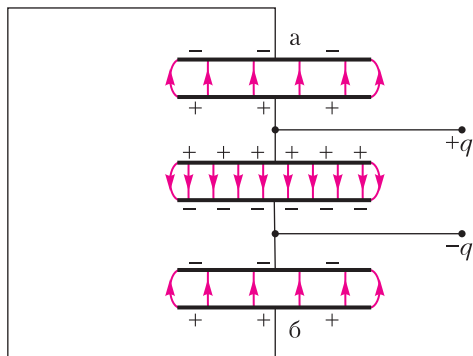


Рис. 3

Оказывается, причиной всему – поле рассеяния конденсатора. Под его действием происходит перераспределение зарядов на внешних пластинах, в результате чего верхняя пластина «а» оказывается заряженной отрицательно, а нижняя «б» – положительно. (Кстати сказать, из рисунка 3 следует, что если одну из внешних пластин соединить проводником с одной из пластин данного конденсатора, то емкость станет равной $2C_0$.)

Парадокс 4

Пусть мы имеем два одинаковых конденсатора (даже не обязательно плоских) емкостью C каждый. Один из них заряжен зарядом q_0 , а другой не заряжен. Электрическая энергия, запасенная в конденсаторах, равна

$$W_1 = \frac{q_0^2}{2C} + 0.$$

Соединим теперь конденсаторы параллельно друг другу. Тогда общий заряд конденсаторов останется прежним и равным q_0 , а суммарная емкость будет равна $2C$. Теперь электрическая энергия системы равна

$$W_2 = \frac{q_0^2}{2(2C)} = \frac{1}{2} W_1.$$

Куда же девалась половина прежнего запаса энергии? (Заметим, что при соединении конденсаторов никакой внешней работы не совершается.)

Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим случай, когда конденсаторы подсоединяются друг к другу через резистор сопротивлением R (рис. 4). При перезарядке конденсаторов по резистору протекает ток, и, следовательно, на нем выделяется джоулево тепло. Здесь как будто все ясно. Но получим ли мы количественное согласие? Проведем расчет. Для этого нам необходимо найти зависимость тока от времени.

Обозначим заряд правого конденсатора на рисунке 4 в некоторый момент времени t

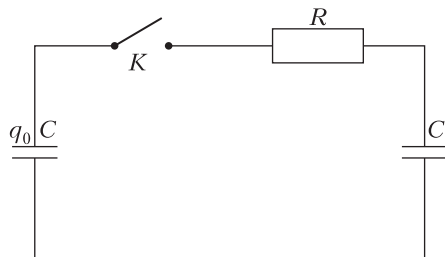


Рис. 4

после замыкания ключа через q . Тогда заряд левого конденсатора в тот же момент равен $q_0 - q$, а ток, протекающий по сопротивлению R , равен

$$i = \frac{1}{R} \left(\frac{q_0 - q}{C} - \frac{q}{C} \right) = \frac{1}{RC} (q_0 - 2q).$$

Если принять во внимание, что по определению ток равен изменению заряда в единицу времени, т.е. производной от заряда по време-

мени: $i = \frac{dq}{dt}$, то мы получим уравнение

$$\frac{dq}{dt} + \frac{2}{RC} q = \frac{1}{RC} q_0.$$

Удобнее записать уравнение не для заряда, а для тока, поэтому написанное выше соотношение почленно продифференцируем по времени:

$$\frac{di}{dt} + \frac{2}{RC} i = 0, \text{ или } \frac{di}{i} = -\frac{2}{RC} dt.$$

Последнее уравнение легко проинтегрировать. При этом левую часть нужно проинтегрировать в пределах от первоначального значения тока i_0 до значения тока $i(t)$ в рассматриваемый момент времени, а правую – от 0 до t . Получим

$$\ln i(t) - \ln i_0 = -\frac{2}{RC} t,$$

или

$$i(t) = i_0 e^{-2t/(RC)}.$$

Значение тока i_0 в первый момент после замыкания ключа можно определить из следующих физических соображений: в первый момент левый конденсатор заряжен до разности потенциалов q_0/C , а правый – не заряжен. Поэтому падение напряжения на резисторе как раз равно q_0/C . Отсюда следует, что $i_0 = q_0/(CR)$.

График функции $i(t)$ изображен на рисунке 5. Такие функции называются экспонентами. Они очень часто встречаются при решении физических задач. Время τ , в течение, которо-

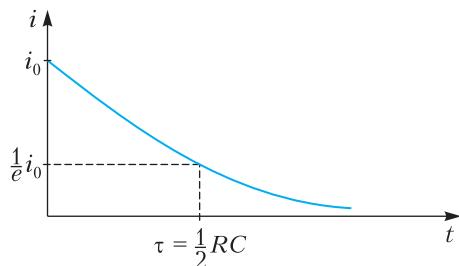


Рис. 5

го сила тока уменьшается в e раз, называется постоянной времени системы. В нашем случае $\tau = CR/2$. Чем меньше сопротивление R , тем быстрее происходит затухание тока.

Теперь нам осталось вычислить джоулево тепло:

$$Q = \int_0^{\infty} i^2(t) R dt = \frac{q_0^2}{C^2 R} \int_0^{\infty} e^{-4t/(RC)} dt = \frac{q_0^2}{4C} = \frac{1}{2} W_1$$

Итак, парадокс разрешен. Независимо от величины R ровно половина первоначальной энергии конденсатора переходит в тепло, а вторая половина сохраняется в виде электрической энергии конденсаторов после их перезарядки.

Остается сказать несколько слов о предельном случае $R \rightarrow 0$. Что, если мы соединим конденсаторы идеальными проводниками (сверхпроводниками)? Формально наш результат остается в силе, так как он вообще не зависит от величины R . Но где же выделяется «потерянная» энергия и в каком виде?

Разумеется, в этом предельном случае джоулева тепла нет, но существенную роль начинает играть излучение электромагнитной энергии. При быстрых изменениях тока в цепи в окружающем пространстве возникает переменное электромагнитное поле, и половина первоначальной энергии уносится электромагнитной волной.

Следует отметить, что в этом случае необходимо учитывать небольшую индуктивность соединительных проводов. Тогда цепь становится похожей на колебательный контур с малым (но не бесконечно малым!) затуханием. Процесс перезарядки конденсаторов приобретает колебательный характер, и излучением электромагнитной энергии в окружающее пространство пренебречь никак нельзя.

Еще один парадокс, очень похожий на предыдущий, попробуем разрешить сами.

Задача 2. Имеется незаряженный конденсатор емкостью C и батарея с ЭДС $\mathcal{E}$. Подсоединим обкладки конденсатора к полюсам батареи. Тогда на пластинах появится заряд $q = C\mathcal{E}$, и конденсатор приобретет электрическую энергию $W = C\mathcal{E}^2/2$. При этом батарея совершит работу $A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$. Мы видим, что $W = \frac{1}{2} A$. Куда же девалась вторая половина работы, совершенной батареей?

Парадокс 5

Плоский воздушный конденсатор емкостью C заполнили диэлектрической жидкостью с проницаемостью ϵ и зарядили до напряжения U . При этом конденсатор приобрел электрическую энергию $W_1 = \epsilon CU^2/2$. Затем конденсатор отсоединили от источника, жидкость слили и после этого разрядили. Легко сообразить, что при разрядке выделится энергия $W_2 = \epsilon^2 CU/2 = \epsilon W_1$ (заряд конденсатора $q = \epsilon CU$ при сливании жидкости не изменился, а емкость стала равной C). Получается, что при разрядке конденсатора выделится больше энергии, чем он получил при зарядке. Например, $W_2 = 2W_1$ при $\epsilon = 2$. Возникла явно парадоксальная ситуация.

Хотя задача о разрядке конденсатора, из которого удален диэлектрик, в разных вариантах хорошо известна, многие абитуриенты испытывают серьезные затруднения, пытаясь разрешить этот парадокс. А объяснение здесь очень простое.

При удалении диэлектрика из заряженного конденсатора нужно совершить некоторую внешнюю положительную работу, так как диэлектрик всегда втягивается в область более сильного электрического поля (между обкладками). За счет этой положительной работы внешней силы и будет увеличиваться электрическая энергия конденсатора:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{внеш}}.$$

В нашем случае жидкий диэлектрик вытекает из конденсатора под действием силы тяжести, поэтому энергия конденсатора возрастет на величину работы силы тяжести. Если бы конденсатор все время оставался подключенным к источнику, то необходимо было бы учитывать еще и работу батареек:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{внеш}} + A_{\text{бат}}.$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии для изолированного конденсатора (и вообще для любой изолированной электростатической системы) при наличии внешних сил, совершающих работу.

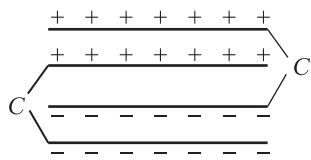
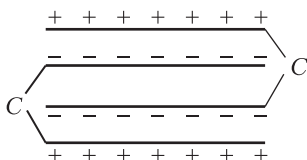


Рис. 6



Задача 3. Попробуйте самостоятельно найти внешнюю работу и работу, которую совершает батарея с ЭДС $\mathcal{E}$, при сливе жидкого диэлектрика с проницаемостью ϵ из конденсатора, подсоединенного к ее полюсам. Емкость воздушного конденсатора равна C .

Если в системе есть активное сопротивление, то необходимо учитывать и джоулево тепло. В этом общем случае закон сохранения энергии удобно записывать в виде

$$A_{\text{бат}} - Q = \Delta W - A_{\text{внеш}}$$

– работа, совершаемая источником, за вычетом джоулева тепла идет на увеличение электростатической энергии системы и на работу против внешних сил.

В заключение – еще несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

4. В плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d вставлена незаряженная металлическая пластина толщиной l , параллельная его обкладкам. Конденсатор подсоединен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. Какую работу надо совершить, чтобы удалить пластину из конденсатора? Рассмотреть два случая: а) перед удалением пластины конденсатор отключают от батареи; б) конденсатор все время остается подключенным к батарее.

5. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C заряжены зарядом q каждый и отсоединены от источника. Затем конденсаторы вставляют друг в друга двумя способами, как показано на рисунке 6. Какую работу нужно совершить в каждом из этих случаев? Пластины конденсаторов считать тонкими, а расстояния между пластинами – одинаковыми.

6. Определите максимальную силу взаимодействия между обкладками плоского конденсатора емкостью C и количество теплоты, выделившееся на резисторе сопротивлением R , после замыкания ключа, если максимальный ток в цепи равен i_0 (рис. 7). Расстояние между обкладками конденсатора d .

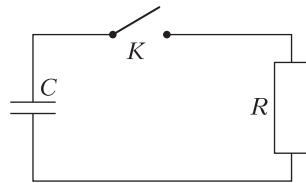


Рис. 7

Еще одна дверь в математику

МАТЕМАТИКА – СЛОЖНАЯ НАУКА и путь в математику непрост. Бен Орлин в своей книге «Математические игры с дурацкими рисунками»¹ открывает перед читателями дверь в мир математики через игры.

Автор условно делит представленные в книге игры на пять категорий: геометрические игры, числовые игры, комбинаторные игры, рискованные игры и информационные игры. При этом он не ставит перед собой цель систематически изложить какие-то разделы математики. Орлин не столько объясняет математику, сколько заманивает в нее. Он

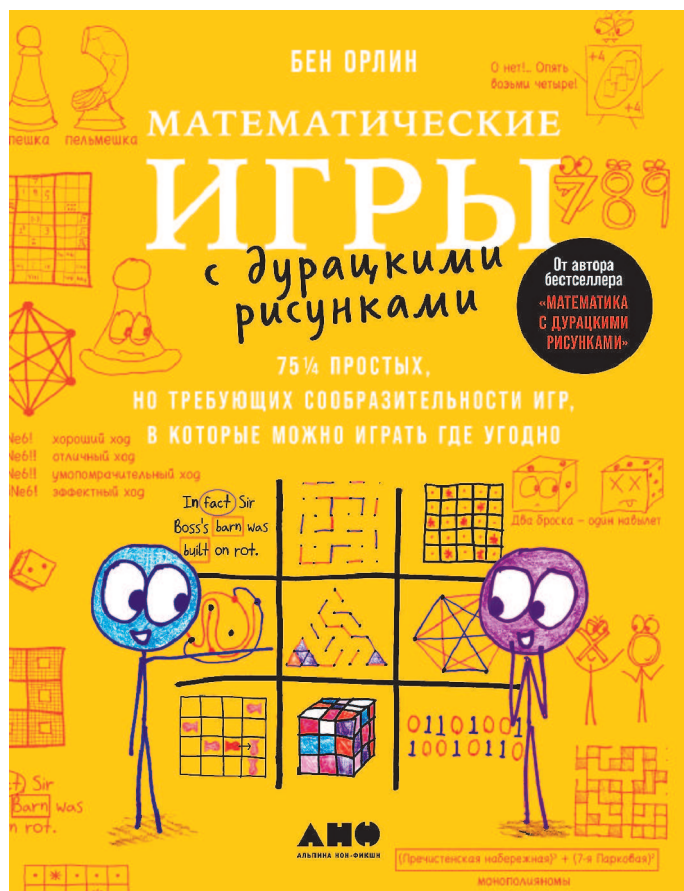
¹ Б. Орлин. Математические игры с дурацкими рисунками. — М.: Альпина нон-фикшн, 2023.

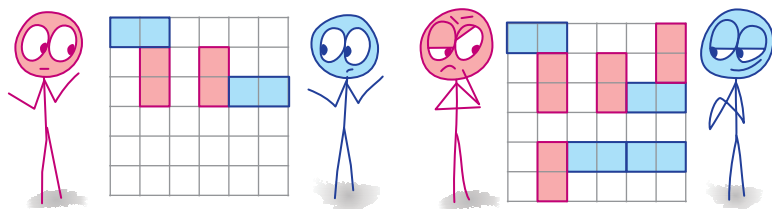
демонстрирует, как через игру можно подойти к различным математическим сюжетам и задачам. Автор показывает, что математика буквально окружает нас, а математические игры можно обнаружить почти всюду, если правильно настроить восприятие. Некоторые игры автор разбирает подробно, открывая читателю новые горизонты, а другие описывает лишь в общих чертах, оставляя простор для самостоятельных исследований.

Иллюстрации в книге выполнены автором и заслуживают отдельного внимания. Если вы уже знакомы с другими книгами Орлина, такими как «Математика с дурацкими рисунками» или «Время переменных», то узнаете его стиль. Забавные рисунки поясняют игровые позиции, помогая лучше понять правила, а иногда служат для объяснения сложных идей. Повествование выдержано в легком стиле, а мягкий юмор автора и парадоксальные комментарии не только привлекают внимание, но и побуждают к размышлению.

Работать с книгой можно на разных уровнях. Можно просто провести время с удовольствием, а можно погрузиться в ту или иную игру с головой: изучить ее связи, историю, стратегии, придумать новые разновидности или сравнить с другими играми. Книга подойдет читателям от 9 до 99 лет, но особенно она будет полезна старшеклассникам. Увлекательные игры могут стать началом самостоятельных исследований — как серьезных, так и не очень.

Школьникам, особенно на олимпиадах и экзаменах, часто кажется, что важно решать задачи быстро. Но настоящая, «взрослая» математика требует другого подхода: медленного, вдумчивого, с погружением в детали и изучением связей между задачами и разными областями математики. Именно так формируется математическое мышление. А игры предоставляют для этого отличную возможность: они увлекательны, в них можно играть снова и снова, выходя на новые уровни, размышляя, придумывая новые стратегии. При этом мы пробуем раз-





ные модели, изучаем частные случаи, обобщаем результаты, выдвигаем гипотезы и проверяем их, задавая себе все новые и новые вопросы. Это позволяет ощутить вдохновение, страсть и подлинную радость от успеха — важные составляющие математического творчества.

Вот два примера игр из книги.

Игра «Доминирование»

В этой игре два игрока по очереди размещают костяшки домино на прямоугольном поле. Один выкладывает костяшки вертикально, другой — горизонтально. Если игрок не может сделать ход, он проигрывает.

Размеры поля не заданы, что сразу порождает вопросы. Какими должны быть размеры поля, чтобы игра не была ни слишком простой, ни слишком сложной? Существуют ли выигрышные стратегии? Какие? Меняются ли они в зависимости от размеров поля?

Неплохо сначала просто сыграть несколько партий, чтобы почувствовать игру. Начать стоит с полей небольшого размера, например 2×2 , 2×3 или 3×3 . Следует обратить внимание на применяемые стратегии и тактические приемы, проследить за количеством ходов, особенностями игры в начале и в конце партии. Также стоит поду-

мать, как перенести полученное понимание об играх на малых полях на игры на больших полях.

Для дальнейшего исследования можно варьировать количество игроков или добавлять препятствия на поле. Простор для творчества большой.

Игра «Свинья»

В эту игру могут играть от двух до восьми человек. Во время своего хода вы можете бросать пару игровых костей столько раз, сколько захотите, каждый раз прибавляя сумму выпавших очков к своему счету. Остановиться можно в любой момент. Побеждает тот, кто первым наберет 100 очков.

Есть несколько бонусов: если на обеих костях выпадает одинаковое число, сумма удваивается (например, $5 + 5$ дает 20 очков), а две единицы приносят 25 очков.

Но будьте осторожны: если на одной кости выпала единица, а на другой нет (вероятность этого исхода около 28%), то все очки, набранные в течение хода, обнуляются (очки, набранные в предыдущие ходы, сохраняются) и ход переходит к сопернику.

Как бы вы подошли к исследованию этой игры?

Н. Шихова



23 очка? Это подойдет. Пока хватит.



Я пожадничала. Я вела себя как... Прямо не знаю... как какое-то ненасытное животное.



Региональный этап II Всероссийской олимпиады школьников по математике

Задачи

9 класс

1. На прямой дороге стоят школа и дома Ани и Бори. Каждый день Аня выходит из дома в 8:00 и идет в школу. Однажды Боря выбежал из дома в школу в 8:00 и догнал Аню за 30 минут. На следующий день он выбежал в 8:10 и догнал Аню за 40 минут. В какое время ему надо выбежать, чтобы встретить Аню на выходе из ее дома? (Скорость Ани всегда постоянна, скорость Бори тоже постоянна.)

И. Богданов

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD . На основании AC отмечена точка F так, что $BD = CF$. Точка E выбрана таким образом, что четырехугольник $CDEF$ – параллелограмм. Докажите, что $BE = BF$.

А. Кузнецов

3. Даны квадратные трехчлены $P(x)$ и $Q(x)$; обозначим $p_n = P(n)$ и $q_n = Q(n)$. Раз в минуту Саша рисует на координатной плоскости прямую: на первой минуте – прямую с уравнением $y = p_1x + q_1$, на второй – с уравнением $y = p_2x + q_2$, ..., на i -й минуте – с уравнением $y = p_ix + q_i$. Через некоторое время Саша нашел три нарисованные прямые, которые проходят через одну точку. Докажите, что все нарисованные прямые проходят через одну точку.

А. Терёшин

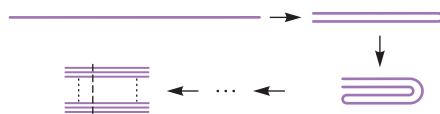
4. См. задачу M2835 «Задачника «Кванта».

5. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$.

А. Кузнецов

6. Саша взял кусок нити. Он сложил ее пополам, затем еще раз пополам и так 10 раз. Затем он взял ножницы и разрезал полученную конструкцию в одном месте (таким

образом, он перерезал нить в 1024 местах). В итоге нить распалась на куски. Оказалось, что длины этих кусков принимают лишь два



различных значения, наименьшее из которых равно 10 см. Найдите все возможные значения длины исходной нити.

А. Храбров

7. См. задачу M2834 «Задачника «Кванта».

8. На столе по кругу выложили 100 двухрублевых и N пятирублевых монет в некотором порядке. Известно, что, выбрав из круга несколько подряд идущих монет, невозможно получить сумму ровно в 52 рубля. Найдите наибольшее возможное значение числа N .

А. Смолин

9. На столе стоят 12 сосудов, выстроенных в 4 ряда по 3 сосуда в каждом. В каждый сосуд налито некоторое (возможно, нулевое) количество воды. Известно, что суммарное количество воды в каждом ряду равно 1 л. При каких α можно утверждать, что на столе найдутся два сосуда, количества воды в которых отличаются не более чем на α л?

И. Богданов

10. Пусть M – середина стороны BC треугольника ABC . На продолжении стороны AB за точку B нашлась такая точка D , что $\angle ADM = \angle ACM = 30^\circ$. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ACD . Найдите угол $OBС$.

А. Кузнецов

10 класс

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных вещественных корня x_1

и x_2 . Известно, что $f(x_1 + x_2) = 2025$. Чему может равняться c ?

Н. Агаханов

2. В стране 30 городов и 30 двусторонних авиалиний, соединяющих города по циклу. Можно ли добавить дополнительно еще 10 авиалиний так, чтобы после этого из любого города можно было добраться до любого другого не более чем за 4 перелета?

П. Кожевников

3. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 2$ и $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 4$. Докажите, что из чисел a, b, c какие-то два отличаются более чем на 2.

А. Кузнецов

4. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости отметить конечное число узлов сетки так, чтобы было отмечено не менее двух точек и для любой пары отмеченных точек нашлась бы отмеченная точка, равноудаленная от них?

И. Ефремов

5. См. задачу M2836 «Задачника «Кванта».

6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Могло ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

А. Кузнецов

7. Дана трапеция $ABCD$. Известно, что $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке E , лежащей внутри трапеции. Докажите, что описанные окружности треугольников ABE и CDE касаются.

А. Терёшин

8. В клетчатом прямоугольнике 2×100 каждую клетку красят в белый или черный цвет. Доминошкой будем называть клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 . Оказалось, что существует единственный способ разбить данный прямоугольник 2×100 на доминошки так, чтобы каждая доминошка покрывала хотя бы 1 черную клетку. Какое наибольшее количество клеток могло быть покрашено в черный цвет?

И. Лобацкий

9. Назовем натуральное число *однобоким*, если оно больше 1 и все его простые делители заканчиваются на одну и ту же цифру. (Например, числа 19 и $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$ – однобокие, а число $682 = 2 \cdot 11 \cdot 31$ – нет.) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия с разностью, не превышающей 2025, состоящая из 150 натуральных чисел, каждое из которых – однобокое?

А. Чиронов

10. См. задачу M2837 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Существуют ли четыре попарно различных положительных числа a, b, c, d , при которых все четыре числа $\frac{a+b}{a-b}, \frac{b+c}{b-c}, \frac{c+d}{c-d}, \frac{d+a}{d-a}$ – целые?

В. Шурыгин

2. Вещественные числа x, y, z таковы, что $2x > y^2 + z^2$, $2y > z^2 + x^2$, $2z > x^2 + y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1.

Н. Агаханов

3. См. задачу M2835 «Задачника «Кванта».

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. В треугольнике ABC с углом 100° при вершине A медианы BK и CN пересекаются в точке M . Прямая, проходящая через точку M и параллельная BC , пересекает описанную окружность треугольника AKN в точках P и Q . Найдите сумму углов BPC и BQC .

К. Бельский

6. См. задачу 6 для 10 класса.

7. На 2025 островах Северного Ледовитого океана живут несколько медведей. Каждый медведь иногда совершает заплыв, переплывая с одного острова на другой. Оказалось, что за год каждый медведь совершил хотя бы один заплыв, но никакие два медведя не сделали поровну заплывов. При этом между каждыми двумя островами A и B был совершен ровно один заплыв: либо из A в B , либо из B в A . Докажите, что на каком-то острове и в начале, и в конце года не было медведей.

А. Кузнецов

8. В пространстве даны скрещивающиеся перпендикулярные прямые AB и CD . Точки E

и F – середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что $\frac{AD + BC}{2} > BD - EF$.
А.Кузнецов

9. Саша выбрал 199 многочленов с вещественными коэффициентами так, что сумма любых ста из них имеет вещественный корень. Докажите, что сумма каких-то девяти из них также имеет вещественный корень.
А.Кузнецов

10. Несколько карточек выложили в ряд слева направо, на каждой карточке написана буква русского алфавита. Назовем набор из 33 карточек *идеальным*, если на этих карточках выписаны все буквы в алфавитном по-

рядке слева направо. Известно, что при любом выборе одной буквы L русского алфавита найдутся 10^6 идеальных наборов, любые два из которых либо не имеют общих карточек, либо имеют ровно одну общую карточку, на которой написана буква L . При каком наибольшем k в этом ряду гарантированно можно найти k идеальных наборов, любые два из которых не имеют общих карточек?

И.Богданов

Публикацию подготовили Н.Агаханов,
И.Богданов, П.Кожевников, А.Кузнецов,
О.Подлипский, К.Сухов

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest
Желаем успеха!*

29. У мудрецов Пети, Васи и Тимы ко лбу прикреплены бумажки, на каждой из которых написано натуральное число. Известно, что сумма всех трех чисел не больше 5. На вопрос «можешь ли ты назвать свое число» Петя ответил «нет», затем Вася ответил «нет», а потом Тима назвал свое число и обосновал ответ. Какое число было написано у Тимы?

Б.Френкин

30. Вася покрасил 131 клетку в квадрате 13×13 в синий цвет, а остальные клетки в зеленый. Верно ли, что Петя в любом случае сможет вырезать из этого квадрата двадцать целиком синих пентаминошек (не обязательно одинаковых)?

С.Костин

31. По кругу на равных расстояниях друг от друга располагаются 2025 снежинок: 507 лазурных, 707 бирюзовых, а остальные перламутровые. Верно ли, что обязательно найдутся три снежинки K , L , M различных цветов такие, что $\angle KLM = 44^\circ$?

С.Костин

32. Выпуклый 100-угольник разрезали на 100 невыпуклых многоугольников. Каково наименьшее возможное суммарное количество сторон этих многоугольников?

Е.Бакаев

Заключительный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Дал Маха

Микрофон, установленный в точке A горизонтальной поверхности (рис. 1), зафиксиро-

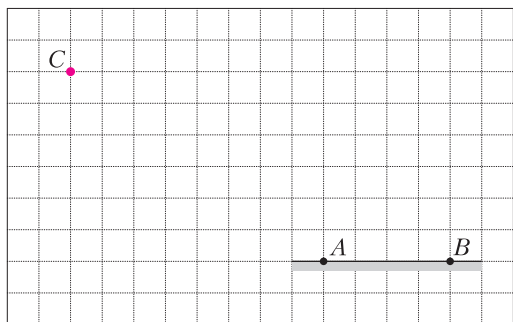


Рис. 1

ровал сигнал от сверхзвукового самолета спустя время t после его пролета над этой точкой. Еще через время t звук начал регистрироваться микрофоном, расположенным в точке B . Известно, что первый сигнал, зарегистрированный микрофоном B , был испущен самолетом из точки C . Самолет двигался равномерно и прямолинейно в одной вертикальной плоскости с микрофонами.

С помощью геометрических построений восстановите траекторию полета самолета и определите его местоположения в моменты регистрации звуковых сигналов микрофонами.

А.Вергунов

Задача 2. Сингулярность

См. задачу Ф2846 «Задачника «Кванта».

Задача 3. Задача трех тел

В далекой-далекой галактике станции инопланетян способны притягивать космические корабли, находящиеся в зоне их действия. Сила притяжения $\vec{F}$ прямо пропорциональ-

на расстоянию $\vec{r}$ от станции до корабля: $\vec{F} = -P\vec{r}$, где P – коэффициент силы станции. Три такие станции расположены в вершинах прямоугольного треугольника с углом 30° и гипотенузой длиной l . Две станции, находящиеся в вершинах острых углов, характеризуются коэффициентом силы P , а станция в вершине прямого угла – коэффициентом силы $2P$.

В пунктах 1–3 космические станции неподвижны.

1) Определите расстояния от каждой станции до точки, в которой корабль будет находиться в равновесии.

В начальный момент времени космический корабль массой m находится на середине гипотенузы треугольника, в вершинах которого находятся станции. Скорость корабля равна нулю, двигатели не работают.

2) Определите максимальную скорость корабля $v_{\max}$ в процессе дальнейшего движения.

3) На какое минимальное расстояние в процессе движения корабль приблизится к станции, находящейся в вершине прямого угла?

Космический корабль вновь оказывается в середине гипотенузы с нулевой начальной скоростью. Однако в этот момент времени станция в вершине прямого угла начинает двигаться с постоянной скоростью $u = 2v_{\max}$ вдоль прямой, перпендикулярной начальному направлению на корабль (рис. 2). Станции, находящиеся в вершинах острых углов, остаются неподвижными.

4) Спустя какое время и на каком расстоянии от начального положения корабль впервые остановится?

Примечание. Все объек-

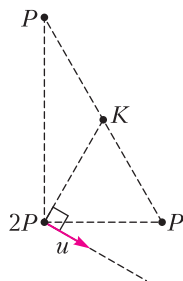


Рис. 2

ты можно считать точечными, на корабль не действуют другие силы, кроме сил притяжения со стороны станций.

А.Аполонский, А.Ершов

Задача 4. Горячо—холодно

На рисунке 3 приведен фрагмент графика зависимости от времени τ средней мощно-

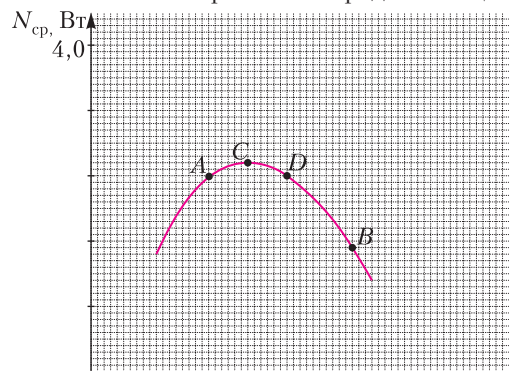


Рис. 3

сти $N_{\text{ср}}$, равной отношению суммарного количества теплоты, переданного слитку серебра массой $m = 50$ г, ко времени его теплообмена с внешними телами. Через некоторое время после начала теплообмена температура слитка в состоянии A увеличилась до $t_A = 40^\circ\text{C}$, а спустя еще 2,2 мин (в состоянии B) она вновь оказалась равна t_A . Удельная теплоемкость серебра $c = 240$ Дж/(кг · °C).

1) Восстановите координатные оси графика и их масштаб, если известно, что начало оси времени нагрева совпадает с началом оси $N_{\text{ср}}$.

2) Найдите начальную температуру t_0 слитка серебра (при $\tau = 0$).

3) Найдите температуры слитка, средние и мгновенные мощности теплообмена с внешними телами в состояниях, соответствующих точкам C и D.

М.Замятнин, А.Вергунов

Задача 5. Неламповый диод

На рисунке 4 изображена схема электрической цепи с регулируемым источником тока. Такой источник выдает во внешнюю цепь электрический ток заданной силы, а напряжение на его выходах подстраивается под параметры внешней цепи. При

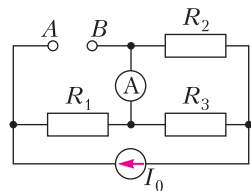


Рис. 4

подключении к контактам A и B последовательно соединенных диода и лампы показания амперметра равны нулю при двух ненулевых значениях силы тока через источник I_{01} и I_{02} . Считайте, что сила тока I_d , протекающего через лампу, и напряжение на ней связаны соотношением $I_d = \alpha U_d^{2/3}$. Для диода сила тока I_d пропорциональна квадрату напряжения на нем: $I_d = \beta U_d^2$. Сопротивления резисторов R_1 , R_2 и R_3 , а также коэффициенты α и β неизвестны.

1) При каком ненулевом значении силы тока I_{03} источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам A и B подключить только лампу?

2) При каком ненулевом значении силы тока I_{04} источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам A и B подключить только диод?

Д.Рубцов

10 класс

Задача 1. Переправа

См. задачу Ф2845 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Призма

На шероховатой горизонтальной поверхности стола находится система, состоящая из призмы массой m , снабженной легким блоком, и бруска массой $M = 2m$ (рис. 5). Боковая поверхность призмы является гладкой, а угол

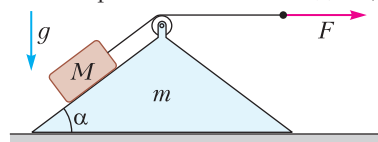


Рис. 5

между гранью, на которой находится брусок, и поверхностью стола равен α ($\sin \alpha = 3/5$). К бруску привязана легкая нерастяжимая нить, перекинута через блок, к противоположному концу которой приложена горизонтальная сила F . Известно, что ускорение призмы не зависит от величины этой силы.

1) Определите возможные значения коэффициента трения μ между призмой и поверхностью стола.

2) Для каждого из полученных в пункте 1 значений μ найдите ускорение призмы a .

Наклонный отрезок нити параллелен левой грани призмы. Трение в оси блока отсутствует.

И.Юдин

Задача 3. Падающий поршень

См. задачу Ф2847 «Задачника «Кванта».

Задача 4. Квадрат из...

Из тонкой непроводящей плоской пластины вырезали пять фигур разной формы и размера. Каждую из них зарядили электрическим зарядом с постоянной, положительной и одинаковой для всех фигур поверхностной плотностью. Первая фигура представляет собой квадрат со стороной $2a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (рис. 6). Модуль напряженности электрического поля, созданного в точке O зарядами на поверхности такой фигуры, равен E_0 .

1) Чему равно отношение E'/E , где E' – модуль напряженности электрического поля, созданного в точке O' второй заряженной фигурой, имеющей форму квадрата со стороной $2\lambda a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной λa (рис. 7)? Здесь λ – некоторое положительное число.

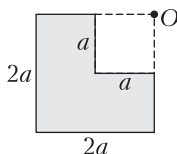


Рис. 6

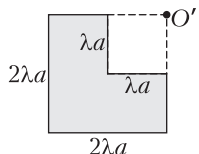


Рис. 7

2) Определите модуль и направление вектора напряженности $\vec{E}_A$ электрического поля, созданного в точке A третьей заряженной фигурой, представляющей собой квадрат со стороной $8a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (рис. 8). Модуль вектора $\vec{E}_A$ выразите через величину E_0 .

3) Определите модуль и направление вектора напряженности $\vec{E}_B$ электрического поля,

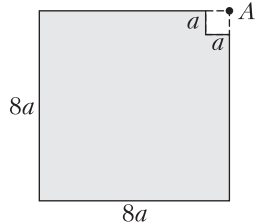


Рис. 8

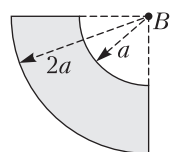


Рис. 9

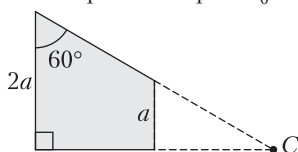


Рис. 10

созданного в точке B четвертой заряженной фигурой, имеющей форму четверти кольца (рис. 9), внутреннего радиуса которого a , а внешний $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_B$ выразите через E_0 .

4) Определите модуль и направление вектора напряженности $\vec{E}_C$ электрического поля, созданного в точке C пятой заряженной фигурой, имеющей форму трапеции (рис. 10), одно основание которой a , второе $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_C$ выразите через E_0 . Углы при большем основании данной трапеции указаны на рисунке.

Точки O, O', A, B и C находятся в одной плоскости с соответствующей фигурой.

А.Заяц

Задача 5. Вай кодамо!

См. задачу Ф2848 «Задачника «Кванта».

11 класс

Задача 1. Два камня

С вершины башни высотой h с одинаковыми скоростями, равными v и направленными перпендикулярно одна к другой, под разными углами к горизонту одновременно брошены два камня так, что их движение происходит в одной вертикальной плоскости. Через некоторое время после броска, как раз непосредственно перед падением одного камня на землю, оказалось, что векторы скоростей камней направлены под одинаковыми углами к горизонту.

Определите величину этого угла φ и расстояние между камнями l в этот момент времени.

Известно, что в начальный момент времени оба камня удаляются от поверхности земли, а непосредственно перед падением одного камня на землю другой камень тоже приближается к поверхности земли. Башня расположена на горизонтальной поверхности. Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха не учитывайте.

А.Аполонский

Задача 2. Цикл как цикл

В архиве лорда Кельвина нашли записки о цикле, состоящем из четырех последовательно совершаемых классическим идеальным многоатомным газом квазистатических процессов 1–2, 2–3, 3–4 и 4–1. График цикла оказался утерян, но стало известно, что в процессах 1–2 и 3–4 на любом малом участке изменение внутренней энергии было точно равно работе газа, а в процессах 2–3 и 4–1 на любом малом участке изменение внутренней энергии было точно равно работе внешних сил над газом. Температуры трех точек цикла были заданы: $T_1 = T_3 = 2T_0$,

$T_4 = T_0$. В точке 4 давление и объем равны $p_4 = p_0$ и $V_4 = V_0$ соответственно.

1) Чему была равна температура газа T_2 в точке 2?

2) Восстановите график цикла в координатах $\log_2 \frac{p}{p_0}$ от $\log_2 \frac{V}{V_0}$.

3) Определите КПД цикла.

К. Соломатин

Задача 3. Электростатическая левитация

Вертикальный полубесконечный сплошной однородный диэлектрический цилиндр радиусом R заряжен с постоянной по объему плотностью заряда ρ . От цилиндра отрезали тонкий диск толщиной d ($d \ll R$), затем прислонили его обратно и отпустили

(рис. 11). Диск остался неподвижным, причем оказалось, что единственная сила взаимодействия между диском и цилиндром — это сила электростатического отталкивания, равная по модулю

$$F_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho^2 R^3 d}{\epsilon_0}.$$

Рис. 11

1) Найдите плотность материала цилиндра D .

2) Дыску сообщают такую скорость v_0 , направленную вертикально вверх, что он совершает малые колебания, двигаясь поступательно. Определите период этих колебаний.

Далее от диска отрезали небольшое кольцо и удалили его. При этом центр диска остался на оси цилиндра, а новый радиус составляет $R' = R - \Delta R$, где $\Delta R \ll R$.

3) Определите положение равновесия диска радиусом R' . В ответе укажите ширину зазора z_0 между диском и цилиндром в положении равновесия.

4) Пусть диск радиусом R' находится в положении равновесия. Определите период малых колебаний диска при его поступательном движении вдоль оси цилиндра после сообщения такой же скорости v_0 , направленной вертикально вверх. Если вы не выполнили пункт 3, считайте $z_0 > 0$ известной величиной.

Примечания. Ускорение свободного падения равно g . Считайте, что диск может двигаться только поступательно вдоль оси симметрии системы, а основания диска гори-

зонтальны. Все силы трения отсутствуют. Любые возможные соударения абсолютно упругие. Гравитационное взаимодействие диска и цилиндра, магнетизм и электромагнитное излучение не учитывайте. Диэлектрик считайте неполяризующимся.

Г. Рассторгуев

Задача 4. Конденсатор Глюка

В самом начале карьеры экспериментатора Глюк увлекался разработкой новых устройств. Одним из них был конденсатор довольно необычной конструкции. На двух поверхностях прямоугольной стеклянной пластинки толщиной $h = 0,5$ мм было нанесено металлическое покрытие П, игравшее роль обкладок конденсатора. При этом одна сторона пластинки была покрыта металлом полностью, вторая лишь частично (рис. 12). На свободный от покрытия участок помещалась маленькая капля К проводящей жидкости, полностью несмачивающей стекло. Подсоединенный к обкладке

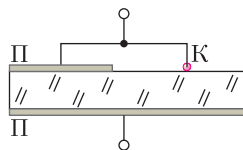


Рис. 12

с жидкостью проводник раздваивался так, что одна его часть была подсоединена к участку с покрытием, второй конец был погружен в каплю жидкости. В одном из экспериментов конденсатор Глюка подключался последовательно с другим конденсатором постоянной емкости (опорным) к регулируемому источнику напряжения. Напряжение источника плавно увеличивалось от нулевого значения, при этом исследовалась зависимость напряжения на опорном конденсаторе U_C от напряжения источника U . График зависимости состоял из двух линейных участков (рис. 13), при этом напряжение на опорном конденсаторе в точке излома составляло треть от напряжения источника U_1 , соответствующего этой точке.

1) Чему равнялось напряжение на опорном конденсаторе при напряжении источника $U = 2U_1$?

2) Определите коэффициент поверхностного натяжения использованной Глюком жидкости, если $U_1 = 5,9$ кВ.

Электрическая постоянная равна $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Диэлектрическая про-

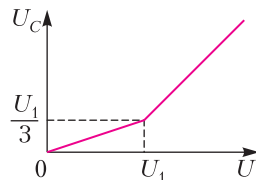


Рис. 13

нищаемость стекла $\epsilon = 7$. Толщина стеклянной пластинки мала по сравнению с другими ее размерами. Коэффициенты поверхностного натяжения жидкости на границе с воздухом и со стеклом одинаковы. Влиянием силы тяжести можно пренебречь.

А.Аполонский

Задача 5. Две половинки

На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится точечный монохроматический источник света S с длиной волны λ . Известно, что диаметр линзы равен D , причем $\sqrt{\lambda F} \ll D \ll F$. Линзу разрезают на две одинаковые половинки (полулинзы), которые смещают параллельно исходным положениям (рис. 14) вдоль главной оптической оси. Одна половинка (верхняя) оказывается на расстоянии $d_1 = 4F/3$ от источника, а другая (нижняя) – на расстоянии $d_2 = 2F$.

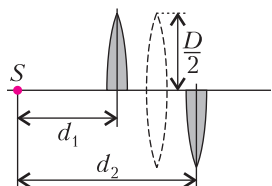


Рис. 14

накаковые половинки (полулинзы), которые смещают параллельно исходным положениям (рис. 14) вдоль главной оптической оси. Одна половинка (верхняя) оказывается на расстоянии $d_1 = 4F/3$ от источника, а другая (нижняя) – на расстоянии $d_2 = 2F$.

1) Найдите, на каких расстояниях l_1 и l_2 от источника находятся его изображения в верхней и нижней половинках линзы.

Перпендикулярно главной оптической оси размещают экран на некотором расстоянии L от источника.

2) Опишите картину, которая наблюдается на экране (изобразите ее схематически на рисунке и определите величины существенных характеристик) при $L_1 = 3F$ и $L_2 = 6F$.

3) При каком расстоянии $L_3 > 2F$ на экране наблюдается изображение в форме круга?

Экран закрепляют на расстоянии $L_4 = 40F/9$ от источника.

4) Опишите качественно и объясните картину, которая наблюдается на экране, указав все характерные детали.

5) Пройдем из точки пересечения экрана оптической осью вверх, до края наблюдаемой картины. Определите, сколько на этом пути окажется интервалов, на которых освещенность экрана будет возрастать. Для расчета используйте такие значения: $F = 4$ м, $\lambda = 650$ нм, $D = 5$ см.

Считайте, что исходная линза была идеальной: она обладала свойством таутохронизма (лучи от одного источника, прошедшие через разные ее точки, достигают новой точки пере-

сечения за одинаковое время) и при прохождении через ее фокус фаза световой волны скачком изменялась на π . Все лучи, не попадающие непосредственно от источника на полулинзы, обрезаются диафрагмами.

К.Соломатин

Победители олимпиады

9 класс

Залеский М. – Москва,
Константинов А. – Москва,
Спиридонов М. – Московская область,
Щёткин М. – Свердловская область,
Артамонов Г. – Москва,
Тихонюк Я. – Москва,
Андронов И. – Москва,
Проскурнин А. – Москва,
Мальшев С. – Санкт-Петербург,
Стрельников Д. – Свердловская область,
Буровик Н. – Санкт-Петербург,
Сергеев Д. – Санкт-Петербург,
Антонов А. – Санкт-Петербург;

10 класс

Ерёмин А. – Калининградская область,
Воробьев Р. – Московская область,
Черкасов Э. – Москва,
Дербунович Л. – Москва,
Доброхвалов Я. – Московская область,
Мяжкова М. – Москва,
Шипов Я. – Тюменская область,
Хоречко А. – Московская область,
Алексеева Т. – Москва,
Близняков В. – Москва,
Видякин А. – Калининградская область,
Судаков К. – Санкт-Петербург;

11 класс

Лукин И. – Московская область,
Аронов М. – Московская область,
Костенко С. – Москва,
Войлов А. – Москва,
Торошин А. – Московская область,
Гречкин Г. – Москва,
Крутиков Е. – Москва,
Рыбаков В. – Санкт-Петербург,
Николаев Д. – Чувашская Республика – Чувашия,
Орлов М. – Москва,
Агеев Я. – Московская область,
Руковчук П. – Московская область,
Попов К. – Москва,
Зарытов В. – Санкт-Петербург,
Кривошеков Е. – Алтайский край.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №3)

1. Ответ приведен на рисунке 1.

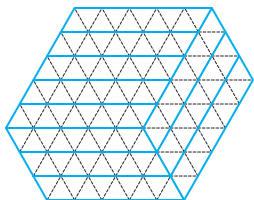


Рис. 1

2. 580753.

Составим таблицу соответствия цифры в образце с количеством черточек:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество черточек	6	3	4	4	4	5	5	3	7	5

У Тани получилось такое количество черточек: 5, 7, 6, 3, 5, 4. Заметим, что семь черточек в образце есть только у цифры 8, поэтому вторая цифра в Танином индексе – это 8, и она написана правильно. Также только в записи цифры 0 используется шесть черточек, значит, третья цифра – это 0, и в ней Таня сделала одну ошибку. Последней цифрой в индексе может быть 2, 3 или 4, но в случае цифр 2 и 4 Таня сделала бы по три ошибки. Следовательно, последняя цифра – это 3, и в ней одна ошибка. Таким образом, в оставшихся трех цифрах сделано по две ошибки. Теперь легко проверить, что первая и пятая цифры индекса равны 5, а четвертая равна 7.

3. Один треугольник.

Оценка. Обозначим длины красных палочек $r_1 \leq r_2 \leq r_3$, желтых $y_1 \leq y_2 \leq y_3$, а зеленых $g_1 \leq g_2 \leq g_3$. Так как из любой тройки палочек разных цветов складывается треугольник, то $r_1 + y_2 > g_3$, $y_1 + g_2 > r_3$ и $g_1 + r_2 > y_3$. Сложив эти три неравенства, получим $r_1 + r_2 + y_1 + y_2 + g_1 + g_2 > r_3 + y_3 + g_3$. Следовательно, должно выполняться по крайней мере одно из неравенств $r_1 + r_2 > r_3$, $y_1 + y_2 > y_3$ или $g_1 + g_2 > g_3$, т.е. хотя бы один треугольник из палочек одинакового цвета точно можно сложить.

Пример. Пусть есть три красные палочки длины 3, а желтые и зеленые палочки имеют длины 2, 2, 4. Тогда набор из трех палочек разных цветов может иметь длины {2, 2, 3}, {2, 3, 4} или {3, 4, 4}. Из всех этих наборов складываются треугольники. При этом одноцветный треугольник можно сложить только из красных палочек.

4. Может.

Когда судья выберет гири массы от 11 г до 19 г, эксперт выполнит следующие взвешивания

(жирным шрифтом выделены гири, взятые судьей):

$$10 + \mathbf{11} = 21, 10 + \mathbf{12} = 22, 10 + \mathbf{13} = 23, \dots$$

$$\dots, 10 + \mathbf{19} = 29.$$

Заметим, что только гиря массой 10 г может в сумме с девятью разными гирями давать массу какой-то еще гири. Значит, результаты этих взвешиваний позволят судье узнать, какие гири имеют массы 10 г и 20 г (первая была во всех взвешиваниях этой серии, а вторая не использовалась), а также разбить остальные гири на пары с разностью масс 10 г, причем в каждой паре известно, какая именно гиря легче.

При выборе судьей гирек массами от 22 г до 29 г эксперт действует следующим образом:

$$10 + 11 < \mathbf{22}, 10 + 12 < \mathbf{23}, 10 + 13 < \mathbf{24}, \dots$$

$$\dots, 10 + 18 < \mathbf{29}.$$

Эти взвешивания упорядочивают пары, полученные после первой серии. Следовательно, по их результатам судья определит массы всех гирек в них. Судья также будет выбирать гири массами 10 г, 20 г и 21 г – в этих случаях эксперт может действовать как угодно.

Замечание. В данном решении есть три взвешивания, результаты которых не имеют значения для определения масс всех гирек. Известен алгоритм, в котором таких «лишних» взвешиваний девять.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №2)

21. Мысленно сдвинем верхний треугольник вниз на вектор, соответствующий одной спичке. Положив спички на два из трех новых отрезков, получим конструкцию, как на рисунке 2. Каждая часть складывается из равностороннего треугольника и ромба с углом 30° .

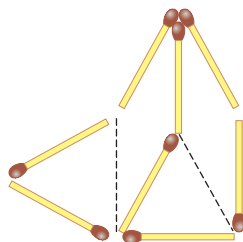


Рис. 2

22. а) Да; б) да.

а) Если есть два ребенка, которые за два раза поиграли с одной и той же парой игрушек, то и другие двое играли с одной и той же парой игрушек. Значит, можно раздать первым двум детям игрушки других двух и наоборот – так у каждого окажется новая игрушка. Если все дети поиграли с разными парами игрушек, то пусть первый поиграл с утенком и слоненком. Тогда есть ребенок, который поиграл с утенком, но не

со слоненком (назовем его вторым), есть ребенок, поигравший со слоненком, но не с утенком (пусть он третий), и четвертый ребенок не играл ни со слоненком, ни с утенком. Тогда можно выдать четвертому слоненка, третьему – утенка, второму выдать ту игрушку из оставшихся двух, которой у него еще не было, и первому выдать оставшуюся игрушку (с которой уже поиграл второй).

б) Итак, первые три раза воспитательнице удалось дать каждому игрушку, которой у него еще не было, т.е. для каждого осталась только одна игрушка, с которой он еще не играл. Пусть есть два ребенка, которые еще не играли с одной и той же игрушкой – скажем, с утенком. Тогда первые три раза утенок доставался двум другим детям – значит, кому-то из них он уже достался два раза, противоречие. Поэтому можно выдать каждому ту игрушку, которой у него еще не было, и все получают по игрушке.

23. 42.

Оценка. Пусть в разрезании присутствует по x уголков каждого типа. Поскольку большой уголок состоит из 48 клеток, средний – из 12, а маленький – из 3, получаем

$$48x + 12x + 3x = 63x = n^2.$$

Видим, что n^2 делится на $63 = 3^2 \cdot 7$, следовательно, n делится на $3 \cdot 7 = 21$.

Случай $n = 21$ невозможен. Докажем это. Предположим, что $n = 21$ и, следовательно, $x = 7$. Отметим $11^2 = 121$ клеток квадрата 21×21 , как на рисунке 3. Большой уголок содержит 12 отмеченных клеток, средний – 3, маленький – 0 или 1. Поэтому отмеченных клеток не больше

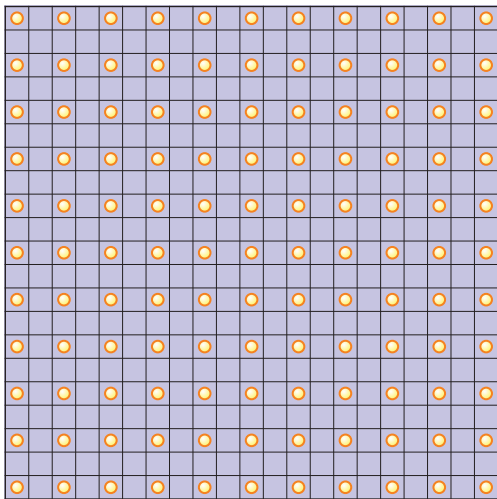


Рис. 3

$7(12 + 3 + 1) = 112 < 121$. Противоречие. Число n кратно 21, поэтому $n \geq 42$.

Пример. Приведем пример, как разрезать квадрат со стороной $n = 42$. Сначала поделим квадрат на три прямоугольника 2×42 , 40×6 , 40×36 . Покажем, как каждый из них мы делим на уголки.

1) Прямоугольник 2×42 поделим на $42 : 3 = 14$ прямоугольников 2×3 , каждый из которых поделим на два маленьких уголка. Получим $14 \cdot 2 = 28$ маленьких уголков.

2) Прямоугольник 40×6 поделим на $40 : 4 = 10$ прямоугольников 4×6 , каждый из которых поделим на два средних уголка. Получим $10 \cdot 2 = 20$ средних уголков.

3) Прямоугольник 40×36 поделим на $(40 : 8) \cdot (36 : 12) = 15$ прямоугольников 8×12 ; из них 14 поделим на два больших уголков, а один – на 8 средних уголков. Получим $14 \cdot 2 = 28$ больших уголков и 8 средних.

Итого уголков каждого типа – по 28.

24. 3.

Как известно, любой многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники (см., например, книгу В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии», глава «Выпуклые и невыпуклые многоугольники»). Поделив музей на треугольники таким образом, получим, что любая точка в музее расположена внутри или на границе такого треугольника, а значит, из нее видно хотя бы три вершины 10-угольника, образующего музей. Следовательно, из каждой точки видно хотя бы 3 скульптуры.

Приведем пример, когда есть точка внутри музея, из которой видно только три скульптуры. Рассмотрим одну треугольную «комнату», от которой отходит три узких «коридора» (рис. 4). Коридоры можно сделать достаточно длинными так, чтобы из красной точки не было видно больше трех скульптур.

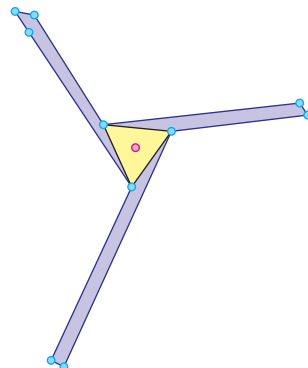


Рис. 4

Парадоксы плоского конденсатора

1. В a/d раз.

2. Перешла в тепло.

3. $A_{\text{бат}} = \mathcal{E} \Delta q = -C(\epsilon - 1)\mathcal{E}^2 < 0$,

$$A_{\text{внеш}} = \frac{(\epsilon - 1)C\mathcal{E}^2}{2} > 0.$$

4. а) $A_{\text{внеш}} = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \frac{\epsilon_0 S d}{(d-l)^2};$

б) $A_{\text{внеш}} = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \frac{\epsilon_0 S l}{(d-l)d}.$

5. В первом случае надо совершить работу

$$A_1 = \frac{q^2}{2C} > 0, \text{ а во втором случае — работу}$$

$$A_2 = -\frac{q^2}{2C} < 0.$$

6. $F = \frac{1}{2} \frac{C(i_0 R)^2}{d}, Q = \frac{C(i_0 R)^2}{2}.$

Региональный этап LI Всероссийской олимпиады школьников по математике

Задачи

9 класс

1. В 7:45.

Пусть S — расстояние между домами Ани и Бори (измеренное в метрах), а x и y — скорости Ани и Бори соответственно (измеренные в м/мин). Когда Боря догоняет Аню, скорость их сближения равна $y - x$. Поэтому в первый день Боря догнал Аню

за $\frac{S}{y-x} = 30$ мин. Во второй же день Аня успела

отойти на $10x$ м, так что $\frac{S+10x}{y-x} = 40$ мин. Отсюда

имеем $S = 30(y-x) = 40(y-x) - 10x$, откуда

$$10y = 20x \text{ и } y = 2x. \text{ Поэтому } 30 = \frac{S}{y-x} = \frac{S}{x}, \text{ а}$$

Боре надо потратить на путь между домами

$$\frac{S}{y} = \frac{S}{2x} = 15 \text{ мин. Значит, выбежать ему надо}$$

в 7:45.

2. Продлим отрезок DE до пересечения со стороной BC в точке X (рис. 5). Поскольку $DX \parallel AC$,

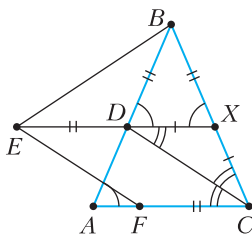
треугольник BDX равнобедренный. Кроме того, $\angle CDX = \angle DCA =$

$= \angle DCB$, поэтому треугольник CDX также равнобедренный, и

$CX = DX$. Из параллелограмма $CDEF$ получаем $DE = CF = BD =$

$= BX$, так что $XE =$

Рис. 5



$= XD + DE = CX + XB = BC$. Поскольку $\angle BXD = \angle BCF$, получаем, что треугольники BXE и FCB равны по двум сторонам и углу между ними, откуда и следует, что $BE = BF$.

3. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, а $Q(x) = ux^2 + vx + w$. Пусть прямые, нарисованные на k -й и m -й минутах, пересекаются в точке с абсциссой x_0 (причем $p_k \neq p_m$). Это значит, что $p_k x_0 + q_k = p_m x_0 + q_m$, или

$$x_0 = \frac{q_m - q_k}{p_k - p_m} = \frac{u(m^2 - k^2) + v(m - k)}{a(k^2 - m^2) + b(k - m)} = -\frac{u(k + m) + v}{a(k + m) + b}. \quad (1)$$

Пусть теперь прямые, нарисованные на k -й, m_1 -й и m_2 -й минутах, пересекаются в одной точке. Заметим, что квадратный трехчлен $P(x)$ принимает каждое значение не более двух раз, поэтому без ограничения общности можно считать, что p_k отлично от p_l и p_m . Тогда полученная формула означает, что

$$\frac{u(k + m_1) + v}{a(k + m_1) + b} = \frac{u(k + m_2) + v}{a(k + m_2) + b}. \quad (2)$$

Домножив на знаменатели и сократив подобные слагаемые, получаем

$$(k + m_1)(ub - av) = (k + m_2)(ub - av),$$

что при $m_1 \neq m_2$ означает, что $ub - av = 0$. Таким образом, равенство (1) верно вообще для всех значений m_1 и m_2 , а значит, и равенство (2) будет выполнено для всевозможных значений m_1 и m_2 , что и означает, что прямые, нарисованные в произвольные моменты m_1 и m_2 , пересекают k -ую прямую в одной и той же точке.

Рассуждение выше может не сработать только для момента m , когда $p_k = p_m$. Но, поскольку нам уже известно, что все остальные прямые пересекаются в одной точке, можно теперь провести такое же рассуждение для других трех моментов, установив требуемое.

5. $m = 1, n = 3$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} & ((n-1)! - 1)((n-2)! - 1) = \\ & = (n-1)! \cdot (n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 = \\ & = ((n-1)! - n) \cdot (n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2. \end{aligned}$$

Пусть $n > 4$. Очевидно, что числа $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ взаимно просты. Предположим, что это не так и оба этих числа делятся на простое число p . Тогда число $(n-1)! - 1 - ((n-2)! - 1) \cdot (n-1) = n-2$ тоже делится на p . Значит, $(n-2)!$ делится на p , а $(n-2)! - 1$ не кратно p , противоречие. Таким образом, произведение взаимно простых чисел $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ — точный квадрат, тогда и каждое из них точный квадрат. Однако, число

$(n-1)! - 1$ при $n > 4$ дает остаток 3 при делении на 4, поэтому оно точным квадратом быть не может. Остается разобрать случаи $n \leq 4$. При $n = 4$ получается $(m-1)^2 = 5$, решений нет. При $n = 3$ мы получаем $(m-1)^2 = 0$, что дает единственное решение $m = 1$, $n = 3$.

6. 15360 см или 20480 см.

Полученная до разрезания конструкция состоит из 1024 отрезков нити, которые нить проходит поочередно слева направо и справа налево (пусть оба конца нити находятся слева). Тогда если разрез проведен в a см от левого края и в b см от правого края, то длины полученных кусков нити равны a , $2a$ и $2b$. Поскольку этих длин всего две, то $2b$ совпадает либо с a , либо с $2a$, а наименьший кусок равен $a = 10$ см. Значит, $b = 5$ см или $b = 10$ см, а общая длина нити, равная $1024(a+b)$, тогда может принимать значения $1024 \cdot 15 = 15360$ см или $1024 \cdot 20 = 20480$ см.

8. $N = 450$.

Покажем, как выложить 100 двухрублевых и 450 пятирублевых монет по кругу так, чтобы выполнялось условие задачи. Пронумеруем места по кругу по часовой стрелке числами от 1 до 550 и выложим двухрублевые монеты на места, номера которых кратны 11 (т.е. 11, 22, ...), и на места, номера которых дают остаток 5 при делении на 11 (т.е. 5, 16, ...); на остальные места выложим пятирублевые монеты. Тогда между каждой парой соседних двухрублевых монет находятся 4 или 5 пятирублевых монет, причем эти количества чередуются.

Рассмотрим некоторый набор подряд идущих монет; покажем, что они не дают сумму в 52 рубля. Если среди них нет двухрублевых, то сумма делится на 5, а 52 не делится на 5. Если среди них ровно две двухрублевых, сумма дает остаток 4 при делении на 5, т.е. тоже не равна 52. Если двухрублевая монета одна, вместе с ней в наборе может быть не более $4 + 5 = 9$ пятирублевых, т.е. сумма не превосходит $2 + 9 \cdot 5 = 47$ рублей. Наконец, пусть двухрублевых монет в наборе хотя бы три, рассмотрим три двухрублевые монеты, лежащие в наборе подряд. Между ними есть 9 пятирублевых; суммарное достоинство этих монет уже равно $3 \cdot 2 + 9 \cdot 5 = 51$ рублю. Значит, набрана сумма либо в 51 рубль, либо хотя бы в $51 + 2 = 53$ рубля. Таким образом, полученная раскладка удовлетворяет условию.

Осталось показать, что при любой раскладке 100 двухрублевых и не менее 451 пятирублевых монет обязательно можно выбрать несколько монет подряд с суммарным достоинством 52 рубля. Пронумеруем двухрублевые монеты числами 1, 2, ..., 100 в порядке их расположения по часо-

вой стрелке. Выделим 50 двухрублевых монет с нечетными номерами. Между выделенными монетами есть 50 промежутков; в одном из них окажется не менее 10 пятирублевых монет, иначе общее количество пятирублевых монет не превосходило бы $9 \cdot 50 = 450$. Итак, мы нашли промежуток, в котором есть ровно одна двухрублевая монета C и хотя бы 10 пятирублевых; тогда можно взять C и 10 пятирублевых монет так, чтобы они лежали подряд. Тогда и наберется сумма ровно в 52 рубля.

9. При $\alpha \geq 1/17$.

Предположим, что количество воды в любых двух сосудах отличается больше чем на α л. Пусть $k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{11}$ — количества воды в сосудах; назовем индексом сосуда его номер в этом ряду. Заметим, что $k_0 \geq 0$, и по нашему предположению $k_i > \alpha + k_{i-1}$; отсюда получается, что $k_0 > \alpha i$ при $i \geq 1$.

Сумма всех индексов равна $0 + 1 + \dots + 11 = 66$, поэтому найдется ряд, сумма индексов в котором не меньше 17. Из неравенств выше получаем, что суммарное количество воды в этом ряду больше 17α , откуда $\alpha < 1/17$. Итак, при всех значениях $\alpha \geq 1/17$ утверждать требуемое можно. С другой стороны, если распределить воду по рядам как

$$\frac{13}{17} + \frac{1}{17} + \frac{3}{17}, \quad \frac{10}{17} + \frac{2}{17} + \frac{5}{17}, \\ \frac{9}{17} + \frac{8}{17} + 0, \quad \frac{7}{17} + \frac{6}{17} + \frac{4}{17},$$

то количества воды в любых двух сосудах будут отличаться минимум на $1/17$ л. Поэтому при всех $\alpha < 1/17$ утверждать требуемое нельзя.

10. 30° или 150° .

Отметим точку P так, что треугольник BSP — равносторонний, а точки A и P лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 6). Тогда $30^\circ = \angle BPM = \angle BDM$, т.е. точки B, M, P, D лежат на одной окружности, а поскольку $\angle BMP = 90^\circ$, то и $\angle BDP = 90^\circ$. Но, так как $\angle PCA = \angle PCB + \angle BCA = 90^\circ$, точки A, D, P, C также лежат на одной окружности (с диаметром AP) и точка O из условия — центр этой окружности. В частности, O лежит на серединном перпендикуляре к CP , совпадающем с биссектрисой угла PBC . Отсюда и вытекает, что $\angle CBO$ равен 30° или 150° — в зависимости от того, по какую сторону от

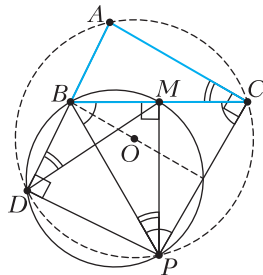


Рис. 6

прямой AB окажется точка O . Нетрудно видеть, что оба значения угла реализуются ($\angle CBO$ будет равен 150° , если, скажем, угол ABC будет близок к 150°).

10 класс

1. 2025.

Воспользуйтесь теоремой Виета.

2. Можно.

Занумеруем города числами $0, 1, 2, \dots, 29$ так, чтобы изначально у нас был цикл $0-1-2-3-\dots-28-29-0$. Добавим 9 авиалиний $0-3, 0-6, 0-9, \dots, 0-27$ (а 10-ю авиалинию добавим какую угодно).

Покажем, что условие выполняется. Возьмем любые два города A и B . От A можно не более чем за 1 перелет добраться до города C с номером, кратным 3. Аналогично, от B можно не более чем за 1 перелет добраться до города D с номером, кратным 3. А между городами C и D есть путь не более чем из двух перелетов, так как все города с номерами, кратными 3, соединены с городом номер 0.

3. Вычтем из второго равенства первое и разложим левую часть на множители, получим

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 2. (*)$$

Не умаляя общности (в условии имеется циклическая симметрия переменных a, b, c), будем считать, что c — наибольшее из данных чисел. Тогда $c-a \geq 0$, но из (*) видим, что $c-a \neq 0$. Значит, $c-a > 0$. Аналогично, $b-c < 0$. Тогда из (*) следует $a-b < 0$. Получается $a < b < c$.

Обозначим $z = c-a$, $x = b-a$, $y = c-b$, так что $x > 0$, $y > 0$, $z = x+y$; тогда (*) принимает вид $xyz = 2$. Нам нужно доказать, что $z > 2$.

Заметим, что $4xy \geq (x+y)^2$, так как это неравенство преобразуется к виду $(x-y)^2 \geq 0$ (или следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом). Отсюда $4xy \leq z^2$ и далее

$$2 = xyz = 4xy \cdot \frac{z}{4} \leq z^2 \cdot \frac{z}{4} = \frac{z^3}{4}.$$

Получаем $2 \leq \frac{z^3}{4}$, откуда $z^3 \geq 8$ и поэтому $z \geq 2$. Остается показать, что $z = 2$ невозможно. Если $x \neq y$, то $(x-y)^2 > 0$, и тогда в предыдущем рассуждении мы получим строгое неравенство $z > 2$. Значит, $z = 2$ возможно лишь при $x = y = 1$. В этом случае $b = a+1 > 1$ и $c = a+2 > 2$. Тогда

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2c > 1^2 \cdot 2 = 2,$$

что противоречит первому равенству из условия задачи.

4. Нельзя.

Предположим, что требуемое возможно. Введем систему координат так, чтобы узлы являлись в

точности точками с целыми координатами. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке. Предположим, что нашлись два отмеченных узла разных цветов: A — белый, B — черный. Пусть нашелся узел C , равноудаленный от них, и пусть, не умаляя общности, C — белый. Тогда у вектора $\overrightarrow{CA}$ координаты одной четности, значит, по теореме Пифагора CA^2 равно сумме квадратов целых чисел одной четности, т.е. CA^2 четно. Аналогично рассуждая, получаем, что CB^2 нечетно — противоречие.

Итак, все отмеченные узлы имеют один цвет. Проведем через все узлы этого цвета прямые с угловым коэффициентом ± 1 — получится новая квадратная сетка с шагом (длиной стороны квадрата) $\sqrt{2}$. Видим, что отмеченные точки являются узлами этой новой сетки. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что отмеченные узлы лежат на квадратной сетке с шагом $(\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, (\sqrt{2})^4, \dots$. Но шаг сетки не может превышать константы — расстояния между двумя фиксированными отмеченными точками. Противоречие.

6. Не могло.

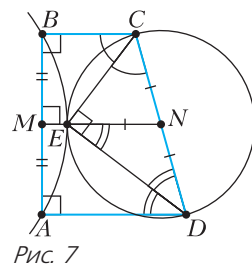
Назовем числа $0, 1, \dots, 49$ маленькими, а остальные числа, которые могут появиться на табло, т.е. числа $50, 51, \dots, 99$ — большими. Заметим, что после нажатия из маленького числа обязательно получается большое, а из большого числа — маленькое. Значит, после нечетного количества операций на табло будет гореть большое число.

7. По условию, $BC \perp AB$ и $AD \perp AB$, поэтому $BC \parallel AD$ — основания трапеции. Пусть M и N — середины AB и CD , так что MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 7). При этом MN параллельна основаниям, поэтому $MN \perp AB$ и MN — серединный перпендикуляр к AB . Значит, центр окружности (ABE) лежит на прямой MN . Положим

$$x = \angle BCE = \angle ECD = \frac{1}{2} \angle BCD,$$

$$y = \angle CDE = \angle EDA = \frac{1}{2} \angle CDA.$$

Из параллельности BC и AD следует, что $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$, поэтому $x + y = 90^\circ$. Видим, что треугольник CED — прямоугольный ($\angle CED = 90^\circ$), а значит, N — центр окружности (CED) . Далее, в прямоугольном треугольнике CED имеем $EN = ND$, поэтому $\angle NED =$



$= \angle EDN = y$, а из равенства $\angle NED = \angle EDA$ следует $EN \parallel AD$, поэтому E лежит на прямой MN . Итак, E – общая точка окружностей (ABE) и (CDE) , лежащая на их линии центров MN . Значит, эти окружности касаются (в точке E).

8. 120.

Пусть прямоугольник 2×100 разбит на доминошки. Двигаясь слева направо, понимаем, что горизонтальные доминошки объединяются в *блоки* 2×2 . Далее под *блоком* понимаем такой блок 2×2 из двух горизонтальных доминошек.

Назовем *хорошим* разбиение на доминошки, в котором в каждой доминошке хотя бы одна клетка черная. Назовем раскраску *хорошей*, если при ней существует ровно одно хорошее разбиение.

1) Приведем *пример* хорошей раскраски, в которой 120 черных клеток. Красим первый столбец белым, следующие 3 столбца – черным, пятый столбец – белым, и далее продолжаем с периодом 5 (рис. 8). Тогда разобьем наш прямоугольник



Рис. 8

на прямоугольники 2×5 и в каждом из них пусть слева и справа находятся блоки, а посередине – вертикальная доминошка. Видим, что получено хорошее разбиение. Покажем, что оно единственно. Посмотрим на границу между 5-м и 6-м столбцами. Эта граница не может находиться внутри блока, значит, эта граница обязательно должна присутствовать в разбиении и отрезать прямоугольник 2×5 . Далее продолжим аналогичные рассуждения с отрезанием прямоугольников 2×5 . Остается разобраться, как может быть устроено хорошее разбиение для прямоугольника 2×5 .

В первом столбце не может быть вертикальной доминошки, поэтому в 1-м и 2-м столбцах точно находится блок. Аналогично, в 4-м и 5-м столбцах находится вертикальный блок. Тем самым хорошее разбиение однозначно восстановлено. Обоснование того, что наша раскраска хорошая, завершено.

2) *Оценка.* Рассмотрим хорошее разбиение прямоугольника 2×100 . В каждом блоке не более двух черных клеток, иначе мы можем заменить две горизонтальные доминошки этого блока на вертикальные, и разбиение останется хорошим. В вертикальной доминошке может быть одна черная клетка или две черные клетки. В первом случае вертикальную доминошку назовем *светлой*, а во втором – *темной*. Если у нас k темных доминошек, то в них $2k$ черных клеток, а остальная площадь $(200 - 2k)$ разбита на блоки и свет-

лые доминошки, т.е. в ней не более половины площади занимают черные клетки.

Итого черных клеток не более $2k + (100 - k) = 100 + k$. Остается понять, что темных доминошек не более 20.

Вертикальная доминошка не может граничить с темной доминошкой, иначе эту пару можно заменить на блок (из двух горизонтальных доминошек), и разбиение останется хорошим. Значит, граничить с темной доминошкой может только блок. К одному и тому же блоку слева и справа не могут примыкать две темные доминошки, иначе в образованном ими прямоугольнике 2×4 можно заменить все доминошки на горизонтальные, и разбиение останется хорошим (рис. 9).

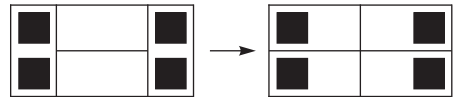


Рис. 9

Рассмотрим две ближайшие друг к другу темные доминошки. Промежуток (по горизонтали) между ними не может составлять 0, 1, 2 или 3 клетки (в последнем случае два блока, соседних с этими темными доминошками, должны пересекаться, что невозможно). Суммируя длины промежутков для $k-1$ пар ближайших темных доминошек, получаем, что количество вертикалей не менее $k + 4(k-1) = 5k - 4$. Но оно равно 100. Отсюда $5k - 4 \leq 100$ и $5k \leq 104$, что невозможно при $k \geq 21$.

Неравенство $k \leq 20$ установлено.

9. Не существует.

Пусть у нас есть возрастающая прогрессия с разностью d из 150 однобоких чисел. Разберемся, что мешает числу d быть слишком маленьким. Используем такое известное утверждение.

Утверждение. Пусть d взаимно просто с натуральным m . Тогда среди любых m последовательных членов арифметической прогрессии с разностью d есть член, делящийся на m .

(Более того, числа $a, a+d, a+2d, \dots, a+(m-1)d$ дают все m различных остатков при делении на m ; поскольку если остатки у чисел $a+ld$ и $a+kd$ для некоторых $0 \leq k < l < m$ совпали, то $ld - kd = (l-k)d$ должно делиться на m , а значит, в силу взаимной простоты d и m , $(l-k)$ должно делиться на m , что неверно.)

Далее, пусть p и q – два простых числа, оканчивающиеся на разные цифры, причем такие, что $pq \leq 150$; назовем такую пару *вредной*. Тогда если d не делится ни на одно из чисел p, q , то, согласно утверждению, в нашей прогрессии есть член, делящийся на pq , что невозможно для однобокого числа.

$\dots + g_{100}(x) > 0$, т.е. многочлен $f_1 + \dots + f_{100}$ не имеет вещественных корней, противоречие.

10. При $k = 33$.

Положим $N = 10^6$. Покажем сначала, как выложить карточки так, чтобы не нашлось больше 33 попарно не пересекающихся идеальных наборов. Для удобства обозначим буквы в алфавитном порядке через $z_1, z_2, \dots, z_{33}$; через z^k будем обозначать последовательность из k карточек, на каждой из которых написана буква z .

Наш ряд будет состоять из 33 блоков $B_1, B_2, \dots, B_{33}$, выложенных друг за другом в этом порядке. Блок B_i выглядит как $z_1^N z_2^N \dots z_{i-1}^N z_i z_{i+1}^N \dots z_{33}^N$, единственную карточку с буквой z_i в этом блоке назовем *особой*. Ясно, что уже в i -м блоке содержится N идеальных наборов, у которых общей является только особая карточка. Докажем теперь, что в каждом идеальном наборе в полученном ряду есть особая карточка. Поскольку особых карточек всего 33, отсюда будет следовать, что из любых 34 идеальных наборов два обязательно пересекутся по какой-то особой карточке, т.е. k не может быть больше 33.

Действительно, предположим, что нашелся идеальный набор, в котором нет особых карточек. Найдется индекс i такой, что буква z_i этого набора встречается не правее блока B_i (подходит хотя бы $i = 33$); выберем наименьшее такое i . Если карточка z_i нашего набора встречается левее B_i , то $i > 1$, и z_{i-1} также встречается в наборе левее B_i , т.е. не правее B_{i-1} ; это противоречит минимальности i . Значит, z_i встречается именно в блоке B_i , т.е. написана на особой карточке, что и требовалось.

Осталось показать, что $k = 33$ попарно не пересекающихся идеальных наборов выбрать всегда можно. При $1 \leq i \leq 33$ обозначим через S_i множество из 10^6 идеальных наборов, не имеющих общих букв, кроме, возможно, z_i (оно существует по условию). Мы выберем из каждого множества по набору так, чтобы в них не было общих карточек.

Для начала, если в каком-то множестве S_i найдутся 10^4 наборов, имеющих общую карточку (естественно, с буквой z_i), выделим такие 10^4 наборов, выбросим из S_i остальные наборы, а общую карточку назовем *полезной* для буквы z_i . Теперь мы будем по очереди выбирать набор из $S_1, S_2, \dots, S_{33}$ так, чтобы он не содержал полезных карточек для букв, отличных от z_i , и не пересекался с уже выбранными наборами.

Пусть наборы из $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$ уже выбраны. Если не существует полезной карточки с буквой z_i , то уже выбранные наборы содержат $i - 1 \leq 32$ карточек с буквой z_i , каждая из которых встречается меньше 10^4 раз в наборах в S_i . Выкинув эти

наборы, будем считать, что карточки с z_i в наборах из S_i не содержатся в выбранных наборах (если полезная карточка с буквой z_i есть, это уже выполнено), и в S_i не меньше 10^4 наборов.

Далее, $(i - 1)$ -й выбранный набор содержит $32(i - 1)$ других карточек, каждая из которых содержится максимум в одном наборе из S_i ; выкинув все эти наборы, оставим в S_i как минимум 5000 наборов, не пересекающихся с уже выбранными. Среди этих наборов максимум 32 содержат полезные карточки с буквами, отличными от z_i ; выбрав любой набор, не содержащий такой карточки, мы завершим шаг.

После завершения 33-го шага мы получим 33 попарно не пересекающихся идеальных набора, что и требовалось.

Заключительный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

11 класс

2. 1) В процессах 2–3 и 4–1 подведенное к газу количество теплоты равно нулю, поэтому эти процессы – адиабатические, их уравнение в координатах (T, V) имеет вид $TV^{1/3} = \text{const}$. Получим уравнение процессов 1–2 и 3–4. Пусть ΔT , ΔV – бесконечно малые изменения температуры и объема, тогда изменение внутренней энергии $\Delta U = 3\nu R \Delta T$, а работа газа $\delta A = p \Delta V$, поэтому

$$3\nu R \Delta T = \frac{\nu RT}{V} \Delta V, \text{ или } 3 \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta V}{V},$$

откуда после интегрирования получим уравнение процесса $TV^{-1/3} = \text{const}$. Используем уравнение адиабаты для процесса 4–1:

$$T_1 V_1^{1/3} = T_4 V_4^{1/3},$$

откуда с учетом значения температур $T_1 = 2T_4 = 2T_0$ получим $V_1 = V_0/8$. Аналогично,

$$T_3 V_3^{-1/3} = T_4 V_4^{-1/3}, \quad V_3 = 8V_0.$$

Запишем уравнения для процессов 1–2 и 2–3:

$$T_1 V_1^{-1/3} = T_2 V_2^{-1/3}, \quad T_3 V_3^{1/3} = T_2 V_2^{1/3}.$$

Разделим второе уравнение на первое и учтем равенство $T_1 = T_3$, получим $V_2 = V_0$. Тогда

$$T_2 = T_1 V_1^{-1/3} V_2^{1/3} = 4T_0.$$

2) Координаты граничных точек процессов $\log_2 \frac{V}{V_0}$ (абсцисса) и $\log_2 \frac{p}{p_0}$ (ордината) равны: 1 (–3, 4), 2(0, 2), 3 (3, –2), 4 (0, 0). График процесса имеет вид параллелограмма (рис. 12).

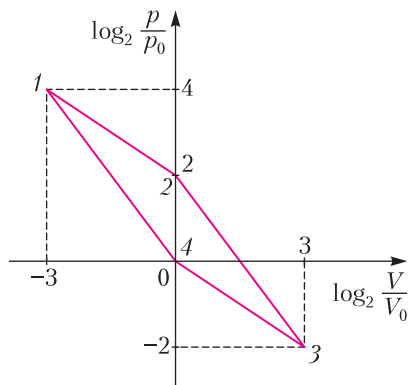


Рис. 12

3) На адиабатах тепло не отводится и не подводится. Для оставшихся двух процессов подведенное количество теплоты $Q = \Delta U + A$, причем $Q = 2\Delta U = 2C_V \Delta T$, где C_V – теплоемкость газа при постоянном объеме. Тогда на участке 1–2 подводится количество теплоты

$$Q_+ = 2C_V(T_2 - T_1) = 4C_V T_0,$$

а на участке 3–4 отводится количество теплоты

$$Q_- = 2C_V(T_3 - T_4) = 2C_V T_0,$$

поэтому КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_+ - Q_-}{Q_+} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

3. 1) Из симметрии системы относительно оси цилиндра следует, что сила электростатического взаимодействия между цилиндром и диском всегда направлена вдоль этой оси. Поскольку сила реакции опоры равна нулю, а диск неподвижен, сила F_0 полностью уравновешена силой тяжести: $F_0 = Mg$. Масса диска выражается через его плотность D и размеры так: $M = \pi R^2 d D$. Отсюда

$$\frac{4}{3} \frac{\rho^2 R^3 d}{\epsilon_0} = \pi R^2 d D g, \quad D = \frac{4}{3\pi} \frac{\rho^2 R}{\epsilon_0 g}.$$

2) При удалении диска от поверхности цилиндра действующая на него сила электростатического отталкивания уменьшается, поэтому возникает результирующая сила, направленная к цилиндру. Введем совпадающую с осью симметрии координатную ось z с началом в центре торца цилиндра, так что положение тонкого диска в пространстве задается координатой z центра его нижнего основания. Пусть диск сдвинут на небольшое расстояние $z \ll R$ вдоль оси. Мысленно заполним все свободное пространство между диском и цилиндром материалом цилиндра. Тогда сила F_0 , действующая на диск, будет такой же, как и в положении прямо у торца цилиндра. Поэтому сила F_0 уменьшилась на силу взаимодей-

ствия двух тонких дисков: исходного и вспомогательного высотой z и плотностью заряда ρ , т.е.

$$F(z) = F_0 - \Delta F(z).$$

Вычислим силу взаимодействия двух тонких дисков, прислоненных друг к другу вплотную. Для всех точек одного из дисков, находящихся далеко от края, можно приближенно рассматривать второй диск как бесконечную плоскость, так что нормальная составляющая напряженности электрического поля будет равна напряженности поля бесконечной плоскости с плотностью заряда $\sigma = \rho z$:

$$E_n = \frac{\rho z}{2\epsilon_0}.$$

Эта напряженность действует на заряд на другом диске. Тогда

$$\Delta F = \frac{\rho z}{2\epsilon_0} \pi R^2 d \rho = \frac{\pi \rho^2 d R^2}{2\epsilon_0} z.$$

Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение движения диска:

$$Mz'' = -Mg + F(z) = -\frac{\pi \rho^2 d R^2}{2\epsilon_0} z.$$

Подставив выражение для массы цилиндра через электростатическую силу: $M = F_0/g$, получим

$$z'' + \frac{3\pi}{8} \frac{g}{R} z = 0,$$

что совпадает с уравнением гармонических коле-

баний с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}}$.

Однако важно принять во внимание упругое соударение диска с цилиндром, так как из-за него период уменьшается вдвое: проходит только одна половина полного колебания, а вторая, симметричная ей, нивелируется за счет моментального разворота диска при соударении с цилиндром. Таким образом, окончательно

$$T = \pi \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}}.$$

3) Изменение радиуса диска приводит к изменению обеих движущих сил: силы тяжести и электростатической силы. Изменение силы тяжести равно

$$\Delta(mg) = g\Delta m = Dg\Delta V = \pi d D g R^2 = 2\pi d g D R \Delta R.$$

Перейдем к вычислению изменения электростатической силы. Сила, действующая на исходный диск, равна сумме сил, действующих на кольцо шириной ΔR и на диск радиусом R' . Поэтому величина силы, действующей на диск радиусом R' , будет меньше на величину силы электростатического отталкивания ΔF кольца от цилиндра:

$$F = F_0 - \Delta F.$$

Система симметрична относительно оси z цилиндра, поэтому сила, действующая на кольцо, так-

же будет направлена вдоль оси z . Найдем составляющую электрического поля E_z , которую полубесконечный цилиндр создает в некоторой точке на своей границе. Для этого выберем некоторый объем внутри цилиндра dV , он дает вклад в напряженность электрического поля

$$dE_z = -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + (\bar{R} - \bar{r})^2\right)^{3/2}} dV,$$

где элемент объема $dV = dz dS$, а интегрирование по $\bar{r}$ производится по диску $|\bar{r}| < R$, а $\bar{R}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки на краю диска. Тогда электрическое поле имеет вид

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \int dS \int_{-\infty}^0 dz \frac{z}{\left(z^2 + (\bar{R} - \bar{r})^2\right)^{3/2}}.$$

Затем можно вычислить интеграл по z и по площади диска:

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int dS \frac{1}{|\bar{R} - \bar{r}|}.$$

Тогда искомая сила $\Delta F = q_1 E_z$, где $q_1 = 2\pi\rho R \Delta R d$ – заряд кольца. Далее воспользуемся методом виртуальных перемещений. Возьмем вначале исходный диск радиусом R , прислоненный к торцу цилиндра, и мысленное передвижение его вдоль оси на расстояние δl . Тогда мы совершим работу $A = -F_0 \delta l$. Эта работа идет на изменение потенциальной энергии системы. Мысленно заполним освободившийся объем $V = \pi R^2 \delta l$ веществом цилиндра и получим исходную потенциальную энергию системы. Таким образом, энергия взаимодействия уменьшилась на величину $\Delta E = -A$, которая равна энергии взаимодействия двух тонких дисков радиусами R и R , вплотную прислоненных друг к другу.

Теперь аналогично применим метод виртуальных перемещений для диска меньшего радиуса R' . Пусть при перемещении его вдоль оси на расстояние δl мы совершили работу

$$A' = -F \delta l = -(F_0 - \Delta F) \delta l = -F_0 \delta l + \Delta F \delta l.$$

Заметим, что по модулю эта работа равна энергии $\Delta E'$ взаимодействия двух дисков: одного радиусом R и высотой δl , а другого радиусом R' и высотой d . Для вычисления ΔF вычтем одно из другого уравнения, полученные методом виртуальных перемещений:

$$\Delta F \delta l = A' - A = \Delta E - \Delta E'.$$

Разность энергий $\Delta E - \Delta E'$ равна энергии взаимодействия диска радиусом R и высотой δl с кольцом высотой d , внутренний и внешний радиусы которого равны R' и R соответственно. Поскольку $\Delta R \ll R$, все точки кольца расположены практически на границе диска, и задача сводит-

ся к задаче о вычислении потенциала равномерно заряженного диска на его краю. Этот потенциал представляется в виде

$$\Phi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS}{|\bar{R} - \bar{r}|}.$$

Проведя соответствующие вычисления, получим

$$\Phi = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}.$$

Энергия взаимодействия диска с кольцом, которая равна работе искомого изменения силы, может быть выражена через произведение заряда кольца на потенциал на краю диска. В нашем случае эффективная поверхностная плотность заряда диска и эффективная линейная плотность заряда кольца равны $\sigma = \rho \delta l$ и $\lambda = d \Delta R$. Таким образом,

$$\Delta F = \frac{2\rho^2 d R^2}{\epsilon_0} \Delta R.$$

Наконец, определим положение равновесия диска R' . Для этого вычислим значение $F(z)$ электростатической силы в точке $z \ll R$. Получим

$$\begin{aligned} F(z) &= F(0) - \frac{\rho z}{2\epsilon_0} \pi R^2 d \rho = \\ &= F_0 - \Delta F - \frac{\pi d \rho^2 (R - \Delta R)^2}{2\epsilon_0} z. \end{aligned}$$

Запишем уравнение движения диска меньшего радиуса и определим его положение равновесия

$z_0 = \frac{4}{3\pi} \Delta R$. Получим, что уравнение движения диска с точностью до постоянной совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\pi g}{8 R}}.$$

Итак, в отсутствие контакта с цилиндром диск совершает гармонические колебания вокруг положения равновесия z_0 с циклической частотой ω_0 .

4. При напряжениях источника меньше U_1 капелька не растекается и конденсатор Глюка представляет собой обычный плоский конденсатор емкостью C_1 . При напряжениях источника больше U_1 конденсатор Глюка представляет собой два параллельно соединенных конденсатора емкостями C_1 и C_2 . Конденсатор емкостью C_2 имеет в качестве одной обкладки нижнюю плоскость, а его вторая обкладка – это растекшаяся капелька проводящей жидкости площадью S , поэтому

$C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{h}$. Общая емкость системы трех конденсаторов, когда опорный конденсатор соединен последовательно с конденсатором Глюка, равна

$$C_0 = \frac{C(C_1 + C_2)}{C + C_1 + C_2}.$$

Для удобства будем выражать энергию поверхностного натяжения через емкость C_2 :

$$W_{\text{пов}} = 2\sigma S = \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} C_2,$$

тогда

$$W(C_2) = -\frac{C(C_1 + C_2)U^2}{2(C + C_1 + C_2)} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} C_2.$$

В равновесии значение C_2 должна быть таким, чтобы энергия системы была минимальна. Используя производную, найдем

$$C_2 = CU \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\sigma h}} - C - C_1.$$

Заметим, что значение C_2 (и площади S) больше нуля либо равно нулю при

$$U \geq 2 \frac{C + C_1}{C} \sqrt{\frac{\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = U_1.$$

Поведение системы устроено следующим образом. При напряжениях источника от 0 до U_1 минимум энергии системы соответствует нулевой площади растекшейся капельки, а конденсатор Глюка имеет постоянную емкость C_1 . При напряжениях источника $U > U_1$ растекшаяся капелька имеет площадь такую, что емкость C_2 можно вычислить по указанной выше формуле. Напряжение на конденсаторе Глюка постоянно:

$$U_{\text{Глюк}} = \frac{CU}{C + C_1 + C_2} = \sqrt{\frac{4\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{2}{3} U_1 = \text{const.}$$

Напряжение на опорном конденсаторе при напряжении на источнике $U = 2U_1$ равно

$$U_C = U - U_{\text{Глюк}} = 2U_1 - \frac{2}{3} U_1 = \frac{4}{3} U_1.$$

Отсюда получим

$$\sigma = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U_1^2}{9h} \approx 0,479 \text{ Н/м.}$$

Вниманию наших читателей

Начиная с 2025 года журнал «Квант» выходит десять раз в год — пять раз в первом полугодии (номера 1, 2, 3, 4, 5-6) и пять раз во втором полугодии (номера 7, 8, 9, 10, 11-12).

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» — 90964.

Купить журнал «Квант» можно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в некоторых московских книжных магазинах и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Головоломка

(см. 2-ю с. обл.)

Решение головоломки приведено на рисунке 13.

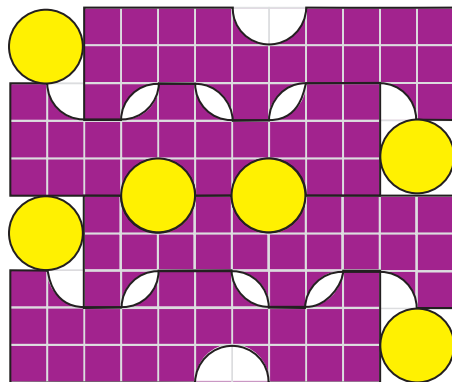


Рис. 13

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Грицук, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Н.В.Станцо

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

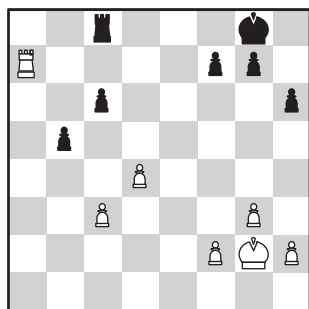
Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

Уверенная ЗАЩИТА

Китайская шахматистка Цзюй Вэньцзюнь сохранила звание чемпионки мира, который она удерживает с 2018 года, досрочно переиграв в титульном матче свою соотечественницу Тань Чжунъи со счетом 6,5–2,5. Обладательница титула испытала сложности только в начале матча, с трудом добившись ничьей в первой партии и проиграв вторую. Переломной в матче стала третья партия, в которой Цзюй Вэньцзюнь смогла одолеть претендентку в эндшпили с разноцветными слонами, и, получив психологическое преимущество, в дальнейшем совершила рывок, выиграв 4 партии подряд (с пятой по восьмую), и уверенно защитила титул.

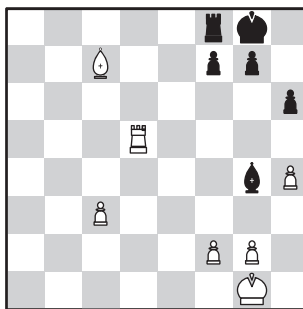
Тань Чжунъи – Цзюй Вэньцзюнь
Шанхай, 2025, 2 партия



31...c5?! (31...b4! практически форсировало ничью: 32. cb ♖d8, и белый король будет отрезан от ферзевого фланга после 33...♗d4) 32. ♖f3 cd 33. cd ♗f8 34. ♖b7 ♖c3+ 35. ♖e4 ♖c2 36. ♖e3 ♖c3+ 37. ♖d2 ♖f3 38. ♖e2 ♖f5? Слишком пассивно. Необходимо решиться на жертву пешки: **38...♗b3! 39. d5 ♗a3! 40. ♖b5 ♖e7 41. ♖b7+ ♗f6,**

и черные должны удержать эндшпиль за счет активности ладьи. **39. ♖e3 h5 40.f4 ♗e8?** Решающая неточность. Последний шанс активизировать ладью заключался в **40...b4! 41. ♖e4 ♗a5 42. d5 ♗a2! 43. ♖e5 ♗h2. 41. ♖e4 ♗f6 42. ♖b5.** Черные все равно проиграли пешку, а их ладья занимает неудачную позицию. **42...g6 43. d5 ♗a6 44. ♖e5 f6+ 45. ♖d4 ♗a2 46. ♖c5 ♗h2 47. ♖b8+ ♖d7 48. ♖b7+ ♖c8 49. ♖g7 g5 50. f5!** (размены пешек в пользу черных: **50. fg? fg 51. ♖g5 h4 52. gh ♗h4, и на доске теоретическая ничья) h4 51. gh gh 52. ♖h7 h3 53. ♖d6 ♗b8 54. ♖d7! Пешка f отравлена: 54. ♖e6? ♗e2+ 55. ♖f6 h2 56. d6 ♗c8!, и белые не могут провести ни одну из пешек. 54...♗b7 55. d6 ♗b6 56. ♖d8 ♗h1 57. d7 h2 58. ♖h3 ♗b7 59. ♖b3+ ♗a7 60. ♖b2 ♗a6 61. ♖e2 ♗b7 62. ♖e7, черные сдались.**

Цзюй Вэньцзюнь – Тань Чжунъи
Шанхай, 2025, 3 партия



Эта позиция возникла после 41 хода белых. Их план состоит в проникновении королем в лагерь соперника, черные же должны искать активную защиту, угрожая разменом ладьи, который будет равносильен ничьей. **41...♗a8 42. ♖b6 ♗e6 43. ♖d6 ♗f8 44. ♖d4 ♖e7**

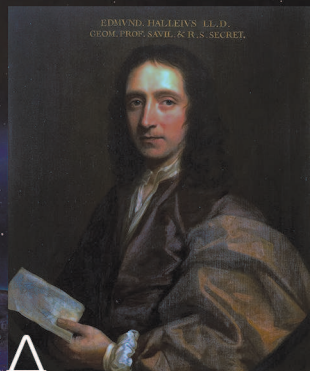
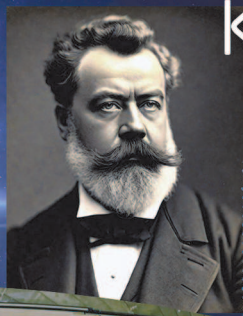
45. ♖b6 g6. С учетом дальнейшего хода событий, возможно, лучше было **45...f6**, препятствуя вторжению по черным полям. **46. ♗h2 h5 47. ♖g3 ♗a5** (аккуратнее **47...♗d5!?** с давлением на пешку **g2**) **48. ♖f4 ♗d7 49.g3 ♖f5+ 50. ♖e3 ♗a5 51. ♖b4 ♗d5 52. ♖b6.** Ключевая защитная идея просматривается в следующем варианте: **52. c4 ♖c6 53. c5 ♗e6 54. ♖f4 ♗a4!, форсируя размен ладьей. 52...♗a3 53. ♖d4 ♖e6 54. ♖c5 ♗a2?! (54...♗a5! 55. c4 ♖c6 56. ♖b6+ ♖c7, и белым сложно создать угрозы) 55. ♖d3 ♖f5+ 56. ♖e3 ♖e6 57. ♖d4 ♖c6 58. c4 ♖c7 59. c5 ♖d5? (59...♗d7!, сохраняя угрозу ♗a4, когда белый король дойдет до четвертой линии; теперь же король ее пересекает, и белые выигрывают) 60. ♖f4 ♖c6 61. ♖g5 ♗a4 62. ♖e5+ ♖d7 63. ♖b2 ♖e6 64. ♖f4 ♖c4 65. ♖e3 ♖e5 66. ♖b8 ♖d7 67. ♖d8 ♖e6 68. ♖d6 ♖c2 69. ♖h6 ♖f6 70. ♖d1 ♖c4 71. ♖d6 ♖c2 72. ♖d4+ ♖f5** (симпатичная матовая сеть могла возникнуть после **72...♖e7?** **73. ♖g7**, и у черных нет защиты от **♖f6+** и **♖d8×**) **73. f3 ♖c4 74. c6 ♖c2 75. ♖g7 g5 76. hg ♖g5 77. ♖b6.** Ход **77. ♖f6+!** мог стать красивым завершением игры: **77...♗f5 78. ♖d4! ♗a2 (78...♖c6 79. ♖f4×) 79. ♖e4! ♖c5 80. c7 ♖e6 (80...♖c7 81. ♖e5×) 81. ♖f4× – мат. 77...♗f5 78. c7 ♖c3 79. ♗a5 ♖c5 80. ♖a6 ♖c4 81. ♖f8 ♗d5 82. ♖e7 h4 83. ♖f6+ ♖e5 84. gh ♖e6 85. h5 ♖c5 86. h6 ♖c8 87. h7, черные сдались.**

А. Русанов

Уроки с физикой

Почему хвосты комет вытянуты
в направлении от Солнца?

КОМЕТА И ... ЛЕД



(Подробнее – на с. 35 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 25004

