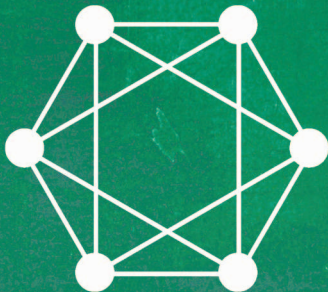
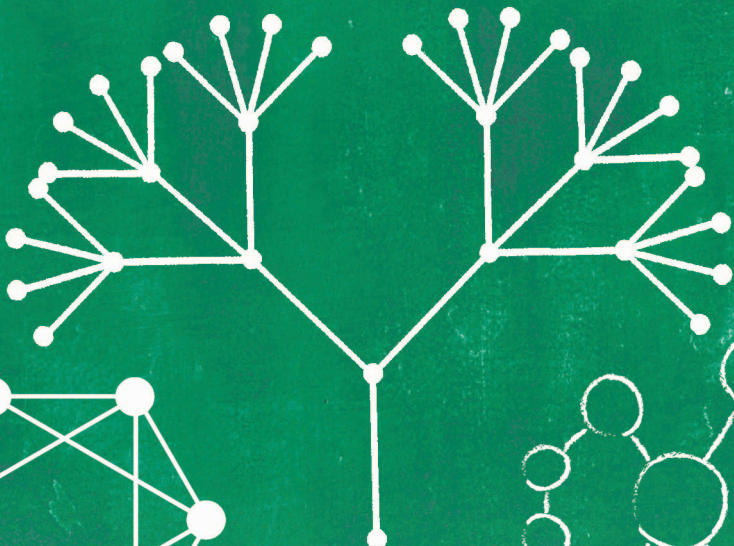
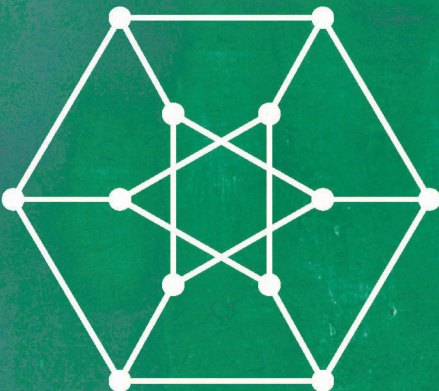
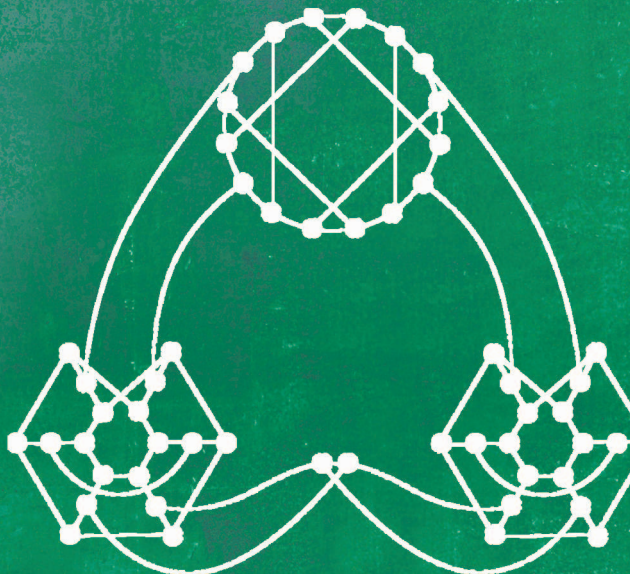
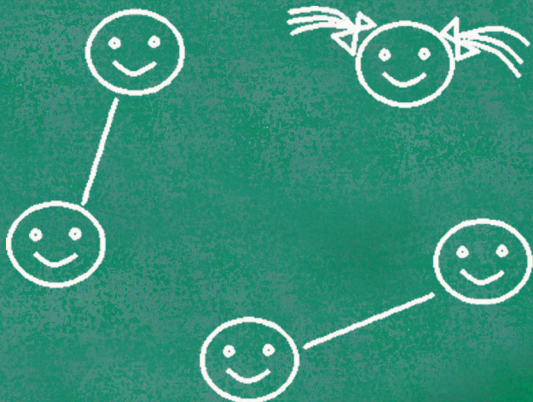


АВГУСТ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



СЛОЕНЫЙ ПИРОГ

Эта очень простая в изготовлении головоломка содержит три равные пятиклеточные фигуры желтого цвета и пять равных трехклеточных фигур зеленого цвета. Для знакомых с терминами полимино можно сказать, что речь идет о трех желтых U-пентамино и пяти зеленых I-тримино.

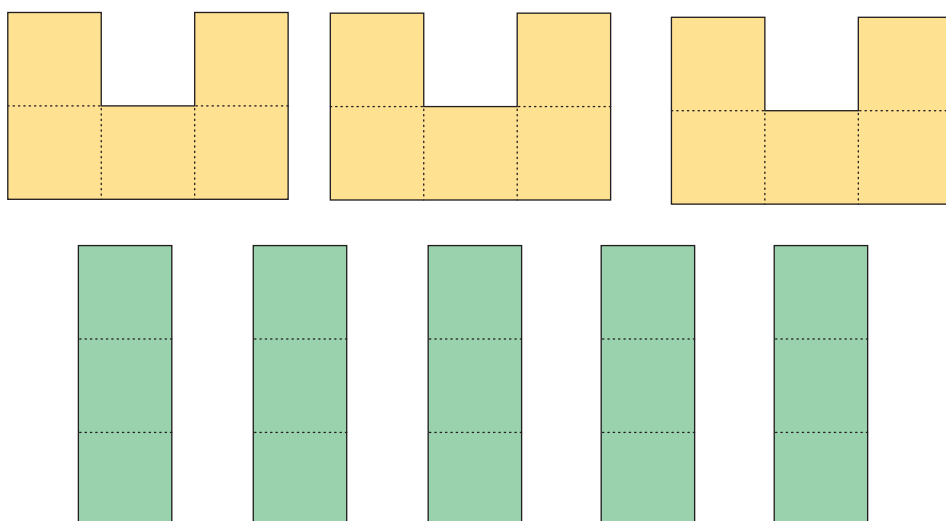
Цель играющего – сложить на плоскости фигуру из трех желтых пентамино так, чтобы ее можно было накрыть пятью зелеными тримино. При этом все квадратики нижнего слоя должны строго совпадать с квадратиками верхнего слоя и наоборот. В России такие головоломки называют «слоеными пирогами».

Всероссийский клуб ценителей головоломок «Диоген» организует ежегодные встречи, на которых можно узнать самые свежие новости из мира головоломок, познакомиться с новыми авторскими головоломками, попробовать свои силы в решении головоломок различной сложности, пообщаться с другими ценителями головоломок. Именно на такой встрече была представлена эта головоломка, ее автор – Роберт Рид (Robert Reid), а авторское название головоломки – «Cover-up».

Вырезаем восемь игровых элементов из бумаги или картона и «ломаем голову». Уверяем вас, что если удастся решить головоломку, то вы непременно получите удовольствие и не пожалеете о потраченном времени.

Желаем удачи!

Н. Авилов



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт

Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,

С.Д.Варламов, А.П.Веселов,

А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,

С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,

А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,

К.А.Кноп, П.А.Кожевников,

С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,

А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,

А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,

А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,

В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,

А.В.Устинов (заместитель главного

редактора), А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

В.И.Берник, А.А.Боровой,

В.В.Козлов, А.Л.Семенов,

С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ

ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,

И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,

В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,

Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,

А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,

Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,

И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,

Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Друзья и незнакомцы на цикле. *К.Кохась*
9 Как физики рисуют графики. *Л.Ашкинази*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи M2806–M2809, Ф2813–Ф2816
16 Решения задач M2794–M2797, Ф2797–Ф2804
29 О неравенстве Чебышёва для сумм.
А.Антропов

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика+производная

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 34 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 Как Студент о ледяном дожде размышлял.
А.Стасенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 37 Шалтай, Болтай и Брокер. *А.Заславский*
39 Об одной задаче LXV Международной
математической олимпиады. *Н.Панюнин*

ИНФОРМАЦИЯ

- 42 Фестиваль Кирхгоффа

ОЛИМПИАДЫ

- 47 LXV Международная математическая
олимпиада
49 Заключительный этап LVII Всероссийской
олимпиады школьников по физике
54 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (13)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Друзья
и незнакомцы на цикле»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Друзья и незнакомцы на цикле

К. КОХАСЬ

Живые плитки

Мы привыкли к тому, что окружающие нас предметы постоянно подают «признаки жизни». Различные бытовые устройства умеют мигать лампочками, подавать звуковые сигналы, а наиболее продвинутые еще и сами передвигаются. Нас с детства морально готовят к этому, чего стоит один только живой умывальник из сказки Чуковского. А уж в век мультипликации трудно найти предмет, который не оживал бы хоть на минутку, хотя бы на время исполнения песенки.

Видимо, под впечатлением этой тенденции два современных математика Дефант и Кравиц предложили [1] в 2020 году следующую необычную точку зрения на старую добрую игру в 15.

Напомним, игра в 15 – это головоломка, представляющая собой коробочку размером 4×4 клетки, на дне которой лежат 16 плиток 1×1 . Плитки пронумерованы, одна из плиток (с числом 16) убрана, в результате чего имеется одна пустая клетка, на которую можно передвинуть любую из соседних плиток. На освободившееся место опять можно передвинуть одну из соседних плиток и т.д. Нам будет удобнее думать, что плитка номер 16 не убрана, а просто не прорисована: она занимает пустую клетку и при выполнении одного хода просто меняется местами с соседней плиткой. Требуется, передвигая плитки, расположить их в каком-нибудь стандартном порядке.

– А давайте считать плиточки из игры в 15 живыми! – предложили Дефант и Кравиц. – Пусть некоторые плитки дружат, а меняться местами могут только друзья, находящиеся в соседних по стороне клетках доски.

Хотя любое исследование начинается, как правило, с решения конкретной задачи, в современной математике не принято изучать явления по одиночке. Любое штучное математическое рассуждение тут же обобщается на «класс похожих задач» и превращается в теорию объектов такого-то типа. Так, «Квант» уже писал о головоломке «Игра в 15» [2], где был дан общий взгляд на игру в 15 как игру на произвольном графе. Изобретатели живых плиток не стали отступать от традиции и сформулировали задачу в следующей довольно витиеватой форме.

Зафиксируем натуральное число n и представим себе, что у нас имеется компания из n человек. Рассмотрим два графа X и Y , в каждом по n вершин. Люди из нашей компании и вершины обоих графов пронумерованы числами от 1 до n . Граф X будем считать «географическим», в его вершинах мы будем расставлять людей (по одному человеку в вершину), вершины, соединенные ребром, считаются соседними. Граф Y описывает дружбу людей, можно считать, что множество его вершин – это и есть наша компания, i -й человек соединен с j -м только если они друзья. После того, как люди расставлены по вершинам, они могут совершать *дружеские обмены*: любые два друга в соседних вершинах могут поменяться местами. Требуется ответить на такой вопрос.

Верно ли, что для любой начальной расстановки людей в вершинах графа X удастся с помощью обменов переставить людей так, чтобы номер каждого человека совпал с номером его вершины?

Граф друзей и незнакомцев

Прежде чем формулировать и обсуждать дальнейшие детали, напомним несколько определений. Граф называется

двудольным, если его вершины можно разбить на два множества так, что все ребра соединяют вершины из разных множеств. *Компонента связности* графа – это какая-нибудь вершина и все вершины, до которых от нее можно прийти перемещаясь по ребрам. Граф, состоящий из одной компоненты связности, называется *связным*, а остальные графы – *несвязными*. *Точкой сочленения* в графе называют вершину, при удалении которой (вместе с ребрами, которые из нее выходят) получается несвязный граф. Вершина, из которой выходит ровно одно ребро, называется *висячей*. Через C_n принято обозначать цикл на n вершинах ($n \geq 3$), через P_n – путь на n вершинах. *Дерево* – это связный граф, в котором нет циклов. *Лес* – это граф, в котором все компоненты связности деревья.

Приведенная выше постановка вопроса «утаила» от нас важный объект, описывающий возможности совершения дружеских обменов. Предъявим его. Заметим, что имеется $n!$ способов расстановки нашей компании в вершинах графа X . Рассмотрим новый огромный граф, он будет обозначаться $FS(X, Y)$. Каждый способ расстановки людей в графе X будем считать вершиной графа $FS(X, Y)$ – таким образом, в графе $FS(X, Y)$ имеется $n!$ вершин. Ребра в этом графе соединяют те (и только те) расстановки, которые получаются друг из друга одной операцией дружеского обмена. Построенный граф $FS(X, Y)$ будем называть *графом друзей и знакомцев*, а количество компонент связности этого графа будем обозначать $fs(X, Y)$.

Теперь можно переформулировать основную задачу так: для заданных графов X и Y выяснить, верно ли, что граф $FS(X, Y)$ состоит из одной компоненты связности. А сидящий в каждом из нас перфекционист добавит: если граф несвязный, выяснить, сколько у него компонент связности.

Пример 1. Пусть $X = \text{треугольник}$, $Y = \text{треугольник}$. Тогда граф $FS(X, Y)$ изображен на рисунке 1. Здесь шесть больших кружочков – это вершины графа $FS(X, Y)$, обозначающие возможные расстановки трех человек в вершинах треугольника.

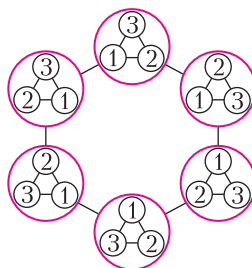


Рис. 1. Граф $FS(X, Y)$, где $X = C_3, Y = P_3$

Пример 2. Общая задача об игре в 15 на языке друзей и знакомцев формулируется так. Пусть X – это граф, в вершинах которого мы расставляем людей, а граф Y , описывающий дружбу этих людей, – это граф, в котором n -я вершина соединена с остальными и других ребер нет, такой граф обозначается $K_{1, n-1}$. Требуется выяснить, для каких графов X граф друзей и знакомцев $FS(X, K_{1, n-1})$ состоит ровно из одной компоненты связности. (В этом случае мы говорим, что головоломка «Игра в 15» собирается.)

Ответ на этот вопрос дает теорема Уилсона [3] (популярное изложение см. в [2]).

Теорема Уилсона. Пусть граф G удовлетворяет четырем условиям:

- 1) не является двудольным,
- 2) не является циклом $C_n, n \geq 4$,
- 3) не содержит точек сочленения,
- 4) не совпадает с графом Θ (рис. 2).

Тогда на графе G головоломка «Игра в 15» собирается.

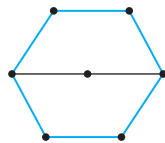


Рис. 2. Граф Θ

На самом деле Уилсон доказал даже несколько больше: что $fs(\Theta, K_{1, n-1}) = 6$ и что $fs(G, K_{1, n-1}) = 2$, если $G \neq C_n$ и $G \neq \Theta$ – двудольный граф, не имеющий точек сочленения.

В этой статье будет дан ответ на похожий вопрос: для каких графов X граф друзей и знакомцев $FS(X, C_n)$ связан ($n \geq 3$)?

Чтобы различать роли графов X и Y в разных конструкциях, обозначим множе-

ства вершин графов X и Y через $V(X)$ и $V(Y)$, хотя, конечно, эти множества одинаковы: $V(X) = V(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$. С формальной точки зрения, каждая вершина Φ графа $FS(X, Y)$, т.е. расстановка людей на графе X , – это взаимно однозначное отображение $\varphi: V(X) \rightarrow V(Y)$, которое для каждого i задает число $\varphi(i)$ – номер человека, стоящего в i -й вершине.

«Так ли уж полезен столь громоздкий формализм», – усомнится читатель. Да! Иногда полезен! Вот поучительный пример – и забавный образец двойственности.

Лемма 1. *Графы $FS(X, Y)$ и $FS(Y, X)$ изоморфны.*

Доказательство. Нам нужно предъявить изоморфизм графов, т.е. вершинам графа $FS(X, Y)$ поставить в соответствие вершины графа $FS(Y, X)$ так, чтобы две вершины из графа $FS(X, Y)$ соединялись ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие вершины графа $FS(Y, X)$. Как уже было сказано, каждая вершина Φ графа $FS(X, Y)$ – это взаимно однозначное отображение $\varphi: V(X) \rightarrow V(Y)$ (рис.3,а). Поставим ей в соответствие обратное отображение $\varphi^{-1}: V(Y) \rightarrow V(X)$, естественным обра-

зом понимаемое как вершина графа $FS(Y, X)$.

Теперь посмотрим на вершину Ψ (рис.3,б), соседнюю с Φ в графе $FS(X, Y)$. Она отличается от Φ одним дружеским обменом, т.е. в графе X нашлось ребро, скажем между k -й и l -й вершинами, и стоящие в этих вершинах друзья $A = \varphi(k)$ и $B = \varphi(l)$ поменялись местами. Но тогда в графе $FS(Y, X)$ вершины φ^{-1} и ψ^{-1} тоже соединены ребром, которое соответствует обмену друзей k, l из графа X , стоящих в соседних вершинах A и B графа Y .

Приведенное рассуждение работает и в противоположную сторону: если вершины φ^{-1} и ψ^{-1} соединены ребром в графе $FS(Y, X)$, то Φ и Ψ соединены ребром в $FS(X, Y)$.

Лемма доказана.

Для примера предлагаем читателю нарисовать граф $FS(P_3, C_3)$ и убедиться в его сходстве с графом на рисунке 1.

Благодаря лемме 1 можно вместо графов вида $FS(X, C_n)$ изучать графы $FS(C_n, Y)$. Это удобно и достаточно наглядно: речь идет о расстановке людей по кругу, где меняться могут лишь друзья, стоящие рядом. Вот пример на эту тему.

Домашнее задание. По кругу стоят $3n$ человек – это n семей «мама–папа–ребенок». Любые два человека, стоящие рядом, могут меняться местами, кроме случая, когда ребенок меняется местом с одним из своих родителей (это не разрешено). При каких n с помощью таких обменов людей можно расставить по кругу в любом порядке? (Места вдоль круга пронумерованы, перестановки, отличающиеся циклическим сдвигом, считаются различными.)

Граф незнакомств

Если два человека не дружат, будем называть их *незнакомцами*. При перестановке людей, стоящих по кругу, незнакомство есть сильное препятствие – ведь для того чтобы поменять местами незнакомцев A и B , придется одного из них, скажем A , провести по кругу, чтобы он оказался по другую сторону от B . Если таких препятствий много, то вряд ли мы сумеем получить произвольную расстановку. Поэтому в рассматриваемой задаче стоит уделить

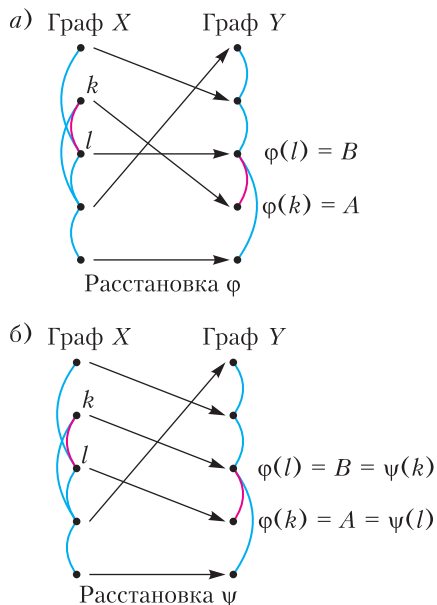


Рис. 3. Две соседние расстановки

внимание *дополнительному графу* \bar{Y} , т.е. графу, в котором множество вершин – все та же компания людей, а ребра соединяют незнакомцев.

Следующая лемма показывает, что если в графе \bar{Y} достаточно много ребер, то граф $FS(C_n, Y)$ не может оказаться связным.

Лемма 2. Пусть граф \bar{Y} связный. Тогда $fs(C_n, Y) \geq n$. В частности, циклические сдвиги произвольной расстановки лежат в разных компонентах связности графа $FS(C_n, Y)$.

Доказательство. Допустим, что существует расстановка людей σ , из которой с помощью цепочки обменов удастся получить расстановку σ_k , где все люди циклически сдвинулись на k по часовой стрелке ($1 \leq k \leq n - 1$). Будем отслеживать при обменах *смещение* каждого человека: начальное смещение каждого равно 0, при сдвиге человека на одну позицию по часовой стрелке смещение увеличивается на 1, а при сдвиге против часовой стрелки – уменьшается на 1. Ясно, что тогда суммарное смещение всех людей в расстановке σ_k равно 0. При этом смещение каждого человека в расстановке σ_k сравнимо с k по модулю n , в частности, ни одно смещение не равно 0.

Заметим, что если два человека A и B – незнакомцы, то они ни в какой момент не могут совершить дружеский обмен. Соединим этих людей резиновой нитью, проходящей по окружности по дуге от A до B по часовой стрелке. При движении людей эта нить будет сжиматься или растягиваться, но в любой момент времени ее длина строго меньше одного оборота. Это значит, что по окончании обменов A и B имеют одинаковое смещение. А так как граф \bar{Y} связен, любые два человека имеют одинаковое смещение. Но это невозможно: поскольку смещение каждого человека не равно 0, а суммарное смещение всех людей равно 0, часть людей должна иметь положительное смещение, а остальные – отрицательное. Противоречие.

Следствие. Если граф \bar{Y} связный, то $fs(C_n, Y)$ делится на n .

Самые «маленькие» связные графы на n вершинах – это деревья. Для них можно

уточнить результат леммы 2. Расстановку людей на цикле C_n назовем *стандартной*, если, начиная с первого человека, все люди стоят подряд по возрастанию номеров по часовой стрелке. В какой именно вершине цикла C_n находится первый человек, мы не отслеживаем, поэтому существует n различных стандартных расстановок.

Лемма 3. Пусть граф \bar{Y} является деревом. Тогда $fs(C_n, Y) = n$ и из каждой расстановки людей на графе C_n с помощью дружеских обменов можно получить стандартную расстановку.

Доказательство. Индукцией по n докажем, что произвольную расстановку людей на C_n можно привести к стандартной. База для $n = 3$ очевидна. Для перехода от $n - 1$ к n рассмотрим висющую вершину графа \bar{Y} , т.е. такого человека K , который не дружит всего лишь с одним человеком из компании Y . «Притворившись, что K исчез», переставим остальных $n - 1$ человек по возрастанию. Это делается с помощью цепочки обменов, которая существует по предположению индукции. Если соседям K , стоящим по разные стороны от K , требуется поменяться местами, то, чтобы дать возможность меняющимся стать рядом, поменяем K с тем из соседей, с которым он дружит. По окончании обменов, когда все, кроме K , расставлены по возрастанию, приведем K на свое место, двигая его либо по, либо против часовой стрелки. Таким образом, любую расстановку можно привести обменами к стандартной. Заметим, что все стандартные расстановки отличаются циклическими сдвигами и по предыдущей лемме являются представителями различных компонент связности графа $FS(C_n, Y)$.

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что $fs(C_n, Y) > n$, если связный граф \bar{Y} содержит цикл.

Несвязный граф незнакомств

Теперь обратимся к случаю несвязного графа \bar{Y} . Отметим одну деталь в обозначениях. Пусть \bar{Y}_1 – компонента связности графа \bar{Y} . Люди из компоненты \bar{Y}_1 – это часть нашей исходной компании. Если мы для них отслеживаем незнакомство, как

раз и получается компонента \bar{Y}_1 . Если же мы отслеживаем дружбу тех же людей, то естественно обозначать этот подграф графа Y через Y_1 .

Пусть $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_r$ – компоненты связности графа \bar{Y} . Число людей в компоненте \bar{Y}_i будем обозначать через n_i .

Лемма 4. Пусть граф \bar{Y} несвязен и $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_r$ – его компоненты связности. Пусть

$$v = \text{НОД}(n_1, n_2, \dots, n_r).$$

Тогда $\text{fs}(C_n, Y) \geq v$. В частности, циклические сдвиги любой расстановки на $0, 1, 2, \dots, v-1$ позиций лежат в разных компонентах связности графа $\text{FS}(C_n, Y)$.

Доказательство. Рассмотрим стандартную расстановку σ и получаемую из нее цепочкой обменов расстановку σ_k , где все люди циклически сдвинулись на k по часовой стрелке. Как и в доказательстве леммы 2, заключаем, что суммарное смещение любых двух человек из каждой компоненты \bar{Y}_i одинаково, пусть оно равно $\alpha_i n + k$. Запишем в этих обозначениях, что сумма всех смещений равна 0:

$$\sum_{i=1}^r n_i (\alpha_i n + k) = 0,$$

или, эквивалентно,

$$k \sum_{i=1}^r n_i = - \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i n.$$

Поскольку $\sum n_i = n$, можно сократить обе части равенства на n :

$$k = - \sum_{i=1}^r \alpha_i n_i.$$

Итак, k – целочисленная линейная комбинация чисел n_i , а значит, k кратно v .

Решим такую задачу.

Пример 3. По кругу стоят $2n$ человек, образующих n супружеских пар. Соседи могут меняться местами, если они не супруги. Верно ли, что можно всех переставить в любом порядке? (Перестановки, отличающиеся циклическим сдвигом, считаются различными.)

Обратите внимание: речь идет о цикле C_{2n} и компании не из n , а из $2n$ человек. Не

будем задумываться о вопросе «являются ли супруги друзьями» в реальной жизни. Поживете – увидите. В этой задаче они незнакомцы, а все остальные – друзья. Таким образом, граф \bar{Y} – это объединение из n независимых ребер, размеры всех его компонент связности равны 2 и v тоже равно 2. Лемма 4 информирует нас, что в этом случае количество компонент связности графа $\text{FS}(C_{2n}, Y)$ не меньше 2, т.е. не все расстановки людей получаются друг из друга разрешенными обменами.

Нетрудно построить инвариант, различающий компоненты. Разорвем круг в любом месте и в образовавшейся шеренге подсчитаем число супружеских пар, в которых жена стоит левее мужа. Четность этой величины не меняется при обменах.

Мы доказали, что ответ на вопрос примера 3 – «нет», но мы не доказали, что компонент связности ровно две. Оставим это читателю для размышлений.

Примем следующие соглашения. Поскольку люди из разных компонент связности графа \bar{Y} дружат, их всегда можно поменять местами. Значит, какова бы ни была начальная расстановка, людей можно переставить с помощью дружеских обменов так, чтобы вдоль цикла сначала подряд стояли люди из компоненты \bar{Y}_1 , потом из \bar{Y}_2 , затем из \bar{Y}_3 и т.д. Такую расстановку будем называть *отсортированной*. Далее будем считать, что с самого начала все люди были пронумерованы с учетом возможности сортировки:

- людям из компоненты \bar{Y}_1 выданы номера от 1 до n_1 ,

- людям из компоненты \bar{Y}_2 выданы номера от $n_1 + 1$ до $n_1 + n_2$,

...

- людям из компоненты \bar{Y}_r выданы номера от $\sum_{i=1}^{r-1} n_i + 1$ до $n = \sum_{i=1}^r n_i$.

По-прежнему расстановку n человек на цикле C_n будем называть *стандартной*, если они стоят по возрастанию номеров по часовой стрелке. Всего существует n различных стандартных расстановок. Из любой расстановки людей на графе C_n всегда можно получить отсортированную расста-

новку, но, вообще говоря, не всегда – стандартную.

В каждой компоненте \bar{Y}_i люди независимо от других компонент могут совершать дружеские обмены так, словно они стоят на цикле длины n_i . Действительно, если обозначить через K множество людей из $\bar{Y} \setminus \bar{Y}_i$, то, как и в доказательстве леммы 3, люди из K всегда могут «подвинуться», чтобы не мешать обменам друзей из \bar{Y}_i . Значит, если при выполнении обменов мы следим только за компонентой \bar{Y}_i , получающиеся расстановки людей из компоненты \bar{Y}_i описываются графом $FS(C_{n_i}, Y_i)$.

В случае, когда граф \bar{Y} – это лес, т.е. все компоненты \bar{Y}_i – деревья, из каждой расстановки людей на цикле C_n можно дружескими обменами получить стандартную расстановку. Действительно, получим сначала отсортированную расстановку. Далее, не нарушая свойства отсортированности, в каждой компоненте \bar{Y}_i по лемме 3 людей можно переставить по возрастанию номеров (с точки зрения цикла C_n). При этом в стандартной расстановке на цикле C_n нам еще требуется, чтобы человек с наименьшим номером стоял первым в группе людей из компоненты \bar{Y}_i , этого можно достичь перестановками, показанными на рисунке 4.

Итак, если граф \bar{Y} – лес, мы всегда можем получить стандартную расстановку. Но, в отличие от леммы 3, лемма 4 не гарантирует, что все циклические сдвиги стандартной расстановки лежат в разных компонентах связности.

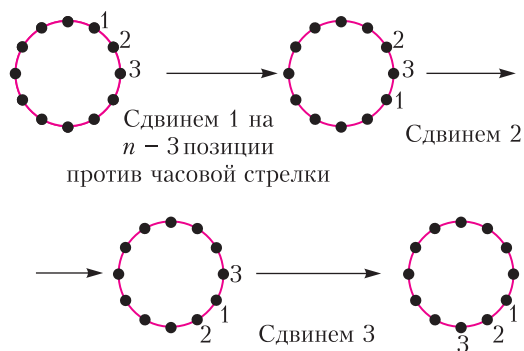


Рис. 4. Перемещаем компоненту из трех человек на 3 позиции по часовой стрелке

Лемма 5. Пусть граф \bar{Y} несвязен и его компоненты связности $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_r$ являются деревьями. Пусть

$$v = \text{НОД}(n_1, n_2, \dots, n_r).$$

Тогда $fs(C_n, Y) = v$.

Доказательство. С учетом леммы 4 достаточно проверить, что $fs(C_n, Y) \leq v$. Взяв произвольную расстановку, переставим людей в стандартном порядке (как показано выше, это возможно благодаря тому, что все компоненты \bar{Y}_i – это деревья). Теперь, идя по возрастанию номеров, для каждого человека из множества \bar{Y}_i последовательно проведем $n - n_i$ обменов, тем самым двигая его против часовой стрелки (соседи из разных компонент \bar{Y}_i и \bar{Y}_j всегда могут меняться местами). Получится стандартная расстановка, повернутая на n_i позиций по часовой стрелке (см. рис. 4). Выполняя сдвиги такого вида, мы можем получить поворот на любую целочисленную линейную комбинацию $\sum \alpha_i n_i$. Поскольку v представимо в виде такой целочисленной линейной комбинации, в графе $FS(C_n, Y)$ не более v компонент.

Основная теорема

В случае, когда компонента связности \bar{Y}_i графа \bar{Y} не является деревом, мы, вообще говоря, не сможем добиться того, что люди из этой компоненты будут стоять вдоль цикла по возрастанию номеров, поэтому требования к стандартной расстановке придется ослабить.

Рассмотрим граф $FS(C_n, Y_i)$. Отметим в каждой компоненте связности этого графа одну расстановку так, чтобы в результате вместе с каждой расстановкой были отмечены и все ее циклические сдвиги. Это возможно, так как по лемме 2 циклические сдвиги любой расстановки лежат в разных компонентах связности графа $FS(C_n, Y_i)$. Среди отмеченных расстановок людей из компании \bar{Y}_i на цикле C_n , отличающихся циклическими сдвигами, ту расстановку, в которой первый человек стоит в первой вершине, назовем *полустандартной*. Ясно,

что имеется $\frac{fs(C_n, Y_i)}{n_i}$ полустандартных расстановок.

Совершая дружеские обмены на графе C_n , мы из любой начальной расстановки людей можем получить расстановку, где люди стоят полустандартно в том смысле, что расстановка людей из каждой компоненты связности \bar{Y}_i вдоль цикла является отмеченной и при этом

- первый человек из компоненты \bar{Y}_1 стоит в вершине с некоторым номером k ,

- «первый» человек из компоненты \bar{Y}_2 (по нашим соглашениям этот человек в графе Y имеет номер $n_1 + 1$) стоит в вершине с номером $n_1 + k$,

- «первый» человек из компоненты \bar{Y}_3 (по нашим соглашениям этот человек в графе Y имеет номер $n_1 + n_2 + 1$) стоит в вершине с номером $n_1 + n_2 + k$ и т.д.

Такую расстановку людей на графе C_n тоже будем называть *полустандартной*. Полустандартные расстановки, полученные из одной и той же начальной расстановки, могут отличаться лишь номерами k , т.е. циклическими сдвигами на C_n .

Основная теорема. Пусть граф \bar{Y} несвязен, $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_r$ — его компоненты связности, $v = \text{НОД}(n_1, n_2, \dots, n_r)$. Тогда

$$\text{fs}(C_n, Y) = v \prod_{i=1}^r \frac{\text{fs}(C_{n_i}, Y_i)}{n_i}. \quad (*)$$

Доказательство. Возьмем произвольную расстановку людей на графе C_n и обменами получим из нее отсортированную полустандартную расстановку. Эта расстановка задается списком, в котором для каждой компоненты Y_i указана полустандартная расстановка. Всего имеется

$$\prod_{i=1}^r \frac{\text{fs}(C_{n_i}, Y_i)}{n_i}$$

таких списков. На цикле C_n полустандартные расстановки, заданные одним и тем же списком, могут отличаться лишь циклическими сдвигами. Из леммы 4 следует, что циклические сдвиги произвольной расстановки на k и на l позиций лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда $k - l$ делится на v . Таким образом, циклическим сдвигам одной полустандартной расстановки соответствуют v компонент связности графа $\text{FS}(C_n, Y)$. Сле-

довательно,

$$\text{fs}(C_n, Y) = v \prod_{i=1}^r \frac{\text{fs}(C_{n_i}, Y_i)}{n_i}.$$

Доказанная теорема дает ответ на наш основной вопрос. По формуле (*) число $\text{fs}(C_n, Y)$ равно 1 в том и только том случае, когда $v = 1$ и $\text{fs}(C_{n_i}, Y_i) = n_i$ при всех i . Иными словами, это возможно, только если дополнительный граф \bar{Y} — это лес, в котором $\text{НОД}(n_1, n_2, \dots, n_r) = 1$.

Так, а что с домашним заданием? Из основной теоремы следует, что здесь три компоненты связности. Найдите инвариант, который их различает!

Статья написана по материалам статьи [1], из которой взяты формулировки всех результатов, и проекта [4], представленного на 35-й Летней конференции Турнира городов, где были переосмыслены и упрощены исходные доказательства. В работе над этим проектом участвовали О.Бурсиан, Д.Кохась, В.Ретинский.

Литература

1. C.Defant, N.Kravitz. Friends and strangers walking on graphs. — arXiv:2009.05040v2.
2. К.Кохась. Игра в 15. — «Квант», 2022, № 5.
3. R.M.Wilson. Graph puzzles, homotopy, and the alternating group. — Journal of Combinatorial Theory, ser. B, vol.16, is.1, 1974, p. 86–96.
4. О.Бурсиан, К.Кохась, Д.Кохась, В.Ретинский. Друзья бродят по графу. — <https://www.turgor.ru/lktg/2023/>.

Как физики рисуют графики

Л. АШКИНАЗИ

ДЕЛАТЬ ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ – это при фиксированных значениях одних параметров изменять какие-то другие параметры и наблюдать за третьей группой параметров. Например, при фиксированной температуре проводника изменять напряжение и наблюдать за током. Узнаете закон? А вот другой эксперимент – при фиксированной температуре окружающей среды изменять напряжение и наблюдать за током. Заметили ли разницу? Понимаете ли, что второй эксперимент много проще? Как вы стали бы действовать, если надо было бы исследовать сопротивление именно при фиксированной температуре проводника? Всесторонний и подробный ответ на этот вопрос говорит о вашем понимании физики.

В каждой из трех групп параметров – фиксированные, изменяемые, наблюдаемые – может быть по одному параметру, но может быть и по несколько. Вот, например, температура – она на все годна. Изменяя напряжение и наблюдая (вспомните закон Ома) ток, можно или стабилизировать температуру, или сознательно ее изменять. А можно и не стабилизировать, и не изменять, а просто ее измерять. Это три разных эксперимента, и не все они просты. Вы обратили внимание, что мы не уточнили, о температуре проводника или о температуре окружающей среды идет речь? А это сильно меняет ситуацию – температуру окружающей среды и стабилизировать, и изменять в некоторых пределах относительно легко, а с температурой проводника могут быть проблемы.

Как вы думаете, в каких ситуациях температуру проводника легко изменять, а в каких это сложнейшая задача и непонятно, с какого бока к ней подступиться? Причем при постановке эксперимента и

при рассказе о нем многие параметры, которые, как мы считаем, влиять не должны, мы даже не упоминаем. Например, изменяя напряжение и наблюдая за током, мы не упоминаем, что ведем эксперимент при постоянной гравитации и постоянном атмосферном давлении. Правильно ли мы поступаем?

Сопротивление металлов с уменьшением давления на 1 атм (т.е. до нуля) уменьшается, а с увеличением на 1 атм монотонно (если при этом не изменяется кристаллическая решетка) увеличивается, изменяясь на $(5 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-4})\%$. Такими изменениями действительно часто можно пренебречь. Но, заметим, не всегда – например, если мы хотим изменять высокие давления, то использовать в качестве датчика просто кусок провода может быть и можно. Только надо вовремя вспомнить, что сопротивление зависит не только от давления, но и от температуры и как-то это учесть. Кстати, как?

Есть несколько разных способов. Надежнее всего стабилизировать температуру, но это не всегда возможно. Можно действовать иначе – измерять температуру и вносить поправки. Проблема будет состоять в том, что изменение давления может влиять на работу того, что измеряет температуру. Третий способ – расположить рядом с тем, на что влияют и давление, и температура, такой же проводник и при такой же температуре, но вне зоны, где изменяется давление, и вычитать из одного сигнала другой. Но это опять же не всегда возможно.

Не верьте тому, кто скажет, что физика – это просто. Правда, физика интересна, но это немного другое. Когда эксперименты проделаны, их результаты надо изложить в таком виде, чтобы они были интересны и понятны другим физикам. Да и для собственного понимания это бывает

полезно. Физическая традиция такова, что изображается либо график зависимости одного наблюдаемого параметра от одного изменяемого, либо на одном рисунке совмещаются два или больше графиков – зависимости нескольких наблюдаемых параметров от одного изменяемого параметра, либо «объемный» рисунок – зависимость от двух параметров, ее еще называют «поверхность отклика». Во всех случаях на осях стоят значения параметров, однако далеко не всегда значения начинаются с нуля и идут по оси равномерно. При этом всяческие особенности могут обнаружиться и на оси абсцисс, и на оси ординат.

Теперь рассмотрим несколько конкретных примеров. Картинки взяты из разных статей в «Журнале технической физики» (№ 1 за 2023 год). Можно было взять любой другой физический журнал, примеры тогда были бы другие, но существо дела не изменилось бы. Физический смысл изображенных результатов мы не рассматриваем, на уровне школьного курса это в большинстве случаев невозможно. Нас сейчас интересует только то, как строится «картинка» – изображение того, что получилось, на графике. Кстати, умение быстро «схватить» физическое изображение, картинку с графиками, полезно и при серьезной работе (которая включает, кроме всего прочего, чтение физических журналов).

На рисунке 1 представлен самый простой случай – показана шероховатость поверхности вдоль какой-то линии. Да,

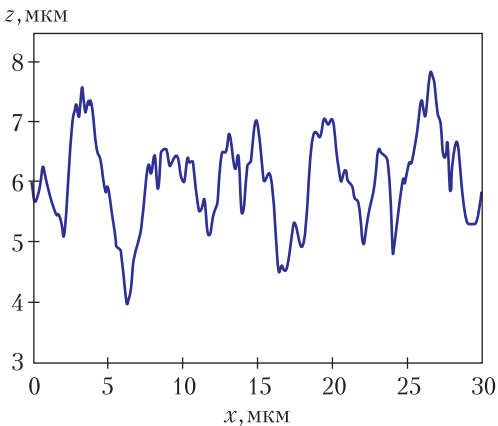


Рис. 1. Профиль поверхности

вот такая поверхность – не поцарапайтесь! По оси абсцисс отложено перемещение вдоль поверхности (в микрометрах), по оси ординат – высота поверхности (микрометры). Шкалы равномерные, но масштаб разный, так что не все так страшно. Где на осях ноль, в данном случае не важно, линейку в пространстве можно располагать, как угодно. Правда, географы отсчитывают высоты «от уровня моря», а строители «от уровня земли», т.е. у них есть, скажем так, естественный ноль. При изображении профиля поверхности часто используют «среднюю линию» и отсчитывают высоту пиков и глубину ям от нее, но в данном случае среднюю линию не провели. Кстати, если бы вас попросили, как бы вы это сделали?

На рисунке 2 экспериментальные точки явно ложатся на прямую, показаны четыре зависимости емкости в пикофарадах от напряжения в вольтах, причем параметров для самих зависимостей два. Один параметр показан цифрами, это температура в кельвинах (420 К для верхней зависимости, 220 К для остальных трех). Другой параметр показан цветом и формой значка, в данном случае это частоты, на которых производились измерения, но на самом рисунке это не указано. На оси абсцисс ноль справа, на оси ординат ноль внизу, шкалы равномерные.

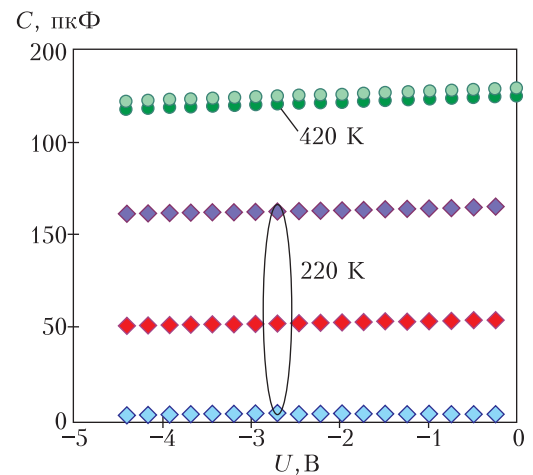


Рис. 2. Зависимость емкости некоторой полупроводниковой структуры от напряжения при разных температурах

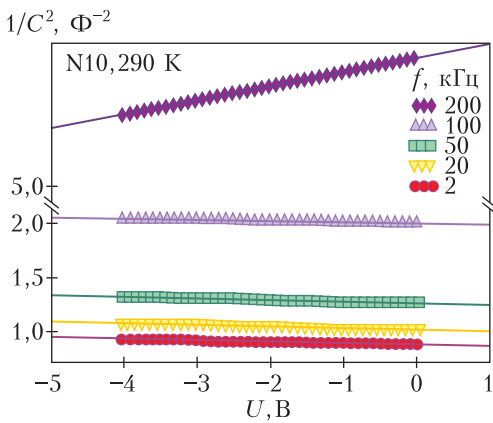


Рис. 3. Еще одна зависимость емкости полупроводниковой структуры от напряжения при разных температурах

Рисунок 3 иллюстрирует более сложный случай. По оси абсцисс отложено напряжение в вольтах, шкала равномерная, ноль не на краю, а ближе к правому краю. Ось ординат устроена фантазмагорически – во-первых, она с разрывом, но по разные стороны одинаковый масштаб, во-вторых, ноль вне пределов шкалы, в-третьих, на ней показана емкость, но не она сама, а в степени минус два, т.е. $1/C^2$, соответственно размерность – фарада в степени минус два. Параметр – частоты, на которых производились измерения, это показано цветом и формой значка. Параметр $1/C^2$ выбран именно потому, что в этом случае зависимость должна по теории быть прямой – и точки действительно ложатся на прямую. Обычно, когда кроме экспериментальных точек на картинке рисуют линию, это либо теоретическая зависимость (при каких-то подгоночных параметрах), либо эмпирическая зависимость, т.е. «проведенная через точки». Ну и заметим, что одинаковость масштабов на оси ординат ниже и выше разрыва на рисунке не указана, это лишь естественная гипотеза. Потому что выше разрыва есть только одно деление, а следовало бы дать два или три.

На рисунке 4 показана простая и частая ситуация, это так называемые логарифмические координаты. На оси абсцисс отложена какая-то концентрация, судя по индексу – электронов, на оси ординат – модуль какого-то выходного напряжения.

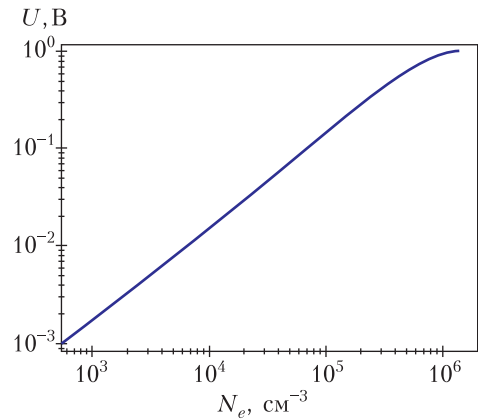


Рис. 4. Зависимость выходного напряжения детектора от концентрации электронов в плазме

Автор хотел показать, что логарифмы этих величин пропорциональны (кроме области высоких концентраций), но, обратите внимание, сами эти величины не вполне пропорциональны (напряжение растет немного медленнее, чем концентрация).

Рисунок 5 демонстрирует полулогарифмические координаты, по оси абсцисс приведено время в миллисекундах, по оси ординат – та же самая концентрация, точнее ее логарифм. Показаны явно экспериментальные точки, но полученные, скорее всего, двумя разными методами (в тексте это указано, но можно было бы указать и на рисунке). Результаты явно показывают, что зависимость одна во всем диапазоне. Разве что при самых больших временах видны какие-то особенности.

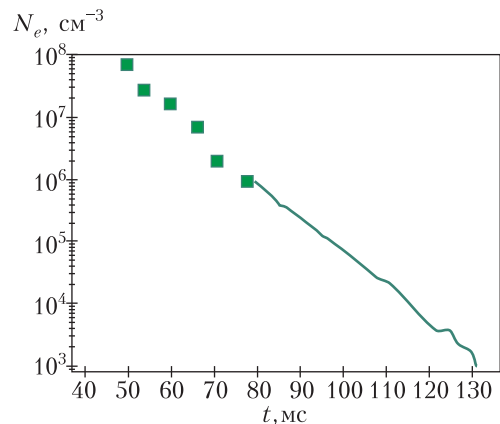


Рис. 5. Зависимость концентрации электронов в плазме от времени

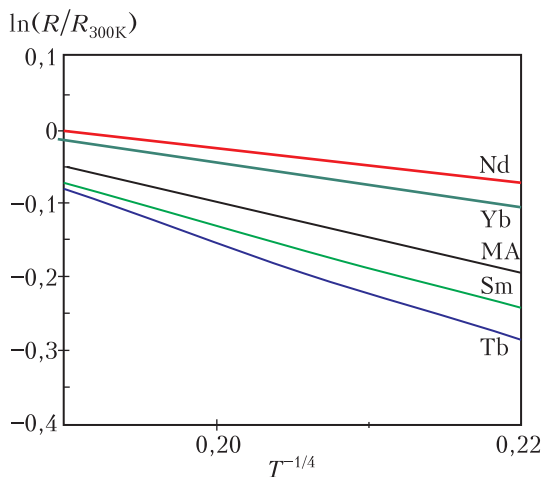


Рис. 6. Зависимость сопротивления сплава от температуры

На рисунке 6 мы видим простую, но экзотическую ситуацию. По оси абсцисс отложена температура, причем в виде $T^{-1/4}$, по оси ординат – логарифм относительного сопротивления. Автор исследовал температурную зависимость сопротивления каких-то сплавов с добавками к основному составу (который на рисунке загадочно обозначен «МА») четырех редкоземельных элементов, при этом самарий и тербий сопротивление уменьшали, а неодим и иттербий увеличивали. Но самое загадочное было в том (и рисунок явно это демонстрирует), что и базовый сплав, и варианты с добавками имели совершенно необычную зависимость удельного сопротивления от температуры – логарифм сопротивления был пропорционален $T^{-1/4}$.

На рисунке 7, как видно из размерностей, по оси абсцисс отложено время, по оси ординат – удельная проводимость. Показана весьма сложная зависимость, предсказываемая теорией, – кривая 1: константа, потом резкий спад, потом прямая в логарифмических координатах. Экспериментальные результаты – кривая 2 – ведут себя очень прилично, за исключением немонотонности при самых больших временах.

Теперь, когда мы рассмотрели несколько примеров, пора обсудить, чем определяются выбор осей координат, их оцифровки и метода представления данных. Первый, самый простой и очевидный фак-

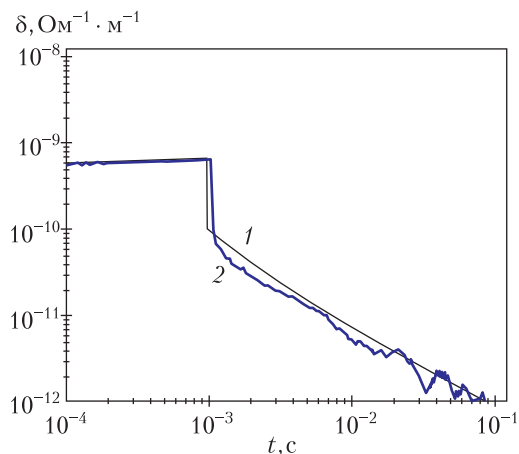


Рис. 7. Зависимость удельной проводимости от времени

тор: пределы изменения переменной на оси абсцисс и результирующей величины на оси ординат должны быть такими, чтобы поместились все данные, которые мы хотим показать. Если диапазон невелик, то шкала может быть линейная, если диапазон разрывается на две области, а средние значения не информативны, можно на оси показать разрыв, если какой-то кусок содержит важные детали, можно его растянуть, если диапазон велик, скажем два порядка и больше, то надо использовать «сжимающую», например логарифмическую, шкалу. Выбор именно логарифмической шкалы хорош тем, что во многие физические формулы входит экспонента и при надлежащем выборе форм представления параметров кривая становится прямой, а зависимость – понятной.

Второй фактор: хотим ли мы показать какое-либо сравнение. Например, эксперимента с теорией (в том числе с экстраполяцией), нескольких теорий, нескольких экспериментов. Причем эти несколько экспериментов могут быть сделаны просто с разными объектами, с одним и тем же объектом, но при разных значениях какого-то другого параметра (самый частый случай), при измерении какими-то разными методами, наконец – это могут быть данные разных авторов.

Третий фактор: сравнение эксперимента с теорией в условиях, когда наблюдаемый параметр по теории должен зависеть от

изменяемого параметра не линейно, а как-то сложнее. Тогда на осях надо откладывать такие величины, чтобы теоретическая зависимость изображалась прямой линией – тогда проще сравнивать. Например, если бы мы изучали зависимость полной излучаемой мощности от температуры $N = \xi \sigma T^4 S$, где ξ – коэффициент излучения, σ – постоянная Стефана–Больцмана, T – температура, S – площадь, то нам следовало бы откладывать на осях не N и

T , а N и T^4 и отклонения от прямой интерпретировать как отличие ξ от константы.

И в заключение – два вопроса. Как мы выбираем, какую величину откладывать по горизонтальной оси, а какую по вертикальной? Почему на осях почти всегда увеличение величины происходит при движении слева направо? Причем ответ «по традиции» не засчитывается, потому что любая традиция возникла почему-то.



СМЕШИВАНИЕ КРАСОК

... Когда я делал диплом в Принстоне, я частенько бывал в симпатичном маленьком ресторанчике, который назывался «Папино место». Однажды, когда я там обедал, недалеко от меня сел маляр в рабочем комбинезоне. Он спустился со второго этажа, где красил комнату. Каким-то образом между нами завязалась беседа, и он начал говорить о том, как много нужно знать для того, чтобы заниматься малярным делом. «Например, – сказал он, – если бы *Вам* пришлось красить стены в этом ресторане, какой цвет *Вы* бы выбрали?»

Я ответил, что не знаю, на что он сказал: «Стены нужно красить в темный цвет до такой-то высоты, потому что, видите ли, люди, сидящие за столами, трутся локтями о стены, так что белая стена тут не подойдет. Она слишком быстро становится грязной. Но над темной краской *должна быть* белая, чтобы создать в ресторане ощущение чистоты?»

Видимо, парень действительно разбирался в том, о чем говорил, так что я сидел, развесив уши, когда он сказал: «Кроме того, нужно разбираться в цветах: знать, как при смешивании красок можно получить различные цвета. Например, какие цвета *Вы* смешали бы, чтобы получить желтый?»

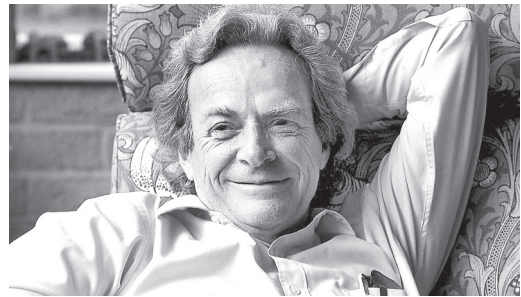
Я понятия не имел, как можно получить желтый цвет, смешивая краски. Если речь идет о *свете*, то нужно смешать зеленый и красный, но я знал, что он говорит о *красках*. Поэтому я сказал: «Я не знаю, как получить желтый цвет без желтой краски».

– Ну что же, – сказал он, – если смешать красную и белую краски, то получится желтая.

– Вы уверены, что получится не розовая?

– Конечно, – сказал он, – получится желтая.

Я поверил, что он получит желтый цвет, потому что он был профессиональным маля-



Ричард Филлипс Фейнман

ром, а я всегда восхищался людьми подобных профессий. Но мне все равно было интересно, как он это делает.

Тут меня осенило. «Должно быть, происходит какое-то изменение в *химическом составе*. Может быть, *Вы* используете какой-то особый вид пигментов, которые изменяют химический состав краски?»

– Да нет, – сказал он, – подойдут любые старые пигменты. Сходите в хозяйственный магазин, купите краску – обычную банку красной краски и обычную банку белой краски, – я их смешаю и покажу *Вам*, как получается желтый цвет.

В этот момент я подумал: «Что-то здесь не так. Я достаточно знаю о красках, чтобы знать, что в таком случае желтый цвет получить невозможно, но *он*, должно быть, знает, что желтый цвет *получается*, а значит, происходит что-то интересное. Я должен это увидеть!»

Поэтому я сказал: «Хорошо, я принесу краску».

Маляр поднялся наверх, чтобы закончить работу, а ко мне подошел хозяин ресторана и сказал: «В чем смысл вашего спора? Он маляр и всю жизнь был маляром, и *он*

(Продолжение см. на с. 31)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2806 – M2808 предлагались на 62-м Уральском турнире юных математиков.

Задача M2809 предлагалась на 73-й Болгарской национальной олимпиаде.

Задачи Ф2813–Ф2816 предлагались на заключительном этапе LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи M2806–M2809, Ф2813–Ф2816

M2806. Можно ли нарисовать на плоскости замкнутую 20-звенную ломаную и пронумеровать ее звенья числами 1, 2, 3, ..., 20 в порядке обхода так, чтобы для каждого натурального $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ звенья с номерами i и $10 + i$ пересекались друг друга и не пересекались остальные звенья?

И.Ефремов

M2807. Натуральные числа a , b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ и $a^3 + b^3 + c^3$ делятся на $a + b + c$. Кроме того, $\text{НОД}(a + b + c, 6) = 1$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $(a + b + c)^2$.

А.Антропов

M2808. Некоторые участники турнира дружат между собой, и у каждого есть хотя бы один друг. Каждому участнику турнира выдали футболку, на которой написано количество его друзей на турнире. Докажите, что хотя бы у одного участника среднее арифметическое чисел, написанных на футболках его друзей, не меньше, чем среднее арифметическое чисел на всех футболках.

*Олимпиада Чехии
и Словакии 1991 года*

M2809. Точки M и N выбраны, соответственно, на сторонах AC и BC треуголь-

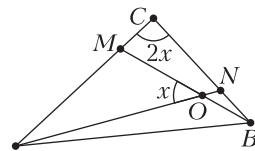


Рис. 1

ника ABC так, что $AM = BC$ и $CM = BN$ (рис. 1). Пусть O – точка пересечения отрезков AN и BM . Найдите угол ACB ,

если известно, что он вдвое больше, чем угол AOM .

А.Иванов, Н.Николов (Болгария)

Ф2813. В сосуд кладут кусок льда массой $m_л$ и заливают порцией воды массой $m_в$. На диаграмме (рис. 2) показаны области с указанием конечного состояния содержи-

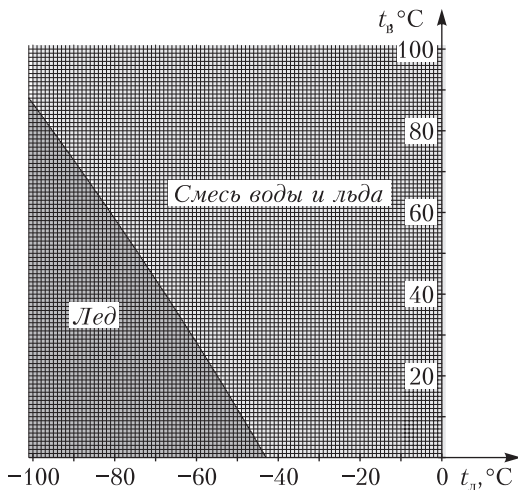


Рис. 2

мого сосуда в зависимости от температуры куска льда $t_{\text{л}} \in [-100^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$ и температуры порции воды $t_{\text{в}} \in [0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C}]$. Известно, что в диапазоне $[-100^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$ удельная теплоемкость льда зависит от его температуры по закону $c_{\text{л}}(t_{\text{л}}) = c + \alpha t_{\text{л}}$, где $c = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, $t_{\text{л}}$ – температура льда в градусах Цельсия, а α – некоторая постоянная величина. Удельная теплоемкость воды $2c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, а удельная теплота плавления льда $\lambda = 336 \text{ кДж}/\text{кг} = 2cT$, где $T = 80^\circ\text{C}$. Теплоемкостью сосуда и тепловыми потерями пренебречь.

- 1) Определите α и $\gamma = m_{\text{л}}/m_{\text{в}}$.
- 2) Качественно начертите аналогичную диаграмму конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры куска льда $t_{\text{л}} \in [-100^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$ и температуры порции воды $t_{\text{в}} \in [0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C}]$, но при равных массах льда и воды $m_{\text{л}} = m_{\text{в}}$. Укажите на диаграмме характерные точки.

Д. Рубцов

Ф2814. Прямой сплошной непроводящий усеченный конус заряжен по боковой поверхности так, что его поверхностная плотность заряда зависит от расстояния до вершины O целого конуса как $\sigma(x) = A/x$, где A – известная положительная константа. Основания усеченного конуса заряжены однородно с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (рис. 3). Длина образующей и половинный угол раствора конуса, дополняющего усеченный конус до целого, равны l и $\alpha = 30^\circ$ соответственно, длина образующей усеченного конуса равна l .

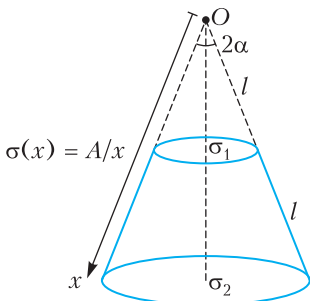


Рис. 3

1) Пусть $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$, где σ_0 – известная величина. Найдите вектор напряженности \vec{E}_O в точке O .

В конусе просверлили тонкий канал так, что пробный отрицательный заряд $-q$ ($q > 0$) массой m может без трения перемещаться вдоль оси симметрии конуса. Далее справедливо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$.

2) Докажите, что существует положение равновесия пробного заряда, не зависящее от значения σ_0 . Найдите это положение равновесия. В качестве ответа приведите расстояние от него до точки O .

3) При каких значениях σ_0 найденное положение равновесия будет устойчивым? Для значений, соответствующих устойчивому равновесию, найдите период малых колебаний пробного заряда в окрестности положения равновесия.

Примечание. Конус закреплен, диэлектрическая проницаемость усеченного конуса $\epsilon = 1$, влиянием силы тяжести и явлениями магнетизма пренебречь.

Г. Растрогов

Ф2815. Электрическая цепь представляет собой тетраэдр, в двух противоположных ребрах которого находятся первый и второй идеальные источники постоянного напряжения с ЭДС ϵ_1 и ϵ_2 соответственно, в остальных ребрах расположены четыре резистора R_1, R_2, R_3 и R_4 (рис. 4). Значения ЭДС источников и сопротивление одного из резисторов известны: $\epsilon_1 = 6 \text{ В}$, $\epsilon_2 = 12 \text{ В}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$. Величина силы тока через первый источник равна $I_1 = 1 \text{ А}$ и не изменяется при смене полярности подключения этого источника. Величина силы тока через второй источник при указанной на рисунке полярности равна $I_2 = 2 \text{ А}$. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

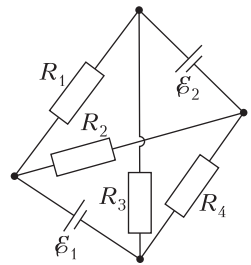


Рис. 4

1) Чему будет равна величина силы тока через второй источник, если полярность первого источника изменить?

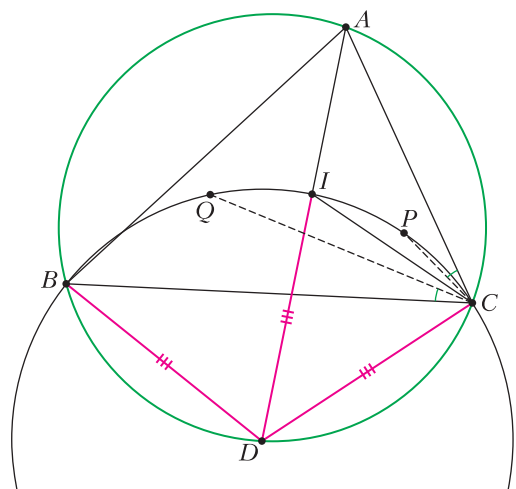


Рис. 2

Пусть I – точка пересечения отрезка AD и дуги BPC (рис. 2). Так как $DB = DC$, то равны и вписанные углы DAB и DAC , опирающиеся на дуги DB и DC . Значит, AD – биссектриса угла BAC .

Согласно теореме о трилистнике, центр вписанной в треугольник ABC окружности лежит на отрезке AD и удален на расстояние DB от точки D . Значит, этот центр совпадает с точкой I . Отсюда следует, что CI – биссектриса угла ACB .

С другой стороны, так как AD – серединный перпендикуляр к PQ , то $PI = QI$, а значит, углы PCI и QCI равны как опирающиеся на равные дуги (в окружности (BIC)).

Итак, CI является одновременно биссектрисой угла ACB и биссектрисой угла PCQ . Из этих двух утверждений, очевидно, следует утверждение задачи.

Заметим, что условие задачи вместе с аналогичным равенством углов $\angle ABP = \angle CBQ$ означает, что точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC . Фактически, в этой задаче мы видим, что изогональное сопряжение переводит окружность (BIC) в себя и действует на этой окружности как отражение относительно биссектрисы AI .

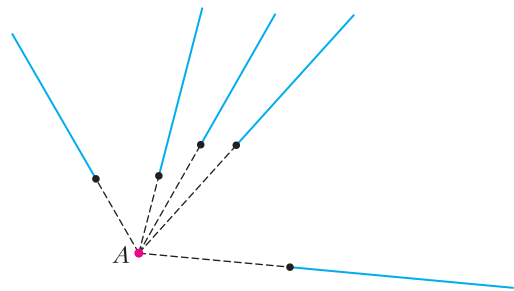
А.Заславский

M2795. Можно ли на плоскости из каждой точки с рациональными координатами выпустить луч так, чтобы никакие

два луча не имели общей точки и при этом среди прямых, содержащих эти лучи, никакие две не были бы параллельны и не совпадали?

Ответ: можно.

Идея решения будет заключаться в следующем: мы найдем такую точку A , что на любой прямой, проходящей через A , лежит не более одной рациональной точки (т.е. точки, обе координаты которой рациональны). Тогда, проведя из A всевозможные лучи во все рациональные точки и удалив у каждого луча начальный отрезок (от A до соответствующей рациональной точки), получим искомый набор лучей (см. рисунок).



Укажем искомую точку явно: $A(\sqrt{2}; \sqrt{3})$. Любая прямая, проходящая через две различные рациональные точки, может быть задана уравнением вида $ax + by + c = 0$, где a, b, c – рациональные числа и a и b одновременно не обращаются в 0. (В этом можно легко убедиться, записав уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.) Предположим, что такая прямая проходит через точку A , т.е. $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c = 0$. Пусть для определенности $a \neq 0$ (случай $b \neq 0$ разбирается аналогично). Если $c = 0$, то имеем $a\sqrt{6} + 3b = 0$, откуда $\sqrt{6}$ рационально – противоречие. Если $c \neq 0$, то имеем $a\sqrt{2} + c = -b\sqrt{3}$. Отсюда после возведения в квадрат получим $2a^2 + 2ac\sqrt{2} + c^2 = 3b^2$ и далее $\sqrt{2} = (3b^2 - 2a^2 - c^2)/(2ac)$ – рационально. Противоречие. Тем самым задача решена. Отметим, что можно также доказать существование искомой точки A без явного ее предъявления. Также решить задачу можно и совсем другим способом, основанном

на «счетном конструировании»: можно занумеровать рациональные точки и проводить лучи последовательно из рациональных точек в порядке возрастания их номеров. При этом можно (но не так просто!) выстроить этот пошаговый процесс так, чтобы очередной луч не пересекал проведенные ранее лучи.

П.Кожевников

M2796. Назовем полоской клетчатый многоугольник, который можно пройти целиком, начав из какой-то его клетки и далее двигаясь только в двух направлениях – вверх или вправо. Несколько таких одинаковых полосок можно вставить друг в друга, сдвигая на вектор $(-1; 1)$ (рис. 1). Докажите, что для любой полоски, состоящей из четного числа клеток, найдется такое нечетное k , что если объединить k таких же полосок, вставив их последовательно друг в друга, то полученный многоугольник можно будет разделить по линиям сетки на две равные части. (На рисунке 2 приведен соответствующий пример.)

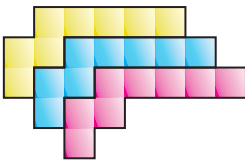


Рис. 1

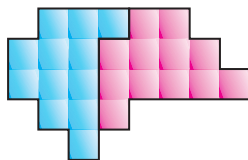


Рис. 2

Будем считать, что полоска расположена на бесконечной клетчатой (координатной) плоскости. Впишем нашу полоску Π в клетчатый прямоугольник $ABCD$ размера $a \times b$ ($AB = a$, $BC = b$). В полоске будет $(a + b - 1)$ клеток, поэтому $(a + b)$ нечетно. Пусть Π ограничена слева и сверху ломаной l , идущей из A в C (вправо-вверх).

Параллельно перенесем прямоугольник $ABCD$ вместе с полоской Π и ломаной l на вектор $(-a - b, a + b)$; пусть после переноса мы получили прямоугольник $A'B'C'D'$, вписанную в него полоску Π' и ограничивающую ее ломаную l' , идущую из A' в C' (рис. 3).

Рассмотрим все клетки, лежащие целиком в области, ограниченной ломаными l , l' и

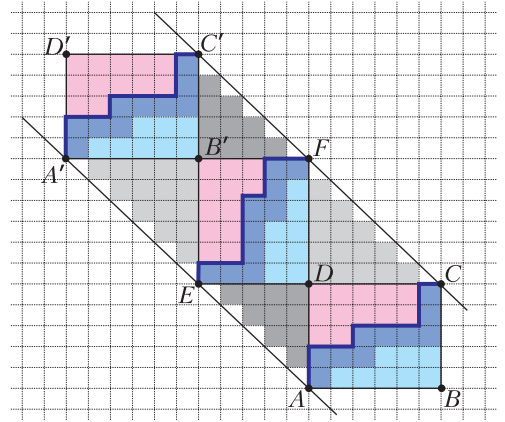


Рис. 3

отрезками AA' , CC' . Покажем, что эти клетки и образуют искомый клетчатый многоугольник M . Во-первых, ясно, что M получается как объединение $k = a + b$ сдвигов полоски Π на векторы $(-1; 1)$, $(-2; 2)$, ..., $(-k; k)$.

Остается показать, как разбить многоугольник M на два равных клетчатых многоугольника. Пусть $E = CD \cap C'B'$ и $F = AD \cap A'B'$ так, что $B'EDF$ – прямоугольник. По построению $CE = C'E = a + b$, значит, $DE = b$. Аналогично, $B'E = a$. Видим, что E и F лежат соответственно на отрезках AA' и CC' , а прямоугольники $B'EDF$ и $DCBA$ равны. Наложим прямоугольник $DCBA$ на $B'EDF$ (так, чтобы совместились соответствующие вершины: $D - с B'$, $C - с E$ и т.д.). Пусть при этом наложении ломаная l перешла в ломаную l'' . Ломаная l'' и будет делить M на две равные части. Действительно, рассмотренное выше наложение $DCBA$ на $B'EDF$ можно получить преобразованием плоскости φ , где φ – последовательное применение сдвига на вектор $\left(-\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ и отражения относительно средней линии между параллельными прямыми AA' и CC' (φ – скользящая симметрия). Легко видеть, что это же преобразование φ переводит соответственно A, C, F, E – в F, E, A', C' , а ломаную l'' – в l' . Получается, что φ совмещает указанные части многоугольника M .

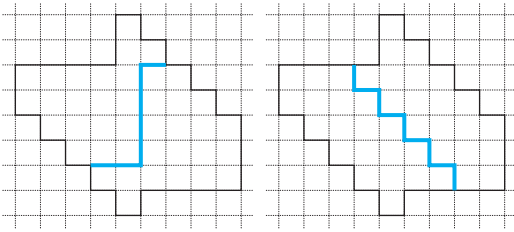


Рис. 4

Замечание. В завершение заметим, что требуемое разбиение может быть не единственно: на рисунке 4 показан пример для $k = 5$ и полоски из 8 клеток, в котором есть два разных способа разрезания (автор примера – В.Крюков).

И.Маркелов, С.Маркелов

M2797. Для вещественных чисел $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ докажите неравенство

$$\left(\frac{a_1}{1 \cdot 2} + \frac{a_2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{a_n}{n(n+1)} \right) \times \left(\frac{b_1}{1 \cdot 2} + \frac{b_2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{b_n}{n(n+1)} \right) \leq \frac{a_1 b_1}{1 \cdot 2} + \frac{a_2 b_2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{a_n b_n}{n(n+1)}.$$

Это неравенство можно доказать, используя неравенство Чебышёва (см. статью «О неравенстве Чебышёва для сумм»).

Приведем здесь также идею другого, более технического решения. Обозначим $f = f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ разность между левой и правой частями данного неравенства. Зафиксируем все a_i и b_i кроме a_2 . Тогда посмотрим на f как на линейную функцию переменной $x = a_2$ на отрезке $[a_1, a_3]$. Достаточно проверить неравенство при $x = a_1$ и $x = a_3$. Далее, скажем в случае $a_2 = a_3$, посмотрим на f как на линейную функцию переменной $x = a_2 = a_3$ на отрезке $[a_1; a_4]$ и т.д. Продолжая рассуждения с a_i , а затем аналогично с b_i , можно свести задачу к ситуации, в которой все a_1, \dots, a_n принимают не более двух значений (a_1 и a_n) и все b_1, \dots, b_n принимают не более двух значений.

А.Антропов

Ф2797. Обруч скользит по гладкой горизонтальной поверхности так, что плоскость обруча остается горизонтальной. Скорость оси обруча и частота его обращения вокруг этой оси, равная одному обороту в секунду, со временем не меняются. В некоторой точке обруча закреплена лампочка, ярко вспыхивающая через равные промежутки времени с частотой 4 раза в секунду. На фотографии, сделанной сверху с большой выдержкой с сохранением пропорций изображаемых предметов, можно видеть положение лампочки во время вспышек, следующих друг за другом. Рисунок 1 выполнен по фотогра-

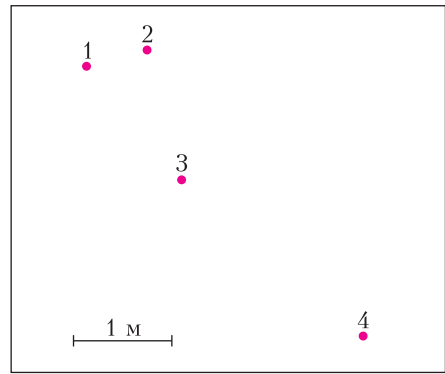


Рис. 1

фии, на нем точками обозначены места вспышек, а цифрами их номера в порядке появления. Используя линейку с делениями и циркуль, найдите скорость оси и радиус обруча. Отрезок, соответствующий расстоянию в 1 метр, показан в нижней части рисунка.

Задача может быть решена разными способами. Покажем один из них (наиболее простой по мнению автора).

Пусть $\{\vec{r}_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, – совокупность радиус-векторов точек, изображенных на рисунке 1, в некоторой системе координат; $\{\vec{R}_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, – это совокупность радиус-векторов точек, изображающих центр диска в моменты вспышек. Обозначим \vec{a} – вектор, проведенный из точки, изображающей центр диска, к точке, изображающей лампочку, в момент первой вспышки, а \vec{b} – аналогичный вектор для момента второй вспышки. Справедливы

соотношения

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 + \vec{a}, \quad \vec{r}_3 = \vec{R}_1 + \vec{v} \cdot 2t - \vec{a}, \quad (1)$$

в которых \vec{v} – скорость движения центра диска. Для моментов второй и четвертой вспышек верны соотношения

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 + \vec{b}, \quad \vec{r}_4 = \vec{R}_2 + \vec{v} \cdot 2t - \vec{b}. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следуют формулы

$$\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2} = \vec{R}_1 + \vec{v}t = \vec{R}_2, \quad \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_4}{2} = \vec{R}_3.$$

Легко видеть, что полусумма векторов $\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2}$ есть радиус-вектор середины отрезка, соединяющего точки 1 и 3. Отсюда следует вывод о том, что точка, изображающая центр диска в момент второй вспышки, совпадает с серединой отрезка 13. Аналогично, точка, изображающая центр диска в момент третьей вспышки, совпадает с серединой отрезка 24.

Таким образом, построение содержит следующие шаги. Строим середины отрезков 13 и 24 (точки O_2 и O_3 соответственно на рисунке 2). Длина отрезка O_2O_3 равна радиусу диска. За четверть секунды точка, изображающая центр диска, проходит путь, соответствующий длине отрезка O_2O_3 .

Измерения по чертежу, сделанные после построений при помощи линейки, дают $O_2O_3 = 34,5$ мм, $O_2O_3 = 64,5$ мм. Сравнив при помощи линейки найденные длины с длиной отрезка, соответствующего длине 1 метр,

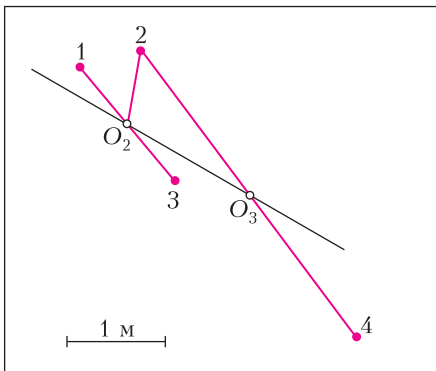


Рис. 2

получаем искомые величины

$$R \approx \frac{34,5}{45} \text{ м} = 0,75 \text{ м},$$

$$v \approx \frac{64,5}{45} \cdot 4 \text{ м/с} \approx 5,7 \text{ м/с}.$$

П. Крюков

Ф2798. Состояние одного моля идеального двухатомного газа изменяется в цикле, состоящем из процессов с постоянной теплоемкостью. На рисунке изображен

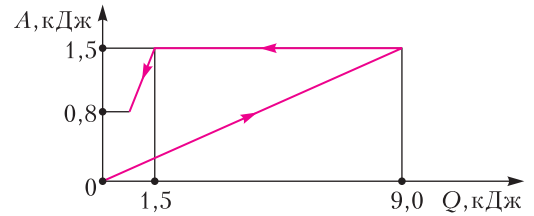


график зависимости работы, совершаемой газом, от количества теплоты, полученного или отданного им при достижении текущего состояния.

А. Определите КПД цикла.

Б. Чему равна минимальная температура газа в этом циклическом процессе, если максимальная температура равна 481 К? *Примечание.* Квазистатический процесс, при котором молярная теплоемкость газа с остается постоянной, описывается соотношением $pV^{(c-c_p)/(c-c_v)}$, где p и V – давление и объем соответственно, c_v и $c_p = c_v + R$ – это молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно.

Используя график, находим КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{0,8 \text{ кДж}}{0,9 \text{ кДж}} = 8,9\%,$$

где A – работа, совершенная газом за цикл, Q_+ – подведенное к газу количество теплоты.

Найдем теплоемкость газа в процессе, который описывается уравнением $A = \frac{1}{6} Q$ (прямолинейный участок, проходящий через начало координат). Запишем первое начало термодинамики для процесса с постоянной теплоемкостью:

$$c\Delta T = c_v\Delta T + A,$$

откуда получим следующее соотношение

$$A = (c - c_V) \Delta T = \frac{(c - c_V)}{c} Q.$$

Следовательно, $\frac{(c_1 - c_V)}{c_1} = \frac{1}{6}$, откуда

$$c_1 = \frac{6}{5} c_V = 3R.$$

Зная теплоемкость газа, найдем изменение температуры в этом процессе:

$$Q = 3R \Delta T_1,$$

$$\Delta T_1 = \frac{9 \text{ кДж/моль}}{3 \cdot 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}} = 361 \text{ К}.$$

Во втором процессе работа газа равна нулю, поэтому для него справедлива формула $Q = c_V \Delta T_2$, из которой следует

$$\Delta T_2 = -\frac{7,5 \text{ кДж/моль}}{\frac{5}{2} \cdot 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}} = -361 \text{ К}.$$

В начале и в конце третьего процесса с постоянной теплоемкостью температуры газа равны, следовательно, это изотермический процесс.

Минимальная температура газа в цикле равна

$$T_{\min} = T_{\max} + \Delta T_2 = 481 \text{ К} - 361 \text{ К} = 120 \text{ К}.$$

А.Бычков

Ф2799. Идеализированная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента под названием туннельный диод изображена на рисунке 1. Условное обозначение туннельного диода на схемах показано в верхней части рисунка. Там же над символом диода указано положительное направление тока через него. Обозначенные на графике токи и напряжения I_1, I_2, U_1 и U_2 будем называть параметрами

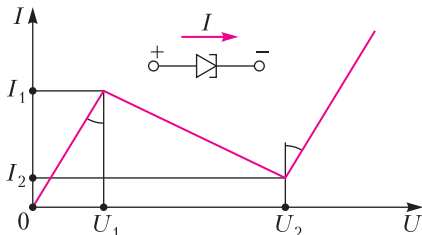


Рис. 1

дио́да. Обозначенные на графике углы считаем равными.

А. Рассмотрим туннельный диод, параметры которого $I_1 = 4I_2 = 4i, U_2 = 4U_1 = 4u$, при этом значения i и u считаются известными. Этот диод подключили к идеальному источнику с напряжением $U_0 = 6u$ последовательно с переменным резистором, сопротивление которого может меняться в широких пределах (рис. 2). При каких значениях сопротивления резисто-

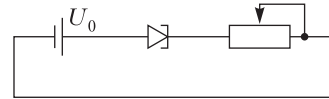


Рис. 2

ра значение тока в цепи определяется однозначно?

Б. Параметры другого туннельного диода $I_1 = 10 \text{ мА}, I_2 = 1 \text{ мА}, U_1 = 0,2 \text{ В}, U_2 = 0,8 \text{ В}$. При помощи этого диода и балластного резистора R_0 собрали цепь по схеме, показанной на рисунке 3. Известно, что ток через резистор R в этой цепи имеет одно и то же значение при любом входном напряжении из диапазона $U = 3,2 \pm 0,2 \text{ В}$.

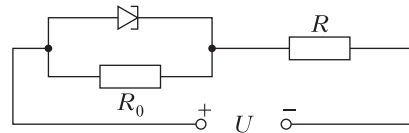


Рис. 3

- 1) Найдите сопротивление балластного резистора R_0 .
- 2) Чему может быть равно сопротивление нагрузки R ? Укажите границы диапазона возможных значений R_{\min} и R_{\max} .

А. Обозначим $V(I)$ зависимость напряжения на туннельном диоде от текущего через него тока. Тогда ток в рассматриваемой цепи определяется уравнением $U_0 - IR = V(I)$, количество решений которого зависит от величины параметра R . Графический метод решения этого уравнения состоит в определении координат точки (или точек) пересечения вольт-амперной характеристики и прямой $U = U_0 - IR$. На графике, представленном на рисунке 4, пунктирной линией показана пря-

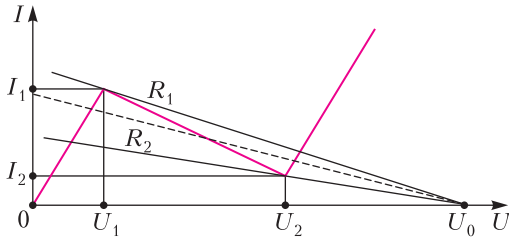


Рис. 4

мая, соответствующая такому значению сопротивления, при котором ток цепи определяется неоднозначно (уравнение имеет три решения). Тонкими сплошными линиями черного цвета показаны прямые, соответствующие таким значениям сопротивления R_1 и R_2 , что уравнение имеет два решения.

Легко видеть, что искомые значения сопротивления, при которых ток в цепи определяется однозначно, даются неравенствами

$$R < R_1, \quad R > R_2.$$

Теперь остается определить значения R_1 и R_2 . Значение R_1 определяется из уравнения

$$u = 6u - 4i R_1.$$

Аналогичное уравнение можно записать и для определения значения R_2 :

$$4u = 6u - i R_2.$$

Решая эти уравнения, получаем ответы:

$$R > \frac{2u}{i}, \quad R < \frac{5u}{4i}.$$

Б. Параллельное соединение туннельного диода и резистора может обеспечить постоянный ток в этой цепи (в некотором диапазоне напряжений) в том случае, если вольт-амперная характеристика этого параллельного соединения имеет горизонтальный участок, что реализуется при значении сопротивления балластного резистора, равном

$$R_0 = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = \frac{600}{9} \text{ Ом} \approx 66,7 \text{ Ом}.$$

Теперь можем легко вычислить постоянное значение тока через нагрузку:

$$I_{\text{const}} = I_1 + \frac{U_1}{R_0} = 13 \text{ мА}.$$

Обозначим минимальное входное напряжение $U_{\text{min}} = 3,0 \text{ В}$, тогда значение тока I_{const} через нагрузку реализуется при следующих значениях сопротивления нагрузки:

$$\frac{U_{\text{min}} - U_2}{I_{\text{const}}} \leq R \leq \frac{U_{\text{min}} - U_1}{I_{\text{const}}}.$$

Вычислив значения и округлив до целого, получим неравенства

$$170 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}.$$

Рассуждая аналогично, можем рассчитать диапазон возможных значений сопротивления нагрузки для максимального входного напряжения $U_{\text{max}} = 3,4 \text{ В}$. Получится двойное неравенство

$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 246 \text{ Ом}.$$

Пересечение полученных отрезков дает ответ на вопрос задачи:

$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}.$$

П.Крюков

Ф2800. Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющий фотоаппарат и объект съемки). Наклон оптической оси дает возможность получать резкие изображения протяженных предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата. На упрощенной схеме, представленной на рисунке 1, собирающая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива отклонена на угол φ от линии зрения AA_1 , составляющей угол α с горизонталью. Фотографируемый предмет изобража-

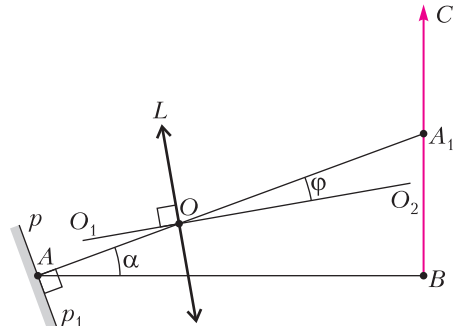


Рис. 1

ется отрезком BC , pp_1 – плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или пленка, если речь идет о пленочной камере). Пусть известны расстояние $AB = 5$ м по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние объектива $f = 50$ мм, а также угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота главной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ , считая его малым.

Указание. Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближенные соотношения $\sin \beta \approx \beta$, $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$.

Для того чтобы изображение предмета получалось наиболее резким, необходимо, чтобы прямые, на которых лежат предмет BC , отрезок, символизирующий плоскость пленки, и линза пересекались в одной точке. В этом случае изображение предмета будет полностью лежать в плоскости пленки. Обозначим буквой G точку, в которой пересекаются описанные прямые (рис. 2). Искомый угол обозначен дугой на рисунке, a и a_1 – длины перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на линзу. Длины a и a_1 связаны формулой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}.$$

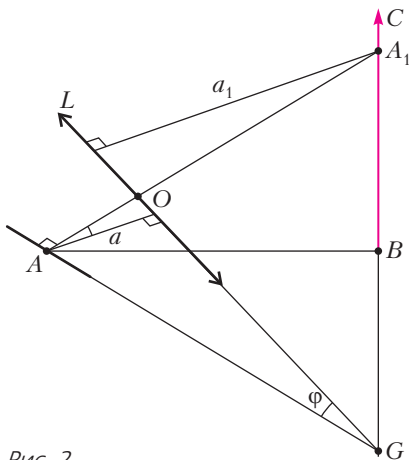


Рис. 2

При этом, поскольку искомый угол φ мал ($\cos \varphi \approx 1$), справедливы соотношения $a \approx AO$ и $a_1 \approx A_1O$. Отсюда следует равенство

$$a + a_1 = AA_1 = \frac{L}{\cos \alpha} = L\sqrt{2},$$

в котором введено обозначение $L = AB$. Решая два уравнения как систему, отбираем решение, не противоречащее физическому смыслу:

$$a = L\sqrt{2} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}f}{2L}}}{2} \approx L\sqrt{2} \frac{4\sqrt{2}f}{4 \cdot 2L} = f.$$

При записи последней цепочки равенств была использована приближенная формула $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$, справедливая при малых x ($|x| \ll 1$). Поскольку $\angle A_1AB = \frac{\pi}{4}$, отрезки AA_1 и AG равны, при этом $AA_1 = AG = L\sqrt{2}$.

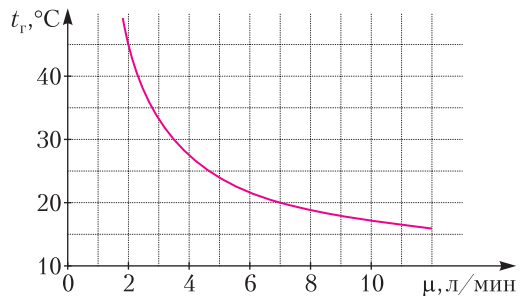
Таким образом, искомый угол равен

$$\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}} \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 0,4^\circ.$$

П.Крюков

Ф2801. Проточный водонагреватель – это устройство, которое обеспечивает подачу горячей воды из крана путем нагрева холодной воды, которая проходит через него. На графике (см. рисунок) представлена зависимость температуры t_r горячей воды на выходе из крана от объемного расхода μ воды через проточный нагреватель.

- 1) Найдите мощность P водонагревателя.
- 2) Найдите температуру t_n холодной воды, поступающей в нагреватель.



3) При каком объемном расходе μ температура горячей воды будет равна $t_{\text{к}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$?

Удельная теплоемкость воды равна $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Считайте, что мощность нагревателя постоянна, тепловыми потерями можете пренебречь.

Пусть P – мощность водонагревателя, τ – время, в течение которого вода находится в нагревателе, тогда количество теплоты, переданное нагревателем за это время воде, равно

$$Q_1 = P\tau.$$

Суммарное количество теплоты, полученное водой за время нахождения в нагревателе, равно

$$Q_2 = c m (t_{\text{г}} - t_{\text{н}}).$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau = c m (t_{\text{г}} - t_{\text{н}}).$$

Так как масса воды $m = \rho V = \rho \mu \tau$, где V – объем нагревателя, то

$$P\tau = c \rho V (t_{\text{г}} - t_{\text{н}}),$$

$$P = c \rho \mu (t_{\text{г}} - t_{\text{н}}).$$

На данном в условии графике можно выбрать точки с координатами, которые «хорошо» определяются:

$$t_{\text{г}1} = 45 \text{ }^\circ\text{C}, \mu_1 = 2 \text{ л/мин} = \frac{2}{60} \text{ л/с}$$

$$\text{и } t_{\text{г}2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \mu_2 = 7 \text{ л/мин} = \frac{7}{60} \text{ л/с}.$$

Тогда

$$P = c \rho \mu_1 (t_{\text{г}1} - t_{\text{н}}),$$

$$P = c \rho \mu_2 (t_{\text{г}2} - t_{\text{н}}).$$

Отсюда получим

$$t_{\text{н}} = \frac{\mu_2 t_{\text{г}2} - \mu_1 t_{\text{г}1}}{\mu_2 - \mu_1} = 10 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$P = 4200 \cdot 1000 \cdot \frac{0,002}{60} \cdot (45 - 10) \text{ Вт} = 4,9 \text{ кВт}.$$

Объемный расход, при котором температура нагретой воды будет равна $100 \text{ }^\circ\text{C}$, равен

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{4900}{4200 \cdot 1000 \cdot 90} \text{ м}^3/\text{с} = \\ &= 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с} = 0,78 \text{ л/мин}. \end{aligned}$$

А.Вергунов

Ф2802. Готовясь к олимпиаде по физике, десятиклассник Денис собрал электрическую цепь (рис. 1,а), состоящую из четырех одинаковых амперметров, диода и регулируемого источника тока. Полярность подключения амперметров и направление тока через источник указаны на схеме, а зависимость силы тока, протекающего через диод, от напряжения на нем представлена на рисунке 1,б. Изменяя силу тока I_0 , выдаваемую источником, Денис выяснил, что зависимость силы тока через один из амперметров от I_0 имеет вид, изображенный на рисунке 1,в, где I_1 – известный параметр.

1) Для какого из амперметров (A_1 , A_3 или A_4) справедлива зависимость, изображенная на рисунке 1,в? Свой ответ обоснуйте.

2) Определите, при каком значении I_0 ток через амперметр A_2 не течет.

3) Постройте качественный график зависимости показаний амперметра A_2 от

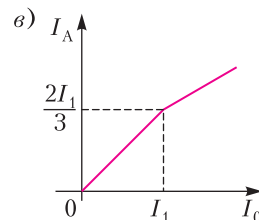
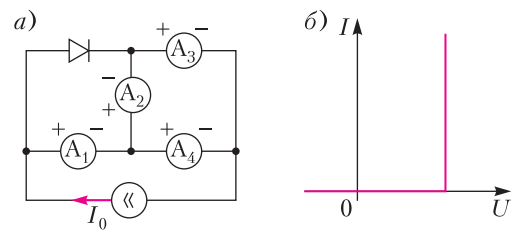


Рис. 1

силы тока через источник, указав на нем координаты характерных точек.

Примечание. Источником тока называется устройство, через которое течет заданный ток, независимо от параметров внешней цепи.

Рассмотрим малые значения силы тока I_0 , при которых диод будет закрыт. В этом случае эквивалентная схема примет вид, изображенный на рисунке 2. Найдем токи,

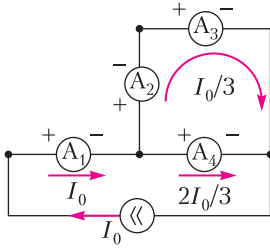


Рис. 2

текущие через амперметры. Сила тока через A_1 равна I_0 . Так как A_4 присоединен параллельно к паре амперметров A_2 и A_3 , а его сопротивление вдвое меньше, чем суммарное сопротивление второго и третьего приборов, то сила тока через A_4 будет равна $2I_0/3$. Сила тока, текущего через A_2 и A_3 , следовательно, станет $I_0/3$. На графике, представленном в условии на рисунке 1, *в*, участок, идущий от начала координат, описывается уравнением $I = 2I_0/3$, что соответствует результату, полученному для четвертого амперметра. Пусть r – сопротивление амперметра. Определим сначала напряжение открытия диода U_D . Так как характер зависимости тока через четвертый амперметр от I_0 меняется при $I_0 = I_1$, это значение соответствует тому, что напряжение на диоде достигло U_D , но ток через диод еще равен нулю (переход от горизонтального участка вольт-амперной характеристики прибора к вертикальному). Запишем условие равенства напряжения на диоде суммарному напряжению на первом и втором амперметрах при $I_0 = I_1$:

$$U_D = I_1 r + \frac{I_1}{3} r = \frac{4I_1 r}{3}.$$

Ситуация, когда ток через второй ампер-

метр не течет, во-первых, может произойти только при открытом диоде. Во-вторых, если ток через A_2 не течет, то напряжения на A_3 и A_4 равны, что означает равенство токов через них:

$$I_{A3} = I_{A4} = \frac{I_0}{2}.$$

Соответственно, должны быть равны напряжения на первом амперметре и на диоде. Поскольку в рассматриваемом случае $I_{A1} = I_{A4}$, то

$$U_D = I_{A1} r, \frac{4I_1 r}{3} = \frac{I_0}{2} r, I_0 = \frac{8I_1}{3}.$$

Пока диод закрыт, т.е. при $I_0 < I_1$, сила тока через второй амперметр $I_{A2} = I_0/3$. Если $I_0 > I_1$, то напряжение на диоде постоянно и равно $U_D = 4I_1 r/3$. Чтобы построить ту часть искомого графика, которая соответствует открытому диоду, можно рассуждать одним из двух способов.

Первый способ. Вольт-амперная характеристика диода состоит из двух прямолинейных участков – горизонтального и вертикального. Поэтому, если находиться в пределах только одного участка (в данном случае, вертикального), диод можно считать линейным элементом. Остальные элементы цепи, представленной в условии, тоже имеют прямолинейные характеристики, т.е. также являются линейными. Следовательно, зависимость силы тока на втором амперметре от I_0 при $I_0 > I_1$ является линейной. Отсюда, учитывая, что график этой зависимости должен проходить через точки $(I_1; I_1/3)$ и $(8I_1/3; 0)$, получим график, изображенный на рисунке 3.

Второй способ. Расставим токи в цепи при $I_0 > I_1$, учитывая, что напряжение на дио-

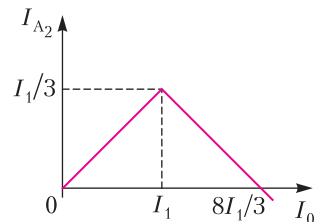


Рис. 3

де равно U_D . Пусть сила тока через второй амперметр равна I_{A2} . Тогда, исходя из равенства суммы напряжений на A_1 и A_2 напряжению на диоде, получим, что ток через первый амперметр равен

$$I_{A1} = \frac{U_D - I_{A2}r}{r} = \frac{U_D}{r} - I_{A2}.$$

Соответственно, токи через A_3 и A_4 будут равны

$$I_{A4} = I_{A1} - I_{A2} = \frac{U_D}{r} - 2I_{A2},$$

$$I_{A3} = I_0 - I_{A4} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 2I_{A2}.$$

Так как сумма напряжений на A_2 и A_3 должна быть равна напряжению на A_4 , то

$$I_{A4}r = I_{A2}r + I_{A3}r,$$

$$\frac{U_D}{r} - 2I_{A2} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 3I_{A2}.$$

Отсюда, используя равенство $U_D = 4I_1/3$, найдем

$$I_{A2} = \frac{2U_D}{5r} - \frac{I_0}{5} = \frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5}.$$

Далее строим графики зависимостей $I_{A2} = I_0/3$ при $I_0 < I_1$ и $I_{A2} = 8I_0/15 - I_0/5$ при $I_0 > I_1$ и получаем тот же рисунок 3.

Д. Рубцов

Ф2803. В однородном магнитном поле в отсутствие силы тяжести движется заряженная частица. На рисунке 1 представлен график зависимости модуля перемещения этой частицы r относительно точки, в которой находилась эта частица в момент времени $t = 0$, от времени ее дальнейшего движения t .

- 1) Определите модуль скорости v , с которой движется частица.
- 2) Определите угол α между вектором скорости частицы в момент $t = 0$ и вектором индукции магнитного поля.
- 3) Определите индукцию магнитного поля, если заряд частицы равен $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а ее масса $m = 1,0 \cdot 10^{-26}$ кг.
- 4) Найдите расстояние между двумя положениями частицы, которые соответствуют точкам А и Б на графике.

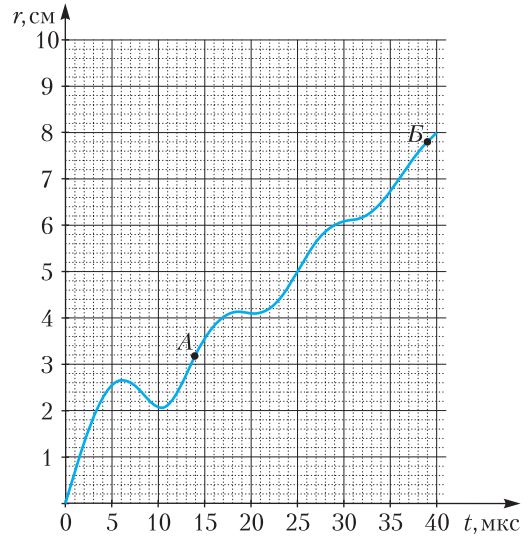


Рис. 1

Постоянное магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей и поэтому, если пренебречь излучением, модуль скорости частицы не изменяется. Значит, величина скорости частицы равна величине скорости при $t = 0$.

Отметим, что при конечных ускорениях всегда существует такой «малый» интервал времени после начала движения, на котором скорость удаления частицы от начального положения примерно равна начальной скорости, т.е. можно считать, что $r \approx vt$. Поэтому для нахождения скорости частицы проведем касательную к графику функции в начале координат (синяя прямая на рисунке 2). Величина скорости при этом численно равна тангенсу угла наклона этой прямой:

$$v = \frac{9,8 \text{ см}}{14 \text{ мкс}} \approx 7 \text{ км/с}.$$

Направим ось z вдоль вектора индукции магнитного поля, выбирая для простоты начало координат так, чтобы $z = 0$ при $t = 0$. Обозначим $v_{||}$ проекцию вектора скорости частицы на ось z , а v_{\perp} — величину перпендикулярной этой оси составляющей. Так как сила Лоренца, действующая на частицу, не имеет составляющей вдоль оси z , то

$$z(t) = v_{||}t.$$

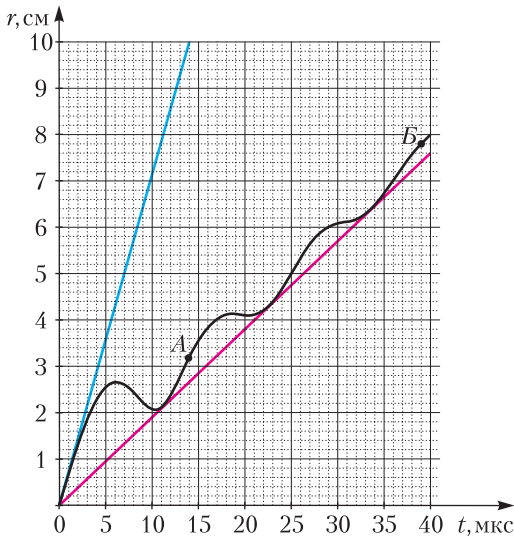


Рис. 2

В сечении, перпендикулярном оси z , движение частицы происходит по окружности с постоянной скоростью v_{\perp} . Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB},$$

где B – модуль вектора магнитной индукции, а время одного оборота равно

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Таким образом, траектория частицы представляет собой винтовую линию с шагом $h = v_{\parallel}T$ и радиусом $R = v_{\perp}T/(2\pi)$. Выбирая оставшиеся оси координат максимально удобным способом, можно записать, что

$$x(t) = R \cos(2\pi t/T), \quad y(t) = R \sin(2\pi t/T),$$

откуда, учитывая, что в момент $t = 0$ частица находилась в точке с координатами $x = R, y = z = 0$, получим формулу зависимости модуля ее перемещения от времени:

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{(x(t) - R)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = \\ &= \sqrt{v_{\parallel}^2 t^2 + 4R^2 \sin^2(\pi t/T)}. \end{aligned}$$

Теперь поделим выражение для $r(t)$ на t :

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{v_{\parallel}^2 + 4R^2 \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{t} \right)^2}.$$

Второе слагаемое в подкоренном выражении при любом t не может быть меньше нуля, следовательно, $r(t)/t \geq v_{\parallel}$. Это значит, что прямая, идущая в координатах r, t из начала, имеющая общие точки с приведенным в условии графиком и обладающая наименьшим угловым коэффициентом, является прямой $r = |v_{\parallel}|t$. Поэтому для того чтобы определить v_{\parallel} , проведем касательную из начала координат к нижней части графика (красная прямая на рисунке 2). Точки касания соответствуют ситуации, когда частица находится на прямой, проходящей через начальную точку и параллельной линиям магнитного поля. Тангенс наклона такой прямой численно равен

$$|v_{\parallel}| = \frac{7,6 \text{ см}}{40 \text{ мкс}} = 1,9 \text{ км/с}.$$

Отсюда находим

$$\cos \alpha = \frac{v_{\parallel}}{v} \approx \pm 0,271, \quad \alpha \approx 74^\circ \text{ или } \alpha \approx 106^\circ.$$

Точки касания нижней прямой располагаются через одинаковые промежутки времени, равные времени T прохода частицей одного витка винтовой линии. Для увеличения точности возьмем крайнюю (третью) точку касания и получим

$$T = 34 \text{ мкс}/3 \approx 11,3 \text{ мкс},$$

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-26} \text{ кг}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 11,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}} \approx 35 \text{ мТл}.$$

Между положениями A и B прошло время $t_{AB} = 39 \text{ мкс} - 14 \text{ мкс} = 25 \text{ мкс}$. За это время частица сместилась вдоль линий магнитного поля на расстояние

$$\Delta z = |v_{\parallel}|t_{AB} = 4,75 \text{ см}.$$

В проекции на перпендикулярную магнитному полю плоскость частица движется по окружности радиусом

$$R = \frac{v_{\perp}T}{2\pi} \approx 1,21 \text{ см}.$$

Ее смещение в этой плоскости равно

$$\Delta l = 2R \sin(\pi t_{AB}/T) \approx 1,50 \text{ см}.$$

Отсюда получим

$$L_{AB} = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta z^2} \approx 5,0 \text{ см}.$$

Ф2804. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы, на котором были изображены тонкая линза, ее фокусы и луч, проходящий через один из фокусов. От времени чернила выцвели, и на чертеже



Рис. 1

остались видны только луч и фокус F , через который он проходил. Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) положение линзы.

Примечание. При построении данного чертежа Снеллиус предполагал, что данная линза любые лучи (даже непараксиальные) преломляет по тем же правилам, что и параксиальные. Параксиальный луч – это луч, идущий под малым углом к главной оптической оси линзы и на малом расстоянии от нее.

Возможны два случая – линза собирающая и линза рассеивающая. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

Собирающая линза. Луч, прошедший через фокус собирающей линзы, после преломления в ней идет параллельно главной оптической оси. Таким образом, из рисунка 1 нам известны направление главной оптической оси и одна из ее точек (F). По этим данным восстанавливаем положение самой оптической оси. Для этого проводим

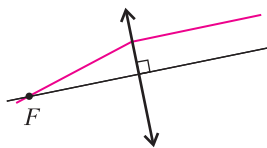


Рис. 2

через F прямую, параллельную лучу после преломления (рис. 2). Плоскость линзы перпендикулярна оптической оси и нам известна

одна из ее точек – точка, где преломляется луч. Положение плоскости линзы восстанавливаем проведением перпендикуляра к оптической оси из точки преломления луча.

Рассеивающая линза. Фокус линзы F , ее оптический центр O и точка преломления луча образуют прямоугольный треугольник. Построим на отрезке (как на диаметре), соединяющем фокус и точку преломления луча, окружность (рис. 3). Оптический центр должен лежать на этой окружности. Из формулы тонкой линзы (или

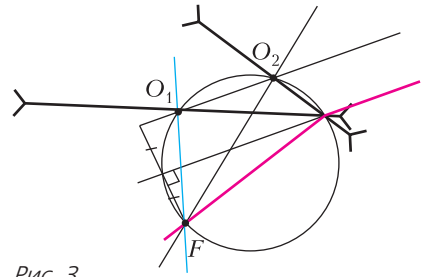


Рис. 3

используя тот факт, что параллельный пучок лучей после преломления на рассеивающей линзе идет так, что продолжения пересекаются в одной точке фокальной плоскости) можно показать, что луч, прошедший через фокус рассеивающей линзы, после преломления идет так, как будто прошел через половинный фокус. Продлим луч, который преломился в линзе – он должен делить пополам отрезок OF . Построим вспомогательный луч, параллельный продолжению преломленного луча и находящийся в два раза дальше от точки F . Он пройдет через оптический центр линзы, не отклоняясь от своего первоначального направления. Таким образом, оптический центр линзы может находиться в точках пересечения вспомогательного луча с окружностью. В нашем случае таких пересечений два (точки O_1 и O_2). Значит, возможны два варианта расположения рассеивающей линзы. В каждом варианте плоскость линзы проходит через точку преломления исходного луча и соответствующий оптический центр.

Отметим, что в случае рассеивающей линзы для двух полученных решений известный нам луч идет под разными углами к главной оптической оси линзы, которые по построению связаны между собой. Если обозначить через α_1 угол между лучом и FO_1 и через α_2 – угол между лучом и FO_2 , то можно показать, что $\text{tg } \alpha_1 \cdot \text{tg } \alpha_2 = 1/2$. Следовательно, только один из этих лучей может являться параксиальным – ведь если один из этих углов мал, то другой должен иметь достаточно большое значение тангенса. Может быть и так, что оба угла не являются малыми. Поэтому только свойство линзы, указанное в условии, позволяет нам считать, что оба решения корректны.

Д. Рубцов

О неравенстве Чебышёва для сумм

А.АНТРОПОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ВСПОМНИМ о замечательном неравенстве Чебышёва, поговорим о его разных вариациях и трактовках, а также приведем решение задачи М2797 «Задачника «Кванта» (точнее, поймем, что по сути приведенное в задаче неравенство – частный случай неравенства Чебышёва).

Первое неравенство Чебышёва для сумм.

Пусть даны неотрицательные числа p_1, p_2, \dots, p_n такие, что $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, и два упорядоченных набора вещественных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Тогда

$$(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n)(p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n) \leq p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n. \quad (1)$$

«Что?! Это не неравенство Чебышёва!» – может воскликнуть искушенный читатель. Действительно, в олимпиадном фольклоре неравенством Чебышёва для сумм принято называть следующее неравенство.

Второе неравенство Чебышёва для сумм.

Для упорядоченных наборов $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ выполнено

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}. \quad (2)$$

Легко видеть, что весовое неравенство (1) является обобщением неравенства (2): достаточно положить $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$.

С другой стороны, следующее упражнение показывает, что в некотором смысле неравенство (1) можно свести к неравенству (2).

Упражнение 1. Выведите неравенство (1) из неравенства (2), если p_1, p_2, \dots, p_n рациональны.

Указание. Пусть $p_i = m_i/m, i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрите для неравенства (2) набор

$a_1 = a_1 = \dots = a_1 \leq a_2 = a_2 \dots \leq a_n = a_n = \dots = a_n$, в котором m_1 копий a_1, m_2 копий a_2 и т.д.

Прежде чем доказать неравенство (1), покажем, как им воспользоваться для решения задачи М2797.

Сначала сделаем такое общее замечание.

Замечание. Пусть в неравенстве (1) все $a_i \geq 0$ и $b_i \geq 0$. Тогда оно остается верным, если в условии заменить равенство $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ на неравенство $p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq 1$.

Действительно, пусть $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n \geq 0$ (в случае $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0$ все p_i равны 0 и неравенство очевидно). Положим $q_i = \frac{p_i}{p}$, так что $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, запишем неравенство (1) с весами q_i и получим

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p} \cdot \frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n}{p} \leq \frac{p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n}{p}.$$

Поскольку сумма $p_i a_i b_i$ неотрицательная, а $p \leq 1$, домножение на p^2 дает требуемое:

$$(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n)(p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n) \leq p(p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n) \leq p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n.$$

Свести случай $p \leq 1$ к $p = 1$ можно и по-другому – путем ввода дополнительных переменных $a_0 = b_0 = 0$ и дополнительного веса $p_0 = 1 - (p_1 + \dots + p_n)$.

Теперь положим $p_i = \frac{1}{i(i+1)}$. Как известно,

$p_1 + p_2 + \dots + p_n < 1$ при любом n (действительно, $p_i = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ и, значит,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда в силу замечания выше выполнено $(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n)(p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n) \leq p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n$.

Это и есть нужное нам неравенство. Задача М2797 решена.

Вернемся к доказательству первого неравенства Чебышёва. Доказать его поможет следующее несложное, но полезное алгебраическое соображение: пары вещественных чисел (a, b) и (c, d) упорядочены одинаково тогда и только тогда, когда $(a - b)(c - d) \geq 0$.

Доказательство неравенства (1). Зафиксируем индексы i, j (возможно, $i = j$). Из условия одинаковой монотонности последовательностей $a_1 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_n$ следует $0 \leq (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ или, после раскрытия скобок,

$$a_i b_j + a_j b_i \leq a_i b_i + a_j b_j.$$

Домножим обе части на $p_i p_j$ и запишем неравенство в следующем виде:

$$(p_i a_i)(p_j b_j) + (p_j a_j)(p_i b_i) \leq p_j (p_i a_i b_i) + p_i (p_j a_j b_j).$$

Далее просуммируем по всем возможным $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$. Видно, что после суммирования оба слагаемых в левой части превратятся в левую часть неравенства (1), а оба слагаемых в правой части – в правую (поскольку $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$). Остается поделить на 2 и получить (1).

Упражнение 2 (неравенство Чебышёва для противоположных упорядочений). Пусть даны неотрицательные числа p_1, p_2, \dots, p_n такие, что $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, и два упорядоченных набора вещественных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Тогда

$$(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n)(p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n) \geq p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n.$$

Говоря о неравенстве Чебышёва, уместно вспомнить еще одно важное неравенство об упорядоченных наборах.

Транснеравенство. Пусть даны наборы вещественных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n, \sigma$ – некоторая перестановка индексов $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (3)$$

Об этом неравенстве и его применении можно прочитать в «Кванте» в статье Л. Пинтера и Й. Хегедыша «Упорядоченные наборы чисел и неравенства» («Квант», 1985, №12) и в «Квантике» в статье Е. Бакаева

«Транснеравенство, или Как разлить мед по горшочкам» («Квантик», 2024, №1). Отметим, что из транснеравенства можно вывести второе неравенство Чебышёва, подобрав n подходящих перестановок σ и суммируя для них неравенства (3).

* * *

Далее поговорим о монотонных функциях и немного о ... вероятности.

Если функция $f(x)$ монотонна, а $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ – неубывающая последовательность значений аргументов, то последовательность значений функции f также будет монотонной. Скажем, если f не убывает, то $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_n)$. Ясно, что и наоборот, любая монотонная последовательность $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ может являться последовательностью значений некоторой монотонно неубывающей функции в заданных значениях аргументов $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Тогда первое неравенство Чебышёва можно переформулировать так:

Пусть $p_i \geq 0$, причем $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, f, g – некоторые неубывающие функции и $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ – вещественные числа. Тогда

$$(p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n)) \times (p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2) + \dots + p_n g(x_n)) \leq p_1 f(x_1) g(x_1) + p_2 f(x_2) g(x_2) + \dots + p_n f(x_n) g(x_n). \quad (1')$$

Попробуем разобраться, что же написано в неравенстве (1') с точки зрения теории вероятностей, которой, в частности, много и успешно занимался Пафнутий Львович. Посмотрим на p_i как на вероятности, а на x_i – как на элементы вероятностного пространства (так что исход x_i происходит с вероятностью p_i для $i = 1, 2, \dots, n$). Функция f определяет случайную величину (будем ее тоже обозначать f); тогда $p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n)$ – это среднее значение, или математическое ожидание случайной величины f . Сделав аналогичные замечания для g и произведения fg , «прочитаем» заново неравенство (1'): оно означает, что для случайных величин, определяемых нашими монотонными функциями f и g , математическое ожидание их произведения

больше или равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathbb{E}f \cdot \mathbb{E}g \leq \mathbb{E}(fg). \quad (1'')$$

Суть этого неравенства проще понять, если знать, что такое *корреляция* двух случайных величин. Корреляция принимает значения из $[-1; 1]$ и измеряет, насколько зависимы величины, в частности, если величины независимы, то их корреляция равна нулю, а для сильно зависимых величин корреляция близка к 1.

Формально корреляция определяется так. Для величин f и g вводится *ковариация* $\text{cov}(f, g)$ – это математическое ожидание произведения отклонений величин f и g от их средних значений. А корреляцию величин f и g полагают равной

$$\frac{\text{cov}(f, g)}{\sqrt{\text{cov}(f, f)} \cdot \sqrt{\text{cov}(g, g)}}.$$

Вводя временно обозначения $M_f = \mathbb{E}f$ и $M_g = \mathbb{E}g$, можем записать

$$\text{cov}(f, g) = \mathbb{E}((f - M_f)(g - M_g)).$$

Зададимся вопросом, когда выражение $(f - M_f)(g - M_g)$ положительно? Ответ понятен: или когда обе функции f и g одновременно больше своих средних значений, или когда обе одновременно меньше. Говоря неформально, $\text{cov}(f, g)$ измеряет степень похожести функций.

Вернемся к неравенству (1''). Оказывается, разность правой и левой частей равна

$$\begin{aligned} & \text{cov}(f, g). \text{ Действительно,} \\ \text{cov}(f, g) &= \mathbb{E}((f - M_f)(g - M_g)) = \\ &= \mathbb{E}(fg - M_f g - M_g f + M_f M_g) = \\ &= \mathbb{E}(fg) - M_f \mathbb{E}g - M_g \mathbb{E}f + M_f M_g = \\ &= \mathbb{E}(fg) - \mathbb{E}f \cdot \mathbb{E}g, \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство следует из линейности математического ожидания, а последнее – из определений M_f и M_g .

Получается, что неравенство Чебышёва (1') отражает в целом логичное соображение о похожести монотонных функций.

В завершение для читателей, знакомых с интегралами, приведем непрерывный вариант неравенства Чебышёва. При этом неравенство имеет тот же теоретико-вероятностный смысл и отражает тот же неформальный тезис о похожести монотонных функций.

Третье неравенство Чебышёва (для монотонных функций). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две неубывающие (или две невозрастающие) функции, определенные на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Упражнение 3*.

а) Выведите из интегрального неравенства Чебышёва неравенства Чебышёва для сумм.

б) Выведите (предельным переходом от интегральных сумм к интегралу) из неравенства Чебышёва для сумм интегральное неравенство.

(Начало см. на с. 13)

утверждает, что желтый получается именно так. Так зачем же с ним спорить?»

Я смутился. Я не знал, что сказать. Наконец, я ответил: «Всю свою жизнь я изучаю свет. И я считаю, что, смешивая красный и белый цвет, желтый получить *невозможно* – можно получить лишь розовый».

Итак, я отправился в хозяйственный магазин, купил краску и принес ее обратно в ресторан. Маляр спустился со второго этажа, и хозяин ресторана тоже пришел посмотреть. Я поставил банки с краской на старый стул, и маляр начал смешивать краски. Он взял красную краску, добавил белой – мне

по-прежнему казалось, что получается розовый цвет, – он смешал еще немного краски. После этого он пробормотал что-то вроде: «Я обычно использовал небольшой тюбик желтой краски, чтобы усилить эффект – вот тогда получится желтый цвет».

– А! – сказал я. – Конечно! Если добавить желтый, то получится желтый, но без него ничего не выйдет.

Маляр ушел обратно красить комнату.

Хозяин ресторана сказал: «У этого парня хватило наглости спорить с человеком, который всю жизнь изучает свет!»

Из книги «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!»

Найди флюксию [т.е. производную] и положи ее равной нулю.

Исаак Ньютон

...[производная] выражает собою тот отрезочек пути, на который тельце перемещается сверх того расстояния, которое пройдено им в силу бывшего у него раньше движения.

Леонард Эйлер

Все любящие анализ [математический] с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа...

Жозеф Луи Лагранж

Не морочьте мне голову с вашей математикой: производная – это скорость!

Уильям Томсон (Кельвин)

Ньютон поставил общий вопрос: как изменяется скорость свободного тела под действием произвольно заданной силы?... Эта задача... требует нового математического аппарата, специально созданного для этой цели Ньютоном...

Альберт Эйнштейн

...сложный процесс нахождения производной называется, кроме того, дифференцированием. ...Когда вы больше привыкнете к новым словам, вам станет более понятна сама мысль.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + ПРОИЗВОДНАЯ?

Производная и интеграл – основные понятия математического анализа. Хотя знакомство с ними происходит только в старших классах школы, с частью физических задач, требующих их применения, можно справиться и ранее. В таких случаях вы оказываетесь в положении предтеч ученых, завершивших создание дифференциального и интегрального исчисления. Этим славным предшественникам довелось изобрести целый калейдоскоп способов, позволяющих находить альтернативные варианты решений, например – при поиске экстремумов функций, описывающих физические процессы.

Попробуйте и вы сегодня использовать подобные подходы. Начните с производной. Если же без производной в принципе не обойтись, что поделаешь, привыкайте, по Фейнману, к новым словам и понятиям и стремитесь быстрее ими овладеть.

А об интеграле – в следующий раз.

Вопросы и задачи

1. Какой физический смысл могут иметь производные функций: а) $v(t)$ – скорости; б) $q(t)$ – заряда, проходящего через поперечное сечение проводника; в) $Q(T)$ – количества переданное количество теплоты; г) $A(t)$ – совершенной работы; д) $\Phi(t)$ – магнитного потока, пронизывающего контур; е) $N(t)$ – количества радиоактивных атомов?

2. Лыжник съезжает с горы высотой H , оканчивающейся горизонтальным трамплином. При какой высоте трамплина h лыжник пролетит наибольшее расстояние s по горизонтали и каково оно? Трение и сопротивление воздуха не учитывать.

3. Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона расстояние $s = 25$ м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением $a = 0,5 \text{ м/с}^2$. Пассажиру побегал с постоянной скоростью. При какой минимальной скорости он догонит свой вагон?

4. Фонарь, находящийся на расстоянии $R_0 = 3$ м от вертикальной стены, равномерно вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 0,5 \text{ с}^{-1}$ и бросает на стену световой зайчик. Какова скорость зайчика через $t = 0,1$ с после того, как луч света оказывается перпендикулярен стене?

5. Лодка, имеющая скорость v_0 , спускает парус в момент времени t_0 , но продолжает двигаться с гиперболической зависимостью скорости от времени $\left(v \sim \frac{1}{t}\right)$. Как ускорение лодки будет зависеть от ее скорости?

6. Зависимость массы неоднородного стержня от его длины $m(l) = kl^2$, где $k = 3 \text{ кг/м}^2$. Чему равна линейная плотность стержня в точке $l = 2$ м, меньшей полной его длины L ?

$$p(V) = aV + bV^2 + cV^3$$

7. Как графически показать, что при изменении потенциальной энергии тела U на постоянную величину U_0 сила, действующая на тело в каждой точке, не изменится?

8. По оси x в ее положительном направлении движется тело с постоянной скоростью 5 м/с. Потенциальная энергия тела меняется вдоль оси по закону $U(x) = -10^{-2}x$ Дж. Найдите мощность, развиваемую силами сопротивления, препятствующими движению.

9. Идеальный газ расширяется по закону $p(V) = aV + b$, где известны $a < 0$ и $b > 0$. При каком объеме газа в этом процессе достигается максимальная температура?

10. Определите наибольшее возможное давление ν молей идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)$, где T_0, V_0 – известные положительные постоянные ($V > V_0$).

11. Источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r замыкают на реостат. При каком сопротивлении реостата на нем будет выделяться максимальная мощность? Чему она равна?

12. Можно ли получить постоянное вихревое электрическое поле?

13. Возникнет ли ЭДС самоиндукции в катушке, по которой идет постоянный ток?

14. Почему при включении электромагнита в электрическую цепь полная сила тока устанавливается не сразу?

Микроопыт

Производную, оказывается, можно явно «почувствовать», если вспомнить, что вы испытываете в автомобиле при его рывке с места или резком торможении. О какой именно физической величине идет в этом случае речь?

Любопытно, что ...

...еще Архимед исследовал вопросы, связанные с определением экстремумов и проведением касательных. Разработанные им методы предопределили возникшее в XVII веке дифференциальное исчисление.

...своей немалый вклад в становление математического анализа внесли Галилей и его ученики Вивiani и Торричелли, разработавшие методы построения касательных, французские ученые Роберваль, Декарт и Ферма,

спор между которыми привел к общепризнанному с тех пор определению касательной как предельного положения секущей.

...способ проведения касательных Пьера Ферма дал Ньютону, по его признанию, намек на создание дифференциального исчисления. Лейбниц, делящий с Ньютоном славу творца этой теории, отмечал, как был близок к ее построению еще Блез Паскаль, а известный Ферма алгоритм нахождения экстремумов позволил Лейбницу вывести закон преломления света Снеллиуса.

...в основе новой математики Ньютона и Лейбница лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближенно рассматривать как прямолинейное и равномерное.

...уравнения, содержащие не только сами функции, но и их производные, т.е. так называемые дифференциальные уравнения, позволили расширить описание законов природы, справиться с задачами, долгое время не поддававшимися решению. Так, в небесной механике удалось не только объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия. Примером может служить обнаружение в 1846 году планеты Нептун или открытие электромагнитных волн.

...с использованием производных различных порядков записываются второй закон Ньютона, законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, уравнения Максвелла, выражающие все основные закономерности электромагнитных явлений, знаменитое уравнение Шредингера, играющее в атомных процессах такую же фундаментальную роль, как законы Ньютона в классической механике.

Что читать в «Кванте» о физике и производной (публикации последних лет)

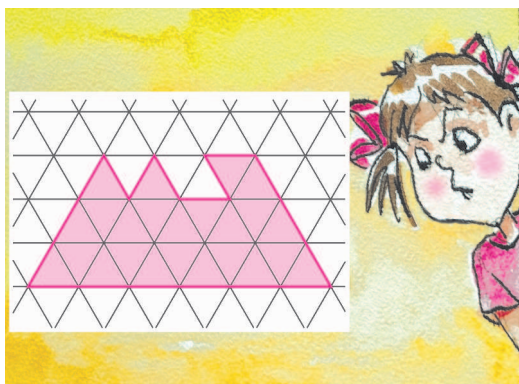
1. «Принцип Ферма и необычное поведение света» – 2017, №2, с.27;
2. «Льем воду...» – 2019, №10, с. 29;
3. «Что такое фазовый портрет» – 2019, №11, с.29;
4. «Самое правильное уравнение динамики» – 2019, №12, с. 24;
5. «Архимед и астрофизика» – 2020, №9, с.2;
6. «Издавна долго течет река...» – 2021, №6, с.36;
7. «Поток импульса» – 2024, №2, с.41.

Материал подготовил А.Леонovich

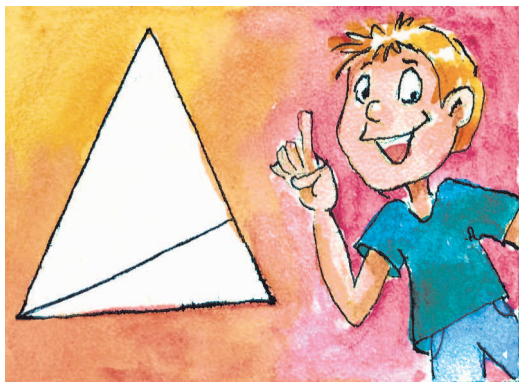
Задачи

1. Можно ли разрезать фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части (т.е. на части, совпадающие по форме и по размерам)?

Т.Голенищева-Кутузова



2. В остроугольном треугольнике ABC высота BH вдвое больше расстояния от H до BC . Докажите, что высота AK вдвое больше расстояния от K до AC .



3. В ряд положили 22 белых, 23 синих и 24 красных шарика. Может ли у

Фольклор

каждого шарика быть ровно один сосед отличного от него цвета?



каждого шарика быть ровно один сосед отличного от него цвета?

А.Пешнин

4. Король решил устроить испытание для своего придворного мудреца. Перед мудрецом положили девять карточек с номерами от 1 до 9 (мудрец видит номера) и сообщили, что на другой стороне карточек также записаны числа от 1 до 9, причем каждое записанное число, кроме двух, совпадает с номером карточки, а два перепутаны. За один вопрос мудрец может указать на одну или несколько карточек и узнать сумму записанных там скрытых от него чисел. Может ли он гарантированно определить перепутанные карточки за три вопроса?

М.Евдокимов, А.Грибалко



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предлагались на Московской устной олимпиаде.

Как Студент о ледяном дожде размышлял

А. СТАСЕНКО

В настоящее время известны три аморфных разновидности и 17 кристаллических модификаций льда.

Общеизвестный факт

Однажды, наблюдая покрытые прозрачной наледью обломанные ветки деревьев и оборванные провода (кошмар для энергетиков!), вдумчивый Студент предался размышлениям о сути явления. Почему при обычном дожде капли воды легко соскальзывают с горизонтальной ветки, оставив всего лишь влажный след, а при ледяном – мгновенно примерзают? И что значит «мгновенно»?

Наверное, разумной оценкой может служить время τ прохождения каплей ветки диаметром D , равное $\tau = D/v$, где v – уста-

новившаяся скорость падающей капли. Последнюю легко оценить, приравняв силу тяжести капли mg силе сопротивления воздуха, которую аэродинамики традиционно записывают в виде

$$F_c = \frac{C}{2} \rho S v^2.$$

Здесь $S = \pi r^2$ – поперечное сечение шара радиусом r , а C – безразмерный коэффициент сопротивления, который еще великий Исаак Ньютон (1643–1727) определил равным 0,42. Принимая в качестве характерного размера капли $d = 1$ мм и учитывая, что масса капли равна $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v$ (плотность воды $\rho_v = 10^3$ кг/м³, плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м³), из равенства сил

$$F_c = mg, \text{ или } \frac{C}{2} \rho S v^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v g,$$

получаем $v = 5$ м/с. Следовательно, для ветки диаметром $D = 1$ см имеем

$$\tau = \frac{10^{-2}}{5} \text{ с} \approx 2 \text{ мс}.$$

Правда, тут можно задуматься, действительно ли капля дождя круглая. Ведь часто ее рисуют в виде вытянутой кегли. Но скорее всего капля похожа на сплюснутую булочку, поскольку точка приложения силы тяжести

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20240803>



лежит выше «подпирающей снизу» равнодействующей сил сопротивления воздуха.

Разумно оценить отношение «сплюсывающей» силы сопротивления $F_c = mg$ и «восстанавливающей» силы поверхностного натяжения $F_{\text{пн}} = 2\pi r\sigma$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Это отношение

$$\frac{mg}{2\pi r\sigma} = We$$

называется числом Вебера (Мориц Вебер, 1871–1951). Ясно, что если $We \ll 1$, каплю можно считать шаром; а если значение этого числа превышает единицу, то капля сплюсывается и при $We \approx 4\pi$ разрушается. Для нашей миллиметровой капли

$$We \approx 10^{-2} \ll 1,$$

(здесь для коэффициента поверхностного натяжения воды принято $\sigma = 0,07$ Н/м).

Однако, не это определяет ответ на вопрос, поставленный вдумчивым Студентом. Дело в том, что капли ледяного дождя являются переохлажденными, их температуры по шкале Цельсия (Андерс Цельсий, 1701–1744) ниже нуля; им давно следовало бы превратиться в ледышки, а они остаются жидкими! Такое состояние неустойчивого равновесия называется метастабильным, и оно легко нарушается при любом толчке (тем более при соударении переохлажденной капли с преградой).

Подобный процесс впервые наблюдал в 1721 году Фаренгейт (Габриель Фаренгейт, 1686–1736), изобретатель известной температурной шкалы, используемой до сих пор англосаксами. Он выставил на мороз (-15 °С) колбу с дистиллированной водой и утром с удивлением обнаружил, что вода осталась жидкой, но при легкой встряске она превратилась в лед.

Итак, при попадании на ветку переохлажденная капля воды «мгновенно» (за время меньше τ) кристаллизуется. Но, позвольте, – подумал вдумчивый Студент, – куда же девается теплота фазового перехода, она же теплота плавления льда L ? Ведь если ее не отводить, то капля должна нагреться. Легко оценить, на сколько именно градусов, приравняв полученное удельное количество теплоты удельной теплоте кристаллизации:

$$c_0\Delta T = L.$$

Взяв из справочников

$$c_0 = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$$

$$\text{и } L = 3,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг},$$

получим $\Delta T = \frac{L}{c_0} \approx 80$ кельвинов! Тут уж воде пора бы вскипеть, а не замерзнуть. Куда же девается эта энергия за время механического взаимодействия с веткой? Можно показать, что время отвода энергии кристаллизации путем теплопроводности для круглой капли диаметром 1 мм составляет секунды, т.е. много больше τ . Конечно, для расплюсченной оно меньше, но ненамного [1].

Неужели ... излучение? – осенило Студента. В таком случае какова его характерная длина волны λ ? Считая, что каждая молекула воды массой $m_0 = 18m_n$ ($m_n = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг – масса нуклона) соучаствует в этом процессе, длину волны можно найти из равенства

$$Lm = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Здесь $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка (Макс Карл Эрнст Людвиг Планк, 1858–1947), $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света. В результате получим $\lambda \approx 20$ мкм.

Понятно, почему никто не видит это инфракрасное излучение невооруженным глазом, который «работает» в оптическом диапазоне $0,4 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 0,8 \text{ мкм}$ (см. таблицу). И даже не всякий тепловизор сможет зафиксировать его, тут нужен болометр. Однако, как же это излучение может выбраться из объема кристаллизующейся капли? Ведь, согласно справочным данным, характерная глубина проникновения такого излучения всего 10 микрометров! Что же получается – примерзает только поверхностный слой капли, расплюсченной вдоль твердой поверхности, а остальное фазовое тепло уходит путем теплопроводности?!

Конечно, в реальности линейчатый спектр излучения, связанный со структурой молекулы, гораздо богаче. Основные характеристические линии для воды лежат в окрестности 2–3 мкм [2, 3]. Кроме того, существует непрерывный спектр с максимумом, зависящим от температуры согласно закону смещения Вина (Вильгельм Вин, 1864–1928) для абсолютно черного тела. (Между прочим, Солнце – это абсолютно черное тело!)

Диапазоны электромагнитного излучения

Название	Граница диапазона по длине волны (λ)	Граница диапазона по энергии квантов (W)
Гамма-излучение	$\lambda < 1,2 \cdot 10^{-3}$ нм	$W > 1$ МэВ
Рентгеновское излучение	$1,2 \cdot 10^{-3}$ нм $< \lambda < 12$ нм	100 эВ $< W < 1$ МэВ
Ультрафиолетовое излучение	12 нм $< \lambda < 380$ нм	$3,2$ эВ $< W < 100$ эВ
Видимый спектр излучения	380 нм $< \lambda < 760$ нм	$1,6$ эВ $< W < 3,2$ эВ
Инфракрасное излучение	760 нм $< \lambda < 10^6$ нм	$1,2 \cdot 10^{-3}$ эВ $< W < 1,6$ эВ
Радиоволны	$\lambda > 10^6$ нм	$W < 1,2 \cdot 10^{-3}$ эВ

Однако, сколько замечательных физиков вспомнилось в связи с ледяным дождем! – подумал Студент и твердо решил посещать все лекции по квантовой механике и термодинамике.

Рекомендованная литература

1. А. Стасенко. Зачем площадь зерна, или О плотности потоков. – «Квант», 2019, № 11.

2. А.А. Шибков. Собственное электромагнитное излучение растущего льда. – Природа, 2000, № 9.

3. В.А. Татарченко, Инфракрасное характеристическое излучение фазовых переходов первого рода и его связь с оптикой атмосферы. – Оптика атмосферы и океана, т.23, № 3, 2010.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Шалтай, Болтай
и Брокер

А. ЗАСЛАВСКИЙ

Летом 2024 года на XX Олимпиаде имени И.Ф. Шарьгина участникам 9 и 10 классов соответственно были предложены две следующие задачи.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, Q – такая точка внутри треугольника, что $\angle AQH = \angle BQO = \pi/2$. Докажите, что $\angle QAC = \angle QBA = \angle QCB$.

Задача 2. На одной из медиан треугольника ABC нашлась такая точка P , что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Докажите, что на другой медиане найдется такая точка Q , что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$.

Поскольку в обеих задачах упоминается такая точка Q , что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$, можно предположить наличие связи между ними. Ниже мы покажем, что связь действительно есть, а пока скажем, что точка Q и точка, обозначенная во второй задаче как P , называются *точками Брокера* треугольника ABC . Точки Брокера обладают многими красивыми свойствами, которым был посвящен проект на XXV Летней конференции Турнира городов в 2013 году. Также о них можно прочитать в книге А.В. Акоюяна и А.А. Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка». Впрочем, в дан-

ной статье нам будет достаточно следующего упражнения.

Упражнение 1. Докажите, что для любого треугольника точки Брокера существуют, строятся однозначно и изогонально сопряжены.

Приведем теперь решения задач 1 и 2.

Решение задачи 1. Пусть M – середина AB . Тогда B, O, Q, M лежат на окружности с диаметром OB , а A, H, Q, M лежат на окружности с диаметром AH . Отсюда

$$\angle QAH = \angle QMH = \angle QMO = \angle QVO$$

(рис. 1). Видим, что $\triangle QAH \sim \triangle QVO$, иначе говоря, Q – центр поворотной гомотетии,

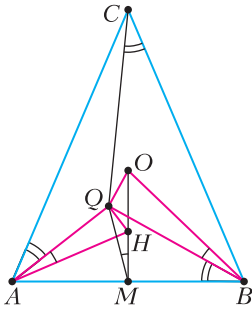


Рис. 1

переводящей \overline{AH} в \overline{BO} . Но из простого счета углов ($\angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle ABC = \angle HAB = \angle HBA$) следует, что $\triangle AHB \sim \triangle BOC$. Это значит, что поворотная гомотетия, о которой говорилось выше, переводит также B в C . Следовательно, $\triangle QAB \sim \triangle QCA$, откуда $\angle QCB = \angle QBA$ и $\angle QBC = \angle QAB$. Тогда $\angle QAC = \angle BAC - \angle QAB = \angle CBA - \angle QBC = \angle QBA$, и все доказано.

Решение задачи 2. Пусть P лежит на медиане из вершины B . Тогда AC касается окружности (CPB) , а значит, и окружности (APB) , потому что медиана является их радикальной осью, т.е. степени середины AC относительно обеих окружностей равны. С другой стороны, окружность (APB) касается стороны BC , потому что $\angle PBC = \angle PAB$ (рис. 2), следовательно, $AC = BC$ и точка Q , симметричная P относительно оси симметрии треугольника, удовлетворяет условию.

Заметим, что в задаче 1 из подобия треугольников QAB и QBC следует, что $\sin \angle QAB = QA : QB = AB : AC$, т.е. точка Q лежит на медиане треугольника. Таким образом, утверждения задач 1 и 2 обратны друг

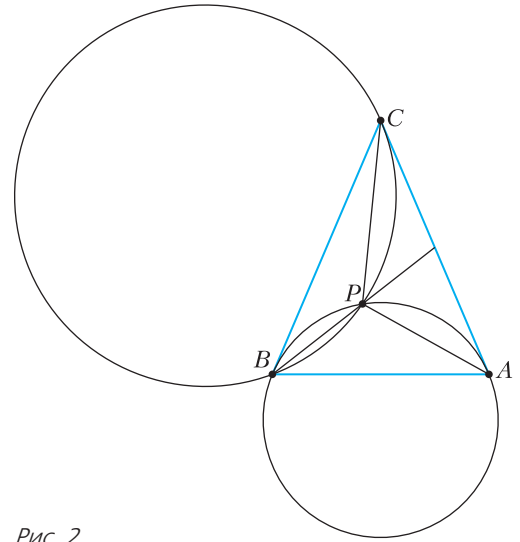


Рис. 2

другу и их можно объединить следующим образом.

Утверждение. Точка Брокера лежит на медиане тогда и только тогда, когда треугольник равнобедренный.

Поскольку точки Брокера изогонально сопряжены, медиану в этом утверждении можно заменить на симедиану.

Исследуем теперь другие свойства точки Q на рисунке 1. Очевидно, что она удовлетворяет равенствам $\angle QAB = \angle QBC$, $\angle QAC = \angle QCB$. Эти равенства определяют так называемую *точку Шалтая* (точнее, A -точку Шалтая, поскольку аналогично можно определить точки Шалтая, соответствующие двум другим вершинам).

Упражнение 2. Докажите, что A -точка Шалтая является:

проекцией ортоцентра на медиану из вершины A ;
второй общей точкой двух окружностей, проходящих через A и касающихся стороны BC в точках B, C соответственно.

Точки, изогонально сопряженные точкам Шалтая, называются *точками Болтая*. Непосредственно из определения следует, что A -точка Болтая удовлетворяет условиям $\angle PAB = \angle PCA$, $\angle PAC = \angle PBA$.

Упражнение 3. Докажите, что A -точка Болтая является:

проекцией центра описанной окружности на симедиану из вершины A ;
второй общей точкой двух окружностей, касающихся в A сторон AB, AC и проходящих через C, B соответственно.

Таким образом, точки P , Q в задаче 2 являются точками Шалтая, а поскольку они изогонально сопряжены, то и точками Болтая.

Подводя итог, отметим, что фактически в задачах 1 и 2 доказана равносильность следующих утверждений:

- в треугольнике ABC отрезки AC и BC равны;
- точки Брокера лежат на медианах из вершин A и B ;

- точки Брокера лежат на симедианах из вершин A и B ;

- A -точка Шалтая совпадает с B -точкой Болтая;

- точки Брокера являются точками Шалтая;

- точки Брокера являются точками Болтая.

Возможно, читатели смогут обнаружить другие свойства рассмотренной конструкции.

Об одной задаче LXV Международной математической олимпиады

Н. ПАНЮНИН

В этой статье будет рассказано об одной симпатичной задаче с прошедшей международной математической олимпиады. Вот ее условие.

Улитка Турбо играет на доске, имеющей 2024 ряда и 2023 столбца, в следующую игру. В 2022 клетках доски прячутся монстры. Изначально Турбо не знает, где находится какой-либо из монстров, но она знает, что в каждом ряду, кроме первого и последнего, есть ровно один монстр и что в каждом столбце находится не более одного монстра.

Турбо делает серию попыток, чтобы пройти из первого ряда в последний. При каждой попытке она может выбрать в качестве начальной любую клетку в первом ряду, а затем совершает серию перемещений из клетки в соседнюю клетку, имеющую общую сторону. (Ей разрешается возвращаться в ранее посещенные клетки.) Если она посещает клетку с монстром, то ее

попытка завершается и она переносится обратно в первый ряд, чтобы начать новую попытку. Монстры не двигаются, а Турбо запоминает, есть ли в каждой посещенной ею клетке монстр. Если она достигнет любой клетки в последнем ряду, ее попытка завершается и игра оканчивается.

Определите минимальное значение n такое, что у Турбо есть стратегия, которая, независимо от местонахождений монстров, гарантирует достижение последней строки за n попыток или раньше.

Даже если вы восьмиклассник или семиклассник, попробуйте сначала решить задачу самостоятельно. Не исключено, что, прочитав решение или даже увидев ответ, вы поймете, что могли бы и сами найти решение. Заметим, тем не менее, что и участники, и даже руководители некоторых традиционно сильных команд имели сложности с этой задачей. Наибольшее суммарное количество баллов за эту задачу – 38 – получили ребята из российской команды.

Сначала исследуем задачу. Занумеруем строки сверху вниз, а столбцы – слева направо. Клетку, располагающуюся в i -й строке и j -м столбце, будем обозначать (i, j) . Зеленым цветом будем обозначать поля, где точно нет монстров, красным – где есть монстры, желтым – подозрительные поля. Вместо доски 2023×2024 рассмотрим поле с 11 столбцами и 12 строками. Суть решения от этого не изменится, а общий случай оставим читателю.

Пусть Турбо обнаружила монстра во второй строке, потратив на это одну попытку (рис. 1). Заметим, что в этом случае от монстров свободны все остальные клетки второй строки, слева и справа от монстра, а

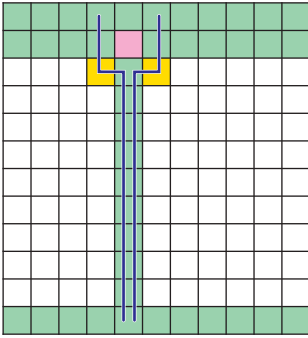


Рис. 1

также все клетки столбца под монстром. Тогда, используя еще одну попытку, чтобы понять, есть ли монстр в желтых клетках, не больше чем с третьей попытки Турбо доберется до цели по одному из синих путей.

Однако проведенное рассуждение не проходит в случае, когда обнаруженный Турбо монстр находится с краю второй строки, например, слева (рис. 2). В этом случае, если Турбо будет проверять, свободна ли желтая клетка, она может наткнуться на монстра, потратив таким образом вторую попытку. Но обойти эту клетку, как в случае

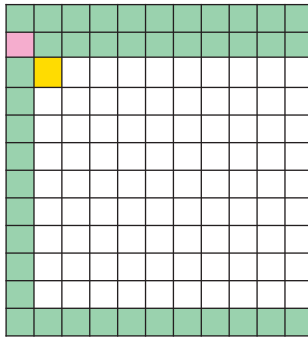


Рис. 2

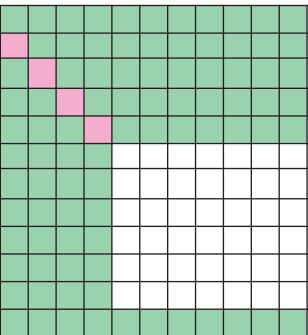


Рис. 3

с монстром не с краю, уже не получится: слева стена. Таким образом, для прохода в нижнюю строку могут понадобиться четыре попытки: две уже использованы, а Турбо гарантированно может пройти только в третью строку. Если она будет продолжать действовать таким образом, то в случае диагонального расположения монстров (рис. 3) число попыток будет возрастать.

Можно ли поступить как-то иначе? Решающим соображением, как быть в этом случае, является отказ от проверки монстров в крайних положениях.

Теперь перейдем непосредственно к изложению решения. Пусть Турбо действует следующим образом.

Во время первой попытки Турбо проверяет все клетки второй строки, кроме крайних (2,1) и (2,11). Если в одной из них есть монстр, то Турбо уже знает, как не более чем за три попытки дойти до нижней строки. Если же нет, то, оставив крайние клетки в качестве подозрительных (рис. 4), Турбо будет проверять клетки третьей строки. Снова не все, а начиная с (3,3) и до (3,9). Если в этих клетках окажется монстр, то опять же Турбо знает, как не более чем за три попытки дойти до последней строки.

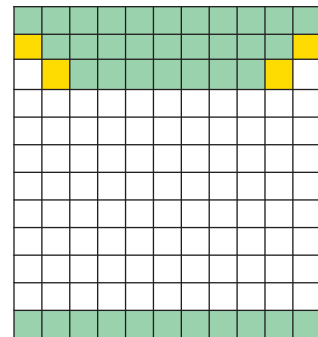


Рис. 4

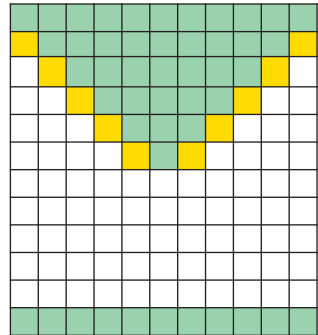


Рис. 5

Если же нет, то Турбо будет проверять клетки четвертой строки, начиная с (4,4) и до (4,8). И так далее до проверки в строке номер 6 клетки (6,6) (рис. 5).

Если в клетке (6,6) есть монстр, то Турбо снова доберется за три попытки до последней строки. Если же нет, то мы находимся в ситуации, когда проверены клетки, отмеченные зеленым на рисунке 5, и в них нет монстров. Кроме того, есть подозрительные клетки, которые мы посчитали невыгодным проверять, поскольку в случае обнаружения там монстра за три попытки Турбо не доберется до низа. Эти клетки отмечены желтым.

Теперь нужно остановиться и подумать, что делать дальше. Поступим так. Пусть Турбо выяснит, где именно находится монстр в 6-й строке. Для этого ей придется потратить одну попытку. Допустим, монстр находится в левой части 6-й строки в отмеченной красным цветом клетке (рис. 6). Значит, остальные клетки этой строки свободны от монстров.

Затем пусть Турбо проверит все клетки справа от желтой в 7-й строке (рис. 7). Если там будет монстр, то Турбо следующей, третьей, попыткой доберется до нижней строки, например, по пути, указанному синей

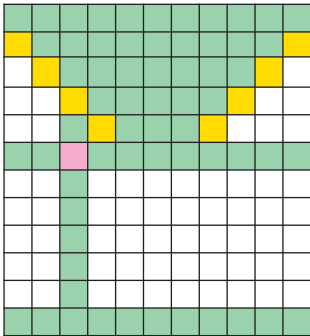


Рис. 6

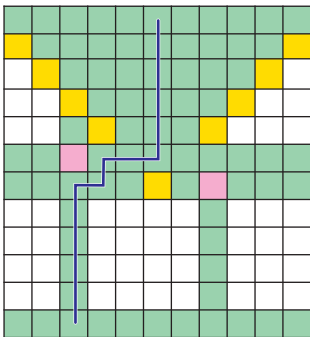


Рис. 7

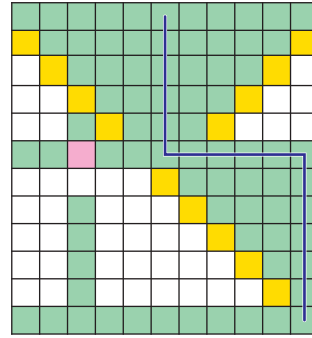


Рис. 8

линией. Если же там монстров нет, то пусть Турбо проверит клетки с (8,8) по (8,11). Если там есть монстр, то снова на третьей попытке можно найти выход по пути, аналогичному на рисунке 7, а если нет, то перейти к проверке клеток следующей строки с (9,9) по (9,11). И так далее.

В итоге или Турбо получит ситуацию, как на рисунке 8, и тогда за две попытки найдет выход, или она наткнется на монстра правее желтых клеток рисунка 8 и тогда выйдет с третьей попытки по пути, аналогичному тому, что на рисунке 7.

Остается проверить, почему двух попыток недостаточно. Оставим это читателям в качестве упражнения.

Итак, ответ в задаче – 3 попытки.

Автор этой задачи – четырехкратный призер международных олимпиад из Гонконга Чху Чхёкхэй (Chu Cheuk Hei). Интересна история ее возникновения.

На экзамене по английскому языку автору задачи и его одноклассникам была предложена игра на клетчатом поле размером 6×6 , в которой была улитка и были монстры. А экзаменуемым нужно было разобраться в правилах игры, прослушивая тексты на английском языке. Игра, по словам Чхёкхэй, была довольно глупая (pretty stupid). Однако Чхёкхэй и его одноклассники подправили правила и получилась задача. Сначала на поле 6×6 , а затем на поле 2023×2024 – в том виде, в котором она и появилась на олимпиаде.

Чхёкхэй отмечает, что задача не показалась ему сложной. И он был очень удивлен, что она оказалась на IMO, тем более под номером 5. Многие участники говорят, что ожидали от этой задачи ответа 2024 , $2024/2$, $\log_2 2024$ или чего-то похожего, но никак не константу, не зависящую от размера игровой доски.

Фестиваль Кирхгоффа

200 лет назад 12 марта 1824 года родился великий физик, уроженец Кёнигсберга (ныне – Калининград), выпускник Кёнигсбергского университета и член Петербургской академии наук Густав Кирхгофф¹. Школьникам и студентам он известен как автор знаменитых законов Кирхгоффа для электрических цепей. Но более весомым его вкладом в мировую науку являются исследования по тепловому излучению, спектральному анализу, электромагнетизму, дифракции и механике упругих сред. Открытые Кирхгоффом законы теплового излучения стали фундаментом, на котором сформировались современные представления о квантовой природе излучения. Его пионерские исследования спектров излучения и поглощения легли в основу спектрального анализа, который важен своими приложениями в физике, химии и астрономии. Все великие открытия астрономии и космологии XX века так или иначе связаны с использованием спектрального анализа для определения состава звезд, межзвездного вещества, атмос-

¹ В этой статье, как и в проекте «Фестиваль Кирхгоффа», используется написание фамилии великого физика с двумя буквами «ф» – в соответствии с написанием на немецком языке.

фер планет и скоростей движения звезд и разбегания галактик. Столь же весом вклад спектрального анализа в развитие атомной и молекулярной физики, химии и техники.

Знаменательная дата, связанная с рождением Густава Кирхгоффа, послужила основанием проведения в Калининграде «Фестиваля Кирхгоффа». Главной задачей фестиваля стала популяризация научных открытий великого физика и их роли в последующем развитии науки. Одним из центральных мероприятий фестиваля, проводимого при поддержке Фонда президентских грантов, стала Мемориальная конференция, которая проходила в Балтийском федеральном университете имени Иммануила Канта 12 марта 2024 года. В ней приняли участие известные ученые из Российской академии наук и их коллеги из университетов Калининграда, представившие доклады, посвященные жизни и научному творчеству Густава Кирхгоффа. Вот наиболее важные выдержки из интервью с этими учеными.

Борис Николаевич Четверушкин, академик РАН, научный руководитель Института прикладной математики имени М.В.Келдыша:

«Имя Густава Кирхгоффа не так широко известно, как, например, Ньютона или Эйнштейна. В этом нет ничего удивительного. Для среднестатистического обывателя многие великие имена малознакомы. Например, когда в СССР создавался ракетно-ядерный щит, в про-



екте было три лидера: Игорь Курчатов, Сергей Королев и Мстислав Келдыш. Все – Герои Социалистического Труда, но первых двух хорошо знают и помнят многие россияне, а Мстислава Келдыша как-то забывают, хотя его вклад в развитие аэродинамики, космонавтики и атомного проекта исключительно велик.

Густав Кирхгофф относится к плеяде великих ученых середины XIX века, которые, по сути, завершили классическую физику. К этой плеяде можно отнести самого Густава Кирхгоффа, Майкла Фарадея, Джеймса Максвелла, Людвиг Больцмана. Но Густав Кирхгофф стоит особо, потому что его закон об излучательной способности абсолютно черного тела не укладывался в классическую физику и не мог быть объяснен на основе классической теории излучения. Это побуждало физиков размышлять над причиной этого, результатом чего стала революционная теория квантов Макса Планка, что дает нам основания считать Густава Кирхгоффа предтечей квантовой механики.

Считаю нужным сказать, что своими открытиями Кирхгофф положил начало целым направлениям современной физики, которые связаны с сильными излучательными процессами, происходящими в естественных условиях (звезды и галактики) или в технологических установках (управляемый термоядерный синтез). Я занимаюсь математическим моделированием сложных физико-технических систем и хорошо знаю, какую важную роль в исследовании высокотемпературного теплопереноса внесли законы теплового излучения, открытые Густавом Кирхгоффом. В качестве примера приведу задачу лазерного термоядерного синтеза, в котором разогрев термоядерной мишени осуществляется с помощью сверхмощных сконцентрированных лазерных лучей. В динамике лазерной термоядерной плазмы излучательные и поглощательные процессы с участием



Академик Б.Н.Четверушкин и профессор М.А.Никитин во время Мемориальной конференции

фотонов и заряженных частиц играют исключительно важную роль. Сказанное в равной степени относится к излучательным процессам в астрофизике, например излучениям черных дыр, вспышкам сверхновых и Солнца, и таким сугубо земным процессам, как лазерная резка металлов или разогрев космических аппаратов при входе в атмосферу. Все эти явления невозможно описать без использования законов теплового излучения.

В заключение хочу сказать, что «Фестиваль Кирхгоффа» прошел прекрасно. От Российской академии наук в нем приняли участие пять ее членов. Это говорит о высоком признании выдающегося вклада Густава Кирхгоффа, иностранного члена Петербургской академии наук, со стороны Российской академии наук».

Александр Иванович Антекарев, член-корреспондент РАН, директор Института прикладной математики имени М.В.Келдыша:

«Густав Кирхгофф признан научным сообществом как великий ученый за свой огромный вклад в науку. Вместе с Робертом Бунзеном он является основа-

телем спектрального анализа. Это величайшее открытие. Они первыми разработали технику спектрального анализа и использовали его для изучения разных тел. Важным следствием открытия Густава Кирхгофа стал вывод о том, что все элементы имеют свой специфичный спектр. Спустя годы математики обобщили это положение в спектральную теорию операторов в бесконечномерных пространствах, которая стала фундаментом квантовой механики.

Густав Кирхгофф был многогранным человеком. Мне, как ученому, интересны те работы, которые не так признаны, как его работы по электрическим цепям, тепловому излучению и спектральному анализу. Я использую его труды, которые связаны с графами, применяю их в области искусственного интеллекта. Есть такое понятие – матрица Кирхгофа. Это некая электрическая цепь, а в математическом представлении граф. Когда мы говорим о нейрообучении, мы, в общем-то, видим те же самые графы, которые были заложены Кирхгоффом.

Пользуясь пребыванием в стенах Балтийского федерального университета, хочу выразить свое восхищение и отдать дань уважения математической школе «Альбертина» – университета, в котором учился Густав Кирхгофф. Просто удивительно, что в этом университете в то время одновременно трудились Фридрих Бессель, Франц Нейман, Карл Якоби и Фридрих Решело. Такая концентрация выдающихся ученых естественным образом породила синергетический эффект – появление новых научных светил, одним из которых стал Густав Кирхгофф».

Анатолий Федорович Июдин, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией космической рентгеновской и гамма-астрономии НИИЯФ² МГУ:

«Основная часть данных в астрофизике получается с помощью наблюдений небесных объектов в электромагнитных лучах. При этом используются электромагнитные лучи и спектры различных длин волн: инфракрасные, видимые глазом, ультрафиолетовые, рентгеновские и гамма. С каждым из этих диапа-

зонов волн связана соответствующая наблюдательная астрономия: инфракрасная, ультрафиолетовая, рентгеновская и гамма. С помощью инфракрасного излучения проводятся измерения температуры поверхности планет и экзопланет, определяется состав атмосферы планет и экзопланет, газопылевых комет и туманностей, ведется поиск внеземной жизни на других планетных системах, а также исследуются объекты ранней Вселенной. С помощью ультрафиолетового излучения проводятся исследования Солнца, звезд и межзвездного газа. Гамма-излучение используется для исследования сверхновых звезд, нейтронных звезд, ядер активных галактик, квазаров.

Земная атмосфера сильно затрудняет наблюдения за небесными объектами из-за рассеяния и поглощения излучения, а для рентгеновского и гамма-излучения она становится вовсе непрозрачной. По этой причине приходится использовать космические телескопы или целые обсерватории, например в рентгеновском излучении Chandra, XMM-Newton, а в гамма-излучении Fermi, вынесенные за пределы атмосферы. В настоящее время в космосе одновременно работают два уникальных космических телескопа: Хаббл (HST) и Уэбб (JWST). Первый из них работает в ближнем ультрафиолетовом, видимом и ближнем инфракрасном спектре. Второй – в более низком диапазоне частот, от длинноволнового видимого света (красный) до среднего инфракрасного (0,6–28,3 мкм). Благодаря использованию этих космических телескопов и спектрографов получены исключительно важные научные результаты о строении и физике самых удаленных и необычных астрономических объектов, находящихся на окраинах нашей Вселенной в пространстве и во времени, вплоть до «темных веков» эволюции Вселенной.

Самое примечательное заключается в том, что у всех вышеназванных космических телескопов при анализе спектров излучения от точечных (отдельная звезда) до протяженных (галактика, туманность) астрофизических объектов используется тот же подход к определению тонкой структуры излучения изу-

² Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В.Скобельцина.

чаемых объектов, который был впервые разработан и использован Густавом Кирхгоффом. В этом и состоит универсальность и уникальность техники спектрального анализа, предложенная великим физиком».

Владимир Георгиевич Сурдин, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ГАИШ³ МГУ:

«Над теорией излучения и поглощения света нагретыми телами физики трудились с начала XIX века. И только Густаву Кирхгоффу принадлежит заслуга раскрыть тонкий и глубокий смысл, скрывавшийся за исходными представлениями. Его основополагающая работа «Об отношении между испускательной и поглощательной способностями тел для тепла и света» была опубликована в 1860 году. Основанием для этой статьи послужило открытие, сделанное за несколько месяцев перед этим самим Густавом Кирхгоффом вместе с Робертом Бунзеном. Они обнаружили, что фраунгоферовы линии поглощения в солнечном спектре, впервые замеченные еще в 1802–1814 годах Уильямом Волластоном и Йозефом Фраунгофером, совпадают с линиями испускания известных паров и газов. Так родился спектральный анализ.

Значительно более важным для развития астрофизики оказалось обнаружение Кирхгоффом и Бунзеном линий излучения и поглощения в спектрах газообразных тел. Уже они сами отождествили некоторые сильные линии в спектре Солнца: в основном линии кальция и металлов. В 1860 году Густав Кирхгофф получил первый намек на истинную природу звезд, когда понял, что темные линии в спектре солнечного света вызваны различными элементами, поглощающими волны определенной длины. Астрономы проанализировали схожие характеристики в свете других ярких звезд и обнаружили, что они состоят из тех же веществ, что найдены на Земле, а не из какой-то загадочной квинтэссенции – пятой сущности, как полагали древние.

Именно спектральный анализ, полу-

чивший надежную опору в виде квантовой механики, позволил астрономам разгадать природу, состав и движение звезд. Расшифровывая оптические спектры звезд, мы узнаем температуру их поверхности и определяем класс светимости, что позволяет с помощью диаграммы Герцшпрунга–Рассела («температура – светимость») определять эволюционный статус звезды. Систематическое измерение спектра позволяет, основываясь на эффекте Доплера, определять характер пространственного движения звезды и ее орбитальную скорость в двойных системах. А это единственный способ измерить массу звезды и выявить у нее невидимые спутники – экзопланеты, белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры.

Невозможно перечислить все направления современной астрофизики и сделанные в этих областях открытия, где основную роль играют спектральные исследования. Жаль, что Густав Кирхгофф и его коллеги не узнали, какие невероятные возможности получила наука благодаря их открытиям. Природа и эволюция звезд, иные планетные системы, динамика галактик и Вселенной в целом, загадочное темное вещество и сверхмассивные черные дыры, темная энергия и много-много других удивительных явлений и объектов стали известны благодаря спектральному анализу излучения, рождавшемуся в маленьких лабораториях трудами нескольких любознательных энтузиастов второй половины XIX века».

Высочайшая оценка научных открытий Густава Кирхгоффа и его вклада в развитие современной науки и техника была дана во всех докладах Мемориальной конференции. При этом лекторы не ограничивались рассмотрением только научных заслуг Густава Кирхгоффа. Многие из них, в частности А.И. Аптекарев, рассказали много интересного и нового о жизни великого физика, его детских и юношеских годах, времени учебы в Кёнигсбергском университете, работе в Гейдельбергском университете и плодотворной дружбе с другим выдающимся ученым Робертом Бунзеном. Свидетельством того, что Мемориальная конференция по-настоящему удалась, может служить следующий

³ Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга.



Дирижер Михаил Кирхгофф и оркестранты симфонического оркестра Мемориального концерта Густава Кирхгоффа

факт: почти все студенты, принимавшие в ней участие, остались в зале заседаний до последнего доклада.

Настоящим украшением мемориальной недели Густава Кирхгоффа в Калининграде стал концерт Калининградского симфонического оркестра, дирижировал которым российский потомок Густава Кирхгоффа – Михаил Кирхгофф. Участие Михаила Кирхгоффа в юбилейных мероприятиях великого физика стала символом исторической связи разных эпох и народов, а сам концерт стал своеобразным мостом, объединяющим две столь разные эпохи.

Помимо конференции и концерта в рамках проекта «Фестиваль Кирхгоффа» было прочитано более 70 научно-просветительских лекций в Калининграде и городах области на темы «Густав Кирхгофф – наш земляк» и «Вклад Густава Кирхгоффа в развитие современной науки и технологий». Также было проведено 5 культурно-просветительских

концертов в Калининграде и городах области, связанных с жизнью и научными достижениями Густава Кирхгоффа. Заключительным этапом «Фестиваля Кирхгоффа» станет выход сборника «По законам Кирхгоффа», в основу которого лягут доклады Мемориальной конференции. Сборник рассчитан на школьников и студентов, интересующихся физикой.

«Фестиваль Кирхгоффа» не смог бы состояться в Калининграде, если бы его исполнитель – Калининградский инновационно-технологический центр – не получил поддержку от Фонда президентских грантов, Математического отделения Российской академии наук и Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.

Публикацию подготовил М.Никитин

LXV Международная математическая олимпиада

С 11 по 22 июля 2024 года прошла LXV Международная математическая олимпиада (ИМО). Как и пять лет назад, ИМО принимала Великобритания, местом проведения ИМО стал университет города Бат. В главном соревновании школьников по математике приняли участие 609 юных математиков из 109 стран. Школьники из России участвовали в олимпиаде дистанционно – два тура ИМО для них проводились в Санкт-Петербурге на базе Российского государственного педагогического университета имени А.И.Герцена.

В этом году после семи этапов отбора, проводившихся в нашей стране в течение учебного года, право участвовать в ИМО завоевали:

Илья Замоторин (10 класс, Санкт-Петербург),

Ратибор Коптилин (10 класс, Новосибирск),

Егор Сапрунов (11 класс, Санкт-Петербург),

Церен Французов (11 класс, Санкт-Петербург),

Иван Часовских (10 класс, Химки),

Михаил Югов (11 класс, Санкт-Петербург).

Ребята показали уверенные результаты, несмотря на высокую сложность комплекта задач этого года. Пожалуй, наиболее «олимпиадной» задачей, удивившей даже самых сильных и опытных участников, оказалась комбинаторная задача 5. Отметим приятный факт: суммарный балл по этой задаче у наших ребят оказался наивысшим среди всех команд. Информация о баллах, полученных нашими участниками, и об общей успешности решения задач приведены ниже в таблицах.

	Задачи						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
И.Замоторин	7	7	3	7	3	0	27	серебряная
Р.Коптилин	7	7	0	7	7	2	30	золотая
Е.Сапрунов	7	7	4	5	7	1	31	золотая
Ц.Французов	7	7	0	7	7	1	29	золотая
И.Часовских	7	7	6	6	7	7	40	золотая
М.Югов	7	7	1	6	7	0	28	серебряная

Задача	1	2	3	4	5	6
Количество участников, решивших задачу (набравших 5, били 7 баллов)	456	171	17	408	183	13

Подробные результаты олимпиады публикуются на официальном сайте олимпиады <http://www.imo-official.org/>.

Тренерский штаб сборной России: К. Сухов (главный тренер), И.Богданов, П.Кожевников, А.Кузнецов, Ф.Петров. Также большой вклад в подготовку сборной внесли С.Берлов, Н.Власова, П.Козлов, А.Кушнир, Г. Шарафетдинова и другие математики и педагоги. Большая работа по проведе-



Слева направо – Е.Сапрунов, М.Югов, Ц.Французов, И.Замоторин, Р.Коптилин, И.Часовских

нию мероприятий, направленных на отбор и подготовку команды России для участия в ИМО, велась в течение всего учебного года. С благодарностью перечислим организации, оказавшие помощь и поддержку в этой работе: Министерство просвещения РФ, Образовательный центр «Сириус», РГПУ имени А.И.Герцена, Президентский физико-математический лицей №239 (Санкт-Петербург), Детский центр «Компьютерия» (Тверская область).

Задачи олимпиады

1. Найдите все действительные числа α такие, что для любого положительного целого n целое число

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

кратно n . (Здесь $\lfloor z \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее z . Например,

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4 \text{ и } \lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2.)$$

Колумбия

2. Найдите все пары (a, b) положительных целых чисел, для которых существуют такие положительные целые g и N , что

$$\text{НОД}(a^n + b, b^n + a) = g$$

для всех целых чисел $n \geq N$.

Индонезия

3. Даны бесконечная последовательность положительных целых чисел a_1, a_2, a_3, \dots и положительное целое число N . Известно, что для любого $n > N$ число a_n равно количеству раз, которое число a_{n-1} встречается среди $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$. Докажите, что хотя бы одна из последовательностей a_1, a_3, a_5, \dots и a_2, a_4, a_6, \dots является в конечном итоге периодической. (Последовательность b_1, b_2, b_3, \dots называется *в конечном итоге периодической*, если существуют такие положительные целые числа r и M , что $b_{m+p} = b_m$ для всех $m \geq M$.)

Австралия

4. Пусть ABC – треугольник, в котором $AB < AC < BC$. Пусть ω – вписанная в треугольник ABC окружность, а I – ее центр. Пусть X – такая точка на прямой BC , отличная от C , что прямая, проходящая через X параллельно AC , касается ω . Аналогично, пусть Y – такая точка на прямой BC , отличная от B , что

прямая, проходящая через Y параллельно AB , касается ω . Пусть AI пересекает описанную около треугольника ABC окружность второй раз в точке $P \neq A$. Пусть K и L – середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Польша

5. Улитка Турбо играет на доске, имеющей 2024 ряда и 2023 столбца, в следующую игру. В 2022 клетках доски прячутся монстры. Изначально Турбо не знает, где находится какой-либо из монстров, но она знает, что в каждом ряду, кроме первого и последнего, есть ровно один монстр и что в каждом столбце находится не более одного монстра.

Турбо делает серию попыток, чтобы пройти из первого ряда в последний. При каждой попытке она может выбрать в качестве начальной любую клетку в первом ряду, а затем совершает серию перемещений из клетки в соседнюю клетку, имеющую общую сторону. (Ей разрешается возвращаться в ранее посещенные клетки.) Если она посещает клетку с монстром, то ее попытка завершается и она переносится обратно в первый ряд, чтобы начать новую попытку. Монстры не двигаются, а Турбо запоминает, есть ли в каждой посещенной ею клетке монстр. Если она достигнет любой клетки в последнем ряду, ее попытка завершается и игра оканчивается.

Определите минимальное значение n такое, что у Турбо есть стратегия, которая, независимо от местонахождений монстров, гарантирует достижение последней строки за n попыток или раньше.

Гонконг

6. Пусть \mathbb{Q} – множество всех рациональных чисел. Функция $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ называется *смежной*, если выполнено следующее условие: для любых $x, y \in \mathbb{Q}$ имеем

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \text{ или}$$

$$f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Докажите, что существует целое число c такое, что для любой смежной функции f имеется не более c различных рациональных чисел вида $f(r) + f(-r)$ для какого-то рационального r , и найдите наименьшее возможное значение c .

Япония

Публикацию подготовили К.Сухов, И.Богданов, П.Кожевников, А.Кузнецов

Заключительный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Ускоряющее зеркало

Экспериментатор Глюк держит в руках точечный источник света S , расположенный под горизонтальным плоским зеркалом, движущимся поступательно с постоянным вертикальным ускорением. Глюк бросил источник света под углом к горизонту и стал производить съемку с помощью специальной видеокамеры. Проанализировав видеофрагмент в покадровом режиме, Глюк построил на листе масштабнo-координатной бумаги участки траекторий источника света S и его изображения в зеркале S^* . Пользуясь приведенным рисунком 1, определите величину и

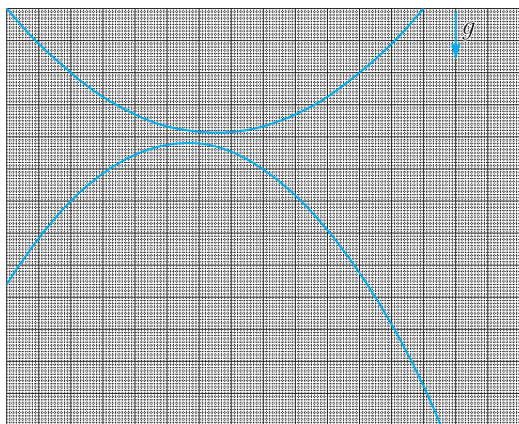


Рис. 1

направление ускорения \bar{a} зеркала. Ускорение свободного падения $g = 9,80 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, скорость света считайте бесконечной.

О.Инишева, А.Уймин

Задача 2. Мощная задача

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 2, состоит из идеального источника постоянного напряжения $U_0 = 12 \text{ В}$, резистора, идеального диода (напряжение открытия которого равно нулю) и

трех приборов, далее именуемых «источники постоянной мощности». Обозначим I силу электрического тока, протекающего через прибор. Принцип работы источника постоянной мощности таков.

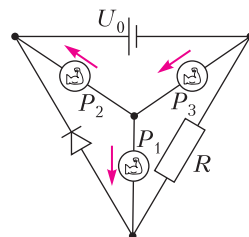


Рис. 2

1. При $I = I_A = I_B$ прибор работает как источник постоянной силы тока $I_B = IA$, выдавая мощность не больше номинальной.

2. Прибор пропускает ток только в направлении, указанном стрелкой возле его обозначения на схеме. Сила тока не превосходит I_B .

3. При $I \leq 1 \text{ мА}$ прибор работает как источник постоянного напряжения, выдавая мощность не больше номинальной и создавая напряжение, равное P/I_n , где P — номинальная мощность прибора, а $I_n = 1 \text{ мА}$.

4. При $I_n < I < I_B$ мощность, выдаваемая прибором, постоянна и равна номинальной.

5. Под номинальной мощностью прибора понимается $P = IU_V$, где показания вольтметра $U_V > 0$ (рис. 3). Обратите внимание на полярность подключения вольтметра!

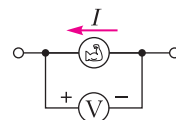


Рис. 3

Номинальные мощности каждого источника: $P_1 = 1 \text{ Вт}$, $P_2 = 2 \text{ Вт}$ и $P_3 = 3 \text{ Вт}$. Найдите значения сил токов, текущих во всех ветвях цепи, и сопротивление R резистора. Известно, что через резистор протекает ток силой $I_R = 0,8 \text{ А}$.

А.Жугар

Задача 3. Нелинейная картина

См. задачу Ф2813 «Задачника «Кванта».

Задача 4. А когда не натянута?

Маленькое невесомое колечко может скользить без трения по длинной горизонтальной закрепленной спице. Один конец невесомой нерастяжимой нити прикреплен к кольцу, а

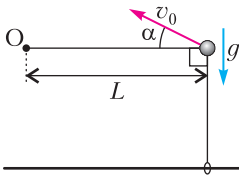


Рис. 4

другой закреплен в неподвижной точке O (рис. 4). По нити без трения может перемещаться массивная бусинка. Изначально нить слегка натянута, при этом бусинка находится на одной горизонтали с точкой O и на одной вертикали с колечком. Длина горизонтального участка нити равна L . Бусинку толчком приводят в движение в вертикальной плоскости, содержащей нить. Сразу после толчка бусинка удаляется от спицы, а нить оказывается натянутой. Ускорение свободного падения равно g .

- 1) Под каким углом α к горизонту направлена скорость бусинки сразу после толчка?
- 2) При каких значениях начальной скорости v_0 нить будет оставаться натянутой в процессе удаления бусинки от спицы?

А.Вергунов, А.Уймин

Задача 5. Удаление со льда

Два одинаковых небольших тяжелых ящика покоятся на горизонтальной поверхности льда. Оба ящика находятся на одинаковом расстоянии $L = 0,8$ м от прямолинейного края ледяного поля. Уборщик, вооруженный длинным скребком (плоской прямоугольной пластиной с ручками), подъехал к первому ящику и прижал край скребка к одной из граней ящика. Для этого он развернул скребок так, что его край составил угол $\alpha_1 = 10^\circ$ с краем поля. Затем он двигал скребок поступательно из состояния покоя с постоянным ускорением a , направленным перпендикулярно краю поля (рис. 5). В результате ящик покинул поле за время $t_1 = 2$ с. Потом уборщик подъехал ко второму ящику и, действуя аналогично, вывез

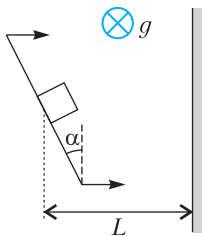


Рис. 5

и его за край поля. Он снова вез скребок поступательно с тем же ускорением, но в этот раз край скребка составлял с краем поля угол $\alpha_2 = 45^\circ$. Известно, что коэффициент трения между льдом и обоими ящиками $\mu' = 1/24$, а между скребком и обоими ящиками $\mu = 7/24$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Скребок все время движения

расположен вертикально, ящик от скребка не отрывается.

- 1) Определите ускорение a скребка.
- 2) Во сколько раз путь второго ящика до края поля был больше, чем у первого?
- 3) За какое время t_2 второй ящик покинет лед?
- 4) Во сколько раз сила трения между скребком и вторым ящиком больше, чем сила трения между скребком и первым ящиком?

К.Парфенов

10 класс

Задача 1. Падение в бездну

Две противоположные стены глубокого ущелья представляют собой участки параллельных вертикальных плоскостей. Однажды в безветренный день экспериментатор Глюк и теоретик Баг расположились на краях различных стен ущелья (рис. 6). Линия, соединяющая Глюка и Бага, образует с горизонтом угол $\varphi = 30^\circ$. Глюк и Баг бросали одинаковые шарики с одной и той же неизвестной начальной скоростью v_0 относительно земли, причем такой, что ни один брошенный шарик не достиг противоположной стены. Траектории шариков всегда лежали в вертикальной плоскости, содержащей Глюка и Бага. На движущийся шарик действует сила сопротивления воздуха, направленная против скорости движения шарика и прямо пропорциональная ей. Размерами Глюка и Бага можно пренебречь. После множества проведенных экспериментов Глюк и Баг выяснили следующее: если шарик был брошен горизонтально, то он удалялся по горизонтали на расстояние s от бросающего (см. рис. 6,а); при одновременных бросках Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту соответственно (см. рис. 6,б) в установившемся режиме шарики движутся вдоль одной вертикальной прямой.

- 1) Определите расстояние L между Глюком и Багом.

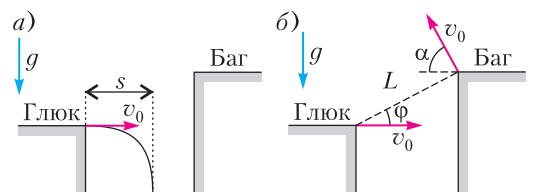


Рис. 6

2) Для одновременных бросков Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту соответственно определите расстояние s_∞ между шариками в установившемся режиме, а также минимальное расстояние s_{\min} между шариками в процессе движения.

Примечание. Приводить аналитические ответы, являющиеся функциями углов α и β , не обязательно.

А.Уймин

Задача 2. Столкновение на спице

Два одинаковых маленьких невесомых коротких цилиндра могут без трения скользить по длинной закрепленной горизонтальной спице (рис. 7).

Цилиндры соединены с невесомыми нерастяжимыми нитями 1 и 2, причем длина нити 1 на L больше длины нити 2. По нити 1 без трения может перемещаться маленькая бусинка

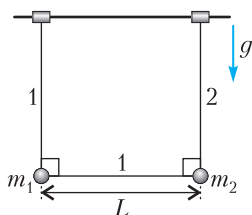


Рис. 7

массой m_1 , а небольшой груз массой m_2 прикреплен к концам обеих нитей. Изначально систему, состоящую из цилиндров, нитей, бусинки и груза, удерживают в состоянии покоя таким образом, что спица и обе нити находятся в одной вертикальной плоскости, бусинка и груз расположены на одной горизонтали, при этом бусинка находится на одной вертикали с цилиндром, прикрепленным к нити 1, а груз – на одной вертикали с цилиндром, прикрепленным к нити 2. Нити слегка натянуты. Ускорение свободного падения равно g . Считайте, что размеры цилиндров больше размеров бусинки и груза. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Систему отпускают.

1) Определите скорости v_1 и v_2 бусинки и груза соответственно прямо перед столкновением цилиндров.

2) Определите силы натяжения T_1 и T_2 нитей 1 и 2 соответственно прямо перед столкновением цилиндров.

А.Вергунов, А.Уймин

Задача 3. Из архива ЦПМК

В архиве ЦПМК 2011 года была обнаружена задача, в которой описывалось довольно странное устройство для экспериментов с идеальным газом. Закрытая снизу

тонкостенная цилиндрическая трубка длиной L , установленная вертикально, жестко соединена с закрепленным цилиндрическим сосудом, ось которого также вертикальна, а диаметр во много раз превышает диаметр трубки (рис. 8). Верхняя часть трубки расположена на расстоянии l выше дна сосуда.

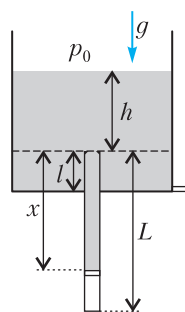


Рис. 8

В трубке без трения может перемещаться тонкий легкий герметичный поршень. Под поршнем находится воздух, который можно считать идеальным газом. В верхней части трубки расположены небольшие упоры, ограничивающие движение поршня вверх. В стенке сосуда вблизи его дна проделано небольшое отверстие. С помощью тонкой трубочки через отверстие сосуд очень медленно наполняют ртутью, а затем так же медленно понижают уровень ртути в сосуде до его дна. Далее везде h обозначает уровень ртути в сосуде относительно верхней части трубки, а x – расстояние между поршнем и упорами. Считайте, что в процессе изменения уровня ртути в сосуде температура воздуха под поршнем и атмосферное давление остаются постоянными. Параметры установки: $L = 3,04$ м, $l = 0,04$ м, атмосферное давление p_0 равно гидростатическому давлению столба ртути высотой $h_0 = p_0 / (\rho g) = 0,76$ м, где ρ – плотность ртути, а g – ускорение свободного падения. Величины p_0 , ρ и g считайте неизвестными. Во всех пунктах задачи приведите как аналитические выражения, так и численные значения для ответов. Изначально ртути в сосуде и над поршнем нет, а давление воздуха под поршнем превышает величину атмосферного давления. В пунктах 1–3 считайте, что когда уровень ртути в сосуде достиг максимального значения $h_{\max} = 1,52$ м, то расстояние между поршнем и упорами составило $x_{\max} = 2,28$ м.

1) Рассмотрим процесс повышения уровня ртути в сосуде. При каком значении уровня h_1 ртути в сосуде поршень пришел в движение?

2) Пусть уровень ртути в сосуде в процессе его повышения составил $h_1 + \Delta h$, где $0 < \Delta h \ll h_1$. Найдите возможные значения x_1 между поршнем и упорами.

3) На каком расстоянии x_2 до упоров будет находиться поршень, когда уровень ртути в сосуде понизится до его дна? Ответ обоснуйте.

4) Ртуть полностью откачали из сосуда и пространства над поршнем, после чего изменили количество воздуха под поршнем. Далее процессы повышения и понижения уровня в сосуде с помощью трубочки через отверстие повторили. Оказалось, что когда уровень ртути в сосуде достиг величины $h_{\max} = 1,52$ м, то расстояние между поршнем и упорами составило $x'_{\max} = 1,52$ м. При каком значении уровня h_2 ртути в сосуде в процессе его понижения поршень достигает упоров?

А.Аполонский, А.Уймин

Задача 4. Полеты стержня

В распоряжении экспериментатора Глюка были закрепленная равномерно заряженная по поверхности зарядом Q непроводящая сфера радиусом R и очень длинный тонкий прямолинейный непроводящий стержень массой m , заряженный равномерно по длине с линейной плотностью заряда λ . Известно, что заряды стержня и сферы были одноименными.

В первой серии экспериментов Глюк помещал стержень на поверхность сферы таким образом, что стержень касался поверхности сферы своей серединой. Сначала Глюк отпустил стержень из состояния покоя, и, когда расстояние между центрами сферы и стержня достигло неизвестной величины $l > R$, стержень двигался со скоростью $u_0 = \sqrt{Q\lambda / (2\pi\epsilon_0 m)}$ (рис. 9,а). Затем Глюк стал приводить стержень в движение так, что он начинал поступательное движение с различными значениями начальной скорости v в направлении, перпендикулярном стержню и лежащем в плоскости, содержащей стержень и центр сферы. Глюк получил зависимость от начальной скорости v стержня времени τ , прошедшего от момента старта, через которое расстояние между центрами сферы и стержня достигало неизвестной величины

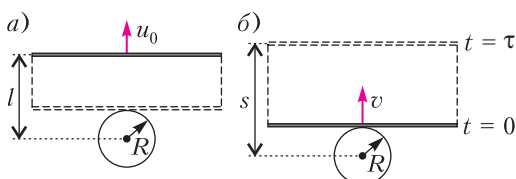


Рис. 9

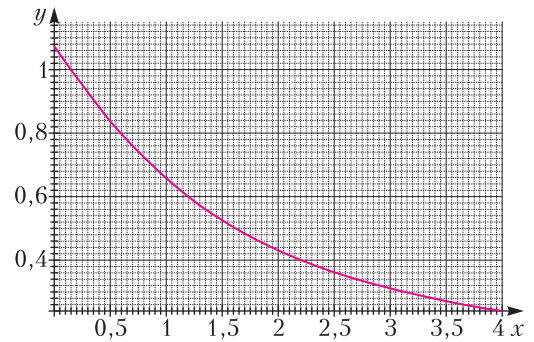


Рис. 10

$s > R$ (рис. 9,б). График полученной зависимости приведен на рисунке 10 в координатах $y(x)$, где $y = \tau/\tau_0$, $x = v/v_0$, а величины τ_0 и v_0 определяются выражениями

$$\tau_0 = R \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 m}}.$$

Для второго эксперимента Глюк проделал в поверхности сферы небольшое отверстие, поместил конец A стержня внутрь сферы таким образом, что он оказался в центре сферы (рис. 11), и отпустил стержень без начальной скорости.

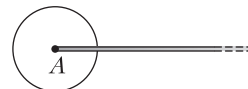


Рис. 11

Трения между стержнем и отверстием нет.

Во всех экспериментах стержни двигались поступательно. Силой сопротивления воздуха и гравитацией можно пренебречь. Величины s и l во много раз меньше длины стержня.

Для второго эксперимента определите:

- 1) время T_1 , прошедшее от момента старта, через которое конец A стержня оказался на поверхности сферы, а также скорость стержня v_1 в этот момент времени;
- 2) скорость v_2 стержня в момент, когда его конец A находился на расстоянии l от центра сферы;
- 3) время T , прошедшее от момента старта, через которое конец A стержня оказался на расстоянии s от центра сферы.

А.Уймин

Задача 5. Электротетраэдр

См. задачу Ф2815 «Задачника «Кванта».

11 класс

Задача 1. Две окружности

См. задачу Ф2816 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Лепешка из ртути

На верхнее горизонтальное основание сплошного кругового цилиндра с площадью поперечного сечения S аккуратно налили немного ртути. Краевой угол смачивания материала, из которого изготовлен этот цилиндр, равен θ . Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен σ , плотность ртути равна ρ . Ускорение свободного падения равно g . Считайте, что параметры σ , ρ , g и S удовлетворяют неравенству $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ll \sqrt{S}$.

1) При каком минимальном значении объема ртути V_0 она целиком покрывает основание цилиндра?

На основание цилиндра наливают ртуть объемом $V < V_0$. Сверху аккуратно помещают второй цилиндр с таким же поперечным сечением, но изготовленный из другого материала, который полностью не смачивается ртутью. Считайте расположение цилиндров и ртути все время осесимметричным.

2) При какой минимальной массе m_1 верхнего цилиндра ртуть будет контактировать с основанием нижнего цилиндра по всей площади его поверхности?

3) При какой минимальной массе m_2 верхнего цилиндра ртуть вытечет из зазора между цилиндрами? Считайте, что граница между основаниями цилиндра и его боковой поверхностью является закругленной (радиус закругления много меньше толщины слоя ртути) и выпуклой.

А.Аполонский, А.Уймин

Задача 3. Усеченный конус

См. задачу Ф2814 «Задачника «Кванта».

Задача 4. Рамка и провод

Жесткая прямоугольная рамка, изготовленная из тонкой проволоки, может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности, на которой закреплен тонкий бесконечно длинный прямолинейный провод. Изначально силы токов в проводе и в рамке равны нулю. Рамка покоится в таком положении, что одна из пар ее сторон параллельна проводу, причем расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки во много раз превышает все размеры рамки. Силу тока в проводе увеличивают до некоторого максимального значения настолько быстро, что смещением рамки за время уве-

личения силы тока можно пренебречь. В дальнейшем силу тока в проводе поддерживают постоянной. Оказалось, что в момент достижения силой тока в проводе максимального значения скорость рамки равнялась v_0 . Чему будет равна скорость рамки v_1 спустя большое время после этого? Индуктивностью рамки можно пренебречь, а ее сопротивление можно считать постоянным.

А.Уймин

Задача 5. Неоднородность в призме

Экспериментатор Глюк проводит оптическое исследование со сплошной призмой, поперечное сечение OAB которой представляет собой прямоугольный треугольник с катетами AB и $OA = h$ (рис. 12). Все грани призмы либо параллельны, либо перпендикулярны плоскости рисунка. Если ввести прямоугольную систему координат xy с началом в точке O , то показатель преломления материала призмы зависит только от координаты x по закону

$$n(x) = \frac{3}{2 - x/h}.$$

Глюк решил целиком осветить грань призмы, содержащую OA и перпендикулярную плоскости рисунка, перпендикулярным ей пучком света. Дно призмы, содержащее AB и перпендикулярное плоскости рисунка, покрыто веществом, полностью поглощающим попавший на нее свет. Призма находится в воздухе, показатель преломления которого можно считать равным единице. Далее рассматривайте только лучи, попадающие внутрь призмы через точки, расположенные на стороне OA призмы.

1) Рассмотрим луч, попадающий в призму в точке с координатой x_0 . Найдите уравнение траектории данного луча внутри призмы до попадания на стороны AB и OB призмы.

2) При каких значениях угла $\angle AOB = \alpha$ лучи света попадают во все точки стороны OB ?

3) При каких значениях угла α все лучи, достигнувшие стороны OB , преломляются и проходят в воздух?

А.Уймин

Публикацию подготовил В.Слободянин

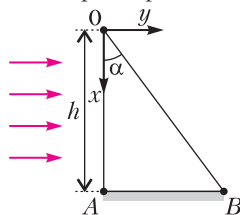


Рис. 12

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №7)

1. 53.

Наложим Катину расческу на Машину так, чтобы края совместились. Один зубчик Катинной расчески закроет три зубчика Машинной и два промежутка между ними. В один просвет между Катинными зубчиками попадут три Машинных промежутка и два зубчика. Всего на Катинной расческе 11 зубчиков и 10 промежутков, что соответствует $11 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 53$ зубчикам Машинной расчески. Можно рассуждать по-другому. В Катинной расческе 11 зубчиков и 10 промежутков между ними. Всего $11 + 10 = 21$ одинаковых отрезков. В Машинной расческе таких отрезков $21 \cdot 5 = 105$. Из них зубчиков на один больше, чем промежутков. Значит, зубчиков 53, а промежутков 52.

2. 45° , 60° и 75° .

Посмотрим на левый верхний угол картины. Видно, что два угла, равных углу A , в сумме дают 90° . Значит, угол A равен 45° . Посмотрим теперь на правый верхний угол картины. Три угла, равных углу C , один угол, равный углу A , и угол квадрата составляют полный угол в 360° . Значит, $3\angle C = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 225^\circ$, т.е. угол C равен $225^\circ : 3 = 75^\circ$. Тогда угол B равен $180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$.

3. $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{14}$.

Будем считать, что ребро куба равно 1, тогда его объем тоже 1, а объем каждого из восьми брусков равен $\frac{1}{8}$.

Очевидно, что ширина красного и желтого брусков равна $\frac{1}{2}$. Два измерения синего бруска равны по 1, значит, третье измерение равно $\frac{1}{8}$. Тем

самым, длина красного бруска

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Теперь мы можем найти высоту красного бруска, разделив объем на произведение длины и ширины:

$$\frac{1}{8} : \left(\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{7}.$$

Оставшаяся часть высоты куба – удвоенная высота желтого бруска, значит, высота желтого бруска равна

$$\left(1 - \frac{2}{7} \right) : 2 = \frac{5}{14}.$$

Затем найдем длину желтого бруска тем же приемом, что и высоту красного:

$$\frac{1}{8} : \left(\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{10}.$$

4. Не могло.

Первое решение. Предположим, такое случилось. В первый раз никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям – иначе он будет стоять между двумя хамелеонами этого же цвета и во второй раз будет вынужден окраситься в этот цвет вновь. Но никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям и во второй раз: если так произошло, то этот хамелеон минуту назад получил этот цвет от одного из соседей, значит, один из его соседей принимал этот цвет два раза – в начале и в конце. Поэтому каждый хамелеон каждый раз отдает свой цвет не более чем одному соседу, т.е. количество хамелеонов каждого цвета не увеличивается. Но хамелеонов 35, а цветов 3, значит, изначально хамелеонов какого-то цвета не больше 11 (иначе суммарно хамелеонов хотя бы $12 \cdot 3 = 36$). Тогда хамелеонов этого цвета за все время было не больше $11 \cdot 3 = 33$ и какой-то из хамелеонов точно в этот цвет не окрашивался.

Второе решение. Предположим, что такое могло быть. Пронумеруем хамелеонов по кругу от 1 до 35 и нарисуем таблицу из 3 строк и 35 столбцов, в которой каждому хамелеону соответствует столбец (будем считать таблицу зацикленной, т.е. после 35-го столбца будет вновь идти первый). Закрасим каждую клетку в первой (верхней) строке в изначальный цвет соответствующего хамелеона, во второй строке – в его цвет через минуту и в третьей строке – в итоговый цвет. Итоговый цвет каждый хамелеон мог позанимствовать от правого или от левого соседа, но, поскольку каждый хамелеон каждый цвет принимал ровно один раз, правый сосед мог получить этот цвет после первой минуты только от своего правого соседа, а левый – только от своего левого. Тогда в таблице (рис. 1) от каждой клетки третьей строки вверх идет одна или две одноцветные диагонали.

Посмотрим на первого хамелеона. Без ограничения общности, пусть от его клетки в третьем ряду одноцветная диагональ идет вправо (рис. 2).

Рис. 1

Рис. 2

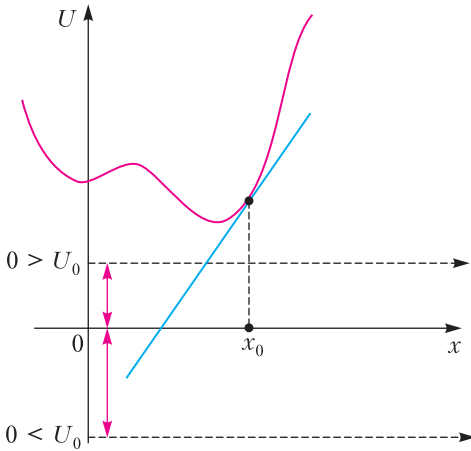


Рис. 7

то и она при таком преобразовании потенциальной энергии остается неизменной.

8. Так как тело движется равномерно, то сила F , компенсирующая силу сопротивления, равна ей по величине и, соответственно, развивает такую же по модулю мощность: $P_c = -P = -Fv = -(-U'_x)v = -0,05 \text{ Вт}$.

9. Добавив к закону расширения уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$, получим зависимость $T(V) = \frac{1}{\nu R}(aV^2 + bV)$. Максимальная температура достигается при условии $T'_V = \frac{1}{\nu R}(2aV + b) = 0$. Отсюда искомый объем $V = -\frac{b}{2a}$.

10. Выражая давление из уравнения Менделеева-Клапейрона, получим $p = \frac{\nu RT_0}{V} \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)$. Приравняв производную p'_V к нулю, найдем объем $V = 2V_0$, при котором достигается $p_{\max} = \frac{\nu RT_0}{4V_0}$.

11. Преобразуем выражение для мощности, выделяемой на реостате, к виду $P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + 2r + r^2/R}$. Известно соотношение $x + \frac{1}{x} \geq 2$, в нашем случае $R + r^2/R = 2r$, откуда $R = r$ и $P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$.

12. Да, при равномерном изменении индукции магнитного поля.

13. Нет, ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = -LI'_t$ возникает лишь при изменении тока, а производная постоянного тока по времени равна нулю.

14. Появляющееся вокруг электромагнита магнитное поле возбуждает в его обмотке ЭДС самоиндукции, препятствующую быстрому нарастанию тока.

Микроопыт

При резком изменении скорости автомобиля вы либо вжимаетесь в кресло, либо натягиваете ремень безопасности, т.е. испытываете действие сил, создающих ускорение. А эта величина не что иное, как скорость изменения скорости, иначе говоря – ее производная.

Друзья и незнакомцы на цикле

Домашнее задание. Ни при каких n .

Будем считать, что люди стоят в шеренгу (двух крайних при этом считаем соседями). Определим вес каждой семьи: рассмотрим, как эти трое стоят в шеренге, если ребенок стоит первым, полагаем вес равным 1, если вторым – 2, если третьим – 0. Нетрудно проверить, что при выполнении операций смены мест сумма весов всех семей по модулю 3 не меняется. В частности, из любой расстановки нам не удастся получить расстановку, где ребенок поменялся с одним из родителей, а все остальные люди остались на тех же местах.

LXV Международная математическая олимпиада

1 (по решению И. Часовских). Все четные целые α .

Пусть $2m$ – целое четное число. Тогда заметим, что числа α и $\alpha + 2m$ удовлетворяют (или не удовлетворяют) условию задачи одновременно. Действительно, $[k(\beta + 2m)] - [k\beta] = 2mk$, поэтому разность сумм из условия для чисел $\alpha + 2m$ и α будет равна $2m(1 + 2 + \dots + n) = mn(n + 1)$, что делится на n (при любом натуральном n).

Остается найти все $\alpha \in [0; 2)$, удовлетворяющие условию. Очевидно, $\alpha = 0$ подходит.

Докажем, что $\alpha \in (0; 1)$ не подходит.

Полуинтервалы вида $\left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}\right)$ для $n = 2, 3, \dots$ покрывают интервал $(0; 1)$, поэтому найдется натуральное $n \geq 2$ такое, что $\frac{1}{n} \leq \alpha < \frac{1}{n-1}$. Тогда $(n-1)\alpha < 1 \leq n\alpha < 2$ (последнее неравенство верно, так как $\frac{n}{n-1} \leq 2$). Значит,

$$[\alpha] = [2\alpha] = \dots = [(n-1)\alpha] = 0, \text{ а } [n\alpha] = 1.$$

Тем самым, для данных α и n сумма из условия задачи будет равна 1, что не делится на n .

Докажем, что $\alpha \in [1; 2)$ не подходит.

Полуинтервалы вида $\left[2 - \frac{1}{n-1}; 2 - \frac{1}{n}\right)$ для $n = 2, 3, \dots$ покрывают полуинтервал $[1; 2)$, поэтому

найдется натуральное $n \geq 2$ такое, что $2 - \frac{1}{n-1} \leq \alpha < 2 - \frac{1}{n}$. Тогда при $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеем

$2k - 1 \leq 2k - \frac{k}{n-1} \leq k\alpha < 2k$, поэтому $\lfloor k\alpha \rfloor = 2k - 1$.

Кроме того, $2n - 2 \leq 2n - \frac{n}{n-1} \leq n\alpha < 2n - \frac{n}{n} =$

$= 2n - 1$, поэтому $\lfloor n\alpha \rfloor = 2n - 2$. Таким образом,

для данных α и n сумма из условия задачи будет равна $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 2) = n^2 - 1$, что не делится на n .

Этим завершается решение.

2 (по решению Р.Коптилина). (1,1).

Заметим, что пара (1,1) подходит под условие.

Пусть одно из чисел равно 1, а другое больше 1, скажем, $b > a = 1$. Тогда $\text{НОД}(1 + b, b^n + 1) =$

$= \text{НОД}(1 + b, (-1)^n + 1)$, что равно $b + 1$ при нечетном n и равно 1 или 2 при четном n . Видим, что условие задачи не выполнено.

Предположим теперь, что пара чисел a, b , больших 1, удовлетворяет условию.

Положим $p = ab + 1$, тогда $ab \equiv -1 \pmod{p}$. Отметим, что p взаимно просто с каждым из чисел a, b .

Имеем $a(a^n + b) \equiv a^{n+1} - 1 \pmod{p}$ и $b(b^n + a) \equiv b^{n+1} - 1 \pmod{p}$. Тогда если $n + 1$ делится на $\phi(p)$, где ϕ – функция Эйлера, то $a^{n+1} - 1$ делится на $a^{\phi(p)} - 1$, которое, согласно

теореме Эйлера, делится на p . Поэтому $a(a^n + b)$ делится на p , а значит (ввиду $\text{НОД}(a, p) = 1$), и $a^n + b$ делится на p . Аналогично получаем, что

если $n + 1$ делится на $\phi(p)$, то $b^n + a$ делится на p . Ясно, что n такие, что $n + 1$ делится на $\phi(p)$, могут быть сколь угодно большими, поэтому g должно делиться на p .

Но тогда, согласно условию, при всех достаточно больших n число $a^n + b$ должно делиться на p , а следовательно, и $a^{n+1} - 1$ должно делиться на p . Возьмем (достаточно большое) n вида $k\phi(p)$. Для такого n имеем $a^{n+1} - 1 \equiv a^{k\phi(p)+1} - 1 \equiv$

$\equiv a - 1 \pmod{p}$ (здесь мы снова воспользовались тем, что $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$). Итак, получается, что $a - 1$ делится на p , а это невозможно, поскольку $0 < a - 1 < p$. Противоречие.

3 (по решению И. Часовских). Будем считать, что изначально на доске выписаны члены

a_1, \dots, a_N , а далее мы дописываем по одному члены a_{N+1}, a_{N+2}, \dots . Мы будем изображать текущую ситуацию, отмечая некоторые клетки клетчатого

квадранта (т.е. четверти плоскости, где каждая клетка имеет натуральные координаты $(x; y)$).

Именно, для каждого i , если число i в данный момент встречается c_i раз, то в i -м столбце будут отмечены c_i нижних клеток (таким образом, общее количество отмеченных клеток равно количеству выписанных чисел).

Тогда на очередном шаге, когда дописывается число a_{n+1} , происходит следующее: если в столбце с номером a_n отмечено k клеток, то на новом шаге отмечается очередная клетка в столбце k .

Для натурального t обозначим через S_t множество клеток, у которых хотя бы одна координата не превосходит t ; тогда S_t состоит из *углового квадрата* $t \times t$, *горизонтальной полосы* \mathcal{H}_t , в которой лишь ординаты не превосходят t , и *вертикальной полосы* \mathcal{V}_t , в которой лишь абсциссы не превосходят t . Выберем число M так, что изначально (при $n = N$) все отмеченные клетки лежат в угловом квадрате $M \times M$ (а значит, и в полосе S_M).

Лемма 1. В любой момент времени все отмеченные клетки будут находиться в S_M .

Доказательство. При $y > M$ каждая клетка в столбце y появилась сразу после момента, когда в каком-то столбце образуется ровно y клеток. Если в некоторый момент все отмеченные клетки лежат в S_M , то все столбцы, в которых хотя бы y клеток, имеют абсциссы, не превосходящие M , а значит, их не больше M . Следовательно, на следующем шаге в y -м столбце не может оказаться больше чем M клеток, т.е. новая отмеченная клетка не может выйти за пределы S_M .

Лемма 2. Начиная с некоторого момента, новые клетки будут появляться поочередно в $\mathcal{H}_M, \mathcal{V}_M, \mathcal{H}_M, \mathcal{V}_M, \dots$

Доказательство. В квадрате $M \times M$ конечное число клеток, так что, начиная с некоторого момента, в нем перестанут появляться новые клетки, а значит, они будут появляться только в \mathcal{H}_M и \mathcal{V}_M . Рассмотрим наш процесс с этого момента. Если на очередном шаге клетка $(x; y)$ появляется в \mathcal{V}_M , то $y > M$, а следующая клетка появится в столбце y , т.е. она будет лежать в \mathcal{H}_M . Аналогично, если очередная клетка $(x; y)$ появляется в \mathcal{H}_M , то $y \leq M$ и следующая клетка появится в \mathcal{V}_M . Из этих двух лемм следует, что в \mathcal{V}_M появится бесконечное число клеток, т.е. некоторые числа появятся в последовательности бесконечное число раз. При этом все такие числа не превосходят M ; пусть D – наибольшее из таких чисел. Назовем член последовательности *маленьким*, если

он не превосходит D , и *большим*, если он больше M . Тогда, начиная с некоторого момента, все члены последовательности будут либо маленькими, либо большими, причем одна из двух подпоследовательностей a_1, a_3, a_5, \dots и a_2, a_4, a_6, \dots с этого момента будет состоять лишь из маленьких чисел, а другая – из больших. Назовем эти последовательности *маленькой* и *большой* соответственно. Рассмотрим наш процесс начиная с этого момента. Наша цель – доказать, что маленькая последовательность в конечном итоге периодична.

Рассмотрим некоторый момент процесса. При $i = 1, 2, \dots, D$ обозначим через c_i количество клеток в i -м столбце.

Лемма 3. При $i \leq D - 1$ имеем $c_{i+1} - c_i \leq 2M$.

Доказательство. Пусть с начала процесса в i -м и в $(i+1)$ -м столбцах появились d_i и d_{i+1} клеток соответственно. Тогда d_{i+1} – это количество столбцов, в которых в некоторый момент до нашего появилась $(i+1)$ -я клетка. Если номер такого столбца больше M , то до этого в нем появлялась и i -я клетка, т.е. этот столбец внес свой вклад и в d_i . Это значит, что $d_{i+1} \leq d_i + M$. Поскольку исходно в $(i+1)$ -м столбце было не больше M клеток, а в i -м – не менее 0, имеем $c_{i+1} - c_i \leq (M - 0) + (d_{i+1} - d_i) \leq 2M$.

Из леммы 3 следует, что *каждое* из чисел $1, 2, \dots, D$ встретится в последовательности бесконечно много раз (поскольку c_D принимает сколь угодно большие значения). Значит, начиная с некоторого момента, все столбцы $1, 2, \dots, D$ будут выше, чем все остальные столбцы. Далее мы считаем, что этот момент уже наступил и после него каждое из чисел $1, 2, \dots, D$ появилось в последовательности хотя бы по разу.

Лемма 4. При $i \leq D - 1$ имеем $c_{i+1} - c_i \geq -2DM$.

Доказательство. Предположим противное: $c_i - c_{i+1} > 2DM$. Тогда для любых j и k таких, что $j \leq i < k \leq D$, из предыдущей леммы имеем

$$\begin{aligned} c_k - c_j &= (c_i - c_j) + (c_{i+1} - c_i) + (c_k - c_{i+1}) < \\ &< (i - j) \cdot 2M - 2DM + (k - i - 1) \cdot 2M = \\ &= (k - j - 1) \cdot 2M - 2DM < D \cdot 2M - 2DM = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, сейчас выполнено следующее свойство: *в любом из столбцов $1, 2, \dots, i$ больше клеток, чем в любом из столбцов $i + 1, \dots, D$.*

Рассмотрим последний момент перед этим, когда появилась клетка в одном из столбцов $1, 2, \dots, i$. Тогда ясно, что свойство выполнено и в этот момент. Докажем, что после этого новые клетки будут появляться лишь в столбцах $1, 2, \dots, i$ (а значит, свойство по-прежнему будет выполне-

но). Действительно, пусть к некоторому моменту это так, новая клетка появилась в столбце $j \leq i$, и в нем теперь y клеток; тогда $y > M$. Пусть в этот момент есть ровно z столбцов, содержащих хотя бы по y клеток; абсциссы всех этих столбцов не больше i , так что $z \leq i$. На следующем шаге появится новая клетка в столбце y и в этом столбце окажется z отмеченных клеток. Значит, следующая клетка в \mathcal{V}_M появится в столбце $z \leq i$, что мы и собирались показать. Итак, в столбце $D > i$ клеток больше не появится. Это противоречит выбору числа D .

Теперь нетрудно доказать искомую периодичность. В каждый момент времени, когда появилась новая клетка в \mathcal{V}_M , рассмотрим строку чисел $(c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_D - c_{D-1}, i)$, где $i \leq D$ – номер столбца, в котором эта новая клетка появилась. Каждое из этих чисел – целое, оно не больше $2M$ и не меньше $-2DM$. Поскольку строк, удовлетворяющих этим условиям, конечное количество, какая-то из них повторится дважды.

Это значит, что в некоторый момент n_1 добавилась клетка в i -й столбец (т.е. $a_{n_1} = i$) и в столбцах $1, 2, \dots, D$ стало c_1, c_2, \dots, c_D клеток соответственно, в некоторый последующий момент n_2 имеем $a_{n_2} = i$, а количества клеток в столбцах равны C_1, C_2, \dots, C_D соответственно, причем $C_{j+1} - C_j = c_{j+1} - c_j$ при всех j . Это значит, что $C_j - C_k = c_j - c_k$ при любых j и k .

В момент $n_1 + 2$ в последовательности появится число, равное количеству чисел среди c_1, \dots, c_D , не меньших c_i ; аналогично, в момент $n_2 + 2$ появится число, равное количеству чисел среди C_1, \dots, C_D , не меньших C_i . Эти количества равны, т.е. $a_{n_1+2} = a_{n_2+2}$, а тогда строки чисел, соответствующих моментам $n_1 + 2$ и $n_2 + 2$, также совпадают. Рассуждая так дальше, получаем, что $a_{n_1+2t} = a_{n_2+2t}$ при всех натуральных t , что и означает требуемую периодичность.

4 (по решению Ц. Французова). Заметим, что касательная, проведенная через X параллельно AC , симметрична прямой AC относительно I (рис. 8). Аналогично, касательная, проведенная через Y параллельно AB , симметрична прямой AB относительно I . Тогда точка V пересечения этих касательных симметрична A относительно I , в частности V лежит на биссектрисе AI угла BAC . При гомотетии с центром A и коэффициентом 2 точки K, I, L переходят соответственно в C, V, B . Поэтому $\angle KIL = \angle CVB$. Значит, достаточно

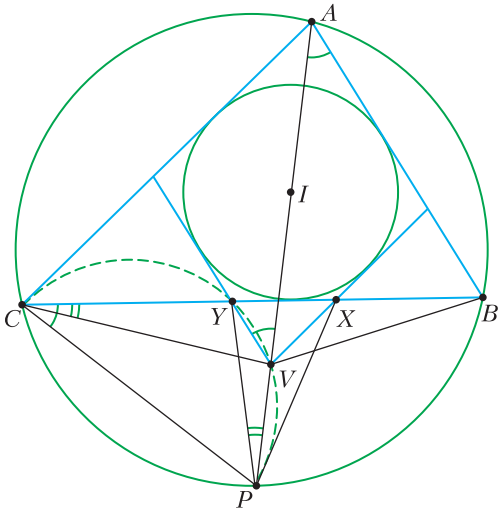


Рис. 8

доказать, что $\angle YPX = 180^\circ - \angle CVB$, или что $\angle YPX = \angle VCB + \angle VBC$.

Далее, из окружности $(ABCP)$ и параллельности AB и VY имеем $\angle PCB = \angle PAB = \angle AVY$. Из полученного равенства углов $\angle PCB = \angle AVY$ следует, что точки C, P, V, Y лежат на одной окружности. Отсюда $\angle YPV = \angle YCV = \angle BCV$. Аналогично, $\angle XPV = \angle CBV$. Складывая полученные два равенства, получаем нужное нам равенство $\angle YPX = \angle VCB + \angle VBC$.

5. Решение этой задачи дано в статье Н. Панюни-на в этом номере журнала.

6 (по решению И. Часовских). $c = 2$.

1) Предположим, что $f(x) = 0$ для некоторого $x \neq 0$. Подстановка в условие $y = x$ дает $f(x + f(x)) = f(x) + x$, или $f(x + 0) = x + 0$, $f(x) = x$, откуда $0 = x$, т.е. $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

2) Предположим, что $f(0) \neq 0$. Подставим в условие $x = -f(y)$, получим

$$\begin{cases} f(0) = y + f(x), \\ f(y + f(x)) = 0. \end{cases}$$

Отсюда, подставляя $y = f(0)$, выводим

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ f(y + f(x)) = 0. \end{cases}$$

3) В частности, в пункте 2) мы видим, что f точно принимает значение 0, но с учетом 1) имеем $f(0) = 0$.

4) Еще раз, с учетом $f(0) = 0$, посмотрим на условие, полученное в 2) после подстановки $x = -f(y)$:

$$\begin{cases} f(0) = y + f(x), \\ f(y + f(x)) = 0. \end{cases}$$

Видим, что в любом случае $y + f(x) = 0$, откуда $y = -f(x) = -f(-f(y))$. Последнее равенство верно при всех y .

5) Введем функцию $h(y) = -f(y)$. В пункте 4) мы вывели, что $h(h(y)) = y$ при всех y , т.е. h — инволюция. Ниже мы будем пользоваться этим, например при переходе $h(a) = b \Leftrightarrow h(b) = a$.

6) Перепишем начальное условие через h , получим

$$\begin{cases} -h(x - h(y)) = -h(x) + y, \\ -h(-h(x) + y) = x - h(y). \end{cases}$$

Перепишем первое равенство в виде $h(x) - y = h(x - h(y))$.

Перепишем второе равенство в виде $h(-h(x) + y) = h(y) - x$, откуда, поскольку h — инволюция, следует $-h(x) + y = h(h(y) - x)$, или $h(x) - y = -h(h(y) - x)$.

Имеем

$$\begin{cases} h(x) - y = h(x - h(y)), \\ h(x) - y = -h(h(y) - x). \end{cases}$$

Заменим везде y на $h(y)$ и наоборот, получим

$$\begin{cases} h(x) - h(y) = h(x - y), \\ h(x) - h(y) = -h(-h(x - y)). \end{cases} \quad (*)$$

7) Зафиксируем $a \in \mathbb{Q}$. Полагая в 6) $x = a + y$, видим, что $f(a + x) - f(x)$ может принимать не более двух различных значений.

8) Предположим, что $c > 2$, тогда найдутся два различных рациональных числа r_1 и r_2 таких, что $f(r_1) + f(-r_1)$ и $f(r_2) + f(-r_2)$ — различные ненулевые числа. Тогда $h(r_1) + h(-r_1)$ и $h(r_2) + h(-r_2)$ — также различные ненулевые числа. Можно считать, что r_i положительны (иначе можно заменить r_i на $-r_i$). Представим r_1 и r_2 в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $r_1 = \frac{q_1}{s}$, $r_2 = \frac{q_2}{s}$, где q_1, q_2 и s — натуральные.

9) Рассмотрим (бесконечную в обе стороны) последовательность $d_i = h\left(\frac{i+1}{s}\right) - h\left(\frac{i}{s}\right)$. Согласно 7), для $a = \frac{1}{s}$ значение d_i может принимать не более двух значений, назовем их b и m , так что последовательность $\dots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, \dots$ — это последовательность символов b и m .

10) Пусть t — фиксированное натуральное и пусть B_i — количество символов b среди чисел $d_i, d_{i+1}, d_{i+2}, \dots, d_{i+t-1}$ (т.е. среди t последовательных членов последовательности $\{d_n\}$). Согласно

7), разности вида $h\left(\frac{i+t}{s}\right) - h\left(\frac{i}{s}\right)$ принимают не

более двух значений. Но

$$\begin{aligned} h\left(\frac{i+t}{s}\right) - h\left(\frac{i}{s}\right) &= d_i + d_{i+1} + \dots + d_{i+t-1} = \\ &= tm + B_i(b-m). \end{aligned}$$

Значит, B_i принимает не более двух различных значений.

11) Более того, если B_i принимает два значения, то эти значения – соседние натуральные числа. Действительно, B_i и B_{j+1} очевидно отличаются не более чем на 1, и если бы для некоторых номеров $k < l$ выполнялось $|B_k - B_l| \geq 2$, то в конечной последовательности B_k, B_{k+1}, \dots, B_l встретились бы все целые числа между B_k и B_l , т.е. не менее трех значений. Противоречие.

12) Обозначим через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соответственно количества символов b в последовательностях

$$(d_{-q_1}, \dots, d_{-2}, d_{-1}),$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{q_1-1}),$$

$$(d_{-q_2}, \dots, d_{-2}, d_{-1}),$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{q_2-1}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} h(r_2) + h(-r_2) &= \\ &= \left(h\left(\frac{q_2}{s}\right) - h(0) \right) - \left(h(0) - h\left(\frac{-q_2}{s}\right) \right) = \\ &= (d_0 + d_1 + \dots + d_{q_2-1}) - (d_{-q_2} + \dots + d_{-2} + d_{-1}) = \\ &= (\delta - \gamma)(b - m). \end{aligned}$$

Это выражение не равно 0, а кроме того, как мы знаем из 11), $|\delta - \gamma| \leq 1$. Аналогично,

$$h(r_1) + h(-r_1) = (\beta - \alpha)(b - m),$$

где $0 < |\beta - \alpha| \leq 1$. Так как $h(r_2) + h(-r_2) \neq h(r_1) + h(-r_1)$, ровно одно из выражений $\delta - \gamma, \beta - \alpha$ равно 1, а другое равно -1 ; для определенности, пусть $\delta - \gamma = 1, \beta - \alpha = -1$.

Количества символов b в последовательностях (длины $q_1 + q_2$) $(d_{-q_1}, \dots, d_{-1}, d_0, \dots, d_{q_2-1})$ и $(d_{-q_2}, \dots, d_{-1}, d_0, \dots, d_{q_1-1})$ равны соответственно $\alpha + \delta$ и $\beta + \gamma$. Но разность этих количеств равна $(\alpha + \delta) - (\beta + \gamma) = (\delta - \gamma) - (\beta - \alpha) = 2$, что противоречит пункту 11) для $t = q_1 + q_2$.

13) Вывод: $c \leq 2$.

14) Остается привести пример функции, удовлетворяющей условию, для которой $c = 2$. Нелегко проверить, что функция $h(x) = \{x\} - \lfloor x \rfloor$

является инволюцией и для нее выполнены условия (*) из пункта 6). Тогда обратными рассуждениями мы приходим к тому, что $f(x) = \lfloor x \rfloor - \{x\}$ удовлетворяет условию задачи (можно проверить выполнение условия и непосредственно). Кроме того, для этой функции $f(0) + f(0) = 0$ и $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$, поэтому для нее $c \geq 2$.

Заключительный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

9 класс

1. Ускорение зеркала равно $a \approx 1,76 \text{ м/с}^2$ и направлено вниз.
2. $I_1 = 0,8 \text{ А}, I_2 = 0,22 \text{ А}, I_3 = 1 \text{ А}, R \approx 4,1 \text{ Ом}$.
4. $\alpha = \frac{\pi}{4}; v_0 \geq \sqrt{2gL}$.
5. $a = \frac{2L}{t_1^2} = 0,4 \text{ м/с}^2; \frac{L_2}{L} \approx 1,14; t_2 \approx 2,5 \text{ с}; \frac{F_2}{F_1} \approx 1,4$.

10 класс

1. $L = \sqrt{3}s; s_\infty = \sqrt{3}s; s_{\min} = \frac{3s}{2}$.
2. $v_1 = \sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}}, v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}};$
 $T_1 = m_1 g \left(1 + \frac{m_1}{2m_2} \right), T_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_1^2}{2m_2} \right) g.$
3. $h_1 = \frac{(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}{L} - h_0 = 380 \text{ мм};$
 $x_1 = L - \frac{(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}{L} = 1900 \text{ мм};$
 $x_2 = \frac{L - h_0 + \sqrt{(L + h_0)^2 - 4(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}}{2} =$
 $= 1520 \text{ мм}$ (это положение равновесия устойчивое);
 $h_2 = 2\sqrt{(h_0 + h_{\max} + x'_{\max})(L - x'_{\max})} - (L + h_0) \approx$
 $\approx 1007 \text{ мм}.$

4. $T_1 = R \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}}, v_1 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0 m}};$
 $v_2 = \sqrt{\frac{3Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 m}}; T \approx 7,17R \sqrt{\frac{m\epsilon_0}{Q\lambda}}.$

11 класс

2. $V_0 = S \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos\theta)}{\rho g}}; m_1 = \frac{\sigma S^2(1 - \cos\theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2};$

$$m_2 = \frac{\sigma S^2 (1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2} \text{ при } \theta < \frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$m_2 = \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2} \text{ при } \theta \geq \frac{\pi}{2}.$$

$$4. v_1 = \frac{v_0}{3}.$$

$$5. y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2; \alpha \leq 45^\circ;$$

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \approx 9,74^\circ.$$

Заключительный этап I Всероссийской олимпиады школьников по математике

(с.м. «Квант» №7)

9 класс

1. Для Васи.

Если число $k = abc + ab + ac + bc \leq 10^9 - 4000$ хорошее для Пети, то (также натуральное) число

$$k - 2 = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - (a + 1) - (b + 1) - (c + 1)$$

является хорошим для Васи. Значит, если для Пети есть p хороших чисел, то мы предъявили p различных чисел, хороших для Васи, и все они строго меньше, чем $10^9 - 4000$. Но число

$$\begin{aligned} 10^9 - 4000 &= \\ &= (1000 - 1) \cdot 1000 \cdot (1000 + 1) - \\ &\quad - (1000 - 1) - 1000 - (1000 + 1) \end{aligned}$$

также является хорошим для Васи; поэтому для Васи есть хотя бы $p + 1$ хороших чисел.

2. Нет.

Предположим, что такое число n существует. Условие равносильно тому, что все числа, образованные последними двумя цифрами делителей, различны (мы считаем, что к однозначным числам спереди приписаны нули). Назовем такую пару последних цифр *хвостом* числа. Заметим, что хвост числа имеет те же остатки от деления на 4 и на 5, что и исходное число.

Предположим, что n делится на 5. Тогда для любого его делителя d , не кратного 5, существует и делитель $5d$, кратный 5. При этом для разных делителей d мы получаем разные делители $5d$; поэтому количество кратных 5 делителей не меньше половины, т.е. не меньше 25. Но такие делители имеют хвосты, оканчивающиеся либо на 0, либо на 5. Таких возможных хвостов не больше 20, поэтому два из них совпадают. Это противоречие показывает, что n не делится на 5 и хвосты его делителей не могут оканчиваться на 0 или 5. Если число n нечетно, то все его делители также

нечетны. Однако существует всего 50 возможных нечетных хвостов, из которых 10 оканчиваются на 5, т.е. не могут появиться. Поэтому и в этом случае найдутся два одинаковых хвоста.

Если число n делится на 2, но не на 4, то все его делители разбиваются на пары $(d, 2d)$, где d – нечетный делитель n . При этом все числа вида $2d$ имеют хвосты, не делящиеся на 4, а таких хвостов (не делящихся на 5) всего 20. Значит, два из этих хвостов одинаковы.

Наконец, пусть наибольшая степень двойки, на которую делится n , равна 2^r , где $r \geq 2$. Тогда если d – нечетный делитель n , то числа $d, 2d, 2^2d, \dots, 2^r d$ также будут делителями n , и этим исчерпываются все делители n . Поэтому общее число делителей n будет кратно $r + 1$. Таким образом, 50 делится на $r + 1$ и, значит, $r \geq 4$.

Тогда n имеет $\frac{50}{r+1} \leq 10$ нечетных делителей и столько же делителей, которые четны и не делятся на четыре. Стало быть, оставшиеся делители (которых не меньше 30) кратны 4 и, значит, их хвосты также кратны четырем. Но таких хвостов возможно лишь 20, поэтому опять два из них совпадут.

3. 19.

Пусть в процессе было N ходов.

Рассмотрим k -й ход. Обозначим через a_k количество клубней у мальчика, делавшего этот ход, сразу после хода. Тогда у другого мальчика после хода $300 - a_k$ клубней. Также обозначим через $a_0 = 150 = 300 - a_0$ количество клубней у (любого) мальчика перед первым ходом.

В этих обозначениях, перед k -м ходом у мальчика, делавшего его, было $300 - a_{k-1}$ клубней, а после него a_k клубней. Значит, на этом ходу он передавал $300 - a_{k-1} - a_k$ клубней. Если $k \geq 3$, то это количество должно быть больше, чем количество клубней у этого мальчика перед его предыдущим, $(k-2)$ -м, ходом, т.е. не меньше чем $300 - a_{k-3}$. Итак, $300 - a_{k-1} - a_k > 300 - a_{k-3}$, или $a_{k-3} > a_{k-1} + a_k$. Поскольку все числа a_i целые, получаем, что $a_{k-3} \geq a_{k-1} + a_k + 1$ при всех $k = 3, 4, \dots, N$.

Теперь можно получить оценки на числа a_i , действуя «с конца». Определим числа b_0, b_1, b_2, \dots условиями $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ и $b_{k+3} = b_{k+1} + b_k + 1$. Докажем, что $a_{N-k} \geq b_k$ и $b_{k+1} \geq b_k$, индукцией по $k = 0, 1, \dots, N$. При $k = 0, 1, 2$ неравенства очевидны; для перехода, чтобы доказать неравенство при некотором $k \geq 3$, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} a_{N-k} &\geq a_{N-k+2} + a_{N-k+3} + 1 \geq b_{k-2} + b_{k-3} + 1 = b_k, \\ b_{k+1} &= b_{k-1} + b_{k-2} + 1 \geq b_{k-2} + b_{k-3} + 1 = b_k. \end{aligned}$$

Итак, мы получаем, что $a_0 \geq b_N$. Приведем таблицу первых значений чисел b_k :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_k	0	0	0	1	1	2	3	4	6	8	11

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_k	15	20	27	36	48	64	85	113	150	199

Из условия $b_N \leq 150$ получаем, что $N \leq 19$.
 Пример, когда дети могут сделать 19 ходов, следует из построения выше. Изначально у каждого ребенка по $b_{19} = 150$ клубней. Пусть дети действуют так, чтобы после k -го (с начала) хода у переключавшего оставалось ровно b_{19-k} клубней; тогда на k -м (с начала) ходе ребенок переключивает $300 - b_{20-k} - b_{19-k}$ клубней, а перед любым предыдущим его ходом у него будет $300 - b_i$ клубней при $i \geq 17 - k$, причем

$$300 - b_i \leq 300 - b_{17-k} < 300 - b_{19-k} - b_{20-k}.$$

Значит, этот ход удовлетворяет условию и дети могут сделать 19 таких ходов.

4. Применяя теорему Менелая к треугольнику ETZ и секущим AXB и CYD , получаем

$$\frac{AZ}{AE} \cdot \frac{BE}{BT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{CE}{CZ} \cdot \frac{DT}{DE} \cdot \frac{YZ}{YT} = 1.$$

Из равенств $AZ = CE$ и $BE = DT$ следует, что $AE = CZ$ и $BT = DE$. Подставляя все эти равенства, получаем

$$\frac{XT}{XZ} = \frac{YZ}{YT},$$

это означает, что точки X и Y симметричны относительно середины S отрезка ZT (рис. 9). Из условия следует, что лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке F под прямым углом. Тогда в прямоугольном треугольнике XFY медиана FS равна половине гипотенузы XY . Обозначим через M и N середины AD и BC соответственно, а через O – центр окружности $(ABCD)$. Тогда O – точка пересечения середин-

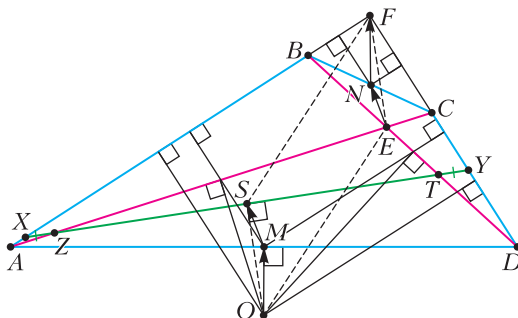


Рис. 9

ных перпендикуляров к AC и BD , которые совпадают с серединными перпендикулярами к EZ и ET соответственно. Значит, O – также центр окружности (ETZ) , а OE – ее радиус. Поэтому нам достаточно доказать, что $OE = FS$. Мы докажем, что $OEFS$ – параллелограмм, откуда это и следует.

Поскольку EN – медиана в треугольнике EBC , а MS – отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника $AZTD$, имеем

$$\overline{EN} = \frac{\overline{EB} + \overline{EC}}{2} = \frac{\overline{DT} + \overline{AZ}}{2} = \overline{MS}.$$

В прямоугольном треугольнике FBC проекции вектора медианы \overline{NF} на прямые BF и CF равны $\overline{BF}/2$ и $\overline{CF}/2$ соответственно. Поскольку O и M – центры окружностей $(ABCD)$ и (ADF) соответственно, при проекции на те же прямые первая попадает в середины отрезков AB и CD , а вторая – в середины AF и DF . Поэтому проекции вектора $\overline{OM} = \overline{AM} - \overline{AO} = \overline{DM} - \overline{DO}$ на эти прямые равны $(\overline{AF} - \overline{AB})/2 = \overline{BF}/2$ и $(\overline{DF} - \overline{DC})/2 = \overline{CF}/2$. Значит, проекции векторов \overline{NF} и \overline{OM} на наши две прямые соответственно равны, откуда $\overline{NF} = \overline{OM}$.

Итак, $\overline{OS} = \overline{OM} + \overline{MS} = \overline{NF} + \overline{EN} = \overline{EF}$, откуда и следует, что $OEFS$ – параллелограмм.

5. 1120 см.

Будем измерять высоту сугроба в дециметрах. Также будем считать, что сторона одной клетки равна 1 дм, т.е. за каждую ночь на клетку выпадает 1 дм^3 снега.

Докажем, что после сорого утра найдется сугроб высотой не менее 112 дм. Предположим, что такого сугроба нет. Так как дворник в сорого утро полностью сгреб снег с какого-то ряда, в десяти клетках квадрата снега нет. В каждой из оставшихся 90 клеток, по нашему предположению, не более 111 дм^3 снега, т.е. всего снега не больше 9990 дм^3 . Однако за 100 ночей суммарно выпало 10000 дм^3 снега. Противоречие.

Покажем, как может действовать дворник, чтобы после сорого утра каждый сугроб имел высоту не более 112 дм (т.е. в каждой клетке было не более 112 дм^3 снега).

Первые 11 дней дворник сгребает снег из второго столбца в первый, следующие 11 дней дворник сгребает снег из третьего столбца во второй, затем 11 дней из четвертого в третий и т.д. Через 99 дней в десятом столбце не будет снега. Посчитаем, сколько снега стало в столбце $i \leq 9$ через 99 дней. Вечером $11(i-1)$ -го дня в столбце номер i не было снега, а в столбце $i+1$ в каждой клетке было по $11(i-1) \text{ дм}^3$ снега. На следующий вечер в столбце i станет по $11(i-1) + 2 \text{ дм}^3$ снега в каж-

дой клетке. Затем еще десять дней количество снега в каждой клетке i -го столбца будет увеличиваться на 2, а затем $11(9-i)$ дней – на 1. Итого, через 99 дней в каждой клетке столбца i будет по $11(i-1) + 22 + 11(9-i) = 110$ дм^3 снега. В сотую ночь выпадет еще по 1 дм^3 в каждую клетку. А сотым утром дворник сгребет снег из десятого столбца в девятый. Таким образом, в каждой клетке будет не более 112 дм^3 снега.

6. Пусть H' и X' – точки, симметричные точкам H и X относительно середины стороны BC соответственно (рис. 10). Тогда $HXH'X'$ – параллелограмм. Так как $\angle BX'C = \angle BH'C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, точки X' и H' лежат на окружности Ω . При этом, поскольку $H'B \parallel CH \perp AB$, точка H' диаметрально противоположна точке A на этой окружности; следовательно, AH' проходит через O . Вспомня, что $XO \parallel H'X'$, получаем

$$\angle AYX' = 180^\circ - \angle AH'X' = 180^\circ - \angle AOX = \angle AYX;$$

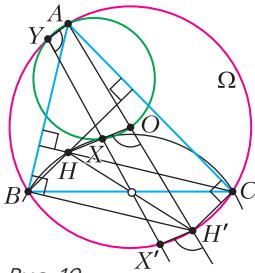


Рис. 10

это и означает, что точки Y , X и X' лежат на одной прямой, делящей BC пополам.

7. Нет, не обязательно.

Построим пример 8 квадратных трехчленов, удовлетворяющих условию задачи:

$$f_1(x) = -x^2 + 2; \quad f_2(x) = 3x^2 - 2; \quad f_3(x) = -4x^2 + 3;$$

$$f_4(x) = 2x^2 - 3; \quad f_5(x) = -4x^2 + x + 4;$$

$$f_6(x) = 4x^2 + x - 4; \quad f_7(x) = -5x^2 - x + 5;$$

$$f_8(x) = 5x^2 - x - 5.$$

Данные многочлены составлены так, чтобы их значения в точках $x = -1, 0, 1$ соответствовали следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
0	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

У трехчленов этого примера нет общего корня (его нет даже у $f_1(x)$ и $f_2(x)$). Осталось показать, что они удовлетворяют условию. Очевидно, никакие два из этих трехчленов не дают в сумме ноль.

Пусть выбрана какая-то пара из этих квадратных трехчленов. Если была выбрана пара $(f_{2k-1}(x), f_{2k}(x))$, где $k = 1, 2, 3, 4$, то все многочлены можно разбить на пары $(f_1(x), f_2(x))$; $(f_3(x), f_4(x))$; $(f_5(x), f_6(x))$; $(f_7(x), f_8(x))$. Каждая сумма этих пар имеет корень 0.

В противном случае нетрудно убедиться, что значение суммы двух выбранных трехчленов или в точке $x_0 = -1$, или в точке $x_0 = 1$ (а может быть, и в обеих сразу) равняется нулю. Выберем такое x_0 . Оставшиеся многочлены в точке x_0 принимают значения -1 и 1 ровно по три раза, и их можно разбить на пары так, чтобы в x_0 суммы всех четырех пар равнялись нулю, т.е. x_0 было их общим корнем.

8. $501^2 - 3 = 250998$.

Докажем, что в аналогичной задаче для шеренги из $2n$ детей наибольшее возможное количество хороших пар равно $(n+1)^2 - 3$.

Пронумеруем детей числами $1, 2, \dots, 2n$ в порядке убывания роста. Тогда, если расставить детей в порядке $n+1, n+2, \dots, 2n, 1, 2, \dots, n$, то все пары (i, j) , где $i \leq n < j$, окажутся хорошими; таких пар всего n^2 . Кроме этого, все пары вида $(i, i+1)$ также окажутся хорошими; таких пар всего $2n-1$. При этом пара $(n, n+1)$ учтена дважды, так что общее количество хороших пар равно $n^2 + (2n-1) - 1 = (n+1)^2 - 3$.

Осталось доказать, что хороших пар не может быть больше $(n+1)^2 - 3$. Сделаем это индукцией по n . При $n=1$ утверждение тривиально, ибо есть всего одна пара детей.

Пусть теперь $n > 1$. Рассмотрим произвольную шеренгу и выберем в ней хорошую пару (a, b) , в которой $|a-b|$ – наибольшее; пусть для определенности $a < b$ и ребенок a стоит левее, чем b . Назовем ребенка c прекрасным, если он образует хорошие пары как с a , так и с b .

Лемма. Существует не больше двух прекрасных детей.

Доказательство. Если c прекрасен, то по выбору пары (a, b) имеем $c-a \leq b-a$ и $b-c \leq b-a$, откуда $a < c < b$. Такой ребенок c не может стоять между a и b , иначе пара (a, b) не была бы хорошей; значит, любой прекрасный ребенок стоит либо слева от a , либо справа от b .

Предположим, что есть два прекрасных ребенка $c_1 < c_2$, стоящих левее a ; тогда $a < c_1 < c_2 < b$. Ребенок c_1 не может стоять между a и c_2 , иначе пара (a, c_2) не хорошая; поэтому c_1 стоит левее c_2 . Но тогда c_2 стоит между c_1 и b и пара (c_1, b) – не хорошая, что невозможно. Это противоречие показывает, что левее a стоит не более одного прекрасного ребенка. Аналогично, не более од-

ного стоит правее b , откуда и следует доказываемое утверждение.

Теперь несложно совершить переход индукции. Выкинув a и b , мы получим, что все хорошие пары, не содержащие a и b , остались хорошими; по предположению индукции, их не больше $n^2 - 3$. Осталось оценить количество хороших пар, содержащих a или b . Это пара (a, b) , пары (a, c) и (b, c) для любого прекрасного ребенка c и максимум по одной из пар (a, c) и (b, c) для остальных детей c . Всего получаем не более чем $1 + (2n - 2) + 2 = 2n + 1$ пар, откуда общее количество хороших пар не превосходит $(n^2 - 3) + (2n + 1) = (n + 1)^2 - 3$, что и требовалось доказать.

10 класс

1. Вычеркнем все нецелые числа из прогрессии (если они есть). Ясно, что после вычеркивания остается бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел. Пусть ее разность равна $-d$.

Заметим, что $q^{23} - p^{23}$ делится на d , значит, d не делится на p , иначе q^{23} должно будет делиться на p , что неверно. С другой стороны, d должно являться делителем числа $p^{24} - p^{23} = p^{23}(p - 1)$. Поскольку p и d взаимно просты, $p - 1$ делится на d . Далее, $p^{23} - p$ делится на $p - 1$ (так как оно равно $p(p - 1)(p^{21} + p^{20} + \dots + 1)$). Поэтому $p^{23} - p$ делится на d , и, поскольку $p < p^{23}$, получаем, что p лежит в нашей прогрессии. Аналогично, q лежит в этой прогрессии.

2. $2n - 1$.

Оценка. Разобьем квадрат $2n \times 2n$ на n^2 квадратиков 2×2 . Среди этих квадратиков не более $2(n - 1)^2 / 2 = (n - 1)^2$ квадратиков, в которых покрашено хотя бы 2 клетки. Остальных квадратиков 2×2 не менее $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$ штук. Из каждого из них можно вырезать трехклеточный уголок.

Пример. Построим пример индукцией по нечетным $n \geq 1$. При $n = 1$ покрашенных клеток нет, и можно вырезать один уголок.

Для перехода выделим в квадрате внешнюю «рамку» шириной в две клетки. В этой рамке закрасим все $8(n - 2)$ клетки, примыкающие к внутренней границе рамки (рис. 11), а в квадрате внутри рамки закрасим клетки по предположению индукции. Общее количество покрашенных клеток равно $2(n - 3)^2 + 8(n - 2) = 2(n - 1)^2$.

Осталось понять, сколько уголков можно вырезать в этом примере. Любой уголок из непокрашенных клеток целиком лежит либо в рамке, либо во внутреннем квадрате (таких по предполо-

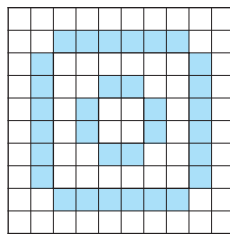


Рис. 11

ложению $2(n - 2) - 1 = 2n - 5$). Из рамки же нельзя вырезать более 4 уголков – каждый такой уголок должен содержать хотя бы 2 клетки одного из угловых квадратов 2×2 , а двух уголков, пересекающихся с одним квадратом, вырезать нельзя. Значит, общее количество уголков не больше $(2n - 5) + 4 = 2n - 1$.

(Продолжение следует)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

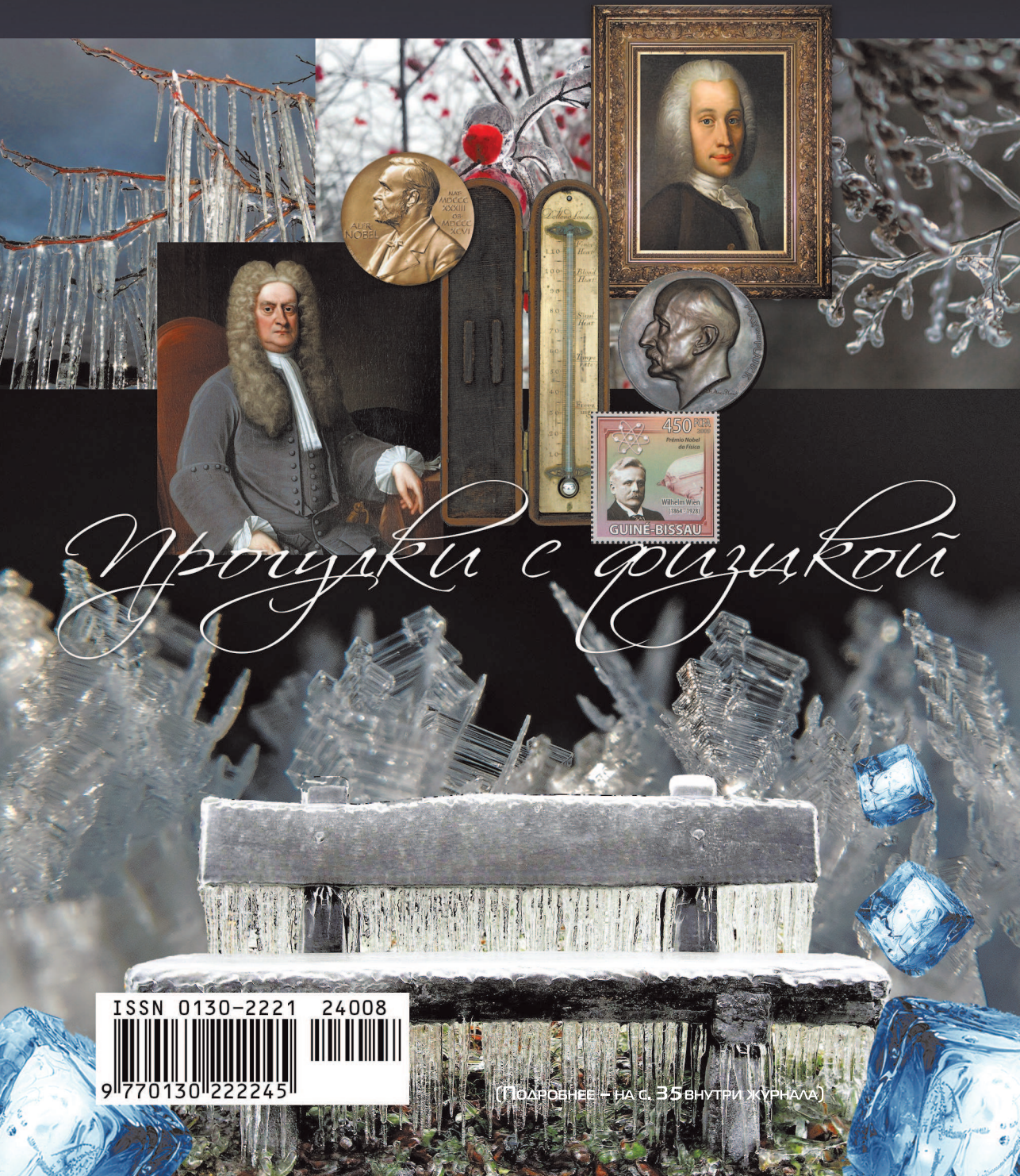
**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

Тел.: (831) 218-40-40

Индекс 90964

ЛЕДЯНОЙ ДОЖДЬ

Оказывается, это красивое природное явление можно не только наблюдать,
но и объяснить с точки зрения законов физики.



Уроки с физикой

ISSN 0130-2221 24008
9 770130 222245

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 35 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)