

ISSN 0130-2221

2024 · № 7

ИЮЛЬ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

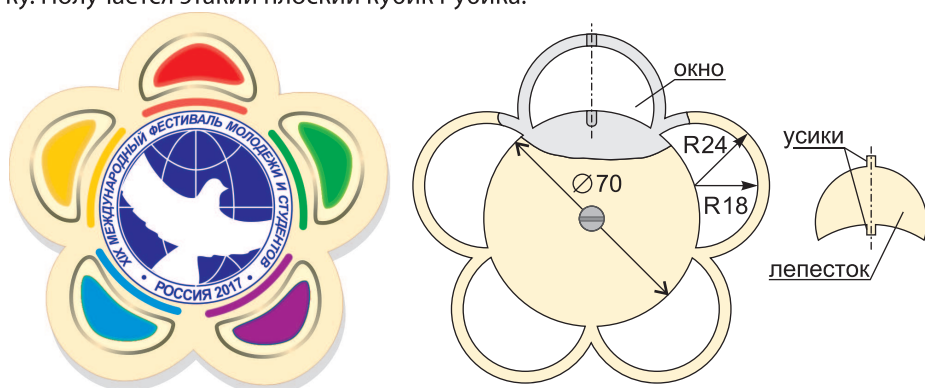




# Фестивальный ЦВЕТОК

Головоломка была изготовлена к XIX Всемирному фестивалю молодежи и студентов, проходившему в Сочи в 2017 году. В отличие от головоломки «Фестивальные кольца», описанной в «Кванте» №3 за 2018 год, эта головоломка массово не производилась. Существует всего несколько ее самодельных экземпляров.

Головоломка состоит из двух одинаковых дисков в форме фестивальной ромашки с окнами, в которые вставлены двуслойные лепестки с общей осью вращения. Лепестковые пары в каждом из пяти окон можно переворачивать на другую сторону вокруг оси. Оба диска в центре скреплены винтом, поэтому их можно поворачивать относительно друг друга на угол, кратный  $72^\circ$ . Если поочередно проделать несколько таких операций, то исходная раскраска лепестков ромашки нарушается. Цель играющего – восстановить эту раскраску. Получается этакий плоский кубик Рубика.



Головоломку можно изготовить в домашних условиях. Диски и их окошки выпиливаются лобзиком из пластины толщиной 4мм. Размеры приведены на рисунке. В центре каждого диска просверлено отверстие, наложенные друг на друга диски крепятся винтом. Скрепленные диски зажимаются в тиски и строго по оси симметрии через каждое окно поочередно сверлятся пять сквозных отверстий, в которые вставляются оси лепестковых пар.

Вращая элементы головоломки случайным образом, решения не найти – ведь головоломка имеет более 100 тысяч ( $10!/2^5$ ) различных состояний и лишь одно – правильное. Чтобы добиться успеха, необходимо понять закономерности перемещения лепестков ромашки во время игры и разработать алгоритм решения этой головоломки.

Удачи!

## В номере:

- 2 Межзвездные полеты: мечты и реалии.  
*М.Никитин*
- 11 Приложения теоремы Больцано–Коши.  
*Д.Баврин*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 15 Памяти Сергея Петровича Новикова
- 16 Теоретическая физика и современная математика. *С.Новиков*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи M2802–M2805, Ф2809–Ф2812
- 19 Решения задач M2786–M2793, Ф2793–Ф2796

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 29 Итоги конкурса 2023/24 учебного года

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 30 Задачи

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 31 «Легкое решение одной трудной геометрической задачи». *К.Козеренко, А.Герасимова, А.Лузгина*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Траектории

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 36 Токи Фуко и гравитация. *С.Герасимов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 40 Заключительный этап I Всероссийской олимпиады школьников по математике

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 43 Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
- 47 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье М.Никитина*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский  
физико-технический институт  
Московский центр непрерывного  
математического образования

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель–Белов,  
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,  
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов (заместитель главного  
редактора), А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,  
В.В.Козлов, С.П.Новиков,  
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов,  
А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**



# Межзвездные полеты: мечты и реалии

*М.НИКИТИН*

**В** КОНЦЕ ПЯТИДЕСЯТЫХ И НАЧАЛЕ шестидесятых годов прошлого века, когда автор этой статьи был в возрасте юных читателей «Кванта», полеты к звездам представлялись вполне возможными. Более того, многие авторы популярных в то время юношеских изданий «Техника молодежи» и «Юный техник» уверенно заявляли, что человек полетит к звездам в начале XXI века. Основанием для столь оптимистических прогнозов были фантастические достижения ракетостроения, физики атомного ядра и элементарных частиц в годы покорения космоса. В то удивительное время казалось, что в недалеком будущем удастся производить в значительных количествах основное топливо для звездных кораблей – антивещество и создать мощные двигатели, пригодные для межзвездных полетов. Также верилось, что развитие физики элементарных частиц приведет к открытиям новых источников энергии во много раз более мощных, чем ядерные.

Увы, спустя 60 лет выяснилось, что надежды авторов научно-популярных изданий и мечты юных читателей оказались красивой фантастикой. Антивещество удастся получать в земных условиях, но в таких мизерных количествах (порядка миллионов антиатомов), что о создании фотонных двигателей речь вести не приходится. В результате перспективы полета людей к звездам становятся достаточно призрачными в случае отсутствия новой физики, принципиально меняющей представления о свойствах и структуре пространства и времени на самых малых и самых больших масштабах. Попробуем

разобраться с реальными проблемами, которые порождает задача межзвездных перелетов.

Для начала рассмотрим основные положения теории относительности – раздела физики, связанного с движением тел с очень большими скоростями в сотни тысяч километров в секунду. Полеты к звездам как раз и связаны с таким движением, так как даже ближайшие к Земле звезды расположены на расстоянии более 4 световых лет. Это и определяет нижний предел скорости гипотетического звездолета в 50000 км/с, приемлемой для того, чтобы добраться до ближайшей звезды за период времени, равный жизни одного поколения людей.



Основу теории относительности составляют два постулата Эйнштейна и преобразования Лоренца для координат и времени двух инерциальных систем отсчета.

**Первый постулат Эйнштейна.** Физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

**Второй постулат Эйнштейна.** Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости источника или приемника.

Первый постулат Эйнштейна является обобщением механического принципа относительности Галилея на все физические процессы. Из него следует важный вывод: физические явления одной природы должны описываться в инерциальных системах отсчета одними и те же уравнениями. Одинаковость протекания физических процессов эквивалентна одинаковости количественных (математических) соотношений между физическими величинами.

Наиболее революционным по формулировке являлся второй постулат Эйнштейна, из которого следует, что классический закон сложения скоростей не соблюдается для света. Это, в свою очередь, означает необходимость пересмотра классических представлений о свойствах пространства и времени, так как скорость является производной величиной от координат и времени.

**Преобразования Лоренца.** Выдающийся голландский ученый лауреат Нобелевской премии Хендрик Лоренц был первым физиком, который на основе уравнений электромагнетизма Максвелла получил преобразования пространственных и временных переменных, оставляющих неизменными вид этих уравнений при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Сейчас эти преобразования называются его именем. Они являются фундаментом всей современной физики. При их использовании сохраняют свой математический вид при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой уравнения механики, электродинамики и квантовой теории.

Запишем эти преобразования для случая одномерного движения для переменных

$(x, t)$  и  $(x', t')$ , где  $x$  и  $x'$  – координаты некоторой точки в двух системах отсчета, причем координатная ось  $x'$  движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $V$ ,  $t$  и  $t'$  – времена, соответствующие координатам точки  $x$  и  $x'$ ,  $c$  – скорость света:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2)$$

Соотношения (1) – это прямые преобразования Лоренца, соотношения (2) – обратные.

Как показывают преобразования Лоренца, пространственные и временные переменные одной системы отсчета связаны линейными соотношениями с аналогичными данными другой. Следствием этого являются неравенства длин отрезков и интервалов времени в системах отсчета, движущихся друг относительно друга. Это различие становится тем значительнее, чем ближе значение относительной скорости  $V$  к скорости света  $c$ . Чтобы убедиться в справедливости такого заключения, применим преобразования Лоренца для случаев с фиксированным положением точки относительно подвижной системы отсчета и фиксированным временем события относительно неподвижной системы отсчета.

В первом случае для  $x'_1 = x'_2 = 0$  (точка все время остается в начале подвижной системы координат) имеем

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Это выражение есть не что иное, как эффект замедления времени. Оно показывает, что в подвижной системе отсчета (в той, которая движется со скоростью  $V$ ) время течет медленнее, чем в неподвижной системе.

Во втором случае при условии  $t_1 = t_2 = 0$  (неподвижный наблюдатель производит измерения длины движущегося тела, связанного с движущейся системой отсчета, в один и тот же момент времени, что необходимо для точного измерения координат

движущегося тела) имеем

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Это соотношение называется эффектом сокращения длины. Оно показывает, что продольные размеры тел относительно неподвижных систем отсчета сокращаются по сравнению с длиной, измеренной в подвижных

Оба эффекта: замедления времени и сокращения длины, предсказанные Альбертом Эйнштейном, были многократно подтверждены в различных физических экспериментах и явлениях. Этим самым была показана справедливость преобразований Лоренца для описания фундаментальных связей между пространственными координатами и временем.

Для малых скоростей, когда скорости относительного движения наблюдателей много меньше скорости света, преобразования Лоренца переходят в классические преобразования Галилея:

$$x = x' + Vt', \quad t = t'.$$

Преобразования Галилея показывают, что и пространственные отрезки и интервалы времени в классической физике остаются неизменными, т.е. инвариантными, при переходе от одного инерциального наблюдателя к другому. Следствием этого является абсолютный характер времени, согласно которому оно течет во всех точках Вселенной одинаково.

Важным следствием преобразований Лоренца является постоянство следующей величины в инерциальных системах отсчета:

$$\begin{aligned} c^2(t_2^2 - t_1^2) - (x_2^2 - x_1^2) &= \\ &= c^2((t'_2)^2 - (t'_1)^2) - ((x'_2)^2 - (x'_1)^2). \end{aligned}$$

Обобщение этого соотношения на случай трех пространственных координат  $(x, y, z)$  позволило Герману Минковскому ввести понятие четырехмерного пространства-времени, в котором каждая из переменных имеет смысл координаты четырехмерного пространства.

**Релятивистский закон сложения скоростей.** Теорию относительности принято называть релятивистской теорией. Это название связано с английским словом *relativity* – *относительность*. Воспользуемся этим термином и мы в разговоре о законе сложения скоростей. Этот закон связывает скорости точки в двух инерциальных системах отсчета. Задав с помощью уравнений (1) малые приращения для переменных  $(x, t)$  и  $(x', t')$  и разделив эти приращения друг на друга, получим

$$v = \frac{v' + V}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)}, \quad (3)$$

где  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  и  $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$  – скорость точки в неподвижной и подвижной системах отсчета,  $V$  – скорость подвижной системы относительно неподвижной.

Выражение (3) является релятивистским законом сложения скоростей. При малых скоростях, когда  $V \ll c$ , оно переходит в классический закон сложения скоростей:

$$v = v' + V.$$

Нетрудно убедиться, что это выражение удовлетворяет второму постулату Эйнштейна. Для этого достаточно приравнять  $v'$  и  $V$  к скорости света, в результате чего получим  $v = c$ .

**Релятивистские энергия и импульс.** Преобразования Лоренца не только дали новое понимание пространственно-временных отношений, но и принципиально изменили определение таких понятий, как механическая энергия и импульс свободно движущегося тела. Согласно теории относительности, релятивистская энергия  $E$  и импульс  $p$  свободной материальной частицы равняются, соответственно,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где  $m$  – масса частицы. Величина  $E_0 = mc^2$  называется энергией покоя. Легко проверить, что она является гигантской величиной даже для небольших масс покоя. Пол-

ная энергия  $E$  движущейся частицы возрастает с увеличением скорости. При  $v \rightarrow c$  она стремится к бесконечности, что делает невозможным движение материальных тел с отличной от нуля массой со скоростью света. Эта особенность движения тел с околосветовыми скоростями является труднопреодолимым барьером для освоения Галактики на расстояниях в сотни и тысячи световых лет. Чтобы космический корабль набрал околосветовую скорость, требуется совершить фантастически большую работу для придания ему соответствующей кинетической энергии. Эта энергия определяется разностью между полной механической энергией тела и его энергией покоя:

$$E_k = E - E_0 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

Нетрудно убедиться, что при стремлении скорости тела к скорости света кинетическая энергия резко возрастает и может значительно превосходить энергию покоя. Такая ситуация является обыденной в ускорителях элементарных частиц, которые разгоняют частицы практически до световых скоростей, чтобы столкнуть с другими частицами.

Для скоростей  $v \ll c$ , когда  $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ , выражение для кинетической энергии приобретает классический вид:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

**Релятивистская ракета.** Теперь у нас есть необходимый теоретический материал, чтобы перейти к описанию движения релятивистской ракеты, пригодной для быстрых межзвездных перелетов. Главная проблема релятивистской ракеты связана с фантастически большой кинетической энергией ракеты. Уже при скорости 50000 км/с кинетическая энергия массы в 1 кг равна  $1,25 \cdot 10^{15}$  Дж. Это очень большая энергия. Она более чем в тысячу раз превосходит кинетическую энергию лун-

ного модуля «Аполлон» и эквивалентна взрыву 20 атомных бомб, подобных той, что была сброшена на Хиросиму. Чтобы сообщить такую кинетическую энергию массе в 1 кг за счет реактивного движения, потребуется затратить энергию во много раз большую (таковы особенности реактивного движения). Сделать это с помощью химических источников энергии невозможно, так как энергетический выход химических реакций в миллионы раз меньше требуемой величины. Тем более невозможно с помощью химических источников энергии сообщить скорость в 50000 км/с звездолетам, массы которых должны составлять тысячи тонн. Для реализации межзвездных полетов нужны источники энергии с максимальным энергетическим выходом, допускаясь законами современной физики.

Следующая проблема межзвездных перелетов связана с созданием двигателей звездолетов, обеспечивающих требуемые для межзвездных перелетов силу тяги и скорость полета. Чтобы разобраться в этом вопросе, нам понадобится уравнение движения релятивистской ракеты. Получим его на основе закона сохранения импульса, записанного с учетом релятивистских выражений для массы и импульса. В соответствии с этим законом, для прямолинейного движения ракеты имеем

$$\Delta p + u \Delta M' = 0, \text{ или } \Delta(Mv) = u \Delta M, \quad (4)$$

Здесь  $\Delta p = \Delta(Mv)$  – изменение релятивистского импульса ракеты,  $u \Delta M'$  – импульс выброшенной массы  $\Delta M'$ ,  $u$  – скорость выброшенной массы относительно неподвижного наблюдателя, при этом  $\Delta M + \Delta M' = 0$ . Скорость выброшенной массы  $u$  определяется соотношением

$$u = \frac{-u' + v}{\left(1 - \frac{u'v}{c^2}\right)},$$

где  $u'$  – скорость выброшенной массы относительно ракеты.

Разделив левую и правую части уравнения (4) на  $\Delta t$ , получим уравнение движения релятивистской ракеты:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = u \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Правая часть этого уравнения определяет величину реактивной силы, равную

$$F_p = u \frac{\Delta M}{\Delta t} = \mu u,$$

где  $\mu = \frac{\Delta M}{\Delta t}$  – расход рабочего тела на создание реактивного импульса.

Чтобы из уравнения движения релятивистской ракеты получить полезные соотношения, нужно от конечных разностей перейти к бесконечно малым величинам – дифференциалам. В результате получится дифференциальное соотношение между переменными  $M$  и  $v$ , которое может быть решено аналитически. Для самого простого случая движения с нулевой начальной скоростью решение дифференциального уравнения имеет вид

$$m = M \left( \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \right)^{c/(2u)},$$

где  $m$  – масса ракеты, достигшей скорости  $v$ ,  $M$  – начальная масса ракеты. В случае малых конечных скоростей эта формула переходит в известную формулу Циолковского:

$$m = M e^{-v/u'}.$$

Неложный анализ показывает, что даже для скорости в 200000 км/с значения  $m$ , рассчитанные по приведенным формулам, отличаются друг от друга не более чем на 20%. Это означает, что сильное влияние релятивистских эффектов в реактивном движении может сказываться только для околосветовых скоростей. Для меньших скоростей с хорошим приближением будет работать классическая теория реактивного движения.

Чтобы наглядно представить следствия формулы для массы ракеты  $m$ , воспользуемся численными расчетами, полученными с ее помощью. На рисунках 1 и 2 приведены результаты расчетов параметра  $\alpha = \frac{m}{M}$  в зависимости от скорости ракеты  $v$  и скорости выброшенной массы  $u'$ . Параметр  $\alpha$  показывает, какая доля на-

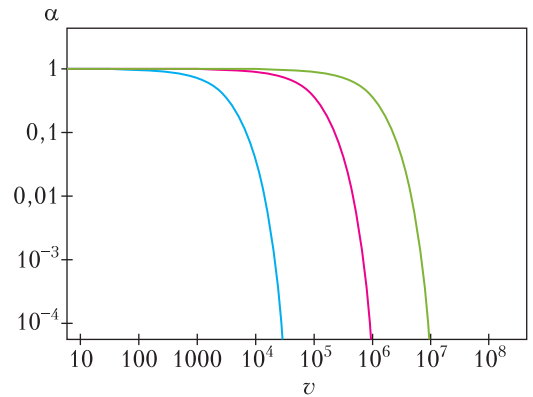


Рис. 1. Зависимость параметра  $\alpha$  от скоростей ракеты и истечения реактивной струи для химических и электрических двигателей

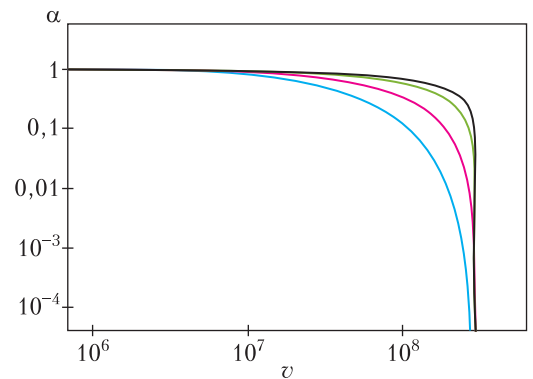


Рис. 2. Зависимость параметра  $\alpha$  от скоростей ракеты и истечения реактивной струи для термоядерных и фотонных двигателей

чальной массы ракеты останется после достижения ракетой скорости  $v$  при фиксированной скорости  $u'$ .

Результаты рисунка 1 относятся к ракетам с химическими и электрическими двигателями, для которых скорости истечения реактивных струй заключены в пределах 3,0–1000 км/с. Кривая, помеченная синим цветом, построена для скорости 3 км/с, красным – 100 км/с, зеленым – 1000 км/с.

Результаты рисунка 2 относятся к ракетам с двигателями со скоростями истечения 50000–300000 км/с. Кривая, помеченная синим цветом, построена для скорости истечения 50000 км/с, красным – 100000 км/с, зеленым – 200000 км/с, черным – 300000 км/с.



Кривые обоих рисунков показывают общую закономерность: резкое падение текущей массы ракеты с достижением ракетной скорости истечения вещества из гипотетического ракетного двигателя. Рисунок 1 подтверждает высказанное ранее утверждение, что с помощью химических и электрических двигателей невозможно осуществление межзвездных полетов, так как полезные нагрузки таких ракет быстро устремляются к нулю для скоростей, немалого больших скоростей истечения.

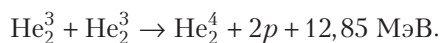
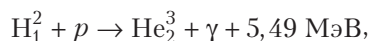
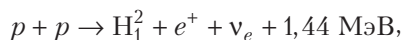
Данные рисунка 2 хорошо иллюстрируют возможности потенциальных звездолетов со скоростью истечения, равной или большей 50000 км/с. Примечательно, что скорости полета в 100000 км/с может достичь десятая часть исходной массы покоя звездолета даже при скорости истечения в 50000 км/с. Это обстоятельство можно рассматривать как реальную возможность межзвездного полета в один конец. Данные рисунка 2 также показывают, что максимальными возможностями для межзвездных перелетов обладают звездолеты, из двигателей которых истекает вещество со скоростью света – 300000 км/с. Этим веществом может быть только свет. Соответственно, ракеты, которые приводятся в движение давлением света, называются фотонными.

**Ракетные двигатели для межзвездных полетов.** Рассмотрим возможные типы ракетных двигателей, которые потенциально могут обеспечить полет звездолетов со скоростью 50000 км/с и больше. Скорость в 50000 км/с выбрана как некоторый исходный ориентир, так как немного меньшие или большие скорости, например 30000 км/с или 60000 км/с, дают близкие времена полета до ближайших звезд. Близкими должны быть и физико-технические технологии, допускающие создание ракет с такими скоростями.

**Термоядерные ракеты.** Теоретические и в определенной степени экспериментальные исследования показывают, что скорости истечения порядка 50000 км/с могут обеспечить плазменные двигатели, источником энергии которых является термо-

ядерный синтез. В основе термоядерного синтеза лежат реакции слияния легких ядер в плазме при высокой температуре с выделением энергии значительно большей, чем затрачено на создание и разогрев плазмы.

Типичным примером термоядерного синтеза являются ядерные реакции на Солнце протон-протонного цикла:



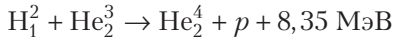
Здесь  $p$  – протон,  $\text{H}_1^2$  – дейтон,  $\text{He}_2^3$  – изотоп гелия,  $e^+$  – позитрон,  $\nu_e$  – электронное нейтрино,  $\gamma$  – гамма-квант. Цифры указывают энергию, которая выделяется в этих реакциях в мегаэлектронвольтах (МэВ). Основным результатом этих реакций является преобразование четырех протонов в ядро гелия с выделением энергии, равной 26,71 МэВ. Эту энергию распределяют между собой все окончательные участники реакций. Два нейтрино бесполезно уносят 0,51 МэВ, а оставшиеся 26,2 МэВ становятся теплом в недрах Солнца. И на Солнце, и в термоядерных взрывах, и в установках управляемого термоядерного синтеза типа «Токамак» она в значительной степени заключена в тепловой (кинетической) энергии движения частиц плазмы.

Чтобы реакции слияния легких ядер могли происходить, кинетической энергии взаимодействующих частиц должно быть достаточно для преодоления кулоновского отталкивания и сближения их на расстояние ядерного взаимодействия. Это расстояние близко к размерам легких ядер. Для этого температура плазмы должна быть порядка 100 миллионов кельвинов. При такой температуре в плазме будет протекать самоподдерживающаяся реакция синтеза гелия из водорода.

Основные проблемы, стоящие на пути создания термоядерного ракетного двигателя, состоят в следующем.

1. Необходимо разогреть плазму, состоящую из дейтерия и легкого изотопа гелия, до температуры ядерного синтеза, когда

начнется реакция



(энергетически более эффективная реакция дейтерия и трития не подходит из-за малого периода полураспада трития).

2. Необходимо осуществить управление пространственной конфигурацией термоядерной плазмы так, чтобы обеспечить ее термоизоляцию от материала стенок реактора и сформировать поток вещества в нужном направлении.

Определенные перспективы в решении этих вопросов дают магнитные методы удержания и электромагнитного нагрева плазмы. Не вдаваясь в детали возможных физико-технических подходов в решении двух обозначенных проблем с помощью электромагнитных полей, отметим самое важное достоинство потенциальных термоядерных ракетных двигателей. По прикидкам специалистов эти двигатели смогут обеспечить истечение плазменной струи со скоростью около 50000 км/с, вполне подходящей для полетов к ближайшим звездам. Значение этой скорости в основном определяется температурой внутри термоядерного реактора, а именно корнем квадратным из этой температуры. В этом отношении термоядерные ракетные двигатели похожи на жидкостно-реактивные, где скорость истечения реактивной струи также пропорциональна корню квадратному из температуры газа.

Экзотическим вариантом термоядерного двигателя могут быть двигатели, основанные на подрыве миниатюрных водородных бомб. Идея такого двигателя была впервые высказана в 1950–1960-х годах в проекте «Орион». В основу гипотетического двигателя «Ориона» была положена идея использования импульсов отдачи, порождаемых взрывами маломощных атомных бомб. Для того чтобы такой импульс работал, бомбы должны взрываться недалеко от массивной плиты, находящейся в хвосте ракеты. Причем ядерный заряд должен был сконструирован так, чтобы звездолет принял на себя значительную долю импульса взрыва.

Не останавливаясь на технических проблемах, связанных с реализацией проекта «Орион» и более поздних термоядерных проектов, отметим главный вывод. Взрывные термоядерные ракетные двигатели способны разгонять космические корабли лишь до скорости в 15000 км/с. Это высокая скорость, но ее явно недостаточно для реальных межзвездных полетов. В таких взрывных звездолетах значения конечной и начальной масс ракеты будут сильно различаться, так как фактически вся масса будет использована на разгон. Эта же проблема присуща и плазменным термоядерным двигателям, но для них соотношение начальной и конечной масс звездолетов значительно приемлемее. Так что можно будет не только разогнать плазменный термоядерный звездолет, но и обеспечить благоприятный режим торможения для всего корабля или его отдельного модуля.

Одним из решений этой проблемы недостатка топлива на термоядерных звездолетах может стать прямоточный термоядерный двигатель Бассарда. В этом двигателе в качестве термоядерного топлива предлагается использовать межзвездное вещество, которое в основном состоит из атомов водорода. В силу очень малой концентрации межзвездного вещества, для создания в термоядерном реакторе нужной концентрации протонов придется улавливать космический водород на большой площади с помощью специальной воронки. Оценки показывают, что внешний диаметр этой воронки может достигать сотен и тысяч километров. Это означает, что звездолеты Бассарда должны быть гигантских размеров, медленно разгоняющиеся под действием небольшой реактивной тяги.

**Фотонные ракеты.** Данные рисунка 2 показывают, что только ракеты, у которых истечение вещества из двигателя происходит на скоростях больше 100000 км/с, являются наиболее приемлемыми для межзвездных полетов. К сожалению, на сегодня не известны физические процессы, которые позволили бы придать обычному

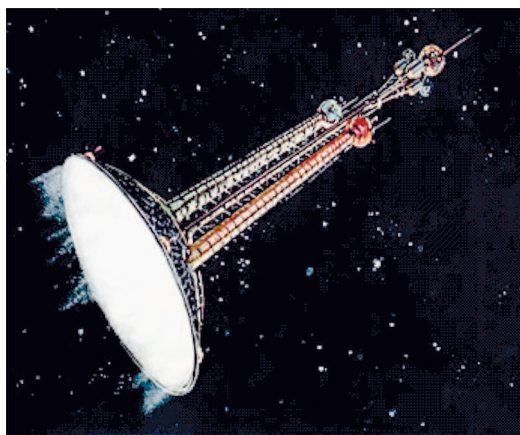


Рис. 3. Общий вид фотонной ракеты

рабочему веществу ракетных двигателей подобную скорость. Правда, есть одно исключение – свет. Ему не надо придавать световую скорость, он существует только в движении и его скорость в вакууме в 300000 км/с является предельной для вещества. Нетрудно придумать конструкцию, в которой импульс отраженного света выступает в роли реактивной силы. Это могут быть световые потоки, созданные на самом звездолете, например с помощью источника света в фокусе параболического зеркала, или световые потоки, направляемые на светоотражаю-

щий парус звездолета извне. Конструкции первого типа получили название «фотонная ракета» (рис. 3), конструкции второго типа получили название «световой парус» (рис. 4).

Для того чтобы фотонный звездолет оказался эффективным средством межпланетных перелетов, необходим постоянно действующий источник фотонов гигантской мощности. Таким источником светового давления может быть только аннигиляция вещества и антивещества. Для других физических механизмов выход световой энергии и создаваемое световое давление на порядки меньше при одних и тех же затратах массы топлива. Как отмечалось в начале статьи, получение антивещества в больших количествах является неразрешимой задачей. Для этого придется потратить энергии больше, чем ее удастся получить в виде света. Все это делает проекты фотонных ракет чистой фантазией.

Значительно более реальными являются запуски к звездам миниатюрных звездолетов-парусников с помощью мощных источников света, находящихся на земле или в космосе. Такие миниатюрные космические парусники планируется отправить к ближайшим звездам в рамках проекта «Прорыв к звездам» – Breakthrough Starshot.

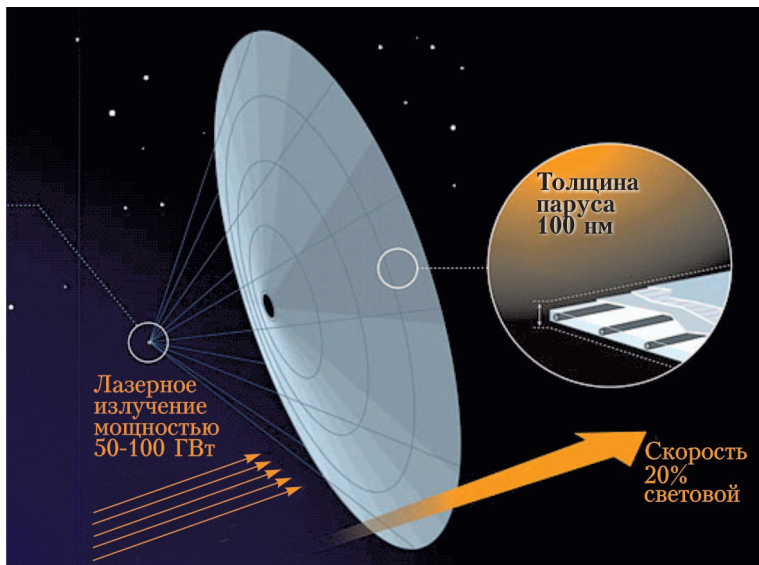


Рис. 4. Возможный вид парусника StarChip

Сам парусник (рис. 4) будет состоять из нанозонда StarChip массой 1 г и сверхлегкого паруса массой 1 г и площадью  $16 \text{ м}^2$ . Для разгона StarChip будет использован комплекс лазеров мощностью 100 ГВт. Сконцентрированные на парусе лазерные лучи должны, по мысли ученых, обеспечить ускорение парусника в  $10000g$  и разогнать его до скорости от 15% до 20% скорости света за пять минут. На такой скорости парусники StarChip смогут достичь ближайшей звезды Аль-

фа Центавра в течение 20–30 лет. Уникальное мини-оборудование нанозондов позволит обследовать окрестности Альфа Центавра и передать полезную информацию на Землю. Если проект «Прорыв к звездам» удастся осуществить, а он вполне реален с позиций современных технологий, то люди получат возможность комплексно исследовать ближайшие звезды с помощью эскадр роботизированных нанозондов.

**Режимы полета звездолетов.** В заключение рассмотрим два основных режима полета звездолетов. Один – на постоянном ускорении, другой – на постоянной силе тяги. Для простоты обсудим движение звездолетов с максимальной скоростью в 50000 км/с, которую в принципе можно получить с помощью термоядерных двигателей. Для таких скоростей можно пренебречь релятивистскими эффектами, что существенно упростит анализ.

Вначале рассмотрим движение с постоянным ускорением  $a$ . В этом случае скорость звездолета

$$v = at$$

и масса

$$m(t) = Me^{-\frac{v}{u'}} = Me^{-\frac{at}{u'}}.$$

Пользуясь этим выражением, найдем изменение массы  $\Delta m$  за время  $\Delta t$ :

$$\Delta m = M \left( e^{-\frac{a(t+\Delta t)}{u'}} - e^{-\frac{at}{u'}} \right) = Me^{-\frac{at}{u'}} \left( e^{-\frac{a\Delta t}{u'}} - 1 \right).$$

Показатель экспоненты в скобках мал в силу малости  $\Delta t$ . Для малых показателей экспонента с хорошим приближением равна  $1 - \frac{a\Delta t}{u'}$ . С учетом этого,

$$\Delta m \approx -\frac{a\Delta t M e^{-\frac{at}{u'}}}{u'}.$$

Разделив модуль этого соотношения на  $\Delta t$ , получим явное выражение для расхода топлива:

$$\mu = \frac{a M e^{-\frac{at}{u'}}}{u'} = \frac{a M e^{-\frac{v}{u'}}}{u'}.$$

Как видно, при постоянном ускорении расход топлива падает по экспоненциаль-

ному закону в зависимости от времени и скорости ракеты. Максимальный расход имеет место в момент старта, когда он равен  $\mu = \frac{aM}{u'}$ .

Рассмотрим теперь случай движения ракеты с постоянной силой тяги. Тогда уравнение движения ракеты принимает вид

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = ma = Me^{-\frac{v}{a'}} a = \mu u',$$

$$a = \frac{\mu u' e^{\frac{v}{u'}}}{M}.$$

Из этого выражения следует, что ускорение звездолета будет нарастать по экспоненциальному закону в зависимости от скорости. Скорость же звездолета будет возрастать по логарифмическому закону от отношения начальной и текущей масс вне зависимости от режима ускорения.

Приведенные выражения позволяют рассчитать требуемые для межзвездных полетов расходы рабочего тела по начальной массе звездолета и его ускорению.

**Заключительная ремарка.** Изложенный материал показывает, что задача межзвездных полетов по-прежнему далека от своего решения. Но разница с прошлым состоит в том, что сегодня физики и конструкторы намного лучше понимают ограниченность своих возможностей. Теперь в популярных изданиях не ведутся разговоры о скорых полетах к центру Галактики или к Туманности Андромеды. Значительно меньше оптимизма и в отношении полета людей к ближайшим звездам. Акцент в замыслах и проектах смещается в сторону полетов без людей с использованием миниатюрных роботизированных нанозондов, подобных StarChip. В центре внимания специалистов находятся также проекты, связанные с разработкой эффективных термоядерных ракетных двигателей. На звездолетах, оборудованных такими двигателями, можно будет отправлять к ближайшим звездам экспедиции без экипажа, оснащенные спускаемыми аппаратами-роботами для исследований экзопланет и поиска внеземной жизни. Подобные полеты вполне реальны к 2050 году.



# Приложения теоремы Больцано–Коши

Д. БАВРИН

**В** ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ОБСУДИМ несколько любопытных задач, решение которых опирается на теорему Больцано–Коши о промежуточном значении для непрерывной на отрезке функции.

Что такое *непрерывная функция*? Для нас строгое определение этого понятия не нужно. Будем использовать два неформальных определения. Непрерывная функция – это функция, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от листа бумаги. Или это функция, малым изменениям аргумента которой соответствуют малые изменения значений функции.

Классическая теорема математического анализа, сформулированная в начале XIX века независимо друг от друга чешским математиком Бернардом Больцано и французским математиком Огюстеном Коши, звучит так.

**Теорема Больцано–Коши.** Пусть дана непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f$ , причем  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (т.е. на концах отрезка она принимает разные по знаку значения). Тогда существует (по крайней мере одна) такая точка  $c \in [a; b]$ , что  $f(c) = 0$ .

Если воспользоваться первым определением, теорема кажется очевидной, однако это не значит, что ее не надо доказывать. Доказательство потребует аккуратности, знания и понимания аксиом вещественных чисел и определения непрерывной функции, что уведет нас в сторону. Поэтому мы дадим лишь идею доказательства.

Рассмотрим середину данного отрезка  $[a; b]$  – точку  $c_1$ . Если  $f(c_1) \neq 0$ , то на концах одного из отрезков  $[a; c_1]$  или  $[c_1; b]$  функция принимает значения разных знаков. С этим

отрезком поступаем так же, как с исходным  $[a; b]$ , т.е. берем середину  $c_2$ , рассматриваем значение  $f(c_2)$ . Если оно не равно 0, то выбираем тот отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков, и продолжаем процесс дальше.

В какой-то момент мы либо получим такую точку  $c$  отрезка, что  $f(c) = 0$ , либо получим последовательность отрезков  $I_1, I_2, \dots$ , длины которых стремятся к нулю и на концах которых функция принимает значения разных знаков. Тогда существует единственная точка  $c$ , общая для всех отрезков. Ее существование следует из аксиом вещественных чисел, а из непрерывности функции  $f$  следует, что эта точка и является нулем.

Оказывается, что с помощью этой теоремы можно получить большое количество крайне интересных геометрических результатов существования. Рассказать о некоторых из них и есть основная цель этой статьи.

**Задача 1.** Пусть дана замкнутая выпуклая кривая  $\gamma$  на плоскости (т.е. кривая, ограничивающая какую-то выпуклую фигуру конечной площади). Докажите, что для любой точки  $A$  внутри фигуры, ограниченной  $\gamma$ , существуют два равных по длине взаимно перпендикулярных отрезка  $L_1, L_2$ , имеющих  $A$  точкой пересечения (рис. 1).

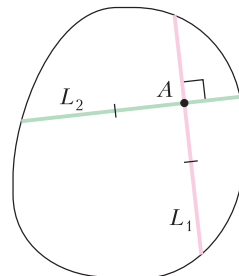


Рис. 1

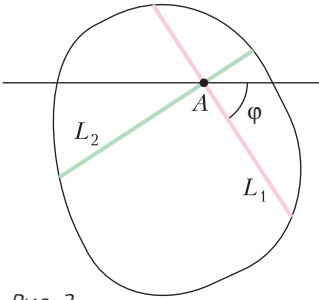


Рис. 2

**Решение.** Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку A (рис. 2). Начертим два взаимно перпендикулярных отрезка \$L\_1, L\_2\$. Обозначим через \$l\_1, l\_2\$ их длины. Пусть \$\varphi\$ – угол между этой прямой и отрезком \$L\_1\$.

Рассмотрим функцию \$L(\varphi) = l\_1(\varphi) - l\_2(\varphi)\$, она является непрерывной функцией от \$\varphi\$. Выпуклость как раз важна для непрерывности. На рисунке 3 приведен пример скачка длины одного из отрезков при небольшом повороте в случае невыпуклой фигуры. Вспомним: малым изменениям аргумента, в данном случае угла \$\varphi\$, должны соответствовать малые изменения значений функции, в данном случае длины отрезка.

Функция \$L(\varphi)\$ может принимать значения как больше нуля, так и меньше него. Действительно, возьмем произвольный угол \$\varphi\_0\$ и пусть, скажем, \$l\_1(\varphi\_0) < l\_2(\varphi\_0)\$ (в случае равенства задача решена). Тогда, повернув отрезки на \$\pi/2\$, получим, что \$l\_1(\varphi\_0 + \pi/2) > l\_2(\varphi\_0 + \pi/2)\$, так как они поменяются местами. Значит, по теореме

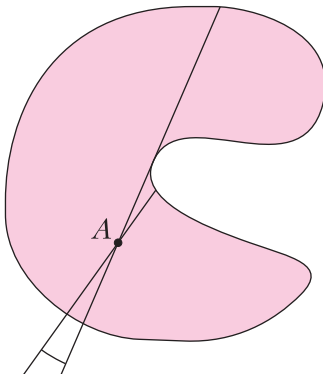


Рис. 3

Больцано–Коши, есть значение \$\varphi\$, при котором \$L(\varphi) = 0\$, т.е. длины отрезков равны.

Следующая задача является обобщением предыдущей задачи в пространстве. Для ее решения нам понадобится обобщение теоремы Больцано–Коши на случай функций двух переменных. Непрерывность функции двух переменных можно понимать в смысле нашего второго определения.

**Задача 2.** Пусть дана выпуклая замкнутая поверхность (ограничивающая некоторое выпуклое тело) \$\Omega\$. Докажите, что существуют две взаимно перпендикулярные плоскости \$\alpha\$ и \$\beta\$, проходящие через точку A, такие, что площади \$S\_1, S\_2\$ фигур в пересечении каждой из плоскостей с телом, ограниченным поверхностью \$\Omega\$, равны.

**Решение.** В этот раз будем вращать вокруг точки A не плоскости, а само тело. Положение тела будем задавать двумя углами (рис. 4).

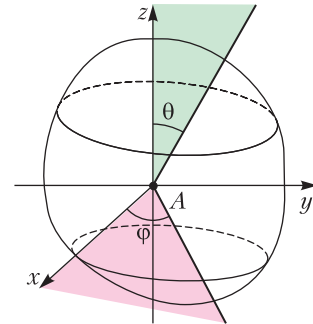


Рис. 4

Рассмотрим две перпендикулярные плоскости и обозначим площади сечений через \$S\_1\$ и \$S\_2\$ (рис. 5). Функция \$S(\varphi, \theta) = S\_1(\varphi, \theta) - S\_2(\varphi, \theta)\$ принимает значения как меньше нуля, так и больше него (поче-

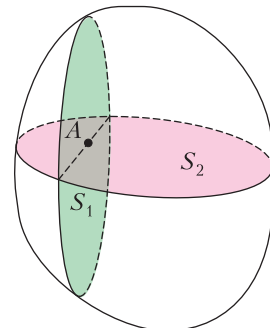


Рис. 5

му?). Значит, снова применяя теорему, приходим к тому, что существуют равные по площади сечения.

Вернемся к задачам на плоскости.

**Задача 3.** Докажите, что в любую плоскую замкнутую выпуклую кривую  $\gamma$ , ограничивающую выпуклую фигуру  $\Omega$ , можно вписать треугольник  $A_1A_2A_3$  так, что площади частей, отсекаемых от фигуры, ограниченной данной кривой, будут равны между собой:  $S_1 = S_2 = S_3$  (рис. 6).

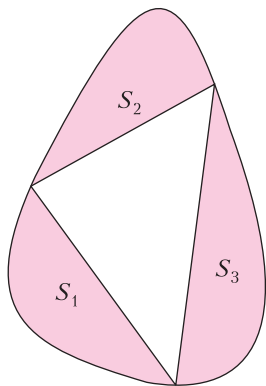


Рис. 6

**Решение.** Обозначим площадь фигуры  $S_\Omega$ . Рассмотрим вертикальную прямую, не пересекающую фигуру (рис. 7). Начнем ее смещать параллельно самой себе в направлении фигуры. Смещение обозначим через  $x$ . В какой-то момент прямая будет высекать на фигуре хорду  $l_3$ , ограничивающую площадь  $S_3$ .

Такая хорда существует для любого  $S_3 \in (0; S_\Omega)$  (см. [1]). Кроме того, снова в силу непрерывности изменения площади при перемещении хорды, существует точка

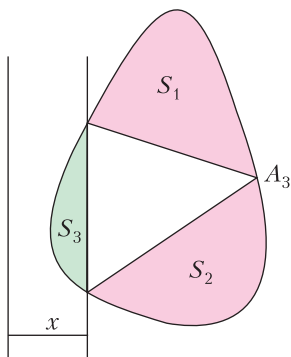


Рис. 7

$A_3$  на кривой  $\gamma$  и две прямолинейные хорды, опирающиеся на первую хорду, отсекающие две равные площади  $S_1(x)$ ,  $S_2(x)$ . Рассмотрим функцию

$$f(x) = S_1(x) + S_2(x) - 2S_3(x) = 2S_1(x) - 2S_3(x).$$

Поскольку площадь  $S_3(x)$  может как превосходить сумму двух оставшихся площадей, так и быть меньше нее (попробуйте понять, почему), то для некоторого  $x$  найдется точка  $A_3(x)$ , обеспечивающая ноль. Тем самым,  $S_1 = S_2 = S_3$ .

**Упражнение.** Решите предыдущую задачу в случае, когда одна из вершин треугольника  $A_1A_2A_3$  изначально фиксирована.

**Задача 4.** Докажите, что в любую плоскую замкнутую выпуклую кривую  $\gamma$  можно вписать окружность  $\omega$ , имеющую по крайней мере две точки касания с данной кривой, так, что области между дугами кривой и дугами окружности можно разбить на две группы, одинаковые по площади (рис. 8).

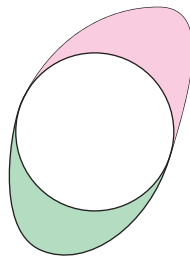


Рис. 8

**Решение.** Рассмотрим окружность, лежащую внутри фигуры и касающуюся ее в двух точках. Получим две области, ограниченные окружностью и границей фигуры. Вопрос существования такой окружности мы опустим, он уведет нас в сторону от повествования.

Будем перекачивать окружность по границе фигуры, сохраняя как минимум две точки касания, и следить за разностью площадей полученных областей. Ясно, что где-то эта разность больше нуля, где-то меньше, поскольку после одного оборота области поменяются местами. Значит, в каком-то положении площади будут равны.

Нужно обратить внимание на одну тонкость. Как быть, если в какой-то момент возникнут три или более точек касания (рис. 9)? Ведь это

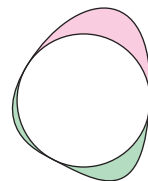


Рис. 9

может привести к скачку функции площади. Поступим следующим образом. При образовании третьей точки касания одна из областей разделяется на две. Тогда будем рассматривать суммарную площадь двух получившихся областей. В этом случае площадь будет меняться непрерывно. И применение теоремы Больцано–Коши корректно.

Для следующей задачи нам понадобится еще один классический результат математического анализа – теорема Вейерштрасса. Эта теорема также сформулирована и доказана в начале XIX века. У классиков математического анализа очень часто десятки, а иногда и сотни теорем, поэтому, говоря «теорема Вейерштрасса», нужно дополнять, о какой конкретно теореме идет речь. Не забывайте также о «принципе Арнольда».<sup>1</sup> Например, есть источники, которые говорят, что эта теорема принадлежит Больцано.

**Теорема Вейерштрасса.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция. Тогда есть точки  $x_1$  и  $x_2$  из этого отрезка такие, что для всех точек  $x \in [a; b]$  верно неравенство  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ .

Попробуйте доказать эту теорему, а мы перейдем к следующей задаче.

**Задача 5.** Пусть дана замкнутая выпуклая кривая  $\gamma$  на плоскости. Тогда на ней существуют три точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  такие, что  $A_1A_2 = A_1A_3$  и хорды  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$  отсекают площади, равные трети от площади фигуры, ограниченной кривой  $\gamma$  (рис. 10).

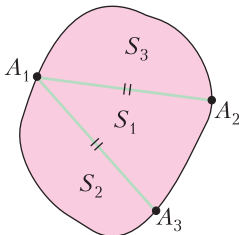


Рис. 10

**Решение.** Зададим кривую  $\gamma$  параметрически непрерывной функцией  $\gamma: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . В данном случае это функция принимает значения не на прямой, а на плоскости. И снова ее непрерывность интуитивно можно понимать в рамках второго определения. А именно, небольшому изменению переменной  $t$  соответствуют небольшие изменения точки  $\gamma(t)$  на плоскости.

Для произвольной точки  $A_1$  на кривой можно провести две хорды, которые делят фигуру на три равные по площади части. Обозначим концы хорд через  $A_2$  и  $A_3$ . И пусть обход  $A_1A_2A_3$  совершается по часовой стрелке. Длину хорды  $A_1A_2$  обозначим  $l(t)$ , длину хорды  $A_1A_3$  обозначим  $r(t)$ . Наша задача доказать, что разность  $l(t) - r(t)$  может быть равна нулю для некоторого  $t$ .

Пусть  $t_0$  – такое значение параметра  $t$ , что длина хорды  $l(t_0)$  минимальна. И пусть это  $t_0$  соответствует точке  $A_1$ . Сдвинем точку  $A_1$  в точку  $A_2$ , пусть новой точке  $A_1$  соответствует параметр  $t_1$ . Тогда заметим, что хорда  $l(t)$  станет хордой  $r(t)$ . Кроме того,  $l(t_0) - r(t_0)$  в силу минимальности  $l(t_0)$  меньше нуля, значит,  $l(t_1) - r(t_1)$  больше нуля. И остается сослаться на теорему Больцано–Коши.

Проиллюстрируем, как себя могут вести функции  $l(t)$ ,  $r(t)$  (рис. 11).

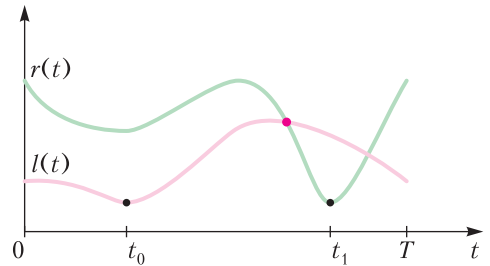


Рис. 11

Другие примеры приложения теоремы Больцмана–Коши можно найти в книге [2] и в статьях [1] и [3].

### Литература

1. С. Табачников. Соображения непрерывности. – «Квант», 1987, № 6.
2. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
3. М. Крейн, А. Нудельман. Теорема Борсука–Улама. – «Квант», 1983, № 8.

<sup>1</sup> «Если какое-либо понятие имеет персональное имя, то это – не имя первооткрывателя».





## **Сергей Петрович Новиков**

**(20.03.1938 – 06.06.2024)**

6 июня 2024 года ушел из жизни выдающийся математик, академик Российской академии наук, многолетний член редакционной коллегии и редакционного совета журнала «Квант», первый заместитель главного редактора журнала «Квант» (1990 – 2007).

Сергей Петрович родился в семье знаменитых математиков: его отец, академик Петр Сергеевич Новиков, был крупнейшим специалистом в области теории множеств, математической логики, теории алгоритмов и теории групп, его работа о единственности обратной задачи потенциала открыла важное направление прикладной математики, а мать, профессор Людмила Всеволодовна Келдыш, известна в математическом мире своими работами по геометрической топологии и теории множеств, в которых она дала решение ряда труднейших проблем в этих областях. Дед Сергея Петровича по матери, Всеволод Михайлович Келдыш, всеми отечественными энциклопедиями отмечен как создатель русского железобетона, а дядя, родной брат матери, Мстислав Всеволодович Келдыш, был крупным специалистом в области прикладной математики и долгие годы возглавлял Академию наук СССР. Старший брат С.П.Новикова, Леонид Вениаминович Келдыш, был выдающимся физиком-теоретиком, специалистом в области физики твердого тела, физики полупроводников, квантовой радиофизики.

Сергей Петрович Новиков – всемирно известный ученый, основоположник ряда современных областей геометрии, топологии, теории динамических систем, квантовой теории поля, физики твердого тела. Одним из высших достижений С.П.Новикова является доказательство топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина (1965) – фундаментальный результат, во многом определивший дальнейшее развитие топологии. Прорывные результаты, создавшие новые направления алгебраической и дифференциальной топологии, были получены Сергеем Петровичем в теории кобордизмов и теории гладких структур на многообразиях. Эти работы были удостоены Ленинской премии (1967) и медали Филдса – высшей награды Международного математического союза (1970).

Мировое признание получил вклад С.П.Новикова в математическую и теоретическую физику. Он основоположник метода конечнозонного интегрирования нелинейных уравнений математической физики, алгеброгеометрического подхода в теории солитонов, создатель теории многозначных функционалов действия (теории Морса–Новикова). Им открыты топологические явления в нормальных металлах в условиях сильного магнитного поля.

За вклад в науку С.П.Новиков удостоен Большой золотой медали имени М.В.Ломоносова – высшей награды РАН (2020), Золотой медали имени Леонарда Эйлера РАН (2012), Золотой медали имени Н.Н.Боголюбова РАН (2009), Премии имени Н.И.Лобачевского РАН (1980). Он был избран почетным членом многих иностранных академий и научных обществ.

С.П.Новиков был главным редактором журнала «Успехи математических наук» (1988–2023), президентом Московского математического общества (1985–1996).

С.П.Новиков – создатель выдающейся научной школы, автор фундаментальных монографий и учебников. Большое влияние на развитие науки продолжают оказывать поставленные С.П.Новиковым проблемы и выдвинутые им гипотезы. В течение более 40 лет педагогическая деятельность Сергея Петровича была неразрывно связана с кафедрой высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета, которой он заведовал с 1982 года до конца своей жизни. С.П.Новиков был одним из инициаторов создания Независимого московского университета, играющего важную роль в российском математическом образовании.

Большое внимание С.П.Новиков уделял и проблемам школьного образования. Сергей Петрович сделал многое для привлечения в журнал «Квант» в качестве авторов как молодых, так и уже хорошо известных активно работающих математиков.

Память о великом ученом, педагоге и замечательном человеке навсегда останется в наших сердцах.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

### Теоретическая физика и современная математика

**С.НОВИКОВ**

Теоретическая физика всегда рассматривалась в некотором смысле как математика реального мира, как основной источник математических идей начиная с XVII века, как основная движущая сила для

90% математиков и основная связующая нить между математикой и остальными естественными науками.

В XX веке теоретическая физика достигла своего наивысшего расцвета, она стала главной точной наукой. Великие лидеры теоретической физики были способны использовать, а иногда и создавать очень глубокие абстрактные математические теории, когда это было нужно для исследования реальности. Язык математики и техника теоретической физики были специально разработаны как наилучшие математические инструменты для исследования проблем реального мира. Были открыты новые законы природы, в наши дни на их основе разработаны новые технологии невероятной практической эффективности.

Из книги «Математическая составляющая» (2-е издание).

ти, и это навсегда изменило наш мир.

На протяжении нескольких столетий задача решения (интегрирования) дифференциальных уравнений, описывающих явления природы, была центральной во взаимодействии физики и математики.

Всем известно, какую роль сыграла решенная Ньютоном знаменитая проблема двух тел в развитии математических методов физики. В течение долгого времени после этого нахождение точного аналитического решения дифференциальных уравнений оставалось основным инструментом математической физики: если задача была или выглядела слишком трудной, то надо было ее упростить, а затем искать точное решение.

Много усилий было потрачено на поиск специальных «интегрируемых случаев» таких знаменитых задач, как, например, задача о движении волчка. Ради этого в XIX веке открывали и разрабатывали все математические методы, включая степенные и тригонометрические ряды, интегральное преобразование Фурье–Лапласа, комплексный анализ, соображения симметрии. Иногда эти методы приводили к замечательным отрицательным результатам – доказательствам того, что та или иная модель неразрешима в принципе.

В XIX веке были открыты некоторые странные интегрируемые случаи, в которых никакой очевидной симметрии не просматривалось: интегрируемость геодезического потока на двумерных эллипсоидах в трехмерном евклидовом пространстве (Якоби), движение волчка со специальными параметрами в постоянном поле сил тяжести (Ковалевская) и некоторые другие. Какая же скрытая симметрия стоит за всем этим? Ответ был неясен до появления теории солитонов.

Солитоны (или уединенные волны) на воде были известны еще в XIX веке, но с появлением первых компьютеров в 1960-х годах стали возможны численные эксперименты, показавшие новые замечательные свойства этих нелинейных волн. Их математическое объяснение привело к созданию теории интегрируемых солитонных моделей, связавшей различные разделы

математики и физики. В этом ряду: нелинейные волны в сплошной среде (включая теорию плазмы и нелинейную оптику); квантовая теория, теория рассеяния и периодические кристаллы; гамильтонова динамика; алгебраическая геометрия римановых поверхностей и абелевых многообразий (тета-функции).

Выдвину следующий тезис: значительная часть наиболее важных открытий в математике и математической физике была сделана в процессе развития теории интегрируемых моделей.

В 70-е годы XX века в сотрудничестве математиков и физиков произошли важные сдвиги. Например, с помощью результатов топологии были объяснены важные экспериментальные наблюдения, ждавшие этого в течение полувека. В начале 80-х физики были единодушны в том отношении, что главное, что физики взяли из математики за последние 10 лет, – это топология.

В то же время в топологии начали применять открытия, сделанные физиками. Напомним, что из теории автодуального уравнения Янга–Миллса выросла теория инстантонов с ее замечательными приложениями к четырехмерной топологии. Теория уравнения Янга–Бакстера привела к теории полиномов Джонса в теории узлов. Знаменитые двумерные конформные теории поля дали множество интегрируемых моделей, также представляющих собой новые алгебраические объекты, имеющие глубокие связи с теорией солитонов и квантовыми группами.

В последнее десятилетие, уже в XXI веке, математические идеи, пришедшие от теоретических физиков, оказали большое влияние на развитие алгебраической геометрии. Взаимодействие математики и теоретической физики не прекратилось, достижения каждой из этих наук обогащают и другую.

В заключение хочу обратиться с пожеланием к молодым математикам: расширяйте спектр посещаемых научных семинаров и по математике, и по физике. Набирайтесь понимания, которое проявится, пусть и со временем.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2802 – M2805 предлагались на IX Кавказской математической олимпиаде.

## Задачи M2802–M2805, Ф2809–Ф2812

**M2802.** По кругу расставлены положительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$  в указанном порядке по часовой стрелке. Пусть  $A_i$  – среднее арифметическое числа  $a_i$  и нескольких следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что наибольшее из чисел  $A_1, A_2, \dots, A_{2024}$  не меньше среднего арифметического всех чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ .  
*К.Сухов*

**M2803.** Кимия взяла натуральные числа  $a$  и  $b$ , а затем выписала в строку в некотором порядке натуральные числа  $1, 2, 3, \dots, 2024$  так, чтобы для любой пары соседних чисел оказалось выполнено хотя бы одно из двух условий:

- (1) их сумма равна  $a$ ;
- (2) их разность (при вычитании из большего числа меньшего) равна  $b$ .

Найдите все возможные значения  $b$ .

*М.Сагафян*

**M2804.** Внутри треугольника  $ABC$  со стороной  $BC = 6$  расположены две равные окружности радиуса 1, которые касаются друг друга, одна вписана в угол  $B$ , другая вписана в угол  $C$  (рис. 1).

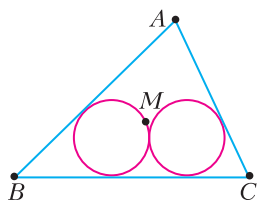


Рис. 1

на в угол  $C$  (рис. 1).

а) Докажите, что точка  $M$  пересечения медиан треугольника  $ABC$  не лежит внутри ни одной из данных окружностей.

б) Докажите, что если  $M$  лежит на одной из окружностей, то треугольник  $ABC$  равнобедренный.

*Е.Бакаев*

**M2805.** Конечное множество  $A$  вещественных чисел назовем *значимым*, если для любых двух различных чисел из  $A$  можно подобрать третье число из  $A$  так, чтобы одно из этих трех чисел было равно среднему арифметическому двух других. При каком наибольшем  $n$  существует значимое множество, состоящее из  $n$  чисел?

*М.Сагафян*

**Ф2809.** Длительность  $T$  суток, т.е. промежуток времени от одного восхода Солнца до следующего восхода, на экваторе очень мало зависит от того, в каком месяце этот промежуток измеряется. Однако известно, что расстояние от Земли до Солнца самое большое в июне, оно равно 152 млн км, а самое маленькое, равное 147 млн км, в январе. Оцените разницу длительностей суток на экваторе Земли в январе и в июне.

*Э.Суткин*

**Ф2810.** Маятник  $OP$  состоит из массивной точки-гаечки  $P$  массой  $m$  и невесомой нерастяжимой тонкой нити длиной  $l$  (рис. 2). Точка  $O$  прикреплена с помощью шарнира к шероховатой наклонной плоскости так, что гаечка  $P$  может скользить по плоскости, но не может по ней катиться. Угол наклона плоскости к горизонту равен  $\theta$ .



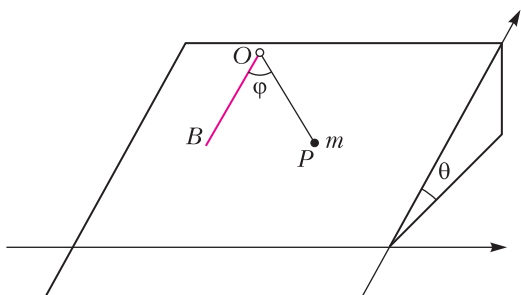


Рис. 2

Коэффициент трения гайчки о плоскость  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  – угол трения (т.е. угол наклона, при котором начинается скольжение). Находящуюся в плоскости гайчку  $P$  отклоняют от линии  $OB$ , называемой линией наибольшего ската или линией наибольшего уклона, и отпускают без начальной скорости. На какой максимальный угол  $\varphi_{\max}$  можно отклонить гайчку от линии наибольшего ската так, чтобы она не начала двигаться после того, как ее отпустят?

А. Буров

**Ф2811.** Если при комнатной температуре (+20 °С) накачать в бутылку с прозрачными мокрыми изнутри стенками наружный воздух до давления, например, 2,33 атм, подождать некоторое время, чтобы внутри установились температура и давление насыщенного пара воды (2,33 кПа при 20°С), а затем открыть бутылку, то в ней сразу после вылета пробки и части содержимого появляется туман. Какая в этот момент будет температура содержимого (в центре бутылки)? Необходимые данные о воде, в частности о зависимости давления насыщенного пара воды от температуры, можно найти в физических справочниках.

Б. Туманов

**Ф2812.** Трехфазный трансформатор имеет Ф-образный железный сердечник и три одинаковые обмотки с одинаковым количеством витков. Железо сердечника не насыщается и обладает очень большой и постоянной магнитной восприимчивостью. Если подать переменное напряжение с амплитудой  $U_0$  на ту обмотку, которая охватывает срединный магнитопровод, то с любой другой обмотки снимается напря-

жение половинной амплитуды. Если же подать такое же напряжение на одну из боковых обмоток, то на срединной обмотке напряжение будет равно  $0,55U_0$ .

1) На одну из обмоток подали напряжение  $U^* \sin \omega t$ , а на другую  $2U^* \cos \omega t$ . Какое напряжение снимается с третьей обмотки? (Вариантов несколько, укажите все возможные.)

2) Если с помощью этого трансформатора попытаться получить максимальное по амплитуде напряжение при наличии источника переменного напряжения с амплитудой  $U_0$ , то какой будет амплитуда этого напряжения? Нарисуйте схему подключения трансформатора к источнику и выводам напряжения.

3) С помощью этого же трансформатора и того же источника переменного напряжения нужно получить переменное напряжение с амплитудой, не равной нулю, но возможно меньшей в сравнении с  $U_0$ . Каково это минимальное по амплитуде напряжение?

С. Варламов

**Решения задач M2786–M2793, Ф2793–Ф2796**

**M2786.** По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной еще не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?

**Ответ:** 50.

Всего в круге имеется 100 пар соседних точек. Достаточно показать, что Аня всегда может добиться, чтобы среди этих 100 пар разноцветных пар было не меньше 50, а Боря сможет добиться, чтобы среди этих 100 пар одноцветных пар было не меньше 50. Есть несколько подходящих стратегий за Аню и Борю. Возможно, наиболее простыми являются следующие стратегии.

*Стратегия Бори.* Каждым ходом пусть Боря выберет пару соседних точек  $X, Y$  такую, что  $X$  еще белая, а  $Y$  к этому моменту уже покрашена красным или синим (очевидно, такая пара найдется), и покрасит белую точку  $X$  в цвет точки  $Y$ . Поймем, что такая стратегия Бори даст нужный результат. За каждый ход Бори образуется новая пара  $X, Y$  соседних одноцветных точек, поэтому в конце игры после 50 ходов Бори таких пар будет не менее 50.

*Стратегия Ани.* Первым ходом Аня красит в любой цвет любую точку, а далее пусть она на каждом ходе выберет пару соседних точек  $X, Y$  такую, что  $X$  еще белая, а  $Y$  к этому моменту уже покрашена, и покрасит белую точку  $X$  в цвет, противоположный точке  $Y$ .

Покажем, что такая стратегия Ани даст нужный результат. За каждый ход Ани, кроме первого хода, образуется новая пара  $X, Y$  соседних разноцветных точек, поэтому в конце игры таких пар будет не менее 49. Однако заметим, что если по окружности расставлено любое количество красных и синих точек, то количество пар разноцветных соседней всегда будет четным. Действительно, пройдем полный круг, начиная, скажем, с красной точки. Группы идущих подряд красных и синих точек при этом будут чередоваться: К–С–К–С–...–К. Значит, пройдя полный круг, мы встретим пар разноцветных соседей вида К–С столько же, сколько пар вида С–К, поэтому всего – четное число. Это означает, что, обеспечив себе не менее 49 пар разноцветных соседних точек, Аня на самом деле обеспечит не менее 50 таких пар.

П. Кожевников

**M2787.** На отрезке  $XY$  как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка  $Z$  на этом отрезке (рис. 1). Девять лучей из точки  $Z$  делят

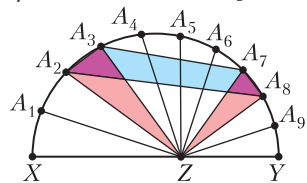


Рис. 1

развернутый угол  $XZY$  на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках  $A_1, A_2, \dots, A_9$  соответ-

ственно (в порядке обхода от  $X$  к  $Y$ ). Докажите, что сумма площадей треугольников  $A_2ZA_3$  и  $A_7ZA_8$  равна площади четырехугольника  $A_2A_3A_7A_8$ .

Достаточно понять, что  $S(A_2ZA_8) = S(A_3ZA_7)$ . Тогда требуемое в условии равенство получится вычитанием из обеих частей этого равенства площади серого треугольника с

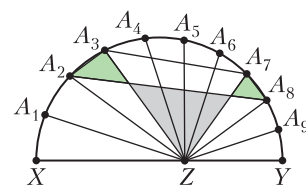


Рис. 2

вершиной в точке  $Z$  и добавлением площадей двух зеленых треугольников, примыкающих к хордам  $A_2A_3$  и  $A_7A_8$  (рис. 2).

Заметим, что  $\angle A_2ZA_8 + \angle A_3ZA_7 = \frac{6}{10} \cdot 180^\circ + \frac{4}{10} \cdot 180^\circ = 180^\circ$ , значит, синусы этих углов равны. Поэтому достаточно доказать, что  $ZA_2 \cdot ZA_8 = ZA_3 \cdot ZA_7$ . Покажем, что оба произведения равны  $XZ \cdot ZY$ . Для этого достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Пусть  $P$  и  $Q$  – две точки на полуокружности с диаметром  $XY$ , точка  $Z$  лежит на отрезке  $XY$  и  $\angle XZP = \angle YZQ$ . Тогда  $ZP \cdot ZQ = ZX \cdot ZY$ .

**Доказательство.** Отметим точку  $R$ , симметричную  $Q$  относительно  $XY$ . Тогда четырехугольник  $XPYR$  вписан в окружность с диаметром  $XY$ . Также в силу симметрии  $ZQ = ZR$  и  $\angle XZP = \angle QZY = \angle RZY$ , т.е. точки  $P, Z, R$  лежат на одной прямой. Значит,  $Z$  – точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника  $XPYR$ , поэтому  $XZ \cdot ZY = PZ \cdot ZR = PZ \cdot ZQ$ . Таким образом, лемма доказана, что завершает решение задачи.

М. Евдокимов

**M2788.** а) Правильный треугольник  $T$  со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника  $T$ , отмечены. Назовем множество из нескольких отмеченных точек линейным, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне  $T$ . Сколько существует способов разбить

все отмеченные точки на 111 линейных множеств?

б) Тот же вопрос, если дополнительно требуется, чтобы каждое линейное множество представляло из себя отрезок отмеченных точек (т.е. если две различные отмеченные точки входят в одно линейное множество, то и все отмеченные точки на отрезке между ними – тоже).

**Ответ:** а)  $2^{3n^2}$ ; б)  $(C_{2n}^n)^3$ , где  $n = 111/3 = 37$ . Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной  $k$ , разобьем его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовем  $k$ -треугольником. В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

а) **Лемма.** Пусть  $A$  – отмеченная точка в  $k$ -треугольнике. Тогда существует единственный способ провести  $k$  прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно,  $A$ , покрыты этими прямыми. А именно, для каждой стороны  $k$ -треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой  $A$  (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую  $A$  (рис. 1).

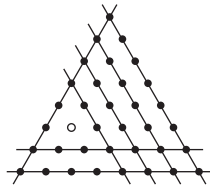


Рис. 1

**Доказательство.** Индукция по  $k$ . База при  $k = 1$  проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме  $A$ .

Для перехода рассмотрим сторону  $k$ -треугольника, на которой не лежит  $A$ . Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все  $k + 1$  отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых  $k$ . Значит, эта прямая проведена. Выкинув ее и точки  $k$ -треугольника, лежащие на ней, получаем  $(k - 1)$ -треугольник, в котором проведено  $k - 1$  прямых с теми же условиями. Осталось при-

менить предположение индукции. Лемма доказана.

Перейдем к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведем прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки нашего данного  $(3n)$ -треугольника, где  $n = 37$ , кроме, возможно, его центра  $A$ . Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.

Заметим, что наш  $(3n)$ -треугольник разбился на 6 областей: три «ромба» в углах, состоящие из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыта одной прямой (рис. 2). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через нее прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трех «ромбов» всего  $n^2$  точек, получаем, что требуемых разбиений ровно  $(2^{n^2})^3$ .

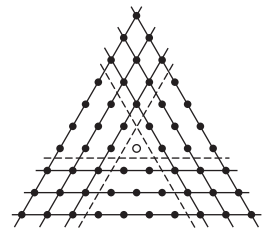


Рис. 2

б) Для решения задачи б) повторим все рассуждения выше вплоть до распределения точек по множествам в «ромбах». Рассмотрим, например, левый нижний «ромб», и пусть  $S$  – множество из  $n^2$  отмеченных точек в нем (рис. 3). Покрасим красным горизонтальные прямые, проходящие через точки множества  $S$ , и занумеруем их от 1 до  $n$  снизу вверх. Аналогично покрасим синим и занумеруем наклонные прямые, проходящие через точки множества  $S$ . В соответствии с покраской и нумерацией прямых покрасим и занумеруем лежа-

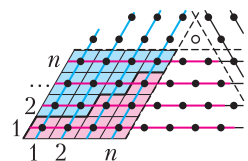


Рис. 3

щие на них линейные множества-отрезки, между которыми предстоит распределить точки множества  $S$ . Каждая точка из  $S$  получает «координаты»  $(i, j)$ , где  $i$  и  $j$  – соответственно номера синей и красной прямых, на которых лежит эта точка. Так, точка  $(i, j)$  должна принадлежать либо  $i$ -му синему отрезку, либо  $j$ -му красному отрезку. При этом если точка  $(i, j)$  принадлежит красному отрезку, то и все точки  $(i+1, j), \dots, (n, j)$  – тоже. Если же точка  $(i, j)$  принадлежит синему отрезку, то и все точки  $(i, j+1), \dots, (i, n)$  – тоже. Для наглядности окружим каждую точку множества  $S$  ромбиком так, чтобы все такие ромбики образовали сетку  $n \times n$  (примем сторону ромбика за 1). Если каждый ромбик покрасить красным или синим в зависимости от принадлежности красному или синему отрезку, то красные ромбики образуют так называемую *диаграмму Юнга* (и синие – тоже), а граница между красными и синими ромбиками – ломаная, состоящая из  $n$  горизонтальных и  $n$  наклонных единичных отрезков, идущая из левого нижнего угла сетки в правый верхний угол. Количество таких ломаных равно  $C_{2n}^n$  (каждую такую ломаную можно закодировать последовательностью из  $2n$  символов:  $n$  символов  $\rightarrow$  (идем вправо по горизонтали) и  $n$  символов  $\nearrow$  (идем вправо-вверх)). И наоборот, каждой такой ломаной соответствует распределение точек множества  $S$  между красными и синими отрезками.

Окончательно, выбирая один из  $C_{2n}^n$  вариантов в каждом из трех «ромбов», получаем ответ.

*И. Богданов*

**M2789\***. Дано натуральное число  $n > 100$ . Изначально на доске написано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через  $n$  минут не превышал  $2^n + 50$  вне зависимости от действий Васи.

Приведем стратегию для Пети. Для этого представим 1 в виде суммы  $2^n$  дробей с числителями 1, разобьем их на пары не равных, сложим числа в каждой паре. Затем  $2^{n-1}$  полученных результатов вновь разобьем на пары не равных и сложим числа в каждой паре. Будем продолжать так делать, пока не получится одно число. Поскольку сумма всех дробей равна 1, то после  $n$  шагов остается число 1.

Предположим, что описанный выше процесс возможен. В таком случае Петя разложит 1 в сумму двух чисел, которые складывались на  $n$ -м шаге. Вася выберет одно из слагаемых, сложением которых данное число было получено на  $(n-1)$ -м шаге, и т.д. В конечном итоге останется одна из исходных  $2^n$  дробей.

Для реализации указанного процесса нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Есть 2 четверки чисел  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$  и  $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$ . Тогда их можно сгруппировать по парам  $(a_i, b_j)$ , чтобы числа в каждой паре были различны и суммы чисел в каждой паре были различны.

**Доказательство.** Разберем несколько случаев:

1°. Пусть  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ . Если  $a_4 \neq b_4$ , не умаляя общности, считаем  $a_3 \geq b_3$  и можно сгруппировать  $a_1 + b_2 > b_1 + a_3 > a_2 + b_3 > a_4 + b_4$ . В случае  $a_4 = b_4$ , не умаляя общности, считаем  $a_3 \geq b_3$  и группируем  $a_1 + b_2 > b_1 + a_3 > a_2 + b_4 > b_3 + a_4$ .

2°. Пусть  $a_3 = b_3$ ,  $a_4 = b_4$ . Случай сводится к предыдущему, если мы перейдем к четверкам чисел  $-a_i, -b_i$ .

3°. Пары  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$  разные, а также пары  $(a_3, b_3)$  и  $(a_4, b_4)$  разные. В таком случае покажем, как сгруппировать числа первых двух пар между собой; с числами в третьей и четвертой парах поступим аналогично, явно получив две меньшие суммы, чем в первой паре. Если  $a_1 = b_1$  или  $a_2 = b_2$ , подходит  $a_1 + b_2$ ,  $a_2 + b_1$ , в противном случае можно сгруппировать  $a_1 + b_1$  и  $a_2 + b_2$ . Лемма доказана.

Покажем, что описанный в начале решения процесс возможен (получится на каж-



дом шаге складывать различные числа), если исходные  $2^n$  дробей удастся разбить на четверки так, чтобы в каждой четверке были попарно различные дроби. Действительно, в таком случае на очередном шаге мы разобьем четверки на пары и, согласно лемме, будем складывать числа из разных четверок. После каждого такого шага получившиеся суммы вновь будут разбиваться на четверки попарно различных чисел. Продолжая так первые  $n - 2$  шагов, мы в итоге получим четверку различных чисел  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , на  $(n - 1)$ -м шаге сложим  $x_1 + x_2$  и  $x_3 + x_4$  и на  $n$ -м шаге сложим уже эти два числа.

Таким образом, достаточно представить  $1/4$  в виде суммы  $2^{n-2}$  дробей вида  $1/m$  четырьмя разными способами, каждый раз используя разные знаменатели, не превосходящие  $2^n + 50$ .

Первый способ – сумма  $2^{n-2}$  одинаковых дробей  $\frac{1}{2^n}$ . Построим три других представления. Заметим, что среди чисел  $n, n - 1, n - 2, n - 3, n - 4, n - 5$  не более одной степени двойки и не более двух простых чисел (потому что простые числа, большие трех, могут давать только остатки 1 и 5 от деления на 6), уберем такие числа из рассмотрения. Любое оставшееся число можно представить в виде  $n - k = pt$ , где  $p, t > 1$  и  $t$  нечетно. Тогда  $2^{n-k} + 1$  кратно  $2^p + 1$ , обозначим частное от деления через  $q$ . Получаем, что  $2^n + 2^k = 2^k (2^p + 1)q$ .

Возьмем  $2^{n-2} - 2^{k+p-2}$  дроби вида  $\frac{1}{2^n + 2^k}$  и  $2^{k+p-2}$  дроби вида  $\frac{1}{2^{k+p} \cdot q}$ . Поскольку  $k \leq 5$ , то  $2^{k+p} \cdot q < 2^n + 2^k < 2^n + 50$ . Посчитаем сумму этих дробей:

$$\begin{aligned} \frac{2^{n-2} - 2^{k+p-2}}{2^n + 2^k} + \frac{2^{k+p-2}}{2^{k+p-2} \cdot q} &= \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{2^n - 2^{k+p}}{2^n + 2^k} + \frac{2^k (2^p + 1)}{2^n + 2^k} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Проделаем так для трех различных значений  $k$ . Остается убедиться, что полученные представления не содержат одинако-

вых дробей. Ясно, что с первым выбранным набором три новых не пересекаются, а также дроби вида  $\frac{1}{2^n + 2^k}$  могут быть лишь в одном наборе. Остается проверить, что дроби вида  $\frac{1}{2^{k+p} q}$  различны. Предположим противное:  $2^{k+p} q = 2^{k_1+p_1} q_1$ . Поскольку  $q$  и  $q_1$  нечетны, получаем, что  $q = q_1$ , и это число – общий делитель  $2^n + 2^k$  и  $2^n + 2^{k_1}$ . Тогда  $2^k - 2^{k_1}$  кратно  $q$ , поэтому  $q < 32$ . Однако  $p = \frac{n-k}{t} < \frac{n}{3}$ , откуда  $2^p + 1 < 2^{n/2}$  и  $q > 2^{n/2} > 32$ , противоречие. Задача решена.

Неформально говоря, в этой задаче Петя с самого начала анализирует все возможные способы течения игры и для каждого варианта заранее продумывает ответ. Этому можно сопоставить двоичное дерево ранга  $n$ , в  $2^n$  листьях которого содержатся все возможные исходные (дроби вида  $\frac{1}{m}$  с суммой 1 и знаменателями, не превосходящими  $2^n + 50$ ), а в каждой из остальных вершин записано число, равное сумме чисел в вершинах-потомках. Задача эквивалентна тому, что существует такое дерево, причем у каждой вершины (кроме листьев) в вершинах-потомках записаны разные числа.

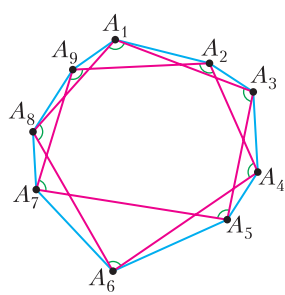
М. Дидин

**M2790.** Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

Пусть наш девятиугольник – это  $A_1 A_2 \dots A_9$ . Рассмотрим четырехугольник  $A_2 A_4 A_6 A_8$ . Сумма его углов равна  $360^\circ$ . Если один из его углов тупой, то мы нашли нужный треугольник (скажем, если  $\angle A_8 A_2 A_4 > 90^\circ$ , то треугольник  $A_8 A_2 A_4$  – искомый тупоугольный). Если нужный тупоугольный треугольник еще не найден, то в четырехугольнике  $A_2 A_4 A_6 A_8$  все углы по  $90^\circ$  (т.е.  $A_2 A_4 A_6 A_8$  – прямоугольник). Но тогда

$\angle A_6 A_8 A_1 > \angle A_6 A_8 A_2 = 90^\circ$ . Значит,  $A_6 A_8 A_1$  – нужный нам тупоугольный треугольник. Тем самым, задача решена.

Другое решение можно получить, рассматривая девятизвенную замкнутую ломаную  $A_1 A_3 A_5 A_7 A_9 A_2 A_4 A_6 A_8 A_1$ , соединяющую вершины де-



вятиугольника через одну (см. рисунок). Можно показать, что сумма углов такой ломаной равна  $5 \cdot 180^\circ$  (это известная задача). Но тогда

угол между какими-то двумя соседними звеньями этой ломаной не меньше  $5 \cdot 180^\circ / 9 = 100^\circ > 90^\circ$ , а следовательно, этот угол задает нужный нам тупоугольный треугольник.

А.Юран

**M2791.** В каждой клетке таблицы  $N \times N$  записано число. Назовем клетку  $C$  хорошей, если в какой-то из клеток, соседних с  $C$  по стороне, стоит число на 1 больше, чем в  $C$ , а в какой-то другой из клеток, соседних с  $C$  по стороне, стоит число на 3 больше, чем в  $C$ . Каково наибольшее возможное количество хороших клеток?

**Ответ:**  $N^2 - N$ .

Пример расстановки показан на рисунке для  $N = 8$ : в зеленой части таблицы числа в строках идут в порядке возрастания слева направо, а в столбцах с возрастанием на 3 снизу вверх. Желтая часть таблицы заполнена так, чтобы таблица оказалась симметричной относительно главной диагонали, идущей из левого верхнего угла. Видим, что в этом примере все клет-

21	18	15	12	9	6	3	0
18	19	16	13	10	7	4	1
15	16	17	14	11	8	5	2
12	13	14	15	12	9	6	3
9	10	11	12	13	10	7	4
6	7	8	9	10	11	8	5
3	4	5	6	7	8	9	6
0	1	2	3	4	5	6	7

ки, за исключением клеток этой главной диагонали, являются хорошими. Аналогично строится пример для любого  $N$ .

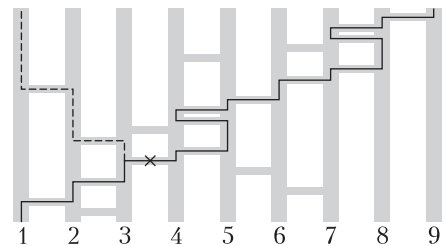
*Оценка.* Докажем, что  $X \leq N^2 - N$ , где  $X$  – количество хороших клеток. Проведем из каждой хорошей клетки две стрелки: синюю стрелку – в соседнюю клетку, в которой число на 1 больше, и красную стрелку – в соседнюю клетку, в которой число на 3 больше. Итого проведено  $2X$  стрелок. С другой стороны, стрелок не больше, чем пар соседних клеток в таблице, поскольку между клетками в одной паре может быть проведено не более одной стрелки. Но количество пар соседних клеток равно  $2N(N-1)$ . Отсюда  $2X \leq 2N(N-1)$  и  $X \leq N^2 - N$ , что и требовалось.

А.Чеботарев

**M2792.** В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две не находятся на одной высоте. Жук ползет снизу вверх; встречая палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого (самого левого) столбика, то он закончит свой путь на девятом (самом правом) столбике. Всегда ли можно убрать одну палочку так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика? (Например, если палочки расположены как на рисунке, жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, дальше он поползет по пунктирной линии.)

**Ответ:** да, всегда.

Заметим, что если мы посадим по жуку на основание каждого столбика и отправим



ползти наверх с одинаковой постоянной скоростью по нашим правилам (при этом по палочкам они будут переползать мгновенно), жуки на горизонтальных палочках будут меняться местами, и никакие два жука не окажутся на одном столбике в одно и то же время. Значит, на вершине каждого из столбиков в конце будет по жуку. Назовем жука, стартовавшего с первого столбика, красным, а того, кто финиширует на вершине центрального столбика, зеленым. Заметим, что красный жук стартует левее зеленого, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они меняются местами. Уберем эту палочку: тем самым мы перенаправим красного жука по маршруту зеленого, чем и добьемся желаемого.

Приведем схему несколько другого возможного решения. Изначально посадим синего жука на вершину пятого столбика, и пусть он ползет сверху вниз. Его траектория пересечется с траекторией красного жука на горизонтальной палочке. Эту палочку и уберем.

Г.Каравеев

**М2793\***. В остроугольном треугольнике  $ABC$  ( $AB < AC$ ) точка  $O$  – центр описанной окружности  $\Omega$  (рис. 1). Пусть касательная к  $\Omega$ , проведенная в точке  $A$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ . Пусть прямая  $DO$  пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Точка  $G$  построена так, что  $AEGF$  – параллелограмм. Пусть  $K$  и  $H$  – точки пересечения отрезка  $BC$  с отрезками  $EG$  и  $FG$  соответственно. Докажите, что окружность  $(GKH)$  касается окружности  $\Omega$ .

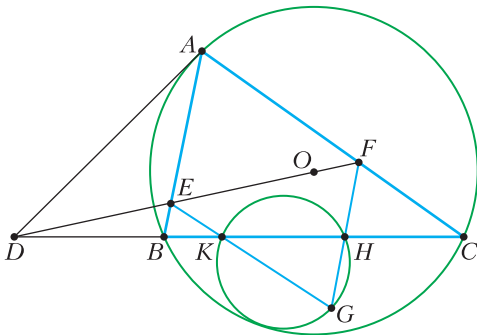


Рис. 1

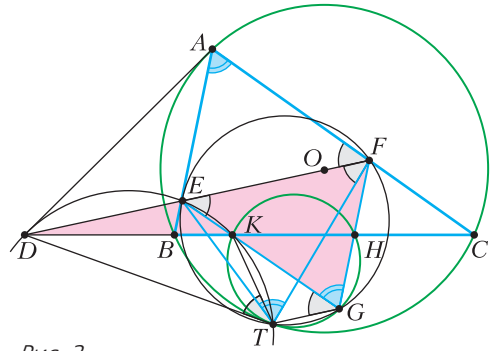


Рис. 2

Пусть точка  $T$  симметрична точке  $A$  относительно  $DO$  (рис.2). Тогда  $DT$  – касательная к окружности  $\Omega$ , симметричная касательной  $DA$  относительно  $DO$ . Имеем  $\angle ETF = \angle FAE = \angle EGF$ . Отсюда следует, что точки  $E, F, T$  и  $G$  лежат на одной окружности. Далее  $\angle ETD = \angle DAE = \angle ACB = \angle EKD$ . Отсюда вытекает, что точки  $D, E, K$  и  $T$  лежат на одной окружности. Получается, что  $T$  – это точка Микеля для четверки прямых  $DBC, DEF, EKG, FHG$ . Значит, точки  $T, K, H$  и  $G$  также лежат на одной окружности. Для завершения решения остается доказать, что  $DT$  – касательная к окружности  $(TKHG)$ .

Пользуясь равенством вписанных углов, параллельностью и симметрией относительно  $DO$ , имеем  $\angle DTK = \angle FEK = \angle EFA = \angle TFE = \angle TGK$ . Полученное равенство  $\angle DTK = \angle TGK$  означает, что  $DT$  касается окружности  $(TKHG)$ .

Донг Луу

От редакции. В геометрической конструкции из задачи М2793 можно обнаружить также следующие интересные свойства.

(1) Если окружность  $(EFG)$  вторично пересекает  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$ , то  $PQ$  пройдет через ортоцентр треугольника  $ABC$ ;

(2)  $AG$  пересекает окружность  $(TKHG)$  вторично в точке  $X$  такой, что касательная к  $(TKHG)$ , проведенная через  $X$ , проходит через  $D$ .

При этом (1) справедливо для любой пары точек  $E$  и  $F$ , лежащих на  $AB$  и  $AC$  и таких, что  $EF$  проходит через  $O$ , а (2) справедли-

во для любой пары точек  $E$  и  $F$ , лежащих на  $AB$  и  $AC$  и таких, что  $EF$  проходит через  $D$  (этот факт предлагался на XIX Жаутыковской олимпиаде; авторы – М.Кунгожин, И.Богданов).

В завершение скажем, что наш читатель и автор красивых задач по геометрии Чан Куанг Хунг нашел следующее обобщение данной задачи.

**Задача'.** В треугольнике  $ABC$  точка  $O$  – центр описанной окружности  $\Omega$  (рис. 3).

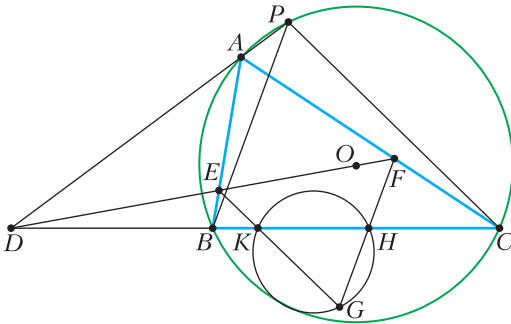


Рис. 3

Пусть  $P$  – произвольная точка на  $\Omega$ , а прямая  $PA$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ . Пусть прямая  $DO$  пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Точка  $G$  построена так, что  $EG \parallel PC$  и  $FG \parallel PB$ . Пусть  $K$  и  $H$  – точки пересечения отрезка  $BC$  с отрезками  $EG$  и  $FG$  соответственно. Докажите, что окружность  $(GKH)$  касается окружности  $\Omega$ .

Задача M2793 является частным (предельным) случаем задачи', в котором  $P = A$ . Задачу' можно решить, во многом повторив шаги из приведенного решения задачи M2793. Точкой касания окружностей  $(GKH)$  и  $\Omega$  будет являться точка, симметричная точке  $A$  относительно  $DO$ .

**Ф2793.<sup>1</sup>** В игрушечном луке (см. рисунок) энергия накапливается не в изогнутых плечах лука, а в растягивающейся тетиве. Расстояние между концами легкой тетивы, закрепленными на луке, равно  $L$ . Жесткость тетивы  $k$ . Юный Робин Гуд при стрельбе так натягивает тетиву,



во, что сила натяжения тетивы увеличивается в два раза, а ее концы и место посередине тетивы, которого касается конец стрелы с оперением, находятся в углах равностороннего треугольника со сторонами  $L$ . При запуске стрелы вертикально вверх

она взлетает на высоту  $h = 20L$ . Какова масса стрелы  $m$ ? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Тетива при растяжении увеличилась в длине на величину  $L$ . Сила натяжения при этом увеличилась в два раза, т.е. вместо силы  $F$  стало  $2F$ . Увеличение силы на  $F$  связано с увеличением длины на  $L$  соотношением  $F = kL$ . Дополнительная энергия, запасенная в растянутой тетиве такого лука, равна

$$E = \frac{F + 2F}{2} L = \frac{3}{2} kL^2.$$

Эта энергия превращается в кинетическую энергию стрелы  $mv^2/2$ , а затем – в изменение потенциальной энергии стрелы в поле тяжести Земли

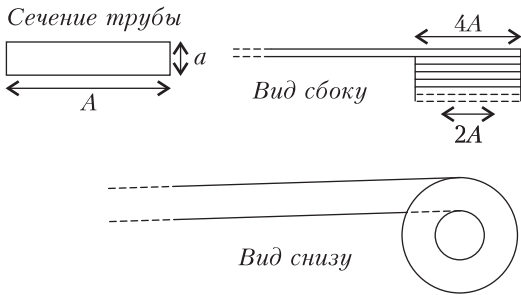
$$mgh = 20mgL.$$

Из этих соотношений получаем

$$m = \frac{3}{40} \frac{kL}{g}.$$

**Ф2794.** Тонкостенная труба заполнена однородной невязкой и несжимаемой жидкостью, которая в прямом участке трубы далеко от изогнутого участка течет с одинаковой в любом месте поперечного сечения трубы скоростью  $v$ . Поперечное сечение трубы в любом месте представляет собой прямоугольник со сторонами  $A$  и  $a$ , причем  $A \gg a$ . Прямой участок трубы переходит в изогнутый участок, и на нем труба имеет вид спирали с

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2793–Ф2796 – С.Варламов.



шагом  $a$ . Внутренний радиус спиральной трубы равен  $A$ , а ее внешний радиус равен  $2A$ . Все стенки трубы, имеющие размер  $a$ , вертикальны, а на прямом участке трубы широкие стенки трубы горизонтальны. На спиральном участке трубы широкие стенки трубы составляют с горизонтом малый угол  $\varphi$  величиной порядка  $a/(2\pi A) \ll 1$ . Течение жидкости установившееся во времени и ламинарное. На рисунке показано, как выглядят сечение трубы, прямой и спиральный участки трубы сбоку, а также вид снизу. Как зависит скорость течения жидкости в изогнутом участке трубы (вдали от прямого участка) от расстояния  $x$  между точкой, в которой измеряется скорость, и осью спирали? Силой тяжести можно пренебречь.

Согласно условию, движение жидкости в трубе ламинарное, т.е. никаких турбулентностей в потоке жидкости нет. Вязкость жидкости отсутствует, поэтому стенки трубы в любом малом по площади месте действуют на жидкость с силой, перпендикулярной плоскости касательной к стенке в соответствующем месте.

Рассмотрим участок жидкости с малой длиной  $L$  (вдоль вектора скорости), с шириной  $a$  во всю толщину от одной широкой стенки до другой и с размером  $\Delta x$  в направлении, перпендикулярном оси спирали. Обозначим скорость участка жидкости через  $v(x)$ . Масса этого участка  $m = \rho La \Delta x$ , где  $\rho$  — плотность жидкости. Ускоренное движение этого участка связано с тем, что на его «стенках», расположенных на разных расстояниях от оси

спирали, разные по величине давления. Справедливо равенство

$$\frac{mv^2(x)}{x} = La \Delta p.$$

Отсюда для разности давлений  $\Delta p$  имеем

$$\Delta p = \frac{\rho v^2(x) \Delta x}{x}.$$

В соответствии с законом Бернулли, для любой трубки тока выполняется соотношение

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}, \text{ или } \Delta p = -\rho v \Delta v.$$

Подставив выражение для  $\Delta p$  из предыдущего равенства, получим

$$-\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta x}{x}.$$

Отсюда следует связь между координатой  $x$  и скоростью  $v$ :

$$\ln \frac{v(x)}{v(A)} = -\ln \frac{x}{A} + \text{const}.$$

Величина константы определяется из условия, что поток жидкости через любое поперечное сечение трубы равен такому потоку в прямом участке трубы, т.е.  $aAv$ . Тогда

$$v(x) = \frac{A}{x} \cdot C.$$

Величину константы  $C$  находим из условия

$$C \int_A^{2A} \frac{A}{x} dx = vA, C = \frac{v}{\ln 2}$$

и получим

$$v(A) \approx 1,4427 v,$$

$$v(2A) \approx 0,7213 v.$$

Величина  $x$  изменяется от  $A$  до  $2A$ , т.е. в криволинейном участке трубы ближе к оси спирали скорость жидкости больше соответствующей скорости вблизи дальней от оси стенки трубы.

*Комментарии к решению.* Поскольку рассматривается движение жидкости в криволинейном участке трубы, а есть участок перехода от прямолинейного движения к



криволинейному, то следует отметить, что в прямолинейном участке давления во всех точках одинаковые, а в криволинейном они разные. Но скачком давление измениться не может; таким образом, в решении должна присутствовать зависимость от расстояния, которое прошла порция жидкости в криволинейном участке, а эта зависимость в решении отсутствует. Правда, в условии сказано, что место, где нужно найти скорость, находится далеко от прямого участка. Значит, полученное решение качественно верное, но не точное.

**Ф2795.** *Кольцо имеет радиус  $R$ , толщина кольца мала в сравнении с его радиусом, масса кольца  $m$  равномерно распределена по его периметру. Кольцо раскрутили вокруг его оси симметрии, положили на шероховатую, коэффициент трения равен  $\mu$ , наклонную поверхность с углом наклона  $\alpha$  к горизонту и толкнули его вверх. Ось симметрии кольца перпендикулярна наклонной поверхности. Кольцо всеми точками его периметра прижимается к поверхности. В какой-то момент центр кольца имел нулевую (по отношению к поверхности) скорость и кольцо вращалось с угловой скоростью  $\omega$ . С каким ускорением движется центр кольца в указанный момент времени? С какой скоростью в этот момент уменьшается угловая скорость вращения кольца?*

В указанный момент все точки кольца, контактирующие с поверхностью, движутся и скорости их движения направлены по касательной к кольцу. Это означает, что суммарная сила трения, действующая на кольцо, равна в этот момент нулю. Следовательно, ускорение центра кольца равно

$$a_{\text{ц}} = g \sin \alpha.$$

Угловая скорость вращения кольца уменьшается и в указанный момент соответствующее угловое ускорение (на самом деле – замедление) равно

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g\mu}{R} \cos \alpha.$$

В дополнение к этому простому решению можно предложить читателям более сложные вопросы, чем заданные в условии зада-

чи: какой путь пройдет центр кольца от указанного момента времени до момента, когда вращение кольца прекратится; на какой угол за этот промежуток времени успеет повернуться кольцо? Для ответа на эти вопросы, по-видимому, придется использовать компьютер, поскольку для нахождения зависимости ускорения и скорости движения центра кольца от времени, а также для установления зависимости от времени угловой скорости вращения кольца нужно решать дифференциальные уравнения, в которых требуется вычислять непростые интегралы, а подынтегральные выражения содержат и скорость движения центра кольца, и угловую скорость его вращения.

**Ф2796.** *Очень длинный тонкостенный закрепленный короб сделан из непроводящего его ток материала. Поперечное сечение короба – это квадрат со стороной  $a$ . На оси симметрии короба находится очень длинный тонкий стержень с равномерно распределенным по его длине электрическим зарядом. Линейная плотность заряда  $+\sigma$ . К ребру короба прикреплен один конец тонкой непроводящей невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на короб, образуя  $N$  одинаковых витков. Плоскости витков перпендикулярны оси симметрии короба. На другом конце нити прикреплен точечный предмет (шарик) с массой  $m$  и электрическим зарядом  $+q$ . В начальный момент этот предмет находится рядом с местом закрепления конца нити на коробе и его скорость в этот момент равна нулю. Эта конструкция находится в вакууме и гравитацией можно пренебречь. В процессе движения предмета он в какой-то момент приобретает максимальную скорость. Какова величина этой скорости и какова в этот момент сила натяжения нити?*

Стержень создает в окружающем пространстве электрическое поле, вектор напряженности которого в любой точке пространства перпендикулярен стержню, а величина этого вектора определяется расстоянием от стержня до соответствующей точки. Найти эту величину можно с помощью теоремы Гаусса:

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

$$L \cdot 2\pi x E_{(x)} = \frac{L\sigma}{\epsilon_0}, \text{ откуда } E_{(x)} = \frac{\sigma}{2\pi x \epsilon_0}.$$

Начальное расстояние от шарика с зарядом до электрически заряженного стержня равно  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ , а в тот момент, когда скорость шарика будет максимальной, расстояние между ним и стержнем будет  $4aN + \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Этим двум расстояниям соответствует разность потенциалов  $U$  электрического поля, созданного стержнем. Эта разность равна

$$U = \frac{\sigma \ln(2^{5/2}N + 1)}{2\pi\epsilon_0}.$$

Скорость шарика находится из уравнения  $\frac{mv^2}{2} = qU$ :

$$v = \sqrt{\frac{q\sigma \ln(2^{5/2}N + 1)}{\pi\epsilon_0 m}}.$$

В момент достижения максимальной скорости шарик движется по окружности с радиусом  $R = 4Na$ . Его ускорение в этот момент равно  $v^2/R$ . На шарик действует электрическое поле (в направлении от заряженного стержня) и его тянет нить (в противоположном направлении). Сумма этих сил обеспечивает шарiku движение с ускорением. Отсюда находится сила  $F$  натяжения нити в этот момент:

$$F = qE + \frac{mv^2}{R} = qE + \frac{2qU}{R} = \frac{q\sigma}{2\pi a \epsilon_0} \frac{1}{4 + 1/\sqrt{2}} + \frac{q\sigma}{4\pi Na \epsilon_0} \ln(2^{5/2}N + 1).$$

### ИТОГИ КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА 2023/24 УЧЕБНОГО ГОДА

#### Победители

Лучшие результаты показали

*Воронцов Валерий* – Саранск, Республиканский лицей, 9 кл.;

*Чикилев Степан* – Екатеринбург, гимназия 9, 6 кл.;

команда филиала Нахимовского военно-морского училища (Мурманск), 9 кл.:

*Авдонин Максим, Махмудов Шероз, Бирюков Иван*;

команда Академического лицея (Магнитогорск):

*Новиков Александр* (10 кл.), *Полужтков Дмитрий* (10 кл.), *Леонов Кирилл* (10 кл.),

*Викторов Михаил* (10 кл.), *Борисова Ангелина* (8 кл.).

#### Призеры

Также высоких результатов достигли

*Бойченко Павел* – Балаково Саратовской области, гимназия 2, 8 кл.;

*Приходько Тамара* – Красноярск, школа 3, 11 кл.;

*Савин Михаил* – Протвино Московской области, Лицей, 10 кл.;

*Скирко Тимур* – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики, 7 кл.;

команда в составе:

*Мельник Егор* – школа «Синергия», 10 кл., *Мельник Евгений* – Опалиховская гимназия, 9 кл. (Красногорск Московской области);

команда кружка «По стопам Лобачевского», Тула, школа 4, 10 кл.:

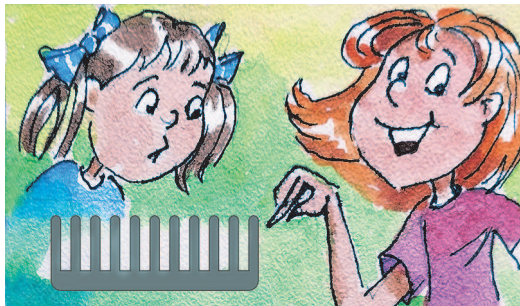
*Воропаев Артем, Давыдов Алексей, Канунов Виктор, Makeев Антон*.

#### Поздравляем!

Победителям и призерам будут высланы дипломы журнала «Квант» и призы от издательства МЦНМО. Помимо этого призы получат также наиболее активные участники конкурса.

## Задачи

1. У Кати и Маши расчески одинаковой длины. У каждой расчески все зубчики одинаковые, а расстояния между зубчиками равны ширине зубчика. В Катиной расческе 11 зубчиков.

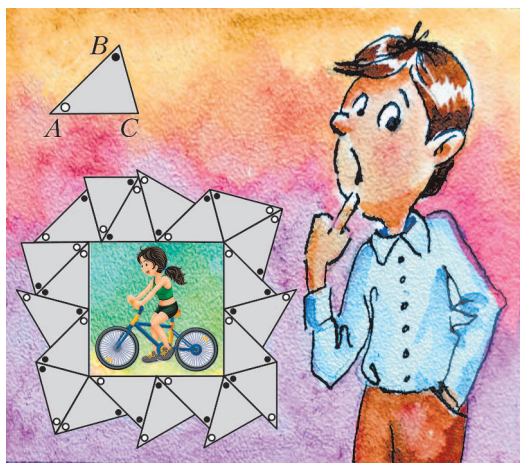


Сколько зубчиков в Машиней расческе, если они в пять раз уже зубчиков Катиной расчески?

*Т. Казицына*

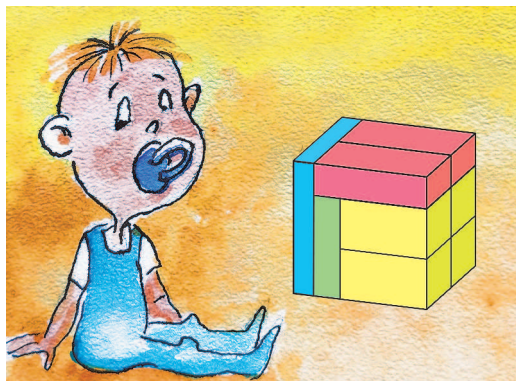
2. Коля пришел в музей современного искусства и увидел квадратную картину в раме необычной формы, состоящей из 21 равных треугольников. Коля заинтересовался, чему равны углы этих треугольников. Помогите ему их найти.

*И. Русских*



Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

3. Миша сложил из восьми брусков куб. Все бруски имеют один и тот же объем, красные бруски одинаковые и



желтые бруски тоже одинаковые. Какую часть ребра куба составляют длина, ширина и высота желтого бруска?

*М. Евдокимов*

4. На острове живут красные, синие и зеленые хамелеоны. Однажды 35 хамелеонов встали в круг. Через минуту все они одновременно поменяли цвет, каждый — на цвет одного из своих соседей. Еще через минуту снова все одновременно поменяли цвета на цвет одного из своих соседей. Могло ли оказаться, что каждый хамелеон побывал и красным, и синим, и зеленым?



*И. Русских*

# «Легкое решение одной трудной геометрической задачи»

К. КОЗЕРЕНКО, А. ГЕРАСИМОВА,  
А. ЛУЗГИНА

**КАВЫЧКИ В ЗАГЛАВИИ СТАТЬИ** мы поставили потому, что это цитата. Так называлась статья Л. Эйлера [1], которую он опубликовал в 1767 году. В ней Эйлер поставил вопрос о восстановлении треугольника по точке пересечения высот  $H$ , точке пересечения медиан  $M$ , точке пересечения биссектрис  $I$  и центру описанной окружности  $O$  (рис. 1). Тот факт, что точка  $M$  лежит на отрезке  $HO$ , как раз появился в этой статье (см. [2]).

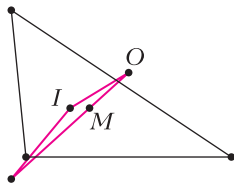


Рис. 1

Прошло 215 лет, и в 1982 году американский математик Вильям Верник опубликовал список из 139 задач [3], в котором попытался систематизировать задачи восстановления треугольника по некоторым трем его точкам с помощью циркуля и линейки. Среди этих задач под номером 80 упоминалась, как до тех пор нерешенная, и задача Эйлера. В 1996 году Майерс объявил о решении еще 29 задач из списка Верника [4], среди которых была и задача №80.<sup>1</sup> В качестве примера Майерс привел решение

<sup>1</sup> Отметим статью [5], в которой речь шла про неразрешимость других задач списка Верника, но та же конструкция работает и для задачи 80. Что касается текущей ситуации со списком Верника, сейчас он до конца закрыт (см. [6]), причем авторы этой работы научились быстро решать такие задачи на компьютере.

одной из 29 задач. Это решение использовало следующую теорему (см. [7], глава 5).

**Теорема.** Пусть дан отрезок длины 1. Тогда, если кубическое уравнение с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней и имеет положительный (вещественный) корень  $a$ , то отрезок длины  $a$  не может быть построен с помощью циркуля и линейки.

Доказательство этой теоремы непросто и использует алгебраический аппарат, который выходит далеко за пределы школьной программы, поэтому мы его не приводим (однако советуем читателю в нем разобраться).

В этой статье мы, опираясь на ту же теорему, приведем доказательство того, что ответ в задаче 80 из списка Верника – отрицательный, т.е. что не существует алгоритма восстановить треугольник циркулем и линейкой по точкам  $H$ ,  $I$  и  $O$ . Но, если не хватает циркуля и линейки, то возникает естественный вопрос: существует ли инструмент, добавив который к циркулю и линейке, можно решить задачу? Мы дадим ответ и на этот вопрос.

Для начала заметим (и это просто поразительно!), что циркулем и линейкой, исходя из треугольника  $HIO$ , можно восстановить много элементов треугольника: построить описанную окружность  $\Omega$ , вписанную окружность  $\omega$ , окружность девяти точек  $\varepsilon$  (окружность Эйлера) и даже найти периметр  $p$  искомого треугольника (рис. 2). Когда мы это обнаружили, нам показалось, что это почти все! На этом этапе работы мы еще не знали ответа и никак не могли понять, почему, продвинувшись так далеко, мы не можем завершить алгоритм восстановления треугольника по точкам  $H$ ,  $I$  и  $O$ . Масла в

(Продолжение см. на с. 34)

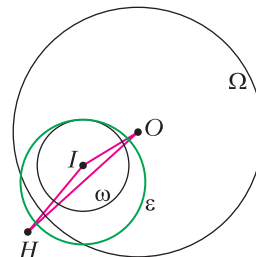


Рис. 2



*Поскольку движение небесных тел...происходит легче всех других движений, ему должна быть свойственна и наиболее удобоподвижная форма; для плоских фигур это круговое движение...*

Клавдий Птолемей

*...движение, в обычном понимании этого слова, есть не что иное, как действие, посредством которого данное тело переходит с одного места на другое.*

Рене Декарт

*...при сложном движении, слагающемся из равномерного горизонтального и естественно-ускоренного движений, бросаемое тело описывает полупараболу.*

Галилео Галилей

*...циклоида исследована точнее и основательнее всех других кривых.*

Христиан Гюйгенс

*...криволинейные движения тел возникают, когда направление движущихся сил не совпадает с направлением брошенного тела. В этом случае тело постоянно отвлекается от прямого пути и принуждено двигаться по кривой.*

Леонард Эйлер

*...правильно ли думать, что наблюдаемая нами движущаяся точка всегда находится в каком-то определенном месте?...*

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакомы вам ТРАЕКТОРИИ?

Казалось бы, что может быть проще понятия траектории, вводимого при первых же шагах в освоении курса физики? Однако, уже при описании различных механических движений оно «размножается», ломая рамки нехитрого первоначального набора прямых линий и окружностей. Неминуемо приходится обращаться к параболам, спиральям, циклоидам, когда необходимо отобразить форму орбит естественных и искусственных спутников, планет, комет и астероидов. А каковы траектории молекул в жидкостях и газах, заряженных частиц в электрическом и магнитном полях?..

Да, это, на первый взгляд, немудреное понятие будет долго сопровождать нас при изучении физики.

### Вопросы и задачи

**1.** По гладкому горизонтальному столу со скоростью  $v$  движется черная доска. Какой формы след оставит на этой доске мел, брошенный горизонтально со скоростью  $u$  перпендикулярно направлению движения доски, если: а) трение между мелом и доской пренебрежимо мало; б) трение велико?

**2.** Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по параллельным дорогам?

**3.** Два автомобиля одновременно начали двигаться с одинаковыми скоростями от перекрестка двух взаимно перпендикулярных дорог. По какой траектории будет двигаться второй автомобиль относительно первого? А первый относительно второго?

**4.** Могут ли совпадать направления мгновенной скорости и ускорения материальной точки при ее движении по криволинейной траектории?

**5.** Колесо радиусом  $R$  катится без проскальзывания по горизонтальной дороге со скоростью  $v_0$ . По какой траектории движутся точки на ободе колеса? Чему равен радиус кривизны в ее вершине?

**6.** Две взаимодействующие между собой частицы образуют замкнутую систему, центр масс которой покоится. В некоторый момент времени известны положения обеих частиц и траектория той, масса которой  $m_1$ . Как построить траекторию второй частицы, если ее масса  $m_2 = \frac{1}{2} m_1$ ?



7. Выстрел из орудия произведен под некоторым углом к горизонту, а начальная скорость снаряда меньше первой космической. По какой траектории будет двигаться снаряд?

8. Какой спутник притягивается Солнцем сильнее, чем своей планетой? Как влияет этот факт на форму движения спутника в гелиоцентрической системе координат?

9. Могут ли космические аппараты двигаться по прямолинейным траекториям?

10. Верно ли утверждение, что силовые линии электростатического поля – это траектории, по которым двигалась бы положительно заряженная частица, если ее, внося в поле, предоставить самой себе?

11. Электроны с кинетической энергией  $K_e$  движутся по прямой линии в скрещенных электрическом и магнитном полях. Протоны какой энергии  $K_p$  пройдут по такой же траектории?

### Микроопыт

Обратите внимание на следы колес поворачивающего автомобиля. Очевидно, что внешние и внутренние колеса описывают дуги разных окружностей, т.е. они проходят разные пути с различной угловой скоростью. Как такое может быть?

### Любопытно, что...

... определяя траекторию горизонтально брошенного тела, Галилей поначалу ошибочно считал ее дугой окружности. Однако позже он исправил свой просчет и нашел, что эта траектория – параболическая.

... Галилей и Кеплер первыми показали, что свободное от влияния сил движение происходит прямолинейно. А к выводу о том, что движение планет по эллиптическим орбитам однозначно свидетельствует о действии на них силы со стороны Солнца, пришел Кеплер.

... циклоиду открыл, назвал и начал изучать опять же Галилей, размышляя над идеей использовать маятник для регулировки хода часов. Гюйгенсу же удалось доказать, что период колебаний маятника не будет зависеть от амплитуды, когда он

описывает циклоиду, и применить это открытие в часах.

... чтобы не испытывать боковых толчков при переходе поезда с прямолинейного участка дороги на дугообразный, необходимо соединить их рельсами, проложенными по кривой переменной кривизны; такие кривые называются клотоидами.

... задача определения линии наименьшей длины, соединяющей две заданные точки какой-либо поверхности (так называемой геодезической линии), нашла применение в исследовании движения тел и частиц в гравитационных и электромагнитных полях, в сплошной среде. Более всего она известна как задача для нахождения кратчайшей траектории полета самолета между двумя аэропортами.

... управление траекториями заряженных частиц с помощью электрического и магнитного полей легло в основу создания электронно-лучевых трубок, используемых как в быту, так и в медицине и научном приборостроении.

... космические лучи, идущие от Солнца, так называемый солнечный ветер, большей частью представляют собой потоки электронов и протонов. На высотах в десятки тысяч километров магнитное поле Земли преграждает им путь, навивая траектории частиц на свои магнитные линии. Воздействие «ветра» на разреженные слои воздуха приводит к их высвечиванию – полярным сияниям.

### Что читать в «Кванте» о траекториях

(публикации последних лет)

1. «Что такое фазовый портрет» – 2019, №11, с.29;
2. «Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре» – 2020, №11-12, с.8;
3. «Можно ли отклонить астероид?» – 2022, №9, с.28;
4. «Геометрия фейерверка» – 2023, №1, с.39;
5. «Кинематика случайного блуждания...» – 2024, №1, с. 2;
6. «Из Антарктики в Арктику – самолетом» – 2024, №2, с. 30.

Материал подготовил А. Леонович

(Начало см. на с. 31)

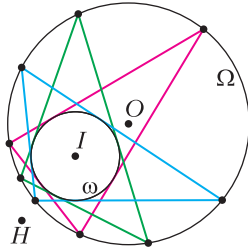


Рис. 3

огонь подливала еще теорема Понселе, из которой следует, что если от некоторого треугольника сохранились описанная окружность  $\Omega$  и вписанная окружность  $\omega$ , то существует целое семейство треугольников с вершинами на  $\Omega$ , для которого вписанная окружность совпадает с  $\omega$  (рис. 3). Да, такая задача имеет бесконечно много решений, однако у всех этих треугольников совпадают только точки  $O$  и  $I$ . А у нас есть еще точка  $H$  или, скажем, полупериметр (причем можно доказать, что среди множества треугольников Понселе только один имеет данную точку  $H$  и данный полупериметр, если только  $O$  и  $I$  не совпадают). Кажется, что осталось построить одну из вершин исходного треугольника на  $\Omega$  и дело сделано. А построение не получалось. И не могло, как мы теперь знаем, получиться!

Итак, покажем, как, исходя из треугольника  $HIO$ , можно циркулем и линейкой построить окружности  $\Omega$  и  $\omega$ . Центры этих окружностей у нас есть. Осталось построить их радиусы. Для этого воспользуемся формулами, которые выражают длины сторон треугольника  $HIO$  через  $R$ ,  $r$  и  $p$  (см. [8]). Получим систему

$$\begin{cases} OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2, \\ IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2, \\ OI^2 = R^2 - 2Rr, \end{cases}$$

откуда

$$R^2 = \frac{OI^4}{2(OI^2 + IH^2) - OH^2},$$

$$r = \frac{R^2 - OI^2}{2R}, \quad p^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - IH^2.$$

Исходя из приведенных формул, имея треугольник  $HIO$ , можно построить отрезки  $R$ ,  $r$  и  $p$ .

**Упражнение 1.** Убедитесь в этом.

Формулы для  $OH$ ,  $IH$ ,  $OI$  из системы показывают, что и наоборот, по заданным  $R$ ,  $r$  и  $p$ , можно восстановить стороны треугольника  $HIO$ .

Получается, что задачи восстановления треугольника по точкам  $H$ ,  $I$ ,  $O$  и по заданным  $R$ ,  $r$  и  $p$ , по сути эквивалентны. Если бы существовал алгоритм восстановления треугольника по точкам  $H$ ,  $I$ ,  $O$ , то мы бы легко получили и алгоритм построения треугольника по заданным  $R$ ,  $r$  и  $p$ : сначала по  $R$ ,  $r$  и  $p$  построили бы треугольник  $HIO$ , а затем воспользовались бы имеющимся алгоритмом восстановления.

Далее мы приведем конкретный пример треугольника, который нельзя восстановить циркулем и линейкой, исходя из заданных  $R$ ,  $r$  и  $p$ . Это и завершит наше доказательство. Положим  $R = 18$ ,  $r = 8$ ,  $p = 45$ .

**Упражнение 2.** а) Покажите, что треугольник с данными  $R$  и  $r$  существует при  $R > 2r$ .

б) Покажите, что треугольник с  $R = 18$ ,  $r = 8$ ,  $p = 45$  существует.

Используем «уравнение треугольника» (см. [8])

$$F(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = 0,$$

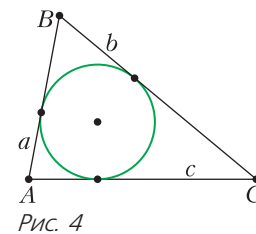


Рис. 4

где  $a$  — длина отрезка касательной, проведенной из вершины  $A$  треугольника до точки касания,  $b$  и  $c$  определяются аналогично (рис. 4). В [8] показано, что уравнение треуголь-

ника принимает вид

$$F(x) = x^3 - px^2 + (r^2 + 4Rr)x - r^2p = 0.$$

**Упражнение 3.** Докажите, что при  $R = 18$ ,  $r = 8$ ,  $p = 45$  уравнение треугольника не имеет рациональных корней.

Теперь мы готовы завершить доказательство. Допустим, что все-таки существует алгоритм построения треугольника, исходя

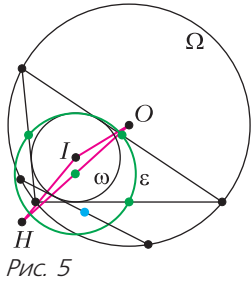
из отрезков  $R = 18, r = 8, p = 45$ . Но тогда, стартуя с единичного отрезка, мы построим (целые) отрезки  $R, r, p$ , а далее, по алгоритму, строим треугольник  $ABC$ . После этого в треугольнике  $ABC$  без труда строим отрезок от вершины до точки касания со вписанной окружностью. Получается, нам удалось, стартуя с единичного отрезка, построить отрезок, равный по длине корню уравнения  $F(x) = 0$ , что противоречит теореме 1.<sup>2</sup>

**Упражнение 4.** а) В треугольнике отметили точки  $O, I$  (центры описанной и вписанной окружностей) и центр масс вершин (т.е. точку пересечения медиан). Затем треугольник стерли. Всегда ли можно восстановить циркулем и линейкой треугольник?

б\*) Тот же вопрос для вписанно-описанного четырехугольника.

Соответствующая задача на построение предлагалась на II Олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина.

Итак, исходя из точек  $H, I, O$ , восстановить треугольник циркулем и линейкой, вообще говоря, невозможно. Однако, как мы видели, можно построить вписанную и описанную окружности. Кроме того, можно построить окружность девяти точек, на которой находятся середины сторон треугольника: радиус этой окружности равен  $\frac{R}{2}$ , а центром является середина отрезка  $OH$  (рис. 5). Построить середину стороны иско-



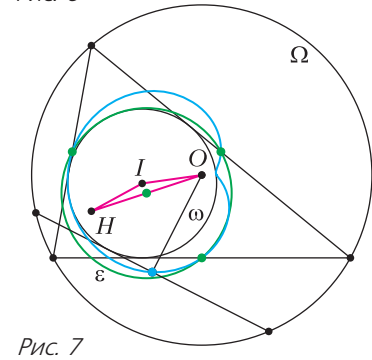
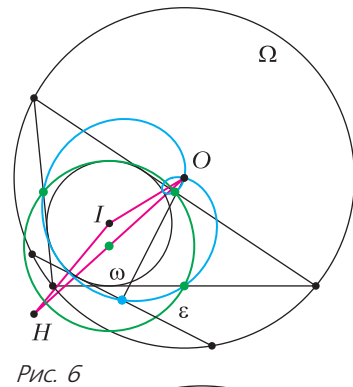
мого треугольника было бы достаточно для его восстановления. Теперь естественно задать себе вопрос, что из себя представляет

<sup>2</sup> То, что построение сводится к решению кубического уравнения, согласуется со следующим геометрическим наблюдением: ортоцентр  $H$  треугольников семейства Понселе описывает кривую (на самом деле, эта кривая – окружность), и когда треугольник делает один оборот,  $H$  проходит ее трижды.

геометрическое место середин хорд описанной окружности, касающихся вписанной окружности. Если бы нам удалось начертить это ГМТ, то мы бы построили и середины сторон (как точки пересечения этого ГМТ с окружностью девяти точек).

Очевидно, что если через произвольную точку окружности  $\omega$  проведена касательная, которая пересекает окружность  $\Omega$  в двух точках, середина получившейся хорды является основанием перпендикуляра, опущенного из центра  $O$  окружности  $\Omega$  на эту хорду. Тем самым, нам нужно построить ГМТ оснований таких перпендикуляров. Это множество известно как улитка Паскаля (синяя кривая на рисунках 6, 7). Нам осталось объяснить, с помощью какого инструмента строится улитка Паскаля. Обозначим через  $X$  основание перпендикуляра. Рассмотрим окружность  $\alpha$  с диаметром  $IO$ . Пусть луч  $OX$  пересекает эту окружность в точке  $N$ . Тогда  $XN = r$  (рис. 8).

Теперь понятно, какой инструмент нам нужен. Рассмотрим стержень, закрепленный в точке  $O$ . На этот стержень насадим муфту длины  $r$ , которая может перемещать-



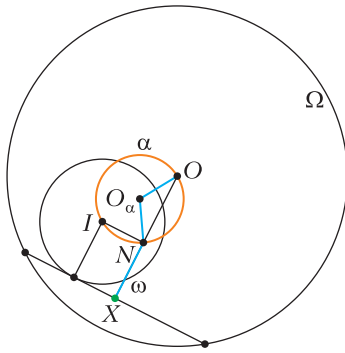


Рис. 8

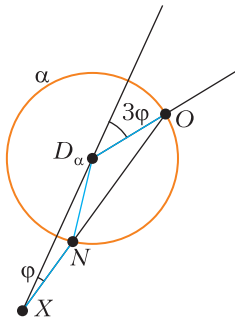


Рис. 9

ся по стержню. Один конец этой муфты пусть движется по окружности  $\alpha$ . Чтобы обеспечить такое движение, соединим этот конец муфты и точку  $O$  с центром окружности  $\alpha$ . Тогда карандаш, закрепленный на другом конце муфты, будет вычерчивать

улитку Паскаля. Заметим, что этот инструмент очень похож на трисектор, который

используется для деления угла на три части. Только у трисектора длина муфты равна радиусу окружности  $\alpha$  (рис. 9).

### Литература

1. *L. Euler*. Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum. – Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, vol.11, 1767, p. 103–123.

2. *А.Беляев*. Восстановление треугольника по заданным точкам. – Математическое просвещение, сер. 3, вып. 19, 2015, с. 109–137.

3. *W. Wernick*. Triangle constructions with three local points. – Mathematics Magazine, vol. 55, n. 4, 1982, p. 227–230.

4. *L.F. Meyers*. Update on William Wernick's «Triangle Constructions with Three Located Points». Mathematics Magazine, vol. 69, n. 1, 1996, p. 46–49.

5. *А.Устинов*. Можно ли построить треугольник по основаниям биссектрис? – Потенциал, 2013, № 10.

6. *P. Mathis, P. Schreck*. Determining automatically compass and straightedge unconstructibility in triangles. – 7th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science, EPIС Series in Computing, vol. 39, 2016, p. 130–142.

7. *Р.Курант, Г.Роббинс*. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2001.

8. *В.Дубровский, В.Сендеров*. Ловушка для треугольника. – «Квант», 1999, №3.

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

# Токи Фуко и гравитация

**С. ГЕРАСИМОВ**

**Н**А ПРОВОДНИК, В КОТОРОМ ТЕкут токи Фуко, оказывается, может действовать очень необычная сила. А обнаружить ее можно в обыкновенной учебной лаборатории.

Есть все основания сомневаться в том, что токи Фуко всегда замкнуты. Эти токи, по существу, являются обыкновенными индук-

ционными токами, создаваемыми источником переменного магнитного поля, правда, в массивном проводнике. Если бы они всегда были замкнуты, это бы противоречило закону электромагнитной индукции, а обычный генератор переменного тока, нагрузкой которого является конденсатор, не мог бы работать.

Однако, если проводник и конденсатор помещены в переменное магнитное поле, то возникает несколько необычное явление, которое вызывает неподдельный интерес. Познакомиться с ним можно, рассмотрев силы, с которыми постоянное магнитное поле, однородное или неоднородное, действует на симметричную замкнутую на конденсатор прямоугольную рамку (рис. 1, *a*). Сила Ампера  $\vec{F}_1$ , с которой магнитное поле действует на сторону 1 с током  $I$ , равна по величине, но

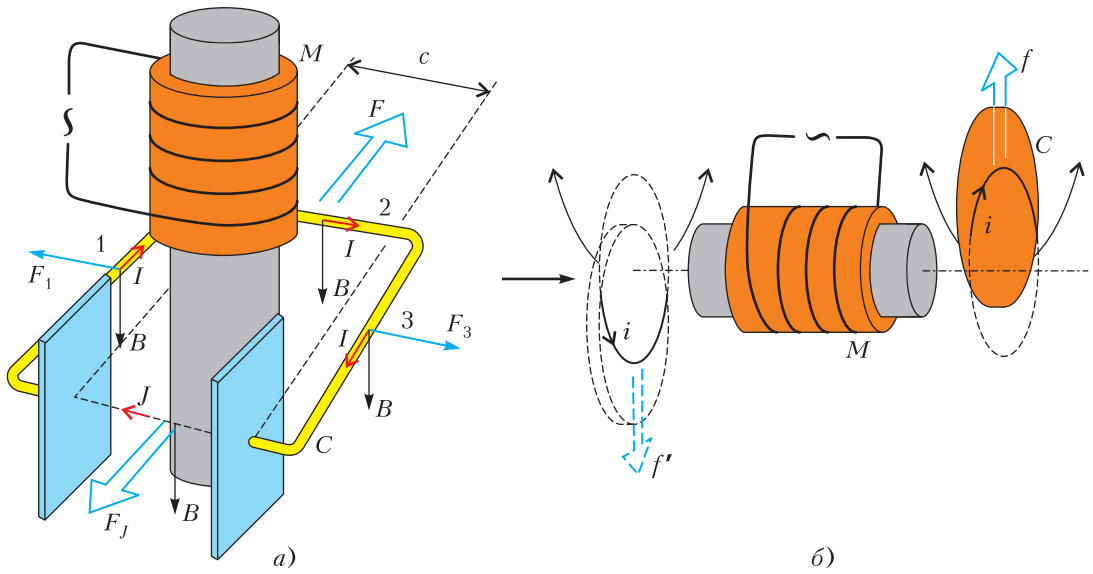


Рис. 1. Индукционный ток может быть не замкнут

противоположна по направлению силе  $\vec{F}_3$ , с которой магнитное поле действует на сторону 3. Ничего интересного эти силы не производят, разве что пытаются растянуть или сжать проводник. Наибольший интерес представляет сила  $\vec{F}$ , с которой магнитное поле действует на участок 2: антипода, который бы действовал на проводник, у этой силы нет. Всю силу Ампера, на первый взгляд ничем не скомпенсированную, действующую на проводник  $C$ , можно подсчитать, просуммировав выражения  $I[\Delta\vec{c} \times \vec{B}]$  по всем элементам проводника длиной  $\Delta c$ . А поскольку это справедливо и для проводника, находящегося в однородном магнитном поле, то для этого простого варианта задачи получается  $F = IcB$ .

Все это так, пока не рассматривается ток смещения, «текущий» между обкладками конденсатора. Плотность такого тока связана с производной от вектора электрической напряженности, а весь ток смещения  $J$ , конечно же, равен току  $I$ . С другой стороны, плотность импульса, передаваемого переменному электромагнитному полю, пропорциональна векторному произведению напряженности электрического поля на индукцию магнитного, значит, полный импульс электромагнитного поля между обкладками конденсатора тоже пропорционален этому векторному произведению, а его производная, представляющая собой силу, есть  $F_j = -IcB$ .

Эта сила равна по величине и противоположна по направлению полной силе Ампера, действующей на проводник  $C$ .

Далее аналогия грубоватая, но уместная: если какое-то тело приобрело импульс, то на него обязательно подействовала сила. Аналогично, если электромагнитное поле приобрело импульс, то на него что-то подействовало, на законных основаниях эту силу можно считать реактивной. Именно эта сила и обеспечивает выполнение закона сохранения импульса.

Пока можно согласиться лишь с тем, что индукционный ток может быть не замкнут и на него может действовать сила, не скомпенсированная обычным воздействием на проводник. Для обычного витка с обычным конденсатором эта сила чрезвычайно мала: наноньютоны и даже меньше. Эта сила пропорциональна напряженности электрического поля, которое может быть очень сильным на концах или вблизи поверхности. Эта сила пропорциональна силе тока, который может быть очень большим, если проводник – не виток, а, скажем, немагнитный проводящий диск, расположенный несоосно с источником магнитного поля (рис. 1,б). Законный вопрос: откуда может взяться переменный электрический ток с плотностью  $i$  в таком проводнике? Это понятно: за счет движения проводника, поступательного или колебательного. А пе-



рейдя в систему отсчета, связанную с проводником, можно обнаружить, что плотность силы  $\vec{f}$  в этом случае и в этой системе отсчета будет зависеть от изменения индукции магнитного поля.

Идея экспериментальной проверки становится понятной. Нужен хороший маятник; диск, подвешенный на нити, не подойдет. Лучше всего воспользоваться маятником Вальтенгофена (рис. 2), в котором колебания происходят только в плоскости диска, а движение диска в перпендикулярном направлении подавлено почти полностью. Обычный секундомер тоже не достаточен. Маятник придется снабдить источником света  $L$ , фотодатчиком  $D$ , сигнал с которого поступает на самописец, а к проводнику  $C$  добавить шторку  $S$  шириной пару миллиметров, которую не следует размещать непосредственно внизу проводника. За время каждого полного колебания шторка дважды заслоняет свет от лампы; учитывая это, хорошо бы повернуть ее градусов на 20–30. В качестве самописца вполне достаточно воспользоваться радиолюбительским USB-осциллографом VM8020, позволяющем опрашивать входной сигнал каждые  $10^{-4}$  с. Измерения предостоят многочисленные, не менее 10 раз

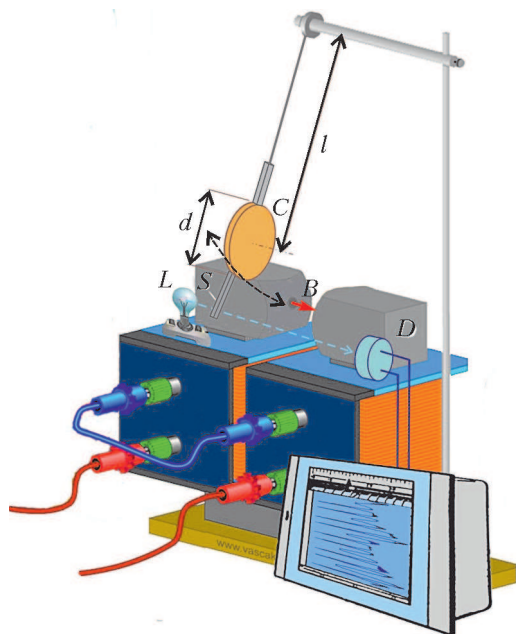


Рис. 2. Маятник Вальтенгофена с источником света, фотодатчиком и самописцем

при каждом положении медного проводника диаметром  $d = 20$  мм и толщиной 4 мм. Период колебаний физического маятника  $T$  связан с приведенной длиной  $l$  известным выражением  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , а поскольку нас интересу

ет ускорение свободного падения, а никак не длина, то, манипулируя с положением проводника относительно магнитов маятника Вальтенгофена, подвес лучше не трогать. Чтобы изменить положение проводника, достаточно поднять или опустить магниты маятника: ошибка будет меньше (а может и не появится вообще).

Теперь самое время остановиться на обработке измеренного массива периодов колебаний. Простейшая обработка в виде подсчета средних периодов колебаний с проводником вверху  $T_1 = 1,049$  с и внизу  $T_2 = 1,051$  с едва ли кого-нибудь устроит. Результат без погрешности – не результат. Корень квадратный из дисперсии – величины, которая характеризует рассеяние случайной величины, т.е. среднеквадратичную ошибку, оказался примерно в десять раз больше разности между этими значениями. Вроде говорить не о чем.

Может, измеряется не один параметр, изучается не одно явление, а как минимум два? В этом случае среднее вполне могло оказаться где-то между двумя средними, каждое из которых соответствует своей величине, своему процессу. Допустим, что мы измеряем время некоторого процесса. При первом измерении секундомер показал время  $t_1$ , при втором  $t_2$ . Среднее значение равно  $(t_1 + t_2)/2$ , однако третий раз датчик времени зарегистрировал снова время  $t_2$ ; новое среднее значение времени:  $t_1/3 + 2t_2/3$ . В результате трех измерений один раз возникло значение  $t_1$ , а число  $t_2$  появилось дважды. Значит, средние значения следует вычислять по-другому:  $\langle T \rangle = \sum p_i T_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , а не  $\langle T \rangle = \sum T_i/n$ , если  $n$  – число измерений, а  $p_i$  – вероятность того, что значение периода равно (или близко)  $T_i$ .

Так вычисленные значения периодов колебаний маятника разошлись (рис. 3). Сложившуюся неоднозначную ситуацию с отношением к результатам измерений периодов помогает прояснить вероятность  $p_i = n_i/n$ , в

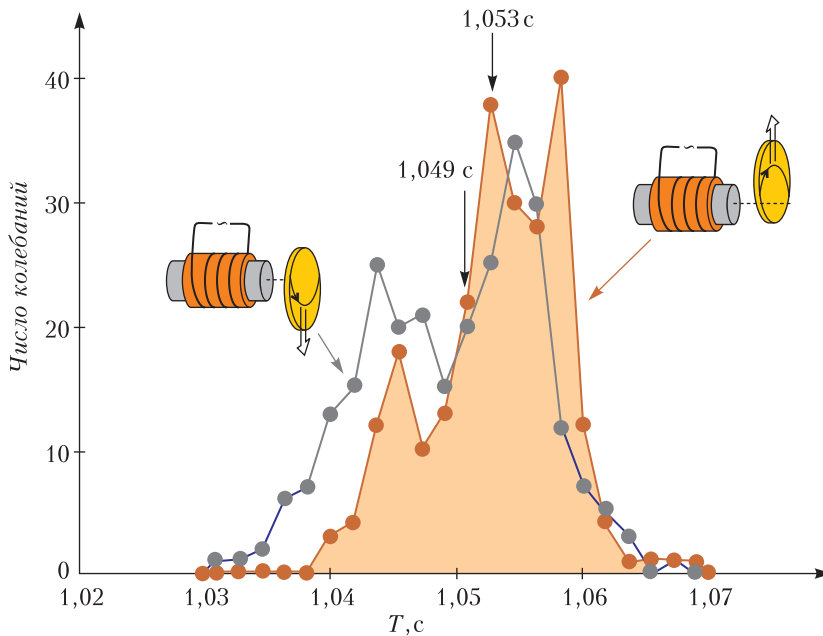


Рис. 3. Распределение периодов колебаний

данном конкретном случае представляющая собой функцию распределения периодов. Это – число колебаний, чьи периоды находятся в заданном интервале.

Всякое измерение – вероятностный процесс. Чем выше вероятность, тем более достоверным, не сомнительным, представляется явление. В положении «проводник внизу» колебаний маятника с малыми периодами больше, чем с большими; период обратно пропорционален корню квадратному из ускорения «свободного падения», значит, система становится «тяжелее». Все верно: при малых периодах сила, действующая на незамкнутые токи, направлена туда, куда надо; так, как ожидалось (см. рис. 1,б). На проводник в таком расположении действует не только сила гравитационного притяжения, но и сила  $\vec{f}$ . При больших периодах все происходит с точностью до наоборот. Жаль, конечно, что максимумы вероятностей не раздвинулись еще больше. Причина понятна: кроме незамкнутых токов, есть и замкнутые, воздействие на них магнитного поля значительно. И еще одно подтверждение того, что частота колебаний проводника зависит от его положения. При отключенных электромагнитах маятника Вальтенгофена период колебаний оказался

близким к 1,051 с, т.е. между значениями, при которых происходит увеличение или уменьшение веса.

Эффект пока слаб. Изменение измеряемой таким образом величины  $g$  составило около двух десятых процента. А что мы хотим? Чтобы при частоте колебаний в 1 герц вся система взлетела, в известном смысле ни от чего не отталкиваясь? В реальной жизни такого не бывает, нужны дополнительные условия и усилия, чтобы такое случилось.

### Литература

1. А.Л. Дорофеев. Вихревые токи. – М.: Энергия, 1977.
2. П. Кузьмин. Парадоксы постоянного магнитного поля. – «Квант», 1995, № 3.
3. Дж. Орир. Физика. – М.: КДУ, 2019.
4. Т.А. Агекян. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. – М.: Наука, 1968.

# Заключительный этап L Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап юбилейной, пятидесятой Всероссийской математической олимпиады проходил с 19 по 25 апреля 2024 года в Нижнем Новгороде. Главным организатором олимпиады выступил Мининский университет. Участникам олимпиады была предложена интересная экскурсионная программа, а также посещение научно-популярных лекций от математиков – представителей ведущих вузов страны.

В олимпиаде приняли участие 471 школьников, представивших почти все регионы России. Также, по традиции, в олимпиаде участвовала команда из Китая: в онлайн-режиме олимпиаду написали шестеро школьников из провинции Чжэцзян.

О сложности задач можно судить по следующим таблицам (решившим задачу считается участник, набравший по этой задаче не меньше 5 баллов из 7 возможных):

9 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 148), решивших задачу	107	95	12	13	134	78	8	1

10 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 165), решивших задачу	133	105	63	11	124	51	8	4

11 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 164), решивших задачу	133	144	38	18	139	100	53	2

Опрос участников олимпиады выявил наиболее красивые, по их мнению, задачи олимпиады. В параллели 9 классов первые три места заняли задачи 6 (1 место), 8 (2 место) и 3 (3 место), в параллели 10 классов – задачи 2 (1 место), 6 (2 место) и 3 (3 место), в параллели 11 классов – задачи 3 (1 место), 7 (2 место) и 2 (3 место).

Ниже приводятся условия задач и список победителей заключительного этапа L Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Условия задач

### 9 класс

1. Петя и Вася знают лишь натуральные числа, не превосходящие  $10^9 - 4000$ . Петя считает хорошими числа, представимые в виде  $abc + ab + ac + bc$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – натуральные числа, *не меньше* 100. Вася считает хорошими числа, представимые в виде  $xuz - x - y - z$ , где  $x$ ,  $y$  и  $z$  – натуральные числа, *больше* 100. Для кого из них хороших чисел больше?

*И. Богданов*

2. У натурального числа ровно 50 делителей. Может ли оказаться, что никакая разность двух различных его делителей не делится на 100?

*Методкомиссия по мотивам задачи А. Чиропова*

3. Двум мальчикам выдали по мешку картошки, в каждом мешке по 150 клубней. Ребята по очереди перекаладывают картошку, каждый своим очередным ходом перекаладывает ненулевое количество клубней из своего мешка в чужой. При этом они должны соблюдать *условие новой возможности*: на каждом ходе мальчик должен переложить больше клубней, чем у него было в мешке перед любым из его предыдущих ходов (если такие ходы были). Так, первым своим ходом мальчик может переложить любое ненулевое количество, а сво-

им пятым ходом мальчик может переложить 200 клубней, если перед его первым, вторым, третьим и четвертым ходами количества клубней в его мешке были меньше 200. Какое максимальное суммарное количество ходов могут совершить ребята?

*Е. Молчанов*

4. Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle A + \angle D = 90^\circ$ . Его диагонали пересекаются в точке  $E$ . Прямая  $l$  пересекает отрезки  $AB$ ,  $CD$ ,  $AE$  и  $ED$  в точках  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $T$  соответственно. Известно, что  $AZ = CE$  и  $BE = DT$ . Докажите, что длина отрезка  $XU$  равна диаметру окружности, описанной около треугольника  $ETZ$ .

*А. Кузнецов, И. Фролов*

5. Квартал представляет собой клетчатый квадрат  $10 \times 10$ . В новогоднюю ночь внезапно пошел снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки – на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от нее. Сгрести снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдет клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника – добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдет инспектор?

*А. Сольнин*

6. Высоты остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ , пересекаются в точке  $H$ , а  $O$  – центр описанной около него окружности  $\Omega$ . Отрезок  $OH$  пересекает описанную около треугольника  $BHC$  окружность в точке  $X$ , отличной от  $O$  и  $H$ . Окружность, описанная около треугольника  $AOX$ , пересекает меньшую дугу  $AB$  окружности  $\Omega$  в точке  $Y$ . Докажите, что прямая  $XU$  делит отрезок  $BC$  пополам.

*А. Терёшин*

7. На доске написаны 8 различных квадратных трехчленов; среди них нет двух, дающих в сумме нулевой многочлен. Оказалось, что если выбрать любые два трехчлена  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  с доски, то оставшиеся 6 трехчленов

можно обозначить как  $g_3(x)$ ,  $g_4(x)$ , ...,  $g_8(x)$  так, что у всех четырех многочленов  $g_1(x) + g_2(x)$ ,  $g_3(x) + g_4(x)$ ,  $g_5(x) + g_6(x)$  и  $g_7(x) + g_8(x)$  есть общий корень. Обязательно ли все трехчлены на доске имеют общий корень?

*С. Берлов, методкомиссия*

8. 1000 детей, среди которых нет двух одинакового роста, выстроились в шеренгу. Назовем пару различных детей  $(a, b)$  *хорошей*, если между ними не стоит ребенка, рост которого больше роста одного из  $a$  и  $b$ , но меньше роста другого. Какое наибольшее количество хороших пар могло образоваться? (Пары  $(a, b)$  и  $(b, a)$  считаются одной и той же парой.)

*И. Богданов*

*10 класс*

1. Пусть  $p$  и  $q$  – различные простые числа. Дана бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, в которой встречается каждое из чисел  $p^{23}$ ,  $p^{24}$ ,  $q^{23}$  и  $q^{24}$ . Докажите, что в этой прогрессии обязательно встретятся числа  $p$  и  $q$ .

*А. Кузнецов, методкомиссия*

2. Дано нечетное число  $n \geq 3$ . В клетчатом квадрате  $2n \times 2n$  закрашивают  $2(n-1)^2$  клеток. Какое наибольшее количество трехклеточных уголков можно гарантированно вырезать из незакрашенной клетчатой фигуры?

*Г. Шарафетдинова*

3. См. задачу M2799 «Задачника «Кванта».

4. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle A + \angle D = 90^\circ$ , его диагонали пересекаются в точке  $E$ . Прямая  $l$  пересекает отрезки  $AB$ ,  $CD$ ,  $AE$  и  $ED$  в точках  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $T$  соответственно. Известно, что  $AZ = CE$  и  $BE = DT$ . Докажите, что длина отрезка  $XU$  не больше диаметра описанной окружности треугольника  $ETZ$ .

*А. Кузнецов*

5. См. задачу M2798 «Задачника «Кванта».

6. См. задачу M2800 «Задачника «Кванта».

7. Пусть даны натуральные числа  $x_1$  и  $x_2$ . На прямой даны  $y_1$  белых отрезков и  $y_2$  черных отрезков, при этом  $y_1 \geq x_1$  и  $y_2 \geq x_2$ . Известно, что никакие два отрезка одного цвета не пересекаются (даже не имеют общих концов). Также известно, что при любом

выборе  $x_1$  белых отрезков и  $x_2$  черных отрезков обязательно какая-то пара выбранных отрезков будет пересекаться. Докажите, что

$$(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) < x_1 x_2.$$

*Г. Челноков*

8. Дано натуральное  $n > 2$ . Маша записывает по кругу  $n$  натуральных чисел. Далее Тая делает такую операцию: между каждыми двумя соседними числами  $a$  и  $b$  она пишет некоторый делитель числа  $a + b$ , больший 1; затем Тая стирает исходные числа и получает новый набор из  $n$  чисел, стоящих по кругу. Всегда ли Тая может выполнять операции таким образом, чтобы через несколько операций все числа оказались равными?

*Т. Коротченко*

11 класс

1. В пространстве расположен бесконечный цилиндр (т.е. геометрическое место точек, удаленных от данной прямой  $l$  на данное расстояние  $R > 0$ ). Могут ли шесть прямых, содержащих ребра некоторого тетраэдра, иметь ровно по одной общей точке с этим цилиндром?

*А. Кузнецов*

2. Тройку положительных чисел  $(a, b, c)$  назовем *загадочной*, если

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2 c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2 a^2} + 2bc} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2 b^2} + 2ca} = 2(a + b + c).$$

Докажите, что если тройка  $(a, b, c)$  – загадочная, то тройка  $(c, b, a)$  – тоже загадочная.

*А. Кузнецов, К. Сухов*

3. См. задачу M2801 «Задачника «Кванта».

4. Четырехугольник  $ABCD$ , в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность  $\omega$ . Через вершину  $A$  проведена прямая  $l_a \parallel BC$ , через вершину  $B$  – прямая  $l_b \parallel CD$ , через вершину  $C$  – прямая  $l_c \parallel DA$ , через вершину  $D$  – прямая  $l_d \parallel AB$ . Четырехугольник, последовательные стороны которого лежат на этих четырех прямых (именно в этом порядке), вписан в окружность  $\gamma$ . Окружности  $\omega$  и  $\gamma$  пересекаются в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что прямые  $AC$ ,  $BD$  и  $EF$  пересекаются в одной точке.

*А. Кузнецов*

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Остроугольный неравносторонний треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$  с центром в точке  $O$ , его высоты пересекаются в точке  $H$ . Через точку  $O$  проведена прямая, перпендикулярная  $AH$ , а через точку  $H$  – прямая, перпендикулярная  $AO$ . Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами  $AB$  и  $AC$  лежат на одной окружности, которая касается окружности  $\omega$ .

*А. Кузнецов*

7. В стране  $n > 100$  городов и пока нет дорог. Правительство наугад определяет стоимость строительства дороги (с двусторонним движением) между каждыми двумя городами, используя по разу все суммы от 1 до  $n(n-1)/2$  талеров (все варианты равновероятны). Мэр каждого города выбирает самую дешевую из  $n-1$  возможных дорог, идущих из этого города, и она строится (это может быть взаимным желанием мэров обоих соединяемых городов или только одного

## Победители олимпиады

9 класс

*Кокарев И.* – Челябинская область,  
*Штурман А.* – Ярославская область,  
*Скворцов А.* – Санкт-Петербург;

10 класс

*Прозоров Р.* – Москва,  
*Дмитриев Л.* – Санкт-Петербург,  
*Лазарев А.* – Москва,  
*Авербах Д.* – Санкт-Петербург,  
*Смирнов М.* – Санкт-Петербург;

*Воинов Г.* – Санкт-Петербург,  
*Суровцев С.* – Кировская область,  
*Кандрашкин А.* – Татарстан,  
*Сираев Т.* – Санкт-Петербург,  
*Шекера А.* – Московская область;

11 класс

*Французов Ц.* – Санкт-Петербург,  
*Беляев Д.* – Москва,  
*Иванов М.* – Пензенская область,  
*Коптилин Р.* – Новосибирская область,  
*Ленская Н.* – Москва,  
*Югов М.* – Санкт-Петербург.



из двух). После строительства этих дорог города оказываются разбиты на  $M$  компонент связности (между городами одной компонент связности можно добраться по построенным дорогам, возможно, с пересадками, а между городами разных компонент – нельзя). Найдите математическое ожидание случайной величины  $M$ .

Ф.Петров

8. Докажите, что существует такое  $c > 0$ , что для любого нечетного простого  $p = 2k + 1$  числа  $1^0, 2^1, 3^2, \dots, k^{k-1}$  дают хотя бы  $c\sqrt{p}$  различных остатков при делении на  $p$ .

М.Туревский, И.Богданов

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, А.Кузнецов, О.Подлипский, К.Сухов

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

# Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит олимпиады по математике, физике, информатике и другим предметам, которые пользуются большой популярностью среди школьников. Онлайн-олимпиада «РИТМ МИЭТ» проводится с 2015 года. В 2023/24 учебном году в 9 секциях этой олимпиады приняли участие более 800 человек. Физико-математическая олимпиада МИЭТ проводится с 2018 года. В текущем учебном году в отборочном этапе олимпиады приняли участие более 1400 школьников. Заключительный очный этап Физико-математической олимпиады МИЭТ проходил на 13 площадках в РФ и в других странах. В МИЭТ весной 2024 года проводился также предметный тур Национальной технологической олимпиады школьников профиля «Цифровые сенсорные системы».

Ниже приводятся задачи по физике, предлагавшиеся на этих олимпиадах.

### Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

#### Заключительный этап

1. Камень брошен горизонтально из точки  $A$ . При какой начальной скорости  $v_0$  камня он будет в течение всего времени полета удаляться от точки  $B$ , расположенной на

расстоянии  $h = 6,4$  м под точкой  $A$  на одной вертикали с ней? Спротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2. На какой высоте над поверхностью Земли скорость спутника на круговой орбите отличается от первой космической скорости на  $\delta = 10\%$ ? Радиус Земли примите равным  $R = 6400$  км.

3. На горизонтальной поверхности покоится клин, наклонная плоскость которого составляет с горизонтом угол  $\alpha = 50^\circ$  (рис. 1). В клин падает и упруго отражается шарик. Его скорость до удара направлена горизонтально, а после удара вертикально. Определите отношение массы клина к массе шарика. Трением пренебречь.

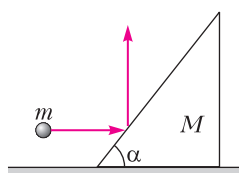


Рис. 1

4. Найдите давление смеси газов в объеме  $V = 2$  л, если в ней находится  $N = 10^{22}$  молекул азота и  $m = 1$  г кислорода, при температуре смеси  $50^\circ\text{C}$ . Молярная масса кислорода  $M = 32$  г/моль, постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К, число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

5. Одноатомный идеальный газ сначала адиабатически сжали, а потом изобарно на-

грели на  $60^\circ\text{C}$ . Суммарная работа газа в этих двух процессах равна нулю. Определите приращение температуры газа в адиабатном процессе.

6. В вершинах квадрата со стороной  $a$  расположены одинаковые по величине точечные заряды, три положительных и один отрицательный. Модуль вектора напряженности электрического поля этих зарядов в центре квадрата равен  $E_0 = 8000\text{ В/м}$ . Определите модуль вектора напряженности в точке, удаленной от каждой вершины квадрата на расстояние  $r = 2a$ .

7. В цепи, схема которой показана на рисунке 2, сопротивление резисторов

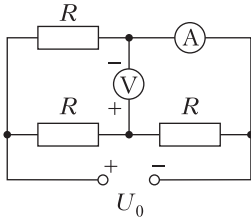


Рис. 2

$R = 100\text{ Ом}$ , вольтметр идеальный, напряжение на клеммах источника  $U_0 = 15\text{ В}$ . Вольтметр показывает напряжение  $U = 2,5\text{ В}$ . Какой ток показывает амперметр?

8. К катушке подключены два параллельных проводника, по которым без трения может скользить проводящая перемычка (рис. 3). Полученный проводящий контур

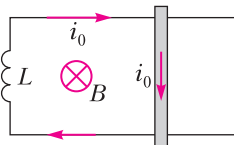


Рис. 3

расположен в постоянном однородном магнитном поле, вектор индукции  $\vec{B}$  которого перпендикулярен плоскости контура. В начальный момент перемычка покоится, а ток в контуре  $i_0 = 0,01\text{ А}$ . Найдите амплитуду колебаний перемычки, если расстояние между параллельными проводниками  $l = 5\text{ см}$ , индуктивность катушки  $L = 10\text{ мГн}$ , индукция магнитного поля  $B = 0,1\text{ Тл}$ , сопротивление всех проводников равно нулю. Движение перемычки поступательное, изменением индуктивности контура при движении перемычки пренебречь.

## Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

1. Два камня брошены одновременно с вышки в противоположных направлениях под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту с разными по величине скоростями (рис. 4). В некоторый момент совместного полета одно тело оказалось на  $\Delta h = 5\text{ м}$  выше другого. Определите расстояние  $\Delta r$  между телами в этот момент. Спротивлением воздуха пренебречь.

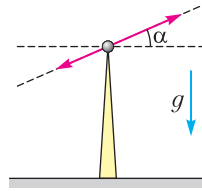


Рис. 4

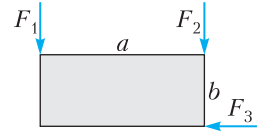


Рис. 5

2. Однородную прямоугольную плиту массой  $m = 100\text{ кг}$  перемещают по горизонтальной поверхности поступательно с постоянной скоростью, толкая ее, как показано на рисунке 5 (вид на плиту сверху). Действующие на плиту силы  $F_1 = 300\text{ Н}$ ,  $F_2 = 100\text{ Н}$  и  $F_3 = 300\text{ Н}$  горизонтальны и перпендикулярны боковым граням плиты. Определите: 1) коэффициент трения между плитой и поверхностью, 2) отношение  $a/b$  длины к ширине плиты. Ускорение свободного падения  $g = 10\text{ м/с}^2$ , считайте, что равнодействующая сил трения приложена к центру масс плиты.

3. Тележка массой  $M = 200\text{ г}$  движется по горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0 = 2\text{ м/с}$ , на тележке покоится брусок массой  $m = 300\text{ г}$  (рис. 6). После короткого и

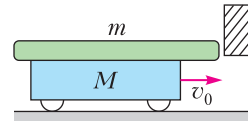


Рис. 6

абсолютно упругого столкновения бруска с неподвижной преградой брусок смещается относительно тележки, но не слетает с нее. Пренебрегая трением качения, а также изменением импульса тележки за время удара, определите: 1) конечную скорость  $v$  тележки, 2) выделившееся количество теплоты  $Q$ .

4. Идеальный газ совершает процесс 1-2-3-4, в котором зависимость давления  $p$

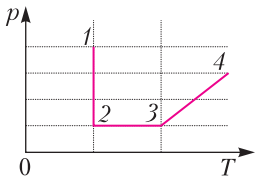


Рис. 7

газа от его температуры  $T$  имеет вид, показанный на рисунке 7. Во сколько раз максимальная плотность газа в этом процессе больше минимальной?

5. Одноатомный идеальный газ находится в цилиндрическом сосуде длиной  $h = 30$  см и площадью сечения  $S = 1$  см<sup>2</sup> при давлении  $p_1 = 100$  кПа. Какую работу нужно совершить, чтобы, сжимая газ адиабатически, увеличить его абсолютную температуру в  $n = 2$  раза?

11 класс

1. Из игрушечной двустулки одновременно с разными по величине скоростями вылетели две пульки. В некоторый момент совместного полета первая пулька оказалась на  $\Delta h = 1$  м выше второй и на расстоянии  $\Delta r = 2$  м от нее. Под каким углом к горизонту вылетели пульки из двустулки? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Тележка массой  $M = 300$  г движется по горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0 = 2$  м/с, на тележке покоится относительно нее шайба массой  $m = 100$  г (рис. 8). Пос-

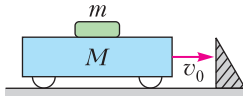


Рис. 8

ле короткого и абсолютно упруго столкновения тележки с неподвижной преградой шайба смещается относительно тележки, но не слетает с нее. Пренебрегая трением качения, а также изменением импульса шайбы за время удара, определите: 1) конечную скорость тележки  $v$ , 2) выделившееся количество теплоты  $Q$ .

3. Электрическое поле создано неподвижными точечными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , расположенными в точках  $A$  и  $B$ . Вектор напряженности этого поля параллелен прямой  $AB$  во всех точках пространства, удаленных от  $q_1$  в 3 раза дальше, чем от  $q_2$ . Определите отношение  $q_1/q_2$ .

4. Заряженный конденсатор в момент  $t = 0$  подключили к катушке индуктивностью  $L = 1$  мГн с пренебрежимо малым сопротивлением. Зависимость напряжения на кон-

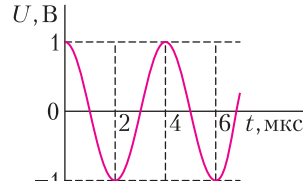


Рис. 9

денсаторе от времени приведена на рисунке 9. Определите максимальный ток через катушку.

5. Одноатомный идеальный газ находится в цилиндрическом сосуде длиной  $h = 50$  см и площадью сечения  $S = 1$  см<sup>2</sup> при давлении  $p_1 = 100$  кПа и температуре  $t_1 = 27$  °С. 1) Адиабатически сжимая газ, совершили работу  $A = 5$  Дж. На сколько увеличилась температура газа? 2) Определите максимальную силу, с которой газ действует на поршень в этом процессе. Для справки: в адиабатическом процессе давление и объем одноатомного идеального газа связаны уравнением  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = 5/3$ .

Национальная технологическая олимпиада школьников

8–9 классы

1. Настя четверть пути прошла, разговаривая по телефону с мамой, затем сразу связалась с бабушкой и прошла еще одну пятую часть пути. Треть пути она разговаривала с подружкой. Оставшиеся 130 метров она прошла молча, затратив на это 1 минуту и 5 секунд. Определите весь путь, пройденный Настей. Считая ее скорость постоянной, найдите время, потребовавшееся Насте на дорогу.

2. Гимнастический обруч радиусом  $R$  катится без проскальзывания так, что его центр движется со скоростью  $v = 3$  м/с. 1) С какой скоростью  $v_v$  движется верхняя точка обруча? 2) С какой скоростью  $v_r$  движется точка обруча, лежащая на горизонтальном диаметре? 3) На обруче маркером поставили метку. При качении обруча метка движется по траектории, которая называется циклоидой. Путь, пройденный меткой между двумя последовательными касаниями земли, равен  $8R$ . Определите среднюю путевую скорость  $v_{cp}$  движения метки по циклоиде за один оборот колеса.

3. Из 12 одинаковых тонких стержней длиной  $a = 120$  см Коля сделал квадрат так,

что две его смежные стороны состояли из трех стержней каждая, а две другие – из одного и пяти стержней. Таким образом, стороны квадрата имели массы  $m$ ,  $3m$ ,  $3m$  и  $5m$ , как показано на рисунке 10.

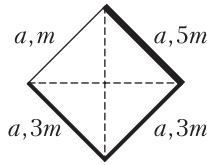


Рис. 10

1) На каком расстоянии от центра полученного квадрата находится его центр масс? 2) Перекладывая стержни, но следя за тем, чтобы вдоль каждой стороны квадрата оставался хотя бы один стержень, Коля нашел расположение стержней, при котором расстояние от центра масс до центра квадрата максимальное. Найдите это расстояние.

4. Настя любит изучать электричество и часто экспериментирует. Она взяла два куска нихромовой проволоки одинаковой длины, но разного диаметра, и концы одного из них соединила, получив замкнутую проводочную петлю (рис. 11). Далее Настя стала

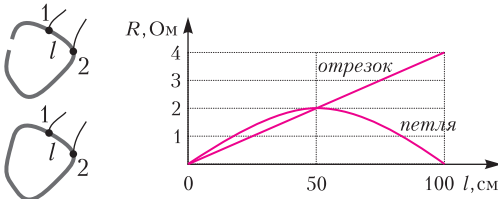


Рис. 11

измерять сопротивление между контактами 1 и 2, изменяя расстояние  $l$  между ними. По результатам измерений Настя построила два графика, один для отрезка проволоки, а второй для петли. Эти графики приведены на рисунке. Во сколько раз сопротивление незамкнутого куска проволоки меньше сопротивления того, из которого сделана петля?

5. На стройке поднимают крюком два связанных тросом груза разной массы (рис. 12). Крюк движется вверх с постоянной скоростью  $v = 2$  м/с. Найдите: 1) скорость верхнего груза, когда нижний неподвижен; 2) скорость и направление движения нижнего груза, когда верхний поднимается со скоростью 8 м/с; 3) скорость и направление движения нижнего груза, когда верхний неподвижен.

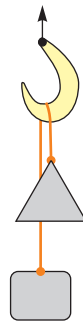


Рис. 12

1. В момент  $t = 0$  тело брошено горизонтально. Под телом на одной вертикали с точкой его старта закреплен электронный дальномер, измеряющий расстояние  $r$  до тела в зависимости от времени  $t$ . График  $r(t)$  приведен на рисунке 13.

1) В какой момент времени тело будет на одной высоте с дальномером? 2) Чему равна начальная скорость тела? Ускорение свободного падения принять равным  $10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь.

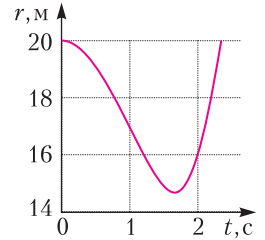


Рис. 13

2. По кремниевой пластине с помощью манипулятора медленно перемещают зонд, прикладывая к нему горизонтальную  $\vec{F}_1$  и вертикальную  $\vec{F}_2$  силы, как показано на рисунке 14. Силой тяжести по сравнению с

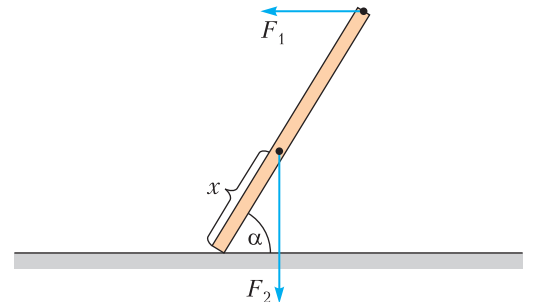


Рис. 14

этимися силами можно пренебречь. Зонд наклонен к пластине под углом  $\alpha = 60^\circ$ , его длина  $l = 1$  см, коэффициент трения скольжения между зондом и пластиной  $\mu = 0,2$ . 1) Определите отношение  $F_2/F_1$ . 2) На каком расстоянии  $x$  от точки контакта зонда с пластиной приложена вертикальная сила?

3. На горизонтальном столе покоится игрушечная машинка, на нее вертикально падает шарик и сталкивается с поверхностью машинки (рис. 15). Угол падения шарика  $\alpha = 42^\circ$ , сразу после удара скорость шарика

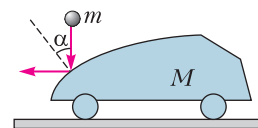


Рис. 15





щим к ней углам:  $AH = AM = 1$ , угол  $A$  общий, углы  $AHK$  и  $AMB$  – прямые. Тогда  $AB = AK = 3$ . Так как треугольник  $ABC$  равнобедренный, то его периметр равен  $2AB + AC = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ .

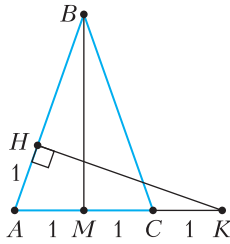


Рис. 4

4. Не может.

Заметим, что первые два условия можно проще сформулировать так: среди любых трех стоящих подряд есть троечник, а среди любых пяти стоящих подряд есть отличник. Кроме того, рядом с каждым хорошистом или через одного человека от него должен стоять другой хорошист (назовем таких двух хорошистов друзьями). Если два друга-хорошиста стоят рядом, то с обеих сторон от них должны стоять троечники, а если через одного, то троечник стоит между ними. Поэтому если у какого-то хорошиста есть два друга, то возникает одна из двух пятерок – 34434 или 43434, в которых нет отличника, что невозможно. Таким образом, хорошисты распадаются на пары друзей, и поэтому хорошистов четное число. А тогда отличников и троечников вместе – нечетное, значит, их не поровну.

### Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №4)

29. Суммы равны.

Конечно, не так уж трудно просто посчитать эти суммы (интересно, что обе они равны 2024). Однако убедиться в их равенстве можно, вообще не производя вычислений. В первой сумме первое слагаемое – это 22 единицы, второе – 21 двойка, третье – 20 троек и так далее, поэтому ее можно переписать в виде

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + \dots + (1+2+\dots+22),$$

– ведь тут тоже 22 единицы, 21 двойка и т.д.

Заметим, что теперь сумма первого и второго слагаемых равна  $2 + (1+1) = 2 \cdot 2 = 2^2$ , третьего и четвертого – равна  $4 + (3+1) + (2+2) + (1+3) = 4 \cdot 4 = 4^2$ . Так будет и дальше; например, 5-е и 6-е слагаемые можно сложить как показано на рисунке 5. Поэтому вся сумма равна сумме квадратов четных чисел  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$ , что и требовалось.

Дальнейшее обсуждение этой задачи можно найти в статье А.Заславского «Удивительное число

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \cdot 6 = 6^2 \end{array}$$

Рис. 5

2024» в «Квантике» №6 за 2024 год.

30. 25.

Поскольку в первом хороводе белки не стояли рядом, бобров и бурундуков в сумме должно быть не меньше, чем белок – т.е. по крайней мере на 50 больше, чем барсуков:  $Bo + Bu \geq Ba + 50$ . С другой стороны, во втором хороводе не стояли рядом бурундуки – значит, их было не больше, чем барсуков и бобров в сумме:  $Ba + Bo \geq Bu$ . Сложим два неравенства:  $2 \cdot Bo \geq 50$ .

Таким образом, бобров не меньше 25. Покажем, что 25 бобров могло быть. Пусть барсуков тоже 25, бурундуков 50, а белок 75. В первом хороводе расставим белок через одну, а на пропущенные места поставим 25 + 50 бобров и бурундуков. Во втором хороводе расставим через одного 50 бурундуков, а на пропущенные места поставим бобров и барсуков.

31. Рассмотрим поворот на  $90^\circ$  вокруг точки  $A$ , переводящий  $B$  в  $D$ . Пусть при этом повороте  $N$

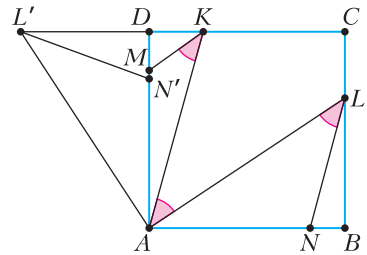


Рис. 6

переходит в  $N'$ , а  $L$  переходит в  $L'$  (рис. 6). При повороте на  $90^\circ$  любая прямая переходит в перпендикулярную ей прямую. Следовательно,  $L'N' \perp LN \parallel AK$  и  $AL' \perp AL \parallel KM$ . Получается, что прямые  $AD$ ,  $L'N'$  и  $KM$  содержат высоты треугольника  $AKL'$ . Значит, они пересекаются в одной точке, т.е.  $M$  и  $N'$  совпадают. Тогда  $DM = DN' = BN$ , что и требовалось.

Задача решена. Из равенства  $BN = DM$  несложно получить такое равенство:

$$\begin{aligned} MK^2 + AL^2 &= DM^2 + DK^2 + BL^2 + AB^2 = \\ &= BN^2 + BL^2 + DK^2 + AD^2 = NL^2 + AK^2. \end{aligned}$$

Это утверждение требовалось доказать в задаче М1864 «Задачника «Кванта», автор – В.Произволов (см. «Квант» №3 за 2003 г.). В задаче было дополнительное условие о том, что отмеченные углы равны  $45^\circ$ , и приводилось другое решение.

32. а)  $\left[ \frac{n-1}{3} \right]$ ; б)  $\left[ \frac{n+m-5}{2m-5} \right]$ .

Приведем решение пункта б).

Рассмотрим граф, в котором вершины будут

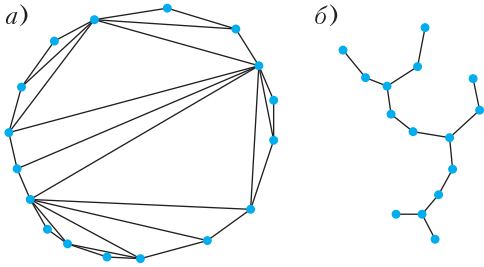


Рис. 7

соответствовать треугольникам разбиения. Вершины соединяются ребром, если у треугольников есть общая сторона. Этот граф является деревом на  $(n - 2)$  вершинах, степень каждой вершины не больше трех,  $m$ -угольникам соответствуют связные подграфы на  $(m - 2)$  вершинах. (На рисунке 7 показан пример – разбиение многоугольника на треугольники и соответствующий этому разбиению граф.)

Осталось выяснить, какое наибольшее количество связных подграфов на  $M = m - 2$  вершинах можно выделить из этого графа на  $N = n - 2$  вершинах.

Подвесим граф за любую вершину (т.е. назовем одну из вершин *корнем* и назначим каждой вершине *уровень* – длину пути от вершины до корня). (На рисунке 8 показан пример подвешенного графа.)

Назовем *весом* вершины  $A$  количество ее потомков, увеличенное на 1. В частности, у висячих вершин (не являющихся корнем) вес равен 1, у корня вес равен  $N$ . (На рисунке 8 для примера около вершин подписаны их веса.)

Пока количество вершин в графе не меньше  $M$ , будем выполнять следующую операцию. Рассмотрим все вершины веса не меньше  $M$  (такая есть хотя бы одна – корень) и выберем из них ту вершину  $A$ , у которой наибольший уровень. У вершины  $A$  один или двое сыновей, и у каждого

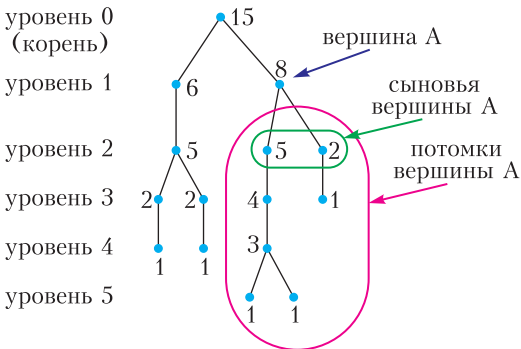


Рис. 8

из них вес не больше  $M - 1$ , значит, вес  $A$  не больше  $2M - 1$ . Удалим из графа подграф из вершины  $A$  и всех ее потомков, таким образом мы удалили связный подграф, количество вершин в котором не меньше  $M$  и не больше  $2M - 1$ . Мы будем повторять эту операцию, пока вершин в графе не меньше  $M$ .

Такую операцию можно проделать хотя бы  $t = \left\lfloor \frac{N + M - 1}{2M - 1} \right\rfloor$  раз.

В каждом из удаленных связных подграфов можно выбрать связный подграф, в котором ровно  $M$  вершин, удаляя по одной висячие вершины. Ему соответствует  $m$ -многоугольник, а удаляемым висячим вершинам соответствуют треугольники. Таким образом, можно многоугольник, соответствующий этому подграфу, разрезать на один  $m$ -угольник и треугольники. Поэтому за каждую операцию мы будем получать один  $m$ -угольник в разбиении.

Приведем пример дерева, из которого нельзя выделить большее количество нужных нам подграфов размера  $M$ . Рассмотрим  $t$  красных вер-



Рис. 9

шин, соединенных как на рисунке 9; остальные вершины будут синими. На каждой из цепочек отмечено не более  $M - 1$  синих вершин (на рисунке показан пример для  $t = 4$ ,  $M - 1 = 3$ , общий случай устроен аналогично). Тогда любой связный подграф из  $M$  вершин содержит хотя бы одну из красных вершин, следовательно, можно выбрать не больше  $t$  непересекающихся подграфов. Осталось убедиться, что граф такого типа может содержать  $N$  вершин. Для этого докажем неравенство

$$\begin{aligned} (2M - 1)t + M - 1 &= (2M - 1) \left\lfloor \frac{N + M - 1}{2M - 1} \right\rfloor + M - 1 \geq \\ &\geq (2M - 1) \left( \frac{N + M - 1 - (2M - 2)}{2M - 1} \right) + M - 1 = \\ &= N + M - 1 - (2M - 2) + M - 1 = N. \end{aligned}$$

Для любого дерева, степень каждой вершины которого не больше трех, существует соответствующее разбиение диагоналями многоугольника на треугольники. Опишем доказательство с помощью индукции по числу вершин. Для одной вершины утверждение очевидно. Докажем переход. Рассмотрим в этом графе висячую вершину  $A$ , пусть она соединяется с вершиной  $B$ . Уберем

вершину  $A$  и рассмотрим разбиение многоугольника на треугольники, которое существует по предположению индукции. У вершины  $B$  осталось не больше двух соседей, значит, в этом разбиении ей соответствует треугольник, хотя бы одна из сторон которого является стороной многоугольника. Добавим к этой стороне снаружи треугольник так, чтобы многоугольник остался выпуклым, и поставим этот треугольник в соответствие вершине  $A$ . Получаем ответ

$$t = \left[ \frac{N + M - 1}{2M - 1} \right] = \left[ \frac{n + m - 5}{2m - 5} \right].$$

В пункте а) ответ  $\left[ \frac{n-1}{3} \right]$ .

### Калейдоскоп «Кванта»

#### Вопросы и задачи

1. В обоих случаях след будет иметь вид прямой, составляющей угол  $\alpha = \arctg \frac{u}{v}$  с направлением движения доски, но в случае б) она может не доходить до края доски. Сила трения направлена против вектора скорости мела относительно доски, она не может изменить направление его движения и лишь уменьшает его скорость.
2. Середина отрезка между пешеходами будет двигаться со скоростью, равной векторной полусумме скоростей путников, т.е. равномерно по прямой.
3. В обоих случаях по прямой (рис. 10).

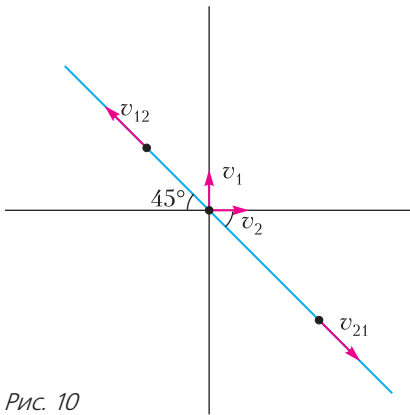


Рис. 10

4. Нет, не могут. При движении по криволинейной траектории ускорение имеет нормальную, т.е. перпендикулярную скорости, составляющую.
5. Точки движутся по циклоиде (рис. 11). Ускорение движущейся точки направлено к центру катящегося колеса и равно  $\frac{v_0^2}{R}$ . В вершине траектории скорость точки равна  $2v_0$ , ускорение

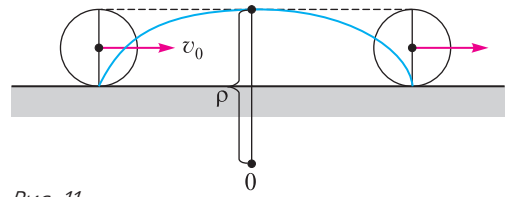


Рис. 11

нормальное и равно  $\frac{2v_0^2}{\rho}$ , где  $\rho$  – радиус кривизны. Отсюда  $\rho = 4R$ .

6. См. рис. 12, где точка  $C$  – центр масс системы,  $\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_1}{m_2} = 2$ .

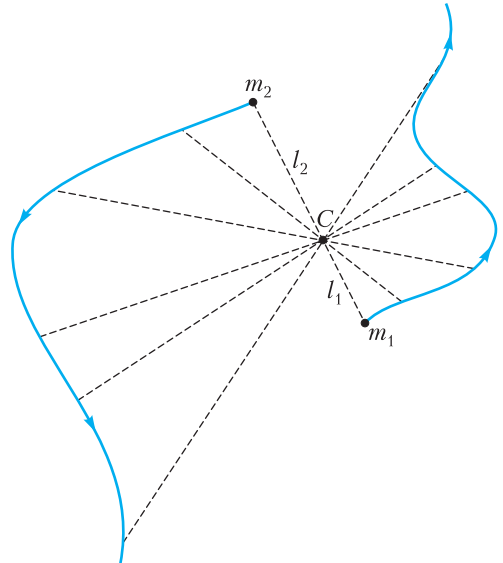


Рис. 12

7. В центральном поле, каким является поле тяготения Земли, тело, брошенное со скоростью, меньшей первой космической, будет двигаться по эллипсу, один из фокусов которого совпадает с центром планеты. Однако при небольших высотах бросания, когда гравитационное поле вблизи поверхности Земли можно считать однородным, траекторией тела будет парабола, пренебрежимо мало отличающаяся от эллипса.
8. Этот спутник – спутник Земли Луна. Ее орбита в гелиоцентрической системе координат близка к эллипсу и во всех своих точках обращена вогнутостью к Солнцу.
9. Да, могут, если космический аппарат: а) движется с работающими двигателями; б) падает с выключенными двигателями по направлению вектора напряженности гравитационного поля.
10. Нет, не верно. Направление касательной к линии напряженности совпадает с направлением

силы, действующей на частицу, а значит, с направлением ее ускорения. Траектория же движения – это линия, касательная к которой совпадает с направлением скорости частицы.

11. Условие движения по прямой в скрещенных полях:  $v = \frac{E}{B}$ , т.е. скорость частиц не зависит от их заряда. Тогда  $K_e = \frac{m_e v^2}{2}$  и  $K_p = \frac{m_p v^2}{2}$ , откуда  $K_p = K_e \frac{m_p}{m_e}$ .

**Микроопыт**

Движение с разной угловой скоростью ведущих колес обеспечивает установленное в их мосте специальное устройство – дифференциал. Колеса, не имеющие привода от двигателя, могут вращаться независимо друг от друга с различной угловой скоростью, так как они установлены на подшипниках.

**«Легкое решение одной трудной геометрической задачи»**

1. *Указание.* Используйте стандартные «подпрограммы» построения циркулем и линейкой, выдающие по заданным отрезкам  $a, b, c$  отрезки  $a + b, a - b, ab/c$ , а также  $\sqrt{ab}, \sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 - b^2}$ .

2. *Указание.* По  $R$  и  $r$  определяется  $OI$ ; в семействе Понселе треугольников с данными  $R$  и  $r$ , в силу соображений непрерывности, достаточно указать треугольники, у которых  $p$  меньше и больше нужного значения. Достаточно взять равнобедренные треугольники семейства Понселе (можно доказать, что из всего семейства Понселе именно на равнобедренных треугольниках достигаются минимальное и максимальное значения периметра).

3. *Указание.* Воспользуйтесь стандартной алгебраической процедурой поиска всех рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.

4. а) Нет.

*Указание.* Сведите вопрос к рассмотренной задаче восстановления по точкам  $H, I, O$ .

б) Да.

**Национальный исследовательский университет «МИЭТ»**

**Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»**

1. На рисунке 13 показаны горизонтальная  $v_0$  и вертикальная  $v_1 = gt$  составляющие скорости камня через время  $t$  после броска. Камень удаляется от точки  $B$ , если  $v_0 \cos \alpha - v_1 \sin \alpha > 0$ . Для угла  $\alpha$

можно записать:  $\operatorname{tg} \alpha = y/x$ , где  $y = h - gt^2/2$ ,  $x = v_0 t$ . Подставляя эти выражения в неравенство, получим

$$\frac{v_0^2}{g} > h - \frac{gt^2}{2}.$$

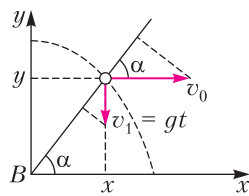


Рис. 13

Это неравенство выполняется в любой момент времени, если  $v_0 > \sqrt{gh} = 8 \text{ м/с}$ .

2.  $h = R \frac{\delta(2-\delta)}{(1-\delta)^2} \approx 1501 \text{ км}$  (здесь  $\delta = 0,1$ ).

3. Обозначим:  $m$  – масса шарика,  $M$  – масса клина,  $v_0$  – скорость шарика непосредственно перед ударом,  $v$  – его скорость сразу после удара,  $V$  – скорость клина после удара. В горизонтальном направлении на систему «шарик-клин» внешние силы не действуют, поэтому проекция импульса системы на горизонтальную ось сохраняется:

$$mv_0 - MV = 0.$$

При упругом ударе сохраняется также механическая энергия системы:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Так как нет трения, то при ударе не изменяется составляющая импульса шарика, касательная к наклонной плоскости клина:

$$mv_0 \cos \alpha = mv \sin \alpha.$$

Из этих уравнений после преобразований получим ответ:

$$\frac{M}{m} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} \approx 3,4.$$

4.  $p = \left( N + \frac{m}{M} N_A \right) \frac{kT}{V} \approx 64,2 \cdot 10^3 \text{ Па}$ .

5.  $\Delta T = \frac{2}{3} \cdot 60 \text{ }^\circ\text{C} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ .

6. Пронумеруем заряды, как показано на рисунке 14. Напряженность поля  $E_0$  в центре квадрата определяется разноименными зарядами 2, 4 и

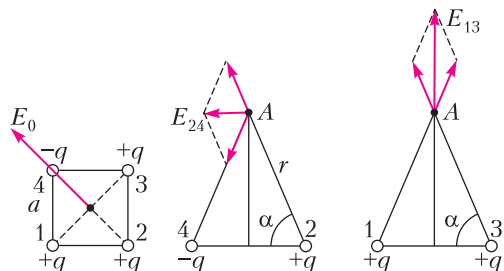


Рис. 14

равна  $E_0 = 4kq/a^2$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности в законе Кулона. В точке  $A$  эти заряды создают поле, вектор напряженности которого параллелен плоскости квадрата, а его модуль равен  $E_{24} = (2kq/r^2)\cos\alpha$ . Положительные заряды 1 и 3 создают в точке  $A$  поле, вектор напряженности которого перпендикулярен плоскости квадрата, а его модуль равен  $E_{13} = (2kq/r^2)\sin\alpha$ . Модуль вектора напряженности поля всех четырех зарядов в точке  $A$  равен

$$E = \sqrt{E_{24}^2 + E_{13}^2} = \frac{2kq}{r^2} = \frac{E_0}{8} = 1000 \text{ В/м.}$$

7. Через идеальный вольтметр ток не течет, поэтому два нижних резистора включены последовательно и напряжение на каждом из них равно  $U_0/2$ . Верхний резистор включен последовательно с амперметром, напряжение на нем равно  $IR$ , где  $I$  – ток через амперметр. Это напряжение равно сумме напряжений на вольтметре и на левом нижнем резисторе:  $IR = U + U_0/2$ . Отсюда

$$I = \left( \frac{U_0}{2} + U \right) \frac{1}{R} = 0,1 \text{ А.}$$

8. Учитывая, что сопротивление  $R$  контура равно нулю, из законов Ома и электромагнитной индукции получим  $-(\Delta\Phi/\Delta t) = iR = 0$ . Следовательно, изменение магнитного потока  $\Delta\Phi$  через сверхпроводящий контур равно нулю:

$$\Delta\Phi = L(i - i_0) + Bxl = 0,$$

где  $i$  – ток в контуре,  $x$  – смещение перемычки в момент времени  $t$ . Запишем второй закон Ньютона для перемычки:

$$ma_x = iBl$$

и подставим в него ток, выраженный из первого уравнения:

$$ma_x = -Bl \left( \frac{Blx}{L} - i_0 \right),$$

где  $a_x$  – ускорение перемычки,  $m$  – ее масса. Во время колебаний скорость максимальна при прохождении положения равновесия, когда ускорение равно нулю:

$$\frac{Blx}{L} - i_0 = 0.$$

Найденное отсюда смещение  $x = \frac{Li_0}{Bl} = 2$  см и есть амплитуда колебаний, перемычки.

### Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

1.  $\Delta r = \frac{\Delta h}{\sin\alpha} = 10 \text{ м.}$

2. 1)  $\mu = \frac{\sqrt{(F_1 + F_2)^2 + F_3^2}}{mg} = 0,5;$  2)  $\frac{a}{b} = \frac{F_3}{F_1 - F_2} = 1,5.$

3. При коротком ударе работа сил трения практически не изменяет кинетические энергии бруска и тележки. Учитывая также, что удар абсолютно упругий, приходим к выводу, что за время удара скорость бруска изменила направление на противоположное, а по величине не изменилась. Скорость тележки за время удара также не изменилась. Запишем закон сохранения импульса:

$$mv_0 - Mv_0 = (m + M)v$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{(m + M)v_0^2}{2} = \frac{(m + M)v^2}{2} + Q.$$

Отсюда находим

1)  $v = \frac{(m - M)v_0}{M + m} = 0,4 \text{ м/с;}$  2)  $Q = \frac{2mMv_0^2}{M + m} = 0,96 \text{ Дж.}$

4. В 8 раз.

5.  $A_{\text{внеш}} = \frac{3}{2} p_1 h S (n - 1) = 4,5 \text{ Дж.}$

11 класс

1.  $\sin\alpha = \frac{\Delta h}{\Delta r} = \frac{1}{2}, \alpha = 30^\circ.$

2. 1)  $v = \frac{(M - m)v_0}{M + m} = 1 \text{ м/с;}$  2)  $Q = \frac{2mMv_0^2}{M + m} = 0,6 \text{ Дж.}$

3. Из рисунка 15 следует, что заряды  $q_1$  и  $q_2$  имеют противоположные знаки. Так как вектор напряженности параллелен прямой  $AB$ , то про-

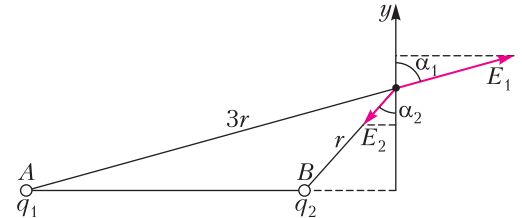


Рис. 15

екция вектора напряженности  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  на ось  $y$  равна нулю:  $E_1 \cos\alpha_1 - E_2 \cos\alpha_2 = 0$ , где  $E_1 = k|q_1|/(3r)^2$  и  $E_2 = k|q_2|/r^2$ . Рассматривая два прямоугольных треугольника с гипотенузам  $3r$  и  $r$ , запишем  $3r \cos\alpha_1 = r \cos\alpha_2$ . После простых преобразований получим ответ:

$$\frac{q_1}{q_2} = - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 = -27.$$

4.  $I_m = \frac{U_m T}{2\pi L} \approx 0,64 \text{ мА,}$  где  $T = 4 \text{ мкс, } U_m = 1 \text{ В.}$

5. 1)  $\Delta T = \frac{2}{3} T_1 \frac{A}{p_1 S h} = 200 \text{ К;}$

2)  $F = p_1 S \left( 1 + \frac{2A}{3p_1 S h} \right)^{5/2} = p_1 S \left( \frac{5}{3} \right)^{5/2} \approx 35,9 \text{ Н.}$



**Национальная технологическая олимпиада школьников**

8–9 классы

1.  $s = 600$  м,  $T = 5$  мин.
- 2)  $v_b = 2v = 6$  м/с; 2)  $v_r = v\sqrt{2} \approx 4,2$  м/с;
- 3)  $v_{cp} = 4v/\pi \approx 3,8$  м/с.
3. 1)  $x_{цм} = \frac{a\sqrt{2}}{12} \approx 14,1$  см; 2)  $x_m = \frac{a}{3} = 40$  см.
4. В 2 раза.
5. 1) 4 м/с; 2) 4 м/с, вниз; 3) 4 м/с, вверх.

10–11 классы

1. По графику определяем начальную высоту тела над дальномером:  $h = 20$  м и получаем ответ на первый вопрос:  $t = \sqrt{2h/g} = 2$  с. По графику определяем расстояние  $r = 16$  м от дальнера до тела в момент  $t = 2$  с. Это расстояние равно горизонтальной дальности полета тела:  $r = l = v_0 t$ . Из этой формулы находим начальную скорость тела:  $v_0 = l/t = 8$  м.

2. 1)  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{\mu} = 5$ ; 2)  $x = l\mu \operatorname{tg} \alpha \approx 0,35$  см.

3.  $\frac{M}{m} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx 4,3$ .

4. 1) 4; 2) 200 Дж.

5. В начальный момент, когда шарики отпустили, их скорости равны нулю. Поскольку силы электрического взаимодействия неподвижных точечных зарядов удовлетворяют третьему закону Ньютона, векторная сумма всех сил электрического взаимодействия зарядов равна нулю:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + q\vec{E} = 0$ , где  $\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$  и  $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$  – силы, действующие на первый и второй шарики со стороны двух других зарядов (рис. 16). Так как ускорения шариков взаимно перпендикулярны, то

$$(ma_1)^2 + (ma_2)^2 = (qE)^2, \quad m = \frac{qE}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0,2 \text{ г.}$$

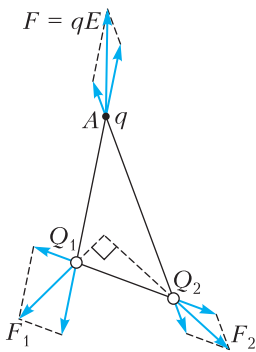


Рис. 16

**Региональный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике**

(см. «Квант» № 5–6)

7 класс

1. Комнаты в квартирах обычно имеют площадь, не превышающую нескольких десятков квадратных метров. Поэтому можно предположить, что площадь измерялась в  $\text{см}^2$ . Время, скорее всего, измерялось в минутах. Ширина пылесоса должна иметь значение порядка нескольких десятков сантиметров. Величины, задействованные в задаче, связаны между собой формулой  $v = \frac{2S}{dt}$ , где  $S$  – площадь комнаты,  $d$  – ширина пылесоса, а  $t$  – время уборки. Попробуем подставить в формулу наши значения для площади и времени, в качестве ширины возьмем, например, 20 см и определим, в каких единицах измерения скорость будет иметь порядок сотен:

$$v = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{20 \text{ см} \cdot 30 \text{ мин}} = 1250 \text{ см/мин} = \frac{1250 \cdot 0,01 \text{ м}}{\frac{1}{60} \text{ ч}} = 750 \text{ м/ч} = 75000 \text{ см/ч} = 125000 \text{ мм/мин.}$$

Таким образом, очень вероятно, что скорость посчитана в см/ч. Проверим это предположение, посчитав ширину пылесоса:

$$d = \frac{3S}{vt} = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{50000 \text{ см/ч} \cdot 30 \text{ мин}} = \frac{3 \cdot 25 \text{ м}^2}{500 \text{ м/ч} \cdot 0,5 \text{ ч}} = 0,3 \text{ м} = 30 \text{ см.}$$

Полученное значение ширины совпадает с ожиданиями; значит, наши предположения были верны.

2. Обозначим длину одной ступеньки эскалатора  $l_0$ , а число ступенек эскалатора  $N_0$ . Время движения человека, стоящего на эскалаторе,  $t_{ст} = \frac{N_0 l_0}{u}$ . Время движения человека, идущего по эскалатору  $t_{ид} = \frac{N_0 l_0}{u + v}$ . В системе отсчета эскалатора относительно стоящего человека проходит колонна людей со скоростью  $v$ , длина этой колонны  $vt_{ст} = \frac{v}{u} N_0 l_0$ , а значит, людей в этой колонне

$$N_1 = \frac{v}{u} N_0.$$

В системе отсчета человека, идущего по эскалатору, во встречном к нему направлении идет колонна людей со скоростью  $v$ , длина этой ко-

лонны  $vt_{ид} = \frac{v}{v+u} N_0 l_0$ , а значит, людей в этой колонне

$$N_2 = \frac{v}{v+u} N_0.$$

Из свойств дробей получаем, что  $N_2 < N_1$ , т.е.  $N_1$  больше. Из выражений для  $N_1$  и  $N_2$  следует, что  $N_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2}$ . Людей на эскалаторе в два раза больше, чем ступенек, поэтому

$$N = 2N_0 = \frac{2N_1 N_2}{N_1 - N_2}.$$

**3.** Темп бега – величина, обратная к скорости:  $T = \frac{1}{v}$ . Поэтому чем меньше темп бега, тем больше скорость. Минимальный темп бега 3 мин/км, что соответствует скорости 20 км/ч. Максимальный темп бега 6 мин/км, что соответствует скорости 10 км/ч.

При движении с постоянной скоростью  $v$  время движения на участке  $s$  равно  $t = \frac{s}{v} = sT$ , поэтому время движения на каком-то участке пропорционально площади под графиком. Из графика видно, что минимальное время одного километра было на участке с третьего по четвертый километры и оно равно 3,5 мин. Минимальное время одного километра – на участке с третьего по четвертый километры и равно 3,5 мин. Минимальное время на участке длиной 5 км – с первого по шестой километры и равно 21,5 мин.

**4.** Между снежками, насыпанными в кадушку, существуют пустоты. Так как  $m_2 = 6$  кг плотно утрамбованного снега занимают всю кадушку, то  $m_1 = 4$  кг снега такой же плотности в снежках имеют объем  $\frac{2V}{3}$ , т.е. 8 литров. Следовательно, на пустоты между снежками приходится объем  $\frac{V}{3} = 4$  литра. После засыпания солью пустот между снежками останутся пустоты между крупинками соли, но объем пустот станет меньше. Зная, что килограммовая пачка соли имеет объем  $V_{п} = 18 \cdot 10 \cdot 6 \text{ см}^3 = 1080 \text{ см}^3$  и массу  $m_{п} = 1$  кг, найдем насыпную плотность соли:

$$\rho_{нас} = \frac{1000 \text{ г}}{1080 \text{ см}^3} \approx 0,93 \text{ г/см}^3 = 930 \text{ кг/м}^3$$

и массу соли, насыпанной в кадушку:

$$m_c = \rho_{нас} \frac{V}{3} = 3,7 \text{ кг}.$$

Объем самой соли равен

$$V_c = \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{3,7 \text{ кг}}{2150 \text{ кг/м}^3} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1,7 \text{ л}.$$

Объем пустот между снежками был равен 4 л, соль имеет чистый объем 1,7 л, поэтому объем пустот между крупинками равен 2,3 л. По условию задачи Баба Яга полностью заполняет кадушку водой, поэтому объем воды совпадает с объемом пустот. Объем соленой воды складывается из объема воды 4 л, полученной после таяния снега, объема соли 1,7 л и объема налитой воды 2,3 л. Поэтому

$$V_b = 4 \text{ л} + 1,7 \text{ л} + 2,3 \text{ л} = 8 \text{ л}.$$

Масса соленой воды  $M$  складывается из 4 кг воды, полученной после таяния снега, массы соли 3,7 кг и массы налитой воды 2,3 кг:

$$M = 4 \text{ кг} + 3,7 \text{ кг} + 2,3 \text{ кг} = 10 \text{ кг}.$$

Плотность соленой воды в кадушке равна

$$\rho_k = \frac{M}{V_b} = \frac{10 \text{ кг}}{8 \text{ л}} = 1,25 \text{ г/л} = 1250 \text{ кг/м}^3.$$

### 8 класс

**1.** Обозначим скорость реки через  $u$ , а скорости катера и теплохода в системе отсчета реки через  $v_k$  и  $v_t$  соответственно. Запишем уравнения движения тел в системе отсчета земли:

$$x_{п} = ut,$$

$$x_k = (v_k + u)t \text{ при } t \in [0; 2\tau],$$

$$x_k = (v_k + u) \cdot 2\tau - (v_k - u)(t - 2\tau) \text{ при } t > 2\tau,$$

$$x_t = x_0 - (v_t - u)t.$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени  $\tau$ :

$$x_0 - (v_t - u)\tau = (v_k + u)\tau, \text{ откуда } x_0 = (v_k + v_t)\tau.$$

Условие второй встречи катера с плотом в момент времени  $t_1$ :

$$(v_k + u) \cdot 2\tau - (v_k - u)(t_1 - 2\tau) = ut_1, \text{ откуда } t_1 = 4\tau.$$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени  $6\tau$ . Условие этой встречи:

$$(v_k + u) \cdot 2\tau - (v_k - u)(6\tau - 2\tau) = x_0 - (v_t - u) \cdot 6\tau,$$

откуда получаем отношение скоростей катера и теплохода:

$$\frac{v_k}{v_t} = \frac{5}{3}.$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$ut_0 = x_0 - (v_t - u)t_0,$$

откуда находим момент встречи катера и теплохода:

$$t_0 = \tau \frac{v_k + v_t}{v_t} = \frac{8}{3} \tau.$$

2. Правило моментов относительно точки  $B$  после въезда первого автомобиля на мост:

$$NL = Mg \frac{L}{2} + mg(L - vt),$$

следовательно,

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg \frac{vt}{L}.$$

Правило моментов относительно точки  $B$  после въезда второго автомобиля на мост:

$$NL = Mg \frac{L}{2} + mg(L - vt) + mgv(t - \Delta t),$$

откуда

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg \frac{v\Delta t}{L}.$$

Правило моментов относительно точки  $B$  после съезда первого автомобиля с моста:

$$NL = Mg \frac{L}{2} + mgv(t - \Delta t),$$

$$N = \frac{1}{2}Mg - mg \frac{v\Delta t}{L} + mg \frac{vt}{L}.$$

После того, как второй автомобиль съедет с моста,

$$N = \frac{1}{2}Mg.$$

С учетом полученных выражений график зависимости  $N(t)$  состоит из 4 линейных участков (рис. 17): первый – убывающий с угловым коэффициентом  $-\frac{mgv}{L}$ , второй – горизонтальный, третий – возрастающий с угловым коэффициентом  $\frac{mgv}{L}$  и четвертый – горизонтальный ( $N = \frac{1}{2}Mg$ ).

Заметим, что угловые коэффициенты на первом и третьем отрезках одинаковы по величине, но противоположны по знаку, т.е. эти отрезки симметричны. Анализируя точки на исходном графике, несложно прийти к выводу, что точки 1 и 2 относятся к первому отрезку, точка 3 – ко второму, а 4 – к третьему. Каждый из автомоби-

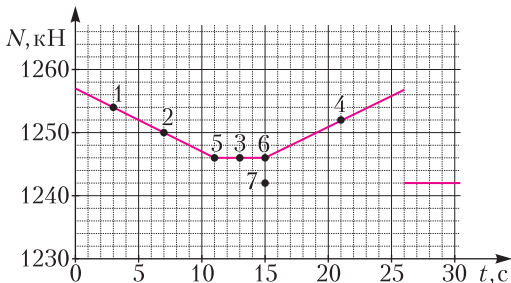


Рис. 17

лей проводит на мосту 15 секунд (точка 6 – момент съезда первого автомобиля), а значит, длина моста  $L = vt_6 = 75$  м. Время между въездами машин на мост  $\Delta t = 11$  с (начало горизонтального отрезка). Точка 7, в которую первая прямая пришла бы к 15-й секунде, дает возможность определить массу моста:  $M = 248,4$  т. Разность начального значения силы реакции опоры и  $N_7$  дает массу автомобиля:  $m = 1,5$  т.

3. Плотность  $\rho_2$  находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 gh + \rho_1 g \left( \frac{3}{2}H - h \right) = \rho_1 gH, \quad \rho_2 = \rho_1 \left( 1 - \frac{H}{2h} \right).$$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравняются и станут равны  $\frac{5H}{4}$ , т.е. в левом сосуде уровень опустится на  $\frac{H}{4}$ , а в правом поднимется на  $\frac{H}{4}$ . Следует также иметь в виду, что  $h$  всегда больше  $\frac{H}{2}$ . В зависимости от величины  $h$  в задаче возможны 2 случая.

1) Если  $h < H$ , то нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. Тогда масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gh + \rho_1 g \left( \frac{5H}{4} - h \right) = \rho_1 g \frac{5H}{4},$$

$$m = (\rho_1 - \rho_2)hS = \rho_1 \frac{H}{2}S.$$

2) В случае  $\frac{5H}{4} > h > H$  нижний уровень жидкости плотностью  $\rho_2$  в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как  $\rho_2 < \rho_1$ . Если считать от дна, жидкость плотностью  $\rho_1$  в левом сосуде доходит до уровня  $\frac{H}{4}$ , а столб жидкости плотностью  $\rho_2$  имеет высоту  $H$ . Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости плотностью  $\rho_1$  в правом сосуде теперь имеет высоту  $\left( \frac{9H}{4} - h \right)$ , а высота столба жидкости плотностью  $\rho_2$  равна  $(h - H)$ . Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gH + \rho_1 g \frac{H}{4} = \rho_1 g \left( \frac{9H}{4} - h \right) + \rho_2 g(h - H),$$

$$m = \rho_1 (2H - h)S + \rho_2 (h - 2H)S = \rho_1 \frac{H(2H - h)}{2h}S.$$

9 класс

1. Лифт преодолевает необходимую дистанцию в  $n$  этажей высотой  $l_0$  каждый за минимально возможное время  $t$ , если разгоняется с ускорением  $a_0$  до скорости  $v_0$ , далее движется с постоянной скоростью  $v_0$  в течение времени  $t - \frac{2v_0}{a_0}$  и

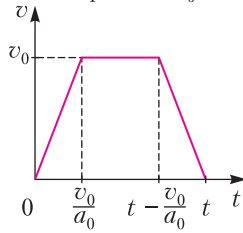


Рис. 18

тормозит до полной остановки за время  $\frac{v_0}{a_0}$ .

Нарисуем соответствующий график зависимости скорости лифта от времени (рис. 18). Площадь под ним пропорциональна пройденному пути:

$$nl_0 = \frac{t + \left(t - \frac{2v_0}{a_0}\right)}{2} v_0, \text{ откуда } t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}.$$

Однако эта формула верна лишь при  $t - \frac{2v_0}{a_0} > 0$ , т.е. когда лифт успевает достичь максимальной скорости  $v_0$ . Это условие можно переписать в виде  $n > \frac{v_0^2}{a_0 l_0}$ . Если лифт не успевает достичь максимальной скорости  $v_0$ , то оптимальной по времени становится следующая стратегия зависимости скорости от времени: необходимо поло-

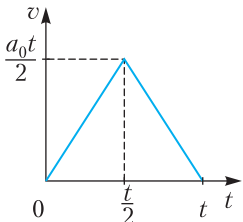


Рис. 19

вину времени ускоряться с ускорением  $a_0$  и половину времени замедляться с тем же по модулю ускорением. График зависимости скорости от времени представлен на рисунке 19. В этом случае пройденный путь

$$nl_0 = \frac{a_0 t}{2} t, \text{ откуда } t(n) = 2\sqrt{\frac{nl_0}{a_0}}.$$

По условию, обе точки принадлежат случаю  $t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ , поэтому  $t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ ,  $t_4 = \frac{4l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ . Тогда

$$t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} = \frac{t_2 + t_4}{2} = 6,5 \text{ с.}$$

Из приведенных расчетов следует, что при подъеме на один этаж лифт не достигает максимально

возможной скорости. Так что

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}} = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)} = 2\sqrt{3} \text{ с} \approx 3,5 \text{ с.}$$

3. Отметим, что нить не натянута до помещения льда в сосуд. Это означает, что центр масс системы «рычаг + сосуд» находится по горизонтали на уровне опоры, что позволяет в уравнениях моментов исключать соответствующие слагаемые. График имеет 4 участка. На первом, очевидно, лед нагревается. На втором идет плавление льда и вода начинает стекать с льдинки в сосуд, равномерно распределяясь по его дну. Однако заканчивается этот участок раньше, чем лед полностью успевает растаять, – в момент отрыва льдинки от дна, т.е. в конце утерянного участка оставшийся лед всплыл. Кстати, начало этого участка также не обязательно совпадает с моментом начала плавления, ведь вода может скапливаться в каких-то углублениях на льдинке и положение центра масс льда может оставаться какое-то время неизменным. Вообще, поведение на втором участке предсказать почти невозможно, поскольку процесс сильно зависит от формы куска льда, а также от того, как именно к нему будет подводиться тепло. На третьем участке в сосуде сначала тающий лед, плавающий на поверхности воды, а потом вода, нагревающаяся до температуры кипения. На четвертом участке вода уже достигла температуры кипения и испаряется. Изменение силы натяжения нити в начале связано с перераспределением веса содержимого по мере нагрева, а в конце – с изменением массы содержимого. Массу льда можно найти по третьему отрезку графика из правила моментов ( $x$  – длина  $\frac{1}{8}$  рычага):

$$T_3 \cdot 2x = mg \cdot 3x, T_3 = 3 \text{ Н}, m = 0,2 \text{ кг.}$$

Мощность нагрева легко посчитать по четвертому отрезку, зная массу, испарившуюся за известный промежуток времени. Хорошие точки на графике: (1600 с; 3 Н) и (3200 с; 1,8 Н). Из них получаем  $\Delta T = 1,2 \text{ Н}$ ,  $\Delta m = \frac{2\Delta T}{3g} = 0,08 \text{ кг}$ ,  $\Delta \tau = 1600 \text{ с}$ . Отсюда

$$P = \frac{L\Delta m}{\Delta \tau} = 115 \text{ Вт.}$$

Зная мощность, несложно посчитать начальную температуру льда:

$$t_0 = \frac{cm\Delta t_{\text{воды}} + \lambda m - P\tau_3}{c_{\text{льда}}m} \approx -81 \text{ }^\circ\text{C.}$$

4. Перерисуем электрическую схему (рис. 20). Приборы 3 и 4 соединены параллельно, а по условию нет двух вольтметров

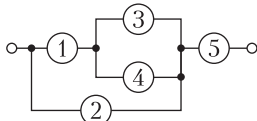


Рис. 20

или амперметров с одинаковыми показаниями. Поэтому один из приборов 3 и 4 должен быть вольтметром, а второй – амперметром. Давайте, для определенности, будем считать 3 амперметром, а 4 – вольтметром. Предположим, что прибор номер 1 – амперметр. Через него протекает ток, равный сумме токов через приборы 3 и 4. Тогда из двух амперметров 1 и 3 больший ток протекает через амперметр 1. Значит, через амперметр 1 протекает ток  $I_1 = 520$  мкА, а через амперметр 3 протекает ток  $I_3 = 200$  мкА. Соответственно, через вольтметр 4 протекает ток  $I_1 - I_3 = 320$  мкА. Амперметр 3 включен в схему параллельно вольтметру 4, значит, напряжение на амперметре 3 равно напряжению на вольтметре 4. Тогда внутреннее сопротивление амперметра  $R_A = \frac{U_4}{I_3}$ . Напряжение на амперметре 1 равно  $U_1 = I_1 R_A = \frac{U_4 I_1}{I_3}$ . Известно, что в схеме всего

2 амперметра. Если приборы 1 и 3 – амперметры, тогда прибор 2 должен быть вольтметром. Он показывает сумму напряжений на амперметрах 1 и 3, равную  $U_1 + U_4 = \frac{U_4 (I_1 + I_3)}{I_3} = 3,6 U_4$ .

Но, по условию задачи, в схеме нет двух вольтметров, показания которых различаются в 3,6 раз. Следовательно, прибор 1 – вольтметр. Через вольтметр 1 течет ток, равный сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. Поэтому напряжение на вольтметре 1 больше, чем на вольтметре 4. Если 2 – вольтметр, то напряжение на нем равно сумме напряжений на 1 и 4. Если 5 – вольтметр, то ток через него равен сумме токов через 1 и 2, значит, напряжение на 5 больше, чем напряжение на 1 и 4. В любом случае получаем, что самое маленькое напряжение из всех вольтметров (равное 2 В) показывает вольтметр 4, а вольтметр 1 показывает среднее значение  $U_1 = 12$  В. Напряжение на приборе 2 равно сумме напряжений на вольтметрах 1 и 4. Тогда  $U_2 = U_1 + U_4 = 14$  В. Если предположить, что прибор 2 – амперметр, то сила тока через него должна быть равна  $\frac{U_2}{R_A} = \frac{U_2 I_3}{U_4} = 7 I_3$ . Но по условию показания двух амперметров отличаются в

$\frac{520}{200} = 2,6$  раза. Следовательно, прибор 2 – вольт-

метр и его показания  $U_2 = 14$  В, а прибор 5 – амперметр. Итак, приборы 1, 2 и 4 – вольтметры, 3 и 5 – амперметры. Теперь найдем внутренние сопротивления приборов. Сила тока через амперметр 5 равна сумме токов через амперметр 3, вольтметр 4 и вольтметр 2. Следовательно, сила тока в амперметре 3 меньше, чем в амперметре 5,  $I_3 = 200$  мкА,  $I_5 = 520$  мкА. Тогда сопротивление амперметров  $R_A = \frac{U_4}{I_3} = 10$  кОм. Сила тока через вольтметр 1 равна сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4:  $I_1 = \frac{U_1}{R_V} = I_3 + \frac{U_4}{R_V}$ , откуда сопротивление вольтметров равно  $R_V = \frac{U_1 - U_4}{I_3} = 50$  кОм.

5. Проведем две прямые, проходящие через точку  $L$  и точки преломления верхнего луча

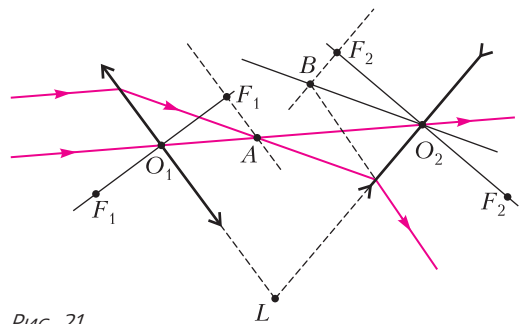


Рис. 21

(рис. 21). Таким образом восстановим положения линз. Поскольку нижний луч не преломляется, он должен проходить через оптические центры обеих линз  $O_1$  и  $O_2$ , следовательно, левая линза является собирающей, а правая – рассеивающей. Параллельные лучи после прохождения через собирающую линзу сходятся в фокальной плоскости – точка  $A$ . Проведем прямую, параллельную левой линзе и проходящую через точку  $A$ , затем опустим из оптического центра  $O_1$  собирающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение заднего фокуса  $F_1$  левой линзы, для нахождения переднего фокуса  $F_1$  отложим такое же расстояние от оптического центра  $O_1$ . Для нахождения фокусов рассеивающей линзы выполним дополнительные построения – проведем через оптический центр линзы  $O_2$  прямую, параллельную падающему лучу. Точка пересечения этой прямой и продолжения преломленного луча принадлежит фокальной плоскости рассеивающей линзы, это точка  $B$ . Проведем прямую, параллельную правой линзе и проходящую через точку  $B$ , затем опустим из оптического центра  $O_2$



рассеивающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение переднего фокуса  $F_2$  правой линзы, для нахождения заднего фокуса  $F_2$  отложим такое же расстояние от оптического центра  $O_2$ .

### 10 класс

1. Пусть ускорение свободного падения равняется  $g$ , а выстрел производится под углом  $\alpha$  к вертикали со скоростью  $v_0(\alpha)$ . Тогда

$$a_n = \omega v_0(\alpha) = g_n = g \sin \alpha, \quad v_0(\alpha) = \frac{g \sin \alpha}{\omega}.$$

Введем координатную ось  $y'$ , направленную перпендикулярно поверхности горки. Проекция ускорения снаряда на эту ось равна  $g_{y'} = -g \cos \varphi$ . Тогда для времени полета снаряда имеем

$$t = -\frac{2v_{0y'}}{g_{y'}} = \frac{2v_{0y'}}{g \cos \varphi}.$$

Максимально возможному времени полета снаряда соответствует максимальное значение  $v_{0y'}$ . Введем систему координат  $xy$  с началом в месте расположения пушки, ось  $x$  направим вправо, а ось  $y$  вертикально вверх. Тогда

$$v_0 = \frac{g \sin \alpha}{\omega} = \frac{g}{\omega} \frac{v_{0x}}{v_0}, \quad v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{g v_{0x}}{\omega},$$

откуда

$$\left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$$

Таким образом, геометрическое место точек конца вектора скорости  $\vec{v}_0$  представляет собой окружность (рис. 22). Из геометрии рисунка следует, что максимальное время полета соответствует максимально возможному значению  $v_{0y'}$ , которое достигается, когда конец вектора скорости лежит на перпендикуляре, проведенном к направлению поверхности горки из центра окружности. Получаем

$$v_{0y'(\max)} = \frac{g(1 - \sin \varphi)}{2\omega}, \quad \text{откуда } t_{\max} = \frac{1 - \sin \varphi}{\omega \cos \varphi} \approx 1,15 \text{ с.}$$

2. Определим скорость барабана после соударения с шайбой 1. Поскольку трения между шайбами и барабаном нет, то все их удары центральные, движение всех тел остается поступательным, а проекции скоростей тел на ось, перпендикулярную линии центров, остаются постоянными в процессе соударения. Введем вдоль линии

центров ось  $y$ , направленную от шайбы 1 к центру барабана. Пусть  $\alpha$  — угол между вектором скорости шайбы 1 и линией центров. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось  $y$  и закон сохранения энергии:

$$mv_0 \cos \alpha = Mv_{M1} + mv_{1y},$$

$$\begin{aligned} \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} &= \\ &= \frac{mv_{1y}^2}{2} + \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} + \frac{Mv_{M1}^2}{2}, \end{aligned}$$

откуда находим

$$v_{M1} = v_0 \cos \alpha + v_{1y} = 2v_0 \cos \alpha - \frac{Mv_{M1}}{m} = \frac{2mv_0 \cos \alpha}{m + M}.$$

Получим условие, при котором будет столкновение между шайбой 2 и барабаном. Если ввести ось  $z$ , направленную от шайбы 2 к центру барабана, то условие столкновения будет заключаться в том, что проекция скорости барабана относительно шайбы 2 на ось  $z$  будет отрицательной, т.е.

$$\begin{aligned} v_{z(\text{отн})} &= -v_{M1} \cos 2\alpha - v_0 \cos \alpha = \\ &= -v_0 \cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{2m \cos 2\alpha}{m + M}\right) < 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $\cos \alpha > 0$ , это условие можно записать следующим образом:

$$1 + \frac{2m \cos 2\alpha}{m + M} = 1 + \frac{2m(2\cos^2 \alpha - 1)}{m + M} > 0,$$

$$\cos \alpha = \frac{s}{2R} > \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{M}{m}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{или } s > \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Данное условие не выполнено при  $s_1 = R/2$ , поэтому столкновения между барабаном и шайбой 2 не будет, а значит,  $v_{M1} = u_1$ , или

$$u_1 = \frac{mv_0}{m + M} \frac{s_1}{R} = \frac{v_0}{3}, \quad v_0 = 3u_1.$$

При  $s_2 = R$  столкновение между барабаном и шайбой 2 будет, при этом  $\alpha_2 = 60^\circ$ . В системе отсчета, движущейся со скоростью  $\vec{v}_{M1}$ , соударение сводится к рассмотренному ранее. В данной системе отсчета проекция скорости шайбы 2 на ось  $z$

$$v_{2z} = v_0 \cos \alpha + v_{M1} \cos 2\alpha = \frac{v_0}{2} + \frac{2v_0}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{v_0}{6}.$$

Скорость барабана сразу после соударения

$$v_{M2} = \frac{2mv_{2y'}}{m + M} = \frac{2v_0}{9}.$$

Обратим внимание, что проекция этой скорости на ось  $y$  является положительной, а значит,

повторного столкновения барабана с шайбой 1 не будет. Для скорости  $u_2$  имеем

$$u_2 = \sqrt{v_{M1}^2 + v_{M2}^2 - 2v_{M1}v_{M2} \cos 2\alpha},$$

$$u_2 = \frac{2\sqrt{13}u_1}{3}.$$

**3.** После заполнения водой второго слева вертикального участка вода начнет стекать в третье колено, заполнит перемычку вниз между третьим и четвертым и «отсечет» воздух в третьем колене от атмосферного. Образуется воздушная «пробка», давление  $p$  внутри которой по мере заполнения четвертого колена будет возрастать. Запишем условия равновесия (равенства давлений) для первого и второго вертикальных участков трубки (рис. 23):

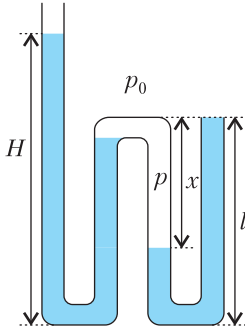


Рис. 23

$$p_0 + \rho gH = p + \rho gl,$$

для третьего и четвертого:

$$p_0 + \rho gl = p + \rho g(l - x).$$

Отсюда получим

$$H - l = x.$$

Поскольку воздух внутри трубки начал сжиматься от объема, соответствующего одному вертикальному участку, то по закону Бойля-Мариотта

$$p_0 l S = p x S.$$

Из последних двух равенств находим

$$p = \frac{p_0 l}{H - l}.$$

Подставляем это в условие равновесия для первых двух участков трубки и получаем

$$p_0 + \rho gH = \frac{p_0 l}{H - l} + \rho gl,$$

или

$$\rho g(H - l)^2 + p_0(H - l) - p_0 l = 0.$$

Обозначив для удобства  $p_0/g = l_0$ , решаем квадратное уравнение, оставляя только имеющий физический смысл положительный корень:

$$H = l + \frac{1}{2}(\sqrt{l_0^2 + 4l_0 l} - l_0).$$

Объем налитой воды можно определить по суммарной длине трубы, занятой водой:

$$V = S(H + 3l - x) = 4Sl.$$

11 класс

**1.** Пусть  $v_0$  – скорость досок  $a$  и  $b$  до соударения с доской  $c$ , а  $m$  – масса каждой из досок. Поскольку трения между досками  $a$  и  $b$  нет, а доски  $b$  и  $c$  при ударе скрепляются, то сразу после удара скорость доски  $a$  равна  $v_0$ , а скорость досок  $b$  и  $c$  равна  $v_0/2$  (из закона сохранения импульса). Введем ось  $x$  по направлению скорости  $v_0$ . Поскольку горизонтальная поверхность гладкая, центр масс системы движется с постоянной скоростью  $v_{цм} = 2v_0/3$ . В момент удара центр масс системы опережает центр доски  $a$  на величину  $L/3$ , а к моменту, когда доска  $a$  целиком оказалась на доске  $c$ , центр масс системы отстает от центра доски на ту же величину  $L/3$ . Тогда для перемещения доски  $a$  получим

$$\Delta x = \Delta x_{цм} + \frac{2L}{3} = \frac{2(v_0 \tau + L)}{3},$$

где  $\tau$  – время движения доски  $a$  относительно досок  $b$  и  $c$ . Далее объединим доски  $b$  и  $c$  в одно тело массой  $2m$  и будем характеризовать его индексом 2. Доску  $a$  будем характеризовать индексом 1. Пусть  $\vec{F}$  – сила трения, действующая на первое тело со стороны второго, а  $x$  – их относительное перемещение после удара. Отметим, что трение происходит только в области перекрытия досок  $a$  и  $c$ . Величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе нормальной реакции шероховатой части поверхности опоры, поэтому  $F_x = -\mu mgx/L$ . Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}, \quad 2m\vec{a}_2 = -\vec{F},$$

откуда

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_{отн} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}}{2m} = \frac{3\vec{F}}{2m}.$$

Тогда получим уравнение движения для переменной  $x$ :

$$x'' = -\frac{3\mu g x}{2L}.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega = \sqrt{3\mu g/(2L)}$ . Его общее решение имеет вид

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Определим  $A$  и  $\varphi_0$  из начальных условий:

$$\begin{aligned} x(0) &= A \sin \varphi_0 = 0, & \varphi_0 &= 0, \\ x'(0) &= \frac{v_0}{2} = \omega A \cos \varphi_0, & \text{или} & \quad A = \frac{v_0}{2\omega}. \end{aligned}$$

Величина  $A$  имеет смысл амплитуды колебаний, которая также равна  $L$ , поскольку относительное движение досок прекращается, когда доска  $a$  целиком оказывается на доске  $c$ . Таким образом,  $\frac{v_0}{2\omega} = L$ . Время движения  $\tau$  является четвертью периода гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega_0$ , откуда  $\tau = \frac{\pi}{2\omega}$ . Тогда для перемещения центра масс имеем

$$\Delta x_{\text{цм}} = \frac{2v_0\tau}{3} = \frac{2\pi L}{3}$$

и окончательно находим

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2L}{3} = \frac{2(\pi+1)L}{3}.$$

2. Пусть  $V$  – объем сосуда,  $v_0$  – начальное количество вещества в сосуде, а  $\Delta v$  – количество вещества, переместившееся в сосуд из атмосферы. Запишем уравнения состояния газа в сосуде до и после закачивания:

$$p_0V = v_0RT_0, \quad p_1V = (v_0 + \Delta v)RT_1.$$

Пусть давление воздуха внутри насоса равняется  $p_b$ , а  $dV_b$  – объем, занимаемый порцией воздуха в количестве вещества  $dv$  внутри насоса. При закачивании указанной порции воздуха в сосуд насос совершает механическую работу  $\delta A_{\text{н}} = p_b dV_b$ . Но из уравнения Менделеева–Клапейрона  $p_b dV_b = RT_0 dv$ , поэтому  $\delta A_{\text{н}} = RT_0 dv$ . Таким образом, полная механическая работа насоса составляет

$$A_{\text{н}} = \Delta v RT_0.$$

Запишем первое начало термодинамики для системы, состоящей из изначально находившегося в сосуде газа и закаченного в него насосом:

$$A_{\text{н}} + U_0 + U_1 = U_{\text{к}}.$$

Здесь  $U_0 = v_0 C_V T_0$  – начальная внутренняя энергия воздуха, изначально находившегося в сосуде,  $U_1 = \Delta v C_V T_0$  – сумма внутренних энергий закачиваемого воздуха на этапе закачивания в сосуд, а  $U_{\text{к}} = (v_0 + \Delta v) C_V T_1$  – конечная внутренняя энергия рассматриваемой системы. Молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна  $C_V = 5R/2$ . Отсюда

$$\Delta v RT_0 + \frac{5v_0 RT_0}{2} + \frac{5\Delta v RT_0}{2} = \frac{5(v_0 + \Delta v) RT_1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{5v_0 + 7\Delta v}{5(v_0 + \Delta v)} = \frac{p_1}{p_0} \frac{v_0}{(v_0 + \Delta v)}, \quad \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{5}{7} \left( \frac{p_1}{p_0} - 1 \right).$$

Для отношения количеств вещества воздуха в сосуде после завершения процессов с насосом и

до их начала имеем

$$\frac{v_{\text{к}}}{v_0} = 1 + \frac{\Delta v}{v_0}, \quad \text{откуда} \quad \frac{v_{\text{к}}}{v_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$

Для отношения температур  $T_1/T_0$  имеем

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1 v_0}{p_0 v_{\text{к}}}, \quad \text{тогда} \quad T_1 = \frac{T_0}{\frac{2p_0}{7p_1} + \frac{5}{7}}.$$

3. Пусть  $\bar{T}$  – сила, действующая на нить в точке ее крепления, равная по модулю силе натяжения нити в данной точке. Тогда, поскольку система в равновесии,

$$\bar{T} + m\bar{g} + \lambda L \bar{E} = 0.$$

Введем систему координат  $xy$ , где ось  $x$  направлена горизонтально вправо, а ось  $y$  – вертикально вверх. Тогда из условия равновесия

$$E_y = \frac{mg}{\lambda L}, \quad E_x = \frac{T}{\lambda L}.$$

Свяжем силы натяжения нити  $T_0 = mg$  в точке крепления груза и  $T$  в точке крепления нити. Рассмотрим бесконечно малый элемент нити длиной  $dl$ . Условие его равновесия записывается следующим образом:

$$(\bar{T} + d\bar{T}) - \bar{T} + \bar{E}\lambda dl = 0.$$

Проецируя на направление касательной к нити, получим

$$dT + \lambda E_{\parallel} dl = 0.$$

Пусть касательная к нити образует угол  $\varphi$  с вертикалью. Тогда

$$E_{\parallel} = E \cos \varphi - E \sin \varphi,$$

откуда

$$dT + E_y \lambda dl \cos \varphi - E_x \lambda dl \sin \varphi = 0.$$

Но  $dl \cos \varphi = dy$ , а  $dl \sin \varphi = -dx$ , поэтому

$$dT + E_y \lambda dy + E_x \lambda dx = 0.$$

Суммируя, получим

$$T - T_0 = T - mg = -E_y \lambda (y - y_0) - E_x \lambda (x - x_0).$$

Так как  $y - y_0 = H$ , а  $x - x_0 = -s$ , имеем

$$T - mg = \lambda (E_x s - E_y H).$$

Но поскольку  $T = \lambda L E_x$ , то

$$\lambda L E_x - mg = \lambda (s E_x - H E_y) = \lambda s E_x - \lambda H \frac{mg}{\lambda L},$$

$$E_x = \frac{mg}{\lambda L} \frac{L - H}{L - s}.$$

Для напряженности электростатического поля получаем

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{mg}{\lambda L} \sqrt{1 + \left( \frac{L - H}{L - s} \right)^2}.$$

5. Если линза рассеивающая, то независимо от положения источника его изображение будет мнимым, расположенным между источником и оптическим центром линзы. После перемещения источника в точку, где ранее было расположено его изображение, новое изображение окажется снова между источником и оптическим центром линзы. Получится бесконечная цепочка изображений. Таким образом, три точки с указанным свойством в случае рассеивающей линзы существовать не могут. Значит, линза может быть только собирающей. Мнимое изображение в собирающей линзе всегда расположено дальше от линзы, чем источник, поэтому не может быть, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются мнимыми изображениями друг друга. Но, в соответствии с принципом обратимости хода световых лучей, при помещении источника в точку действительного изображения его новое изображение совпадает с предыдущим положением источника. Поэтому описанным в условии свойством три точки могут обладать только в том случае, если две из них являются действительными изображениями друг друга, а при помещении источника в третью он дает мнимое изображение в одной из точек этой пары. Пусть, например, собирающая линза расположена так, что точка  $A$  находится за ее фокальной плоскостью. Тогда изображение  $A$  будет действительным и располагаться по другую сторону от плоскости линзы. При перемещении источника в точку этого изображения новое изображение вернется в точку  $A$ . Оставшееся третье положение источника должно давать мнимое изображение в одной из первых двух точек. Значит, оно должно располагаться между этой точкой (своим изображением) и оптическим центром линзы  $O$  ближе фокальной плоскости линзы. В этом случае линза могла быть расположена двумя способами (рис. 24): а) оптический центр

линзы находится между точками  $B$  и  $C$ , причем источник в точке  $B$  дает мнимое изображение в точке  $A$ ; б) оптический центр линзы находится между точками  $A$  и  $B$ , причем источник в точке  $B$  дает мнимое изображение в точке  $C$ . Таким образом, оптический центр линзы мог располагаться как справа, так и слева от точки  $B$ . Если же источник сначала расположить между фокальной плоскостью и плоскостью линзы, то изображение будет получаться мнимым. При помещении источника в точку изображения новое изображение должно получиться действительным (по другую сторону плоскости линзы). И при перемещении источника в оставшуюся третью точку изображение окажется на месте, где источник располагался ранее. Этот вариант идентичен представленному ранее и отдельного рассмотрения не требует.

Рассмотрим только способ а) размещения линзы, так как способ б) аналогичен. Источник, расположенный в точке  $B$  на расстоянии меньше фокусного, дает мнимое изображение в точке  $A$ . При помещении источника в точку  $A$  возникает действительное изображение в точке  $C$ , при помещении источника в точку  $C$  дает действительное изображение в точке  $A$ . Обозначим расстояние между оптическим центром линзы и источником, угол между главной оптической осью линзы и прямой и фокусное расстояние линзы через  $d$ ,  $\alpha$  и  $F$  соответственно. Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке  $B$ :

$$\frac{1}{d \cos \alpha} - \frac{1}{(l+d) \cos \alpha} = \frac{1}{F}$$

и в точке  $A$ :

$$\frac{1}{(l+d) \cos \alpha} + \frac{1}{(l-d) \cos \alpha} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда находим  $d$  и  $\alpha$ . Расстояние между оптическим центром линзы и точкой  $B$  равно  $d = \frac{l}{3}$ ,  $\cos \alpha = \frac{9F}{4l}$ , или  $\alpha = \arccos \frac{9F}{4l}$ . Поскольку в условии сказано, что угол  $\alpha$  является малым, т.е.  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ , то  $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$ .

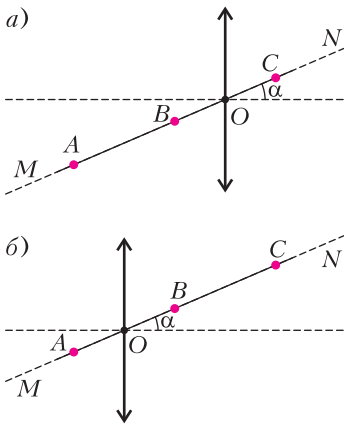


Рис. 24

**Санкт-Петербургский  
политехнический университет  
Петра Великого**  
(см. «Квант» № 5–6)

**Отборочный тур**

1. 4. 2. 7. 3. –41. 4. –13. 5. 135. 6. 5. 7. 4. 8. 6.  
9. 12. 10. –7.

**Заключительный тур**

1. 72.

Количество двузначных чисел, делящихся на 6, совпадает с числом целочисленных решений неравенства  $10 \leq 6k < 100$ . Тогда  $2 \leq k \leq 16$ , что дает 15 двузначных чисел, делящихся на 6. Рассматривая неравенство  $10 \leq 15k < 100$  и его следствие  $1 \leq k \leq 6$ , получаем 6 чисел, делящихся на 15, а  $10 \leq 30k < 100$  и  $1 \leq k \leq 3$  дает 3 числа, делящихся одновременно и на 6, и на 15. Значит,  $15 + 6 - 3 = 18$  – количество чисел делящихся на 6 или на 15. Вычитая это количество из количества двузначных чисел,  $90 - 18 = 72$ , получаем ответ на вопрос задачи.

2. На 700 метров.

Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  – суммарный путь на подъем, по горизонтальным участкам и на спуск соответственно при движении из  $A$  в  $B$ . Этот путь займет время  $t_{AB} = \frac{a}{4} + \frac{b}{6} + \frac{c}{7}$ . Обратный путь займет время  $t_{BA} = \frac{a}{4} + \frac{b}{6} + \frac{c}{4}$ . По условию  $t_{AB} - t_{BA} = \frac{9}{60}$ , следовательно,

$$a\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + b\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{20}.$$

Отсюда  $a - b = \frac{7}{5}$ . Поскольку синус уклона равен  $\frac{1}{2}$ , то единица пути на подъем или спуск дает прирост или соответственно убыль по высоте на половину единицы. Поэтому искомая разность высот равна  $\frac{a-b}{2} = 0,7$  километров.

3. 8.

Воспользовавшись формулами двойного угла  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  и  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ , запишем уравнение в виде

$$2 \sin \frac{\pi x}{12} \cos \frac{\pi x}{12} - 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\pi x}{12} = 0.$$

Следовательно,

$$\cos^2 \frac{\pi x}{12} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{12} - \sqrt{3} \right) = 0.$$

Тогда либо  $\cos \frac{\pi x}{12} = 0$  и  $x = 6 + 12m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , либо  $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{12} = \sqrt{3}$  и  $x = 4 + 12k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . По условию  $0 \leq 6 + 12m < 50$  и  $0 \leq 4 + 12k < 50$ , а значит,  $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{11}{3}$  и  $-\frac{1}{3} \leq k < \frac{23}{6}$ . С учетом целочисленности  $m$  и  $k$  получаем, что  $0 \leq m \leq 3$  и  $0 \leq k \leq 3$ .

В итоге имеем  $4 + 4 = 8$  решений.

4.  $\sqrt{3} + 1$ .

Обозначим сторону основания через  $a$ , а радиус вписанного шара через  $r$ . Тогда боковые стороны равны  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ . Поверхность пирамиды состоит из правильного треугольника площади  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  и трех

прямоугольных треугольных боковых граней площади  $\frac{a^2}{4}$  каждая. Площадь поверхности пирамиды равна  $S_{\text{пов}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} a^2$ , а ее объем равен  $V = \frac{1}{3} r S_{\text{пов}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{12} r a^2$ . С другой стороны, взяв

за основание боковую грань, найдем  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{12\sqrt{2}}$ , поскольку боковая сторона перпендикулярна плоскости двух других боковых граней, а значит, является высотой пирамиды. Приходим к выводу, что  $\frac{3 + \sqrt{3}}{12} r a^2 = \frac{a^3}{12\sqrt{2}}$ , следовательно,

$$a = r\sqrt{2} \cdot (3 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1 \text{ при } r = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

5.  $\sqrt{2}$ .

Наибольшее из чисел  $x$  и  $y$  не меньше  $\frac{x+y}{2}$ .

Следовательно, наибольшее из чисел  $x$ ,  $y$  и  $\frac{4}{x+y}$

не меньше наибольшего из чисел  $\frac{x+y}{2}$  и  $\frac{4}{x+y}$ .

Произведение последних двух чисел равно 2, значит, одно из этих чисел не меньше  $\sqrt{2}$ . Таким образом, доказано, что наибольшее из чисел  $x$ ,  $y$  и  $\frac{4}{x+y}$  не меньше  $\sqrt{2}$ . Равенство же реализуется при  $x = y = \sqrt{2}$ . Последнее означает, что  $\sqrt{2}$  является ответом на вопрос задачи.

6. 22.

Обозначим через  $A$ ,  $B$ ,  $C$  вершины треугольника, причем медиана из условия проведена к



стороне  $AB$ , а сторона  $BC$  не меньше  $AC$  (рис. 25). Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ , а  $P, Q, R$  – точки касания сторон вписанной окружности, обозначенные так, как это показано на рисунке. Для краткости обозначим длины сторон  $BC, AC, AB$  через  $a, b, c$  соответственно. Тогда

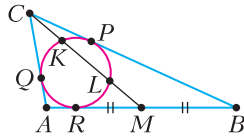


Рис. 25

$$\begin{aligned} 2CQ &= CQ + CP = (b - AQ) + (a - PB) = \\ &= b + a - (AR + BR) = a + b - c, \\ 2RM &= (AM - AR) + (BR - BM) = BR - AR = \\ &= (BP + PC) - (AQ + QC) = a - b. \end{aligned}$$

По свойству секущей

$$\begin{aligned} a + b - c &= 2\sqrt{CQ^2} = 2\sqrt{CK \cdot CL} = \\ &= 2\sqrt{2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})} = 12, \\ a - b &= 2\sqrt{RM^2} = 2\sqrt{ML \cdot MK} = \\ &= 2\sqrt{2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})} = 12, \end{aligned}$$

откуда  $a = 12 + b, c = 2b$ . Рассмотрев точку, симметричную  $C$  относительно  $M$ , получим параллелограмм с длинами сторон  $a$  и  $b$  и диагоналями длин  $c$  и  $2CM = 16\sqrt{3}$ . Воспользовавшись тождеством параллелограмма, получаем  $2(a^2 + b^2) = c^2 + (16\sqrt{3})^2$ , что с учетом предыдущих соотношений дает

$$2((b + 12)^2 + b^2) = (2b)^2 + 768, 48b = 480, b = 10.$$

Далее получаем  $a = 22, b = 10, c = 20$ . Наибольшей стороной оказывается  $BC$  с длиной  $a = 22$ .

7. -1.

Для определенности считаем, что у исходных прямоугольников большая сторона горизонтальна, из первого вырезаются левая нижняя и правая верхняя клетки, а из второго – верхняя левая и верхняя правая клетки. Пусть  $A$  и  $B$  – множества разрезов первого и второго многоугольников соответственно, содержащих вертикальный прямоугольник  $2 \times 1$ . Если этот прямоугольник занимает крайнюю левую или правую позиции (рис. 26, а, б), то он отделяется вертикальным разрезом высотой в три клетки от остальных прямоугольников разрезания. Если он занимает промежуточную позицию (рис. 26, в), то занимает две смежные клетки из трех в вер-

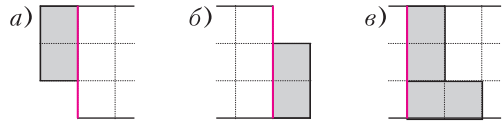


Рис. 26

тикальном ряду клеток, принадлежащих многоугольнику. Оставшаяся клетка является частью горизонтального прямоугольника  $2 \times 1$ , а значит, ее левая или правая сторона образует вместе со стороной вертикального прямоугольника разрез высоты три.

Возьмем разрезание  $a \in A$ . Многоугольник (и все прямоугольники  $2 \times 1$ , его составляющие), лежащий левее самого левого разреза высоты три, отразим симметрично относительно средней линии исходного прямоугольника. Получим разрезание из  $B$ . Повторное применение описанной выше операции дает  $a$ . Данная процедура устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами  $A$  и  $B$ . Как следствие, число элементов  $A$  равно числу элементов  $B$ . Неучтенными остаются разрезания, состоящие только из горизонтальных прямоугольников  $2 \times 1$ . Для первого многоугольника такого разрезания не существует, поскольку нижний ряд состоит из нечетного числа клеток. У второго многоугольника все три горизонтальных ряда состоят из четного числа клеток, что гарантирует одно разрезание. Таким образом, во втором случае число разрезов на одно больше. Следовательно,  $a - b = -1$ .

8.  $f(x) = 0, f(x) = -e^x, f(x) = -e^x + 1$ .

При  $y = 0$  получаем, что  $f(x) - (f(x))^2 = e^x (f(x) + f(0))$ . Вычитая это равенство из исходного соотношения, получаем

$$f(x + y) - f(x) = e^x (f(y) - f(0)).$$

Меняем  $x$  на  $y$  и наоборот:

$$f(y + x) - f(y) = e^y (f(x) - f(0)).$$

Вычтем из предпоследнего равенства последнее и выразим  $f(x)$  при фиксированном  $y \neq 0$ :

$$f(x) = \frac{f(0) - f(y)}{1 - e^y} e^x + \frac{f(y) - e^y f(0)}{1 - e^y}.$$

Следовательно,  $f(x) = Ae^x + B$  при любом вещественном  $x$ , где  $A$  и  $B$  – некоторые константы. Чтобы их найти, подставим  $f(x)$  в условие

задачи:

$$Ae^{x+y} + B - (Ae^x + B)^2 = e^x (Ae^x + B + Ae^y + B).$$

Перепишем последнее равенство в форме многочлена от  $e^x$ :

$$A(A+1)e^{2x} + 2B(A+1)e^x + B(B-1) = 0.$$

Равенство должно выполняться при всех  $x$ . Это произойдет в том и только в том случае, если коэффициенты при  $e^{2x}$ ,  $e^x$  и свободный член равны нулю. Последнее свойство может быть достигнуто тремя способами:

$$1) A = 0, B = 0; 2) A = -1, B = 0; 3) A = -1, B = 1.$$

Соответственно мы получаем три решения задачи:  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = -e^x$ ,  $f(x) = -e^x + 1$ .

9. 4.

ОДЗ уравнения – отрезок  $[0; 4]$ . Положительная величина  $\sqrt{x} + \sqrt{4-x}$  имеет квадрат  $4 + 2\sqrt{x(4-x)} \geq 4$ . Поэтому  $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} \geq 2$ . Функция  $(5-x)(6-x)$  строго убывает на отрезке  $[0; 4]$  и принимает значение 2 в точке  $x = 4$ . Решением уравнения может быть только  $x = 4$ . Прямая проверка показывает, что  $x = 4$  – решение уравнения.

$$10. (-\infty; 0) \cup \left\{ \frac{1}{4} \right\}.$$

Возведем уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} y^2 = x - a, \\ x^2 = y - a. \end{cases}$$

Вычтем теперь одно уравнение из другого:

$$y^2 - x^2 = x - y, \text{ откуда } (y - x)(x + y + 1) = 0.$$

Поскольку из уравнений исходной системы сразу следует, что  $x \geq 0, y \geq 0$ , то второй множитель отличен от нуля, получается, что  $x = y$  и система сводится к одному уравнению

$$x^2 = x - a, x^2 - x + a = 0.$$

Нужно найти значения  $a$ , при которых это уравнение имеет единственное неотрицательное решение. Дискриминант квадратного уравнения  $x^2 - x + a = 0$  равен  $D = 1 - 4a$ . Если  $D = 0$ , то  $a = \frac{1}{4}$ , а  $x = \frac{1}{2}$  – единственное решение уравнения и это решение неотрицательно. Если  $a > \frac{1}{4}$ , то

$D < 0$  и решений нет. Если  $0 \leq a < \frac{1}{4}$ , уравнение имеет два неотрицательных решения. Если  $a < 0$ , уравнение имеет два корня разных знаков. Получается, что одним неотрицательным корнем уравнение располагает, если  $a \in (-\infty; 0) \cup \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ .

# КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ  
РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 218-40-40**

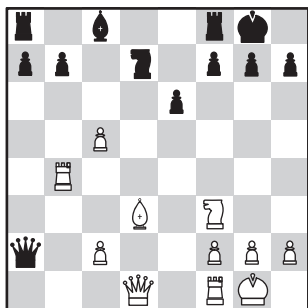
## Навстречу РЕВАНШУ

Китайская шахматистка Тань Чжуньи вслед за победой в турнире претенденток первенствовала в соревнованиях на кубок Кэрнс в американском Сент-Луисе и продолжает двигаться навстречу матч-реваншу за звание чемпионки мира со своей соотечественницей Цзюй Вэнь-цзюнь, который должен состояться в конце года.

### Тань Чжуньи – А.Затонских Сент-Луис, 2024

1. e4 e6 2. d4 d5 3. ♘c3 ♙f6 4. ♙g5 de 5. ♘e4 ♙e7 6. ♙f6 ♙f6 7. ♙f3 0-0 8. ♙f6+ ♗f6 9. ♙d3 c5 10. dc ♗b2 11. 0-0 ♙d7 12. ♗b1 ♗a2 13. ♗b4!?

Белые жертвуют пешку за атаку на королевском фланге, но эта идея не вполне корректна.



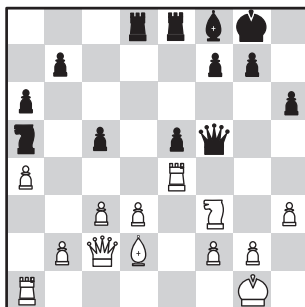
13...♗d5? (13...♗a5!, не позволяя белым подключить вторую ладью 14. ♗c4 h6!) 14. ♗e1 h6 15. ♗d2 ♙c5? Решающая ошибка, но и в случае наилучшего 15...♗c6! 16. ♙g4 e5 17. ♙b5 ♗e6 18. ♙g3 e4 черным сложно держать позицию. 16. ♗e5 ♗c6? (Последний шанс для черных – пожертвовать ферзя после 16...♙d3! 17. ♗d5 ♙b4 18. ♗d8 ♙c6 19. ♗f8 ♙f8 20. ♙e5!, но эта позиция все равно технически выиграна за белых.

17. ♙g4 ♙d3 18. ♗h6 g6 19. ♙g6+ fg 20. ♗g6+, и мат следующим ходом, поэтому черные сдались.

Второе место в турнире благодаря двум победам на финише завоевала Анна Музычук.

### А.Костенюк – А.Музычук Сент-Луис, 2024

1. e4 e5 2. ♙f3 ♙c6 3. ♙c4 ♙f6 4. d3 ♙e7 5. 0-0 0-0 6. ♙c3 d6 7. a4 ♙a5 8. ♙a2 ♙c6 9. ♙d2 ♙b4 10. ♙b1 c5 11. h3 ♗e8 12. ♙e2 ♙c6 13. ♙g3 h6 14. ♗e1 ♙e6 15. c3 a6 16. ♙c1 ♗c8 17. ♙c2?! ♙f8 18. ♙b3 d5! 19. ed ♙d5 20. ♙e4 ♙b3 21. ♙f6+ ♗f6 22. ♗b3 ♙a5 23. ♗c2 ♗cd8 24. ♙d2 ♗f5 25. ♗e4? Белые сделали слишком много пассивных ходов, меньшим из зол было бы сыграть 25. c4, ослабляя черные поля, но препятствуя прорыву черных.



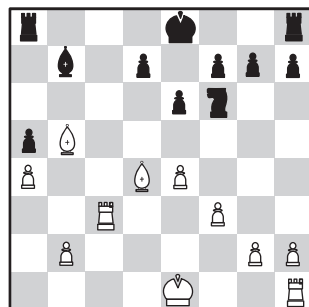
25...c4! 26. ♗ae1. Пешку брать нельзя: 26. dc ♙b3! 27. ♗ae1 ♙c5 28. ♙h6 ♙e4 29. ♗e4 ♗d1+, и у черных лишнее качество. 26...cd. Теперь у черных лишняя проходная пешка, которую они технично реализуют. 27. ♗d1 f6 28. b4 ♙c6 29. b5 ab 30. ab ♙e7 31. ♗b3+ ♙h7 32. ♗f7 ♗g6 33. ♗c4 ♙f5 34. ♙h4 ♙h4 35. ♙g4 ♗c8 36. ♗a4 ♗a8 37. ♗d1 ♗f5 38. ♗h4 ♙c5 39. ♗f1 ♗a2 40. ♗a4 ♗c2 41. g4 ♗d7 42. ♗e4 ♗b5 43. ♙h1 ♗a8 44. ♙e3 ♙e3 45. ♗e3 ♗c3 46. ♙h2 ♗d5 47. h4

e4 48. ♗fe1 ♗c2 49. ♙g3 ♗d6+, белые сдались.

Александра Костенюк проявила в турнире наибольшую бескомпромиссность, сыграв вничью лишь дважды в 9 турах, что позволило ей опередить по дополнительным показателям нескольких соперниц и выиграть бронзовую медаль.

### А.Костенюк – Н.Дзагнидзе Сент-Луис, 2024

1. e4 c5 2. ♙f3 e6 3. d4 cd 4. ♙d4 ♙c6 5. ♙c3 ♗c7 6. ♗d3 ♙d4 7. ♗d4 a6 8. ♙e3 b5 9. a4 b4 10. ♙a2 ♙f6 11. ♙b4 ♙b7 12. f3 a5 (в духе варианта 12...d5!?) 13. e5 ♙b4+ 14. ♗b4 ♗e5 15. ♗a3 со сложной игрой) 13. ♙d3 ♗c2 14. ♗c1 ♗b3 15. ♗c3 ♙b4 (иначе ферзь попадает в клетку 15...♗a2 16. ♙c1 ♗a1 17. ♙b5) 16. ♙b4 ♗b4 17. ♙b5 ♗d4 18. ♙d4 (чернопольный слон контролирует игру).



18...0-0 19. ♙d2 d6 20. ♗c7 ♗fb8 21. ♗hc1 e5 22. ♙c3! (22. ♙e3?! d5!) h6 23. ♗e3 d5?! Отчаянная попытка черных активизировать фигуры, но точной игрой белые пресекают ее, оставаясь с лишней пешкой. 24. ♙e5 de 25. ♙f6 gf 26. fe ♙c8 27. ♗f1 ♙a6 28. ♗f5 ♙b6 29. ♗c6 ♗c6 30. ♙c6 ♗b8 31. ♙b5 ♗b6 32. ♗c5 ♗e6 33. ♙c6 ♙f1 34. g3 ♗g7 35. ♙d5 ♗b6 36. b3, и черные просрочили время.

А.Русанов

Индекс 90964

# РАЗЛИЧНЫЕ ТРАЕКТОРИИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

Прямые, окружности, параболы, циклоиды...

## Уроки с физикой



ISSN 0130-2221 24007



(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 32 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)