

ISSN 0130-2221

2024 · № 9

СЕНТЯБРЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



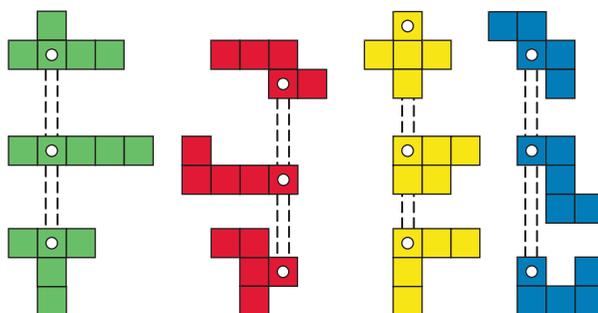
ТРЕХ СЛОЙ НЫЙ

пирог
из
пентамино

В своей книге «Математические головоломки и развлечения» Мартин Гарднер предлагал такую задачу: разбейте двенадцать пентамино на три группы по четыре элемента в каждой, затем найдите фигуру площадью 20 квадратиков, которую можно сложить из четырех пентамино каждой группы.

Оказывается, существует симметричная 20-клеточная фигура, являющаяся решением задачи. Наложив три такие фигуры друг на друга, соберем «трехслойный пирог».

Чтобы задача стала головоломкой, соединим шурупами наборы из трех фигурок пентамино по схеме, указанной на рисунке.



Получим четыре игровых элемента головоломки:



Из этих элементов необходимо сложить симметричную трехслойную фигуру. Поскольку фигурки пентамино могут вращаться на шурупах, они создают много различных комбинаций взаимного положения, что значительно усложняет головоломку. При ее сборке нужно не только найти каждой фигурке пентамино свое место в «пироге», но и умудриться зацепить их друг за друга.

Желаем удачи!

Н. Авилов

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбиллин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 О природе электрического тока в
металлических проводниках. *Л.Белопухов*
12 Зонагоны. *А.Устинов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи М2810–М28013, Ф2817–Ф2820
21 Решения задач М2798–М2801, Ф2805–Ф2808

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 29 Я поведу тебя в музей. *С.Дворянинов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Почти целые

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 34 Задачи

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 35 Трисекция угла и другие классические задачи.
А.Заславский, С.Маркелов

ОЛИМПИАДЫ

- 41 Избранные задачи XXIX Турнира имени
А.П.Савина

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 42 Задачи 1–4

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 43 Как на льдине чай вскипятить. *А.Стасенко*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 44 Как найти ошибку. *М.Бондаров*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 54 Олимпиада «Покори «Воробьевы горы!».
Математика
55 Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова. Профильный экзамен
по физике
57 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Стасенко*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

О природе электрического тока в металлических проводниках

Л. БЕЛОПУХОВ

С малолетства мы слышим и запоминаем выражения «электрический ток», «ток течет по проводам». Из школьной физики прочно усваивается, что электрический ток – это упорядоченное направленное движение электрических зарядов.

Понятие «электрический ток» возникло уже давно, больше 200 лет назад. В 1800 году на заседании Лондонского Королевского общества итальянский физик, 55-летний профессор Павийского университета Алессандро Вольта (1745–1827) сделал доклад о результатах своих исследований по электричеству. Он продемонстрировал также свое изобретение, которое уже получило название *вольтов столб*. Для тогдашнего времени этот прообраз электрических батареек был самым мощным источником тока. В своем докладе Алессандро Вольта впервые употребил термины *электрический ток*, *электродвижущая сила*, *электроёмкость*, *электрическое напряжение*. И вот уже две сотни лет эти термины остаются неизменными для электрических явлений.

Вольта был незаурядным ученым. Физическими опытами он увлекся еще в 13 лет, а в 34 года стал профессором университета, проработав на этой должности больше 40 лет. Он общался со многими европейскими физиками. Своим знанием и пониманием электрических явлений он очаровал Наполеона, который наградил его Орденом Почетного Легиона, присвоил ему титулы графа и сенатора. Италия считает его своим национальным героем. А единица электрического напряжения и электродвижущей силы в 1861 году получила имя *вольт*.

Сегодня наследие вольтова столба – это батарейки и аккумуляторы, которые работают по такому же принципу, но имеют гораздо меньшие размеры. Они используются в качестве источников постоянного тока во всех устройствах для облегчения и усовершенствования жизни (гаджетах) – от электрических фонариков до навороченных смартфонов. Но разобраться в том, как рождается в них электрический ток, не просто – это область электрохимии. Поэтому начнем с самого распространенного случая – с электрического тока в проводниках (металлах).

Георг Симон Ом (1789–1854) и другие физики довольно быстро установили, что обнаружить и измерить электрический ток в металлах можно по его действию, прежде всего тепловому. Электрический ток рождает тепло, нагревает провод, значит, испытывает сопротивление своему движению наподобие механического трения. Это явление в проводниках Ом так и назвал *электрическим сопротивлением* и на основе опытов установил свой знаменитый закон – величина (сила) тока в проводнике I прямо пропорциональна напряжению U на концах проводника: $I \sim U$. Коэффициент пропорциональности он назвал проводимостью проводника, а обратную ей величину – сопротивлением проводника (R).

Для простейшего случая (одномерной задачи) Ом установил зависимость сопротивления от геометрии и свойств проводника: $R = \rho l/S$, где l – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения, а ρ – величина, характеризующая свойство материала проводника, получившая название *удельное сопротивление* вещества. Размерность этой величины в Международной системе единиц (СИ) Ом·м. Но в прак-

тическом (электротехническом) применении закона Ома проводники – это провода диаметром порядка миллиметра, поэтому в таблицах для удельного сопротивления чаще используется размерность $\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$. Удельное сопротивление в такой размерности в миллион раз больше, чем в единицах СИ.

Удельное сопротивление – удивительная характеристика вещества. Для металлов она имеет величину порядка $10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, для полупроводников $\sim 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а для диэлектриков (стекло, фарфор, эбонит) $\sim 10^{13} - 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Никакая другая характеристика твердых тел не изменяется в таких широких пределах (в 10^{22} раз!). Поэтому не может быть единого объяснения природы электрического тока для всех типов веществ. Четко прослеживается разделение твердых тел по их электрическим свойствам на три типа. Строение этих типов твердых тел имеет существенные различия. Мы рассмотрим здесь только металлические проводники (металлы и их сплавы).

Строение металлов

Атомно-кристаллическое строение металлов было установлено еще в XIX веке. Основная заслуга в этом принадлежит русскому металлургу и инженеру Д.К. Чернову (1839–1921), заложившему основы научной металлографии. Дальнейшее развитие представлений о строении металлов стало происходить после открытия электрона и создания планетарной модели атома. То, что часть атомных электронов сравнительно легко отделяется от нейтральных атомов, превращая их в положительные ионы, доказывалось многими явлениями (термоэлектронная эмиссия, внешний фотоэффект и др.).

Металлы состоят из многих мелких кристалликов, спрессованных в общую массу. В каждом кристаллике в узлах решетки закономерно расположены положительные ионы, между которыми передвигаются относительно свободные электроны. Термин «относительно свободные» электроны означает, что их свобода ограничена внутренним пространством кристалла и что покинуть кристалл им не разрешают силы

притяжения со стороны положительных ионов кристаллической решетки.

Силы притяжения между ионами и обобществленным «газом» свободных электронов представляют собой так называемую *металлическую связь* частиц в твердых телах. Другие типы связи – ионная, ковалентная и водородная. Металлическая связь присутствует не только у тех химических элементов, которые причисляют к металлам (а их около 90 из 118 известных на сегодня элементов), но и у многочисленных металлических сплавов.

Ионы кристаллической решетки не неподвижны, они находятся в непрерывном колебательном движении около центров равновесия. Это колебательное движение очень сложное – ведь каждая частица связана с каждым соседом в пространстве невидимыми «пружинками» сил притяжения и отталкивания, и этих «пружинок» триллионы триллионов. Энергия этих колебаний и представляет собой основную часть внутренней энергии вещества (пропорциональной абсолютной температуре).

В простейшей модели частицы металла (ионы) подчиняются энергетическому распределению Максвелла–Больцмана так же, как частицы многоатомного идеального газа, имеющие шесть эффективных степеней свободы колебательного движения. Согласно принципу равномерного распределения энергии по степеням свободы, молярная теплоемкость кристаллической решетки металлов должна быть порядка $3 k N_A$ (k – постоянная Больцмана, N_A – число Авогадро), что составляет 25 Дж/(моль·К).

Оказалось, что молярная теплоемкость многих металлов близка к этой величине. Но как же так? А разве газ обобществленных свободных электронов не имеет теплоемкости, т.е. не изменяет состояния хаотического движения своих частиц, когда повышается температура и увеличиваются размах и скорость колебаний ионов решетки, с которыми электроны сталкиваются? Да, оказалось, что это именно так. К электронному газу в металле неприменимы принципы классической статистической теории газов. Но это выяснилось далеко не сразу, а только после создания квантовой механики.

Классическая теория электропроводности металлов

В классической теории электропроводности металлов именно движение свободных электронов под действием сил электрического поля и представляет собой электрический ток. Теория была создана в 1900 году немецким физиком Паулем Друде (1863–1906) и через несколько лет ее усовершенствовал знаменитый голландский физик, Нобелевский лауреат 1902 года Хендрик Лоренц (1853–1928).

Модель такова. При отсутствии источника тока напряженность усредненного электрического поля, действующего на свободные электроны, равна нулю. Если бы это было не так, то все свободные электроны стремились бы струдиться у одного конца проводника. А этого нет – свободные электроны в среднем равномерно распределены по проводнику и внутри кристалла поддерживается состояние с нулевой средней напряженностью электрического поля. Электроны мечутся по зигзагообразным траекториям, каждый раз меняя свое направление в результате столкновений (взаимодействий) с ионами. Эти столкновения считаются абсолютно упругими. Средняя скорость электронов в их хаоти-



Хендрик Антон Лоренц

ческом движении в классической теории оценивается так же, как и для частиц идеального газа: $u = \sqrt{8kT/(\pi m)}$. В школьных учебниках принято вычислять среднюю квадратичную скорость $u_{\text{ср}} = \sqrt{3kT/m}$, что по порядку величины одно и то же. При комнатной температуре величина средней скорости хаотического движения электронов, вычисленная таким образом, составляет 10^5 м/с, или 100 км/с.

Однако, если каким-то образом «запустить» электрическое поле в проводник, например поместить проводник между пластинами заряженного конденсатора или подсоединить к источнику постоянного напряжения, то картина меняется. Электроны теряют свою относительную свободу и под действием электрической силы начинают перемещаться по направлению силовых линий этого поля. Точнее, против этого направления, поскольку у электронов отрицательный заряд, но это не важно. Главное, они получают тенденцию к этому перемещению. Траектории результирующего движения электронов в промежутках между столкновениями с ионами решетки становятся сложными. Но у каждого электрона за время Δt между столкновениями



Пауль Карл Людовик Друде

накапливается некоторое перемещение Δx вдоль силовых линий поля. По аналогии со сносом корабля под действием ветра или морского течения, это смещение электронов получило название «дрейф». Дрейфовое перемещение $\Delta x = v_{\text{др}} \Delta t$, где $v_{\text{др}}$ – скорость дрейфа электронов. Суммарный дрейф электронов проводника за среднее время между столкновениями в классической электронной теории электропроводности металлов и представляет собой электрический ток.

Какова скорость этого дрейфа, например, в комнатной электропроводке? Представим силу тока как $\Delta q/\Delta t$. Перемещенный за время Δt заряд Δq выразим через число перемещенных электронов ΔN и заряд электрона e . В проводнике прямоугольного сечения в узеньком объеме проводника $\Delta V = S \Delta x$, где S – площадь сечения проводника, а Δx – дрейфовое перемещение, число электронов $\Delta N = n \Delta V$ (n – концентрация свободных электронов, по порядку величины равная концентрации атомов в металле). Поскольку $\Delta x = v_{\text{др}} \Delta t$, для скорости дрейфа получаем

$$v_{\text{др}} = I/(enS).$$

Сила тока I в медных комнатных проводах не превышает величины 1,5 А, их сечение имеет величину порядка 1 мм². Концентрация атомов в металле $n = \delta N_A/M$, где δ – плотность металла, M – его молярная (атомная) масса. Для меди $n = 0,83 \cdot 10^{29}$ 1/м³. Вычисления дают для скорости дрейфа $v_{\text{др}}$ величину порядка 10^{-4} м/с = 0,1 мм/с. Это довольно неожиданный результат. Ведь если бы электрический ток представлял собой перемещение электронов по провод-

нику с такой скоростью, то на путь от выключателя до лампочки электронам потребовались бы целые сутки! И плохо понятным становится тогда переменный ток в наших проводах – ведь он 50 раз в секунду меняет свое направление.

Что-то не так с классической электронной теорией проводимости. Зачем же ее изучают и в школьной, и в вузовской физике? Заслуга этой теории в том, что с ее помощью были качественно объяснены закон Ома и закон Джоуля–Ленца, понятие сопротивления проводников и его температурная зависимость. И, конечно, важна наглядность этой теории, использование в ней планетарной модели атомов и понятия об атомно-кристаллическом строении металлов.

Как выводится закон Ома в классической электронной теории? Этот закон выражает связь причины – разности потенциалов электрического поля со следствием – движением свободных электронов. В классической механике эта связь определяется законом Ньютона. Движение электрона под действием сил поля приближенно считается равноускоренным в направлении против вектора напряженности поля (из-за отрицательного заряда электрона). Принимая за ноль начальную скорость этого движения сразу после столкновения свободного электрона с ионом, максимальную скорость дрейфа перед следующим столкновением можно выразить так:

$$v_{\text{макс}} = a\tau,$$

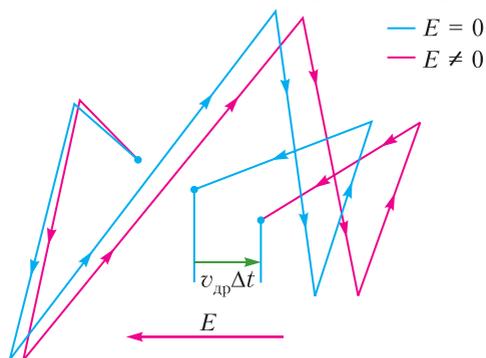
где τ – среднее время между двумя столкновениями, а ускорение равно $a = eE/m$ (e и m – заряд и масса электрона, E – напряженность электрического поля, действующего на электрон). Тогда средняя скорость дрейфа

$$v_{\text{др}} = eE\tau/(2m).$$

Считая среднюю скорость дрейфа равной $I/(enS)$, получим

$$I/S = (ne^2\tau/(2m))E.$$

А ведь это и есть закон Ома для точки однородного прямого проводника – закон Ома в так называемой локальной форме. Величину I/S принято называть плотностью тока j .



Дрейфовое перемещение электронов

При таком выводе молчаливо предполагается, что все свободные электроны металла практически одновременно получают сигнал о включении электрического поля. Само поле распространяется по проводнику со скоростью электромагнитных волн, т.е. со скоростью света. То, что скорость распространения электрического тока в проводнике очень большая, было установлено опытным путем Густавом Робертом Кирхгофом еще в середине XIX века, за 25 лет до введения Максвеллом понятия об электромагнитных волнах.

Перейдем от локальной формы закона Ома к обычной форме. Легко убедиться, что величина $ne^2\tau/(2m)$ представляет собой удельную проводимость вещества проводника, а обратная ей величина $2m/(ne^2\tau)$ не что иное, как удельное сопротивление вещества ρ . Действительно, учитывая, что напряженность поля E для прямолинейного проводника длиной l равна U/l , где U – разность потенциалов на концах проводника, а сопротивление проводника равно $R = \rho l/S$, получаем обычный закон Ома $I = U/R$ и удельное сопротивление

$$\rho = 2m/(ne^2\tau).$$

В классической электронной теории принимается, что среднее время τ между двумя столкновениями электрона с ионами решетки равно $\lambda/|\bar{u} + \bar{v}|$, где λ – среднее расстояние между ионами, а $|\bar{u} + \bar{v}|$ – модуль векторной суммы средней скорости хаотического движения электрона \bar{u} и средней скорости его дрейфа \bar{v} под действием поля. Но если учесть, что скорость дрейфа электрона в квартирных электрических проводах в миллиард раз меньше средней скорости его хаотического движения, то, конечно, можно считать, что время между столкновениями электрона с ионами решетки с большой точностью определяется только скоростью его хаотического движения. Тогда для удельного сопротивления металлического проводника получим

$$\rho = 2mu/(ne^2\lambda).$$

Чтобы вывести в классической электронной теории закон Джоуля–Ленца, будем считать, что свободные электроны являются

передатчиками энергии от электрического поля ионам кристаллической решетки. Это означает, что при каждом соударении электрона с ионом электрон передает иону полученную в поле кинетическую энергию $W = mv^2/2$, где v – максимальная скорость дрейфа электрона перед самым столкновением. Эта кинетическая энергия увеличивает энергию колебательного движения иона, другими словами, передает кристаллической решетке тепло, нагревая кристалл. Тепловая мощность w , приходящаяся на единицу объема (удельная мощность) проводника, равна отношению мощности N , выделяющейся во всем проводнике, к объему V проводника: $w = N/V$. Но эту же самую удельную мощность можно вычислить через энергию W , получаемую каждым электроном от поля за время τ , и число электронов в единице объема, т.е. концентрацию n :

$$N/V = (ne^2\tau/(2m))E^2 = E^2/\rho.$$

Это выражение и представляет собой закон Джоуля–Ленца для точки проводника (в локальной форме). Выражая напряженность электрического поля E через разность потенциалов U на концах проводника длиной l как U/l , а объем проводника как lS , для тепловой мощности получаем

$$N = U^2S/(\rho l) = U^2/R = I^2R,$$

т.е. обычное выражение закона Джоуля–Ленца для проводника.

Используя для удельного сопротивления металла выражение $\rho = 2mu/(ne^2\lambda)$, в классической теории делается вывод о том, что сопротивление возрастает с повышением температуры, поскольку средняя скорость u хаотического движения свободных электронов при этом увеличивается. В школьных учебниках на этом заканчивается знакомство с теорией электрического тока в металлах.

Недостатки (затруднения) классической электронной теории электропроводности

И что же, явление электрического тока в металлических проводниках объяснено? Ответ на этот вопрос зависит от того, что

понимать под словами «объяснить явление». Если считать, что теория дает качественное объяснение основных опытных законов, то этой теории достаточно. А некоторые несогласия с опытом при этом считаются просто затруднениями теории. В учебной литературе это так и озаглавлено: «Затруднения классической электронной теории электропроводности». Но все-таки представляется, что это не просто затруднения, а принципиальные внутренние несоответствия этой теории далеко не простой природе электрического тока. Рассмотрим эти несоответствия.

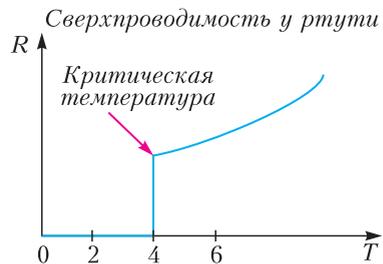
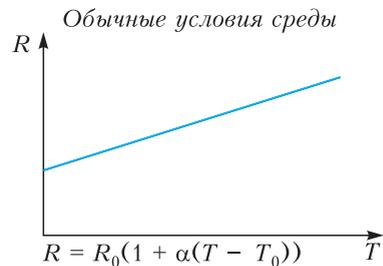
1) В классической электронной теории выражение для удельного сопротивления проводников выводится с использованием закона Ньютона и законов молекулярной физики для идеального газа. Сравним теорию с опытом. Вычисление по формуле $\rho = 2mu / (ne^2\lambda)$ дает величину 10^{-6} Ом·м, тогда как реальные значения этой величины у многих металлов в 100 раз меньше.

2) Совершенно непонятым становится большое сопротивление многих сплавов по сравнению с сопротивлением компонентов этих сплавов. Один из самых употребительных в нагревательных приборах сплавов нихром содержит 70% никеля и 25% хрома (и еще 5% примесей для придания проводам большей пластичности). Удельное сопротивление этого сплава $1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м в 14 раз больше, чем у никеля и в 7 раз больше, чем у хрома. А, согласно классической теории, оно должно иметь промежуточную величину между удельными сопротивлениями никеля и хрома, т.е. $1,2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м. Это почти в 10 раз меньше реальной величины.

3) Как классическая теория объясняет зависимость сопротивления металлов от температуры? В выражении для удельного сопротивления ρ среднее расстояние между ионами λ и связанная с ним концентрация атомов n слабо зависят от температуры, причем, когда увеличивается температура, произведение $n^2\lambda$ в очень незначительной степени уменьшается (коэффициент линейного расширения металлов составляет величину порядка 10^{-5} К⁻¹). Этой зависи-

мостью от температуры можно пренебречь. Основной величиной, зависящей от температуры, в классической теории является средняя скорость хаотического (теплого) движения свободных электронов, которая прямо пропорциональна квадратному корню из абсолютной температуры: $u \sim \sqrt{T}$ и стремится к нулю при низких температурах. Следовательно, удельное сопротивление в классической теории так же должно зависеть от температуры, т.е. $\rho \sim \sqrt{T}$. А какова опытная зависимость?

В школьных учебниках приводится обычно зависимость удельного сопротивления от температуры t , выраженной в градусах Цельсия: $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где α – температурный коэффициент сопротивления, равный примерно $1/273$. Если температуру измерять в кельвинах, то опытная зависимость от абсолютной температуры имеет вид $\rho = \rho_0 T / 273$, т.е. $\rho \sim T$, а не квадратному корню из абсолютной температуры. Особенно сильное расхождение теории с опытом происходит при низких температурах. Сопротивление стремится не к нулю, а к некоторой величине, которую можно назвать остаточным сопротивлением. Классическая теория этого не объясняет. Не объясняет она и явление сверхпроводимости – полное исчезновение сопротивления при некото-



Температурная зависимость сопротивления металлов

рой критической температуре у целого ряда металлов, сплавов и других химических соединений.

Уточнения и усложнение классической электронной теории, сделанные физиками в начале прошлого столетия, не смогли преодолеть приведенные выше затруднения. И оставались совершенно непонятными ее главные недостатки. Например такие.

- Почему в масштабе всего проводника не происходит глобальное перемещение зарядов, которое является сутью электрического тока?

- Почему свободные электроны в металле не обладают теплоемкостью, т.е. почему они не меняют среднюю скорость своего хаотического движения с повышением температуры?

- Как происходит передача энергии от электронов к ионам? В электронной теории считается, что при наличии приложенного к проводнику напряжения свободный электрон, отражаясь при столкновении от иона кристаллической решетки, отдает ему лишь ту ничтожную часть своей кинетической энергии, которую он получил от электрического поля. А кинетическую энергию, связанную со своим хаотическим движением, он полностью сохраняет. Откуда электрон «знает», какую часть энергии он должен отдать?

- Почему при стремлении абсолютной температуры к нулю у многих веществ остается некоторое сопротивление? Какова его природа? И какова природа сверхпроводимости? А как объяснить большое сопротивление многих металлических сплавов по сравнению с сопротивлением чистых металлов?

Понятие о современной квантовой теории строения металлов и их электропроводности

Такое большое число затруднений и недостатков классической электронной теории электропроводности требовало пересмотра самой модели электрического тока в проводнике. Нужно было отказаться от описания ансамбля свободных электронов металла как электронного газа, подчиняющегося классической молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Одной из первых задач, стоявших перед рождающейся в 20-х годах прошлого века новой физикой – квантовой механикой, было ее применение к вопросу о строении металлов. Надо было разобраться, почему электронный газ в металле не имеет теплоемкости, не подчиняется классической статистике Максвелла–Больцмана. Молодые физики Энрико Ферми и Поль Дирак независимо друг от друга в 1926 году предложили другую статистику, основанную на квантовом принципе Паули. Согласно этому принципу, в ансамбле частиц, имеющих спиновое число $1/2$, в частности электронов, не может быть двух частиц в одинаковом квантовом состоянии. Следовательно, не может быть больше двух электронов с одинаковой энергией (один из них имеет спиновое число $+1/2$, другой имеет спиновое число $-1/2$).

Свободные электроны металлического кристалла можно считать квантовым ансамблем, поскольку они находятся в общем электрическом поле ионов кристалла с одинаковой средней потенциальной энергией в пространстве между ионами (соответственно, со средней нулевой напряженностью). Поскольку состояния электронов должны быть различными, число этих состояний должно соответствовать числу свободных электронов, т.е. быть очень большим. В квантовой физике твердого тела формулируется, что набор значений энергии этих электронов представляет собой некую *энергетическую зону*. Возможно, слово «зона» – не очень удачный термин, поскольку в русском языке с этим словом в первую очередь ассоциируется некий пространственный промежуток, а не интервал энергий. Но термину «энергетическая зона» вот уже почти сто лет, и он прочно вошел в физику твердого тела, целый раздел которой так и называется – «зонная теория твердых тел».

В зонной теории важно, что у проводников (металлов) число состояний, занятых электронами, всегда в несколько раз меньше числа возможных состояний, т.е. электронами использована только половина или даже четверть ширины всей зоны, которая называется *разрешенной зоной*.

Часть разрешенной зоны, не занятая электронами, называется *зоной проводимости*. При наличии электрического поля (при подключении проводника к источнику тока) все свободные электроны могут получить энергию от поля – принцип Паули не препятствует этому, поскольку это происходит практически одновременно для всех электронов, а разрешенная энергетическая зона этих электронов заполнена ими не полностью. Получение электронами энергии от поля и есть электрический ток. Вещество является проводником.

У непроводников (диэлектриков и полупроводников) все возможные состояния внешних атомных электронов полностью использованы. В этом случае разрешенную зону называют *валентной зоной*. А разрешенная квантовой теорией зона проводимости отделена от валентной зоны запрещенной зоной. Это означает, что электроны валентной зоны или не могут получать энергию от поля – это диэлектрики, или только некоторая часть валентных электронов (самых энергичных) сможет иметь энергию, соответствующую зоне проводимости, и стать носителями заряда в электрическом поле – это полупроводники.

Но вернемся к свободным электронам металлов. В зонной теории важно, что ширина зоны, занятой свободными электронами у металлов, т.е. интервал энергий, которые может иметь свободный электрон, много больше величины kT при комнатных и лабораторных температурах. Энергия kT – это та энергия, которую мог бы получить свободный электрон с энергией E от ионов кристаллической решетки при своих хаоти-

ческих столкновениях с ними. Однако он не может ее получить, поскольку состояние с энергией $E + kT$ использовано двумя другими электронами. Только у самых энергичных электронов такая возможность есть. Но число таких электронов ничтожно. Это и означает, что основной массив свободных электронов нечувствителен к энергиям колебаний ионов, т.е. к температуре металла, или, другими словами, не имеет теплоемкости. Таким образом квантовая статистика Ферми–Дирака объясняет это затруднение классической электронной теории.

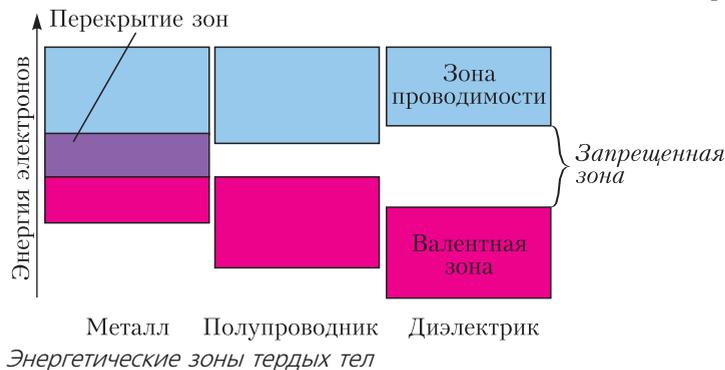
Как в квантовой механике рассматривается природа электрического тока в проводниках и что такое электрическое сопротивление проводника?

Выше было сформулировано, что классическая электронная теория рассматривает электрический ток как смещение свободных электронов металла под действием электрического поля (дрейф электронов), а сопротивление проводника – как результат столкновений свободных электронов с ионами кристаллической решетки. Дрейфовое смещение Δx можно было наглядно представить на векторной диаграмме и выразить формулой классической механики – в этом и заключалось «понимание» того, что такое электрический ток.

В квантовой механике такая наглядность отсутствует. Принципиально отсутствует понятие траектории электрона – и в атоме, и в молекуле, и в металлическом кристалле. Не нужно (да и невозможно) представлять себе траекторию микрочастицы как геометрический образ или формулу.

Но что же можно (и нужно)? В квантовой механике разработаны различные матема-

тические подходы к решению задачи о поведении микрочастицы. Во всех этих подходах находятся координатно-временные зависимости вероятностных характеристик поведения микрочастицы и постулируются рецепты получения из этих вероятностных характеристик тех величин, которые наблюдаются на опыте. Для атома и моле-



кулы – это частоты (длины волн) электромагнитного излучения атомных электронов. Для явления электрического тока – это сила тока и удельное сопротивление вещества.

Наиболее удобным для этого оказалось использование волновой квантовой механики. В этом варианте квантовой механики волновой характеристикой микрочастицы является так называемая пси-функция координат и времени, которая математически имеет вид уравнения волны и является решением некоторого волнового дифференциального уравнения (со второй частной производной по координатам и первой производной по времени). Это уравнение было сформулировано Эрвином Шрёдингером в 1926 году.

Почему пси-функция имеет волновой характер? Дело в том, что еще в 1923 году Луи де Бройль предположил, что не только фотон имеет двойственное, корпускулярно-волновое представление, но и всякий микрообъект, в частности электрон. Как частица (корпускула), он при движении характеризуется импульсом \vec{p} и связанной с ним энергией E . Но электрон при этом может проявлять волновые свойства (интерференцию, дифракцию), характеризующиеся длиной волны $\lambda_{\text{Бр}} = h/p$, где h – постоянная Планка. Эту длину волны называют дебройлевской длиной волны микрочастицы или длиной волны де Бройля. Вы обратили внимание, что эта формула (постулат де Бройля) есть обращение эйнштейновского постулата для импульса фотона $p = h/\lambda$?

В формуле де Бройля для импульса микрочастицы следует использовать релятивистское выражение зависимости от скорости: $p = mv/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Для скоростей, много меньших скорости света, $p = mv$ и $\lambda_{\text{Бр}} = h/(mv)$. Очевидно, что наиболее отчетливо волновые свойства микрочастиц должны проявляться у самых легких частиц – у электронов. И действительно, в 1927 году экспериментально была обнаружена дифракция электронов (с этим связано создание электронного микроскопа).

Что колеблется в волне де Бройля? Попытки ответа на этот вопрос через распространяющееся колебание некоего электри-

ческого поля не привели к успеху. Было постулировано (Шрёдингер, Гейзенберг, Бор), что пси-функция математически выражается уравнением волны, в котором длина волны и частота определяются импульсом и энергией согласно постулату де Бройля. А наглядного «понимания» волны де Бройля для микрочастицы в принципе не существует – так же, как не существует наглядной траектории электрона в атоме.

Создатели матричной квантовой механики (Макс Борн, Вернер Гейзенберг, Нильс Бор) показали, что эта форма квантовой механики дает точно такие же результаты, сравнимые с опытом, как и уравнение Шрёдингера в волновой квантовой механике. И именно эти ученые определили пси-функцию как вероятностную характеристику поведения микрочастицы и как ту величину, которая колеблется в волне де Бройля. Еще раз следует подчеркнуть, что никакой наглядности в этом утверждении нет, это только одно из математических оформлений вероятностного характера поведения микрочастицы.

Применение понятия волны де Бройля стало удобным для многих задач квантовой механики, в частности для объяснения электрического тока в металлических кристаллах. Есть несколько квантовых теорий этого явления, отличающихся различной математической сложностью и различной степенью согласия с опытными данными. В одной из наименее сложных теорий поведение электрона в металле описывается уравнением Шрёдингера, в котором воздействие на электрон определяется суммой электрического поля ионов кристаллической решетки, периодически повторяющегося в пространстве, и приложенного к проводнику внешнего электрического поля от источника тока. При этом учитывается колебательное движение этих ионов, подчиняющееся статистическому распределению Максвелла–Больцмана. Результат этого колебательного движения можно рассматривать как хаотически меняющееся неоднородное распределение ионов в кристалле, только в среднем представляющее определенную кристаллическую систему. Для краткости это распределение называют

«тепловыми неоднородностями» кристалла. Кроме тепловых, существуют и другие неоднородности (дефекты), присущие всякой кристаллической структуре (вакансии, дислокации и др.).

В простейшей квантовой теории оказалось удобным выразить взаимодействие электронов с неоднородностями кристаллической структуры как результат рассеяния дебройлевских электронных волн на этих неоднородностях. Если бы кристаллическая решетка была идеальной, взаимодействие было бы просто пространственной дифракцией, похожей на дифракцию рентгеновских лучей, для которых реальные неоднородности решетки слишком мелкие, чтобы на них реагировать. Но дебройлевская длина волны электронов по порядку величины совпадает с постоянной кристаллической решетки (средним расстоянием между ионами) и для нее дефекты решетки существенны. В теории используется термин «рассеяние дебройлевских волн на дефектах кристаллической решетки». При рассеянии электрон теряет ту свою энергию, которую он получил от внешнего электрического поля, и передает ее ионам. Как участник общего квантового ансамбля свободных электронов, он по своей энергии остается в разрешенной энергетической зоне.

Для согласования теории с опытом удобным оказалось с помощью пси-функции выразить среднее значение скорости перемещения заряда (величины плотности j электрического тока) от напряженности электрического поля. Было получено выражение

$$j = (1/S)(\Delta q/\Delta t)_{\text{cp}} = (n^2 e \lambda / (m u)) E.$$

Это запись закона Ома в локальной форме, из которой можно легко получить обычный закон Ома $I = U/R$, если величину $m u / (n^2 e \lambda)$ обозначить ρ и назвать ее удельным сопротивлением:

$$\rho = m u / (n^2 e \lambda).$$

При выводе этого выражения была использована квантовая статистика Ферми–Дирака, согласно которой (как уже упоминалось выше) величина средней скорости хаотического движения свободных электронов в металле является практически постоянной величиной, не зависящей от температуры,

в отличие от статистики Максвелла–Больцмана, принятой в классической электронной теории электропроводности металлов.

И совсем другой смысл имеет величина λ . В квантовой теории этим символом обозначается средняя длина рассеяния электронных дебройлевских волн на дефектах кристаллической структуры (но не сама длина дебройлевских волн!). Поскольку главным дефектом является хаотично распределенное колебательное движение ионов, основная теоретическая зависимость – это связь λ с абсолютной температурой T . Несмотря на сложность расчетов, результат оказался простым:

$$\lambda \sim 1/T.$$

Тогда, учитывая, что $u \approx \text{const}$, для удельной теплоемкости получаем теоретическую зависимость:

$$\rho \sim T,$$

что очень хорошо совпадает с опытными данными.

Качественно квантовая теория объясняет также температурную зависимость сопротивления при низких температурах и при стремлении температуры к нулю, когда главную роль в рассеянии электронных волн начинают играть не неоднородности теплового движения, а другие дефекты кристаллической решетки. Играет роль и квантованность колебательного движения ионов, которая проявляется при низких температурах, и тот факт, что даже при стремлении к нулю абсолютной температуры энергия колебаний стремится не к нулю, а к некоторой минимальной величине. Объясняется и большее сопротивление металлических сплавов, у которых большая концентрация примесных атомов представляет собой значительные неоднородности структуры.

Таким образом, в этом варианте квантовой теории электропроводности металлов электрический ток представляет собой распространение дебройлевских электронных волн по проводнику, а электрическое сопротивление есть результат рассеяния дебройлевских волн на дефектах кристаллической структуры, прежде всего на статистических неоднородностях теплового колебательного движения ионов решетки.

(Продолжение см. на с. 19)

ЗОНОГОНЫ

А. УСТИНОВ

Что такое зоногон?

Определение 1. Зоногон – это выпуклый многоугольник с четным количеством сторон, которые можно разбить на пары равных и параллельных.

Примерами зононов являются параллелограмм и любой правильный многоугольник с четным числом сторон. Нетрудно увидеть, что зоногон всегда имеет центр симметрии (рис. 1). И действительно, это свойство является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выпуклый многоугольник был зононом.

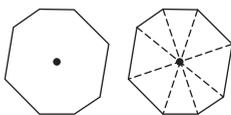


Рис. 1

Предложение 1. Выпуклый многоугольник является зононом тогда и только тогда, когда имеет центр симметрии.

Доказательство. Если выпуклый многоугольник имеет центр симметрии, то он является зононом по определению.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть AB и BC – две последовательные стороны данного зонона (рис. 2). Тогда найдутся равные и параллельные им стороны $A'B'$ и $B'C'$. Обозначим через O середину диагонали AA' . Тогда O – центр параллелограмма $ABA'B'$, а значит, и середина диагонали BB' . Повторяя это рассуждение, получаем, что O – середина диагонали CC' и т.д. Значит, O – центр симметрии данного многоугольника.

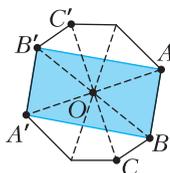


Рис. 2

Предложение 2. Выпуклый многоугольник является зононом тогда и только тогда, когда его можно разбить на параллелограммы.

Доказательство. Предположим, что имеется зонон. Простейший способ построить нужное разбиение – это рассмотреть цепочку параллелограммов, соединяющую две

противоположные стороны a_n, \tilde{a}_n и идущую вдоль границы данного зонона (рис. 3). Отбросив эту цепочку, мы получаем новый

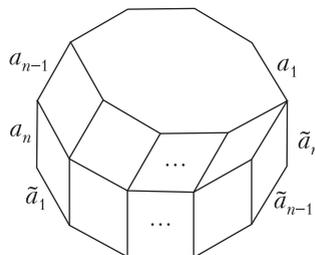


Рис. 3

зонон, у которого число сторон уменьшилось на 2. Повторяя процедуру, мы в конце концов придем к параллелограмму.

Докажем утверждение в другую сторону. Предположим, что выпуклый многоугольник M разрезан на параллелограммы. Согласно предложению 1, достаточно доказать, что для любой стороны данного многоугольника найдется другая сторона, которая ей равна и параллельна. Рассмотрим произвольную сторону a многоугольника M , будем считать ее горизонтальной. Выделим в разбиении те параллелограммы, которые имеют стороны, параллельные a (рис. 4). Нижние стороны этих параллелограммов превратим в векторы, направленные вправо, а из верхних сделаем векторы, направленные влево. С одной стороны, сумма всех этих векторов равна нулю. С другой стороны, все векторы,

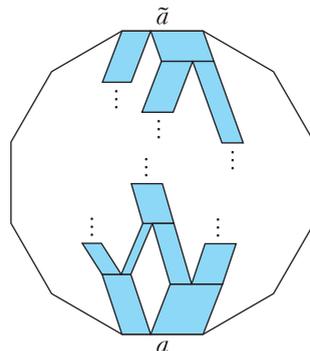


Рис. 4

находящиеся внутри многоугольника, также сокращаются друг с другом. Следовательно, сумма векторов на границе многоугольника также равна нулю. Поскольку многоугольник выпуклый, эта сумма состоит из двух векторов, являющихся противоположными сторонами данного многоугольника. Так как их сумма равна нулю, то эти векторы, а значит, и соответствующие им стороны, имеют равную длину.

Замечание 1. Если в качестве зонона выбрать правильный $2n$ -угольник, то процедура, использованная в доказательстве предложения 2, приводит к разбиению на ромбы. Примеры таких разбиений показаны на рисунке 5.

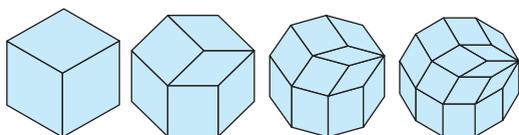


Рис. 5

Замечание 2. Пространственным аналогом зонона является *зоноэдр* – выпуклый центрально симметричный многогранник, у которого все грани также центрально симметричны. На рисунке 6 изображен пример зоноэдра – усеченный октаэдр.

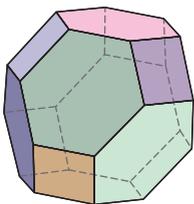


Рис. 6

Зононы и зоноэдры впервые появились в трудах российского кристаллографа Евграфа Степановича Федорова [1]. Там же впервые была

изложена главная идея, которую мы будем многократно использовать в дальнейшем, – строить цепочки из параллелограммов, соприкасающихся параллельными сторонами.

Федоров называл зононы *парносторонниками*, а зоноэдры – *парногранниками*. Мы же будем придерживаться более современной терминологии. В книге [2] для зононов используется еще одно название – *параллельно-сторонние $2n$ -угольники*.

Разбиение правильного шестиугольника на ромбы

Следующая задача предлагалась на осеннем Турнире городов 1989 года.¹

Задача 1. *Правильный шестиугольник со стороной n разбит на ромбы со стороной 1 и углами 60° и 120° . Ромбы разбиваются на три вида в зависимости от их ориентации (т. е. одинаковыми мы считаем те и только те ромбы, которые можно совместить параллельным переносом (рис. 7).*

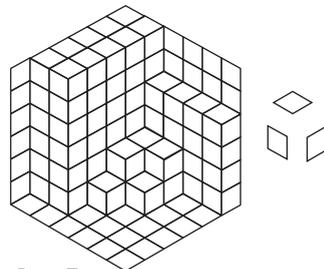


Рис. 7

Докажите, что в замощении присутствует равное число ромбов каждого вида.

Мы рассмотрим несколько решений этой задачи, каждое из которых по-своему интересно и полезно.

Первое решение задачи 1: выход в пространство.² Если раскрасить ромбы в три цвета в зависимости от их ориентации, то в замощении можно увидеть набор единичных кубиков, сложенных в коробку $n \times n \times n$. Каждый кубик расположен так, чтобы быть максимально близко к некоторому фиксированному углу коробки. Для нас это будет дальний нижний угол, в котором сходятся пол и две стенки, назовем их левой и правой. Ту поверхность, которую образуют свободные грани кубиков, будем называть *ортогональной поверхностью* (рис. 8).

Будем обозначать стены пустой коробки буквами L (левая), R (правая) и H (горизонтальная) (рис. 9). Ромбы в зависимости

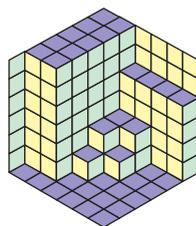


Рис. 8

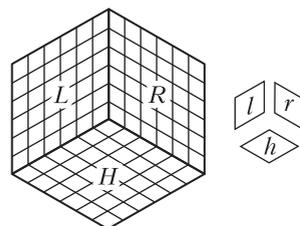


Рис. 9

² О других задачах, решаемых с помощью выхода в пространство, включая использование четвертого измерения, можно прочитать в статьях [3], [4], [5].

¹ Автор задачи – В.Произволов, см. также задачу M1213 «Задачника «Кванта».

от ориентации также будем обозначать буквами l, r, h и называть *левыми, правыми, горизонтальными* (например, левый ромб ориентирован так же, как и левая стена).

Глядя на эту конструкцию сверху, мы видим верхние грани кубиков и часть пола, которая кубиками не покрыта. Всей этой поверхности площади n^2 соответствует n^2 ромбов, ориентация которых совпадает с ориентацией пола. Глядя, например, справа, мы увидим правые грани кубиков и часть левой стены L , которую они не закрывают. Этим поверхностям будут соответствовать ромбы вида l , ориентация которых совпадает с ориентацией левой стенки. Аналогичной будет и ситуация с правой стенкой R и правыми ромбами вида r .

Казалось бы, что на этом решение можно и закончить. Но, строго говоря, здесь нужно еще проверить, что произвольному замощению ромбами действительно соответствует реальная конструкция из кубиков, а не какая-нибудь невозможная фигура. Например, если пытаться строить замощение не правильного, а какого-нибудь случайного шестиугольника с целыми сторонами и углами 60° и 120° , то, как правило, будут получаться изображения невозможных объектов (рис. 10).

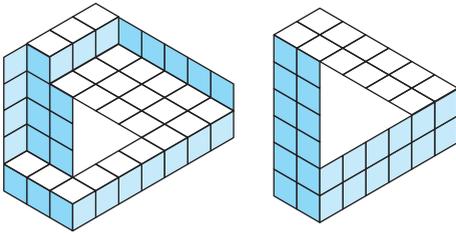


Рис. 10

Докажем корректность выхода в трехмерное пространство.

Предложение 3. *Произвольное замощение правильного шестиугольника ромбами можно представить как проекцию некоторой ортогональной поверхности.*

Доказательство. Для того чтобы построить требуемую конструкцию из кубиков, присвоим всем вершинам ромбов пространственные координаты (x, y, z) , где x, y, z – целые числа в пределах от 0 до n . Верхней вершине шестиугольника присвоим координаты $(0, 0, n)$. Затем будем последовательно переходить к соседним верши-

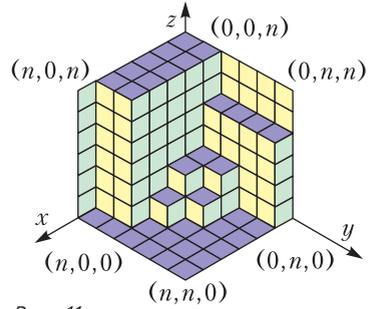


Рис. 11

нам так, как будто мы двигаемся по ортогональной поверхности (рис.11): шаг по вертикальному отрезку вниз уменьшает на 1 координату z , шаг влево вниз увеличивает на 1 координату x , а шаг вправо вниз увеличивает на 1 координату y . Естественно, мы считаем, что движение в противоположном направлении приводит к противоположному результату. Если эта процедура не приведет к противоречию, то по пространственным координатам вершин мы построим трехмерную поверхность и соответствующее ей расположение кубиков.

Противоречие может получиться, если, дойдя по разным путям до одной и той же точки, мы должны будем присвоить ей разные координаты. Это равносильно тому, что существует некоторый цикл, пройдя по которому, мы получим в исходной точке другие координаты. Цикл можно последовательно стянуть в точку, уменьшая на каждом шаге его внутренность на один ромб. Правила расстановки координат гарантируют, что на каждом шаге такого процесса значения координат в оставшихся вершинах цикла меняться не будут. Когда цикл стянется в точку, мы получим противоречие с предположением, что координаты расставлены некорректно.

На рисунке 12 для конкретного цикла изображены три шага процесса стягивания. На третьем шаге цикл превратился в объединение двух циклов. Так как каждый

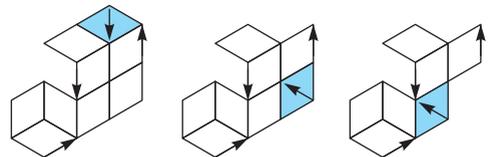


Рис. 12

из них стал короче, то для них утверждение можно считать доказанным. Значит, оно будет справедливым и для их объединения.

Цепочки де Брёйна

Определение 2. Разбиение зоногона на параллелограммы будем называть *регулярным*, если параллелограммы в нем примыкают друг к другу целыми сторонами.

Другими словами, в регулярном разбиении любые два соседних параллелограмма разбиения (т.е. такие, которые имеют общий отрезок границы) должны иметь общую сторону. Например, разбиения, изображенные на рисунках 5 и 7 – регулярные, а разбиение на рисунке 4 – нет, поскольку там есть параллелограммы, сторона которых является частью сторон двух других параллелограммов.

Если разбиение нерегулярно, то можно произвести дополнительные разрезы, которые превратят его в регулярное (см. штриховые линии на рисунке 13).

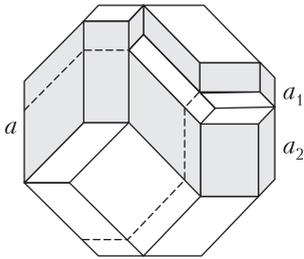


Рис. 13

При этом понадобится лишь конечное число дополнительных разрезов, поскольку количество проблемных ситуаций, когда к одной стороне примыкает несколько других сторон, с каждым разом будет уменьшаться.

При доказательстве предложения 2 мы рассматривали семейства параллелограммов, соединенных сторонами. Эта конструкция естественным образом приводит к понятию *зоны*, благодаря которому зононы и получили свое название.

Определение 3. Если Π – некоторый параллелограмм разбиения и a – его сторона, то объединение всех параллелограммов, в которые можно попасть, начиная с Π и двигаясь через стороны, параллельные a , называется *зоной* и обозначается $Z(a)$.

В регулярном разбиении каждая зона представляет собой последовательность

параллелограммов, соединенных общими сторонами, и называется *цепочкой де Брёйна*.

На рисунке 13 видно, как при переходе к регулярному разбиению зона $Z(a)$ распадается в объединение двух цепочек (зон) $Z(a_1)$ и $Z(a_2)$.

Де Брёйн использовал такие цепочки параллелограммов в качестве инструмента для изучения квазикристаллов ([6], [7]). О квазикристаллах и мозаиках Пенроуза журнал «Квант» рассказывал в статье [8]. На рисунке 14³ можно видеть цепочки де Брёйна на мозаике Пенроуза.

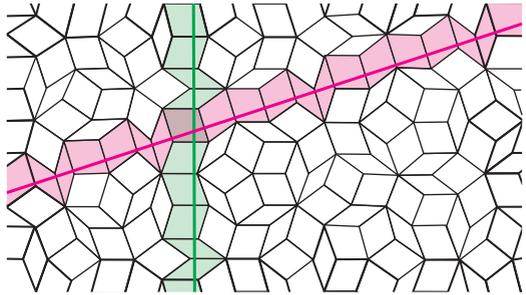


Рис. 14

Теорема 1 (свойства цепочек де Брёйна).

1°. Две цепочки, соединяющие одну и ту же пару параллельных сторон, не пересекаются.

2°. Две цепочки, соединяющие разные пары параллельных сторон, пересекаются ровно по одному параллелограмму.

3°. Пусть цепочка де Брёйна соединяет стороны зоногона, находящиеся на расстоянии h друг от друга, и состоит из параллелограммов с общим основанием a . Тогда суммарная площадь всех параллелограммов цепочки равна ah .

Доказательство. 1°. Каждый параллелограмм в цепочке выбранного направления однозначно определяет всю цепочку. Поэтому, если две цепочки, соединяющие пару параллельных сторон, имеют общий параллелограмм, то они совпадают.

2°. Если предположить, что две выбранные цепочки имеют по крайней мере два общих параллелограмма, то из соображений непрерывности следует, что цепочки пересекутся еще раз. Действительно, нарисуем

³ Рисунок взят из книги [9].

параллелограмм $ABCD$, стороны которого являются продолжениями сторон общих параллелограммов двух цепочек (рис. 15). Тогда зеленая цепочка параллелограммов соединяет стороны AB и CD , а красная – стороны BC и AD . Значит, они должны иметь общий параллелограмм внутри $ABCD$. Получается, что между двумя общими параллелограммами должен оказаться еще один общий параллелограмм той же ориентации. Значит, таких параллелограммов бесконечно много, что невозможно.

3°. Утверждение следует из того, что все параллелограммы имеют равные основания, а их суммарная высота равна расстоянию между соединяемыми сторонами данного зногона.

Второе решение задачи 1: цепочки де Брёйна. Пусть $ABCDEF$ – данный шестиугольник и n – длина его сторон. Поскольку шестиугольник разбивается на $6n^2$ правильных треугольников со стороной 1, общее число ромбов в разбиении должно быть $3n^2$, и достаточно проверить, что разбиение состоит из n^2 ромбов каждой ориентации.

Будем рассматривать ромбы фиксированной ориентации, например, такие, стороны которых параллельны отрезкам AB и CD . По каждому такому ромбу можно построить цепочку де Брёйна, т.е. последовательность ромбов, которая начинается на стороне AB , заканчивается на стороне ED и в которой каждые два соседних ромба имеют общую сторону, параллельную AB (рис. 16). Всего получится n таких цепочек (по числу единичных отрезков на сторо-

нах AB и CD). По построению никакие две из этих цепочек не будут иметь общих ромбов. Точно так же можно построить n цепочек, начинающихся на стороне AF , заканчивающихся на стороне CD , в каждой из которых соседние ромбы имеют общую сторону, параллельную AF .

Из теоремы 1 следует, что любые две цепочки разных направлений пересекаются ровно по одному параллелограмму (рис. 17). Таким образом, число ромбов выбранной ориентации равно числу пар цепочек, в которых первая цепочка соединяет стороны AB и ED , а вторая – стороны AF и CD . Значит, таких ромбов n^2 .

Замечание 3. При решении этой задачи можно было не использовать в полной мере теорему 1. Цепочки де Брёйна разных направлений, очевидно, пересекаются. Имеется n^2 пар цепочек, в которых первая цепочка соединяет стороны AB и ED , а вторая – стороны AF и CD . Значит, таких ромбов n^2 . Поэтому в замощении будет не менее n^2 ромбов выбранной ориентации. По тем же соображением будет не менее n^2 ромбов каждого вида. Так как общее число ромбов равно $3n^2$, то число ромбов каждого направления должно быть в точности равно n^2 .

Проведенное рассуждение не только решает задачу, но и дает еще одно доказательство того факта, что цепочки де Брёйна разных направлений пересекаются ровно по одному ромбу.

Замечание 4. Мы двумя разными способами доказали, что две цепочки разных направлений пересекаются ровно один раз. Отсутствие второго пересечения можно

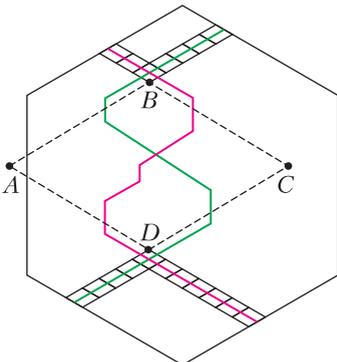


Рис. 15

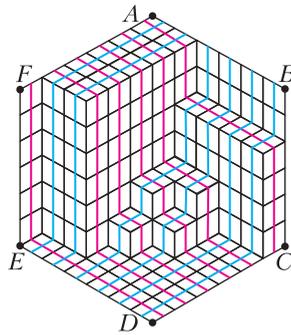


Рис. 16

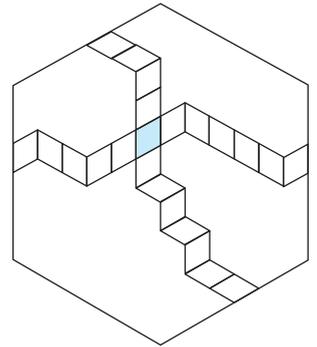


Рис. 17

обосновать, используя трехмерную интерпретацию разбиения на ромбы. При таком подходе каждая цепочка де Брёйна превратится в цепочку квадратов на ортогональной поверхности. При этом всем точкам будут присвоены пространственные координаты.

Рассмотрим красные и синие линии на рисунке 16. Точки на красной линии имеют координаты (x_0, y, z) , где x_0 фиксировано, y непрерывно и монотонно меняется от 0 до n , а z — от n до 0 (при движении от отрезка AF к отрезку CD). Точки на синей линии имеют координаты (x, y_0, z) , где y_0 фиксировано, x непрерывно и монотонно меняется от 0 до n , а z — от n до 0 (при движении от отрезка AB к отрезку DE). Из соображений непрерывности следует, что красная и синяя линии пересекутся при $x = x_0, y = y_0$, причем точка пересечения будет лежать в центре некоторой горизонтальной грани. Когда линии дойдут до границы этой грани, уже будут выполняться неравенства $x > x_0, y > y_0$ (рис. 18).

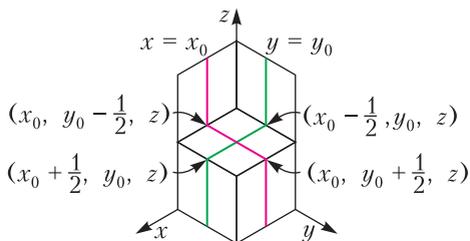


Рис. 18

Поскольку при движении по каждой из линий координаты меняются монотонно, повторное пересечение невозможно.

Красные и синие линии на рисунке 16 по своим свойствам напоминают обычные прямые: ломаные одного направления не пересекаются, а ломаные разных направлений пересекаются ровно в одной точке. Это наблюдение естественным образом приводит к понятию псевдопрямой.

Определение 4. Псевдопрямой называется бесконечная ломаная без самопересечений с конечным количеством точек излома в \mathbb{R}^2 , концы которой «уходят на бесконечность» в противоположных направлениях.

Конфигурацией псевдопрямых называется такое конечное множество псевдопрямых

на плоскости, что

- 1) любые две псевдопрямые или не имеют общих точек (в таком случае они называются *параллельными*), или имеют ровно одну общую точку, в которой пересекаются;
- 2) отношение параллельности транзитивно (т.е. если псевдопрямая пересекает одну из двух параллельных псевдопрямых, то она пересекает и вторую).

К конфигурации псевдопрямых на рисунке 16 можно дополнительно добавить еще одно семейство линий. Они будут соответствовать цепочкам де Брёйна, соединяющим стороны BC и EF шестиугольника $ABCDEF$. Тогда получится конфигурация псевдопрямых, изображенная на рисунке 19. Линии одного цвета здесь

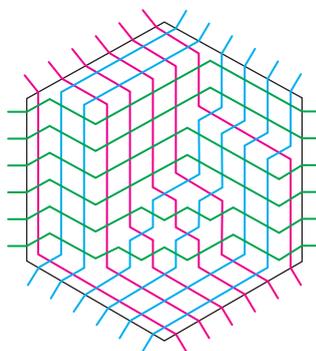


Рис. 19

«параллельны», две линии разных цветов пересекаются в одной точке, что соответствует свойствам 1°, 2° цепочек де Брёйна из теоремы 1.

Флипы

Различные разбиения зоногона на параллелограммы можно получать друг из друга, если использовать такую операцию как *флип*. Флип переставляет местами параллелограммы, образующие шестиугольник (поворачивает внутренность шестиугольника на 180°, рис. 20).

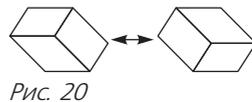


Рис. 20

В следующей задаче⁴ флипы применяются для перестройки разбиений правильного шестиугольника на ромбы (т. е. тех разбиений, которые рассматривались в задаче 1).

⁴ Задача M709 из «Задачника «Кванта», автор — А. Смирнов.

Задача 2. Ромбическое разбиение.

Правильный шестиугольник со стороной n разбит на ромбы со стороной 1 и острым углом 60° . Замощение внутри любого правильного шестиугольника со стороной 1 можно менять, как показано на рисунке 21. Докажите, что

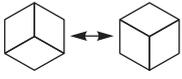


Рис. 21

а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое;

б) это можно сделать не более чем за n^3 операций;

в) из расположения плиток на рисунке 22 нельзя получить расположение на рисунке 23 менее чем за n^3 операций.

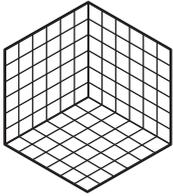


Рис. 22

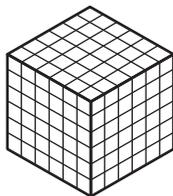


Рис. 23

Первое решение задачи 2: выход в пространство.

При решении задачи 1 мы доказали, что произвольное разбиение правильного шестиугольника на ромбы можно понимать как изображение поверхности набора кубиков, сложенных в коробку $n \times n \times n$. Как и раньше, рисунок 22 мы будем понимать как пустую коробку, а рисунок 23 – как заполненную. Флипу соответствует добавление одного кубика в свободное «гнездо» или изъятие одного кубика, на котором не лежат другие. Тогда получается, что для перехода от конфигурации рисунка 22 к конфигурации рисунка 23 нужно уложить в коробку n^3 кубиков, и за меньшее число ходов этого сделать нельзя (число ходов может быть больше, если некоторые из них будут бесполезными, например, так будет, если вынимать уже добавленные кубики).

Пусть имеется два разбиения на ромбы, которым соответствуют пространственные конфигурации из кубиков Q_1 и Q_2 . Тогда от Q_1 к Q_2 можно перейти двумя разными способами. Можно сначала вынуть все кубики из Q_1 , а потом собрать Q_2 , а можно –

сначала достроить Q_1 до полной коробки, а потом так вынуть кубики, чтобы получилась Q_2 . Если сделать эти два действия последовательно, то всего будет вынуто n^3 кубиков и добавлено n^3 кубиков, т.е. всего будет сделано $2n^3$ операций. Значит, хотя бы одно из этих действий требует не более n^3 операций.

Второе решение задачи 2: сведение к канонической конфигурации. Обозначим ромбы в зависимости от ориентации буквами l , r и h , как мы это делали в первом решении задачи 1 (см. рис. 9).

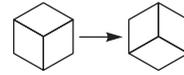


Рис. 24

Будем изменять замощения ромбами, используя флипы только одного типа (флипы «вниз», рис. 24).

В пространственной конструкции такому флипу соответствует вытаскивание одного кубика. На плоскости в результате применения одного такого флипа «горизонтальный» ромб опускается, «левый» ромб сдвигается вправо, а «правый» – влево. Так как ромбы каждого вида движутся только в одну сторону, то, начиная с произвольного замощения, мы придем к такому замощению, в котором дальнейшие флипы будут уже невозможны. Утверждается, что единственным таким замощением может быть то, которое соответствует пустой коробке (см. рис. 22). Назовем его *каноническим*.

Предположим, что это не так. Тогда найдется такой «горизонтальный» ромб h , что один из примыкающих к нему снизу ромбов имеет другую ориентацию, например, «правый» ромб r (рис. 25). Так как флипы невозможны, то к паре h и r справа примыкает аналогичная пара, со-

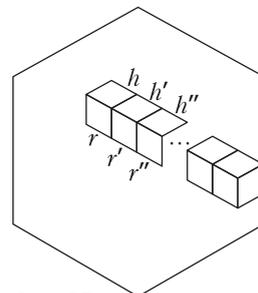


Рис. 25

стоящая из горизонтального и правого ромбов h' и r' . Продолжая рассуждать так же, мы получим бесконечную последовательность пар (h, r) , (h', r') , (h'', r'') , ..., что невозможно.

Значит, если флипы невозможны, то под каждым горизонтальным ромбом могут находиться только горизонтальные, справа от правого ромба – только правые, а слева от левого – только левые. Следовательно, замощение является каноническим.

Из того, что произвольное замощение с помощью конечной последовательности флипов мы можем превратить в каноническому, следует, что любое замощение мы можем превратить и в любое другое.

Третье решение задачи 1: флипы. В решении задачи 2 мы доказали, что с помощью флипов любое замощение шестиугольника можно превратить в каноническое, в котором по n^2 ромбов каждого вида. Так как флипы переставляют ромбы, не меняя их ориентации, то в любом другом разбиении также будет n^2 ромбов каждого вида.

Литература

1. *Е.С.Федоров.* Начала учения о фигурах. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1953. См. также первое издание книги: *Е.С.Федоров.* Начала учения о фигурах. – Типография Императорской Академии Наук, 1885.
2. *У.Болл, Г.Коксетер.* Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986.
3. *И.Шарыгин.* Выход в пространство. – «Квант», 1975, №5.
4. *В.Протасов.* Выход в пространство-2. – «Квант», 2017, № 12.
5. *В.Дубровский, И.Шарыгин.* Геометрический стереоскоп. – «Квант», 1993, № 1.
6. *N.G.de Bruijn.* Algebraic theory of Penrose's nonperiodic tilings of the plane I, II. – Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Indagationes Mathematicae, vol. 43, 1981, № 1, p. 39–52, p. 53–66.
7. *N.G.de Bruijn.* Dualization of multigrids. – Journal de Physique Colloques, vol. 47, 1986, №3, p. 9-18.
8. *В.Коренин.* Узоры Пенроуза и квазикристаллы. – «Квант», 1987, № 6.
9. *F.D'Andrea.* A guide to Penrose tilings. – Springer, 2023.

(Продолжение следует)

(Начало см. на с. 2)

Наглядное объяснение? Наверное, только по форме. По сути, более глубокое знакомство с математической стороной решения все равно приведет к принципиально вероятностным квантовым характеристикам поведения электронов, где всякая наглядность исчезнет.

Почему физики-теоретики не удовлетворились одной квантовой теорией электропроводности, а создавали разные ее варианты? Дело в том, что квантовой теорией никак не удавалось объяснить явление сверхпроводимости. Открыто это явление было еще в 1911 году. Но его практическое использование до сих пор сдерживается возможностью применения только при сверхнизких температурах, требующих для их поддержания жидкого гелия. А это очень недешево! Перед расхо-

дами не останавливаются, когда речь идет о крупных научных проектах (БАК, ИТЭР и др.). Но в «человеческой» области сверхпроводимости пока используется только в медицинской томографической диагностике (МРТ и т.п.).

Явление сверхпроводимости настолько интересно и в перспективе сулит человечеству такие замечательные практические применения, что вот уже больше пятидесяти лет его изучают во многих научных лабораториях. Десять физиков стали Нобелевскими лауреатами за исследования в области сверхпроводимости – три экспериментатора и семь теоретиков. Однако, несмотря на некоторые достижения, до сих пор не создано такой квантовой теории этого явления, которая позволила бы совершить скачок в его практическом применении.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2810 предлагалась на 62-м Уральском турнире юных математиков. Задача M2811 – на майских учебно-тренировочных сборах кандидатов в команду на Международную математическую олимпиаду. Задача M2812 – на олимпиаде «Курчатов».

Задачи M2810–M2813, Ф2817–Ф2820

M2810. Дано натуральное число $n \geq 2$. Сколькими способами можно раскрасить клетки квадрата $n \times n$ в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета?

И.Ефремов

M2811. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} такова, что $a_1 = 1$ и для каждого натурального $n = 1, 2, \dots, 100$

число $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$ является целым. Какое наибольшее значение может принимать a_{100} ?

М.Туревский

M2812. На координатной плоскости в некоторых точках с целыми координатами лежит по камешку (камешков конечное количество). Разрешается делать следующий ход: выбрать пару камешков, взять некоторый вектор \vec{a} с целыми координатами и далее один из выбранных камешков сдвинуть на вектор \vec{a} , а другой – на противоположный вектор $-\vec{a}$; при этом запрещается, чтобы в одной точке оказалось более одного камешка. Всегда ли можно за несколько ходов добиться ситуации, в которой все камешки лежат на одной прямой?

К.Иванов

M2813*. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром I (рис. 1).

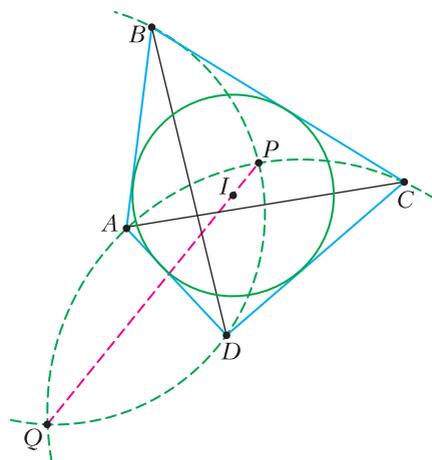


Рис. 1

Срединные перпендикуляры к отрезкам AC и BD пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников APC и BPD пересекаются в точках P и Q . Докажите, что I лежит на прямой PQ .

Чан Куанг Хунг

Ф2817. На геостационарном спутнике Земли произошла авария – он взорвался. Из множества образовавшихся осколков (фрагментов) выделим два. Один осколок (так ему повезло) продолжил движение с той же скоростью, какую имел спутник за мгновение до взрыва. Второй осколок

в инерциальной системе отсчета, в которой центр Земли имел в момент взрыва нулевую скорость, сразу после взрыва тоже покоился. Толщина слоя атмосферы значительно меньше радиуса Земли $R = 6370$ км. Будем считать, что ее (атмосферы) просто нет. Будем также считать (для упрощения вычислений), что расстояние от центра Земли до спутника равно $L = 6,6R$, а период обращения Земли вокруг собственной оси (в инерциальной системе отсчета) равен в точности $T = 24$ ч.

- 1) Какова была относительная скорость u этих осколков сразу после взрыва?
- 2) Оцените время падения «остановившегося» осколка после взрыва.
- 3) Какой была величина относительной скорости этих двух осколков за мгновение до падения второго осколка на землю?

С.Взрывной

Ф2818. Вода набирается в бассейн из большого озера, на берегу которого установлен центробежный водяной насос. Асинхронный двигатель переменного тока имеет частоту $f = 1450$ об/мин и максимальную мощность $W = 1$ кВт. Этот двигатель используется в конструкции насоса, предназначенного для заполнения струей воды бассейна глубиной $h = 1,5$ м, шириной $b = 4$ м и длиной дорожки $l = 20$ м. Крыльчатка насоса имеет радиус $R = 10$ см и ширину $d = 3$ см. Отверстие на выходе из насоса имеет сечение $S_0 = 20$ см² и расположено вблизи краев крыльев крыльчатки. Вылетающая из этого отверстия вертикально вверх вода достигает высоты, равной половине высоты H , на которой над водой в озере находятся верхние края бассейна. Трубу с какой высотой и каким одинаковым по длине трубы поперечным сечением нужно установить на выходе из насоса, чтобы первоначально пустой бассейн можно было за минимальное время заполнить водой? Каково это минимальное время? Потерями мощности при протекании воды по трубам можно пренебречь.

В.Водяной

Ф2819. Имеется «поджатая» пружина. Такая пружина начинает изменять свою длину только при некотором пороговом

значении растягивающей силы. Пружину подвешивают вертикально. Ее длина при двух различных подвешиваемых грузах массами M_1 и M_2 равна L_1 и L_2 соответственно. При этом все витки пружины уже разжались. Длина ненагруженной пружины L_0 меньше L_1 и L_2 , масса пружины m . Определите коэффициент упругости k пружины и величину силы поджатия f .

А.Власов

Ф2820. Немагнитный каркас длинного соленоида длиной L имеет поперечное к его оси симметрии сечение в форме квадрата с длиной ребра A . На поверхности соленоида в один слой виток к витку намотана проволока тоже квадратного поперечного сечения с ребром квадрата a . Поверхность проволоки изолирована тонким слоем лака. Выполняется цепочка неравенств $a \ll A \ll L$. По проволоке течет ток I . Каркас соленоида в одном месте (вблизи середины) аккуратно разрежали, освободили $1/4$ витка проволоки (длиной A) и расположили части этого соленоида так, что оси симметрии половинок совпали и освобожденный от касания с каркасом участок проволоки занял положение параллельно этим осям симметрии (рис. 2).

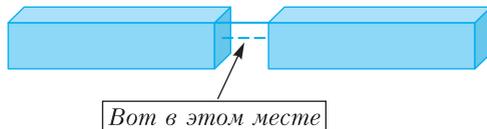


Рис. 2

Ток, текущий по проволоке, остался прежним. Какова величина вектора индукции магнитного поля в точке на оси симметрии, расположенной на одинаковом расстоянии от получившихся после разреза частей соленоида? Какой угол образует этот вектор магнитной индукции с осью симметрии половинок соленоида?

Д.Магнитный

Решения задач M2798–M2801, Ф2805–Ф2808

M2798. Дана прямолинейная дорога, выложенная из зеленых и красных дощечек (дорога – отрезок, разбитый на отрезки-дощечки). Цвета дощечек чередуются;

первая и последняя дощечки – зеленые. Известно, что длины всех дощечек больше сантиметра и меньше метра, а также что длина каждой следующей дощечки больше предыдущей. Кузнечик хочет прыгать вперед по дороге по этим дощечкам, наступив на каждую зеленую дощечку хотя бы один раз и не наступив ни на одну красную дощечку (или границу между соседними дощечками). Докажите, что кузнечик может сделать это так, чтобы среди длин его прыжков встретилось не более 8 различных значений.

Считаем, что дощечки выложены на числовой прямой. Примем 1 см за единицу. Возьмем $0 < \epsilon < 0,01$ такое, что разность длин любой пары соседних дощечек больше 10ϵ . Отметим на прямой бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью ϵ так, чтобы концы дощечек не были отмечены. Кузнечик будет прыгать только по отмеченным точкам, и длины его прыжков будут из множества $\{\epsilon, l, 2l, 8l, 16l, 32l, 64l\}$, где $l = N\epsilon$, а натуральное N подберем так, что $l < 2$ и $64l > 101$.

Стратегия кузнечика будет такой: прыгать вправо по зеленой дощечке на ϵ , пока возможно, и далее перепрыгивать очередную красную дощечку прыжком минимальной возможной длины (такая длина найдется, поскольку длина самого длинного прыжка больше $100 + \epsilon$). Итак, пусть сделан прыжок длины $2d$ из зеленого отрезка через очередную красную отрезок $[a; b]$. Нам остается убедиться, что после этого прыжка кузнечик окажется в следующем зеленом отрезке $[b; c]$. Предположим, что это не так и кузнечик из точки $a - x$, где $0 < x < \epsilon$, перепрыгнул в точку $a - x + 2d > c$. Видим, что $2d > (c - b) + (b - a) > 2$, значит, в множестве длин прыжков кузнечика есть длина d . Далее, по выбору ϵ , имеем $(c - b) > (a - b) + 10\epsilon$, поэтому можем оценить $2d > (c - b) + (b - a) > > 2(b - a) + 10\epsilon$. Видим, что $d > (b - a) + \epsilon$, а значит, кузнечик мог из точки $a - x$ перепрыгнуть красный отрезок $[a; b]$ прыжком более коротким, чем $2d$. Противоречие.

Т.Коротченко

M2799. Дано натуральное число n . Илья задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами). Саша тоже задумал пару различных многочленов степени n . Леня знает n ; его цель – выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Ильи и Саши. Леня выбирает набор из k вещественных чисел $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Илья заполняет таблицу $2 \times k$: для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ он вписывает в две клетки i -го столбца пару чисел $P(x_i), Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q – задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Саша. При каком наименьшем k Леня сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели?

Ответ: $2n + 1$.

Покажем, что при $k = 2n$ (а тем более при $k < 2n$) Леня не сможет однозначно определить пару P, Q . Пусть он назвал набор $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$. Положим

$$A = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

$$B = (x - x_{n+1})(x - x_{n+2}) \dots (x - x_{2n}),$$

так что $A(x_i) = 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$ и $B(x_i) = 0$ для $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$. Тогда если Илья загадал $P_1 = A + 2B$ и $Q_1 = -A - 2B$, то в i -м столбце таблицы будут числа $\pm 2B(x_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$ и числа $\pm A(x_i)$ при $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$. Но та же таблица годится для пары $P_2 = A - 2B$ и $Q_2 = -A + 2B$, ее мог загадать Саша.

С другой стороны, покажем, что при $k = 2n + 1$ таблице Ильи может удовлетворять не более одной пары многочленов P, Q . Предположим противное, пусть есть две такие пары: P_1, Q_1 и P_2, Q_2 . Тогда P_2 совпадает с P_1 или Q_1 хотя бы при $n + 1$ различных значениях аргумента, пусть, скажем, с P_1 . Следовательно, P_1 и P_2 – одинаковые многочлены (поскольку их разность – многочлен степени не выше n , имеющий не менее $n + 1$ различных корней). Из таблицы в таком случае получаем, что значения Q_1 и Q_2 совпадают в $2n + 1$ точка, а тогда и $Q_1 = Q_2$.

Л.Шатунов

M2800. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис.1). Точка M – середина дуги ABC окружности, описанной около треуголь-

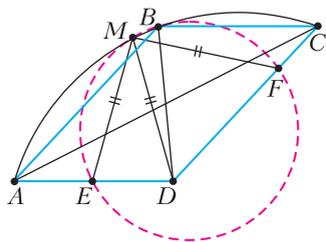


Рис. 1

ника ABC . На отрезке AD отмечена точка E , а на отрезке CD – точка F . Известно, что $ME = MD = MF$. Докажите, что точки B, M, E и F лежат на одной окружности.

Пусть $\angle ADC = x$. Из равнобедренных треугольников DME и DMF (или из того, что M – центр окружности (DEF)) имеем $\angle EMF = 360^\circ - 2x$. Для решения задачи остается понять, что тому же равен $\angle EBF$. При гомотетии с центром D и коэффициентом $1/2$ точки E, F, B перейдут соответственно в E', F', B' – середины отрезков DE, DF и DB (рис. 2). Вместо $\angle EBF$ найдем $\angle E'B'F'$, заметив, что E' и F' –

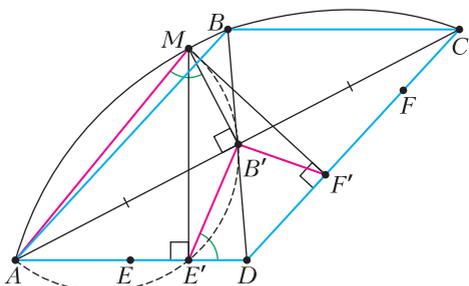


Рис. 2

проекции M на AD и CD , а B' – центр параллелограмма, или середина AC ; тем самым, B' – проекция M на AC . Видим, что M, E', A, B' лежат на одной окружности с диаметром MA . Отсюда

$$\begin{aligned} \angle DE'B' &= \angle AMB' = \angle AMC/2 = \\ &= \angle ABC/2 = x/2. \end{aligned}$$

Аналогично, $\angle DF'B' = x/2$. Из четырехугольника $E'B'F'D$ видим, что $\angle E'B'F' = 360^\circ - x - x/2 - x/2 = 360^\circ - 2x$, что и требовалось. Задача решена.

Отметим, что нужное нам равенство $\angle DEB = x/2$ можно получить и другим способом. Например, можно показать, что при симметрии относительно перпендикуляра l к BC , проходящего через M (так что l – серединный перпендикуляр к DE), точка B перейдет в точку B' такую, что $CB' = CD$ (это следует из известной «задачи Архимеда» M1000). Отсюда DB' – биссектриса параллелограмма, и далее из симметрии относительно l вытекает $\angle DEB = \angle EDB' = x/2$.

Приведем еще одно решение. Заметим, что достаточно доказать равенство углов $\angle ABE = \angle CBF$ (т.е. изогональность BE и BF относительно AB, BC). Действительно, тогда M будет лежать на внешней биссектрисе угла EBF и на серединном перпендикуляре к EF , а значит, будет совпадать с серединой дуги (EBF) .

Равенство $\angle ABE = \angle CBF$, в свою очередь, эквивалентно подобию $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ (поскольку углы BAE и BCF равны). Подобие $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ означает равенство $AB/AE = CB/CF$, или, эквивалентно, $AE \cdot CB = CF \cdot AB \Leftrightarrow AE \cdot AD = CF \cdot CD$. Остается доказать последнее равенство. Сделать это можно по-разному. Возможно, наиболее короткий и изящный способ – заметить, что произведение $AE \cdot AD$ равно степени точки A относительно окружности (EDF) (рис. 3). А поскольку центр этой

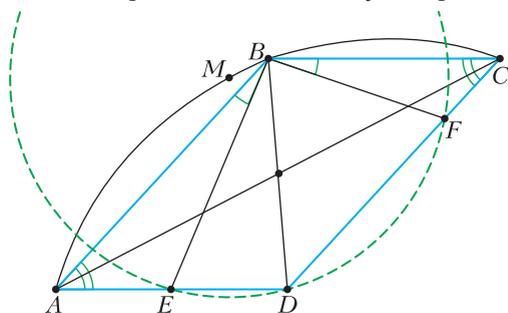


Рис. 3

окружности – M (и радиус равен MD), имеем $AE \cdot AD = AM^2 - MD^2$. Аналогично, $CF \cdot CD = CM^2 - MD^2$. Так как $AM = CM$, этим завершается решение.

А.Герёшин

M2801. Юрий подошел к великой таблице мая. В таблице 200 столбцов и 2^{200} строк.

Юрий знает, что в каждой клетке таблицы изображено солнце или луна и любые две строки отличаются (хотя бы в одном столбце). Каждая клетка таблицы закрыта листом. Поднялся ветер и сдул некоторые листы: по два листа с каждой строки. Могло ли так случиться, что теперь Юрий хотя бы про 10000 строк может узнать, что в каждой из них изображено в каждом из столбцов?

Ответ: могло.

Заметим, что существует всего 2^{200} различных строк длины 200, в которых каждый символ – солнце или луна; значит, каждая такая строка встречается в таблице ровно один раз. Разобьем все позиции на две половины по 100 столбцов – «левую» и «правую». Предположим, что в каждой строке, в которой есть два солнца в одной половине (назовем их *солнечными*), ветер сдул листья с одной из таких пар солнц, а в каждой несолнечной строке – таких строк ровно 101^2 – ветер обнаружил положения всех солнц (в несолнечной строке не более двух солнц, так что ветер мог так поступить). Тогда Юрий сообразит, что те строки, где открыты два солнца в одной половине, – точно солнечные, а значит, несолнечные строки – это в точности те 101^2 строк, в которых ветер не открывал два солнца в одной половине. У каждой из них открыты все солнца, так что закрытые листьями изображения в этих строках – луна. Задача решена.

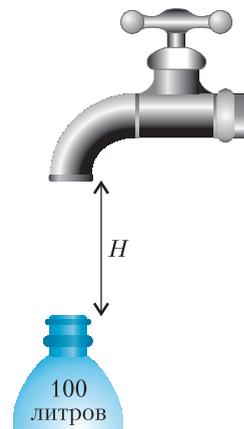
Замечание. Существуют и принципиально другие конструкции, также позволяющие определить 101^2 строк. Приведем одну из них.

Скажем, что строка *монолитная*, если все солнца в ней стоят подряд (строка из одних лун также монолитна). Монолитную строку назовем *сбалансированной*, если хотя бы один из двух средних символов – солнце, либо если солнц нет вообще. Сбалансированных строк ровно 101^2 . Любая несбалансированная строка содержит либо солнце, стоящее слева от луны в левой половине, либо луну, стоящую слева от солнца в правой; сбалансированная же строка таких пар не содержит. Пусть

ветер откроет именно такую пару символов в каждой несбалансированной строке; тогда Юрий узнает множество всех сбалансированных строк. Далее, в каждой сбалансированной строке, содержащей хотя бы два солнца, ветер откроет самое левое и самое правое из них; можно показать, что тогда все эти строки также однозначно определяются. Наконец, в оставшихся трех сбалансированных строках ветер откроет два средних символа, позволяя определить и эти строки.

И. Богданов, К. Кноп

Ф2805. Вода вытекает в вертикальном направлении из крана с круглым поперечным горизонтальным сечением отверстия диаметром $D_0 = 1$ см. Бутыль большой емкости – 100 л – с диаметром отверстия в горлышке $D = 0,8D_0$ стоит под краном (см. рисунок). Расстояние между горлышком



бутыли и выходным отверстием крана $H = 50D_0$. За какой минимальный промежуток времени бутылка может быть наполнена водой при условии, что вся вода, выходящая из крана, попадает в бутылку? На сколько давление воздуха внутри бутылки во время заполнения ее водой будет больше

внешнего (нормального) атмосферного давления? Вязкостью воды и ее поверхностным натяжением можно пренебречь.

Чтобы вся вода попадала в бутылку, нужно, чтобы при максимально возможном сечении струи в отверстии горлышка бутылки через оставшееся не занятым водой сечение из бутылки выходил воздух. Объемный расход воздуха должен по величине совпадать с расходом воды из крана. Воздух будет выходить из бутылки с большой скоростью, которая определяется разницей давлений воздуха внутри бутылки и снаружи. Поскольку давление воздуха внутри $p_0 + \Delta p$ будет больше внешнего атмосфер-

ного давления p_0 , то для нахождения скорости движения воздуха можно и нужно воспользоваться уравнением Бернулли. Будем считать, что среднее сечение внутри бутылки гораздо больше сечения отверстия в горлышке. В этом случае попавшая в бутылку вода дальше падает на дно или в уже накопившуюся в бутылки воду, теряет механическую энергию, но эта часть ее «жизни» нас уже не интересует.

Если скорость потока воды на выходе из крана равна v_0 , то на входе в горлышко бутылки скорость движения становится больше и она равна $\sqrt{v_0^2 + 2gH}$. А поскольку расход воды сохраняется, то диаметр сечения струи воды в горлышке D_1 уменьшится по сравнению с диаметром струи на выходе из крана D_0 . Это условие соответствует соотношению

$$D_0^2 v_0 = D_1^2 \sqrt{v_0^2 + 2gH}. \quad (1)$$

Если величина D_1 близка к величине D , то в этом случае

$$\sqrt{v_0^2 + 2gH} \approx v_0 \left(\frac{D_0}{D} \right)^2, \quad (2)$$

а сечение, через которое выходит из бутылки воздух, будет равно

$$\frac{D(D - D_1)\pi}{2}.$$

При этом можно вычислить скорость u выходящего из бутылки воздуха (считая, что его плотность мало отличается от плотности воздуха снаружи бутылки), а также оценить разницу давлений Δp воздуха внутри и снаружи:

$$\frac{u\pi D(D - D_1)}{2} = \frac{v_0\pi D_0^2}{4},$$

$$\text{или } u = \frac{v_0 D_0^2}{2D^2 - 2DD_1},$$

$$\Delta p = \frac{\rho_{\text{возд}} u^2}{2} = \frac{\rho_{\text{возд}}}{8} \left(\frac{v_0 D_0^2}{D^2 - DD_1} \right)^2. \quad (3)$$

Эта разница давлений должна быть такой, чтобы не затормозить струю воды на входе в горлышко бутылки, т.е. должно выполняться неравенство

$$\rho_{\text{воды}} \frac{v_0^2 + 2gH}{2} > \frac{\rho_{\text{возд}}}{8} \left(\frac{v_0 D_0^2}{D^2 - DD_1} \right)^2.$$

Подставим в это неравенство соотношение (2):

$$\rho_{\text{воды}} \frac{v_0^2 (D_0 - D)^4}{2} > \frac{\rho_{\text{возд}}}{8} \frac{v_0 D_0^2}{(D^2 - DD_1)^2},$$

$$\rho_{\text{воды}} \left(\frac{1}{D} \right)^4 > \frac{\rho_{\text{возд}}}{4} \frac{1}{(D^2 - DD_1)^2}.$$

Если считать, что отношение плотности воды к плотности воздуха равно примерно 900, то в этом случае полученное неравенство можно записать так:

$$60 \left(1 - \frac{D_1}{D} \right) > 1, \text{ т.е. } D - D_1 > \frac{D}{60}.$$

Заметим, что полученное соотношение соответствует предположению, что разница диаметра отверстия в горлышке и диаметра струи воды в горлышке гораздо меньше диаметра струи. Если считать, что $D_1 = (59/60)D$, то в этом случае струя воды в горлышке тормозится и, попав в широкую часть бутылки за горлышком, теряет значительную часть вертикальной составляющей скорости. В принципе в этом нет ничего необычного. Нечто похожее происходит, если, например, струя воды падает на горизонтальную поверхность неподвижного камня, имеющего размеры больше чем поперечное сечение струи воды.

Возвращаемся к соотношению (1) и подставляем величину диаметра струи в горлышке $D_1 = (59/60)D$:

$$D_0^2 v_0 = (59/60)^2 \cdot (0,8)^2 \cdot D_0^2 \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot 50D_0},$$

$$v_0 = 0,6188 \sqrt{v_0^2 + 10 \text{ м}^2/\text{с}^2},$$

$$v_0^2 \cdot 2,6112 = v_0^2 + 10 \text{ м}^2/\text{с}^2,$$

$$v_0^2 \cdot 1,6112 = 10 \text{ м}^2/\text{с}^2,$$

$$v_0 \approx 2,49 \text{ м/с}.$$

Динамическое давление воды на входе в горлышко равно

$$\rho_{\text{воды}} \frac{v_0^2 + 10 \text{ м}^2/\text{с}^2}{2} \approx 8,2 \text{ кПа}.$$

Это гораздо меньше атмосферного давления $p_0 = 10^5$ Па. Расход воды в таком случае равен

$$\frac{\pi D_0^2}{4} \cdot v_0 \approx 0,195 \text{ л/с},$$

а время заполнения бутылки составит

$$\frac{100}{0,195} \text{ с} \approx 511 \text{ с} \approx 8,5 \text{ мин}.$$

Для нахождения избыточного давления воздуха внутри бутылки вернемся к соотношению (3):

$$\Delta p = \frac{\rho_{\text{возд}}}{8} \left(\frac{v_0 D_0^2}{D^2 - D D_1} \right)^2.$$

Подставив значение плотности воздуха $\rho_{\text{возд}} = \rho_{\text{воды}}/900 = 1,11 \text{ кг/м}^3$ и полученные значения для скорости v_0 и диаметра D_1 в эту формулу, найдем (как и ожидали) $\Delta p = 8,2 \text{ кПа}$.

Это 8,2% от нормального атмосферного давления.

Если увеличить разницу диаметров $D - D_1$ в два раза, т.е. до величины $D/30$, то в этом случае скорость воды на выходе из крана уменьшится до 2,36 м/с, т.е. меньше чем на 10%, а скорость потока воздуха уменьшится примерно в 2 раза. При этом разница давлений воздуха внутри и снаружи бутылки должна будет уменьшиться примерно в $2^2 = 4$ раза. В таком случае избыточное давление воздуха внутри бутылки будет уже значительно меньше динамического давления воды на входе в горлышко бутылки. А время заполнения бутылки увеличится на 10%, т.е. до 9 минут.

Поскольку в условии задачи требуется найти минимальное время заполнения бутылки, то можно оптимизировать процедуру заполнения. В частности, можно сначала сделать разницу диаметров $D - D_1$ даже меньше чем $D/60$. И удерживать такую разницу диаметров вплоть до момента, когда давление воздуха внутри как раз сравняется с динамическим давлением воды, а затем сделать разницу диаметров побольше. Это позволит немного сократить время заполнения. Предлагаем заинтересовавшимся этой проблемой читателям проанализировать эту возможность, например с помощью компьютерного моделирования, а еще более интересным направлением может быть экспериментальная проверка предсказанных теоретически результатов. Благо, что оборудование для проведения такого эксперимента доступное и недорогое. Понятно, что заданные в условии численные значения физических величин в экспериментах могут быть и другими.

С.Варламов

Ф2806. В отсутствие гравитации и атмосферного давления капля ртути радиусом R сжимается двумя параллельными стеклянными пластинами. Поверхности пластин абсолютно не смачиваемы. Определите зависимость давления в капле от расстояния между пластинами. Во сколько раз изменяется давление в капле при ее сжатии в два раза по высоте от $2R$ до R ?

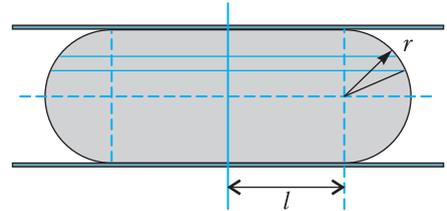


Рис. 1

Сделаем рисунок сжатой капли (рис. 1). Рассчитаем объем капли через радиус пятна сжатия l и радиус свободной поверхности r :

$$V = 2 \int_0^{\pi/2} \pi (l + r \cos \alpha)^2 r \cos \alpha \cdot d\alpha$$

После несложного интегрирования получаем

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 2\pi l^2 r + \pi^2 l r^2 + \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Запишем это соотношение в безразмерном виде, используя обозначения $\frac{l}{R} = x, \frac{r}{R} = y$:

$$1 = \frac{3}{2} y x^2 + \frac{3}{4} \pi y^2 x + y^3.$$

Решаем квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{\pi}{2} y x + \frac{2}{3} y^2 - \frac{2}{3y} = 0$$

и находим

$$x(y) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{3} \right) y^2 + \frac{8}{3y}} - \frac{\pi}{2} y \right).$$

Определяем кривизну в средней точке свободной поверхности:

$$k(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y + x(y)} \right).$$

Давление в капле определяется формулой Лапласа $p = 2\sigma k$:

$$p(y) = \frac{2\sigma}{R} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y + x(y)} \right).$$

В конечной формуле мы перешли к размерной величине $\left(\frac{2\sigma}{R} \right)$ – давление в сферической

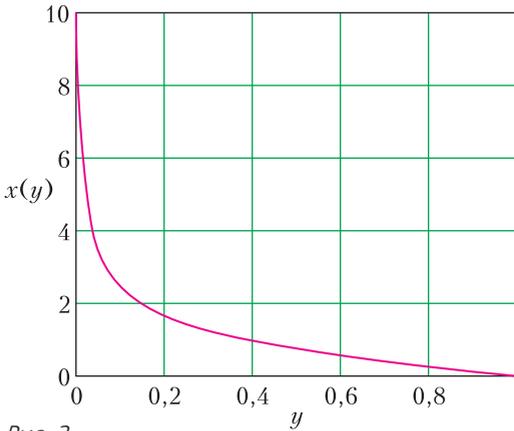


Рис. 2

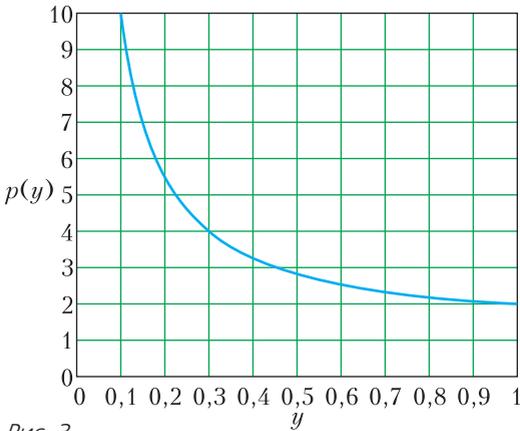


Рис. 3

капле, σ – коэффициент поверхностного натяжения).

Полученные формулы проиллюстрируем компьютерными графиками.

Первый график (рис. 2) – это зависимость $x(y)$ радиуса пятна от расстояния между пластинами. Второй график (рис. 3) – это зависимость $p(y)$ давления от расстояния между пластинами. Из этого графика видно, что при сжатии капли в два раза давление в ней возрастает примерно в $2,8/2 = 1,4$ раза. Теперь сделаем численный расчет:

$$x(0,5) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{3} \right) \frac{1}{4} + \frac{8 \cdot 2}{3 \cdot 1}} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \approx 0,757,$$

$$p(0,5) = \frac{2\sigma}{R} \cdot \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{0,5 + 0,757} \right) = \frac{2\sigma}{R} \cdot \frac{2,8}{2} \approx \frac{2\sigma}{R} \cdot 1,4.$$

А.Власов

Ф2807. Два одинаковых точечных положительных электрических заряда Q расположены в вакууме вдали от других тел на расстоянии L друг от друга. Естественно, они отталкиваются. Между ними поместили тонкую плоскую круглую металлическую пластину радиусом $R \gg L$, расположенную так, что прямая линия, на которой находятся заряды Q и Q , перпендикулярна этой пластине и центр пластины находится посередине между зарядами. Каков заряд этой пластины, если теперь силы, действующие на заряды, обратились в ноль? Краевыми эффектами можно пренебречь.

Будем подбирать такие распределения зарядов на поверхностях проводящей пластины, которые обеспечивают условие равенства нулю напряженности электрического поля внутри проводника. При этом потенциал всех точек проводящей пластины будет одним и тем же. Понятно, что на поверхностях проводящей пластины распределение индуцированных зарядов будет складываться из однородной части и неоднородной. Неоднородная часть распределения на одной поверхности создает вместе с зарядом Q , расположенным по эту же сторону от поверхности пластины, поле, которое вне проводящей пластины такое, как создают вместе два одинаковых по величине, но противоположных по знаку заряда, расположенных зеркально по отношению к проводящей поверхности. При этом такие же по величине и по знаку заряды $+Q$ (от каждого точечного заряда на одной поверхности по $Q/2$) распределяются равномерно по двум поверхностям проводящей пластины. Краевыми эффектами, согласно условию, можно пренебречь. Таким образом учитываются индуцированные заряды.

Добавленный на пластину заряд q должен сделать суммарные силы, которые действуют на точечные заряды Q , равными нулю. Соответствующее уравнение для силы, действующей на один из точечных зарядов, таково:

$$F = \frac{Q^2}{\pi R^2 \epsilon_0} + \frac{qQ}{2\pi R^2 \epsilon_0} - \frac{Q^2}{4\pi L^2 \epsilon_0} = 0.$$

Следовательно, с учетом неравенства $R \gg L$,

$$q = 2Q \left(\frac{R^2}{4L^2} - 1 \right) \approx Q \frac{R^2}{2L^2}.$$

С.Варламов

Ф2808. На тороидальном сердечнике симметрично расположены четыре одинаковых обмотки в последовательности А-В-С-Д. Обмотку А подключили к источнику переменного напряжения, а к обмотке В подключили идеальный вольтметр. При закороченной обмотке С и разомкнутой обмотке Д вольтметр показывает 50% напряжения источника, а при закороченной Д и разомкнутой С показывает 75%. Какую часть напряжения источника будет показывать вольтметр, если закоротить обе обмотки С и Д? Сопротивления материала обмоток и источника пренебрежимо малы.

Пусть L – коэффициент самоиндукции, M – взаимная индуктивность соседних обмоток, а K – взаимная индуктивность симметрично расположенных относительно центра сердечника обмоток. Введем также обозначения $m = \frac{M}{L}$ и $k = \frac{K}{L}$. При закороченной обмотке С и разомкнутой обмотке Д имеем

$$I_B = I_D = 0, \Phi_C = 0.$$

С другой стороны, в этом случае

$$\Phi_A = LI_A + KI_C,$$

$$\Phi_C = LI_C + KI_A = 0,$$

$$\Phi_B = M(I_A + I_C).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{U_{B1}}{U_{A1}} &= \frac{\Phi'_B}{\Phi'_A} = \frac{M \left(1 - \frac{K}{L} \right)}{L - \frac{K^2}{L}} = \\ &= \frac{M}{L + K} = \frac{m}{1 + k} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

При закороченной обмотке Д и разомкнутой обмотке С

$$I_B = I_C = 0, \Phi_D = 0.$$

Тогда

$$\Phi_A = LI_A + MI_D,$$

$$\Phi_D = LI_D + MI_A = 0,$$

$$\Phi_B = MI_A + KI_D.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \frac{U_{B2}}{U_{A2}} &= \frac{\Phi'_B}{\Phi'_A} = \frac{M - \frac{MK}{L}}{L - \frac{M^2}{L}} = \\ &= \frac{M(L - K)}{L^2 - M^2} = \frac{m(1 - k)}{1 - m^2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Значения токов и магнитных потоков отличаются от предыдущего случая.

При закороченных обмотках С и Д

$$I_B = 0, \Phi_D = \Phi_C = 0,$$

$$\Phi_A = LI_A + MI_D + KI_C,$$

$$\Phi_C = LI_C + MI_D + KI_A = 0,$$

$$\Phi_D = LI_D + MI_A + MI_C = 0,$$

$$\Phi_B = MI_A + MI_C + KI_D.$$

Отсюда

$$\frac{I'_C}{I'_A} = \frac{M^2 - KL}{L^2 - M^2} = \frac{m^2 - k}{1 - m^2},$$

$$\frac{I'_D}{I'_A} = -\frac{M(L - K)}{L^2 - M^2} = -\frac{m(1 - k)}{1 - m^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_3 = \frac{U_{B3}}{U_{A3}} &= \frac{\Phi'_B}{\Phi'_A} = \frac{M + M \frac{I'_C}{I'_A} + K \frac{I'_D}{I'_A}}{L + M \frac{I'_D}{I'_A} + K \frac{I'_C}{I'_A}} = \\ &= \frac{m + m \frac{m^2 - k}{1 - m^2} - k \frac{m(1 - k)}{1 - m^2}}{1 - m \frac{m(1 - k)}{1 - m^2} + k \frac{m^2 - k}{1 - m^2}} = \frac{m(1 - k)}{1 + k}. \end{aligned}$$

Из выражений для α_1 и α_2 найдем

$$m = \frac{3}{5}, k = \frac{1}{5}$$

и окончательно получим

$$\alpha_3 = \frac{2}{5} = 40\%.$$

В.Пойманов

Я поведу тебя в музей

С.ДВОРЯНИНОВ

МАЛЕНЬКИЕ ДЕТИ ОЧЕНЬ ЛЮБЯТ книжки с картинками. Помните пословицу – лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать? Она как раз про книжные иллюстрации. Схемы, диаграммы рисунки, т.е. графические представления информации, присутствуют и в учебниках. Например, в учебнике физики для 7 класса показана комбинация подвижного и неподвижного блоков (рис. 1). Неподвижный блок служит для изменения направления действия силы (попросту говоря, для удобства), подвижный блок позволяет поднимать груз с силой, которая в два раза меньше веса груза. Такая комбинация блоков называется полиспастом.

Чтобы увидеть модель той или иной машины или конструкции, можно пойти в Политехнический музей. В Москве такой музей хранит более 200 тысяч предметов. Во многих городах есть Музеи занимательной науки. Есть такой музей и в городе Нальчике – это Музей занимательных наук Эйнштейна. Все его экспонаты изготовлены мастерски и радуют глаз. Познакомимся с некоторыми из них.

На рисунке 2 слева две одинаковые гири, соединенные нитью, находятся в равновесии. В центре рисунка масса левой гири в два раза

больше массы правой гири. В правой части рисунка мы видим три блока. Масса меньшей гири 1 кг. Вопрос: какова масса большей гири? Все гири на этом рисунке неподвижны, статичны. Такая модель демонстрирует явление равновесия и относится к разделу механики, который называется статикой.

Экспонат на рисунке 3 относится к динамике и иллюстрирует закон сохранения энергии. На горизонтальную цилиндрическую ось слева и справа насажены две одинаковые катушки. Если мы начнем вращать ось по часовой стрелке, то обе ленты начнут наматываться на катушки, а ось будет подниматься вверх. В верхнем положении запас потенциальной энергии этой механической системы будет наибольшим. Если затем выпустить ось из рук, то ленты начнут сматываться с катушек. Центральный диск начнет вращаться против часовой стрелки, одновременно двигаясь вниз. Потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию вращающегося диска. В конце концов вся потенциальная энергия перейдет в кинетическую. Далее диск в самой нижней точке продолжит вращаться вокруг своей оси и, наматывая ленту на ось, начнет подниматься вверх. Процесс движения диска вверх-вниз будет периодически продолжаться. В итоге в результате рассеивания энергии движение, конечно, прекратится, и мы снова увидим статичную картину, показанную на рисунке.

На рисунке 4 мы видим универсальную пробку, которой можно закрыть и треугольное, и круглое, и квадратное отверстие.

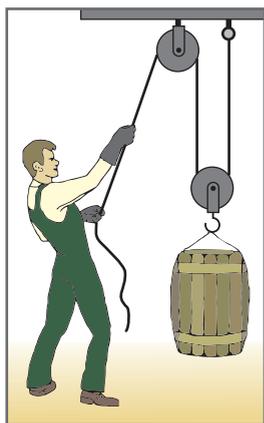


Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3



Рис. 4

Диаметр круга равен стороне квадрата. Треугольник равнобедренный, его основание и высота равны стороне квадрата. На сайте «Математические этюды» (<https://etudes.ru/models/universal-plug/>) можно увидеть движение этой пробки в пространстве. А в музее Нальчика эту удивительную универсальную пробку можно взять в руки и с удивлением убедиться, как она одна может закрыть три разных отверстия.

Всего в Музее занимательных наук Эйнштейна около 100 увлекательных экспонатов и 15 оптических иллюзий, которые воочию демонстрируют законы физики, математики, а также различные природные явления. Посетители могут прикоснуться к молнии, собрать мост без единого гвоздя, посидеть на гигантском стуле, создать облако своими руками, заглянуть в огромный калейдоскоп, увидеть мир глазами других и еще многое-многое другое. Экспериментировать и все трогать в музее разрешается!

Некоторые экспонаты совсем простые, понятные первокласснику. Так, на рисунке 5 изображена цепочка последовательно сцепленных шестеренок. Если начать вращать концевую красную шестеренку по часовой стрелке, то в каком направлении будет вра-



Рис. 5



Рис. 6

щаться концевая синяя? А если шестеренок не 9, как нарисовано, а n ?

На рисунке 6 представлена модель посерьезнее. Взяв в руки довольно массивное велосипедное колесо и раскрутив его, мы почувствуем, как колесо сохраняет направление оси. При повороте оно, словно живое, так и пытается вырваться из рук.

На следующих фотографиях показаны другие экспонаты Нальчикского музея. Вспомните или догадайтесь, что показывает каждый из них. К некоторым мы дадим краткие пояснения.

Массивный маятник (рис. 7) может совершать колебания в различных плоскостях.



Рис. 7

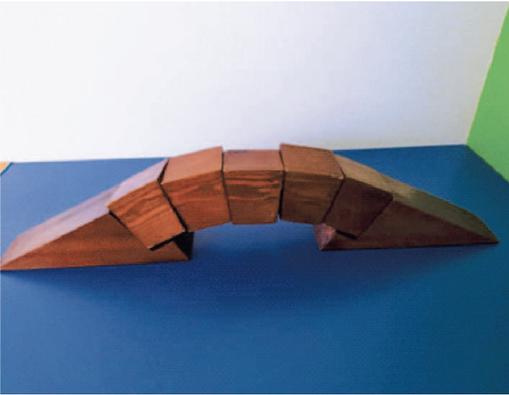


Рис. 8

При круговом движении его острие вычерчивает на поверхности песка разнообразные кривые.

А вот модель арочного моста, построенного без единого гвоздя (рис. 8). По этому принципу в прежние времена, когда не было железобетонных перекрытий, делали полукруглые окна в домах и своды храмов.

Посмотрим на горизонтально расположенные рельсы, которые (в отличие от обычных!) не параллельны (рис. 9). Каждое колесо насажено на цилиндрическую ось. Внимательно присмотревшись к осям, вы заметите, что радиусы осей непостоянны: ось большого колеса истончается к концам, а ось меньшего колеса наоборот утолщается. Под действием скатывающейся силы большое левое колесо катится слева направо, меньшее правое колесо катится справа налево. Суть в том, что при движении каждого колеса по рельсам его центр масс в действительности опускается вниз. Это смещение практически неуловимо на глаз, так как изменение диа-



Рис. 9



Рис. 10

метра оси заметить трудно, и поэтому угол наклона наклонной плоскости для каждого колеса очень мал. Достаточная для движения скатывающая сила получается за счет большой массы колес. Парадокс: одно колесо катится от левого края рельс к правому, а другое – наоборот. Этот экспонат производит очень сильное впечатление.

Как утверждают «Математические этюды», на рисунке 10 изображен наиболее завораживающий экспонат. Наклонный отрезок прикреплен к вертикальной оси с помощью двух соединений и может вращаться вокруг этой оси. В вертикальной плоскости имеется криволинейный разрез в виде гиперболы. При вращении отрезок проходит через разрез. Суть в том, что этот отрезок является частью прямолинейной образующей гиперболоида вращения.

Надеемся, что теперь каждый читатель захочет побывать в таком интересном музее!

Почти целое

Речь пойдет о приближенных числовых равенствах, в которых возникают почти целые числа, т.е. числа, достаточно близкие к целым.

Часть из этих равенств, по-видимому, можно считать случайными. Другая часть является следствием глубоких результатов теории чисел.

1. Теорема Ферма. Начнем с приближенных равенств, почти опровергающих большую теорему Ферма:

$$1782^{12} + 1841^{12} \approx 1922^{12}.$$

Здесь первые 9 цифр в левой и правой частях равенства совпадают, а точность этого приближенного равенства можно оценить из следующего соотношения:

$$\frac{1782^{12} + 1841^{12}}{1922^{12}} \approx 0,9999999972.$$

Вот аналогичное приближенное равенство:

$$3987^{12} + 4365^{12} \approx 4472^{12},$$

верное с точностью

$$\frac{3987^{12} + 4365^{12}}{4472^{12}} \approx 1,000000000189.$$

2. Приближения π . Рассмотренные приближенные равенства скорее случайны, тогда как равенства

$$\sin 11 \approx -0,9999902066,$$

$$\cos 355 \approx -0,9999999995,$$

где углы измерены в радианах, не просто совпадения.

Разберемся с первым из них. Синус близок к -1 , если аргумент близок к $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ для некоторого k . Возьмем для π приближение $\frac{22}{7}$, тогда $11 \approx \frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 4\pi$, что и объясняет первое приближенное равенство.

Попробуйте сами объяснить второе равенство и привести свои аналогичные примеры.

3. Тета-функция Якоби. Следующее удивительное приближенное равенство

$$e^\pi - \pi \approx 19,999099979$$

также не случайно. Оно получается из суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2} (8\pi k^2 - 2) = 1,$$

связанной с так называемыми тета-функциями Якоби. При этом слагаемые в этой сумме очень быстро убывают и сумма всех, кроме первого, приблизительно равна 0,0003436. Отсюда получаем

$$e^{-\pi} (8\pi - 2) \approx 1$$

и, снова взяв для π приближение $\frac{22}{7}$, приходим к требуемому почти равенству.

Знакомым с комплексными числами и формулой Эйлера несложно будет доказать следствие:

$$(\pi + 20)^i \approx -0,999999992 - 0,0000388927i.$$

4. Почти целые Рамануджана. Разговор о красивых числовых равенствах вряд ли мог обойтись без упоминания Сринивасы Рамануджана. Есть целая группа приближенных равенств, полученных Рамануджаном при изучении модулярных форм, в которых появляются почти целые числа. Вот три из них:

$$e^{\pi\sqrt{43}} \approx 960^3 + 744,$$

$$e^{\pi\sqrt{67}} \approx 5280^3 + 744,$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 640320^3 + 744.$$

Первое верно с точностью 10^{-3} , второе – с точностью 10^{-5} , третье – с точностью 10^{-12} . Числа 43, 67, 163 в левых частях равенств, как и кубы в правых частях, не случайны. За этим стоит очень сложная математика, которую здесь мы раскрыть не сможем.

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

$$3987^{12} + 4365^{12} \approx 4472^{12}$$

5. Цепные дроби. Рассмотрим следующее приближенное равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| n \sin \frac{3}{2} \right|}{2^n} \approx 1.$$

Оказывается, что оно верно с точностью до 10^{-398} . Качественно причина такой точности объясняется тем, что число $\sin \frac{3}{2}$ довольно близко к 1, а именно $0,997 < \sin \frac{3}{2} < 1$. Значит, для большого числа n имеем

$$\left| n \sin \frac{3}{2} \right| = n - 1, \text{ а поскольку}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = 1,$$

получаем требуемое.

Точная оценка 10^{-398} может быть получена из разложения в цепную дробь:

$$\sin \frac{3}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{398 + \frac{1}{5 + \frac{1}{74 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

однако это совсем не просто и мы не будем этого делать.

Таким образом, аналогичное почти равенство можно получить для любого числа, достаточно близкого к 1. Например, приближенное равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| n e^{\pi \sqrt{\frac{163}{9}}} \right|}{2^n} \approx 1$$

верно с точностью до нескольких миллиардов знаков после запятой.

6. Числа Пизо. Рассмотрим числа $5 + \sqrt{26}$ и $5 - \sqrt{26}$. Поскольку они являются корнями уравнения $x^2 - 10x - 1 = 0$, одно из них по модулю больше единицы, а второе – меньше. Несложно доказать (например, прямым разложением по биному Ньютона), что сумма

$$(5 + \sqrt{26})^n + (5 - \sqrt{26})^n$$

является целым числом при любых n . Значит, с ростом n модуль второго слагаемого будет стремиться к 0 и разность между первым слагаемым и ближайшим к нему целым также будет стремиться к 0. Точнее, можно доказать, что $(5 + \sqrt{26})^n$ отличается от целого менее чем на 10^{-n} .

Число $5 + \sqrt{26}$ является числом Пизо. В статье А. Егорова в «Кванте» №5 за 2005 год подробно рассказывается об этих числах и доказывается, что расстояние между n -й степенью числа Пизо и ближайшим к нему целым с ростом n стремится к 0.

7. Случайные совпадения. Наконец, приведем несколько приближенных равенств с почти целыми числами, которые, по-видимому, являются просто случайными совпадениями:

$$\frac{\pi^9}{e^8} \approx 9,9998387,$$

$$\frac{163}{\ln 163} \approx 31,9999987384,$$

$$163(\pi - e) \approx 68,999664,$$

$$88 \ln 89 \approx 395,00000053,$$

$$\frac{1}{3^3 \ln 2} \approx 1,00030887,$$

$$\frac{10(e^\pi - \ln 3)}{\ln 2} \approx 318,000000033,$$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2^{\ln 2}} \approx 1,00076.$$

Однако, быть может, мы пока чего-то не знаем и за этими красивыми совпадениями найдется не менее красивая математика.

Еще больше примеров можно найти в онлайн энциклопедии MathWorld в статье про почти целые числа.

А какие почти равенства знаете вы?

Материал подготовил Н. Панюнин

Задачи

1. В выражении

$$5^4 3^2 2^1$$

одно из пяти чисел разрешается заменить на противоположное. Какое из них нужно заменить, чтобы результат стал наименьшим из возможных?



2. Три матроса и юнга поймали несколько рыб, все массы которых различны. Юнга сумел разделить рыб на четыре равные по массе кучки. Матросы с ним не согласились, отдали юнге самую маленькую рыбку, а остальных разделили между собой на три равные по массе кучки. Каково наименьшее возможное количество пойманных рыб?

А. Шаповалов



Задача 1 предлагалась на конкурсе «Смарт КЕНГУРУ». Задачи 2–4 предлагались на Московской устной олимпиаде.

3. Сторона квадратного куска стены в ванной комнате выражается целым числом сантиметров. Его хотят по максимуму выложить плиткой. Если выкладывать плитками размером 20×20 см, то останется непокрытой площадь 201 см^2 . А сколько останется, если выкладывать плитками размером 30×30 см?

По мотивам Санкт-Петербургской олимпиады 2011 года



4. Каждую грань куба размером $6 \times 6 \times 6$ разбили на 36 единичных клеток и оклеили его поверхность в один слой прямоугольными полосками, каждая из которых покрывает шесть клеток. Могло ли оказаться, что через каждое ребро куба перегнули хотя бы одну полоску?

Т. Корчемкина



Трисекция угла и другие классические задачи

А. ЗАСЛАВСКИЙ, С.МАРКЕЛОВ

Мы знаем, что задача не имеет решения. Мы хотим знать, как ее решать.

А.Стругацкий, Б.Стругацкий.
«Понедельник начинается в субботу»

В школьной геометрии задачи на построение, как правило, требуется решать циркулем и линейкой. Причиной этого является историческая традиция: именно эти инструменты использовали геометры Древней Греции. Они же сформулировали три, ставшие классическими, задачи, одной из которых является *трисекция*, или деление данного угла на три равные части, а двумя другими – *удвоение куба*, т.е. построение куба с объемом вдвое больше данного, и *квадратура круга*, т.е. построение квадрата, площадь которого равна площади данного круга. То, что решить все эти задачи, пользуясь только циркулем и линейкой без делений, невозможно, было доказано в XIX веке, когда задачи были переформулированы на алгебраическом языке.

Например, задача о трисекции угла $\varphi = \pi/3$ сводится к решению кубического уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. У этого уравнения нет рациональных корней, и можно доказать, что его корни не являются квадратичными рациональностями и не могут быть построены циркулем и линейкой (подробнее о доказательствах невозможности построений см. [1]). Однако можно пытаться решить задачу, если допустим более широкий арсенал инструментов, а также если на плоскости предварительно начерчена некоторая кривая. Этим методам был посвящен проект, предложенный авторами статьи на XXXVI Летней конференции Турнира городов в августе 2024 года.

Начнем с двух задач, известных с античных времен.

Задача 1. *Разделите данный угол на три равные части с помощью циркуля и линейки, на которой отмечен единичный отрезок. Линейку можно прикладывать к плоскости так, чтобы она проходила через ранее построенную точку, а концы отмеченного на ней отрезка лежали на ранее проведенных линиях.*

Решение. Обозначим данный угол через φ и на единичной окружности с центром O возьмем точки A и B такие, что $\angle AOB = \varphi$. Используя линейку с отмеченным единичным отрезком, проведем через B прямую, пересекающую окружность и продолжение отрезка AO за точку O в таких точках X, Y , что $XY = 1$ (рис. 1). Тогда $\angle OBX = \angle OXB = 2\angle XYA$ и $\angle AOB = \angle OBY + \angle OYB = 3\angle XYA$, следовательно, $\angle XYA = \varphi/3$.

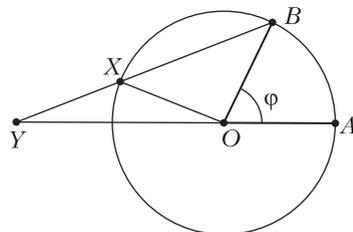


Рис. 1

Определение. Пусть точка равномерно движется по лучу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг своего начала. Тогда кривая, которую она описывает, называется *спиралью Архимеда*.

Задача 2. *Пусть на плоскости начерчена спираль Архимеда. Разделите данный угол с помощью циркуля и линейки*

- а) на три равные части;
- б) на n равных частей.

Решение. а) Проведем из центра O спираль два луча, образующие угол φ , и найдем точки X, Y их пересечения со спиралью (рис. 2). Отложим на OY отрезок $OX' = OX$, разделим отрезок $X'Y$ на три равные части и проведем через точки деления окружности с центром O , пересекающие спираль в точках P и Q . Тогда $\angle XOP = \angle POQ = \angle QOY$.

б) Решение аналогично предыдущему пункту.

Множество кривых, при наличии которых трисекция угла становится выполнимой,

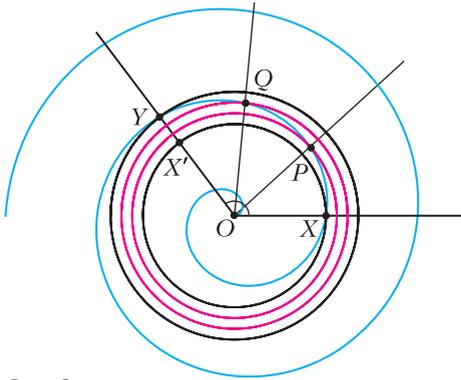


Рис. 2

весьма обширно. Наибольший интерес представляют методы деления угла на три части с помощью коник. Поскольку во многих графических программах, например в Geogebra, есть возможность рисовать коники, в них теоретически можно создать и инструмент для трисекции угла (впрочем, пользоваться им на практике мы не рекомендуем: лучше просто измерить данный угол φ и построить угол $\varphi/3$).

Трисекция угла с помощью коник

Задача 3. а) Пусть на плоскости начерчена парабола $y = x^2$. Окружность с центром в точке $A(a; b)$ проходит через вершину параболы (рис. 3). Напишите уравнение, корнями которого являются абсциссы остальных точек пересечения окружности с параболой.

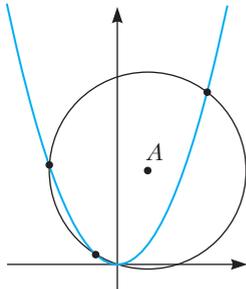


Рис. 3

б) Используя начерченную на плоскости параболу, разделите данный угол на три равные части.

в) Используя параболу, решите задачу удвоения куба.

Решение. а) Рассмотрим систему уравнений, задающих параболу и окружность:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Исключая y и учитывая, что корень $x = 0$ соответствует вершине, приходим к уравнению

$$x^3 - (2b - 1)x - 2a = 0.$$

б) Если $b = 2, a = \cos \varphi$, корни полученного уравнения равны $2 \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$.

С помощью отрезков длин $\cos \frac{\varphi}{3}$ и $\cos \varphi$ на тригонометрическом круге несложно построить угол $\frac{\varphi}{3}$.

в) Если $b = 1/2, a = 1$, корень полученного уравнения равен $\sqrt[3]{2}$.

Описанный способ трисекции угла является модификацией метода, предложенного Р.Декартом в книге «La géométrie» (см. русский перевод [2]). Изложение этого метода можно также прочитать в [3].

Задача 4. а) На плоскости начерчена гипербола $xy = C$. Окружность с лежащим на гиперболе центром A проходит через точку, симметричную A относительно центра гиперболы (рис. 4). Докажите, что

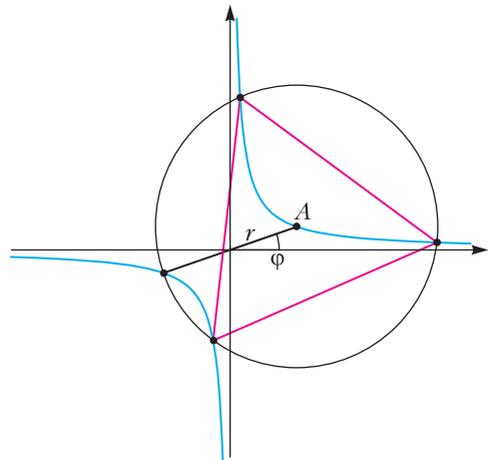


Рис. 4

три другие точки пересечения гиперболы и окружности являются вершинами правильного треугольника.

б) Используя начерченную на плоскости равностороннюю гиперболу, разделите данный угол на три равные части.

Решение. а) **Первый (алгебраический) способ.** Пусть точка A имеет координаты $(r \cos \varphi; r \sin \varphi)$. Тогда окружность можно задать параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi + 2r \cos t, \\ y = r \sin \varphi + 2r \sin t. \end{cases}$$

Подставив эти выражения в уравнение гиперболы, после несложных преобразований получим

$$\cos \frac{t - \varphi}{2} \sin \frac{3t + \varphi}{2} = 0.$$

Первый множитель соответствует точке, симметричной A относительно центра гиперболы, второй определяет три точки, образующие правильный треугольник.

Второй (геометрический) способ. Воспользуемся свойствами равносторонней гиперболы, о которых можно прочесть, например, в [4]. Рассмотрим треугольник Δ , образованный тремя точками пересечения окружности и гиперболы. Описанная около треугольника равносторонняя гипербола проходит через его ортоцентр, причем точка, симметричная ортоцентру относительно центра гиперболы, лежит на описанной около треугольника окружности. Следовательно, A – ортоцентр Δ . Поскольку A также является центром описанной около Δ окружности, треугольник Δ правильный.

б) Возьмем на гиперболе точку A такую, что луч OA образует с осью абсцисс угол φ , проведем окружность с центром A , проходящую через точку, симметричную A относительно центра гиперболы, и найдем ближайшую к оси абсцисс точку B пересечения окружности с гиперболой (рис. 5). Тогда угол между

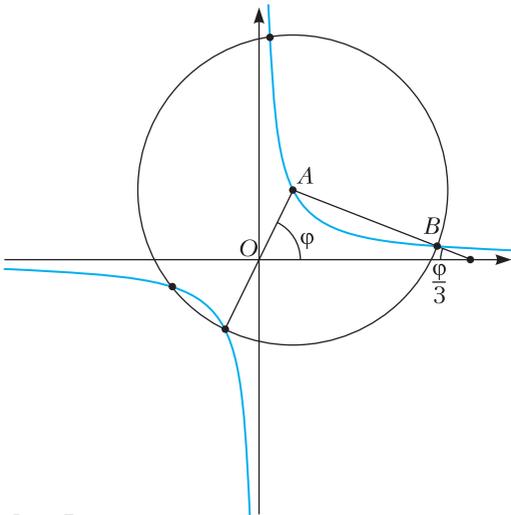


Рис. 5

прямой AB и осью абсцисс равен $\varphi/3$. Чтобы убедиться в этом, составьте уравнение прямой, проходящей через точки A и B , и найдите ее угловой коэффициент.

Задача 5. а) На плоскости начерчена гипербола, асимптоты которой образуют угол $2\pi/3$. Окружность проходит через вершину одной ветви гиперболы и фокус другой

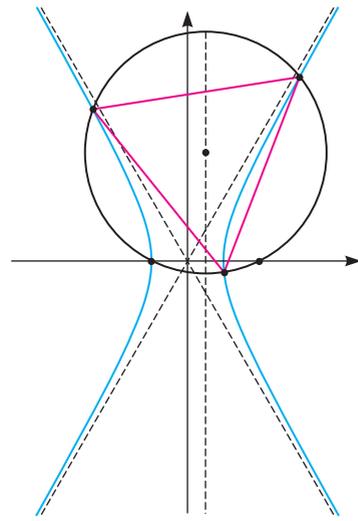


Рис. 6

ветви (рис. 6). Докажите, что три другие точки пересечения гиперболы и окружности являются вершинами правильного треугольника.

б) Используя начерченную на плоскости гиперболу с эксцентриситетом 2, разделите данный угол на три равные части.

Решение. а) (найдено участником конференции десятиклассником А.Соколовым) Напомним, что уравнение гиперболы можно привести к так называемому каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда уравнения асимптот имеют вид

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Запишем уравнение гиперболы в виде $y^2 = 3x^2 - 3$. Перейдем к комплексным координатам. Обозначим $z = x + iy$, тогда уравнение гиперболы примет вид

$$z^2 + \bar{z}^2 + z\bar{z} = 3.$$

Произвольная окружность, проходящая через вершину $V(-1;0)$ и фокус $F(2;0)$, задается уравнением

$$z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} = 2,$$

где $a + \bar{a} = 1$. Выразив из уравнения окружности \bar{z} и подставив в уравнение гиперболы, получим

$$(z + 1)(z^3 - 3az^2 + 3a^2z + 3 - 3a^2) = 0.$$

Корень $z = -1$ соответствует вершине гиперболы. Второй множитель приводится к виду $(z - a)^3 - 3$, следовательно, остальные три корня являются вершинами правильного треугольника.

б) Эксцентриситет гиперболы в случае задания ее каноническим уравнением равен

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Пусть окружность с центром O , проходящая через вершину V и фокус F гиперболы, пересекает гиперболу в точке P (рис. 7).

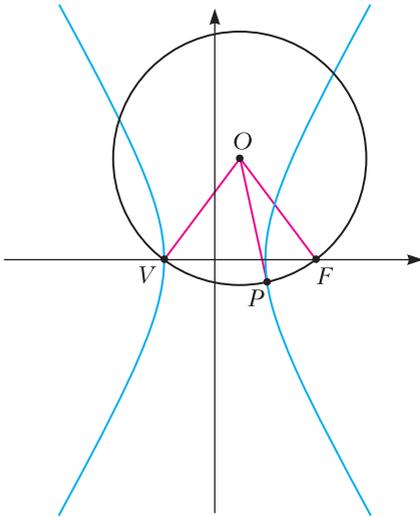


Рис. 7

Тогда $\angle POF = \angle VOF/3$. Попробуйте сами доказать этот факт.

До Летней конференции Турнира городов авторам статьи не было известно, какие коники, отличные от приведенных выше, позволяют осуществлять трисекцию угла. На конференции А.Соколов предложил алгоритм трисекции с помощью произвольной отличной от параболы коники.

Задача 6. Осуществите трисекцию угла, используя произвольную конику, отличную от параболы.

Решение. Выберем систему координат, в которой данная коника, отличная от параболы, имеет уравнение $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - 1)$ (e — эксцентриситет). Возьмем окружность с центром в точке $(e^2/8; b)$, проходящую через вершину коники $(-1; 0)$.

Исключив из системы уравнений, задающих окружность и конику, y и поделив полученное уравнение на $(x + 1)$, получим

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \left(\frac{15}{16} + \alpha\right)x + \left(\frac{25}{16} + \alpha\right) = 0,$$

где $\alpha = 4b^2(e^2 - 1)/e^4$. Сделав замену

$$t = (x - 1/2)/k,$$

$$k = \sqrt{3/4 + 4\alpha/3},$$

приведем это уравнение к виду

$$4t^3 - 3t + 3/8k = 0.$$

При

$$b^2 = \frac{27e^4}{64(e^2 - 1)} \left(\frac{1}{16 \cos^2 \varphi} - 1 \right)$$

получаем, что $t = \cos \frac{\varphi}{3}$. При этом для эллипса ($e < 1$) должно выполняться условие $\cos \varphi \geq 1/4$, а для гиперболы — противоположное. Но произвольный угол можно представить в виде суммы или разности частей, удовлетворяющих этому условию.

Другие задачи о трисекции

Хотя осуществить с помощью циркуля и линейки трисекцию произвольного угла невозможно, для многих углов эта задача разрешима. При этом среди них есть и углы, которые нельзя построить циркулем и линейкой. Например, рассмотрим следующий простой способ трисекции угла, равного $2\pi/n$, для любого n , не кратного 3.

Задача 7. Правильный n -угольник с центром O вписан в правильный треугольник (рис. 8, здесь $n = 7$). Докажите, что $\angle A = \angle O/3$.

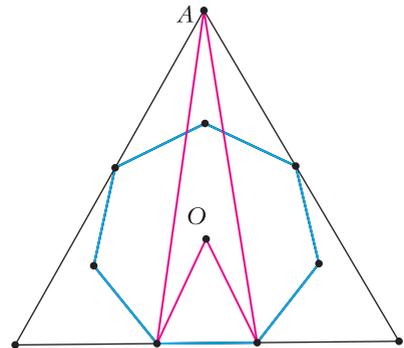


Рис. 8

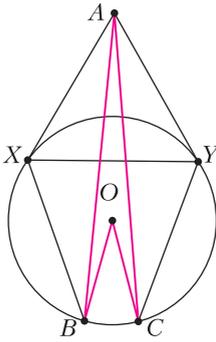


Рис. 9

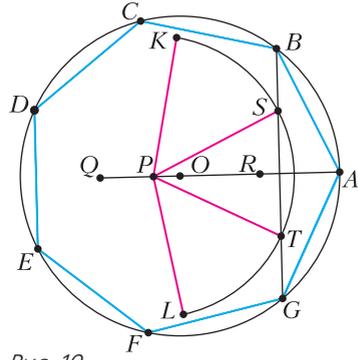


Рис. 10

Решение. Пусть BC – сторона n -угольника, лежащая на основании треугольника, а X, Y – вершины, через которые проходят боковые стороны. Тогда треугольник AXY правильный (рис. 9). Одна из содержащих X сторон n -угольника образует с BC угол, больший 60° , а другая – меньший. Это однозначно определяет вершину X : при $n = 3k + 1$ имеем $BX = XY = YC$, а при $n = 3k - 1$ имеем $CX = XY = YB$. В первом случае

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \pi/3 - 2\angle CAU = \\ &= \angle XYC - \pi/3 = \angle BOC/3. \end{aligned}$$

Во втором

$$\begin{aligned} \angle BAC &= 2\angle BAY - \pi/3 = 2\pi/3 - \angle AYB = \\ &= \pi/3 - \angle XYB = \angle BOC/3. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что у нас кроме циркуля и линейки есть «трисектор» (т.е. инструмент для деления произвольного угла на три равные части). Попробуем узнать, насколько это увеличивает наши возможности в задачах на построение. В частности, зададимся вопросом, какие правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля, линейки и трисектора.

Задача 8. С помощью циркуля, линейки и трисектора постройте правильный семиугольник.

Решение. Пусть Ω – окружность с центром в начале координат и радиусом 6 (рис. 10). Возьмем точки $A(6;0), Q(-3;0), R(3;0)$. Пусть K, L – вершины двух правильных треугольников с основанием QR . Построим дугу KL с центром в точке $P(-1;0)$ и разделим ее на три равные части точками S и T . Точки B и G пересечения прямой ST с окружностью Ω являются вершинами правильного семиугольника $ABCDEFG$.

Для обоснования построения покажем, что если точка B является вершиной правильного семиугольника, то ее проекция на отрезок QA совпадает с проекцией точки S . Для этого убедимся в равенстве

$$PB \cos \frac{2\pi}{7} = PS \cos \angle SPA - OP,$$

т.е.

$$6 \cos \frac{2\pi}{7} = \sqrt{28} \cos \frac{\arccos(1/\sqrt{28})}{3} - 1.$$

Непосредственная проверка показывает, что как левая, так и правая части этого равенства удовлетворяют уравнению $x^3 - 21x - 7 = 0$, имеющему единственный положительный корень.

Другие примеры построения правильных многоугольников циркулем, линейкой и трисектором можно посмотреть в [5].

Задача 9*. Какие еще правильные многоугольники можно построить, имея трисектор, циркуль и линейку? (Напомним, что по теореме Гаусса с помощью циркуля и линейки можно построить правильный N -угольник тогда и только тогда, когда $N = 2^m p_1 \dots p_k$, где p_1, \dots, p_k – различные простые числа вида $2^{2^j} + 1$.)

Ответ: $N = 2^m 3^n p_1 \dots p_k$, где p_1, \dots, p_k – различные простые числа вида $2^{2^j} + 1$. В частности, можно построить 13- и 19-угольники, но нельзя построить 11-угольник. (См. доказательство теоремы Гаусса в [6].)

В заключение еще две задачи о трисекции с помощью необычных инструментов.

Задача 10. Дан прямоугольный лист бумаги $ABCD$ и точка X на стороне BC . Сгибая бумагу по прямым, разделите

Избранные задачи XXIX Турнира имени А.П.Савина

1 (6–7 классы). На доске написаны два натуральных числа: одно синее и одно красное. У Пети есть свое любимое натуральное число. Он нашел его НОД с синим числом и его НОК с красным. Оказалось, что если к первому результату добавить красное число, а ко второму – синее, то суммы будут равны. Докажите, что красное число делится на синее.

А.Пешин

2 (5–8 кл.). а) Дана бесконечная квадратная решетка. Можно ли раскрасить стороны клеток в два цвета так, чтобы каждые два узла решетки были соединены путями обоих цветов? б) Дана бесконечная треугольная решетка. Можно ли раскрасить стороны треугольников в три цвета так, чтобы каждые два узла решетки были соединены путями всех трех цветов?

А.Грибалко

3 (6–7 кл.). Вокруг поляны, в центре которой растет баобаб, сидят 100 мудрецов. Им рассказали, что на них наденут колпаки с различными номерами от 1 до 100 и каждый будет видеть все колпаки, кроме своего собственного и колпака сидящего напротив мудреца. Затем по часовой стрелке, начиная с самого старшего, каждый должен будет назвать натуральное число от 1 до 100. Перед началом испытания мудрецы могут договориться, как им действовать. Какое наибольшее количество из них гарантированно смогут назвать номер на своем колпаке?

А.Грибалко

4 (8 кл.). У математика есть 100 гирь, массы которых равны $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{100^2}$ кг, и абсолютно точные двухчашечные весы. Может ли он положить по пять гирь на каждую чашу весов так, чтобы установилось равновесие?

М.Евдокимов

5 (6–7 кл.). Зритель тасует колоду из 52 карт и дает ассистенту фокусника пять карт. Ассистент смотрит полученные карты, выкладывает их в ряд слева направо рубашкой вверх и затем одну за другой открывает какие-то три выложенные карты. Могут ли фокусник с ассистентом договориться так,

чтобы фокусник смог угадать каждую из двух оставшихся карт?

М.Евдокимов

6 (7–8 кл.). При каких n можно заполнить таблицу $n \times n$ различными целыми числами от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а все точные квадраты – в разных строках и в разных столбцах?

А.Грибалко

7 (8 кл.). Федор Конохов летит к Северному полюсу на воздушном шаре, и его скорость все время уменьшается. Каждую секунду Федор смотрит на спидометр и отмечает: «Если бы я вылетел на час раньше и летел все время с такой скоростью, как сейчас, то к этому моменту как раз долетел бы до полюса». Долетит ли он до полюса за 2 часа?

Д.Мухин

8 (8 кл.). Даны окружность с центром O и вписанный в нее остроугольный треугольник. С помощью только линейки без делений постройте высоту треугольника.

А.Блинков

9 (8 кл.). На плоскости отмечено 50 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединили либо красным, либо синим отрезком. При этом образовались треугольники (с вершинами в отмеченных точках) четырех типов: без красных сторон, с одной, двумя и тремя красными сторонами. Может ли треугольников всех четырех типов быть поровну?

А.Грибалко

10 (7–8 кл.). В квадрате 3×3 записаны натуральные числа. За ход можно прибавить к трем числам в одной строке или в одном столбце одно и то же натуральное число. Докажите, что за несколько ходов можно добиться того, чтобы не менее семи чисел стали точными квадратами.

В.Карпов

11 (5–6, 8 кл.). На квадратном континенте все страны прямоугольны. Две страны считаются соседями, если имеют общий отрезок границы. Назовем страну влиятельной, если

у нее не менее десяти соседей. Могут ли не менее а) четверти; б) трети всех стран быть влиятельными?

А. Шаповалов

12 (8 кл.). Для выступления на концерте в Солнечном городе Незнайка придумал фокус. Зрителям выдадут шесть карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ассистенты Незнайки – Винтик, Шпунтик и Пончик – получат от зрителей по две карточки, каждый будет видеть только свои два числа. Сначала Винтик должен будет в присутствии Незнайки положить на стол одну из своих карточек числом вверх, потом то же самое должен будет сделать Шпунтик, а затем и Пончик. После этого Незнайка назовет, какое число осталось у каждого. Сможет ли Незнайка гарантированно показать такой фокус?

А. Грибалко

13 (7–8 кл.). К левому берегу реки подошли N беглецов с номерами 1, 2, ..., N , где $N > 1$. Есть квадратная лодка. В ней может плыть один беглец, чей номер – точный квадрат, или

два беглеца с суммой номеров, равной точному квадрату. При каком наименьшем N все беглецы могут переправиться на правый берег?

А. Шаповалов

14 (8 кл.). Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами A и B соответственно пересекаются в точках P и Q . Описанная окружность Ω треугольника APB повторно пересекает ω_1 в точке B_1 , а ω_2 – в точке A_1 . Пусть A_2 и B_2 – точки, диаметрально противоположные точкам A и B относительно Ω . Прямая A_1A_2 пересекает ω_1 в точках K и L , а прямая B_1B_2 пересекает ω_2 в точках M и N . Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

Л. Шатунов

15 (8 кл.). Для любого натурального n докажите неравенство

$$\frac{1!}{0!+1!} + \frac{1!+2!}{1!+2!} + \dots + \frac{1!+2!+\dots+n!}{(n-1)!+n!} < n.$$

В. Новиков

Публикацию подготовил А. Грибалко

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest
Желаем успеха!*

1. Даны целые числа a, b, c . Известно, что каждое из чисел $2a - 1, 3b - 1, 6c - 1$ делится на 1001. Обязательно ли $a + b + c - 1$ делится на 1001?

Н. Осипов, А. Скопенков

2. У Пети есть набор из трех белых гирек массами 101 г, 102 г и 103 г и такой же набор из трех черных гирек. Массы на гирьках не написаны, а на вид нельзя понять, какая гирька какой тяжелее. Петя хочет разбить гирьки на пары одинаковых по массе. Как ему сделать это за два взвешивания на чашечных весах со стрелкой, показывающих,

какая чаша перевесила и на сколько граммов?

С. Дориченко

3. Дан квадрат 99×99 , разбитый на единичные клетки. Сколькими способами можно отметить в нем 99 клеток так, чтобы в каждом квадрате 50×50 было 50 отмеченных клеток?

Е. Бакаев

4. Правильный 100-угольник со стороной 1 разбит на k правильных 10-угольников со стороной 1 и конечное число ромбов со стороной 1. Докажите, что $k \leq 10$.

Е. Бакаев

Как на льдине чай вскипятить

А. СТАСЕНКО

Каких только степеней не встречается в физике: скорость падающего тела прямо пропорциональна времени, пройденное при этом расстояние – квадрату времени, объем шара – кубу радиуса, ..., а поток излучаемой энергии, оказывается, пропорционален четвертой степени температуры! Да в этом любой может убедиться, если знает такие фундаментальные константы, как постоянная Больцмана k (Людвиг Больцман, 1844–1906), постоянная Планка h (Макс Планк, 1858–1947), скорость света c . Тут помогут соображения теории размерностей и подобия.

Итак, вам нужно получить зависимость плотности потока энергии q , его размерность Дж/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), от температуры T , выражаемой в градусах Кельвина, К. Сразу видно, что соответствующая формула должна содержать kT , Дж, в некоторой степени m , а чтобы получить Дж в первой степени, эту величину следует разделить на h^{m-1} , Дж·с. А откуда взять м^2 в знаменателе? Конечно, разделить на квадрат скорости света c^2 , $\text{м}^2/\text{с}^2$. Получается

$$q \sim \frac{(kT)^m}{c^2 h^{m-1}}.$$

Но поскольку секунда должна возникнуть в знаменателе, то там должно быть

$$\frac{1}{c^2} \cdot c^{m-1} = c^{m-3} = c,$$

откуда $m = 4$. В результате имеем

$$q \sim \frac{(kT)^4}{c^2 h^3} \sim T^4.$$

Это и есть знаменитый закон Стефана–Больцмана (Йозеф Стефан, 1835–1893). Комплекс фундаментальных констант, стоящий в виде множителя при T^4 и называемый постоянной Стефана–Больцмана, имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi^5}{15} \cdot \frac{k^4}{c^2 h^3} \approx \\ &\approx 40 \cdot \frac{(1,4 \cdot 10^{-23})^4 \text{ Дж}^4/\text{К}^4}{(3 \cdot 10^8)^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^3 \text{ Дж}^3 \cdot \text{с}^3} = \\ &= 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4). \end{aligned}$$

(Обратите внимание, как удачно выстроились цифры: 5, 6, 7, 8.) Полученный закон описывает излучение так называемого абсолютно черного тела. В реальности вводится коэффициент черноты, меньший единицы.

Для многих целей важна только четвертая степень температуры излучаемого тела. Например, можно оценить температуру «поверхности» Солнца, не посылая к нему термометр, на основе баланса энергии.

Вся энергия, излучаемая Солнцем, равна $\sigma T_C^4 \cdot 4\pi R_C^2$, где R_C – радиус Солнца. Ее часть, перехватываемая диском Земли, равна $\frac{\pi R_3^2}{4\pi L^2}$, здесь L – расстояние между Солнцем и Землей. Вся энергия, излучаемая Землей, равна $\sigma T_3^4 \cdot 4\pi R_3^2$. Приравнивая потоки энергии, падающей на диск Земли и излучаемой ее поверхностью, получим

$$\sigma T_C^4 \cdot 4\pi R_C^2 \cdot \frac{\pi R_3^2}{4\pi L^2} = \sigma T_3^4 \cdot 4\pi R_3^2.$$

Видно, что обе части этого уравнения можно сократить на $\sigma \cdot 4\pi R_3^2$. Это означает, что важна только четвертая степень температуры. Кроме того, получаемая зависимость одинакова для всех планет. Главную роль играет отношение

$$\frac{R_C^2}{4L^2} = \frac{(2R_C)^2}{16L^2} = \left(\frac{\alpha_C}{16}\right)^2,$$

где α_C – угловой размер диаметра Солнца при наблюдении с Земли, равный приблизительно 10^{-2} радиан. В результате имеем

$$\frac{\sqrt{\alpha_C}}{2} \cdot T_C = T_3, \quad T_C = 20T_3.$$

Принимая среднюю температуру Земли равной 300 К, получим $T_C = 6000$ К.

Заметим, что угловой размер диаметра Луны такой же, как для Солнца. Это позволяет наблюдать и полное затмение нашего светила, и его корону.

Но позвольте! – воскликнул рыбак, подергивая удочку над прорубью, – если каждое тело излучает энергию, значит, можно при помощи отражающей поверхности достаточной площади S ночью сфокусировать излучение льда на чайнике и вскипятить его!? Проверим это.

Плотность потока солнечного излучения у поверхности Земли $q_C \approx 1000$ Дж/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$). Сфокусировав на чайнике излучение, от-

раженное от экрана площадью порядка квадратного метра, имеем киловаттную печь! Следовательно, для получения такого же потока от льдины при температуре, скажем, $-3\text{ }^\circ\text{C}$ (270 K), потребуется площадь отражающей поверхности $S = \left(\frac{6000}{270}\right)^4 \cdot 1\text{ м}^2 \approx 25 \cdot 10^4\text{ м}^2$. Отсюда радиус отражателя $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 300\text{ м}$.

Конечно, отвод тепла конвекцией от подогреваемого тела увеличивается при отличии его температуры от температуры окружающей среды. Это можно было бы компенсировать добавкой площади отражателя. Однако, на какой же высоте окажутся чайник и фокус такого устройства (параболоида или сферического зеркала)! – подумал рыбак, но тут пошел клев.

Удачного улова!

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Как найти ошибку

М. БОНДАРОВ

Как известно, от ошибок никто не застрахован. Даже те, кто глубоко понимают физику, даже величайшие ученые.

В 1905 году в своей докторской диссертации Альберт Эйнштейн предложил новый теоретический метод определения радиуса молекул и постоянной Авогадро. Диссертация была утверждена, и Эйнштейн стал доктором. Как выяснилось позднее, ни сам Эйнштейн, ни его оппонент не заметили одну серьезную ошибку в вычислениях. Лишь через несколько лет обнаружить эту, как пишет один из биографов Эйнштейна [1], «элементарную, но не тривиальную» ошибку удалось потому, что результаты эксперимента расходились со значениями, полученными из выведенного в диссертации уравнения.

В данной статье речь пойдет не о случаях из истории физики, а об ошибках, возникающих у школьников при решении физических задач на ЕГЭ, олимпиадах и других испытаниях. При этом будем предполагать, что ученик сумел успешно разобраться в физических закономерностях поставленной перед ним задачи, выписал все уравнения, необходимые для решения, но в процессе выхода на

конечный результат допустил ошибку в математических преобразованиях или вычислениях. И теперь главной его проблемой становится выявление и устранение допущенной ошибки. Мы остановимся только на анализе буквенных ответов. К каждой задаче будет предложено несколько возможных ответов, среди которых непременно есть верный.

Итак, наша цель – суметь распознать все неверные ответы *без непосредственного решения задачи*, полагаясь только на глубокое понимание сути закономерностей процессов, описываемых в условии. Вот «имена» главных помощников в достижении этой цели: **размерность, симметрия, частный случай**.

Начнем с задачи, для решения которой достаточно знаний семиклассника.

Задача 1. *Гонщик едет на мотоцикле по шоссе и ориентируется по телеграфным столбикам, которые тянутся вдоль шоссе. Гонщик последовательно «скачком» переходит на скорости v_1, v_2, v_3, v_4 , когда проезжает мимо очередного столбика. Чему равна средняя скорость $v_{\text{ср}}$ мотоцикла?*

Способ решения задачи хорошо известен. Пусть расстояние между столбиками равно l . Тогда средняя скорость $v_{\text{ср}}$ определяется как отношение всего пути $4l$ ко времени t его прохождения, где $t = l/v_1 + l/v_2 + l/v_3 + l/v_4$. Другими словами, осталось лишь разделить $4l$ на $(l/v_1 + l/v_2 + l/v_3 + l/v_4)$, сократить на l и цель достигнута:

$$v_{\text{ср}} = \frac{4}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}}. \quad (*)$$

Математические ошибки могут появиться, если возникает желание продолжить преобразования, чтобы уменьшить «этажность» дроби. Вот некоторые из возможных ответов, среди которых нужно выбрать единственный верный:

$$\text{A. } v_{\text{cp}} = \frac{4v_1v_2v_3v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4};$$

$$\text{B. } v_{\text{cp}} = \frac{4v_1v_2v_3v_4}{v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4};$$

$$\text{C. } v_{\text{cp}} = \frac{4v_1v_2v_3v_4}{v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4};$$

$$\text{D. } v_{\text{cp}} = \frac{v_1v_2v_3v_4}{v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4}.$$

Как правило, обычно первыми отбрасываются ответы **A** и **B**. Очевидно, что ответ **A** не проходит проверки на *размерность*. В самом деле, левая часть этой формулы имеет размерность скорости (м/с), а правая – размерность куба скорости (м/с)³. В ответе **B** бросается в глаза его *несимметричность*. Заметим, что в знаменателе этой дроби величина v_1 встречается 3 раза, а величины v_2 , v_3 и v_4 – только по 2 раза. Но в условии задачи все скорости равноправны, так что ни одна из них не должна выделяться в ответе. Обобщим это наблюдение: *если в условии задачи имеется некоторая симметрия, то определенная симметрия должна непременно проявляться в ответе*.¹ В случае **B** такого не наблюдается, и этот ответ не может быть верным.

Таким образом, у нас остаются лишь два последних ответа, каждый из которых успешно прошел проверку на размерность и симметрию. Рассмотрим теперь такой *частный случай*, когда ответ очевиден. Пусть гонщик на всех участках имеет одну и ту же скорость $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v$, которая в этом случае, очевидно, равна средней скорости. Заменим все скорости в ответах **C** и **D** на одинаковые и равные v . В итоге получим верное $v_{\text{cp}} = v$ для ответа **C** и противоречащее здравому смыслу выражение $v_{\text{cp}} = v/4$ для ответа **D**.

Итак, все ошибочные ответы отброшены и нами найден верный ответ **C**. Аккуратно проведя математические преобразования, убедимся в том, что из формулы (*) получает именно ответ **C**.

Наблюдательный читатель, несомненно, заметил, что среди возможных ответов нет самого распространенного неверного ответа:

$$\text{E. } v_{\text{cp}} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4}.$$

Это не случайно, ведь мы собираемся рассматривать только те ответы, которые получены не случайно (наугад), а в результате глубокого понимания физических процессов, описываемых в задаче, правда, при наличии математических ошибок. Очевидно, что записанные в решении уравнения едва ли могут привести к ответу **E**.

И все же попробуем провести анализ и убедиться, что ответ **E** не может быть верен. Снова нам поможет частный случай: пусть на первых трех участках скорость гонщика остается постоянной: $v_1 = v_2 = v_3 = v$, а на последнем она очень мала: $v_4 \rightarrow 0$. Какова при этом должна быть средняя скорость мотоциклиста на всем пути? Очевидно, что за счет малой скорости v_4 время t движения становится очень большим (в пределе оно стремится к бесконечности: $t \rightarrow \infty$). Значит, из определения средней скорости ($v_{\text{cp}} = s/t$) следует, что она должна быть, как и v_4 , тоже очень мала. Обратим внимание, что при $v_4 \rightarrow 0$ в случае верного ответа **C** средняя скорость тоже оказывается очень малой. Зато ответ **E** дает в этом случае неправдоподобный результат: $v_{\text{cp}} = 3v/4$. (Ясно, что для анализа можно было предположить малой скорость на любом другом участке.)

Рассмотрим еще одну задачу на расчет средней скорости, где участки пути имеют разную длину.

Задача 2. *Третью всего пути автомобиль проехал со скоростью v_1 , а остальное – со скоростью v_2 . Какова была средняя скорость v_{cp} автомобиля?*

Возможные ответы:

$$\text{A. } v_{\text{cp}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2};$$

$$\text{B. } v_{\text{cp}} = \frac{v_1 + 2v_2}{3};$$

$$\text{C. } v_{\text{cp}} = \frac{2v_1 + v_2}{3v_1v_2};$$

¹ Поучительный случай с опытным наборщиком физического текста, обнаружившим без решения задачи ошибку в ответе, описан в статье [2].

$$\text{D. } v_{\text{cp}} = \frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2};$$

$$\text{E. } v_{\text{cp}} = \frac{3v_1v_2}{v_1 + 2v_2}.$$

Анализ ответов в этой задаче проводим аналогично предыдущему. Начиная с проверки *размерности*, нетрудно заметить, что в случае **С**, решая задачу, в конечном выражении, видимо, забыли перевернуть дробь. Поэтому данный ответ не может быть верен. Единственный симметричный ответ **А** не подходит, поскольку *симметрия* отсутствует в условии и, следовательно, ее не должно быть в ответе. Ответ **В** отбрасывается по той же причине, что и ответ **Е** в предыдущей задаче: в случае очень малой скорости, к примеру на первом участке, средняя скорость тоже должна быть очень мала. Однако при подстановке в формулу $v_1 \rightarrow 0$ имеем $v_{\text{cp}} = 2v_2/3$, а не $v_{\text{cp}} \rightarrow 0$.

Остается сделать выбор между двумя похожими ответами **Д** и **Е**, которые успешно прошли все испытания, позволившие выявить ошибочность трех первых ответов. Увы, не поможет нам и частный случай равенства скоростей, который выручил в прошлой задаче. В самом деле, при $v_1 = v_2 = v$ обе формулы дают верный результат: $v_{\text{cp}} = v$. Что же, попробуем еще один *частный случай*: очень большую скорость на втором участке (в предельном случае $v_2 \rightarrow \infty$). Тогда в знаменателе формулы **Д** можно пренебречь малой величиной $2v_1$ по сравнению с очень большой v_2 , что приводит к ответу

$$v_{\text{cp}} = \frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2} \approx \frac{3v_1v_2}{v_2} = 3v_1.$$

Убедимся, что именно ответ **Д** должен оказаться верным в нашем частном случае. Третью пути автомобиль двигался медленно, а затем следующие две трети промчался почти мгновенно, практически не затратив на это время. Иными словами, в этом случае за время, которое затрачивает автомобиль, двигаясь на первом участке со скоростью v_1 , на прохождение первой трети пути l , автомобиль сумеет преодолеть весь путь $3l$. Для этого, очевидно, его скорость v_{cp} должна быть втрое больше, чем скорость v_1 на первой трети пути.

Проведите аналогичные рассуждения для формулы **Е** самостоятельно и покажите, что это приводит к ошибочному результату $3v_1/2$.

Проверим теперь наши выводы, основанные на анализе ответов, решив задачу. Пусть весь путь равен $3l$, а все время равно t . Тогда средняя скорость

$$v_{\text{cp}} = \frac{3l}{t} = \frac{3l}{\frac{l}{v_1} + \frac{2l}{v_2}} = \frac{3v_1v_2}{v_1 + 2v_2}.$$

Все верно.

Итак, мы убедились в том, что рабочими инструментами по обнаружению возможных ошибок в ответах (впрочем, и в промежуточных формулах тоже) являются три главных способа проверки: размерность, симметрия и частный случай. Среди них, несомненно, важнейшим является первый: размерность. С его помощью обнаруживаются наиболее грубые ошибки.

И тут, наверное, уместно сделать такое замечание. Едва ли найдется хотя бы один ученик, который станет складывать свой рост и температуру. В то же время при решении задач ошибки в размерностях встречаются довольно часто. При этом в некоторых случаях для их обнаружения не требуется больших усилий. Приведем лишь несколько подобных выражений, которые доводилось встречать практически каждому, проверившему работы учеников:

- 1) $s + v/t$; 2) $m - M^2$;
- 3) $I + R/U$; 4) $(F - m)a$.

Очевидно, что проверка размерности должна быть вашим неизменным спутником, если вы хотите безошибочно решать задачи.

Отметим, что прохождение всех рассмотренных выше проверок не гарантирует верности ответа. Эти проверки лишь позволяют отбрасывать неверные ответы. Но, согласитесь, это тоже очень полезно.

Перейдем теперь к задаче для девятиклассников.

Задача 3. Найдите силу T натяжения нити между грузами 2 и 3 в системе, изображенной на рисунке 1. Массы грузов известны, массой блока пренебречь. Трение отсутствует. Ускорение свободного падения равно g .

Возможные ответы:

A. $T = \frac{2m_1m_3g}{m_1 + m_2 + m_3}$;

B. $T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2 + m_3}$;

C. $T = \frac{m_1m_3g}{m_1 + m_2 + m_3}$;

D. $T = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)g}{2}$;

E. $T = \frac{2m_1m_3g}{m_1 - m_2 - m_3}$.

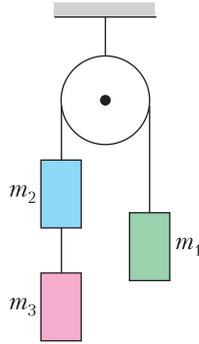


Рис. 1

Два первых способа проверки, удачно использованных нами в предыдущих задачах, на сей раз, увы, не помогают. Остается одна надежда – на удачно выбранный *частный случай*.

В каком случае нить между грузами 2 и 3 перестанет быть натянутой? Во-первых, если убрать груз массой m_3 : тогда нить нечему натягивать. Во-вторых, при удалении груза m_1 второй и третий начнут свободно падать, и нить снова не будет натянутой. Выходит, что $T = 0$ при $m_1 = 0$ и $m_3 = 0$; значит, в числителе дроби должно быть произведение m_1m_3 . Этой проверке противоречат ответы **B** и **D** – отбрасываем их. В случае **E** обратим внимание на «минусы» в знаменателе: они всегда должны вызывать некоторую тревогу у проверяющего ответ на достоверность. В самом деле, пусть грузы слева от блока имеют такую же суммарную массу, что и груз справа, т.е. $m_2 + m_3 = m_1$. Тогда, согласно выражению **E**, нить должна быть натянута бесконечно большой силой. Как известно, таких сил в системе грузов не может быть – удаляем еще один ответ.

Вновь остаются два ответа, различающихся совсем чуть-чуть. А что если вновь попробовать предположение $m_2 + m_3 = m_1$? В этом случае ускорение в системе отсутствует, а нижняя нить будет натянута силой $T = m_3g$. Именно это получается в ответе **A**, в то время как ответ **C** дает неверный результат $T = m_3g/2$. Впрочем, можно было применить и другой прием. Представим, что справа подвешен очень тяжелый груз ($m_1 \rightarrow \infty$). Тогда легкие левые грузы не смогут мешать ему практически свободно падать с ускорением g . При этом сами они будут подниматься с тем же по модулю ускорением (нити нерастяжимы). А чтобы

груз массой m_3 поднимался с ускорением g , нить должна быть натянута с силой $T = 2m_3g$. Подставив $m_1 \rightarrow \infty$ в формулы **A** и **C**, убеждаемся, что это верно только для ответа **A**.

Для проверки наших рассуждений решим задачу. Пусть a – ускорение грузов, T^* – натяжение второй нити. Тогда по второму закону Ньютона $m_3a = m_3g - T$, $m_2a = m_2g + T - T^*$, $m_1a = T^* - m_3g$. Решая эту систему, получим верный ответ **A**.

Мы еще не рассматривали специфику электрических задач. Пора перейти к одной из них для десятиклассников.

Задача 4. Два резистора сопротивлениями R_1 и R_2 и два конденсатора емкостями C_1 и C_2 подключены к источнику постоянного напряжения U , как показано на рисунке 2.

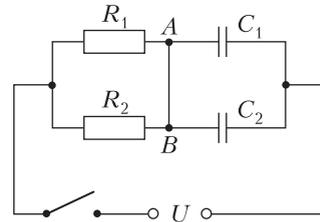


Рис. 2

Какой заряд Δq протечет через проводник AB за достаточно большой промежуток времени после замыкания ключа, если конденсаторы были первоначально разряжены?

Возможные ответы:

A. $\Delta q = \frac{C_2R_2 + C_1R_1}{R_1 + R_2} U$;

B. $\Delta q = \frac{C_1R_2 + C_2R_1}{R_1 - R_2} U$;

C. $\Delta q = \frac{(C_2 - C_1)R_1R_2}{R_1 + R_2} U$;

D. $\Delta q = \frac{C_2R_2 - C_1R_1}{R_1 + R_2} U$;

E. $\Delta q = \frac{C_2R_1 - C_1R_2}{R_1 + R_2} U$.

Как обычно, начнем с проверки на размерность, и она сразу выдает нам первый из неверных ответов: **C**. Далее. Обращает на себя внимание «минус» в знаменателе ответа **B**. Ясно, что при $R_1 = R_2$ (да и ни в каком другом случае!) по участку AB не может протечь бесконечно большой заряд.

В каком же случае заряд не будет течь через перемычку AB ? Очевидно, что это

случится, если цепь окажется симметричной, т.е. станут одинаковыми как сопротивления резисторов, так и емкости конденсаторов. Тогда при подстановке в конечную формулу $R_1 = R_2$ и $C_1 = C_2$ должно получиться $\Delta q = 0$. Этому не удовлетворяет ответ **A** – отбрасываем его.

Остаются два последних ответа: **D** и **E**. Заменим первый резистор идеальным проводом ($R_1 = 0$). Тогда весь заряд, прошедший через него, проследует далее через проводник AB на конденсатор емкостью C_2 . Этому условию удовлетворяет ответ **D**, поскольку при подстановке в него $R_1 = 0$ имеем $\Delta q = C_2 U$. В то же время аналогичная подстановка в ответ **E** дает неверный результат: $\Delta q = C_1 U$.

Заметим, что в схемах с резисторами и конденсаторами полезно использовать также два других предельных случая: $C = 0$, когда конденсатор отсутствует, и $R \rightarrow \infty$, когда отсутствует проводник. Попробуйте самостоятельно использовать их для того, чтобы из двух последних ответов выбрать верный.

Вновь убедимся в правильности наших выводов, основанных только на анализе ответов, решив задачу. После окончания зарядки ток прекратится и на параллельно соединенных конденсаторах накопятся заряды $C_1 U$ и $C_2 U$. Значит, через резисторы протечет суммарный заряд $q = (C_1 + C_2) U$. Резисторы соединены параллельно, поэтому прошедшие через них заряды должны быть обратно пропорциональны сопротивлениям: $q_1 = q R_2 / (R_1 + R_2)$ и $q_2 = q R_1 / (R_1 + R_2)$. Следовательно, в направлении от точки A к точке B через проводник протечет заряд

$$\Delta q = q_1 - C_1 U = (C_2 R_2 - C_1 R_1) U / (R_1 + R_2),$$

что совпадает с ответом **D**.

Рассмотренные примеры показывают, что проверки на размерность, симметрию и частный случай могут эффективно служить для обнаружения ошибок при решении различных физических задач. Эти приемы, действительно, являются основными. Правда, иногда только с их помощью все ошибки в ответах обнаружить не удастся. Тогда в нашем арсенале анализа ответов должны появиться другие приемы; полезно обращать внимание в ответах также на *характер зависимости, корни, неопределенности*.

Перейдем к рассмотрению подобных задач и начнем с задачи для девятиклассников.

Задача 5. *Пассажир первого вагона поезда длиной l прогуливается по перрону. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд начал двигаться с ускорением a . Пассажир сразу же побежал со скоростью v . Через какое время t он догонит свой вагон?*

Возможные ответы:

$$\text{A. } t = \frac{v}{a} \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}};$$

$$\text{B. } t = \frac{v}{a} \sqrt{1 + \frac{2al}{v^2}};$$

$$\text{C. } t = \frac{v}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}} \right);$$

$$\text{D. } t = \frac{v}{a} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}} \right);$$

$$\text{E. } t = \frac{v}{a} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2al}{v^2}} \right);$$

$$\text{F. } t = \frac{v}{a} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2al}{v^2}} \right).$$

Ответы, на первый взгляд, очень похожи. Размерность и симметрия нам здесь не помогут. Придется исследовать предельные ситуации. В условиях задачи могут меняться только три физические величины: длина поезда l , его ускорение a и скорость пассажира v . Попробуем поработать с одной из них; к примеру, начнем мысленно уменьшать длину поезда до нуля ($l \rightarrow 0$). Тогда пассажир в начальный момент времени уже находится около своего вагона, следовательно, искомое время $t = 0$. Этому противоречат все ответы, кроме **C** и **E**. Нам очень повезло и с помощью только одного предельного перехода удалось выявить сразу четыре неверных ответа.

Приглядимся теперь повнимательнее к оставшимся ответам. Ответ **E** не может быть верным и вот почему. Во-первых, обратим внимание на *характер зависимости* искомого времени t от длины поезда l . Очевидно, что с уменьшением l непременно должно уменьшаться t , но по формуле **E** все должно быть наоборот. Во-вторых, подкоренное выражение больше 1, поэтому при любых значениях входящих в условие величин время будет отрицательным.

Итак, все неверные ответы успешно найдены. Однако не будем торопиться: есть еще

некоторые интересные моменты, о которых полезно упомянуть. Обратим внимание, что в подкоренном выражении величины a и l стоят рядом. А что если с ускорением a проделать те же действия, что и с длиной l ? Если начать уменьшать ускорение a , то время будет расти снова во всех ответах, кроме **С** и **Е**. И это вновь противоречит физическому смыслу. Рассмотрим формулу **С** на предмет предельного перехода $a \rightarrow 0$. После подстановки получается выражение, называемое в математике *неопределенностью* вида $0/0$.

Заметим, что еще с одним видом неопределенности нам пришлось бы столкнуться, если бы мы стали исследовать зависимость искомого времени от скорости v пассажира. Пусть эта скорость начнет неограниченно расти ($v \rightarrow \infty$). И снова все ответы, кроме **С** и **Е**, дадут противоречащий физическому смыслу ответ $t \rightarrow \infty$ и поэтому должны быть отброшены. В оставшихся ответах выражение в скобках стремится к нулю, а множитель перед скобками – к бесконечности. На сей раз мы столкнулись с другим видом неопределенности: $\infty \cdot 0$. Как поступить в подобной ситуации? Можно использовать, например, известное соотношение $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2}$, справедливое при малых x ($x \rightarrow 0$). Тогда в случае ответа **С** получим

$$t = \frac{v}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}} \right) \approx \frac{v}{a} \left(1 - \left(1 - \frac{2al}{2v^2} \right) \right) = \frac{v}{a} \frac{al}{v^2} = \frac{l}{v}.$$

Отсюда сразу видно, что при очень большой скорости время становится очень малым, как и должно быть в реальности. Отметим, что чисто формально в этой задаче верен также ответ **Д**.

При решении задачи нужно приравнять координаты пассажира $x_1 = vt$ и первого вагона $x_2 = l + \frac{at^2}{2}$, после чего получится квадратное уравнение $\frac{at^2}{2} - vt + l = 0$, решением которого будут два корня, соответствующие ответам **С** и **Д**. Ясно, что время из ответа **Д** соответствует той ситуации, когда пассажир пробежит мимо двери своего вагона, но затем вагон догонит его.

И еще одно важное замечание. При решении задачи мы предполагали, что пассажир непременно догонит свой вагон. Однако при скорости пассажира $v < \sqrt{2al}$ этого не случится. В конечной формуле обязательно должно быть отражено, что только при достаточно большой скорости (в нашем случае, при $v \geq \sqrt{2al}$) пассажир догонит свой вагон.

Рассмотрим еще одну задачу для десятиклассников.

Задача 6. Вертикально расположенная трубка длиной l , открытая с обоих концов, наполовину погружена в сосуд с ртутью. Трубку закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина x столбика ртути, оставшейся в трубке? Атмосферное давление уравновешивается столбом ртути высотой H . Процесс считать изотермическим.

Возможные ответы:

- A. $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2}$;
- B. $x = \frac{H + l + \sqrt{H^2 + l^2}}{2}$;
- C. $x = \frac{(H + l)^2 - \sqrt{(H + l)^3 - \frac{Hl}{2}}}{2}$;
- D. $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + \frac{l^2}{2}}}{2}$;
- E. $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + 2Hl + 2l^2}}{2}$.

Эта задача для учеников 10 класса, но даже 7-классник легко заметит, что в ответе **С** под корнем неполадки с размерностью. Конечно же, вычитать из кубических метров квадратные метры нельзя. К счастью, остальные ответы проходят проверку на размерность.

Достаточно просто установить, что еще два ответа – **Е** и **В** – неверные. Действительно, ответ **Е** не подходит, поскольку длина x столбика ртути получается отрицательной:

$$\sqrt{H^2 + 2Hl + 2l^2} = \sqrt{(H + l)^2 + l^2} > H + l.$$

А в ответе **В** длина x столбика ртути оказывается больше длины l трубки:

$$\sqrt{H^2 + l^2} \geq l, \quad x = \frac{H + l + \sqrt{H^2 + l^2}}{2} > \frac{2l}{2} = l.$$

Осталось сделать выбор между ответами **A** и **D**. Нам поможет проведение *мысленного опыта*... на Луне. Поскольку там нет атмосферы, ртути нечему удерживать в трубке, и она должна вытечь полностью. Другими словами, при $H \rightarrow 0$ должно быть $x \rightarrow 0$. Этому соответствует только ответ **A**, который и является верным.

Интересно, что если сразу догадаться использовать один лишь *предельный переход* $H \rightarrow 0$, то можно только с его помощью отбросить все неверные ответы.

Обратимся к решению задачи. Обозначим p – давление воздуха в трубке после ее вынимания, ρ – плотность ртути. Атмосферное давление $p_0 = \rho g H$. В изотермическом процессе $p_0 l / 2 = p(l - x)$. Условие равновесия столбика ртути в трубке: $p = p_0 - \rho g x$. Отсюда получается верный ответ **A**.

Разобранные выше задачи показывают, сколь плодотворным может оказаться исследование ответа. Однако иногда это исследование может начаться уже при анализе самого условия задачи. Рассмотрим это на примере задачи из варианта ЕГЭ.

Задача 7. Под действием постоянной горизонтальной силы \vec{F} клин массой $M = 1$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 3). По шерохова-

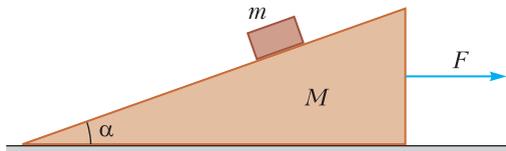


Рис. 3

той поверхности клина, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, равномерно (относительно клина) скользит вниз брусок массой $m = 0,2$ кг. Коэффициент трения между бруском и клином $\mu = 0,6$. Найдите модуль ускорения a клина. Сопротивлением воздуха пренебречь. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на брусок.

Возможные ответы:

$$\text{A. } a = \frac{F - mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{M + m};$$

$$\text{B. } a = g \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu \operatorname{tg} \alpha + 1};$$

$$\text{C. } a = \frac{m}{M + m} \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu \operatorname{tg} \alpha + 1} g;$$

$$\text{D. } a = g \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu \operatorname{tg} \alpha + 1};$$

$$\text{E. } a = g \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu \operatorname{tg} \alpha - 1}.$$

В некоторых задачах ЕГЭ есть интересная особенность: наличие избыточных данных, которые не должны входить в ответ. Для успешного решения подобных задач надо непременно научиться распознавать эти лишние данные.

Заметим, что в условии этой задачи явно заданы числовые значения четырех физических величин (M , m , α и μ) и неявно ускорения свободного падения ($g = 10 \text{ м/с}^2$). Однако числовое значение силы F , действующей на клин, отсутствует. Поэтому ее величина не может входить в ответ, а значит, ответ **A** не верен. А как же искать ускорение клина, не зная величины силы F ?

Тут нам поможет тот факт, что по условию задачи брусок скользит *равномерно* относительно клина. Следовательно, ускорения бруска и клина относительно земли одинаковы. Выходит, что можно не использовать второй закон Ньютона для клина и, стало быть, масса M клина не должна входить в ответ. Впрочем, наблюдательный читатель, наверняка, заметил, что в условии требуется изобразить рисунок с указанием сил, действующих лишь на брусок. Эта подсказка подтверждает наше предположение о том, что масса клина в решении не понадобится.

Примечательно, что в ответ не должна входить не только масса M клина, но и масса m бруска. Действительно, анализируя возможные ответы и опираясь снова на размерность, нетрудно понять, что для определения ускорения a в нашем распоряжении имеется лишь одна величина той же размерности – ускорение свободного падения g и две безразмерные величины – коэффициент трения μ и угол α . В ответе могло бы оказаться также отношение масс m/M , но, как мы выяснили, масса M клина входить в него не должна, а значит, и масса бруска тоже не может войти.

У нас остаются три «безмассовых» ответа. Один из них – **E** – отбрасываем, поскольку он выделяется «минусом» в знаменателе: при $\mu \operatorname{tg} \alpha = 1$ ускорение клина должно стремиться к бесконечности. Наконец, нужно сделать выбор между ответами **B** и **D**. Единственное отличие в этих ответах – знак в числителе дроби. Давайте вспомним задачу о

бруске на наклонной плоскости. Легко показать, что при $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ брусок скользит по плоскости вниз, при $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ остается неподвижен относительно плоскости, а при $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ либо лежит на ней (при $v_0 = 0$), либо равномерно соскальзывает (при $v_0 \neq 0$). Для дальнейшего анализа ответа превращаем движущийся клин в неподвижную наклонную плоскость: $a = 0$. Из ответа **D** следует, что при этом $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Тогда как ответ **B** выдает абсурдное $\mu = -\operatorname{tg} \alpha$. Предлагаем читателю самостоятельно выяснить, какова физическая природа появления знака «минус» в верном выражении **D** для ускорения при $\mu < \operatorname{tg} \alpha$.

Приведем теперь краткое решение задачи. Поскольку по условию брусок движется равномерно относительно клина, ускорения клина и бруска относительно земли одинаковы. Направим ось x горизонтально, а ось y — вертикально. Тогда по второму закону Ньютона для бруска в проекциях на эти оси

$$\begin{aligned} ma &= F_{\text{тр}} \cos \alpha - N \sin \alpha, \\ 0 &= F_{\text{тр}} \sin \alpha + N \cos \alpha - mg. \end{aligned}$$

Учитывая, что при скольжении $F_{\text{тр}} = \mu N$, получим

$$\begin{aligned} ma &= N(\mu \cos \alpha - \sin \alpha), \\ mg &= N(\mu \sin \alpha + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Разделив первое уравнение на второе, имеем

$$\frac{a}{g} = \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha},$$

откуда

$$a = \frac{g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)}{\mu \operatorname{tg} \alpha + 1} \approx 0,17 \text{ м/с}^2.$$

Не так часто встречаются случаи, когда ответ проходит несколько стадий проверки и кажется весьма правдоподобным, но один из частных случаев противоречит ответу. Подобное может случиться, если мы не обратили внимание на область допустимых значений. Вот, к примеру, на первый взгляд несложная задача.

Задача 8. К телу массой m , находящемуся на горизонтальной поверхности, приложена сила \vec{F} , направленная вверх под углом α к горизонту (рис. 4). Коэффициент трения между телом и поверхностью μ . Найдите ускорение a тела.

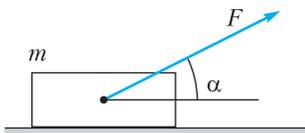


Рис. 4

Решение задачи, казалось бы, не составляет труда. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{aligned} F \cos \alpha - F_{\text{тр}} &= ma, \\ N + F \sin \alpha - mg &= 0. \end{aligned}$$

Учтем, что при скольжении $F_{\text{тр}} = \mu N$. Тогда искомое ускорение тела

$$a = \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m}.$$

Ответ получен, но... он неверен. Попробуем найти ошибку, перечитав еще раз условие и проанализировав наше решение. Есть ли в них несостыковки? Очевидно, что при малых значениях силы F тело еще не начнет двигаться, оставаясь в покое. Мы же для определения величины силы трения использовали формулу $F_{\text{тр}} = \mu N$, предположив, что тело скользит. Именно поэтому при подстановке в наш ответ $F = 0$ получается неправдоподобное $a = -\mu g$.

Но это еще не все! А что будет при больших значениях силы F ? Обратите внимание, что вместе с ростом F уменьшается сила нормальной реакции опоры N и при $F = mg/\sin \alpha$ становится равной нулю, т.е. тело отрывается от опоры. Исчезают одновременно две силы: \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$, и тело движется под действием двух оставшихся сил: \vec{F} и $m\vec{g}$. Ускорение можно найти, записав уравнение второго закона Ньютона в векторном виде: $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Из рисунка 5 с помощью теоремы косинусов $(ma)^2 = F^2 + (mg)^2 - 2Fmg \sin \alpha$ можно легко найти модуль ускорения тела:

$$a = \frac{\sqrt{F^2 + (mg)^2 - 2Fmg \sin \alpha}}{m}.$$

При желании с помощью теоремы синусов находится угол, под которым направлено ускорение тела к горизонту.

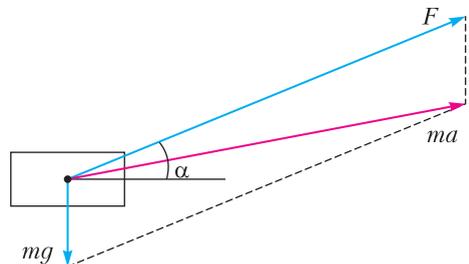


Рис. 5

Теперь можно, наконец, записать правильный ответ:

$$a = 0 \text{ при } 0 \leq F \leq \frac{mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha},$$

$$a = \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m} \text{ при } \frac{mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} < F \leq \frac{mg}{\sin \alpha},$$

$$a = \frac{\sqrt{F^2 + (mg)^2} - 2Fmg \sin \alpha}{m} \text{ при } F \geq \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

При проведении анализа ответа иногда случается невольно натолкнуться на парадоксальную ситуацию. И только глубокое понимание характера применимости законов физики может помочь с честью выйти из непростой ситуации. Рассмотрим это на примере следующей задачи.

Задача 9. Шар массой $m_1 = 2$ кг, движущийся со скоростью $v = 3$ м/с, налетает на неподвижный шар массой $m_2 = 3$ кг. Между шарами происходит центральный удар, в результате которого налетающий шар останавливается. Какое количество теплоты Q выделилось при ударе?

Решение этой задачи, как правило, не вызывает серьезных затруднений. В самом деле, очевидно, что, стандартно применяя совместно закон сохранения импульса

$$m_1 v = m_2 u$$

и закон сохранения энергии

$$Q = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_2 u^2}{2},$$

быстро приходим к ответу

$$Q = \frac{m_1 v^2}{2} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{(m_2 - m_1) m_1 v^2}{2 m_2} = 3 \text{ Дж.}$$

Если у вас появилась устойчивая привычка проводить анализ полученного ответа, вы непременно обратите внимание на «минус» в скобках. Получается странная вещь: при равенстве масс шаров теплота при ударе не должна выделяться. Мало того, еще более впечатляющий результат получим, если предположим, что налетающий шар будет тяжелее неподвижного. Действительно, при $m_1 > m_2$ $Q < 0$. Выходит, что в этом случае при ударе тепло не только не выделяется, но как бы «закачивается» в систему шаров. Налицо противоречие полученного нами ответа с физическим смыслом.

Попробуем выяснить причину. Для этого помощников лучше, чем законы сохранения,

нам не найти. Если импульс налетающего шара был равен p , то такой же импульс окажется у второго шара после столкновения. Первоначальная энергия системы находилась у первого шара и была равна $E_1 = p^2 / (2m_1)$. После столкновения энергия перешла ко второму шару: $E_2 = p^2 / (2m_2)$. При такой форме записи сразу видно, что в случае равенства масс шаров их кинетические энергии равны, а значит, тепло в системе не выделяется. Что и должно происходить при абсолютно упругом ударе шаров одинаковой массы. Очевидно также, что если в условии задачи налетает более тяжелый шар, то он не сможет остановиться (иначе это привело бы к нарушению закона сохранения энергии). Таким образом, вызвавший наше недоумение при анализе ответа частный случай ($m_1 > m_2$) просто невозможен, поскольку противоречит условию задачи, а именно остановке налетающего шара сразу после удара.

Подводя итоги, надеемся, что разобранные выше примеры убедили читателя в необходимости и важности анализа буквенного ответа в физических задачах. В качестве тренировки далее предложены упражнения. Однако только ими одними не стоит ограничиваться. Крайне важно выработать у себя привычку не оставлять ответ в задаче без его дальнейшего анализа. Этой цели могут служить разнообразные материалы журнала «Квант», в первую очередь статьи [3] и [4].

Упражнения

1. Третью всего пути автомобиль ехал со скоростью v_1 , затем четверть всего времени – со скоростью v_2 , остальное – со скоростью v_3 . Какова была средняя скорость v_{cp} автомобиля? Возможные ответы:

$$\text{A. } v_{cp} = \frac{3v_1 v_2 v_3}{v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_1 v_3}; \quad \text{B. } v_{cp} = \frac{3v_1 v_2 v_3}{v_1 + v_2 + v_3};$$

$$\text{C. } v_{cp} = \frac{3v_1(v_2 + 3v_3)}{2(4v_1 + v_3)}; \quad \text{D. } v_{cp} = \frac{3v_1(v_2 + 3v_3)}{4(2v_1 + v_3)}.$$

2. Однородный цилиндр массой m с площадью поперечного сечения S плавает на границе несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 6). Пренебрегая сопротивлением жидкостей, определите период малых вертикальных колебаний цилиндра. Возможные ответы:

$$\text{A. } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(\rho_2 + \rho_1)gS}}; \quad \text{B. } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(\rho_2 - \rho_1)gS}};$$

$$\text{C. } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_2 \rho_1 gS}}; \quad \text{D. } T = 2\pi \sqrt{\frac{m(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 \rho_1 gS}}.$$

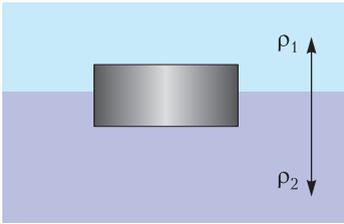


Рис. 6

3. Два автомобиля приближаются к перекрестку по взаимно перпендикулярным дорогам с постоянными скоростями v_1 и v_2 . В момент времени, когда первый автомобиль достиг перекрестка, второй находился от него на расстоянии l . Определите минимальное расстояние d_{\min} между автомобилями в процессе их движения. Возможные ответы:

- A. $d_{\min} = l \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2}$; B. $d_{\min} = l \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1}$;
 C. $d_{\min} = l \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$; D. $d_{\min} = l \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

4. За какое время t тело массой m соскользнет с наклонной плоскости высотой h с углом наклона β , если по наклонной плоскости с углом наклона α оно движется вниз равномерно? Возможные ответы:

- A. $t = \sqrt{\frac{2h \cos \alpha \cos \beta}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}$;
 B. $t = \sqrt{\frac{2gh}{\sin \beta \sin(\beta - \alpha)}}$;
 C. $t = \sqrt{\frac{2h \cos \alpha}{g \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}}$;
 D. $t = \sqrt{\frac{2h \sin \alpha}{g(\cos \alpha + \sin \beta)}}$.

5. Теплоизолированный баллон разделен теплоизолирующей перегородкой с клапаном на две части. При закрытом клапане в одной части баллона объемом V_1 находится гелий при давлении p_1 и температуре T_1 , а в другой части баллона объемом V_2 находится неон при давлении p_2 и температуре T_2 . Найдите температуру T газа, которая установится в баллоне после открытия клапана. Возможные ответы:

- A. $T = \frac{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}$;
 B. $T = \frac{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}$;
 C. $T = \frac{T_1 T_2 (2p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}$;
 D. $T = \frac{2T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}$.

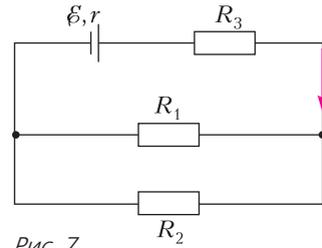


Рис. 7

6. Источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r и три резистора с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 включены по схеме, изображенной на рисунке 7. Найдите силу тока, идущего через резистор R_1 . Возможные ответы:

- A. $I_1 = \mathcal{E} R_1 / ((R_3 + r)(R_1 + R_2) + R_1 R_2)$;
 B. $I_1 = \mathcal{E} R_2 / ((R_3 + r)(R_1 + R_2) + R_1 R_2)$;
 C. $I_1 = \mathcal{E} R_2 / ((R_3 + r)(R_1 + R_2) - R_1 R_2)$;
 D. $I_1 = \mathcal{E} R_1 R_2 / ((R_3 + r)(R_1 + R_2) + R_1 R_2)$.

7. С какой силой давит клин на вертикальную стену, если на него положили груз массой m (рис. 8)? Угол при основании клина α . Коэффици-

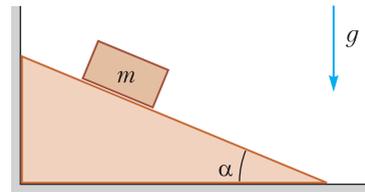


Рис. 8

циент трения между грузом и поверхностью клина μ , трения между полом и клином нет. Возможные ответы:

- A. $F = mg \cos \alpha$;
 B. $F = mg \cos \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$;
 C. $F = mg \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$;
 D. $F = mg \cos \alpha (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$.

Предупредим читателя сразу: среди этих ответов верного нет. Попробуйте видоизменить и дополнить один из предложенных ответов так, чтобы он стал верным.

Литература

1. А.Пайс. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1989.
 2. Л.Тарасов. Симметрия в задачах по физике. – «Квант», 1978, №6.
 3. Р.Мишч. Как проверить ответ. – «Квант», 1970, №12.
 4. Г.Меледин. Можно ли проверить ответ? – «Квант», 1979, №7.

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Математика

Заключительный этап олимпиады

Вариант 1

(5–9 классы)

1 (5–9). На цветочном рынке Маша купила 156 хризантем, 312 тюльпанов и 390 роз. Какое наибольшее количество одинаковых букетов сможет составить Маша из этих цветов, чтобы все цветы были полностью израсходованы? (Букеты считаются одинаковыми, если в каждом из них одинаковое число цветов каждого наименования.)

2 (5–6). Аня и Таня договорились пойти в кино на новый фильм про Гарри Поттера. Аня собирается прийти за 10 минут до начала сеанса, чтобы спокойно занять места. Таня решила прийти через 5 минут после начала сеанса, чтобы пропустить рекламу, которую показывают перед фильмом. Аня думает, что ее часы спешат на 15 минут, хотя на самом деле они отстают на 10 минут. Таня думает, что ее часы отстают на 5 минут, хотя они на самом деле спешат на 15 минут. Кто из девочек придет первой и сколько времени будет ждать подругу?

3 (5–8). При записи даты 20.04.24 по два раза использованы цифры «0», «2» и «4». Когда наступит ближайшая после 20.04.24 дата, для записи которой используются три различные цифры, причем каждая – ровно по 2 раза? Считаем, что дата записывается в формате ДД.ММ.ГГ, а если число меньше 10, то к нему слева приписываем «0», например, 04.02.24.

4 (5–8). Будем называть палиндромом натуральное число, которое слева направо и справа налево читается одинаково. Например, 11, 323 и 4224 – палиндромы, а 2024 – нет. Существуют ли два палиндрома: один двузначный, другой трехзначный, дающие в сумме четырехзначный палиндром?

5 (5–9). В шахматном кружке провели турнир – каждый сыграл с каждым по одной партии. Оказалось, что для любой тройки

участников среди результатов их взаимных партий найдется хотя бы одна ничья и хотя бы одна игра, в которой есть победитель. Какое наибольшее число игроков могло участвовать в турнире?

6 (5–9). Империя Горных гномов состоит из семи королевств, в каждом из королевств гномы добывают золото и алмазы. Верно ли, что всегда можно выбрать такие четыре королевства, которые производят не менее 50% золота и не менее 50% алмазов (от общего производства в империи)?

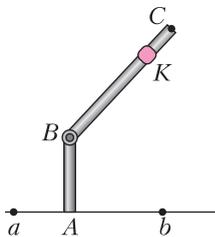
7 (7–9). В выпуклом 2024-угольнике длины всех диагоналей не превосходят 1. Какое наибольшее количество сторон длины 1 может быть в этом 2024-угольнике? (Напомним, что выпуклым называется многоугольник, все точки которого лежат по одну сторону от любой прямой, проходящей через две его соседние вершины.)

8 (9). Сколько существует различных квадратных трехчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p, q , для которых выполнены два условия:

- $f(2023) = 2025^{24}$;
- уравнение $f(x) = 0$ имеет целый корень.

9 (9). Красящий стену робот-маляр представляет собой механизм из трех деталей (см. рисунок, все детали расположены в плоскости стены):

- штанга AB длиной l перпендикулярна полу и может ездить от точки a до точки b (расстояние между a и b равно $2l$; прямая ab – граница стены и пола);
- штанга BC длиной $2l$ свободно поворачивается в плоскости стены относительно шарнира B ;
- по штанге BC ползает красящая насадка K .



Какую площадь стены сможет покрасить этот робот?

Вариант 2*(10–11 классы)*

1 (10, 11). На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 4 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2 (10). На бумажном правильном треугольнике со стороной 45 отметили 2023 красных точек. Можно ли на этом треугольнике разместить два правильных треугольника со стороной 1, не имеющих общих внутренних точек, так, чтобы внутри каждого из них не было ни одной красной точки?

3 (10, 11). Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x - 2| - |3x - 4| + 5$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x+3) - 6 \leq f(x) \text{ и } f(x+2) - 4 \geq f(x).$$

4 (11). Решите уравнение

$$36 \cos(x + \cos x) \cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}$.

5 (10, 11). В остроугольном треугольнике PVG обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников OHP и OHV равны 15 и 8 соответственно. Найдите площадь треугольника OHG .

6 (11). Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B , а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A , B и C , а сумма ее координат равна (-2023) . Найдите минимально возможную при данных условиях длину отрезка AB .

7 (10, 11). Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{tg} a] - 1|^x = [\operatorname{tg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение. Здесь $[t]$ – целая часть числа t .

*Публикацию подготовили Д.Алексеев,
А.Зеленский, А.Козко*

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Профильный экзамен по физике

В 2024 году профильный экзамен – дополнительное вступительное испытание по физике в МГУ – проводился в дистанционном формате на портале <https://exam.distant.msu.ru/>. Для участия в экзамене предъявлялись следующие технические требования к рабочему месту испытуемого. 1) Наличие ноутбука (желательно), персонального компьютера, смартфона или планшета со стабильным интернет-соединением (без прерываний на протяжении испытания и с минимальной скоростью от 5 Мбит/с). 2) При подключении

к видеоконференции с помощью смартфона или планшета любого типа для получения задания обязательно использование второго устройства, например компьютера, иного смартфона/планшета. 3) Необходимо также наличие браузера Google Chrome или Mozilla Firefox последних версий и сканирующего или фотографирующего устройства для сканирования или фотографирования экзаменационной работы с последующей загрузкой на портал экзамена.

Типовое задание по физике охватывало три основных раздела программы для поступаю-

ших в МГУ: механику; молекулярную физику и термодинамику; электродинамику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось три астрономических часа.

Механика

1. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Задача. Шайба, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатую наклонную плоскость, которая составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Шайба проходит вверх по наклонной плоскости расстояние $l = 12$ м за время $\tau = 2$ с, после чего останавливается и соскальзывает вниз. Определите скорость шайбы v_1 после того, как она снова окажется на горизонтальной поверхности. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ выразите в м/с и округлите до целых.

2. Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний. Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Задача. Гладкая наклонная плоскость образует угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. На плоскости лежит доска массой $M = 800$ г, нижний конец которой упирается торцом в легкую пружину жесткостью $k = 10$ Н/м, закрепленную у основания наклонной плоскости (рис. 1). На доске находится кубик массой $m = 200$ г.

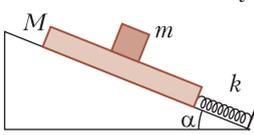


Рис. 1

Доску плавно смещают вниз вдоль наклонной плоскости, сжимая пружину, и отпускают с нулевой начальной скоростью. Найдите максимальное смещение доски, при котором кубик не будет скользить по доске во время возникших в системе колебаний. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Коэффициент трения между доской и кубиком $\mu = 0,75$.

Молекулярная физика и термодинамика

1. Дайте определение внутренней энергии термодинамической системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внут-

ренней энергии. Сформулируйте первый закон термодинамики.

Задача. Идеальный одноатомный газ, взятый в количестве $\nu = 1$ моль, используется в качестве рабочего тела в цикле тепловой машины, pV -диаграмма которого изображена на рисунке 2. В процессе $1 - 2$ объем газа возрастает в $n = 2$ раза, а в процессе $2 - 3$ объем дополнительно возрастает еще в $k = 3$ раза.

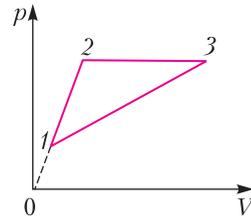


Рис. 2

Найдите коэффициент полезного действия (КПД) этой тепловой машины.

2. Дайте определение идеального газа. Запишите уравнение состояния идеального газа, указав смысл входящих в это уравнение величин.

Задача. С одноатомным идеальным газом проводят процесс, в котором внутренняя энергия газа пропорциональна квадрату объема, занимаемого газом. Каково изменение ΔU внутренней энергии газа, если газу сообщили количество теплоты $Q = 20$ Дж?

Электродинамика

1. Действие магнитного поля на проводник с током. Сила Ампера.

Задача. Три одинаковые заряженные частицы в некоторый момент времени оказываются в вершинах равностороннего треугольника со стороной $l = 28$ см и летят с одинаковыми по модулю скоростями к центру этого треугольника. При уменьшении расстояния между соседними частицами в два раза скорости также уменьшились в два раза. До какого наименьшего расстояния сблизятся частицы? Ответ дайте в см, округлив до целых.

2. Что такое емкость? Чему равна емкость плоского конденсатора?

Задача. Два незаряженных конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ подключают последовательно к источнику с напряжением $U = 10$ В. После зарядки конденсатор емкостью C_1 отключают от схемы и, не разряжая его, вновь подключают к схеме, перевернув на 180° . Определите заряд конденсатора емкостью C_2 через большой промежуток времени после переключения.

Публикацию подготовил С. Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №8)

1. Можно (рис. 1).

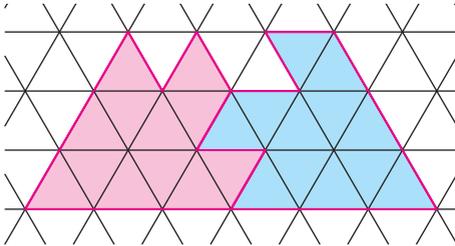


Рис. 1

2. Пусть основания перпендикуляров из H на BC и из K на AC – это точки P и Q соответственно (рис. 2). Тогда BPH – прямоугольный треугольник с катетом HP , который вдвое меньше гипотенузы BH . Значит, $\angle HBP = 30^\circ$, тогда $\angle BSA = 60^\circ$.

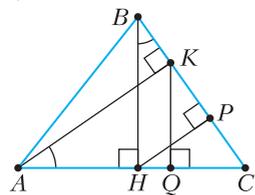


Рис. 2

Из прямоугольного треугольника KAC получим, что $\angle KAQ = 30^\circ$.

Следовательно, в прямоугольном треугольнике AKQ катет KQ вдвое меньше гипотенузы AK . Отметим, что

для тупоугольного треугольника утверждение остается верным и рассуждения аналогичны.

3. Не может.

Если у каждого шарика ровно один сосед отличного от него цвета, то у крайних шариков соседи отличаются от них по цвету. В свою очередь, у каждого из этих соседей с другой стороны лежит шарик одного с ним цвета. Продолжая рассуждение, получим, что все шарики, кроме крайних, разбиваются на пары соседних одноцветных. Тогда всего шариков должно быть четное количество, однако их $22 + 23 + 24 = 69$.

Противоречие.

4. Может.

Будем говорить, что проверка дает равенство, если сумма скрытых чисел на карточках равна сумме их номеров, и неравенство в противном случае. Первый вопрос мудрец задает про карточки 1, 2, 3, 4. Возможны два исхода.

1) Если неравенство, то на обратной стороне ровно одной из карточек 1, 2, 3, 4 записано неправильное число. Тогда мудрец спрашивает про карточки 1, 2 и узнает, в какой паре (1, 2) или (3, 4) эта карточка, а потом спрашивает про любую одну карточку из этой пары. Так он узнает одну из перепутанных карточек, а какая вторая – поймет по разности между названной суммой и суммой номеров карточек из первой проверки.

2) Если равенство, то перепутанные карточки находятся либо в наборе (1, 2, 3, 4), либо в наборе (5, 6, 7, 8, 9). Тогда мудрец спрашивает про карточки 1, 4, 5, 7, 9. Сумма номеров этих карточек равна 26. Рассмотрим оба возможных исхода.

2.1) Если неравенство, то посмотрим на разность между результатом и 26. Если она равна 1, то перепутанными могут быть пары (1, 2), (5, 6) или (7, 8), если она равна 2, то перепутаны (1, 3), если она равна 3, то перепутаны (5, 8), если -3 , то (6, 9), если -2 , то (2, 4), если -1 , то (3, 4), (6, 7) или (8, 9). Несколько вариантов есть только в двух случаях, когда разность равна 1 или -1 . В каждом из них три подозрительные пары. Для третьего вопроса мудрец выбирает две карточки, номера которых равны меньшему числу из одной пары и большему числу из другой. Если сумма окажется на 1 больше, чем сумма номеров выбранных карточек, то перепутана первая пара, если на 1 меньше, то вторая, а если равна, то третья.

2.2) Если равенство, то перепутанная пара находится в одном из наборов (1, 4), (2, 3), (5, 7, 9) или (6, 8). Мудрец спрашивает про карточки 1, 2, 6, 9 и смотрит на разность между результатом и 18. Если эта разность равна 0, то искомая пара (5, 7), если 1, то (2, 3), если 2, то (6, 8), если 3, то (1, 4), если -4 , то (5, 9), если -2 , то (7, 9).

Избранные задачи XXIX Турнира имени А.П.Савина

1. Обозначим синее число через x , красное – через y , а любимое число Пети – через n . Тогда $\text{НОД}(x, n) + y = \text{НОК}(y, n) + x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{НОД}(x, n) - x = \text{НОК}(y, n) - y.$$

В полученном равенстве левая часть не больше нуля, а правая – не меньше нуля. Поэтому они обе равны нулю, что возможно, только когда n делится на x , а y – на n . Следовательно, y делится на x .

2. а) Можно; б) можно.

а) Назовем один из узлов решетки *центром*, а проходящие через него линии сетки – *осями*. Раскрасим оси в разные цвета. Они делят плоскость на четыре части. В каждой из них разобьем стороны клеток на «лесенки», как показано на рисунке 3, и раскрасим их так, чтобы в каждой части цвета «лесенок» чередовались, а «лесенки», соприкасающиеся на осях, были разных цветов. Тогда через каждый узел проходят «лесенки» обоих цветов. Поэтому для любого цвета по соответствующей «лесенке» можно пройти до оси того же цвета, а по ней – до центра. Следовательно, между каждыми двумя узлами решетки есть пути обоих цветов.

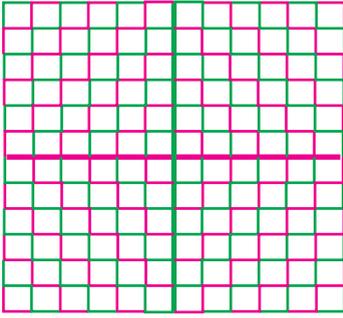


Рис. 3

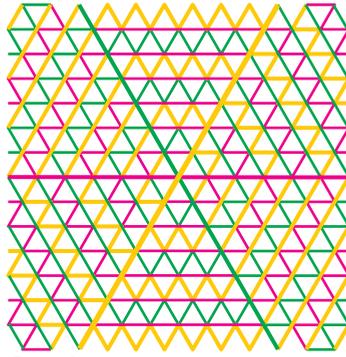


Рис. 4

б) Будем красить стороны треугольников в красный, желтый и зеленый цвета. Назовем один из узлов решетки *центром*, а проходящие через него линии сетки – *осями*. Раскрасим оси в разные цвета. Они делят плоскость на шесть частей. Рассмотрим одну из них, ограниченную красной и желтой осями. Отрезки внутри нее, параллельные зеленой оси, раскрасим в зеленый цвет. Остальные отрезки разобьем на «зигзаги», заключенные между двумя зелеными отрезками, и раскрасим эти «зигзаги» поочередно в красный и желтый цвета (рис. 4). Аналогично раскрасим стороны треугольников внутри других частей.

Рассмотрим произвольный узел внутри той же части. Через него проходят красный и желтый «зигзаги», по ним можно дойти как до красной, так и до желтой оси. А по зеленому отрезку, проходящему через этот узел, можно дойти до одной из соседних осей и перейти на зеленый «зигзаг», по которому затем добраться до зеленой оси. Далее по оси, на которой находимся, можно дойти до центра. Аналогичные рассуждения применимы и к узлам, находящимся на осях. Следовательно, между каждыми двумя узлами решетки есть пути всех трех цветов.

3. 99 мудрецов.

Оценка. Самый старший мудрец не может гарантированно назвать свое число.

Алгоритм. Каждые два мудреца, сидящие напротив друг друга, не видят одну и ту же пару чисел. Будем называть *маленьким* того из них, у которого число меньше, а второго – *большим*. Самый старший мудрец может подсчитать, сколько маленьких людей среди 49 сидящих после него по часовой стрелке. Если это количество окажется нечетным, то он назовет меньшее из двух чисел, которые не видит, а если четным – большее. Так как каждый из этих 49 мудрецов тоже знает, сколько маленьких среди остальных 48, то он поймет, какое число на его колпаке, и сможет назвать его. Мудрецы, сидящие напротив них, также назовут свои числа. А мудрец, напротиво-

ложный самому старшему, может назвать то же число, которое назовет тот, тогда ровно один из них назовет число на своем колпаке.

4. Может.

Поделив равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$ на 60^2 , получим $\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}$. Поделим полученное равенство еще на 2^2 : $\frac{1}{40^2} + \frac{1}{30^2} = \frac{1}{24^2}$. Если сложить эти два равенства, то в левой части будет четыре слагаемых, каждое из которых является об-

ратным к точному квадрату, а в правой части – два слагаемых. Нам нужно получить по пять таких слагаемых с каждой стороны, поэтому возьмем какое-нибудь равенство, в котором точный квадрат равен сумме трех квадратов, например $7^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2$. Поделим его на 42^2 и полученное равенство $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{21^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{7^2}$ добавим к двум предыдущим. Упорядочив слагаемые в обеих частях, получим

$$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2} = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{24^2}.$$

5. Могут.

Из пяти карт, которые зритель даст ассистенту, хотя бы две будут одной масти. Их ассистент выложит в порядке возрастания достоинств, и именно их фокусник будет угадывать. Всего таких пар $4 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 312$, фокусник с ассистентом могут пронумеровать их заранее. Осталось договориться, как с помощью остальных трех карт передать фокуснику число от 1 до 312. Все 52 карты они тоже могут заранее пронумеровать. Та карта, которую ассистент будет открывать первой, может занимать любое из пяти возможных мест в ряду, вторая – любое из четырех, а третья – любое из трех оставшихся. При этом порядок их номеров относительно друг друга может быть любым из $3! = 6$. Таким образом, ассистент может своими действиями сообщить фокуснику любое число от 1 до $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 360$ – этого достаточно, чтобы угадать одну из 312 возможных пар.

6. При n , кратных 4, и при n , дающих остаток 1 при делении на 4.

Пусть таблица заполнена требуемым образом. Пронумеруем столбцы числами от 1 до n слева направо, а строки – снизу вверх. Рассмотрим клетки, в которых записаны точные квадраты, их ровно n . Так как они находятся в разных строках и в разных столбцах, то сумма их координат равна $2 \cdot (1 + 2 + \dots + n)$, т.е. она четна.

Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке так, чтобы левая нижняя клетка была черной. Тогда сумма координат каждой белой клетки нечетна, а каждой черной – четна. Из сказанного выше следует, что в белых клетках находится четное количество точных квадратов. При этом числа одинаковой четности записаны в клетках одного цвета. Если n нечетно, то черных клеток на одну больше, чем белых, поэтому черные клетки заполнены нечетными числами, а белые – четными. А если n четно, то нумерация может начинаться с клетки любого цвета. Но если она начинается с белой клетки, то можно рассмотреть симметричную расстановку чисел, в которой нумерация начинается с черной. Таким образом, в любом случае количество четных точных квадратов среди чисел от 1 до n^2 четно. Это верно только для n , кратных 4 и дающих остаток 1 при делении на 4. Теперь докажем, что при всех указанных значениях n требуемая расстановка существует, причем такая, что число n^2 находится в угловой клетке. Для $n = 1$ это очевидно, для $n = 4$ пример приведен на рисунке 5. На рисунке 6 показана

5	6	15	16
4	7	14	13
3	8	9	12
2	1	10	11

Рис. 5

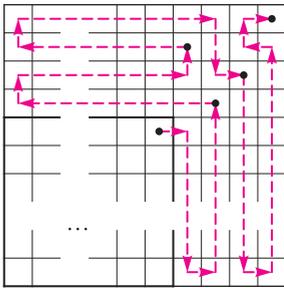


Рис. 6

схема, как из заполненной таблицы $n \times n$ получить расстановку для таблицы $(n + 4) \times (n + 4)$. Несложно проверить, что первый переход между отмеченными клетками имеет длину $2n + 1$, второй $2n + 3$, третий $2n + 5$, а четвертый $2n + 7$. Поэтому после числа n^2 в них записаны $(n + 1)^2$, $(n + 2)^2$, $(n + 3)^2$ и $(n + 4)^2$, при этом все они стоят в разных строках и в разных столбцах, а последнее число снова находится в угловой клетке.

7. Долетит.

Обозначим расстояние от стартовой точки до полюса через s км. Будем делить время, которое Федор Конохов проводит в пути, на 15-минутные периоды. В конце n -го периода скорость воздушного шара равна $\frac{s}{60 + 15n}$ км/мин, а так как скорость постоянно уменьшается, то в течение этого периода Федор пролетает больше чем $\frac{15s}{60 + 15n} = \frac{s}{4 + n}$ км. Значит, за 2 часа он пролетел

бы более $s \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)$ км. Докажем, что выражение в скобках больше 1, из этого будет следовать, что Конохов долетит до полюса быстрее чем за 2 часа. Будем группировать слагаемые, равноудаленные от краев:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} =$$

$$= 17 \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{66} + \frac{1}{70} + \frac{1}{72} \right) = 17 \cdot \left(\frac{11}{360} + \frac{68}{2 \cdot 33 \cdot 35} \right) =$$

$$= \frac{187}{360} + \frac{34^2}{2 \cdot (34^2 - 1)} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

8. Пусть ABC – данный треугольник. Покажем, как с помощью одной линейки построить его высоту CH .

- 1) Проведем прямые AO и BO , они повторно пересекут окружность в точках A' и B' .
- 2) Прямая $A'B'$ пересекает стороны AC и BC в точках K и L (именно стороны, а не их продолжения, поскольку треугольник ABC остроугольный). Так как прямая $A'B'$ параллельна AB , то $ABLK$ – трапеция.
- 3) Диагонали AL и BK трапеции $ABLK$ пересекаются в точке D . Если прямая CD пересекает AB в точке M , то по свойству трапеции M – середина стороны AB .
- 4) Пусть прямая CO повторно пересекает окружность в точке P . Проведем прямую BP , она пересечет прямую OM в точке N . Так как OM – серединный перпендикуляр к отрезку AB , то прямая AN пересечет окружность в точке Q , симметричной P относительно прямой OM .
- 5) Дуги AQ и BP равны, поэтому

$$\angle ACQ = \angle BCP = 90^\circ - \angle BPC = 90^\circ - \angle BAC,$$

а значит, прямая CQ перпендикулярна AB и содержит высоту CH треугольника.

9. Не может.

Предположим, что получилось по N треугольников каждого типа. Будем рассматривать полуценную картинку как красный и синий графы. Пронумеруем вершины числами от 1 до 50 и пусть d_1, d_2, \dots, d_{50} – степени вершин красного графа. Тогда в i -й вершине сходится $\frac{d_i(d_i - 1)}{2}$ пар красных ребер и $d_i(49 - d_i)$ пар ребер разного цвета. При этом каждая пара входит ровно в один треугольник.

Заметим, что треугольник с двумя красными сторонами содержит одну пару красных ребер, с тремя красными сторонами – три такие пары, а треугольники остальных типов не содержат пар красных ребер, поэтому $\sum_{i=1}^{50} \frac{d_i(d_i - 1)}{2} = 4N$. Пары ребер разного цвета есть только в треугольниках

с одной и с двумя красными сторонами, причем каждый такой треугольник содержит по две разноцветные пары, значит, $\sum_{i=1}^{50} d_i (49 - d_i) = 4N$. Первое равенство преобразуется к виду $\sum_{i=1}^{50} d_i^2 - \sum_{i=1}^{50} d_i = 8N$, а второе – к $49 \sum_{i=1}^{50} d_i - \sum_{i=1}^{50} d_i^2 = 4N$. Сложив полученные равенства, получим $48 \sum_{i=1}^{50} d_i = 12N$.

Аналогично можно доказать, что такое же равенство верно для суммы степеней вершин синего графа. Следовательно, в красном и синем графах поровну ребер, однако общее число ребер равно $\frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49$, т.е. оно нечетно. Противоречие.

10. Пусть в верхней строке записаны числа a_1, a_2, a_3 , а во второй строке – b_1, b_2, b_3 . Возьмем точный квадрат m^2 , не меньший, чем все числа верхней строки. Посмотрим на разности $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$. Если все они одной четности, то прибавим к числам второй строки такое число, чтобы эти разности стали нечетными и не меньше $2m + 1$. Если две из этих разностей одной четности, а третья отличается от них, то увеличим числа второй строки так, чтобы две рассматриваемые разности стали нечетными и не меньше $2m + 1$, а третья делилась на 4 и была не меньше $4m + 4$. Теперь если какая-то разность $b_i - a_i$ равна нечетному числу $2n + 1$, где $n \geq m$, то прибавим к числам i -го столбца такое число, чтобы a_i и b_i стали равны n^2 и $(n + 1)^2$ соответственно. А если разность $b_i - a_i$ равна кратному 4 числу $4n + 4$, где $n \geq m$, то увеличим числа i -го столбца так, чтобы a_i и b_i стали равны n^2 и $(n + 2)^2$ соответственно. В результате мы получим таблицу, в которой все числа в двух верхних строках являются точными квадратами. После этого можно увеличить числа в нижней строке так, чтобы получить еще один точный квадрат.

11. а) Могут; б) не могут.

а) Пример показан на рисунке 7. Влиятельные страны закрашены, их 12, а всего на континенте 44 страны.

б) Пусть всего есть n стран, из них k влиятельных. Выберем любую влиятельную страну и обойдем по кругу ее контур. На нем есть не менее десяти отрезков, каждый из которых является границей с другой страной. У этих отрезков не меньше десяти концов, хотя бы шесть из них не совпадают с вершинами страны, а лежат на ее сторонах. К таким точкам примыкают два угла других стран, отметим их. Всего будет

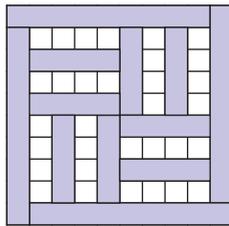


Рис. 7

отмечено не менее $12k$ углов. При этом каждый из $4n$ углов может быть отмечен не более одного раза, а углы континента отмечены не будут. Следовательно, $12k < 4n$, откуда $\frac{k}{n} < \frac{1}{3}$, т.е. влиятельных стран меньше трети.

Замечание. Улучшить оценку п. б) нельзя. На рисунке 8 показано, как можно разбить плос-

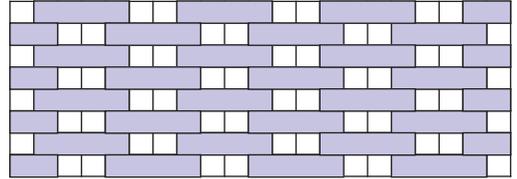


Рис. 8

кость на страны, среди которых ровно треть влиятельных. Если вырезать достаточно большой квадрат, то можно получить континент, на котором доля влиятельных стран будет сколь угодно близка к $\frac{1}{3}$.

12. Не сможет.

Предположим, что существует алгоритм, гарантирующий выполнение такого фокуса. Винтику может достаться одна из $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ пар чисел, а выложить он может одно из шести чисел. Значит, какое-то число он должен выкладывать хотя бы в трех случаях. Пусть это число 1 и алгоритм предписывает выложить его, если Винтику досталась одна из пар (1, 2), (1, 3) или (1, 4). В каждом из этих случаев остальные карточки могут быть распределены между Шпунтиком и Пончиком ($\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$)-ю способами, поэтому число 1, выложенное Винтиком, соответствует не менее чем 18 вариантам. Более того, Винтик не может выкладывать число 1 в других случаях, иначе получилось бы не менее 24 вариантов. Однако Шпунтик может выложить одно из пяти оставшихся чисел, а затем Пончик – одно из четырех, поэтому всего есть 20 комбинаций, начинающихся с числа 1.

Если Шпунтику досталась одна из пар (2, 3), (2, 4) или (3, 4), а Пончику – (5, 6), то Шпунтик обязан в этих случаях выкладывать разные числа, иначе Пончик не сможет различить какие-то два варианта. Таким образом, уже есть по одной комбинации, в которых второе выложенное число равно 2, 3 и 4.

Теперь посмотрим, что должен делать Шпунтик, если ему досталась пара (2, 5) или (2, 6). Каждый из этих вариантов возможен, когда у Винтика карточки (1, 3) или (1, 4). Алгоритм не может предписывать Шпунтику выкладывать в обоих случаях число 2, иначе это число встречалось бы в пяти комбинациях, а у Пончика есть всего

четыре варианта, какое число выложить. Значит, Шпунтик выкладывает число 2 максимум в одном из случаев, поэтому это число встречается не более чем в трех комбинациях. Аналогично для чисел 3 и 4. Но тогда ассистенты могут передать Незнайке не более $3 + 3 + 3 + 4 + 4 = 17$ вариантов, а нужно 18. Противоречие.

13. При $N = 15$.

Оценка. При $N \leq 14$ построим граф, в котором вершины соответствуют беглецам, а ребра соединяют двух беглецов, если они могут плыть вместе. Заметим, что полученный граф является двудольным. Действительно, на рисунке 9 показан граф

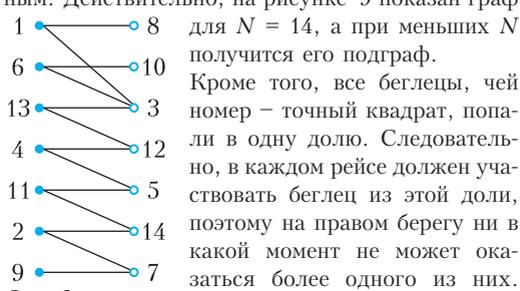


Рис. 9

большее одного человека, поэтому все переправиться на правый берег не смогут.

Алгоритм. При $N = 15$ покажем, как можно переправить на правый берег двух беглецов с номерами x и y , сумма которых – точный квадрат. Изобразим алгоритм в виде схемы, в которой стрелки показывают направление движения: $(1, 15) \rightarrow, 1 \leftarrow, (6, 10) \rightarrow, (10, 15) \leftarrow, (1, 3) \rightarrow, (3, 6) \leftarrow, (x, y) \rightarrow, 1 \leftarrow$.

Так можно последовательно переправить на правый берег пары $(2, 14), (4, 12), (5, 11), (7, 9), (3, 13)$. После этого на левом берегу останутся беглецы с номерами 1, 6, 8, 10, 15, которые могут переправиться на правый берег следующим образом:

$(1, 8) \rightarrow, 1 \leftarrow, (6, 10) \rightarrow, (3, 6) \leftarrow, (1, 15) \rightarrow, (10, 15) \leftarrow, (6, 10) \rightarrow, 1 \leftarrow, (1, 3) \rightarrow, 1 \leftarrow, (1, 15) \rightarrow$.

14. Углы PA_1A и PBA вписаны в окружность Ω и опираются на одну дугу (рис. 10). В силу

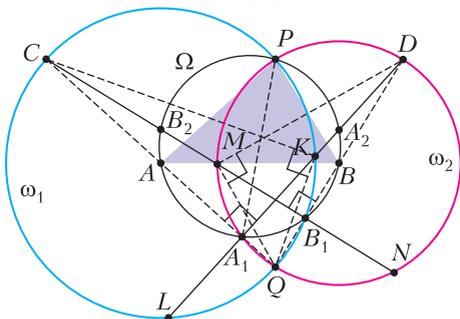


Рис. 10

симметрии угол PBA составляет половину угла PBQ , который является центральным в окружности ω_2 и опирается на дугу PQ . А угол PA_1Q вписан в ту же окружность и опирается на дугу, дополняющую ее до полной окружности. Из вышесказанного следует, что

$$\angle PA_1A = \angle PBA = \frac{1}{2} \angle PBQ = 180^\circ - \angle PA_1Q,$$

поэтому точки A, A_1 и Q лежат на одной прямой. Аналогично, точки B, B_1 и Q лежат на одной прямой.

Продлим прямые QA и QB до пересечения с окружностями ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Так как QC и BB_2 – диаметры окружностей ω_1 и Ω , то $\angle QB_1C = \angle BB_1B_2 = 90^\circ$, т.е. точка C лежит на прямой B_1B_2 . Аналогично, точка D лежит на прямой A_1A_2 .

Угол QKC прямой как вписанный в окружность ω_1 и опирающийся на ее диаметр. Прямоугольные треугольники QA_1K и QKC подобны, поскольку у них общий острый угол. Значит, $\frac{QA_1}{QK} = \frac{QK}{QC}$, откуда $QK^2 = QA_1 \cdot QC$. Аналогично, $QM^2 = QB_1 \cdot QD$. Так как прямоугольные треуголь-

ники QA_1D и QB_1C тоже подобны, то $\frac{QA_1}{QB_1} = \frac{QD}{QC}$.

Следовательно, $QA_1 \cdot QC = QB_1 \cdot QD$ и $QK = QM$. Осталось заметить, что точки L и N симметричны точкам K и M относительно прямых QC и QD соответственно. Поэтому точки K, L, M, N равноудалены от точки Q , а значит, лежат на одной окружности с центром в этой точке.

15. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-1)!+k!} &= \frac{1}{(k-1)!(k+1)} = \\ &= \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-1)!+k!} + \frac{1}{k!+(k+1)!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!+n!} &= \\ &= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Теперь перегруппируем слагаемые в левой части неравенства из условия:

$$\begin{aligned} &1! \left(\frac{1}{0!+1!} + \frac{1}{1!+2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!+n!} \right) + \\ &+ 2! \left(\frac{1}{1!+2!} + \frac{1}{2!+3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!+n!} \right) + \dots \\ &\dots + n! \frac{1}{(n-1)!+n!} < 1! \frac{1}{1!} + 2! \frac{1}{2!} + \dots + n! \frac{1}{n!} = n. \end{aligned}$$

Как найти ошибку

Верные ответы

1. **D.** 2. **B.** 3. **D.** 4. **C.** 5. **A.** 6. **B.** 7. $F = mg \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ при $\operatorname{tg} \alpha > \mu$; $F = 0$ при $\operatorname{tg} \mu \leq \mu$.

Указания

1. **A.** Симметрия. **B.** Размерность. **C.** Частный случай: $v_1 = v_2 = v_3$.
 2. **A.** Частный случай: $\rho_1 = \rho_2$. **C.** Размерность. **D.** Частный случай: $\rho_1 = \rho_2$.
 3. **A.** Частный случай: $v_1 = 0$. **B.** Размерность. **C.** Частный случай: $v_1 = 0$.
 4. **A.** Симметрия. **B.** Размерность. **D.** Частный случай: исследуем уменьшение α до нуля. При $\alpha = 0$ тело может двигаться равномерно только в случае отсутствия трения: $\mu = 0$. Эта подстановка в ответ **D** дает нулевое время соскальзывания. Масса в условии – избыточное данное.
 5. **B.** Размерность. **C.** Симметрия. **D.** Частный случай: $p_1 = p_2$, $V_1 = V_2$, $T_1 = T_2$.
 6. **A.** Частный случай: $R_1 = 0$. **C.** Частный случай: $(R_3 + r)(R_1 + R_2) - R_1 R_2 = 0$. **D.** Размерность.
 7. Подсказка: в ответе должен быть отражен тот факт, что в задаче возможны два случая – движение и покой.

Заключительный этап I Всероссийской олимпиады школьников по математике

(см. «Квант» №7, 8)

10 класс

4. Следующее короткое решение было найдено на самой олимпиаде – его придумали трое участников: Петр Ким, Роман Прозоров, Артем Шекера. Все трое получили награду «За изящное геометрическое решение трудной задачи 10.4». Нетрудно показать, что $XZ = TY$ (например, используя теорему Менелая). Пусть M , N , K – середины AC (и ZE), BD (и TE), XY (и ZT) соответственно. Пусть $F = AB \cap CD$. Из прямоугольного треугольника XFY имеем $FK = XY/2$. Далее, KMN – серединный треугольник для треугольника EZT . Легкий счет углов (с использованием медианы прямоугольного треугольника) дает

$$\angle MFN = 180^\circ - \angle MEN = 180^\circ - \angle MKN.$$

Значит, точки M , K , N , F лежат на одной окружности, тогда FK – хорда окружности (MKN). Отсюда $XY/2 = KF \leq 2R_{MKN} = R_{ETZ}$, что завершает решение.

7. Предположим, что утверждение задачи для некоторых x_1 , x_2 , y_1 , y_2 неверно:

$(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \geq x_1 x_2$ и при этом условии сумма $y_1 + y_2$ – минимальная возможная. Без ограничения общности тогда $y_1 - x_1 \geq x_1$. Возьмем x_1 -й слева белый отрезок W и $(y_2 - x_2)$ -й слева черный отрезок B . У какого-то из них правый конец левее.

1) Пусть правый конец W левее (или концы совпадают). Тогда правые x_2 черных отрезков не пересекаются с левыми x_1 белыми. Противоречие.

2) Пусть правый конец B левее. Выкинем все белые отрезки слева от W (включая его) и все черные отрезки слева от B (включая его). Оставшиеся белые отрезки (их хотя бы x_1) не пересекаются с выкинутыми $y_2 - x_2$ черными; отсюда уже следует, что $y_2 - x_2 < x_2$.

Положим $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1 - x_1 \geq x'_1$, $x'_2 = x_2 - (y_2 - x_2)$ и $y'_2 = y_2 - (y_2 - x_2) = x_2 \geq x'_2$; тогда осталось y'_1 белых и y'_2 черных отрезков. Рассмотрим любые x'_1 оставшихся белых и x'_2 оставшихся черных отрезков. Если среди них нет пересекающихся, то, добавив к ним все выкинутые черные отрезки, получим набор из $x_1 = x'_1$ белых и $x_2 = x'_2 + (y_2 - x_2)$ черных отрезков исходного набора, среди которых нет пересекающихся; это невозможно. Значит, оставшийся набор удовлетворяет условию (для новых чисел x'_1 , y'_1 , x'_2 и y'_2), при этом в нем меньше отрезков, чем в исходном, поэтому

$$0 < x'_1 x'_2 - (y'_1 - x'_1)(y'_2 - x'_2) =$$

$$= x_1(2x_2 - y_2) - (y_1 - 2x_1)(y_2 - x_2) =$$

$$= x_1 x_2 - (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \leq 0.$$

Противоречие.

Замечание. Отметим, что при $x_1 = x_2 = 1$ утверждение задачи превращается в двухцветную (одномерную) теорему Хелли.

8. Да.

Будем наращивать множество ситуаций, в которых Тая побеждает (т.е. сможет получить n равных чисел).

(1) Пусть у нас n нечетных чисел.

Тогда за одну операцию можно получить n двоек.

(2) Пусть никакая сумма двух соседних чисел не является степенью двойки.

Тогда за одну операцию можно получить ситуацию (1).

(3) Пусть среднее арифметическое s всех чисел не равно степени двойки.

Покажем, что сможем прийти к ситуации (2). Воспользуемся следующей леммой (докажите ее самостоятельно).

Лемма. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – вещественные числа, s – их среднее арифметическое. За один

ход меняем набор a_1, a_2, \dots, a_n на $\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_n + a_1}{2}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ через несколько ходов все числа будут лежать в интервале $(s - \varepsilon; s + \varepsilon)$.

Ясно, что $s > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы интервал $(s - \varepsilon; s + \varepsilon)$ целиком помещался между соседними степенями двойки: $2^{t-1} < s - \varepsilon < s + \varepsilon < 2^t$ для некоторого натурального t . Будем проводить много раз операцию замены пары соседей на их сумму. Тогда, согласно лемме, найдется N такое, что после N операций все числа будут лежать в интервале $(2^N(s - \varepsilon); 2^N(s + \varepsilon))$, а значит, в интервале между соседними степенями двойки $2^N \cdot 2^{t-1}$ и $2^N \cdot 2^t$. Следовательно, после $(N - 1)$ операций выполнялось условие (2).

(4) Пусть все числа не меньше 2.

Если мы не в ситуации (2), то найдется пара соседей a, b , сумма которых равна 2^t , где $t \geq 2$ – натуральное. Попробуем сделать следующую операцию произвольно, только a и b заменим на число 2. Пусть в такой попытке мы не пришли в ситуацию (3), т.е. получили ситуацию, в которой среднее арифметическое s равно степени двойки. Тогда сделаем другую попытку, в которой все пары меняются так же, только a и b заменяются на 4. По сравнению с первой попыткой s увеличилось на $\frac{2}{n}$, поэтому мы окажемся в ситуации (3).

(5) Пусть набор исходных чисел произвольный. Тогда после одной операции имеем ситуацию (4).

11 класс

1. Не могут.

2. Покажем, что тройка (a, b, c) – загадочная в том и только в том случае, когда $abc = 1$, из этого немедленно следует требуемое в задаче. Предположим, что $abc < 1$. Тогда $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} >$

$> \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$. Аналогично получим

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} > b + c \text{ и } \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} > c + a.$$

Итого, в этом случае левая часть равенства из условия больше правой. Рассуждая аналогично, в случае $abc > 1$ имеем, что правая часть больше левой, а в случае $abc = 1$ достигается равенство.

4. Без ограничения общности можно считать, что лучи AB и DC ; CB и DA пересекаются. Пусть

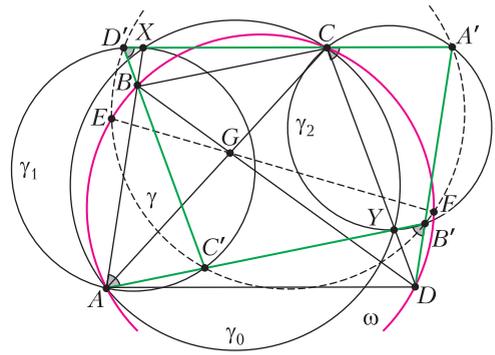


Рис. 11

отрезки AC и BD пересекаются в точке G , а также $A'B'C'D'$ – четырехугольник, образованный прямыми l_a, l_b, l_c, l_d (рис. 11). Также обозначим через X пересечение AB и CD' , через Y – пересечение CD и AB' .

Пусть $\angle B'AB = \alpha$. Из вписанности четырехугольника $A'B'C'D'$ и условий $AX \parallel l_d, CY \parallel l_b$ имеем $\alpha = \angle B'AX = 180^\circ - \angle A'B'C' = \angle C'D'X = \angle YCA'$. Значит, во-первых, точки A, D', X, C' лежат на одной окружности, обозначим ее γ_1 ; во-вторых, точки C, Y, A', B' лежат на одной окружности, обозначим ее γ_2 ; в-третьих, точки A, X, C, Y лежат на одной окружности, обозначим ее γ_0 . Заметим, что точка B – радикальный центр окружностей $\gamma, \gamma_0, \gamma_1$ (поскольку она лежит на прямых AX и $C'D'$); точка D – радикальный центр окружностей $\gamma, \gamma_0, \gamma_2$ (так как она лежит на прямых CY и $A'B'$). Таким образом, BD – радикальная ось окружностей γ_0 и γ , AC – радикальная ось окружностей γ_0 и ω , EF – радикальная ось окружностей ω и γ , поэтому эти три прямые пересекаются в одной точке.

6. Пусть прямая AH повторно пересекает окружность ω в точке D (рис. 12). Тогда прямая, проведенная по условию через O , – серединный перпендикуляр к хорде AD , пусть она пересекает стороны AB и AC в точках X и Y , а прямая

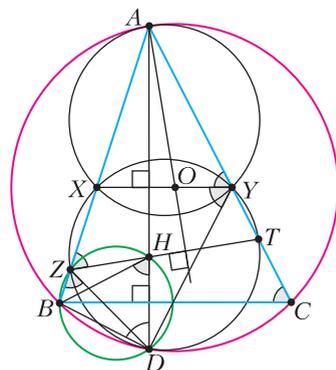


Рис. 12

через H из условия задачи пересекает их в точках Z и T . Поскольку $XY \parallel BC$, то окружность (AXY) касается окружности ω в точке A . При симметрии относительно XY окружность ω переходит в себя, а окружность (AXY) переходит в окружность (DXY) , тогда она тоже касается окружности ω .

Поскольку $ZH \perp AO$, то $\angle AZH = 90^\circ - \angle OAB = \angle ACB = \angle ADB$. Следовательно, четырехугольник $BZHD$ – вписанный. Тогда $\angle BZD = \angle BHD = 90^\circ - \angle HCB = \angle ACB$. Значит, в силу сказанного выше, $\angle XYD = \angle AYX = \angle ACB = \angle BZD$, поэтому точка Z лежит на окружности (DXY) . Аналогично, на этой окружности лежит и точка T , откуда и следует требуемое.

$$7. \frac{n(n-1)}{2(2n-3)}.$$

8. Все сравнения в этом решении производятся по модулю p . Если a и b – целые, причем b не делится на p , то через a/b обозначим тот единственный остаток c по модулю p , для которого $a \equiv bc$.

Пусть числа $1^0, 2^1, 3^2, \dots, k^{k-1}$ дают ровно d различных остатков при делении на p . Обозначим $t = \lfloor p/4 \rfloor$. Тогда выражения вида $f(a) = (2a)^{2a-1} / (a^{a-1})^2 = 2^{2a-1} a$ при $1 \leq a \leq t$ дают максимум d^2 различных остатков.

Назовем пару натуральных чисел (a, b) таких, что $1 \leq a < b \leq t$, *исключительной*, если $f(a) \equiv f(b)$. Покажем, что для каждого $\delta = 1, 2, \dots, t-1$ существует не более одной исключительной пары (a, b) , в которой $b - a = \delta$. Действительно, если (a, b) – такая пара, то из $2^{2a-1} a = 2^{2b-1} b$ вытекает, что $a/b \equiv 2^{2\delta}$, откуда $b = a + \delta \equiv 2^{2\delta} b + \delta$, или $b(1 - 2^{2\delta}) \equiv \delta$. Такой остаток b не более чем единственен (поскольку $\delta \neq 0$), а по нему восстанавливается a .

Итого, существует не более чем $t-1$ исключительных пар; обозначим их количество через S . Пусть числа $f(1), f(2), \dots, f(t)$ дают ровно l различных остатков по модулю p , встречающихся a_1, a_2, \dots, a_l раз соответственно. Тогда $\sum_{i=1}^l a_i = t$ и $S = \sum_{i=1}^l C_{a_i}^2$. Верна следующая цепочка неравенств:

$$t-1 \geq S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^l a_i^2 - \sum_{i=1}^l a_i \right) \geq \frac{t^2/l - t}{2},$$

откуда $l \geq t^2 / (3t - 2) > t/3$. Вспоминая, что $l \leq d^2$, получаем оценку $d > \sqrt{t/3} \geq \lfloor \sqrt{p/12} \rfloor$.

Таким образом, в качестве искомой константы c можно взять, например, число $1/24$: для про-

стых $p < 12$ неравенство $d > \frac{\sqrt{p}}{24}$ тривиально, а для $p > 12$ следует из неравенства $\lfloor x \rfloor \geq x/2$ при $x > 1$.

Трехслойный пирог из пентамино

На рисунке 13 приведено решение головоломки.



Рис. 13

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

Журнал «Квант» зарегистрирован

в Комитете РФ по печати.

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

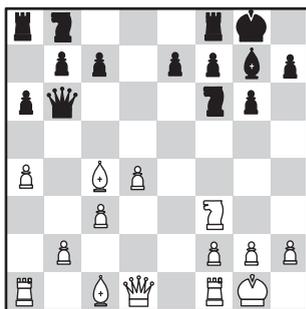
Тел.: (831) 218-40-40

Золотой ДУБЛЬ

Прошедшая в Венгрии 45-я Шахматная олимпиада завершилась двойным триумфом сборной Индии. Особенно отличилась мужская команда: индийские шахматисты проиграли всего одну партию из 44 и опередили ближайших преследователей на 4 очка. В ее составе наиболее впечатляюще выступил Арджун Эригайси – 10 очков, набранных в 11 турах, позволили ему подняться на третье место в текущем рейтинг-листе ФИДЕ.

Я.Субельи – А.Эригайси Будапешт, 2024

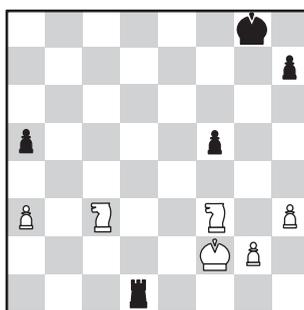
1. e4 d5 2. ed ♘d5 3. ♗c3 ♘d6 4. d4 ♗f6 5. ♗f3 g6 6. ♗b5 ♗b6 7. a4 a6 8. ♗a3 ♗e6 9. ♗c4 ♗c4 10. ♗c4 ♗g7 11. 0-0 0-0 12. c3?! (12. a5!? ♗c7 13. g3, подготавливая ♗f4).



12...c5! 13.a5 ♗c7 14. dc ♗c5 15. ♗d4?! Точнее 15. ♗b3. После размена ферзей у черных не будет проблем. 15...♗c8 16. ♗e5?! (16. ♗b3 или ♗c2, избегая образования изолированной пешки на d4) e6 17. ♗a4 ♗d4 18. cd ♗c6 19. ♗c6 ♗c6 20. ♗g5 ♗d8 21. ♗d1 ♗d7 22. ♗f1 ♗d5 23. ♗e2 h6 24. ♗e3 ♗e7 25. ♗d3 ♗cd6 26. ♗d2 f5! 27. ♗c4 g5 28. f4 g4 29. ♗b4. Белые согласны отдать пешку d4, компенсируя это активностью ладей. 29...♗d5 30. ♗d5 ♗d5 31. ♗b6! ♗f7 32. ♗d3! ♗e7 33. ♗db3 ♗d4 34. ♗d4?! Белые неверно оценили нюансы возникающего ладейного эндшпиля. После точ-

ного 34. ♗b7! ♗e3 35. ♗e3 ♗a5 36. h3 у белых явная компенсация за пешку. 34...♗d4 35. ♗b7 ♗e4+ 36. ♗d3 ♗f4 37. ♗e7+ ♗e7 38. ♗b7+? Решающая ошибка. Необходимо создать собственную проходную на линии «а» после 38. ♗b6 ♗f2 39. ♗a6 ♗b2. 38...♗f6 39.b4 ♗f2 40. ♗b6 ♗g2 41. ♗a6 ♗h2 42. ♗a8 ♗a2. Черных пешек больше, и они успевают раньше. 43. b5 g3 44. a6 h5 45. ♗e3 h4 46. ♗g8 h3 47. ♗g3 h2 48. ♗h3 ♗a3+ 49. ♗f4 e5, мат.

Д.Гукеш – Вэй И Будапешт, 2024

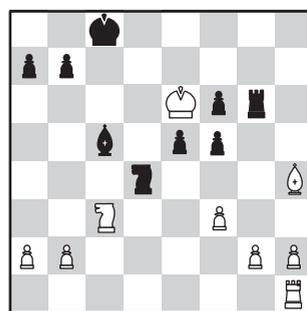


В результате сложной борьбы возник необычный эндшпиль, который теоретически ничеен, но играть проще белым, так как черные должны все время опасаться коневых вилок. 35...♗c1 36. ♗b5 ♗c2+ 37. ♗f1 ♗f7 38. ♗fd4 ♗c1+ 39. ♗e2 ♗f6 40. ♗d6 ♗c3 41. ♗6b5 ♗c1 42. ♗e3 ♗g1 43. ♗f2 ♗c1 44. ♗e2 ♗b1 45. ♗bc3 ♗b3 46. a4 ♗e5 47. g3 ♗b6 48. ♗e3 ♗b4 49. ♗d3 h6 50. ♗e3 ♗b3 51. ♗d3 ♗b4 52. ♗g1 ♗b8 53. ♗f3+ ♗f6 54. ♗d4 ♗d8 55. ♗e3 ♗c8 56. ♗d3 ♗d8 57. ♗ce2 ♗b8 58. ♗f4 ♗b1 59. ♗d5+ ♗e5 60. ♗c3 ♗h1 61. ♗f3+ ♗d6 62. h4 ♗h3! 63. ♗e2 f4 64. ♗f1 ♗h1 65. gf ♗h4 66. ♗f3 ♗h1 67. f5. Черные активно защищались, и пешка f – это последняя надежда белых на победу. 67...h5?! 68. ♗c3 h4 69. ♗e4+ ♗d7 70. ♗e5+ ♗d8 71.f6 h3? Решающая ошибка. Спасал этюдный вариант, который практически невозможно найти за доской: 71...♗d1+! 72. ♗e2 ♗d5! 73. ♗g6 ♗f5! 74. ♗h4 ♗f4 75. ♗g6

♗e4+ 76. ♗d3 ♗a4 77. f7 ♗f4! 78. ♗f4 ♗e7. 72. f7 ♗f1 73. ♗g5 h2 74. ♗gf3 ♗e7 75. ♗h2 ♗a1 76. ♗hg4! Единственный выигрышающий ход, конь должен защитить пешку c h6. 76...♗a3+ 77. ♗d2 ♗a4 78. ♗h6! ♗a2+ (78...♗f4 79. ♗g6+ вилка) 79. ♗e3 ♗a3+ 80. ♗e4, и от шаха с g6 нет защиты, поэтому черные сдались.

Отличился гроссмейстер Владимир Федосеев, выступающий с 2023 года за Словению: он обыграл черными самого Магнуса Карлсена.

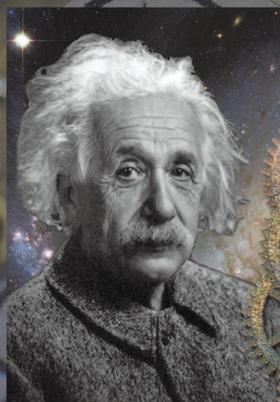
М.Карлсен – В.Федосеев Будапешт, 2024



27. ♗d5? Королю следовало продолжать движение вперед: 27. ♗f7! ♗g2 28. ♗f6 ♗f3 29. h4, и белая проходная компенсирует центральные пешки черных с вероятной ничьей. 27...b6 28. f4 ♗d7 29. g4?? (29. fe) fg?? «Любезность» в ответ на зевок. После 29...c2! белые могут отбиться от матовых угроз только ценой материальных потерь: 30. gf ♗g4! 31. ♗f6 ♗f4 32. ♗b5 ♗e3+ 33. ♗e5 ♗b4. 30. fe fe 31. ♗e4 ♗f3 32. ♗c5+ bc 33. ♗g3 ♗d6+ 34. ♗c5 ♗d2 35. ♗c1? (35. h3! ♗g2 36. ♗e5! ♗e5 37. hg с ничьей) ♗e6! (теперь черные выигрывают, так как король успевает поддержать пешки) 36. ♗c4 ♗f5 37. ♗a4 ♗h2 38. ♗h2 ♗h2 39. ♗a7 ♗b2 40. a4 ♗c2+ 41. ♗b5 g3 42. ♗g7 ♗f4 43. a5 ♗b2+ 44. ♗c6 ♗a2 45. ♗b6 e4 46. a6 e3 47. ♗f7+ ♗e4 48. ♗e7+ ♗f3 49. ♗f7+ ♗g2 50. a7 e2 51. ♗e7 ♗f2 52. ♗f7+ ♗e3 53. ♗e7+ ♗d2 54. ♗d7+ ♗c1 55. ♗c7+ ♗b1, белые сдались.

А.Русанов

Индекс 90964



ЛУЧШЕ ОДИН РАЗ УВИДЕТЬ,
ЧЕМ СТО РАЗ УСЛЫШАТЬ

В этом легко убедиться, «побывав» в Музее
занимательной науки в городе Нальчике.

Прогулки с физикой



ISSN 0130-2221 24009



(ПОДРОБНЕЕ – НА С.29 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)