

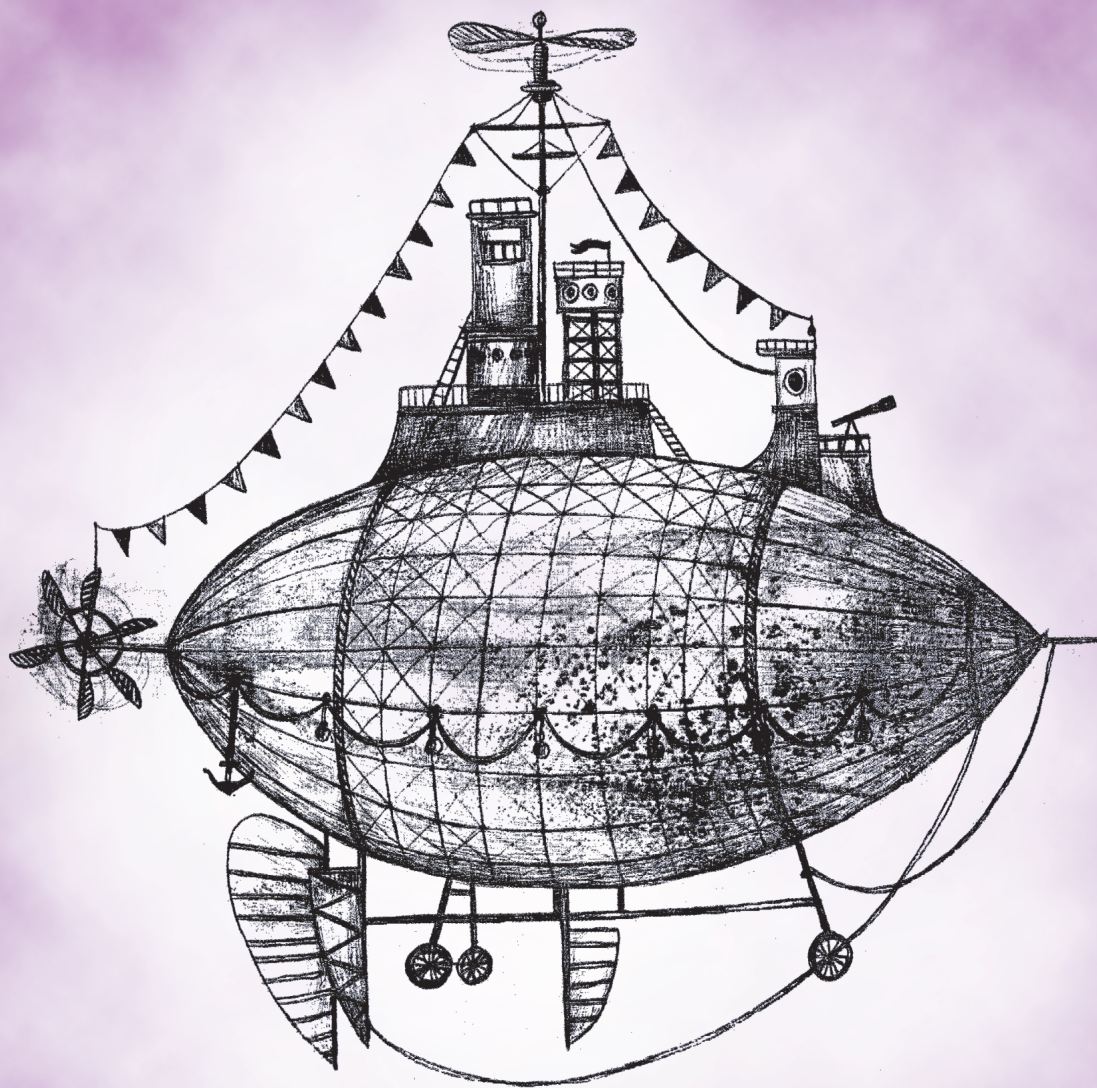
ISSN 0130-2221

2024 · № 4

АПРЕЛЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Немного географии

Вот несколько географических названий на китайском языке и их переводы на русский язык в перепутанном порядке.

1. 山西
2. 上海
3. 北京
4. 天山
5. 巴黎
6. 墨西哥
7. 天津
8. 北冰洋
9. 南京
10. 巴拉圭
11. 山东

Нанкин, Париж, Шаньси, Тянь-Шань, Парагвай, Тяньцзинь, Пекин, Шанхай, Шаньдун, Мексика, Северный Ледовитый океан.

Задание 1. Установите, какой перевод какому географическому названию соответствует.

Задание 2. Попробуйте установить, что значит китайский иероглиф 北.

(Из книги «Задачи лингвистических олимпиад»)

ПО
КИ
ТАЙ
СКИ

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, К.А.Кноп,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов, А.А.Леонович,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов,
А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Минимальные жесткие укладки домино.
Д.Ефимов
8 Открытые и замкнутые... *А.Минеев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи M2790–M2793, Ф2797–Ф2800
16 Решения задач M2778–M2781, Ф2785–Ф2788
22 Про треугольник $A_2B_2C_2$. *А.Терёшин*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 24 Морис Крайчик. *К.Кноп*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 27 Задачи

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 28 Мы и модели. *Л.Ашкинази*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 30 Задачи 29–32

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Несколько игр из книги Мориса Крайчика

ОЛИМПИАДЫ

- 31 XLV Турнир городов. Задачи весеннего тура
36 85-я Московская олимпиада школьников
по физике

- 45 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (13)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Л.Ашкинази*
II *Лингвистические задачи*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Минимальные жесткие укладки домино

Д.ЕФИМОВ

ПРОСМАТРИВАЯ АРХИВ ЖУРНАЛА «Квант», автор нашел в одном из номеров следующую задачу И.Ф.Акулича [1].

Задача. «Дорожная» шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Имеется также полный комплект из 28 домино, каждая кость которого покрывает ровно две соседние клетки доски. Можно ли уложить комплект домино на такой доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски?

Если считать, что условие неподвижности домино в плоскости доски равносильно тому, что ни одна костяшка не примыкает своей короткой стороной к пустой клетке и не примыкает длинной стороной к двум смежным пустым клеткам, то, подумав немного, можно дать положительный ответ на вопрос задачи, например в виде, представленном на рисунке 1. Клетки доски, не закрытые доминошками, обозначены здесь голубым цветом.

Возникает естественный вопрос: можно ли улучшить этот результат, т.е. можно ли использовать меньшее количество доми-

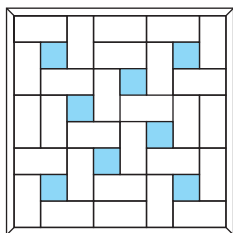


Рис. 1. Решение задачи о «дорожной» шахматной доске и домино

но? А каким будет решение при другом размере доски? В данной статье мы постараемся ответить на эти вопросы.

Жесткие укладки и их свойства

Введем некоторые общие определения. Рассмотрим квадратную доску размера $n \times n$ клеток. Предположим, что множество $t \leq n^2/2$ домино расположено на данной доске без наложений друг на друга так, что каждое домино закрывает ровно две соседние клетки. Назовем такое расположение *укладкой*. При этом некоторые клетки доски могут остаться незакрытыми. Назовем такие клетки *дырками*. Будем говорить, что укладка домино является *жесткой*, если ни одна из костяшек домино не примыкает своей короткой стороной к дырке и не примыкает длинной стороной к двум смежным дыркам (рис. 2).



Рис. 2. Невозможные взаимные расположения дырок и домино при жесткой укладке

Вполне очевидно, что если $n = 1$, то укладка является жесткой тогда и только тогда, когда каждая дырка ограничена доминошками так, как указано на рисунке 3.

Жесткую укладку назовем *минимальной*, если она содержит минимально возможное число домино для заданного раз-

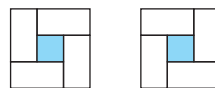


Рис. 3. Необходимое и достаточное условие жесткой укладки

мера доски. Понятно, что жесткая укладка является минимальной тогда и только тогда, когда она содержит максимально возможное количество дырок для заданного размера доски. Нас будет интересовать построение минимальных жестких укладок домино для разных размеров квадратных досок. Принимая во внимание вышесказанное, мы можем переформулировать данную задачу в духе проблем покрытия и упаковки [2, 3]:

Разместите на доске размера $n \times n$ клеток как можно больше 3×3 -фигур, образованных четырьмя 2×1 -костяшками домино и одной 1×1 -дыркой (см. рис. 3); при этом допускается пересечение двух фигур по одной костяшке, а все незамощенные данными фигурами клетки доски должны быть полностью замощены домино.

Часть доски, состоящую из всех ее клеток за исключением клеток, расположенных вдоль краев, назовем *ядром*. Так, у доски размера 2×2 нет ядра, а ядро доски размера 3×3 состоит из одной центральной клетки. Из вышесказанного следует, что при жесткой укладке дырки могут находиться только в ядре доски.

Нетрудно видеть, что взаимные расположения двух дырок, показанные на рисунке 4, с точностью до поворота на 90° градусов, невозможны при жесткой укладке. Отсюда следует, что любая область доски, представляющая собой квадрат размера 2×2 , содержит не более одной дырки, а любая область доски, представляющая собой квадрат размера 3×3 , содержит не более двух дырок при жесткой укладке.

Упражнение 1. Укажите фигуры, состоящие из 5 клеток (не обязательно смежных по сторонам), такие, что любая область доски, представляющая собой данные фигуры, содержит не более одной дырки при жесткой укладке.

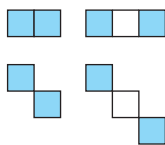


Рис. 4. Взаимные расположения двух дырок, невозможные при жесткой укладке

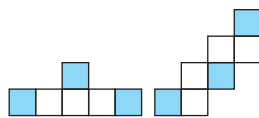


Рис. 5. Взаимные расположения трех дырок, невозможные при жесткой укладке

Существуют также некоторые запреты на взаимные расположения трех дырок при жесткой укладке, даже если пары дырок расположены допустимо. Два таких невозможных расположения показаны на рисунке 5, с точностью до поворота на $\pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Если при укладке доминошек на доску получились такие расположения дырок, то по крайней мере одна доминошка будет примыкать короткой стороной к дырке. Принимая данный факт во внимание, с помощью небольшого перебора можно показать, что любая область доски, представляющая собой прямоугольник размера 5×2 или 2×5 , содержит не более двух дырок, а любая область доски, представляющая собой прямоугольник размера 5×3 или 3×5 , содержит не более трех дырок при жесткой укладке.

Упражнение 2. Укажите фигуры, состоящие из 11 и 12 клеток, такие, что любая область доски, представляющая собой данные фигуры, содержит не более двух дырок при жесткой укладке.

В заключение данного раздела приведем вполне очевидное, но полезное утверждение.

Утверждение 1. Четность числа дырок, содержащихся в жесткой укладке доски $n \times n$, совпадает с четностью n .

Жесткие укладки досок малых размеров

Начнем с минимального размера доски, на которой можно расположить хотя бы одно домино, т.е. с доски 2×2 . Очевидно, что такая доска допускает всего две жесткие укладки, представляющие собой пару смежных доминошек, расположенных вертикально или горизонтально.

Доска размера 3×3 также допускает всего две жесткие укладки. Они представлены на рисунке 3.

Используя утверждение 1, можно легко проверить, что любая (следовательно, и минимальная) жесткая укладка доски 4×4 не содержит дырок. Действительно, ядро такой доски представляет из себя квадрат размера 2×2 . Минимальным положительным четным числом является 2, но, как мы знаем, квадрат 2×2 при жесткой укладке не может содержать более одной дырки.

Аналогично можно показать, что любая жесткая укладка доски 5×5 содержит ровно одну дырку. Действительно, ядро такой доски является квадратом 3×3 , который, как мы знаем, может содержать не более двух дырок при жесткой укладке. Но в силу утверждения 1 любая жесткая укладка доски 5×5 не может не содержать дырок и не может содержать две дырки. Остается единственная возможность – жесткая укладка с одной дыркой, которая автоматически будет и минимальной. Примеры таких упаковок показаны на рисунке 6. Отметим, что здесь показаны все

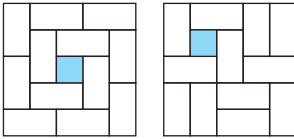


Рис. 6. Минимальные жесткие укладки доски 5×5

возможные с точностью до поворота на $\pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$, варианты размещения дырки. Доказать это можно с помощью метода раскраски [4, 5]. Занумеруем все клетки доски в шахматном порядке числами 1 и 2 (рис. 7, ядро взято в рамку). В результате получим 13 клеток с 1 и 12 клеток с 2. Каждое домино закрывает ровно одну клетку с 1 и одну клетку с 2. Поэтому число закрытых клеток с 1 и 2 должно быть одинаковым. Таким образом, при жесткой укладке дырка может быть только в клетке с 1.

1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1

Рис. 7. Метод раскраски

До сих пор минимальные жесткие укладки рассматриваемых досок поочередно или не содержали дырок, или содержали всего одну дырку. Случай доски 6×6 нарушает эту закономерность.

Упражнение 3. Покажите, что минимальная жесткая укладка доски 6×6 содержит ровно 4 дырки. Приведите различные примеры таких упаковок.

Правосторонний конь

Прежде чем приступить к общему случаю, рассмотрим новую шахматную фигуру, которую назовем *правосторонним конем*. От обычного шахматного коня он отличается тем, что его ход состоит в передвижении на две клетки по строке или по столбцу доски, а затем на одну клетку вправо (рис. 8). Назовем множество всех

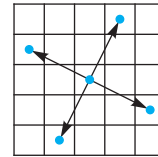


Рис. 8. Допустимые ходы правостороннего коня

клеток доски, в которые может попасть правосторонний конь, стартуя с некоторой данной клетки, путем коня, а каждую отдельную клетку пути следом коня. Здесь и далее мы будем использовать следующую нумерацию клеток доски: клетку, находящуюся на пересечении i -го столбца доски (начиная слева) и j -й строки доски (начиная снизу) обозначим через (i, j) . Например, рисунок 9 показывает клетки доски 8×8 , в которые может попасть пра-

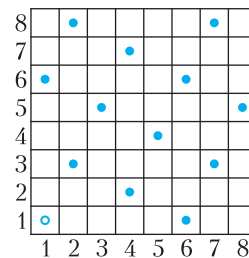


Рис. 9. Путь правостороннего коня на доске 8×8

восторонний конь, начиная, скажем, с клетки $(1, 1)$.

В связи с фигурой правостороннего коня возникает много математических задач. Рассмотрим некоторые из них. Из определения следует, что если правосторонний конь может попасть из клетки (i, j) в клетку (k, l) , то он может совершить и обратный переход из клетки (k, l) в клетку (i, j) . Нетрудно также заметить, что следы коня расположены периодически по строкам, столбцам и диагоналям доски с интервалом в 5 клеток. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. Число различных путей правостороннего коня на доске размера $n \times n$, $n \geq 5$, равно пяти. При этом каждый путь проходит ровно один раз через каждые последовательные 5 клеток в строках, столбцах и диагоналях доски.

Рассмотрим теперь вопрос о числе следов правостороннего коня на данном пути.

Утверждение 3. Число следов правостороннего коня на любом пути на доске размера $n \times n$, $n \geq 5$, равно $\lfloor n^2/5 \rfloor$ или $\lceil n^2/5 \rceil$ (здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ и $\lceil \cdot \rceil$ обозначают, соответственно, округление вниз и вверх до ближайшего целого).

Доказательство. Пусть дана доска размера $n \times n$, $n \geq 5$. Предположим, что правосторонний конь стартует с клетки $(1, 1)$. Тогда с учетом периодичности он оставит $\lfloor n/5 \rfloor$ следов в первой строке. И на доске имеется $\lfloor n/5 \rfloor$ строк с таким же расположением следов. Первый слева след коня во второй строке будет находиться в четвертом столбце. Поэтому во второй строке конь оставит всего $\lfloor (n-3)/5 \rfloor$ следов, а на доске имеется $\lfloor (n-1)/5 \rfloor$ строк с таким же расположением следов. Аналогично, в третьей строке будет оставлено $\lfloor (n-1)/5 \rfloor$ следов коня, и на доске имеется $\lfloor (n-2)/5 \rfloor$ аналогичных строк. В четвертой строке количество следов равно $\lfloor (n-4)/5 \rfloor$ и на

доске имеется $\lfloor (n-3)/5 \rfloor$ аналогичных строк. Наконец, количество следов в пятой строке равно $\lfloor (n-2)/5 \rfloor$, а количество аналогичных строк на доске равно $\lfloor (n-4)/5 \rfloor$. Все последующие строки будут совпадать с одной из первых пяти с точки зрения расположения в них следов. Таким образом, общее число следов коня на доске в данном случае равно следующему значению:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor + \\ &+ \left\lfloor \frac{n-4}{5} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-4}{5} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor^2 + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{5} \right\rfloor \right) \left(\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

Подставляя вместо n последовательные значения $n = 5k, 5k+1, \dots, 5k+4$, получаем, что S_1 равно $\lfloor n^2/5 \rfloor$ или $\lceil n^2/5 \rceil$ в зависимости от n .

Аналогичный результат мы получим, если конь стартует с клеток $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$ и $(5, 1)$. Проверку этих фактов мы оставляем читателям в качестве упражнения. В силу утверждения 2 этого достаточно, чтобы завершить доказательство.

Вполне очевидно, что такие же результаты справедливы и для левостороннего коня.

Основной результат

В данном разделе мы докажем наш основной результат, касающийся числа дырок и доминошек в минимальной жесткой укладке произвольной доски размера $n \times n$, $n \geq 2$, а также приведем общий метод построения минимальных жестких укладок.

Обозначим через $D_{\min}(n)$ минимальное число доминошек, а через $H_{\max}(n)$ максимальное число дырок в жестких укладках на доске размера $n \times n$. Очевидно, что эти величины связаны друг с другом следующим соотношением:

$$D_{\min}(n) = \frac{n^2 - H_{\max}(n)}{2}. \quad (1)$$

Теорема. Максимальное число дырок в жесткой укладке дается следующим равенством:

$$H_{\max}(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{5} \right\rfloor, & n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}; \\ \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{5} \right\rfloor, & n \equiv 1, 3 \pmod{5}. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Минимальные жесткие укладки досок размера $n \times n$, $2 \leq n \leq 6$, мы уже рассмотрели и можно непосредственно проверить, что для них данная теорема выполняется. В дальнейшем для удобства рассмотрим доску размера $(n+2) \times (n+2)$, предполагая, что $n \geq 5$. Ядро такой доски имеет размер $n \times n$. Расположим в ядре дырки в соответствии со следами некоторого пути правостороннего коня. Затем замостим доминошками клетки доски, окружающие дырки, так, как указано на рисунке 10. После этого кроме клеток,

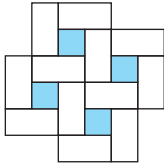


Рис. 10. Замощение клеток, окружающих дырки

«забронированных» под дырки, незамощены останутся только некоторые клетки на границе доски и, возможно, некоторые клетки в углах ядра. При этом, как мы знаем, между двумя соседними дырками в строках и столбцах будет промежуток в 4 клетки. Пусть две соседние дырки на границе ядра имеют координаты $(k, n+1)$ и $(k+5, n+1)$. Тогда две клетки с координатами $(k+2, n+2)$ и $(k+3, n+2)$ на границе доски остаются незамощеными. Их можно замостить одной доминошкой (рис. 11).

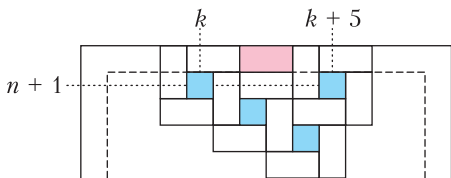


Рис. 11. Укладка на границе доски

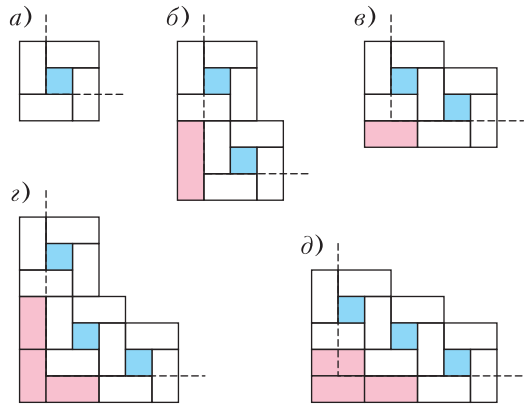


Рис. 12. Возможные взаимные расположения дырок в углах доски

Проведя такое замощение вдоль всей границы доски, мы оставим незамощеными только клетки в углах доски. Нетрудно видеть, что возможны только 5 вариантов расположения дырок в углах доски с точностью до поворота на $\pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Все они изображены на рисунке 12 (пунктирная линия показывает границу ядра доски). Во всех случаях, кроме б), клетки доски, оставшиеся незамощеными, могут быть полностью замощены доминошками.

Пусть $n = 5k$. Тогда нетрудно видеть, что если мы начнем располагать дырки на доске, начиная с клетки $(2, 2)$, то углы доски будут соответствовать типам а), в), г), д) (рис. 13). Так как тип углов однозначно определяется любым из данных углов, то мы будем иметь аналогичную ситуацию, если начнем размещать дырки, начиная с клеток $(4, 2)$, $(5, 2)$ и $(6, 2)$.

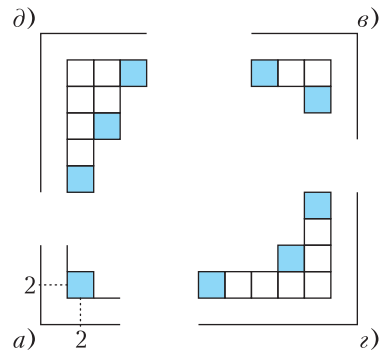


Рис. 13. Расположение дырок в углах доски при $n = 5k$

Таким образом, в данном случае мы сможем построить жесткую укладку.

Аналогично можно показать, что в случаях $n = 5k + p$, $p = 1, 2, 3, 4$, жесткие укладки рассматриваемого типа также существуют. Точную проверку этого утверждения мы опять же оставляем читателям в качестве упражнения. При этом, в силу утверждения 2, число дырок во всех этих укладках будет не менее $\lfloor n^2/5 \rfloor$.

Таким образом, мы показали, что $H_{\max}(n+2) \geq \lfloor n^2/5 \rfloor$. Покажем теперь, что $H_{\max}(n+2) \leq \lfloor n^2/5 \rfloor$. Пусть дана доска размера $10k \times 10k$, $k \in \mathbb{N}$, соответственно ее ядро будет иметь размер $(10k-2) \times (10k-2)$. Ядро такого размера можно замостить $(10k-1)(2k-1)$ прямоугольниками размера 2×5 , $2k-1$ прямоугольниками размера 5×3 и одним квадратом 3×3 . Например, ядро размера 8×8 можно замостить так, как показано на рисунке 14. Вспоминая

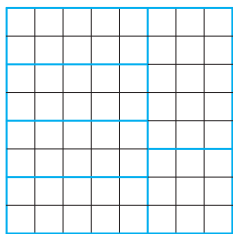


Рис. 14. Замощение ядра 8×8 прямоугольниками и квадратом

ограничения на количества дырок в таких прямоугольниках и квадрате при жестких укладках, получаем, что любая жесткая укладка доски $10k \times 10k$ содержит не более

$$2(5k-1)(2k-1) + 3(2k-1) + 2 = \left\lfloor (10k-2)^2/5 \right\rfloor$$

дырок. Аналогично можно показать, что число дырок в любой жесткой укладке доски $(10k+p) \times (10k+p)$, $k \in \mathbb{N}$, $p = 1, 2, \dots, 9$, не превосходит $\lfloor (10k+p-2)^2/5 \rfloor$, а также показать, что $H_{\max}(7) \leq 5$, $H_{\max}(8) \leq 8$, $H_{\max}(9) \leq 10$. Проверку оставляем читателям в качестве упражнения.

Таким образом, $\lfloor n^2/5 \rfloor \leq H_{\max}(n+2) \leq \lfloor n^2/5 \rfloor$. Принимая во внимание утверждение 1, получаем

$$H_{\max}(n+2) = \begin{cases} \lfloor n^2/5 \rfloor, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{5}; \\ \lfloor n^2/5 \rfloor, & n \equiv 1, 4 \pmod{5}, \end{cases}$$

что эквивалентно утверждению теоремы.

В завершение вернемся к задаче, которая открывает нашу статью. Подставляя $n = 8$ в формулы (1), (2), получаем $H_{\max}(8) = 8$, $D_{\min}(8) = 28$. Таким образом, для минимальной жесткой укладки стандартной шахматной доски требуется в точности полный набор костяшек домино и предложенное решение является оптимальным.

Заключение

Мы разобрали задачу о минимальной жесткой укладке домино на доске $n \times n$. Ее можно рассматривать как любопытную головоломку, но, возможно, приведенные здесь объекты и понятия со временем смогут найти приложения и за пределами занимательной математики. Естественным образом возникают обобщения этой задачи. Можно вместо доминошек брать плоские фигурки другой формы и размера. Можно вместо квадратных досок использовать доски другой формы. Наконец, можно попробовать перейти в другую размерность и рассмотреть жесткие укладки «кирпичей» в «ящиках».

Литература

1. И.Акулич. Конкурс «Математика 6–8». — «Квант», 1991, № 10.
2. Н.Панюнин. Упаковки и покрытия. — «Квант», 2019, № 8.
3. P.G.Szabo, M.Cs.Markot, T.Csendes, E.Specht, L.G.Casado, I.Garcia. New Approaches to Circle Packing in a Square. — Springer, 2007.
4. С.Табачников, Д.Фукс. Невозможные замощения. — «Квант», 2011, № 2.
5. F.Ardila, R.P.Stanley. Tilings. — arXiv:math/0501170.

Открытые и замкнутые...

А.МИНЕЕВ

Брось эти шуточки! У тебя там не закрытый, а открытый перелом!

Из кинофильма «Бриллиантовая рука»

ЗАГОЛОВОК СТАТЬИ МОЖЕТ НА-вести на мысли о характерах людей и их психологических особенностях, а эпиграф – вообще увести в сторону. На деле в статье речь пойдет об особенностях *сосудистых* систем в природе – открытых и замкнутых. Более конкретно – открытых систем у деревьев и закрытых (или, иначе, замкнутых) у животных. А также о том, что замыкает открытые системы у деревьев и приоткрывает замкнутые у человека. В заключение будет рассказано о том, насколько важен для человека сон в ночное время и двигательная активность днем.

Пример открытой сосудистой системы деревьев

Сосудистую систему деревьев образуют два слоя трубчатых клеток. По одному слою – *ксилеме* (в переводе с греческого – дерево) – вода и минеральные вещества поднимаются вверх; по другому слою – *флоэме* (в переводе с греческого – кора) – питательные вещества из листьев перемещаются к корням и плодам. Расположение слоев ксилемы и флоэмы показано на рисунке 1.

Сосудистая система деревьев считается примером *открытой* системы. Вода из почвы через корни поднимается вверх по сосудам ксилемы до листьев (или до хвои в хвойных деревьях) и затем испаряется (рис. 2). Начало этого тока воды вместе с минеральными веществами – в земле, окончание – в атмосфере. Сосуды ксилемы являются фактически полыми трубками,

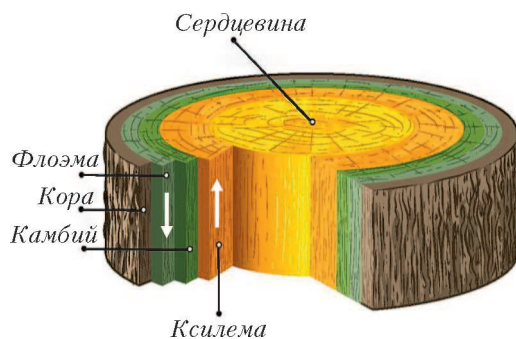


Рис. 1. Сечение ствола дерева. Показано расположение слоев: сердцевина – сосуды ксилемы – камбий – сосуды флоэмы – кора, а также направление движения воды по сосудам ксилемы (вверх по стволу) и флоэмы (вниз)

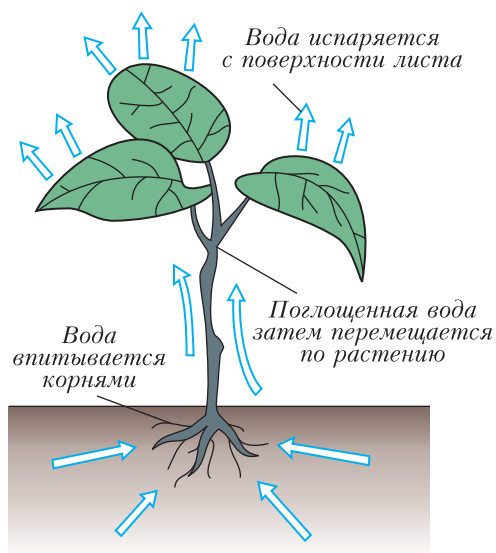


Рис. 2. Схема движения воды по сосудам ксилемы

состоящими из бывших клеток одревесневшего ствола дерева. Движение по сосудам ксилемы происходит вверх.

Для дальнейшего роста и развития необходимо распространение органических веществ по всему дереву. Эти органические вещества образуются в листьях при фотосинтезе, при этом разные длины волн падающего на лист света приводят к образованию углеводов – красная часть спектра и аминокислот и белков – синяя часть спектра. А само перемещение продуктов фотосинтеза происходит по сосудам флоэмы.

Восходящий и нисходящий потоки разделены слоем камбия – клеток, которые делятся в течение всей жизни дерева. Камбий дает жизнь клеткам как ксилемы, так и флоэмы. Деление клеток камбия, замещающее только зимой, образует годовые кольца, которые видны на срезе ствола (см. рис. 1). Камбий и прилегающие к нему слои ксилемы и флоэмы представляют собой наиболее активные части ствола дерева. Вместе с листьями и корневыми волосками они образуют единый организм, обеспечивающий рост и развитие дерева. По мере удаления от камбия внутрь ствола проводящие свойства ксилемы постепенно утрачиваются, и она превращается в прочную сердцевину. А при удалении во внешнюю часть флоэма превращается в кору, выполняющую в основном защитные функции. Поскольку ствол дерева со временем утолщается, кора на растущем стволе дерева должна постепенно растрескиваться.

Особенности дерева, как открытой системы, это непрерывный рост (и утолщение ствола) в течение всей жизни, ежегодное сбрасывание листьев (хвои) и обновление корневых волосков. Часть продуктов жизнедеятельности дерева накапливается в его сердцевине. Своеобразное замыкание такой открытой сосудистой системы деревьев происходит на нескольких уровнях и, тем самым, связывает элементы дерева в единый организм.

Первый – на уровне питательных веществ. Надземные органы (ствол, ветви, листья, почки) нуждаются в минеральных веществах и воде из почвы, которые всасываются корнями. А корни нуждаются в

продуктах фотосинтеза, происходящего в листьях. Если этот обмен недостаточен, то замедляется рост, сокращаются и уменьшаются в размерах ветки и листья, число плодов...

Второй – с помощью гормонов. В этом проявляется некоторое сходство с животным миром, хотя количество *фитогормонов* меньше и их функции у растений проще. Фитогормоны участвуют в процессе роста и ростовых движений растения, при стрессах, в явлениях цветения, развития плодов, сбрасывания листьев...

Имеется несколько гормонов, активирующих рост растения. Два основных фитогормона роста синтезируются в корнях, это цитокинин, и в развивающихся почках и листьях, это ауксин. Цитокинин перемещается по ксилеме от корней вверх дерева, а ауксин, наоборот – от верхушек побегов по флоэме вниз к корням дерева. Эти гормоны и их взаимодействие фактически связывают дерево в единый организм, давая возможность дальнейшему развитию как верхней, так и нижней части дерева. При этом важно присутствие обоих гормонов и баланс между ними. Так, цитокинин вызывает деление клеток только в присутствии ауксина. Еще один гормон роста – гиббереллин – образуется как в листьях, так и в корнях и переносится по сосудам и ксилеме, и флоэме. Его роль – удлинение стеблей. Камбий расположен между ксилемой, по которой цитокинины перемещаются вверх по стволу, и флоэмой, по которой ауксины движутся вниз. Это приводит к тому, что при избытке цитокинина происходит преимущественное образование флоэмы, а при избытке ауксинов – ксилемы.

Есть несколько фитогормонов, которые наоборот подавляют рост. Это важно, например, осенью, когда их накопление переводит клетки почек в состояние покоя. А весной уменьшения их содержания пробуждает рост почек. При стрессах растений (в результате обезвоживания, холода и др.) действие таких гормонов затормаживает процессы обмена и защищает клетки от гибели. Осенью эти гормоны приводят к листопаду и опаданию плодов.

Нехватка гормонов роста и нарушение баланса между ними приводит либо к синтезу недостающих, либо к угнетению развития растения. Приведем пример восстановления баланса между производством ауксина и цитокинина. Если срезать молодую ветку ивы и поместить ее в вазу с водой (при этом сохранив верхнюю часть с ауксинами и удалив нижнюю с цитокининами), то через некоторое время в районе среза появляются корневые волоски. В этом случае образование гормонов смещается в сторону цитокининов и приводит к отрастанию нового корня. И наоборот, на оставшейся после среза части ветки ивы с корнем (сохранена часть с цитокининами, удалена – с ауксинами) появляется новый побег.

Несколько уровней замыкания различных частей дерева фактически интегрируют его в единый организм. А камбий, с одной стороны, формирует оба потока воды и минеральных веществ вверх и вниз по стволу дерева, а с другой – разделяет эти потоки. При этом камбий сохраняет активность на протяжении всей жизни дерева, в отличие от большинства остальных частей дерева.

Пример замкнутой кровеносной системы животных и человека

Кровеносная система животных считается замкнутой и состоит из двух кругов кровообращения: один круг замыкает сердце и легкие, другой – сердце и внутренние органы (рис. 3). В то же время представление о полной замкнутости кровеносной системы неточно. Ее функционирование нуждается во взаимодействии с несколькими открытыми системами: дыхательной, пищеварительной и лимфатической.

По *дыхательной* системе в легкие поступает кислород и выводится углекислый газ. Этот процесс протекает в альвеолах легких, пронизанных капиллярами кровеносной системы.

Пищеварительная система – основной поставщик «строительных материалов» в организм.

Роль *лимфатической* системы менее известна. Некоторые медики полагают, что, несмотря на множество глубоких исследо-

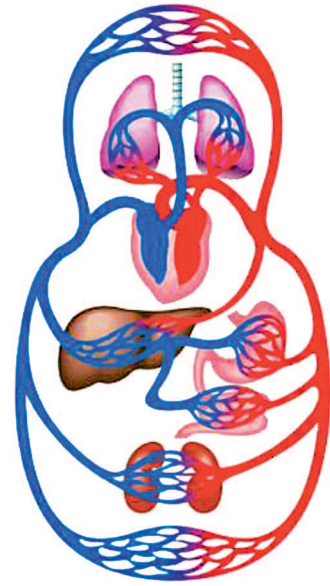


Рис. 3. Два круга кровообращения кровеносной системы. Красным цветом показаны артерии, синим – вены

ваний, лимфатическая система остается одной из самых загадочных частей организма. Остановимся подробнее на ее особенностях.

Человек: несколько цифр и оценок

Сердце в течение минуты прокачивает по замкнутой кровеносной системе 3–6 литров крови (при физической нагрузке до 20–30 литров), за сутки – несколько тонн, за всю жизнь – порядка 100–200 тысяч тонн крови! Открывая пищеварительная система человека перерабатывает в течение жизни 30–50 тонн пищи и 40–60 тонн воды (соответственно, приблизительно 1,5 килограмма пищи и 2 литра воды в день). Разница между массой прокачанной через сердце крови и суммарной «съеденной» массой пищи более трех порядков.

В теле взрослого человека около 100 триллионов (10^{14}) клеток. Масса типичной клетки примерно 10^{-9} г, ее объем $V_{\text{кл}} \sim 10^{-9} \text{ см}^3$ и характерный размер $V_{\text{кл}}^{1/3} \sim 10^{-3} \text{ см} = 10 \text{ мкм}$. Общее количество эритроцитов в организме человека достигает $2 \cdot 10^{13}$ (4–5 литров крови, в каждом литре $(4-5) \cdot 10^{12}$ эритроцитов). Объем

эритроцита порядка $100 \text{ мкм}^3 \sim 10^{-16} \text{ м}^3 \sim 10^{-10} \text{ см}^3$, масса порядка 10^{-10} г . Масса всех эритроцитов в организме масштаба двух килограммов. Сопоставление цифр показывает, что объем эритроцита примерно на порядок меньше объема типичной клетки, количество эритроцитов составляет 20% от полного количества клеток, а объем всех эритроцитов человека – около 40% от полного объема крови.

Каждый день в костном мозге человека образуется около $2 \cdot 10^{11}$ эритроцитов. За это же время во всем организме человека возникает близкое количество новых клеток ($\sim 3 \cdot 10^{11}$). Умножая эту величину на массу клетки (10^{-9} г), получим, что в течение дня обновляется 300 граммов клеток! А в течение жизни в организме человека появляется примерно $(5-8) \cdot 10^{15}$ клеток, что по массе составляет почти 10 тонн. В этом смысле организм за жизнь многократно обновляется.

Время жизни клеток разных органов существенно различается. Вместо отмирающих клеток образуются новые. В основном (86%) это клетки крови (эритроциты и лейкоциты), которые образуются из стволовых клеток костного мозга, 12% новых клеток образуется в эпителии пищеварительной системы и около 1% – новые клетки кожи. Очень быстро обновляются клетки эпителия желудка и кишечника (~ 5 дней), медленнее – клетки печени (1 год), костей (10 лет), мышц (15 лет), мускулатура сердца обновляется раз в 20 лет. А вот клетки глазной сетчатки и хрусталика вообще не обновляются за всю

жизнь. Долгожитель и мозг человека. Возникает вопрос – как организм избавляется от отмирающих клеток разных органов?

Приведем еще несколько цифр, связанных с функционированием дыхательной системы. Проведены подсчеты, которые показали, что средний человек каждый день вдыхает несколько граммов нерастворимых мельчайших частиц пыли, за год 1–1,5 килограмма, а в течение жизни 50–100 килограммов. И в этом случае появляется похожий вопрос: каким образом из легких выводится такое количество мусора?

Ответ на оба вопроса один: удалением отмирающих клеток и пыли из организма и много чем еще занимается лимфатическая система. С ее помощью из организма выводятся продукты жизнедеятельности клеток и сами отмирающие клетки, пыль, вирусы и бактерии. По сосудам лимфатической системы они попадают в лимфоузлы и там обезвреживаются.

Замкнутая кровеносная система «приоткрывается»

Кровеносная система не может быть полностью изолирована от остального организма. Взаимодействие (обмен веществ) происходит в переходных областях, на одном их конце систему еще можно считать замкнутой, а на другом – уже разомкнутой. Поясним специфику этих областей на двух примерах. Начнем с «интерфейса» дыхательной и кровеносной систем, который происходит в легких, в самой крайней их оконечности – альвеолах (рис. 4). При этом альвеолы играют роль

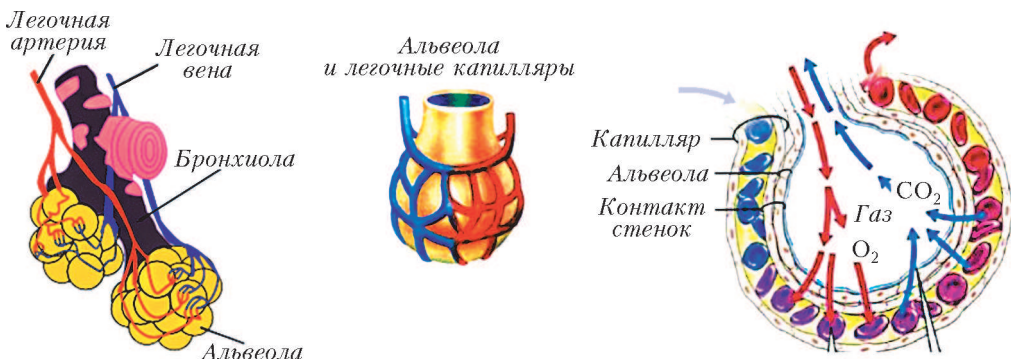


Рис. 4. Альвеолы – область взаимодействия дыхательной и кровеносной систем

своеобразных мельчайших единиц (квантов) дыхательной системы человека.

В альвеолах (тонкостенных пузырьках, покрытых сеткой капилляров) и происходит газообмен: из воздуха в кровь поступает кислород, а из крови удаляется углекислый газ. Поскольку в воздухе, заполняющем альвеолы, давление кислорода больше, чем в венозной крови, кислород диффундирует из альвеол в венозную кровь и превращает ее в артериальную. Диаметр альвеол порядка 300 микрон, их количество – сотни миллионов, а суммарная площадь области взаимодействия (воздух-кровь) масштаба 100 м². При глубоком вдохе суммарная поверхность альвеол за счет их растяжения может увеличиваться до 250 м² (!) (на два порядка больше площади поверхности человека). В ходе газообмена в выдыхаемом воздухе содержание кислорода уменьшается с 21 до 16%, а углекислого газа растет с 0,03 до 4%.

Второй пример относится к «интерфейсу» кровеносной и лимфатической систем. Область их взаимодействия – тканевая жидкость (рис. 5). В то время как объем крови в организме составляет 4–6 литров, а объем лимфы 2–4 литра, объем тканевой жидкости существенно больше – это 10–12 литров. Она заполняет все промежутки между клетками и состоит из плазмы крови. Из тканевой жидкости клетки снабжаются питательными веществами и в нее

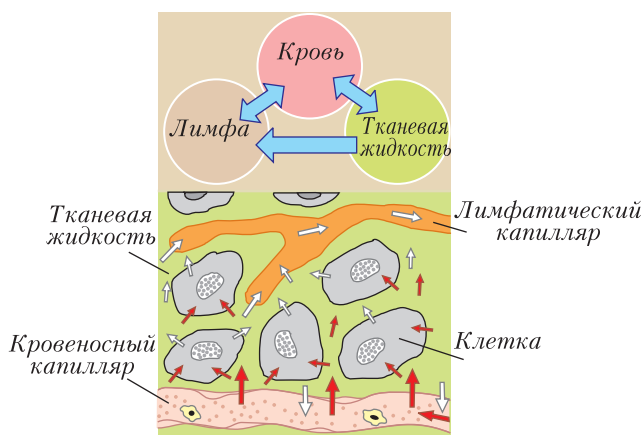


Рис. 5. Область взаимодействия крови, тканевой жидкости и лимфы

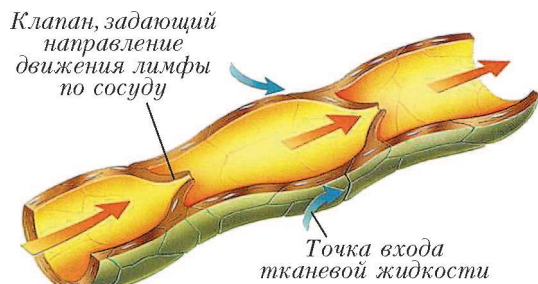


Рис. 6. Вид клапана в лимфатическом сосуде. Стрелкой показано направление движения лимфы

перемещаются продукты обмена клеток или сами отмирающие клетки.

Приводным механизмом движения крови по кровеносной системе, своеобразным насосом, являются сокращения сердца. В случае с лимфой ситуация иная: «насос» отсутствует, движение лимфы происходит против сил тяготения и довольно медленно. При сокращении мышц, окружающих лимфатические сосуды, лимфа проталкивается в одну сторону. Перемещению ее в обратную сторону мешают специальные клапаны (рис. 6). В результате именно подвижность самого человека служит мотором для лимфы. Больше движений – лучше выводятся вредные вещества. Меньше – вредные вещества накапливаются в организме.

Сравним скорость движения крови по кровеносной системе и лимфы по лимфатической и перекачиваемые объемы по обеим системам. В минуту через сердце проходит около 6 литров крови. При этом через стенки кровеносных капилляров фильтруется в тканевую жидкость 15 миллилитров. Из них в лимфатические сосуды в минуту поступает только 3 миллилитра жидкости, за сутки – до 4 литров. Разница перекачиваемых объемов за единицу времени – более трех порядков. Вместе с потоком лимфы весь «мусор» поступает в лимфатические узлы, в которых обезвреживается или уничтожается с помощью кле-

ток иммунной системы и далее удаляется из организма.

Много ли «мусора» образуется при работе мозга?

Мозг – еще один пример казалось бы изолированной от остального организма системы человека (от инфекций или лекарств, которые мы иногда принимаем). Нервные клетки – долгожители организма и требуют особо бережного отношения и защиты. Если приглядеться, то у мозга действительно имеется несколько барьеров защиты. Первый – от внешних воздействий, это прочная черепная коробка толщиной около 7 мм. Второй – также оберегающий от травм, это жидкость, в которой плавает мозг, она является демпфером при резких воздействиях. И, наконец, третий, самый загадочный, гематоэнцефалический барьер (ГЭБ) – между сетью кровеносных сосудов и тканями мозга. Барьер специфический и избирательный: через него в мозг поступают кислород и питательные вещества, а выводятся углекислый газ и продукты деятельности мозга. В то же время здоровый ГЭБ мозга должен быть непроницаем для бактерий, вирусов, принимаемых лекарств, а также опухолевых клеток.

Но что с отходами деятельности мозга? Ведь для работы мозга расходуется 20–25% от всей получаемой организмом энер-

гии (во время сна около 10%). Много энергии – много отходов: в течение месяца в мозге образуется более 100 граммов отработанных веществ, за год выходит 1,2–1,5 килограмма – примерно столько же, какова масса самого мозга.

Каким образом выводятся отходы из области мозга? В течение долгого времени (более ста лет) считалось, что в мозге лимфатические сосуды отсутствуют. Однако в последнее время между клетками мозга были обнаружены тонкие заполненные жидкостью каналы. По ним и происходит очищение мозга от отходов. Такая система, некий аналог лимфатической, получила похожее название – глимфатической.

Но когда это происходит? И на это недавно дан ответ: во время сна. Оказалось, что основная функция мозга во время сна заключается в удалении вредных веществ, накопившихся в дневное время. И лишь во вторую очередь мозг во время сна перерабатывает информацию и воспоминания дня. Именно поэтому организму необходимо треть жизни проводить во сне. Более того, оказалось, что клетки мозга во время сна уменьшаются в размерах. При этом увеличивается расстояние между клетками и облегчается вывод отходов.

Вот насколько важны сон в ночное время и движение днем!

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964. Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2790–M2792 предлагались на XLV Турнире городов.

Задачи Ф2797–Ф2800 предлагались на 85-й Московской олимпиаде школьников по физике.

Задачи M2790–M2793, Ф2797–Ф2800

M2790. Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

А.Юран

M2791. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовем клетку C хорошей, если в какой-то из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 1 больше, чем в C , а в какой-то другой из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 3 больше, чем в C . Каково наибольшее возможное количество хороших клеток?

А.Чеботарев

M2792. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две не находятся на одной высоте. Жук ползет снизу вверх; встречая палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого (самого левого) столбика, то он закончит свой путь на девятом (самом правом) столбике. Всегда ли можно убрать одну палочку так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика? (Например, если палочки расположены как на рисунке 1, жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью

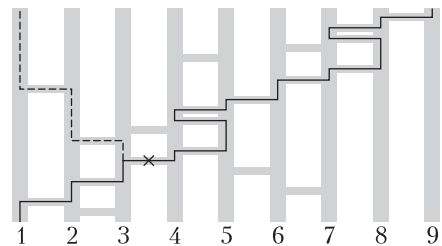


Рис. 1

палочку на пути жука, дальше он поползет по пунктирной линии.)

Г.Караваяев

M2793*. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < AC$) точка O – центр описанной окружности Ω (рис.2). Пусть касательная к Ω , проведенная в точке A , пересекает прямую BC в точке D . Пусть прямая DO пересекает отрезки AB и AC в точках E и F соответственно. Точка G построена так, что $AEGF$ – параллелограмм.

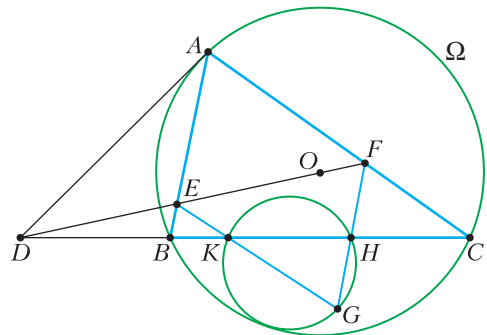


Рис. 2

рам. Пусть K и H – точки пересечения отрезка BC с отрезками EG и FG соответственно. Докажите, что окружность (GKH) касается окружности Ω .

Донг Луу (Вьетнам)

Ф2797. Обруч скользит по гладкой горизонтальной поверхности так, что плоскость обруча остается горизонтальной. Скорость оси обруча и частота его обращения вокруг этой оси, равная одному обороту в секунду, со временем не меняются. В некоторой точке обруча закреплена лампочка, ярко вспыхивающая через равные промежутки времени с частотой 4 раза в секунду. На фотографии, сделанной сверху с большой выдержкой с сохранением пропорций изображаемых предметов, можно видеть положение лампочки во время вспышек, следующих друг за другом. Рисунок 3 выполнен по фотографии, на нем

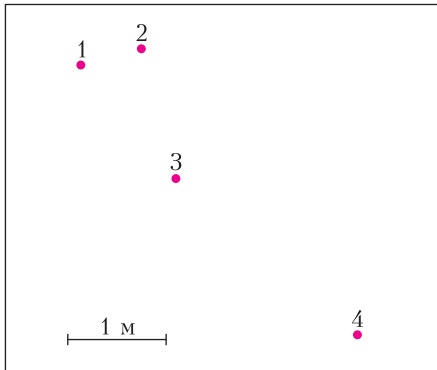


Рис. 3

точками обозначены места вспышек, а цифрами их номера в порядке появления. Используя линейку с делениями и циркуль, найдите скорость оси и радиус обруча. Отрезок, соответствующий расстоянию в 1 метр, показан в нижней части рисунка.

П.Крюков

Ф2798. Состояние одного моля идеального двухатомного газа изменяется в цикле, состоящем из процессов с постоянной теплоемкостью. На рисунке 4 изображен график зависимости работы, совершаемой газом, от количества теплоты, полученного или отданного им при достижении текущего состояния.

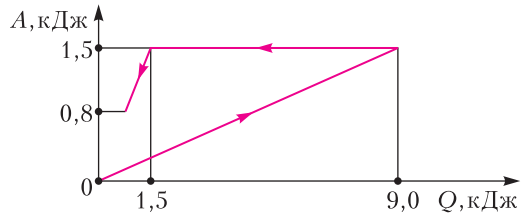


Рис. 4

А. Определите КПД цикла.

Б. Чему равна минимальная температура газа в этом циклическом процессе, если максимальная температура равна 481 К?
Примечание. Квазистатический процесс, при котором молярная теплоемкость газа c остается постоянной, описывается соотношением $pV^{(c-c_p)/(c-c_v)} = \text{const}$, где p и V – давление и объем соответственно, c_v и $c_p = c_v + R$ – это молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно.

А.Бычков

Ф2799. Идеализированная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента под названием туннельный диод изображена на рисунке 5. Условное обозначение туннельного диода на схемах показано в верхней части рисунка. Там же над символом диода указано положительное направление тока через него. Обозначенные на графике токи и напряжения I_1, I_2, U_1 и U_2 будем называть параметрами диода. Обозначенные на графике углы считаем равными.

А. Рассмотрим туннельный диод, параметры которого $I_1 = 4I_2 = 4i, U_2 = 4U_1 = 4u$, при этом значения i и u считаются известными. Этот диод подключили к идеальному источнику с напряжением $U_0 = 6u$ последовательно с переменным резистором, со-

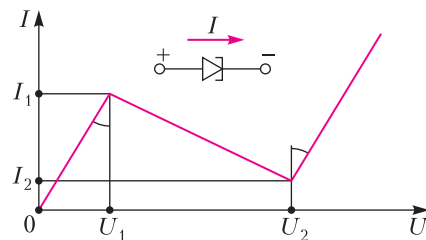


Рис. 5

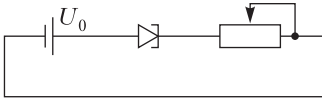


Рис. 6

противление которого может меняться в широких пределах (рис. 6). При каких значениях сопротивления резистора значение тока в цепи определяется однозначно?

Б. Параметры другого туннельного диода $I_1 = 10$ мА, $I_2 = 1$ мА, $U_1 = 0,2$ В, $U_2 = 0,8$ В. При помощи этого диода и балластного резистора R_0 собрали цепь по схеме, показанной на рисунке 7. Известно, что ток

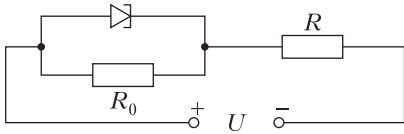


Рис. 7

через резистор R в этой цепи имеет одно и то же значение при любом входном напряжении из диапазона $U = 3,2 \pm 0,2$ В.

Б1) Найдите сопротивление балластного резистора R_0 .

Б2) Чему может быть равно сопротивление нагрузки R ? Укажите границы диапазона возможных значений R_{\min} и R_{\max} .

П.Крюков

Ф2800. Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющей фотоаппарат и объект съемки). Наклон оптической оси дает возможность получать резкие изображения протяженных предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата. На упрощенной схеме, представленной на рисунке 8, собирающая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива отклонена на угол φ от линии зрения AA_1 , составляющей угол α с горизонталью. Фотографируемый предмет изображается отрезком BC , pp_1 – плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или пленка, если речь идет о пленочной камере). Пусть известны расстояние $AB = 5$ м по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние

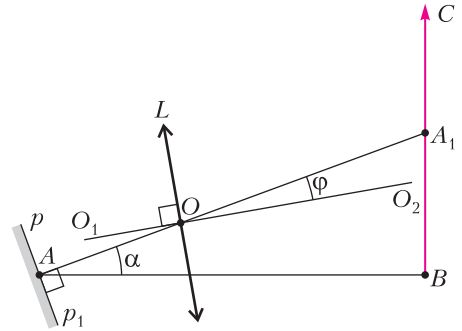


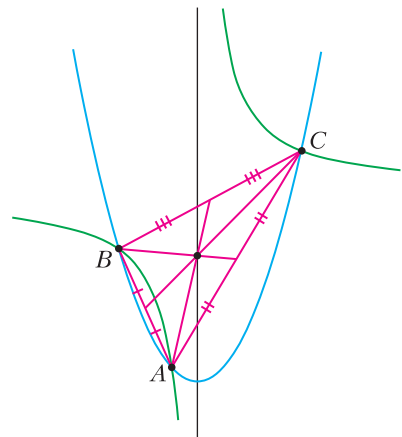
Рис. 8

объектива $f = 50$ мм, а также угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота главной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ , считая его малым. *Указание.* Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближенные соотношения $\sin \beta \approx \beta$, $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$.

П.Крюков

Решения задач М2778–М2781, Ф2785–Ф2788

М2778. На координатной плоскости (см. рисунок) нарисованы парабола (график квадратичной функции) и гипербола (график дробно-линейной функции). При этом графики пересекаются в трех точках A , B , C , а ось параболы является асимптотой гиперболы. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на оси параболы.



Параллельно перенесем графики так, чтобы ось параболы стала осью Oy , тогда уравнение параболы будет иметь вид $y = ax^2 + c$, а уравнение гиперболы – вид $y = \frac{k}{x} + d$. Абсциссы x_A, x_B, x_C точек пересечения графиков удовлетворяют уравнению $ax^2 + c = \frac{k}{x} + d$. Домножив обе части на x и выполнив перенос в левую часть, получаем кубическое уравнение $ax^3 + (c - d)x - k = 0$, и x_A, x_B, x_C являются корнями этого уравнения (при этом, очевидно, различными корнями). Коэффициент при x^2 равен нулю, поэтому по теореме Виета имеем $x_A + x_B + x_C = 0$. Значит, абсцисса точки M пересечения медиан равна $x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0$, что нам и нужно доказать.

П.Кожевников

M2779. Докажите, что для любого натурального k найдется натуральное n такое, что

$$\begin{aligned} \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n) = \\ = \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots, n + k). \end{aligned}$$

Если из ряда первых n ($n \geq 2$) натуральных чисел $1, 2, \dots, n$ оставить только степени простых чисел (включая первую степень, т.е. сами простые числа), а остальные числа вычеркнуть, то НОК чисел останется прежним, т.е. будет равен $\text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n)$. Действительно, если вычеркнуть число $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $k \geq 2$ (а p_i – различные простые, входящие в разложение с показателями $\alpha_i \geq 1$), то НОК оставшихся чисел будет делиться на n , поскольку в ряду останутся числа $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}$.

Значит, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n) = \\ = \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots, n + k), \end{aligned}$$

достаточно (а на самом деле и необходимо), чтобы среди чисел $n + 1, n + 2, \dots, n + k$ не было степеней простых чисел (включая первую степень).

Этого можно добиться следующим образом. Возьмем $2k$ различных простых чисел p_1, p_2, \dots, p_{2k} . Согласно китайской теореме об остатках, можно выбрать натуральное n , удовлетворяющее одновременно следующим условиям: $n \equiv -1 \pmod{p_1 p_{k+1}}$, $n \equiv -2 \pmod{p_2 p_{k+2}}$, ..., $n \equiv -k \pmod{p_k p_{2k}}$. Тогда $n + i$ делится на $p_i p_{i+k}$ для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ и поэтому не является степенью простого числа. Этим завершено решение задачи.

Отметим, что похожим рассуждением можно доказать и более сильное утверждение о существовании n , для которого ни одно из чисел $n + 1, n + 2, \dots, n + k$ не является простым числом или точной степенью (большей 1).

В завершение скажем, что функция $f(n) = \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n)$ играет важное значение в теории чисел. Ясно, что $f(n + 1)$ делится на $f(n)$, причем несложно устано-

вить, что частое $\frac{f(n + 1)}{f(n)}$ может равняться

только 1 или простому числу. Функция $g(n) = \ln f(n)$ известна как функция Чебышева. Известно, что она имеет линейный рост, так что $g(n) = n(1 + \alpha(n))$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$.

П.Кожевников

M2780. Хроматическим числом графа называется минимальное количество цветов, в которое можно покрасить его вершины так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были покрашены в разные цвета. Дано натуральное число $n \geq 3$ и граф G с хроматическим числом $\chi(G) = n$, у которого больше чем n вершин. Докажите, что в G найдутся два не пересекающихся по вершинам подграфа G_1 и G_2 такие, что $\chi(G_1) + \chi(G_2) \geq n + 1$.

Кликкой называют множество вершин, в котором любая пара вершин соединена ребром. Выберем в G максимальную клику K , т.е. клику, состоящую из максимального количества вершин, и пусть это вершины A_1, \dots, A_k . Ясно, что $\chi(K) = k$. Из условия следует, что $2 \leq k \leq n$ и что K не совпадает с G .

Покажем, что $G_1 = K$ и $G_2 = G \setminus K$ и дадут нам нужное разбиение. При $k = n$ это ясно. Пусть далее $k < n$. Достаточно показать, что $\chi(G_2) > n - k$, т.е. что G_2 нельзя покрасить правильным образом в $n - k$ (или менее) цветов. Пусть, напротив, вершины G_2 покрашены правильным образом в $n - k$ цветов $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$. Покрасим k вершин A_1, A_2, \dots, A_k соответственно в разные (и отличные от $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$) цвета c_1, \dots, c_k . Тем самым мы получим правильную раскраску всех вершин графа G в n цветов. Теперь перекрасим все вершины цвета c_n по такому правилу: для вершины A цвета c_n выберем среди вершин A_1, \dots, A_k какую-то вершину A_i , не соединенную с ней (такая найдется, иначе A можно было бы добавить к A_1, \dots, A_k и получить клику на $(k + 1)$ вершинах), и далее перекрасим A в цвет c_i . Поймем, что после такой перекраски всех вершин цвета c_n мы получим правильную покраску вершин графа G в $n - 1$ цвет. Тогда получим противоречие, которое завершит решение.

Действительно, вершины цвета c_j , где $j \in \{k + 1, \dots, n - 1\}$, по-прежнему не соединены друг с другом. Вершины цвета c_j , где $j \in \{1, \dots, k\}$, не соединены друг с другом, поскольку до перекраски все эти вершины, кроме одной вершины A_j , имели один цвет c_n , а по правилу перекраски ни одна из них не соединена с A_j .

В.Дольников

M2781*. См. статью А.Терёшина в этом номере журнала.

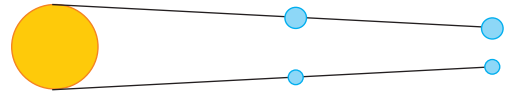
Ф2785. *Астроном-любитель Вася вычислил, что 21.03.2103 года ожидается интересное явление: с Земли будет видно, как Венера пройдет на фоне Солнца по его диаметру, и начнется это прохождение в 08:00:00 по московскому времени. В течение какого времени смогут наблюдать это явление жители Москвы, Нью-Йорка и Пекина, если им повезет и небо над их головами будет безоблачным? Географические координаты Москвы: $55^\circ 45' 21''$ с.ш., $37^\circ 37' 04''$ в.д.; Нью-Йорка: $40^\circ 42'$ с.ш., $-74^\circ 0'$ в.д.; Пекина: $39^\circ 54' 27''$ с. ш., $116^\circ 23' 49.2''$ в.д. Известно, что Венера делает оборот вокруг*

Солнца за 243 земных суток, а Земля за 365,25 суток. Среднее расстояние от Венеры до Солнца 108 млн км, а среднее расстояние от Земли до Солнца 150 млн км.

День, в который произойдет такое событие, – это день весеннего равноденствия, когда длительность нахождения Солнца над горизонтом равна длительностям предшествовавшей ночи и последующей ночи, т.е. равна ровно 12 часам. В этот день восход Солнца по местному времени происходит в 6 утра, а заход – в 6 вечера. Московское время и время по Гринвичу (GMT) отличаются на 3 часа. Например: если сейчас по Гринвичу 18:05, то по Москве это 21:05. Это означает, что жители Гринвича смогут наблюдать событие только через один час после его начала. В этот момент в Нью-Йорке полночь, и его жителям ждать придется 6 часов, чтобы Солнце поднялось над горизонтом. А в Пекине начало события приходится на $8 + 5 = 13$ часов местного времени.

Найдем время прохождения Венеры по диску Солнца при наблюдении с Земли (из любого места, где в это время день).

На рисунке показано расположение Солнца (оно считается неподвижным) и планет, соответствующее началу и концу наблюда-



емого события. Угловой размер Солнца около $0,5^\circ$. Направления движения планет на рисунке – «вверх». Скорости (орбитальные) движения Венеры и Земли равны, соответственно,

$$v_B = \frac{2\pi L_B}{T_B} = \frac{2\pi \cdot 108}{243} = 2,792527,$$

$$v_Z = \frac{2\pi L_Z}{T_Z} = \frac{2\pi \cdot 150}{365,25} = 2,5803636.$$

Скорости численно выражены в миллионных километрах за земные сутки. Время прохождения Венеры по диску Солнца обозначим через T . Угол $0,5^\circ$ в радианах равен $\approx 0,008727$. Уравнение для вычисле-

ния искомого времени такое:

$$L_{3-C}\alpha = T \left(v_3 + \frac{L_{3-C}(v_B - v_3)}{L_{3-C} - L_{B-C}} \right).$$

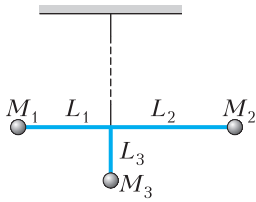
Из этого уравнения получаем величину промежутка времени между началом прохода Венеры по диску Солнца и его окончанием, выраженную в часах:

$$T \approx 3 \text{ часа.}$$

Следовательно, жители Москвы и Пекина, если им повезет с погодой, увидят это явление во всех подробностях, а вот жителям Нью-Йорка увидеть такое событие собственными глазами, находясь в своем городе, не удастся (разве что по телевизору).

В.Астрономов

Ф2786. Жесткую конструкцию с указанными на рисунке значениями точечных масс на концах и длин участков невесомых стержней удерживают в неподвижности, а выпрямленная длинная невесомая и нерастяжимая веревка прикреплена верхним концом к потолку и занимает вертикальное положение. Конструкцию отпускают, не придав ей движения. С какими ускорениями будут двигаться грузы сразу после освобождения?



Введем систему координат с началом отсчета в точке крепления веревки к месту соединения горизонтального и вертикального стержней. Пусть вдоль горизонтального стержня от первого груза ко второму направлена одна из горизонтальных осей x , вторая горизонтальная ось z перпендикулярна горизонтальному стержню, а ось y направлена вниз вдоль вертикального стержня. Вдоль оси z грузы и точки стержней не движутся совсем. А поскольку в условии указано, что веревка длинная и в начальный момент расположена вертикально, то это означает, что груз M_3 (нижний) и место крепления веревки к стержням в начальный момент могут двигаться только вдоль горизонтальной оси x . В начальный

момент все внешние силы, действующие на систему (силы тяжести и сила натяжения веревки), направлены вертикально, значит, центр масс системы движется в начальный момент в вертикальном направлении. Как результат, можно считать, что для начального момента движения имеется неподвижный центр вращения системы, относительно которого она начинает вращаться с некоторым угловым ускорением, обозначим его β . Расположен этот мгновенный центр вращения на вертикальном стержне ниже точки крепления на расстоянии от начала отсчета, равном вертикальной координате центра масс системы

$$y_{\text{цм}} = \frac{M_3 L_3}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Относительно этого мгновенного центра вращения центр масс системы находится на том же горизонтальном уровне с координатой x , равной

$$x_{\text{цм}} = \frac{-L_1 M_1 + L_2 M_2}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Момент всех внешних сил относительно мгновенного центра вращения равен

$$(M_1 + M_2 + M_3) g x_{\text{цм}} = (-L_1 M_1 + L_2 M_2) g.$$

Момент инерции всех грузов системы относительно мгновенного центра вращения равен

$$J = M_1 (L_1^2 + y_{\text{цм}}^2) + M_2 (L_2^2 + y_{\text{цм}}^2) + M_3 (L_3 - y_{\text{цм}})^2.$$

Мгновенное угловое ускорение равно отношению момента сил к моменту инерции системы:

$$\beta = \frac{(-L_1 M_1 + L_2 M_2) g}{J}.$$

Линейное ускорение каждого из грузов равно по величине произведению углового ускорения β на расстояние s от этого груза до мгновенного центра вращения и направлено перпендикулярно отрезку, соединяющему мгновенный центр вращения с этим грузом. Расстояния s равны, соответственно,

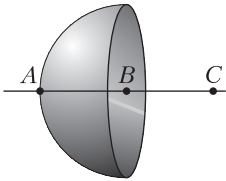
$$s_1 = \sqrt{L_1^2 + y_{\text{цм}}^2}, \quad s_2 = \sqrt{L_2^2 + y_{\text{цм}}^2}, \quad s_3 = L_3 - y_{\text{цм}}.$$

Заметим, что направление вращения системы вокруг мгновенного центра вращения (если оно возникает) зависит от знака углового ускорения β . Если $\beta > 0$, то вращение происходит по часовой стрелке, а если $\beta < 0$, то вращение будет проходить против часовой стрелки. Кстати, возможен и такой случай, когда вращение не возникает; это будет при выполнении условия

$$L_1 M_1 = L_2 M_2.$$

Д. Грузов

Ф2787. Точки A , B , C находятся на оси симметрии однородно заряженной полусферы (см. рисунок): точка A вблизи «дна» полусферы, точка B в ее центре, точка C на расстоянии радиуса полусферы от точки B . Из точки A стартует с нулевой начальной скоростью заряженная частица. Знаки всех зарядов одинаковы.



В точке B частица движется со скоростью v_B . Найдите скорость v_C частицы в точке C .

Докажем, что при перемещении из точки A в точку B и далее из B в C убыль потенциала одинакова (для определенности считаем, что все заряды положительные).

Первый способ. Нулевое поле в любой точке, находящейся в однородно заряженной сфере, можно представлять как суперпозицию полей двух полусфер (сферу пересекаем плоскостью большого круга, перпендикулярной диаметру, на котором лежит эта точка). Полученные две полусферы создают равные по модулю векторы напряженности, сумма которых равна нулю во всех точках произвольного диаметра сферы. Это означает, что напряженность E поля полусферы одинакова в любых двух лежащих на оси симметрии точках, каждая из которых находится от центра полусферы на любом расстоянии $d < R$. Отсюда получаем $\varphi_A - \varphi_B = \varphi_B - \varphi_C$.

Второй способ. Если дополнить полусферу

до сферы, то по принципу суперпозиции потенциал в центре сферы удвоится и будет равен $2\varphi_B$. Поле внутри сферы нулевое, следовательно, потенциал в точке A будет также равен $2\varphi_B$. Этот потенциал будет суммой потенциала φ_A , создаваемого в этой точке левой полусферой, и потенциала, создаваемого правой (добавленной) полусферой. Вклад правой полусферы, вследствие симметрии, равен потенциалу, создаваемому левой полусферой в точке C , т.е. φ_C . Таким образом, получаем соотношение $2\varphi_B = \varphi_A + \varphi_C$, откуда $\varphi_A - \varphi_B = \varphi_B - \varphi_C$. Далее, по теореме об изменении кинетической энергии материальной точки имеем

$$\frac{mv_B^2}{2} = q(\varphi_A - \varphi_B),$$

$$\frac{mv_C^2}{2} = q(\varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_C).$$

Отсюда следует

$$v_C = \sqrt{2}v_B.$$

Примечание. Читателям рекомендуется изучить пример решения задачи электростатики путем построения суперпозиции полей сфер и полусфер. Такая задача была опубликована в журнале «Квант» №6 в 2000 году (задача Ф1762, ее автор Г. Григорян).

В. Плис

Ф2788. На заходе или восходе видимая форма полной Луны мало (но все-таки заметно) отличается от круга при наблюдении с поверхности Земли. А вот при съемке этого же события с борта космической станции Луна приобретает форму «булочки», такой, что радиус кривизны в ее верхней (над Землей) части гораздо меньше радиуса кривизны в нижней (обращенной к Земле) стороне (см. рисунок). Как это можно объяснить?

Скорость света в среде (в частности, в воздухе) меньше, чем скорость света в вакууме. Поэтому при прохождении света через границу раздела сред с разными скоростями распространения света в них происходит изменение направления распространения луча света (луч преломляется, если граница резкая). В рассматрива-



емом случае движения света в атмосфере свойства среды изменяются не резко, а плавно. Вместе с изменением плотности воздуха по мере приближения к поверхности Земли изменяется и направление вертикали, в котором плотность изменяется наиболее быстро (т.е. вертикали в разных местах траектории луча света не являются параллельными линиями). Если, например, считать, что толщина слоя атмосферы на Земле составляет примерно 32 км (на этой высоте плотность воздуха составляет примерно 1% от плотности воздуха вблизи поверхности Земли на уровне моря), то при величине радиуса Земли примерно 6400 км длина пути света, падающего по касательной к поверхности Земли, от места входа в атмосферу до поверхности Земли составляет (без учета рефракции) примерно 640 км. При этом вертикали для места входа в атмосферу и в месте касания лучом света поверхности Земли составляют совсем не малый угол – примерно 0,1 рад, или около $5,7^\circ$. При учете явления рефракции длина пути будет еще больше, и рассматриваемые вертикали будут образовывать еще больший угол. Эксперименты, проводимые в нормальных условиях, показывают, что видимая на самом горизонте (высота над горизонтом 0°) звезда на

самом деле уже опустилась ниже горизонта примерно на 35 угловых минут. Иными словами, мы, находясь на поверхности Земли, видим светящиеся космические объекты, находящиеся в телесном угле, большем 2π . Если бы Земля была плоской и над ней была бы атмосфера с такой же плотностью вблизи поверхности, как у настоящей Земли, то в этом случае мы видели бы светящиеся объекты, расположенные в телесном угле, равном 2π . При этом нам бы казалось, что угол, под которым они нам видны, меньше 2π , т.е. свет космических объектов приходил бы к нам (находящимся на поверхности Земли) по направлениям, которые с горизонтом образуют угол не меньше угла рефракции. Оценим величину такого угла для плоской Земли. Коэффициент преломления света в воздухе при нормальных условиях равен примерно $n = 1,00028$. Согласно закону преломления, отношение синусов углов падения и преломления равно отношению скоростей света в соответствующих средах. Отсюда следует, что минимальный угол с горизонтом, который образуют лучи света, пришедшего от объектов вне атмосферы, для плоской Земли будет равен $\arccos(1/n) \approx 1,35^\circ = 81$ угл. мин. Ниже приведена взятая из интернета таблица, в которой указаны видимая угловая высота точечного источника света (звезды) с по-

Видимая (искаженная рефракцией) высота, градусы	Величина рефракции, минуты дуги
90	0
70	0,4
50	0,8
30	1,7
20	2,6
10	5,3
5	9,9
4	11,8
3	14,4
2	18,4
1	24,7
0	35,4

верхности Земли и соответствующая ей величина рефракции для нормальных атмосферных условий.

Точные расчеты угла атмосферной рефракции в зависимости от реальной угловой высоты объекта над горизонтом – задача непростая, но астрономы ее успешно решают. А в данном случае при наблюдении с борта космической станции восхода или захода светила (Луны или Солнца) над горизонтом свет, испущенный светилом, дважды проходит атмосферу – сначала попадая из менее плотных в более плотные слои и проходя над поверхностью Земли,

а затем в обратной последовательности от поверхности Земли к верхним слоям атмосферы. При этом слои воздуха разной плотности сменяют друг друга на траектории луча света. При таком прохождении атмосферы луч света поворачивается в одном и том же направлении два раза. Поэтому для наблюдателей–космонавтов видимая деформация светила, проявляющаяся в сплющивании нижней части, в два раза больше, чем для наблюдателей, находящихся на поверхности Земли.

С.Лунин

Про треугольник $A_2B_2C_2$

А. ТЕРЁШИН

В этой статье мы приведем решение одной геометрической задачи, которая предлагалась на Южном математическом турнире и затем вошла в задачник «Кванта». Кроме того, рассматривая данную конструкцию, мы получим некоторые интересные результаты, в частности передокажем теорему Фейербаха.

Задача М2781. Пусть точка A_1 – середи́на меньшей дуги BC описанной около остроугольного треугольника ABC окружности (рис. 1). Точку A_1 отразили относительно стороны BC , а затем ее образ отразили относительно биссектрисы угла BAC и получили точку A_2 . Аналогично получили точки B_2 и C_2 . Докажите, что прямая Эйлера треугольника $A_2B_2C_2$ проходит через центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

Решение задачи

Обозначим через O и I центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC . Пусть l – перпендикуляр к отрезку OI , проходящий через точку I .

Лемма 1. Точка, симметричная точке A_2 относительно l , лежит на прямой OA_1 .

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20240403>

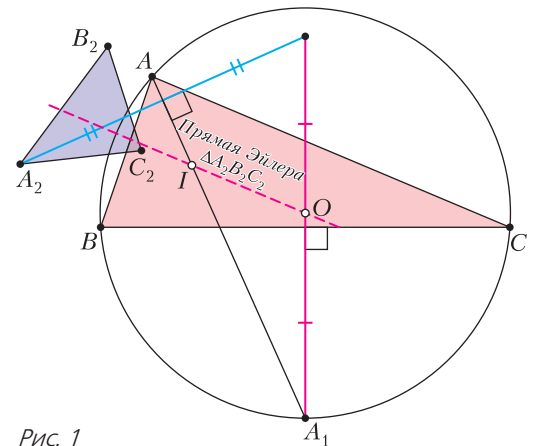


Рис. 1

Доказательство. Отметим точку A'_2 пересечения прямой OA_1 и перпендикуляра из точки A_2 на l (рис. 2). Пусть точка A'_1 симметрична точке A_1 относительно BC . Треугольник $A_1CA'_1$ подобен треугольнику A_1OC как равнобедренный с углом OA_1C при основании. Значит, $OA_1 \cdot A_1A'_1 = A_1C^2 = A_1I^2$ (последнее равенство следует из леммы о трезубце), что равносильно подобию треугольников $A_1IA'_1$ и A_1OI , откуда следует равенство углов $\angle A_1A'_2A_2 = \angle A_1OI = \angle A_1IA'_1 = \angle A_1IA_2$ (первое равенство следует из параллельности прямых OI и $A_2A'_2$, а последнее – из симметрии). Из равенства углов $A_1A'_2A_2$ и A_1IA_2 следует, что четырехугольник $A_1A'_2IA_2$ вписанный. Прямая A_1I – биссектриса угла $A_2A_1A'_2$, т.е. точка I лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $A_2A'_2$, откуда следует симметрия точек A_2 и A'_2 относительно l . Лемма доказана.

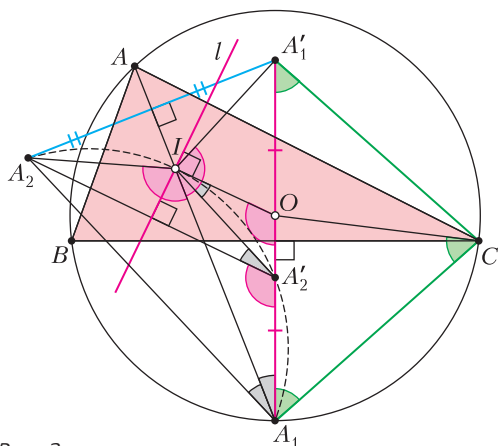


Рис. 2

Далее, $\angle OIA'_2 = \angle IA'_2A_2 = \angle OA_1I$, откуда треугольники OIA'_2 и OA_1I подобны, поэтому $OA'_2 = \frac{OI^2}{OA_1} = \frac{OI^2}{R}$. Из последнего равенства видим, что длина отрезка OA'_2 не зависит от вершины A , поэтому для аналогичных точек B'_2 и C'_2 точка O равноудалена от всех трех вершин треугольника $A'_2B'_2C'_2$, откуда следует, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'_2B'_2C'_2$ гомотетичны с центром в точке O (рис. 3). Как известно, I является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$, т.е. прямая OI является прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$, которая при гомотетии с центром в точке O переходит в себя, т.е. прямая Эйлера треугольника $A'_2B'_2C'_2$ проходит через точки O и I , а значит, прямая Эйлера треугольника $A_2B_2C_2$, симметричного треугольнику $A'_2B'_2C'_2$ относительно l , тоже проходит через точки O и I . Задача решена!

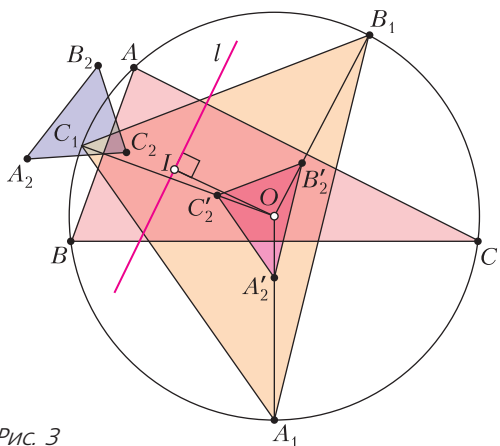


Рис. 3

Из приведенного решения следует, что описанная окружность треугольника A_1A_2I касается прямой OI , откуда получаем следствие.

Следствие. Описанные окружности треугольников A_1A_2I , B_1B_2I и C_1C_2I касаются в точке I .

Связь с ортоцентром

Отметим ортоцентр H треугольника ABC (рис. 4). Оказывается, тогда справедливы несколько интересных свойств.

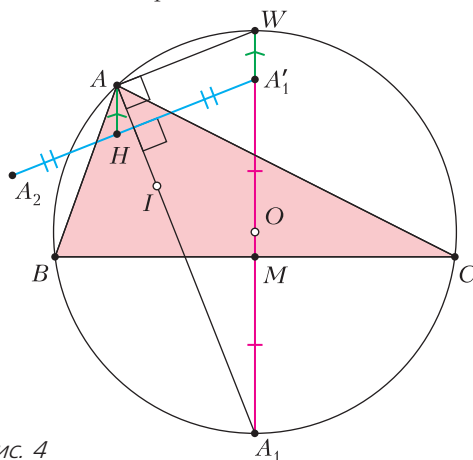


Рис. 4

Свойство 1. Перпендикуляры, опущенные из точек A_2, B_2, C_2 (или A'_1, B'_1, C'_1) на соответствующие биссектрисы треугольника ABC , все проходят через точку H .

Доказательство. Нам достаточно доказать, что $A'_1H \perp AA_1$. Отметим середину M отрезка BC и точку W , диаметрально противоположную точке A_1 . Поскольку WA_1 – диаметр описанной окружности, то $AW \perp AA_1$, поэтому достаточно доказать, что $HAWA'_1$ – параллелограмм. Для этого покажем, что $AH = WA'_1$, так как эти отрезки уже параллельны, поскольку они оба перпендикулярны BC . Как известно,

$$AH = 2OM = 2(OA_1 - MA_1) = WA_1 - A'_1A_1 = WA'_1.$$

Свойство 2. Точки A_2, B_2, C_2, H лежат на одной окружности.

Доказательство. Пусть точка H лежит внутри угла $B_2A_2C_2$ (рис. 5), другие расположения точек рассматриваются аналогично. Поскольку $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$, получаем, что $\angle A_2B_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$. Заметим, что $A_2H \parallel B_1C_1$, так как обе эти прямые перпен-

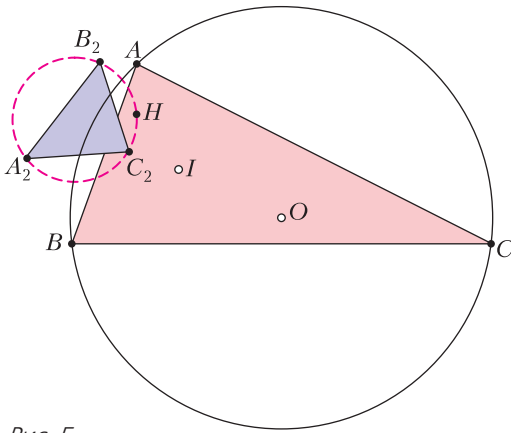


Рис. 5

дикулярны прямой AA_1 . Действительно, $A_2H \perp AA_1$ по свойству 1, а $B_1C_1 \perp AA_1$, например, потому, что полусумма дуг AC_1 и A_1B_1 равна четверти всей окружности. Таким образом, $A_2H \parallel B_1C_1$, $C_2H \parallel A_1B_1$ и $\angle A_2HC_2 = \angle A_1B_1C_1$, откуда $\angle A_2B_2C_2 = \angle A_2HC_2$ и точки A_2, B_2, C_2, H лежат на одной окружности.

Новое доказательство теоремы Фейербаха

Вспомним, что ранее в решении задачи мы выяснили, что описанная окружность тре-

угольника $A_2B_2C_2$ имеет центр O и радиус $\rho = \frac{OI^2}{R}$. По формуле Эйлера получаем, что $\rho = \frac{R^2 - 2Rr}{R} = R - 2r$, где r – радиус вписанной окружности треугольника ABC . Тогда из свойства 2 и симметрии относительно l следует, что точка H_1 , симметричная H относительно l , удалена от точки O на расстояние $R - 2r$. А это, в свою очередь, эквивалентно тому, что точка H' , симметричная H относительно I , удалена от точки O на расстояние $R - 2r$, поскольку точки H_1 и H' симметричны относительно прямой OI . Отметим точку O_9 – центр окружности девяти точек треугольника ABC . Как известно, O_9 – середина отрезка OH . Тогда O_9I – средняя линия треугольника HOH' , поэтому выполняется равенство $O_9I = \frac{R - 2r}{2} = \frac{R}{2} - r$. Напомним,

что окружность девяти точек имеет радиус $\frac{R}{2}$, т.е. мы получили, что расстояние между

центрами вписанной окружности и окружности девяти точек равно разности их радиусов, а это означает, что они касаются. Мы получили новое доказательство теоремы Фейербаха!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

Морис Крайчик

К.КНОП

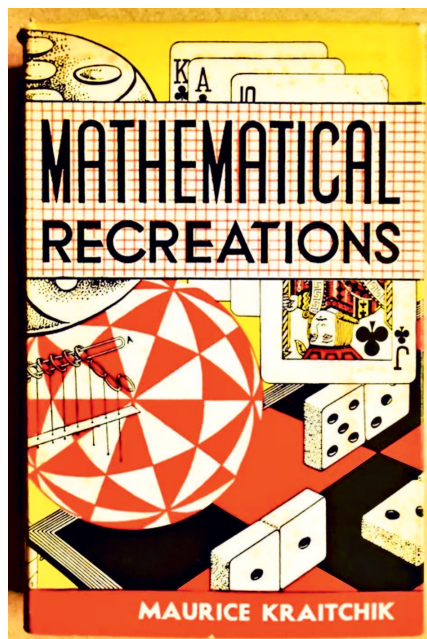
МОРИС КРАЙЧИК (21 АПРЕЛЯ 1882 года – 19 августа 1957 года) обычно считается бельгийским математиком и популяризатором науки. Родился он в Минске в еврейской семье (отец – Борис Крайчик, мать – Соня Кауфман). После окончания школы поехал учиться математике в Бельгию, где поступил в университет Льежа. В 1923 году он защитил диссертацию по теории чисел. В 1922–1930 годах и

после эмиграции написал несколько книг по теории чисел, а с 1931 по 1939 год издавал журнал «Сфинкс» (Sphinx), посвященный занимательной математике. Во время Второй мировой войны эмигрировал в Соединенные Штаты, где преподавал курс «Занимательная математика» в Новой школе социальных исследований в Нью-Йорке. После войны вернулся в Европу. В течение жизни сменил немало профессий: работал то инженером, то юристом, то профессором в Свободном университете

Брюсселя. Был женат. Умер в Брюсселе.

Сложно найти какие-либо подробности жизни Мориса Крайчика. Судя по всему, Крайчик был неплохим шахматистом – в 1930-е годы в шахматном клубе Брюсселя он давал сеансы одновременной игры вслепую на 15 досках. А одну из его партий, закончившуюся быстрой победой, в 1902 году опубликовал шахматный раздел «Минского листка»: 1. f4 e5 2. fe d6 3. ♖f3 de 4. ♗:e5 ♜d6 5. ♖f3 h6 6. h3?? ♜g3x. Кроме того, Крайчик давал представления, где удивлял всех способностями устного счета.

Из личных математических достижений можно упомянуть метод факторизации Крайчика–Ферма, позднее усовершенствованный Карлом Померанцем и получивший название квадратичного решета. Но даже если бы Крайчик написал только книгу «Математические развлечения» – этого уже было бы достаточно для благодарной памяти потомков. Первое (брюссельское) издание этой книги в 1930 году содержало 566 страниц! К счастью, сделал и оставил после себя он намного больше. Например, в 1935 и 1937 годах именно им были организованы международные конгрессы по занимательной математике, приуроченные ко Всемирным выставкам (в 1935 – в Брюсселе, в 1937 – в Париже) и напечатаны сборники докладов и выступлений этих конгрессов. Любопытно, что на первом конгрессе принимал участие знаме-



Обложка книги «Математические развлечения»

нитый популяризатор точных наук Яков Исидорович Перельман.

Самое интересное и загадочное (во всех смыслах) детище Крайчика – это журнал «Сфинкс». Несмотря на его уникальность в истории (а много ли вы еще знаете журналов, целиком посвященных занимательной математике?), в интернете до сих пор нет ни одного отсканированного номера из сотни вышедших (1931–1939, по 12 журналов в год). Именно в этом издании впервые появилось название *cryptarithm* для математических ребусов, в которых цифры заменены буквами, и стали регулярно печататься такие ребусы. Там же были опубликованы первые задачи с танграмом – головоломкой, в которой из семи простых фигурок предлагается складывать самые разные рисунки. Всевозможные околошахматные задачи, задачи о магических квадратах, переливаниях и переправах, да и многое другое, что сейчас кажется абсолютно классической частью задач на математических кружках, – все это тоже было вытащено из забвения неутомимым Крайчиком. И в этом же журнале он впервые поместил свою «формулу для

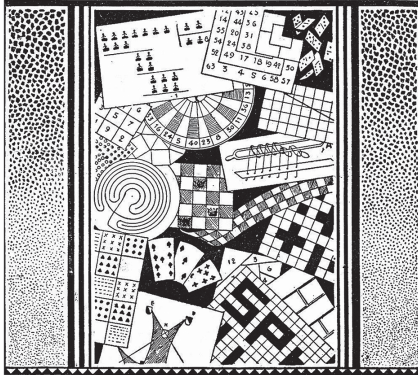


Морис Крайчик (средний в верхнем ряду, смотрит влево) на Международном математическом конгрессе в Цюрихе в 1932 году



REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

Administration : « SPHINX », 75, RUE PHILIPPE BAUCQ, BRUXELLES. Téléphone 33,48,58
R. C. Bruxelles 51922 Cheques Postaux : Bruxelles 192328 - Paris 165061



Обложка журнала «Сфинкс»

дня недели», позволяющую найти день недели по дате в григорианском календаре:

$$k = d + 2m + \left[\frac{3(m+1)}{5} \right] + y + \left[\frac{y}{4} \right] - \left[\frac{y}{100} \right] + \left[\frac{y}{400} \right] + 2,$$

где d – число, m – номер месяца от 3 до 14 (январь в формуле считается 13-м месяцем предыдущего года, а февраль – 14-м), y – год. Для получения дня недели надо взять остаток от деления k на 7, при этом воскресенье соответствует 1, понедельник – 2, ... , суббота – 0.

В теории вероятностей получил известность придуманный Крайчиком «парадокс двух конвертов». Вот он в формулировке, приведенной позднее Мартином Гарднером:

Два человека, одинаково богатые, встречаются, чтобы сравнить суммы в своих кошельках. Каждый не знает содержимого кошелька другого. «Правила игры» устроены так: тот, у кого денег меньше, получает содержимое кошелька другого (если суммы равны, ничего не происходит). Тогда каждый из двоих может рассуждать так: «Пусть у меня в кошельке есть сумма S . Если я проиграю, то потерю ровно S . А если выиграю (с

вероятностью 0,5), то сумма, которая будет у меня в конце игры, будет больше $2S$. Поэтому игра для меня выгодна». Но игра не может быть выгодна обоим игрокам. Где ошибка в их рассуждениях?

Приведем несколько задач Мориса Крайчика и задач из его журнала «Сфинкс».

1. Звонок по телефону.

– Алло, это номер 257-6923?

– Да, а кто это говорит?

– А по голосу не узнала? Тогда отгадай. Моя мама – свекровь твоей мамы.

Кем звонящий приходится абоненту?

2. Восемь маленьких паучат находятся на одной из вертикальных стен комнаты в 80 дюймах над точкой пола, которая находится точно посередине этой стены. Муха сидит на противоположной стене комнаты ровно в 80 дюймах под точкой потолка, которая также находится посередине стены. По сигналу все паучата одновременно начинают ползти к мухе по восьми различным маршрутам и достигают ее одновременно – каждый прополз ровно 650 дюймов. Найдите размеры комнаты.

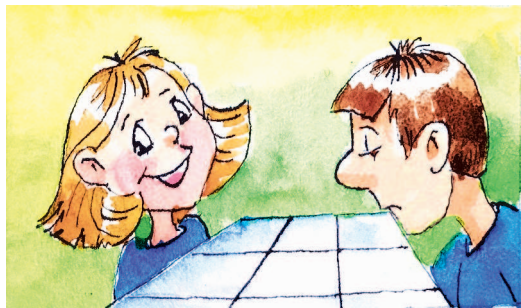
3. Винодел заготовил 45 бочонков с вином, которые он хочет разделить между пятью своими племянниками так, чтобы каждому досталось по 9 бочонков и поровну вина. Среди этих 45 бочонков – 9 пустых, 9 наполненных на четверть, 9 наполовину полных, 9 полных на три четверти и 9 полных. Кроме того, он хочет, чтобы каждому достался по крайней мере один бочонок каждой полноты и чтобы никакие двое не получили одинаковые наборы бочонков. Как ему справиться с дележом? (Крайчик приводит полное решение задачи, а не просто находит один годный вариант!)

4. Питер, Пол и их сыновья Том и Ричард покупали книги. Когда они вышли из магазина, то выяснилось, что каждый купил столько книг, сколько стоила каждая из купленных им, а каждая семья потратила на покупку одну и ту же сумму, причем меньше 100 долларов. Питер купил на 5 книг больше, чем Том. Кто отец Ричарда?

5. Найдите наименьшее натуральное число вида $12n - 1$, не делящееся на 5, которое не является простым. Тот же вопрос для чисел вида $12n - 11$.

Задачи

1. Расставьте в клетки квадрата 3×3 различные целые положительные числа, не большие 25, так, чтобы в любой



паре соседних по стороне клеток одно число делилось на другое.

И. Яценко

2. В сумме

$$П, Я + Т, Ь + Д, Р + О, Б + Е, Й$$

все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых не целые, но сама сумма является целым



числом. Каким именно? Для каждого возможного ответа напишите один пример с такими пятью слагаемыми. Объясните, почему другие суммы получить нельзя.

А. Шаповалов

Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

3. Решил шах проверить придворного мудреца. «Вот тебе шесть шкатулок, — сказал шах, — с надписями 1, 2, 3, 4, 5, 6 на крышках. В каждой шкатул-

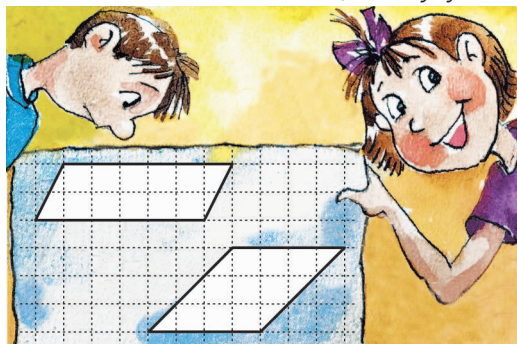


ке золотая монета, которая весит ровно столько драхм, сколько написано. Ты расставляешь шкатулки как угодно в клетках прямоугольника 2×3 . Потом я тайне от тебя меняю местами монеты в каких-то двух шкатулках, стоящих в соседних по стороне клетках (или ничего не меняю). Затем ты укажешь на несколько шкатулок, а я назову тебе общий вес монет в них. Если после этого правильно определишь, какие монеты я переложил, останешься при дворе. А не сможешь — прогоню вон!». Как может действовать мудрец, чтобы выдержать испытание?

А. Шаповалов

4. Разрежьте первый параллелограмм на три части и сложите из них второй.

Т. Голенищева-Кутузова



Мы и модели

Л.АШКИНАЗИ

ЗАДАЧ, ИМЕЮЩИХ ОТНОШЕНИЕ К физике, так много, что хочется их классифицировать. Например, можно разделить их на «задачи по физике» и «физические задачи». Первые – это те задачи, которые есть в задачнике, предлагаются на экзамене или на олимпиаде. Вторые – это те задачи, которыми занимается, скажем так, «практикующий физик». Такое деление не вполне строгое. Так, есть два задачника – Джирла Уокера и Петра Леонидовича Капицы, в которых существенная часть задач вполне заслуживала внимания физиков, в том числе авторов задачников. Другое дело, что для них эти задачи не были, скажем так, Серьезными Научными Задачами, а были, скорее, приятным развлечением. Но если приглядеться к ним повнимательнее, то мы увидим в этих задачах важную черту, которая объединяет их с теми самыми всерьез серьезными. С ними вы встретитесь, когда войдете в эту великую игру – Физику. На первый уровень.

Эта черта – не очевидность модели. Решая любую задачу, мы что-то учитываем, а что-то нет. Школьные задачи таковы, что мы всегда знаем, что именно можем учитывать, поскольку кроме задачника есть учебник и там все написано. В серьезной физике это не так, мы ничем не ограничены – кроме нашего сегодняшнего знания. Однако есть традиции, и при рассмотрении, например, движения Земли или Луны мы не учитываем давление солнечного света, и даже это не обосновываем. Но при меньших размерах объекта это давление придется учитывать – хотя оно и стало меньше. (Кстати, как вы думаете, при каких размерах? Попробуйте посчитать.)

Упрощения, которые мы используем, можно разделить на две группы. Первые чаще встречаются в школьных задачах, они радикально упрощают решение задач, причем не

приводят к принципиальным противоречиям. Примеры общеизвестны – пренебрежение сопротивлением воздуха при движении тела в атмосфере, постоянство удельного сопротивления, независимость трения от давления и скорости, равенство максимального трения покоя и трения скольжения, идеальность газов, жесткость опор, нерастяжимость и невесомость веревок и так далее. Все эти примеры вы сами знаете, а перебрав в памяти задачи, которые решали, вспомните и другие.

Некоторые из «школьных» упрощений могут быть совсем легко преодолены. Например, если не равны максимальное трение покоя и трение скольжения – ничего сложного. Иногда возможно рассмотрение какого-то частного случая, иногда – построение компьютерной модели. Такая работа с упрощениями полезна для небольшого, но принципиально важного расширения кругозора.

Среди школьных упрощений есть такие, которые в принципе нарушают логическую связность курса физики. Так, можно спросить, почему мы не учитываем излучение энергии при решении задач с коммутацией (переключением) или при рассмотрении колебательного контура, хотя об излучении



ускоренно движущихся зарядов в учебнике упоминается. Или вот – почему мы на учитываем ни давление атмосферы, ни Архимедову силу при определении реакции опоры (взвешивании)? И еще – почему мы не учитываем перепад давления по высоте при рассмотрении гидравлических задач (сообщающиеся сосуды разного сечения, два поршня)? Иногда ответ будет выглядеть так: учесть это трудно, но на практике эффект мал, вот его и не учитывают. Но иногда мы так легко не отделаемся, рассмотрение требует решения сложной задачи.

Упрощения второй группы, «взрослые», иногда оказываются вполне серьезными задачами, однако даже рассмотрение их постановки может быть полезно и интересно. Вот несколько примеров с краткими комментариями.

Почему мы прикладываем гравитационную силу mg в центре тяжести, т.е. в точке? Во-первых, точки бывают только в математике, в физике их не бывает. Во-вторых, при приложении конечной силы к маленькой площадке возникают большие механические напряжения. Например, при приложении mg к центру тяжести человека, причем даже не к точке, а к площадке, скажем, в 1 мм^2 , механические напряжения будут больше предела прочности. И эта «точка» прорежет ваше туловище и со свистом устремится к центру Земли. А туловище, лишившись веса, перестанет давить на пол, пол и ваши ноги разожмутся, и вы неспешно полетите вверх. (Кстати, это простая задача – с какой скоростью полетите?)

Разумеется, не к точке приложены и реакция опоры, и сила трения, и капиллярные силы. Этим последним повезло – рисуя капилляр, их изображают все-таки две, а не одну, как бедную силу гравитации. Почему бы не рассмотреть, что такое распределенные силы? Кстати, у строителей и специалистов по сопротивлению материалов, которые живут и мыслят балками, фермами и мембранами, предложение приложить собственный вес элемента в центре тяжести вызовет смехок. На самом деле ситуация такова – есть задачи, где модель «сила приложена к точке» позволяет получить правильный ответ. Но есть и другие задачи.

Пример попроще – радиоактивный распад, когда дело идет к концу. Вот остались

три атома, время полураспада истекает, и перед ними задача гамлетовского накала трагизма – распасться должны полтора. Кто выделит свою половину для этого акта самопожертвования? Догадаетесь ли вы, что в рамках одной задачи можно использовать два языка (второй – теория вероятности).

Вообще, когда какая-то функция приближается к чему-то асимптотически, это тревожный сигнал. Например, функция распределения молекул газа по скоростям, т.е. распределение Максвелла. Судя по формуле в учебнике, она нигде не ноль, приближение к оси абсцисс асимптотическое. Следует ли из этого, что в атмосфере есть молекулы, летящие быстрее скорости света? Наверное, нет. (Но почему?)

Попутно заметим, что стандартное решение уравнения теплопроводности (уравнение Фурье) приводит к бесконечной скорости распространения тепла. Тем не менее, этому уравнению два века, и оно еще пока никого не подводило. Но это *еще* и *пока*. Изменение условий эксперимента, расширение диапазона величин, с которыми работают физика и инженерия, могут привести к необходимости расширения и уточнения любой модели. Развернутая теория теплопроводности «за пределами Фурье» была построена несколько лет назад (Журнал технической физики, 2021, № 1, с. 5).

А как у вас с законом Гука, все в порядке? Он вам по ночам не снится, не жалуется на некорректность модели? Деформация упруга, зависимость деформации от силы на пути туда и обратно одинаковы, значит, работа, вкладываемая в деформацию, вся может быть извлечена на обратном пути. Это простенькое рассуждение противоречит – не упадите в обморок – закону сохранения энергии. Дело в том, что пружины при работе греются, так что с энергией все в порядке, есть тонкости у закона Гука, причем в начале координат (Письма в Журнал технической физики, 1999, № 17, с. 29 и 2018, № 15, с. 80).

Ну, и в заключение обратимся к электростатике. Любой школьник охотно подтвердит, что в электростатике, когда нет токов, если проводник зарядить, то заряды расположатся на его поверхности. Причем если это шарик, то плотность зарядов будет постоянна. Возникает естественный вопрос –

откуда заряды знают, как им распределяться? Если заряды лежат на плоскости, то уже непонятно, как им взаимодействовать. Потому что в вакууме и воздухе – пожалуйста, через металл – ни в коем случае, а они лежат на границе! Но у нас вообще не плоскость, а шар, любая линия, соединяющая заряды, проходит через металл и заряды взаимодействовать не должны. И это еще не конец проблемы.

Формула для связи напряженности поля и плотности зарядов на поверхности вам известна. Вопрос – чему равно давление (отношение силы к площади) на поверхность? Если просто перемножить напряженность поля и плотность зарядов, получается ответ,

вдвое больший правильного. Модель «заряд на поверхности» подвела нас второй раз. А что получится, если считать, что заряд на поверхности металла находится в тонком, но все-таки не нулевой толщины слое, хотя бы частично выступающем в вакуум или воздух? Если вдуматься, то электроны даже без избыточного заряда уже возвышаются над уровнем ядер атомов примерно на межатомное расстояние... Не решатся ли такой моделью обе проблемы?

Психологической причиной написания этой статьи было любовное отношение к статье И.Ф. Гинзбурга «Нерешенные проблемы фундаментальной физики» (Успехи физических наук, 2009, № 5, с. 525).

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

29. Что больше: $1 \cdot 22 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 20 + \dots + 22 \cdot 1$ или $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$? Ответ объясните.

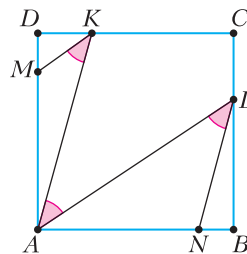
А.Заславский

30. Барсуки, белки, бобры и бурундуки встречали Новый год. Сначала все звери, кроме барсуков, водили хоровод, а потом хоровод водили все, кроме белок. В каждом хороводе никакие два одинаковых зверька рядом не стояли. Какое наименьшее количество бобров могло быть на празднике, если белок было на 50 больше, чем барсуков?

Г.Караваяев

31. Внутри квадрата $ABCD$ проведены несколько отрезков, как на рисунке. Отмеченные углы равны. Докажите, что $BN = DM$.

К.Кноп



32. Дан выпуклый n -угольник, разбитый непересекающимися диагоналями на треугольники. Петя хочет стереть некоторые диагонали, чтобы получилось разбиение n -угольника на многоугольники, среди которых как можно больше m -угольников ($m > 3$). Какое наибольшее количество m -угольников можно гарантировать?

а) Решите задачу для $m = 4$.

б) Решите задачу в общем случае.

Е.Бакаев

XLV Турнир городов

Задачи весеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1 (4).¹ Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на 17 частей. Могли ли все части оказаться равными по массе? (Объединять части нельзя.)

Б. Френкин

2 (4). Шахматную доску 8×8 перекрасили в несколько цветов (каждую клетку – в один цвет). Оказалось, что если две клетки – соседние по диагонали или отстоят друг от друга на ход коня, то они обязательно разного цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано?

М. Евдокимов

3 (5). Пять равносторонних треугольников расположены так, как показано на рисунке 1. Три больших треугольника равны

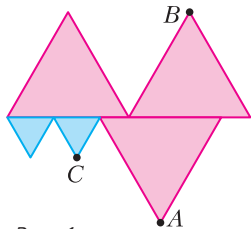


Рис. 1

между собой и два маленьких тоже равны между собой. Найдите углы треугольника ABC .

Е. Бакаев

4 (5). Два пирата делят 25 золотых монет разного достоинства, выложенные в виде квадрата 5×5 . Пираты по очереди берут по одной монете с краю (монету можно взять,

¹ В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за пункты одной задачи суммируются).

если или слева, или справа, или снизу, или сверху от нее нет другой). Верно ли, что первый пират всегда может действовать так, чтобы гарантированно получить хотя бы половину суммарной добычи?

М. Евдокимов

5 (6). Есть N удавов, их пасти имеют размеры 1 см, 2 см, ..., N см. Каждый удав может заглотить яблоко любого диаметра (в см), не превосходящего размер его пасти. Но по внешнему виду нельзя определить, какая у кого пасть. Вечером смотритель может выдать каждому удаву сколько хочет яблок каких хочет размеров, и за ночь удав заглотит все те из них, что влезают ему в пасть. Какое минимальное количество яблок суммарно смотритель должен вечером выдать удавам, чтобы утром по результату он гарантированно определил размер пасти каждого удава?

Т. Казыцина

10–11 классы

1 (3). В последовательности действительных чисел a_1, a_2, \dots каждое число, начиная с третьего, равно полусумме двух предыдущих. Докажите, что все параболы вида $y = x^2 + a_n x + a_{n+1}$ (где $n = 1, 2, 3, \dots$) имеют общую точку.

М. Евдокимов

2 (4). Произвольный прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники так, как показано на рисунке 2. В каждый треугольник вписан квадрат со стороной, лежащей на гипотенузе. Что больше: площадь самого большого квадрата или сумма площадей трех остальных квадратов?

М. Евдокимов

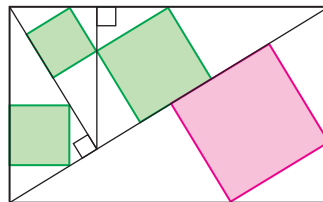


Рис. 2

Несколько игр из книги Мориса Крайчика

В книге Мориса Крайчика «Математические развлечения» можно найти большое количество знакомых игр и головоломок, в которые многие школьники могли играть, коротая время на переменах. Это и морской бой, и уголки, и точки. Там же есть когда-то очень популярные игры, которые, к сожалению, забываются современными школьниками. Например, пятнашки.

Советуем читателю обратиться к книге. Ведь кроме описания игр, там иногда рассказывается и история их возникновения. А кроме того, можно узнать, в какую игру играл великий Лейбниц.

О некоторых играх уже рассказывалось на страницах «Кванта». Например, «шашки Ласкера» [1] или «йюга» [2]. Сейчас мы расскажем еще о четырех, для игры в которые нужны лишь листок бумаги и карандаш.

1. Соединяя точки (игра-шутка). На плоскости отмечается произвольный набор точек. Два игрока поочередно проводят линии (которые могут быть изогнутыми). За один ход можно провести линию, соединяющую две отмеченные точки; при этом линия не должна проходить через другие отмеченные точки. Ни одна точка не может быть конечной точкой более чем для одной линии. Никакие две точки не могут быть соединены более чем одной линией. Никакие две линии не могут пересекаться. Проигравшим считается тот, кто первым не сможет провести линию, удовлетворяющую этим условиям.

Можно рассмотреть версию этой игры, когда разрешено, чтобы точки были конечными сразу для нескольких линий.

Задача. Докажите, что и эта версия игры также будет игрой-шуткой, т.е. исход игры не зависит от того, как играют соперники.

2. Клетки в линию. Игра ведется на квадратном поле из n^2 клеток. Игроки поочередно ставят в клетки каждый свой отличительный знак (например, крестик и нолик). Всякий раз, когда игрок отмечает

последнюю клетку в ряду клеток, параллельном стороне или диагонали большого квадрата, ему дается количество баллов, равное числу клеток в этом ряду. Выигрывает игрок с большей итоговой суммой баллов.

		X ₅	
	X ₁		O ₄
		X ₃	
	O ₂		

Рис. 1

Например, в ситуации, изображенной на рисунке 1 (индексы обозначают номер хода), нолики получили три балла за заполнение диагонали из трех клеток на четвертом ходу, а крестики получили два балла за заполнение диагонали из двух клеток на пятом ходу. Следующим ходом нолики могут получить сразу $3 + 2 = 5$ баллов.

3. Точки-клеточки. Поле для игры – квадрат из $(n + 1)^2$ точек. Два игрока поочередно рисуют горизонтальные или вертикальные линии, соединяющие пары соседних точек. Если игрок рисует четвертую сторону одного из n^2 маленьких квадратов, которые могут быть образованы на рисунке, считается, что он захватил этот квадрат. Игрок, захвативший квадрат, может провести еще одну линию в тот же ход, так что ход игрока прекращается только тогда, когда он проводит линию, которая не завершает квадрат. Победителем считается тот, кто захватил большее количество таких квадратов.

На рисунке 2 показана возможная ситуация в игре после 18 ходов (число рядом со стороной показывает номер хода, а цвет

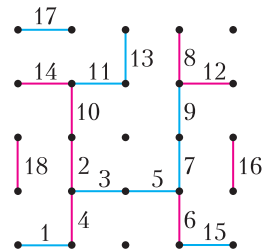


Рис. 2

отрезка для наглядности показывает игрока, который сделал ход). Можно заметить, что после любого следующего хода первого игрока второй сможет захватить квадрат.

Эта игра известна во многих странах под различными названиями. Впервые ее правила опубликовал французский математик Эдуард Люка еще в 1889 году.

4. Лягушки и жабы. На $2n + 1$ клетках по прямой линии расположены n лягушек и n жаб, между которыми одна пустая клетка (рис.3). Лягушки слева, жабы справа.



Рис. 3

Лягушки могут перемещаться только вправо: либо в соседнюю клетку, если она пустая, либо перепрыгнуть через одну жабу или одну лягушку на пустую клетку. Аналогично для жаб, но они перемещаются только влево.

Цель игры – поменять лягушек и жаб местами. Ходы не обязательно должны чередоваться между лягушками и жабами.

Задача 1. Докажите, что эта игра-головоломка всегда имеет решение. Найдите число ходов.

Напрашивается обобщение этой игры. Что если у нас m жаб и n лягушек?

Задача 2. Докажите, что и обобщенная головоломка имеет решение, и найдите число ходов. Сколько решений имеет эта головоломка?

Обозначим ход буквой Ш, если это перемещение в соседнюю клетку, и буквой П, если это прыжок. Запишем последовательность ходов, приводящую к выигрышу. Например, в случае двух жаб и двух лягушек:

ШШШШШШШШ

Заметим, что получившаяся строка ходов является палиндромом [3].

Задача 3. Докажите, что это верно для произвольного числа жаб и лягушек.

Задача 4. Верно ли, что выигрышная последовательность ходов будет являться палиндромом и для случая $m \neq n$?

Еще одно обобщение этой головоломки – двумерное поле (рис.4). Теперь лягушки двигаются только вправо или вниз, жабы могут двигаться только влево и вверх.

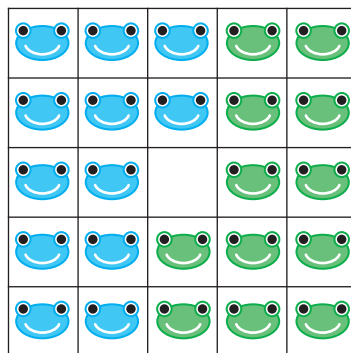


Рис. 4

Земноводное может перепрыгивать через соседа при условии, что квадрат, на который оно попадает, пуст. Цель головоломки снова состоит в том, чтобы заставить лягушек и жаб поменяться местами.

Задача 5. Докажите, что двумерная головоломка имеет решение.

Есть другой вариант игры «Жабы и лягушки», предложенный математиком Ричардом Гаем. В этой игре жабы и лягушки снова расположены по прямой, но свободных клеток может быть много, разрешенные ходы те же, только в эту игру надо выиграть. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Позициям в такой игре можно присвоить значения. Иногда они являются привычными нам числами, а иногда – другими, более сложно устроенными сущностями. Попытка детального анализа подобных игр неожиданно приводит к интересной и сложной теории. Подробное обсуждение можно найти в книге [4] и сборнике [5].

Литература

1. Шашки Ласкера. – «Квант», 1970, №4, с.59.
2. Игра «Йога». – «Квант», 1978, №9, с.64.
3. <https://www.cut-the-knot.org/SimpleGames/FrogsAndToads.shtml>
4. E.R.Berlekamp, J.H.Conway, R.K.Guy. Winning ways for your mathematical plays. Vol.1. – A K Peters/CRC Press, 2001.
5. Дж.Коввей и др. Человек, который играл в математику. – М.: МЦНМО, 2023.

Материал подготовил Н.Панюнин

3 (5). Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на N частей. При каждом ли $N \geq 10$ все части могли получиться равными по массе? (Объединять части нельзя.)

Б. Френкин

4 (5). Верно ли, что сумма внутренних двугранных углов при основании треугольной пирамиды всегда меньше суммы внешних?

А. Заславский

5 (6). В математическом кружке 45 школьников, некоторые дружат. Как ни разбивай их на тройки, в какой-то тройке все будут друг с другом дружить. Докажите, что всех школьников можно разбить на тройки так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.

М. Прасолов

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Физрук 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться, что все 10 раз состязание закончилось вничью (т.е. суммы сил детей в командах были равны)?

М. Евдокимов

2 (5). См. задачу М2790 «Задачника «Кванта».

3 (7). Имеется кучка из 100 камней. Игруют двое. Первый берет 1 камень, потом второй берет 1 или 2 камня, потом первый берет 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает взявший последний камень. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Л. Смирнова

4 (7). Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y , меньшую 1, и Петя назовет числитель несократимой дроби, рав-

ной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x ?

М. Дидин

5 (9). См. задачу М2792 «Задачника «Кванта».

6 (10). На описанной окружности треугольника ABC отметили точки M и N – середины дуг BAC и CBA соответственно, а также точки P и Q – середины дуг BC и AC соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB . Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC . Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP . Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ .

А. Доледенко

7 (12). На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

А. Кушнир

10–11 классы

1 (4). Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых $m!! = n!$. (Двойной факториал $m!!$ – это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m и имеющих ту же четность, что m . Например, $5!! = 15$, $6!! = 48$.)

Б. Френкин

2 (6). В пространстве расположили конечный набор кругов радиуса 1. Круги могут пересекаться друг с другом, но не проходят через центры друг друга. В центре каждого круга зажгли точечную лампочку, светящую во все стороны. Могло ли случиться, что любой луч света, выходящий из центра любого круга, упирается в какой-то другой круг?

М. Алексеев

3 (7). См. задачу М2791 «Задачника «Кванта».

4 (8). Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 (рис. 3). На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1X = O_2Y$. Точки

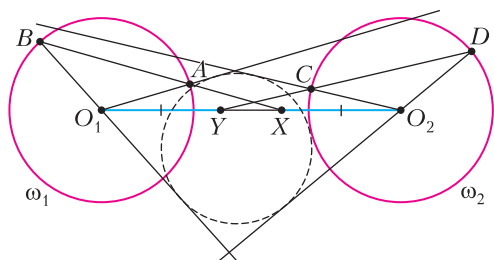


Рис. 3

A и B лежат на ω_1 , и прямая AB проходит через X . Точки C и D лежат на ω_2 , и прямая CD проходит через Y . Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AO_1 , BO_1 , CO_2 и DO_2 .

И. Кухарчук, А. Соколов

5 (10). Дан многочлен степени $n > 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что у этого многочлена не может быть никаких других коэффициентов, кроме 1, -1 и -2 .

Л. Шатунов

6 (12). Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — *до* и *си*. Чтобы пройти испытание, Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнет играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестает звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?

В. Клепцын

7 (12). См. задачу M2796 «Задачника «Кванта»».

Устный тур для 11 класса

1. Дано натуральное число n . Можно ли представить многочлен $x(x-1)\dots(x-n)$ в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами?

Б. Бутырин

2. См. задачу M2794 «Задачника «Кванта»».

3. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовем клетку *хорошей*, если

сумма чисел строки, содержащей эту клетку, не меньше, чем сумма чисел столбца, содержащего эту клетку. Найдите наименьшее возможное количество хороших клеток.

А. Глебов

4. См. задачу M2795 «Задачника «Кванта»».

5. Вписанная сфера треугольной пирамиды $SABC$ касается основания ABC в точке P , а боковых граней — в точках K , M и N . Прямые PK , PM , PN пересекают плоскость, проходящую через середины боковых ребер пирамиды, в точках K' , M' , N' . Докажите, что прямая SP проходит через центр описанной окружности треугольника $K'M'N'$.

Ф. Ивлев

6. У Вани есть клетчатая бумага двух видов: белая и черная. Он вырезает кусок из любой бумаги и наклеивает на серую клетчатую доску 45×45 , делая так много раз. Какое минимальное число кусков нужно наклеить, чтобы «раскрасить» клетки доски в шахматном порядке? (Каждый кусок — набор клеток, в котором от любой клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю через их общую сторону. Можно наклеивать куски один поверх другого. Все клетки имеют размер 1×1 .)

Т. Казыцына

Материал подготовили М. Алексеев, Е. Бакаев, Б. Бутырин, Е. Веретенников, А. Глебов, А. Грибалко, М. Дидин, А. Доледенко, С. Дориченко, А. Заславский, Ф. Ивлев, Т. Казыцына, В. Клепцын, П. Кожевников, И. Кухарчук, А. Кушниц, М. Малкин, Л. Медников, И. Михайлов, М. Прасолов, А. Семенов, Л. Смирнова, А. Соколов, А. Толпыго, Б. Френкин, А. Шаповалов, Л. Шатунов, А. Юран

85-я Московская олимпиада школьников по физике

7 класс¹

1. На «стадионе» (8 баллов)

Три маленьких тела изначально покоятся в трех равноудаленных точках, принадлежащих окружности длиной 3 м (рис. 1). В некоторый момент они одновременно начинают движение в одном направлении по окружности с постоянными скоростями $v_1 = 4,0$ м/с, $v_2 = 3,6$ м/с, $v_3 = 3,0$ м/с соответственно. При

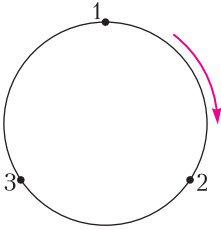


Рис. 1

этом тела не сталкиваются, проходя мимо друг друга. Колонной называется наименьшая дуга окружности, содержащая три тела. Например, в начальном положении длина колонны равна 2 м. Найдите минимальную длину колонны в процессе движения тел.

2. Хороший, плохой (6 баллов)

Города A и B соединены дорогой, которая состоит из двух участков: «хорошего» (с недавно сделанным ремонтом, где машины едут быстро) и «плохого» (со старым разбитым асфальтом, по которому машины едут медленно). В некоторый момент времени из города A в город B выезжает машина, затем машины продолжают выезжать каждые 30 секунд. По «хорошему» участку дороги все машины едут с одинаковой большой скоростью, а по «плохому» – с одинаковой маленькой скоростью. Если подсчитать среднее арифметическое скоростей всех автомобилей на дороге в некоторый момент, когда первая машина уже прибыла в город B , а последняя еще не выехала из города A , то получится величина $u_1 = 70$ км/ч. Если же подсчитать среднее арифметическое скоростей только тех автомобилей на дороге, которые уже проехали половину расстояния между городами, то получится величина $u_2 = 60$ км/ч. Найдите скорость автомобилей на «хоро-

шем» участке дороги, если известно, что его длина превышает длину «плохого» участка.

А.Дергачев

3. Эхолот на льдине (8 баллов)

На рисунке 2 показан профиль участка покоящейся льдины (вид сбоку). Длина стороны клетки соответствует 30 см. На плос-

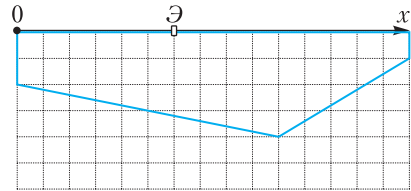


Рис. 2

кой горизонтальной поверхности льдины с помощью специального эхолота проводят измерения, располагая эхолот в точках с разными координатами по оси x . Эхолот испускает звуковые сигналы вертикально вниз, а через некоторое время регистрирует отраженный от дна сигнал. Можно считать, что после отражения от дна сигнал распространяется вертикально вверх. На графике, представленном на рисунке 3, показана зависимость $t(x)$, где t – время, прошедшее с момента испускания звукового импульса эхолотом до момента приема отраженного от дна сигнала, а x – координата эхолота. Постройте график зависимости расстояния от верхней поверхности льдины до дна от координаты x . Считайте, что средние скорости распространения звука в льдине и в воде равны 3000 м/с и 1500 м/с соответственно.

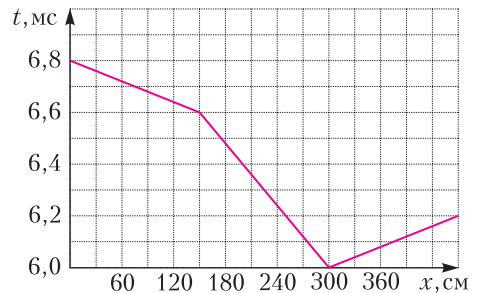


Рис. 3

¹ Автор всех задач для 7 класса (кроме задачи 2) – А.Бычков.

4. Плотность Луны (6 баллов)

Согласно закону всемирного тяготения, материальная точка и однородный шар притягиваются друг к другу с силой $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где G – гравитационная постоянная, m_1 , m_2 – массы материальной точки и шара соответственно, r – расстояние между материальной точкой и центром шара. Чему равна средняя плотность Луны, если средняя плотность Земли $5,5 \text{ г/см}^3$? Радиус Земли 6400 км , радиус Луны 1740 км . Ускорение свободно падения на Земле $9,8 \text{ Н/кг}$, а на Луне $1,6 \text{ Н/кг}$.

8 класс²

1. См. задачу 1 для 7 класса.

2. Акациевый мед (6 баллов)

На расстоянии 600 м от пчелиного улья растет акация, откуда каждая пчела переносит в улей 30 мм^3 нектара за один полет. При производстве меда пчелы испаряют часть содержащейся в нектаре воды, составляющей 60% его массы. В результате содержание воды в меде уменьшается до 20% от его массы. Пчелы получают энергию, необходимую для испарения воды, употребляя часть принесенного нектара. За 10 дней цветения пчелиная семья произвела 20 кг меда. Определите среднюю мощность, затрачиваемую пчелами только на испарение воды. Какое общее расстояние пролетели пчелы, собирая нектар и перенося его в улей? Плотность нектара $1,2 \text{ г/см}^3$. Известно, что 1 кг нектара обеспечивает пчелам $6,0 \text{ МДж}$ энергии, а для испарения 1 кг воды пчелам требуется затратить $2,4 \text{ МДж}$ энергии. Считайте, что от улья до акации и обратно пчелы летают по прямой.

3. Солевой раствор (8 баллов)

При смешивании карбоната натрия (соды) массой m_1 и пресной воды массой m_2 получается солевой раствор. Если процентное содержание соды в растворе, равное $\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, принимает значения от 1% до 14% , то плотность раствора карбоната натрия можно рассчитать, воспользовавшись приближенной формулой $\rho = \rho_0 (1 + \alpha)$, где ρ_0 – плотность пресной воды, равная $1,0 \text{ г/см}^3$. В легком цилиндрическом сосуде находится

водный раствор карбоната натрия плотностью $1,12 \text{ г/см}^3$, уровень которого расположен на высоте $15,0 \text{ см}$ от дна сосуда. В раствор добавляют некоторое количество льда, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся на $5,0 \text{ см}$. Когда лед растаял, жидкость перемешали и процентное содержание карбоната натрия в растворе уменьшилось. Найдите плотность получившегося раствора. На какой высоте расположен уровень раствора в сосуде?

4. Запотевший сосуд (8 баллов)

В холодильной камере при температуре $0 \text{ }^\circ\text{C}$ находится сосуд с водой и льдом. Если переместить этот сосуд в помещение, то на стенках сосуда к моменту, когда весь лед растает, образуются капельки сконденсированной воды (сосуд запотеет). Масса воды, сконденсированной на стенках сосуда, зависит от температуры воздуха в комнате. Например, если температура воздуха в комнате $22 \text{ }^\circ\text{C}$, то сконденсируется 23 г воды, а при температуре $30 \text{ }^\circ\text{C}$ сконденсируется 18 г воды. Определите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг , а удельная теплота парообразования воды $2,3 \text{ МДж/кг}$. Считайте, что конвекция отсутствует, мощность теплообмена пропорциональна разности температур сосуда с его содержимым и воздуха, а скорость образования конденсата в обоих случаях одинаковая.

9 класс³

1. Построение (7 баллов)

Обруч скользит по гладкой горизонтальной поверхности так, что плоскость обруча остается горизонтальной. Скорость оси обруча и частота его обращения вокруг этой оси, равная одному обороту в секунду, со временем не меняются. В некоторой точке обруча закреплена лампочка, ярко вспыхивающая через равные промежутки времени с частотой 4 раза в секунду. На фотографии, сделанной сверху с большой выдержкой с сохранением пропорций изображаемых предметов, можно видеть положение лампочки во время вспышек, следующих друг за другом. Рисунок 4 выполнен по фотографии, на нем точками обозначены места вспышек, а цифрами их номера в порядке появления. Используя линейку с делениями и циркуль,

² Автор всех задач для 8 класса – А. Бычков.

³ Автор всех задач для 9 класса – П. Крюков.

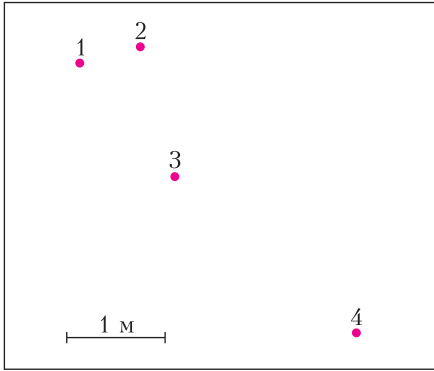


Рис. 4

найдите скорость оси и радиус обруча. Отрезок, соответствующий расстоянию в 1 метр, показан в нижней части рисунка.

2. И покой, и скольжение (9 баллов)

Изучая силу трения в рамках школьного курса физики, обычно говорят о том, что максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения. На самом деле для того чтобы вывести тело из состояния покоя, необходимо приложить силу, несколько большую силы трения скольжения. Поэтому имеет смысл говорить о двух коэффициентах: коэффициенте трения покоя μ_n и коэффициенте трения скольжения μ_c ($\mu_c < \mu_n$). Сила трения покоя удовлетворяет соотношению $F_{\text{тр.пок}} \leq \mu_n N$. После перехода к скольжению для определения силы трения используется другой коэффициент: $F_{\text{тр.ск}} = \mu_c N$.

А. Для деревянного бруска массой m , располагающегося на протяженной деревянной горизонтальной поверхности, коэффициенты трения покоя и скольжения равны $\mu_n = 0,5$ и $\mu_c = 0,4$ соответственно. На брусок начинает действовать периодически изменяющаяся горизонтальная сила, проекция которой на горизонтальную ось x на первой половине периода равна $F_x^{(1)} = 1,001\mu_n mg$, а на второй половине периода меняет знак и становится равна $F_x^{(2)} = -1,001\mu_n mg$. Изобразите графически зависимость скорости бруска от времени в течение двух периодов спустя большое время после начала процесса. Период изменения силы $T = 4$ с, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Б. Две доски одинаковой массы m лежат друг на друге и на длинном горизонтальном деревянном столе (рис. 5). Коэффициенты

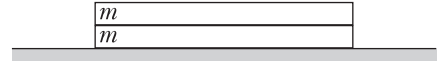


Рис. 5

трения покоя и скольжения между всеми поверхностями равны $\mu_n = 0,5$ и $\mu_c = 0,4$.

Б1) На верхнюю доску действует внешняя горизонтальная сила $F(t)$, прямо пропорциональная времени: $F(t) = \frac{\mu_n mgt}{t_0}$. Изобразите график зависимости ускорения верхней доски от времени для $t \in [0; 4t_0]$.

Б2) Пусть теперь внешняя горизонтальная сила $F(t) = \frac{\mu_n mgt}{t_0}$ действует на нижнюю доску. Изобразите график зависимости ускорения нижней доски от времени для $t \in [0; 4t_0]$.

В обоих случаях доски изначально покоятся. В процессе движения одна доска не падает с другой.

3. Замерзающие капли (5 баллов)

При температурной инверсии график зависимости температуры воздуха t вблизи поверхности Земли от высоты h может иметь вид, показанный на рисунке 6 линией крас-

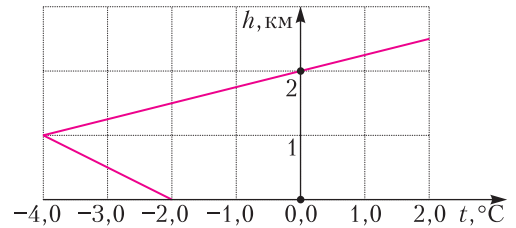


Рис. 6

ного цвета. Пусть капля, имеющая форму шара, движется вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха. На высоте $h_0 = 2$ км температура капли оказывается равной $t_k = 0$ °C. В процессе дальнейшего падения часть капли (или вся капля) превращается в лед вследствие теплообмена с холодным атмосферным воздухом. Мощность теплообмена P и сила сопротивления воздуха F_c даются формулами

$$P = \alpha(t_k - t)S, \quad F_c = \beta S v^2,$$

где S – площадь поверхности капли, α и β – некоторые константы, t и t_k – температуры окружающего воздуха и капли (на одной

высоте), v – скорость капли. Рассмотрим две капли. Радиус первой капли в 2,25 раз меньше радиуса второй. В процессе падения с высоты 2 км первой капли четверть ее массы превращается в лед. Какая часть массы второй капли превратится в лед? Считайте теплопроводность льда высокой, так что температура всех точек капли остается одинаковой, пока капля полностью не превратилась в лед. Изменением радиуса капли при ее частичном превращении в лед можно пренебречь.

4. Схемы с туннельным диодом (7 баллов)

Идеализированная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента под названием туннельный диод изображена на рисунке 7. Условное обозначение туннельного

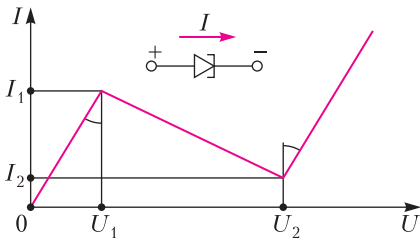


Рис. 7

диода на схемах показано в верхней части рисунка. Там же над символом диода указано положительное направление тока через него. Обозначенные на графике токи и напряжения I_1, I_2, U_1 и U_2 будем называть параметрами диода. Обозначенные на графике углы считаем равными.

А. Рассмотрим туннельный диод, параметры которого $I_1 = 4I_2 = 4i, U_2 = 4U_1 = 4u$, при этом значения i и u считаются известными. Этот диод подключили к идеальному источнику с напряжением $U_0 = 6u$ последовательно с переменным резистором, сопротивление которого может меняться в широких пределах (рис. 8). При каких значениях сопро-

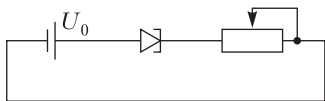


Рис. 8

тивления резистора значение тока в цепи определяется однозначно?

Б. Параметры другого туннельного диода $I_1 = 10$ мА, $I_2 = 1$ мА, $U_1 = 0,2$ В, $U_2 = 0,8$ В. При помощи этого диода и балластного резистора

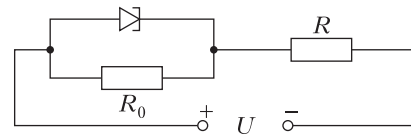


Рис. 9

собрали цепь по схеме, показанной на рисунке 9. Известно, что ток через резистор R в этой цепи имеет одно и то же значение при любом входном напряжении из диапазона $U = 3,2 \pm 0,2$ В.

Б1) Найдите сопротивление балластного резистора R_0 .

Б2) Чему может быть равно сопротивление нагрузки R ? Укажите границы диапазона возможных значений R_{\min} и R_{\max} .

5. Tilt-Shift (6 баллов)

Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющий фотоаппарат и объект съемки). Наклон оптической оси дает возможность получать резкие изображения протяженных предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата. На упрощенной схеме, представленной на рисунке 10, собираю-

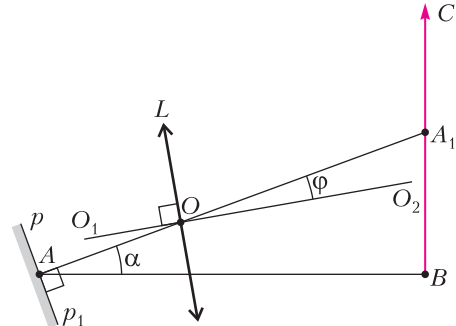


Рис. 10

щая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива отклонена на угол φ от линии зрения AA_1 , составляющей угол α с горизонталью. Фотографируемый предмет изображается отрезком BC , pp_1 – плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или пленка, если речь идет о пленочной камере). Пусть известны расстояние $AB = 5$ м по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние объектива $f = 50$ мм, а также угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота глав-

ной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ , считая его малым.

Указание. Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближенные соотношения

$$\sin \beta \approx \beta, \operatorname{tg} \beta \approx \beta, \cos \beta \approx 1.$$

10 класс

1. Стержень на плоскости (5 баллов)

Однородный стержень массой m движется по плоскости так, что в некоторый момент времени абсолютные значения ускорений концов A и B стержня оказываются равными $a_A = 2a_0$ и $a_B = a_0$, при этом ускорения направлены вдоль параллельных прямых, а векторы скоростей концов равны друг другу. Какая внешняя сила действует на стержень в данный момент времени? Определите модуль и направление вектора силы.

А.Бычков

2. Термодинамический цикл (6 баллов)

Состояние одного моля идеального двухатомного газа изменяется в цикле, состоящем из процессов с постоянной теплоемкостью. На рисунке 11 изображен график зави-

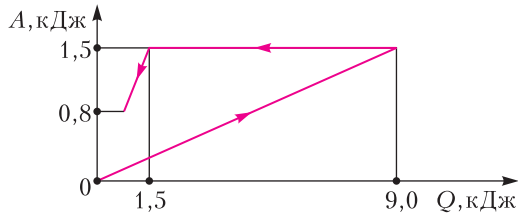


Рис. 11

симости работы, совершаемой газом, от количества теплоты, полученного или отданного им при достижении текущего состояния.

А. Определите КПД цикла.

Б. Чему равна минимальная температура газа в этом циклическом процессе, если максимальная температура равна 481 К?

Примечание. Квазистатический процесс, при котором молярная теплоемкость газа c остается постоянной, описывается соотношением $pV^{(c-c_p)/(c-c_v)} = \text{const}$, где p и V – давление и объем соответственно, c_v и $c_p = c_v + R$ – молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно.

А.Бычков

3. Мартышка тянет удава (8 баллов)

Удав выпрямился, лежа на горизонтальной поверхности, расслабился и не сопротивляется совсем. Его масса M равномерно распределена по его длине L . Поверхность гладкая, и по ней рядом с удавом и параллельно ему проложена тропинка (не гладкая) для прогулок. Мартышка, находясь на этой тропинке, схватила удава за кончик его хвоста и потащила этот конец удава в направлении к его голове. При этом удав целиком лежит на поверхности. Сила F , с которой мартышка тянет хвост удава, горизонтальна и меняется в зависимости от времени t по закону $F = At$, где A – это известная постоянная величина.

А. С какой скоростью двигался кончик хвоста удава в тот момент, когда расстояние от него до головы удава впервые стало равно $\frac{L}{2}$?

Б. Через какое время хвост удава поравняется с неподвижной головой удава?

В. Какой будет скорость всего удава в тот момент, когда его голова придет в движение?

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1.$$

С.Варламов

4. Разности (6 баллов)

Две одинаковые плоские диэлектрические пластины, заряженные равномерно по поверхности с плотностью σ и $-\sigma$, располагаются параллельно друг другу на небольшом расстоянии h (рис. 12). Каждая пластина имеет форму ромба с острым углом α ($\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$) и длиной стороны a ($a \gg h$).

Любая вершина верхней пластины и ближайшая к ней вершина нижней пластины лежат на общем перпендикуляре к плоскостям пластин.

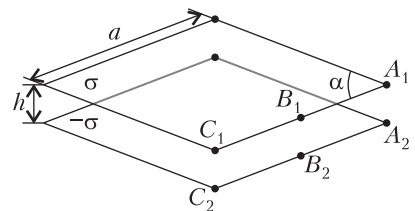


Рис. 12

А. Найдите разность потенциалов центров пластин. Центром ромба считается точка пересечения его диагоналей.

Б. Определите разность потенциалов середин близлежащих сторон пластин (точки B_1 и B_2).

В. Чему равна разность потенциалов вершин ромбов A_1 и A_2 ? А разность потенциалов вершин C_1 и C_2 ?

П.Крюков

5. См. задачу 5 для 9 класса.

11 класс, тур 1⁴

1. График потенциала (6 баллов)

Три одинаковых тонких диска радиусом R , однородно заряженных с поверхностной плотностью σ , 2σ и -3σ , расположены так, что ось x является общей осью этих дисков, при этом центры дисков находятся в точках с координатами 0 , d и $2d$, где $d = \frac{R}{1000}$.

Потенциал в центре уединенного диска, заряженного однородно с поверхностной плотностью σ , равен 1000 В. Потенциал бесконечно удаленной точки считается равным нулю.

А. Получите формулу $\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$, дающую потенциал в центре уединенного однородно заряженного диска. Эту формулу разрешается использовать при выполнении задания следующего пункта, даже если вы не можете ее вывести.

Б. Изобразите график зависимости потенциала φ электрического поля дисков в точках, лежащих на оси x , от безразмерной координаты $a = \frac{x}{d}$ для значений a , принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

2. Аэрохоккей (8 баллов)

Шайбы одинаковой массы могут скользить по горизонтальной поверхности без трения. Боковая поверхность шайб гладкая, столкновения между шайбами можно считать абсолютно упругими.

А. В начальный момент шайбы 2, 3, 4, 5 располагаются так, что их центры являются вершинами квадрата (рис. 13), шайба 1 налетает на шайбу 2 со скоростью $v = 1$ м/с. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.

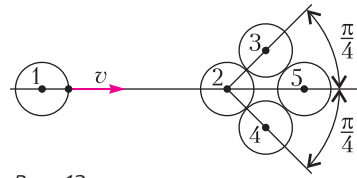


Рис. 13

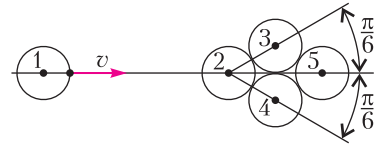


Рис. 14

Б. В этом случае центры неподвижных шайб образуют ромб с острым углом $\frac{\pi}{3}$ (рис. 14), шайба 1 налетает на шайбу 2 с такой же скоростью $v = 1$ м/с, как и в первом случае. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.

В обоих случаях считайте, что столкновения происходят мгновенно. За время столкновения шайбы не успевают сдвинуться. В точках на рисунке, где шайбы касаются друг друга, на самом деле они разделены микроскопическими воздушными зазорами.

3. С двумя батарейками (8 баллов)

В цепи, схема которой изображена на рисунке 15, параметры \mathcal{E} , L , C известны. Сопротивление соединительных проводов и катушки равно нулю. Внутреннее сопротивление батареи r и сопротивление резистора R удовлетворяют соотношениям

$$r \ll R, rC \ll \sqrt{LC}, RC = \sqrt{2LC}.$$

Изначально переключатель Π находится в положении 1, при этом в цепи установился стационарный режим. Напряжение на конденсаторе, соединенном с клеммой 2, равно нулю. В момент времени $t = 0$ переключатель мгновенно переводят в положение 2.

А. Определите, в какой момент времени t_L ток через катушку впервые изменит направление.

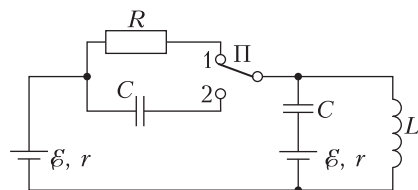


Рис. 15

⁴ Автор всех задач для 11 класса, тур 1 – П.Крюков.

Б. Какое количество теплоты Q выделится в цепи за очень большое время после перевода ключа в положение 2?

4. Накачивая шину (15 баллов)

В задаче рассматривается физическая модель, описывающая некоторые особенности процесса накачивания камеры велосипедного колеса. Объем камеры V_0 считается неизменным. Начальное давление воздуха в камере равно p_0 при температуре окружающей среды T_0 . После накачивания воздух в камере должен создавать давление p при той же температуре T_0 . Воздух считается идеальным двухатомным газом ($c_V = 2,5R$).

А. В этом пункте камеру соединяют через ниппель с сосудом очень большого объема V_1 ($V_1 \gg V_0$), который содержит воздух при температуре T_0 и таком давлении p_{\max} ($p_{\max} > p$), что после заполнения камеры и ее охлаждения до температуры T_0 давление воздуха в камере становится равным p . Ниппель пропускает воздух в камеру до тех пор, пока давление в ней не сравняется с давлением в сосуде, после этого ниппель закрывается и обратно воздух не выпускает. Проталкивание» в камеру порции воздуха из сосуда происходит очень быстро, поэтому можно считать, что процесс «проталкивания» осуществляется без теплообмена между этой порцией и воздухом, остающимся в сосуде, а также между воздухом в камере и окружающей средой. В результате температура и давление воздуха в камере повышаются до значений p_{\max} и T_{\max} . Через некоторое время после этого температура воздуха в камере сравнивается с температурой окружающей среды T_0 , давление в камере становится равным p . Считая известными значения $T_0 = 300$ К, $p = 3 \cdot 10^5$ Па и $p_0 = 10^5$ Па, определите p_{\max} и T_{\max} .

Б. Теперь представим себе, что камера накачивается воздухом при помощи ручного насоса. В начале каждого цикла цилиндр насоса объемом $V_{\text{ц}}$ ($V_{\text{ц}} \ll V_0$) заполняется воздухом при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0 . Пусть в начале i -го цикла давление в камере равно p_{i-1} . На i -м цикле воздух в цилиндре сначала адиабатически сжимается поршнем от давления p_0 до давления p_i , а затем «проталкивается» через ниппель при постоянном давлении p_i без теплообмена, как в пункте А задачи. После этого открывается впускной клапан, через кото-

рый в цилиндр насоса поступает воздух из окружающей среды при давлении p_0 , поршень отодвигается в исходное положение, цилиндр заполняется атмосферным воздухом при давлении p_0 . На этом цикл заканчивается. Естественно, придется совершить довольно много ($N \gg 1$) таких циклов «проталкивания» воздуха в камеру, чтобы после установления температуры T_0 давление в камере стало равно p . Поскольку накачивание камеры происходит очень быстро, теплообмен между воздухом в камере и окружающей средой начинается уже после окончания работы насоса.

Б1) Сколько циклов N необходимо совершить, чтобы накачать камеру? Параметры p_0 , p , $V_{\text{ц}}$ и V_0 считаются известными.

Б2) Какую работу A_i совершает поршень на i -м цикле? Ответ выразите через p_0 , p_i и $V_{\text{ц}}$.

Б3) Определите изменение давления в камере на i -м цикле Δp_i , считая p_0 , p_i , $V_{\text{ц}}$ и V_0 известными.

Б4) Для того чтобы найти давление в камере после окончания k -го цикла, используем следующий прием. Соотношение, полученное в предыдущем пункте, можно представить в виде $\frac{\Delta p_i}{f(p_i)} = \alpha$, где $f(p_i)$ — некоторая функция p_i , α — коэффициент, не зависящий от p_i (α и $f(p_i)$ вам известны, если вы сделали пункт Б3). Просуммируем эти выражения от $i = 1$ до $i = k$:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta p_i}{f(p_i)} = \alpha k.$$

Суммирование можно приближенно заменить на интегрирование:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta p_i}{f(p_i)} \approx \int_{p_0}^{p_k} \frac{dp}{f(p)}.$$

Определите давление p_k в камере после k -го цикла. Параметры p_0 , $V_{\text{ц}}$, V_0 и k считаются известными.

Б5) Вычислите p_{\max} и T_{\max} , считая известными значения параметров $T_0 = 300$ К, $p = 3 \cdot 10^5$ Па и $p_0 = 10^5$ Па.

Указание. Значение определенного интеграла от степенной функции дается формулой

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{(k-1)} \left(\frac{1}{a_1^{k-1}} - \frac{1}{a_2^{k-1}} \right).$$

5. Цилиндрическая линза (10 баллов)

Если цилиндр из стекла с показателем преломления n разрезать по плоскости, параллельной оси цилиндра, то получится цилиндрический сегмент, который с оптической точки зрения представляет собой цилиндрическую линзу. Если толщина этой линзы h (рис. 16) мала по сравнению с ее шириной L и радиусом кривизны выпуклой поверхности R , то можно говорить о тонкой цилиндрической линзе. Для такой линзы поперечное увеличение имеет разные значения в разных направлениях. В направлении вдоль оси O поперечное увеличение равно 1, иначе говоря, размеры предмета и изображения вдоль этой оси одинаковые. Осью O мы называем прямую, параллельную оси исходного цилиндра, проходящую через середину хорды A_1A_2 .

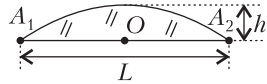


Рис. 16

А. Пусть на плоскую сторону тонкой цилиндрической линзы падает параллельный пучок света круглого сечения. Ось пучка перпендикулярна плоской поверхности линзы и пересекает ось O линзы. Радиусы пучка и выпуклой поверхности линзы равны r и R соответственно, показатель преломления материала линзы равен $n = \frac{4}{3}$. За линзой на расстоянии $2R$ от нее располагается экран, параллельный плоскости линзы. Определите площадь светлого пятна на экране. Все лучи пучка проходят через линзу.

Б. Тонкостенная мензурка диаметром 80 мм (толщиной стенок можно пренебречь) за-

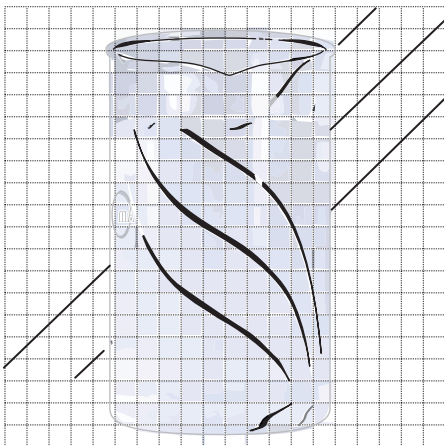


Рис. 17

полнена водой (показатель преломления равен 1,33) и стоит на горизонтальном столе на неизвестном расстоянии от вертикальной стены. На стене закреплен лист, на котором изображены три прямые параллельные линии. Их наблюдают через мензурку. Используя фотографию, приведенную на рисунке 17, определите расстояние от оси мензурки до стены. Ось объектива фотоаппарата при фотографировании старались ориентировать перпендикулярно стене. В процессе обработки в графическом редакторе фотографию обрезали, поверх изображения была нанесена сетка.

11 класс, тур 2

1. Нелинейный шнур (6 баллов)

Графики зависимостей $F(\Delta L)$ и $W(\Delta L)$ упругой силы и энергии деформации нелинейного резинового шнура от его удлинения ΔL изображены на рисунке 18. Зависимости $F(\Delta L)$ соответствует красная линия, при этом значения считываются с левой шкалы. Зависимости $W(\Delta L)$ соответствует синяя линия, значения считываются со шкалы справа. Пусть один конец шнура закреплен на потолке, а к другому концу присоединен груз массой M . Сначала шнур имеет форму прямой линии, не провисает, но и не деформирован, груз удерживается внешней силой. В некоторый момент времени груз освобождают. Найдите максимальное удлинение шнура ΔL_{\max} , равновесное удлинение ΔL_0 , устанавливающееся спустя

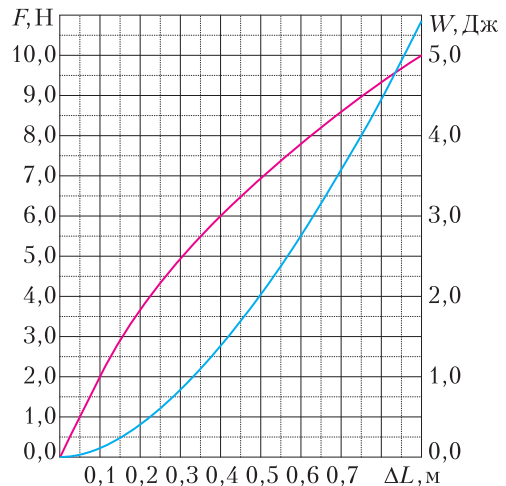


Рис. 18

длительное время после начала процесса, когда колебания прекращаются, а также период T малых колебаний груза на шнуре вблизи положения равновесия для двух значений массы M .

А. $M = 0,1$ кг.

Б. $M = 0,6$ кг.

Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 .

П. Крюков

2. Полусферы (7 баллов)

Имеются две диэлектрические равномерно заряженные полусферы с радиусами R и r и зарядами Q и q соответственно. Полусферы имеют общий центр и расположены относительно друг друга так, что плоскость, закрывающая одну полусферу, перпендикулярна плоскости, закрывающей другую полусферу (рис. 19). Найдите энергию электростатического взаимодействия полусфер.

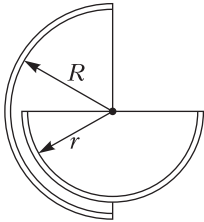


Рис. 19

М. Ермилов

3. Неоднородное поле (8 баллов)

Между областью пространства, в которой нет магнитного поля, и областью, в которой есть однородное магнитное поле с направлением вектора индукции B , параллельным границе раздела этих областей, имеется переходный участок ширины L , в котором поле линейно нарастает. В этот переходный участок перпендикулярно границе раздела влетел протон со скоростью v . Максимальная глубина проникновения протона туда, где поле есть, как раз равна толщине переходного участка. Разворот протона длился $\tau_p = 1$ с. В точности с такой же скоростью и тоже перпендикулярно границе раздела в эту же область влетел электрон. Сколько времени длился разворот электрона? На какую глубину электрон проник в область, где имеется магнитное поле? Масса электрона в 1838 раз меньше массы протона.

С. Варламов, К. Львов

4. Построение (9 баллов)

На рисунке 20 изображена кривая, которая является действительным увеличенным изображением половины окружности в тонкой линзе, а также точка (точнее говоря,

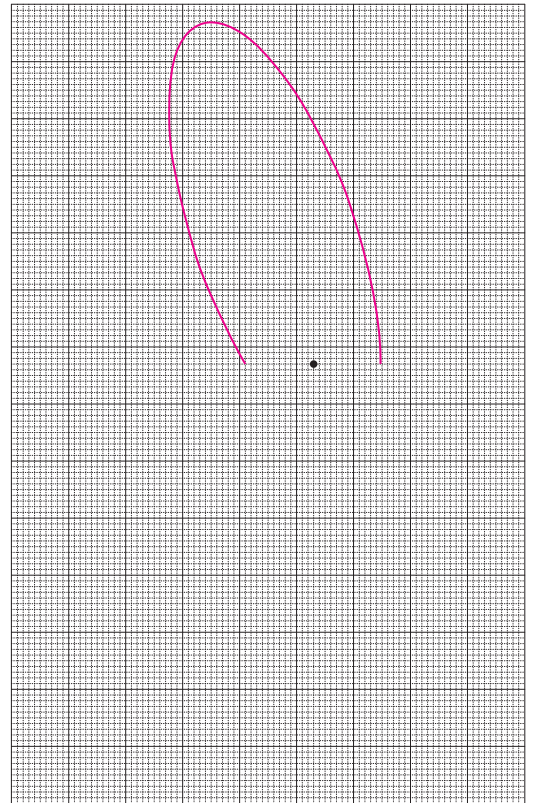


Рис. 20

маленький кружок, лежащий на отрезке, стягивающем концы кривой), являющаяся изображением центра этой окружности. Постройте оптический центр линзы. Найдите фокусное расстояние и радиус окружности. Единицей измерения длины считайте длину стороны маленькой клетки на рисунке.

П. Крюков

5. Сжатие насыщенного пара (11 баллов)

В теплопроводящем цилиндре под поршнем при температуре окружающей среды T_0 находится один моль насыщенного пара воды. Жидкой воды в сосуде нет. Универсальная газовая постоянная и молярная масса воды равны $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ и $M = 18 \text{ г/моль}$. Плотность жидкой воды 1 г/см^3 .

А. Пусть объем под поршнем очень медленно уменьшается на 10% при постоянной температуре T_0 . Пренебрегая объемом образующейся жидкой воды, определите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{вн}}^{(T)}$, а также изменение внутренней энергии со-

держимого сосуда $\Delta U^{(T)}$. Удельная теплота парообразования воды равна L . В этой части задачи предполагается ответ в общем виде.

Зависимость давления насыщенного пара от температуры в некотором диапазоне температур дается в таблице. Значения, указанные в таблице, можно считать известными во всех следующих частях задачи.

$t, ^\circ\text{C}$	23	24	25	26	27	28	29	30
$p, \text{кПа}$	2,81	2,99	3,17	3,36	3,57	3,78	4,01	4,25

$t, ^\circ\text{C}$	31	32	33	34	35	36	37	38
$p, \text{кПа}$	4,50	4,76	5,03	5,32	5,63	5,95	6,28	6,63

Б. Определите значение удельной теплоты парообразования L при температуре 27°C .

В. Пусть состояние моля насыщенного пара воды, взятого при температуре 27°C , изменяется таким образом, что пар все время остается насыщенным, при этом его объем уменьшается на 10%. Определите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{вн}}^{(\text{нас})}$, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(\text{нас})}$ в этом случае.

Г. Представим, что объем моля насыщенного пара, взятого при температуре 27°C , уменьшается на 10% адиабатически. Найдите работу внешних сил $A_{\text{вн}}^{(Q)}$, действующих на поршень, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(Q)}$ для этого случая.

Указание. На линии насыщения справедливо уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \left(\frac{1}{\rho_{\text{г}}} - \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \right)},$$

где dp и dT – изменения давления и температуры на линии насыщения, L – удельная теплота парообразования, $\rho_{\text{г}}$ и $\rho_{\text{ж}}$ – плотность газовой фазы и плотность жидкой фазы вблизи линии насыщения при температуре T .

П.Крюков

Публикацию подготовил П.Крюков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №3)

1. 6 часов 53 минуты.

Предположим, что поезд ехал 6 часов и y минут. Из условия следует, что $\overline{cd} > \overline{ab}$. Значит, для того чтобы минуты \overline{cd} на часах стали минутами \overline{ab} , должно выполняться равенство $\overline{cd} + y = 60 + \overline{ab}$. А чтобы часы \overline{ab} стали часами \overline{cd} – равенство $\overline{ab} + 6 + 1 = \overline{cd}$. Из этого равенства следует, что \overline{cd} больше \overline{ab} на 7. Следовательно, $y = 53$.

2. Не могло.

Пусть P – периметр одного из этих прямоугольников, тогда $5P$ – их суммарный периметр. В эту сумму входит периметр квадрата, а также удвоенная сумма длин разрезов. Однако число $108 + 164 = 272$ не делится на 5.

3. Не может.

Предположим, что $x = y$. Так как строк и столбцов в таблице 6, а в каждой строке и столбце мы выбирали по одному числу, то «выбранных» чисел не больше 6 (из 9, стоящих в таблице). Поэтому найдется число a , которое не было

выбрано. Тогда в строке с числом a будет стоять число $x - a$, а в столбце с числом a будет стоять число $y - a$. Но мы предположили, что $x = y$. Значит, $x - a = y - a$. В таблице нашлись одинаковые числа, но все числа по условию в таблице различны. Получили противоречие.

4. Первый.

Опишем стратегию первого игрока. Пусть он выделит следующие карточки: с числами от 11 до 20 (включительно), от 31 до 40, от 51 до 60 и от 71 до 80. Выделенных карточек 40. Невыделенные карточки разобьются на 5 групп по 10 карточек (с числами от 1 до 10, от 21 до 30, от 41 до 50, от 61 до 70 и от 81 до 90), причем если две невыделенные карточки находятся в одной группе, то числа на них отличаются не больше чем на 9, а если в разных, то не меньше чем на 11. Всего в игре каждый игрок сделает по 44 хода. Поэтому за свои первые 40 ходов первый игрок должен забрать выделенные карточки (это произойдет быстрее, если второй игрок также заберет какие-то выделенные карточки). Поэтому в конце игры останутся две невыделенные карточки и числа на них будут отличаться не на 10.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №2)

21. а) Нет. б) Могло.

а) После n -го заезда Петя проедет $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ км. Если длина трассы m км, то после $2m$ заездов Петя проедет $(2m)(2m+1)/2 = m(2m+1)$ км. Это число делится на m , поэтому не позже этого момента Петя вернется в исходную точку и закончит тренировку.

б) Пусть Петя катается по трассе длиной 3 км, а Вася – по трассе длиной 2 км. Тогда Петя закончит тренировку, проехав 1 км и еще 2 км. Вася же, проехав 1 км, окажется в середине своей трассы, проехав еще 2 км, окажется снова в середине и вернется в начальную точку, только проехав еще 3 км.

22. У них получились одинаковые числа.

Если для каждого закрашенного числа выписать его номер строки и все эти номера перемножить, как раз получится число, которое Квантик возводил в квадрат. И оно же получится, если выписать не номера строк, а номера столбцов. Поэтому, умножив это произведение само на себя, Квантик получает произведение всех закрашенных чисел – ведь каждое число в таблице умножения получается как произведение номера его строки и номера его столбца.

23. Проведем диагонали квадратов: AO , BO , CO , DO (рис.1). Сторона квадрата с площадью

a равна \sqrt{a} , его диагональ AO равна $\sqrt{2a}$. Аналогично находятся длины других диагоналей. Условие $ac = bd$ равносильно условию $\sqrt{2a}\sqrt{2c} = \sqrt{2b}\sqrt{2d}$, т.е. $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.

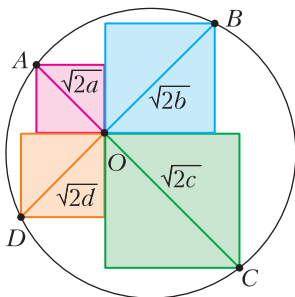


Рис. 1

Оно верно: это утверждение о степени точки O относительно данной окружности (его можно получить из подобия треугольников AOB и COD).

24. На 49.

Каждый угол многоугольника имеет величину либо 90° – пусть их a штук, либо 270° – будем называть их *большими* и пусть их b штук, причем $a + b = 100$. Запишем свойство суммы углов многоугольника:

$$\begin{aligned} 90^\circ a + 270^\circ b &= 180^\circ(100 - 2); \\ (180^\circ - 90^\circ)a + (180^\circ + 90^\circ)b &= 180^\circ(100 - 2); \\ (-90^\circ)a + (90^\circ)b &= 180^\circ(-2); \\ a - b &= 4. \end{aligned}$$

Поскольку $a + b = 100$, получим, что больших углов всего $b = 48$. Возьмем любой большой угол. Продлим одну его сторону внутрь до повторного пересечения с границей многоугольника. Таким образом мы получили разрез, который делит этот большой угол на два угла в 180° и 90° . При этом многоугольник разделился на два многоугольника, у которых любые две соседние стороны перпендикулярны и суммарное количество больших углов у них хотя бы на один меньше, чем в многоугольнике до разреза. Поэтому, повторяя эту процедуру, пока это возможно (не больше 48 раз), мы получим многоугольники с перпендикулярными сторонами без больших углов, т.е. прямоугольники. Так как сначала был один многоугольник и его делили на две части не больше 48 раз, то получилось не больше 49 прямоугольников.

Теперь покажем, что бывают многоугольники, которые нельзя разрезать меньше чем на 49 прямоугольников. Рассмотрим многоугольник в виде «лестницы» (на рисунке 2 показан пример такого 10-угольника, 100-угольник строится аналогично). У него будет 49 «ступенек» – горизонтальных сторон, кроме нижней (на рисунке «ступеньки» выделены красным). Никакие две из них не могут примыкать к одному прямоугольнику, поэтому прямоугольников потребуется хотя бы 49.

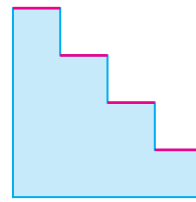


Рис. 2

Морис Крайчик

1. Наиболее частый ответ – папа (а абонент – дочка). Но этот ответ неполон, возможны и другие варианты – например, дядя или тетя (папин брат или сестра).

2. Возможно, самой сложной частью задачи является понять, почему вообще существует восемь различных путей. Так или иначе, это приводит к трем таким уравнениям (l – длина комнаты, w – ширина, h – высота):

$$\begin{aligned} l + h &= 650; \\ \sqrt{160^2 + (l + w)^2} &= 650; \\ \sqrt{\left(\frac{h + w}{2} + 80\right)^2 + \left(\frac{h + w}{2} + l - 80\right)^2} &= 650. \end{aligned}$$

Решив их, получаем $l = 390$, $w = 240$, $h = 260$.

3. Каждый из племянников должен получить по 18 четвертей вина, причем они должны быть в 9 бочонках. Обозначим через x , y , z , t , u количества бочонков каждого вида, которые может получить

какой-либо из племянников. Тогда $x + y + z + t + u = 9$ и $4x + 3y + 2z + t = 18$. Эта система имеет 8 (ненулевых) решений (см. таблицу).

Решение	x	y	z	t	u
1	3	1	1	1	3
2	2	1	2	3	1
3	2	1	3	1	2
4	2	2	1	2	2
5	1	1	5	1	1
6	1	2	3	2	1
7	1	3	1	3	1
8	1	3	2	1	2

Набор бочонков каждого из племянников должен быть одним из этих восьми решений, причем все 5 наборов должны быть разными. Кроме того, для пяти выбранных решений суммы чисел в каждом столбце должны быть равны 9.

Отсюда мы сразу получаем, что решение номер 5 не может быть использовано: если кому-то из племянников достанется 5 бочонков вида z (наполовину полных), то остальным четверым должно остаться ровно по одному такому бочонку, но в списке есть всего три различных варианта с 1 в столбце z .

Далее, если сложить все строчки, кроме пятой, то получим (12, 13, 13, 13, 12), т.е. необходимо исключить еще два решения, дающие в сумме (3, 4, 4, 4, 3). Нетрудно убедиться, что это либо 2 + 8, либо 3 + 7, либо 4 + 6. Таким образом, есть (с точностью до перестановок) ровно три варианта выбрать 5 нужных строчек: (1, 3, 4, 6, 7), (1, 2, 4, 6, 8) или (1, 2, 3, 7, 8).

4. Стоимость покупки книг для каждой семьи должна быть числом, меньшим 100 и представимым в виде суммы двух квадратов не менее чем двумя способами. Таких чисел всего два: $65 = 8^2 + 1 = 7^2 + 4^2$ и $85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$. Только одно из этих представлений удовлетворяет условию «Питер купил на 5 книг больше, чем Том» – то, в котором Том купил 2 книги, а Питер 7. Так как эти числа из разных представлений, то Том и Питер – из разных семей, поэтому именно Питер является отцом Ричарда.
5. 119 и 49 соответственно.

85-я Московская олимпиада школьников по физике

7 класс

1. Наименьшая длина колонны достигается в тот момент, когда самое быстрое тело встречается с самым медленным. Она равна 20 см.
2. $v_x = \frac{u_1 u_2}{2u_2 - u_1} = 84$ км/ч.

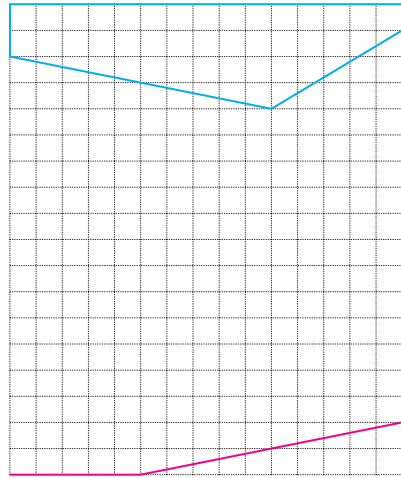


Рис. 3

3. См. рис. 3 (достаточно найти четыре координаты y при $x_1 = 0$, $x_2 = 150$ см, $x_3 = 300$ см и $x_4 = 450$ см, это будут $y_1 = 5,4$ м, $y_2 = 5,4$ м, $y_3 = 5,1$ м и $y_4 = 4,8$ м соответственно).

4. $\rho_L = \rho_3 \frac{R_3}{R_L} \frac{g_L}{g_3} = 3,3$ г/см³.

8 класс

2. $P = 56$ Вт; $s = 1,6 \cdot 10^9$ м.
3. $\rho = 1,09$ г/см³; $h = 20,6$ см.
4. $M = \frac{L m_1 m_2 (t_2 - t_1)}{\lambda (m_2 (t_2 - t_0) - m_1 (t_1 - t_0))} = 680$ г.

9 класс

1. Точка, изображающая центр диска в момент второй вспышки, совпадает с серединой отрезка 13 (рис. 4). Аналогично, точка, изображающая центр диска в момент третьей вспышки, совпадает с серединой отрезка 24. Строим середины отрезков 13 и 24 (точки O_2 и O_3 соответственно

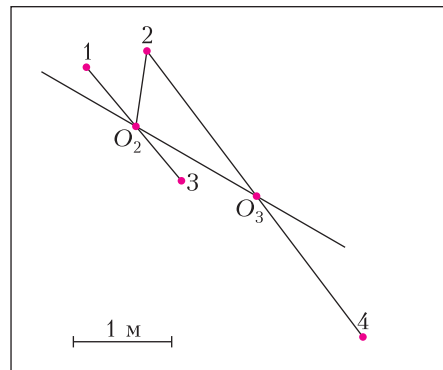


Рис. 4

на рисунке). Длина отрезка O_2O_3 равна радиусу диска. За четверть секунды точка, изображающая центр диска, проходит путь, соответствующий длине отрезка O_2O_3 . Измерения по чертежу при помощи линейки дают $O_2O_3 = 34,5$ мм, $O_2O_3 = 64,5$ мм. Тогда

$$R \approx \frac{34,5}{45} \text{ м} = 0,75 \text{ м},$$

$$v \approx \frac{64,5}{45} \cdot 4 \text{ м/с} \approx 5,7 \text{ м/с}.$$

2. А. Анализ показывает, что в каждый момент времени брусок движется с ускорением, которое по абсолютной величине может быть равно $a_1 \approx (\mu_n - \mu_c)g = 1 \text{ м/с}$ или $a_2 \approx (\mu_n + \mu_c)g = 9 \text{ м/с}$. Спустя длительное время после начала процесса установится квазистационарный режим, и проекция скорости бруска в зависимости от времени будет меняться периодически. В течение периода за время $\tau = \frac{T}{20}$ модуль скорости уменьшается от значения u до нуля, а затем за время 9τ увеличивается от нуля до u (рис. 5; $\tau = 0,2$ с). Значение

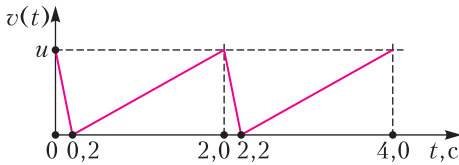


Рис. 5

максимальной скорости в квазистационарном режиме равно $u = 1,8 \text{ м/с}$.

Б. Б1) Сразу заметим, что нижняя доска при любом значении внешней силы будет оставаться в покое, поскольку максимальное значение силы трения покоя, действующей на нее со стороны стола, равно $2\mu_n mg$, а максимальная сила, действующая на нижнюю доску со стороны верхней, равна $\mu_n mg$. Таким образом, при значении внешней силы меньше $\mu_n mg$ ускорение верхней доски равно нулю, а при значении больше $\mu_n mg$ равно

$$a(t) = \frac{\mu_n mg}{t_0} - \mu_c g.$$

Искомый график изображен на рисунке 6.

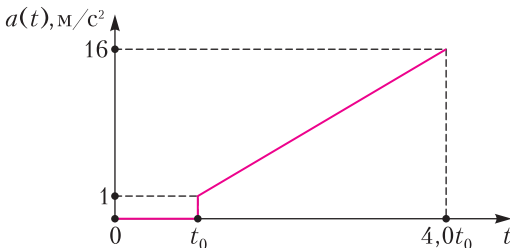


Рис. 6

Б2) В этом случае движение начнется, когда внешняя сила станет больше значения $2\mu_n mg = mg$, это произойдет в момент времени $t_1 = 2t_0$, далее верхняя доска будет двигаться совместно с нижней с ускорением $a(t) = \frac{\mu_n gt}{2t_0} - \mu_c g$.

Позднее в некоторый момент времени начнется проскальзывание верхней доски по нижней. Значение внешней силы в этот момент будет удовлетворять соотношению

$$\frac{F - 2\mu_c mg}{2m} m = \mu_n mg.$$

Отсюда находим критическое значение силы: $F = 2(\mu_c + \mu_n)mg = 1,8mg$. Этому значению сила достигает в момент времени $t = 3,6t_0$. Далее нижняя доска будет двигаться с ускорением, большим ускорения верхней доски. Зависимость ускорения нижней доски от времени в этом случае будет задаваться формулой

$$a(t) = \frac{\mu_n gt}{t_0} - 3\mu_c g.$$

Соответствующий график представлен на рисунке 7.

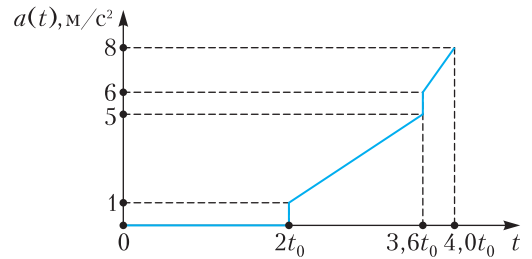


Рис. 7

3. Обозначим $\Delta T(h) = (t_k - t(h))$ разность температур капли и окружающей среды на высоте h . Пусть за малое время Δt замерзает небольшая масса капли Δm , тогда справедливо соотношение

$$\lambda \Delta m = \alpha \Delta T(h) S \Delta t,$$

или, если скорость капли равна v ,

$$\frac{\lambda v \Delta m}{\alpha S} = \Delta T(h) \Delta h.$$

При суммировании выражений, стоящих в правой части этой формулы, получается величина, численно равная площади фигуры, ограниченной графиком профиля температуры, осями абсцисс и ординат. Эта площадь не зависит от размера капли и скорости ее падения. Таким образом, суммарная масса, превращающаяся в лед в процессе падения, пропорциональна площади ее поверхности и обратно пропорциональна скорости падения:

$$m \sim \frac{S}{v} \sim \frac{R^2}{v}.$$

Скорость падения определяется из равенства силы сопротивления и силы тяжести:

$$Mg = \beta S v^2, \quad v^2 \sim \frac{\rho V}{S} \sim R.$$

Учитывая, что масса капли пропорциональна R^3 , получаем для доли замерзающей массы соотношение

$$n = \frac{m}{M} \sim \frac{R^{3/2}}{R^3} \sim R^{-3/2}.$$

Таким образом, доля массы большой капли, превращающаяся в лед, равна

$$n = \frac{1}{4} \cdot (2,25)^{-3/2} = \frac{2}{27} \approx 7,4\%.$$

4. А. Обозначим $V(I)$ зависимость напряжения на туннельном диоде от текущего через него тока. Тогда ток в рассматриваемой цепи определяется уравнением $U_0 - IR = V(I)$, количество решений которого зависит от величины параметра R . Графический метод решения этого уравнения состоит в определении координат точки (или точек) пересечения вольт-амперной характеристики и прямой $U = U_0 - IR$. На графике, представленном на рисунке 8, синей линией показана

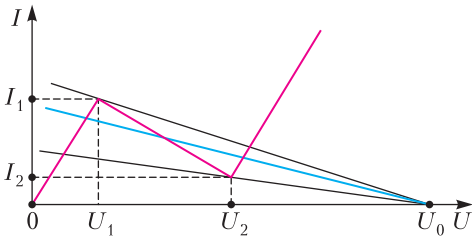


Рис. 8

на прямая, соответствующая такому значению сопротивления, при котором ток цепи определяется неоднозначно (уравнение имеет три решения). Тонкими сплошными линиями черного цвета показаны прямые, соответствующие таким значениям сопротивления R_1 и R_2 , что уравнение имеет два решения. Легко видеть, что искомые значения сопротивления, при которых ток в цепи определяется однозначно, даются неравенствами

$$R < R_1, \quad R > R_2.$$

Теперь остается определить значения R_1 и R_2 . Значение R_1 определяется из уравнения

$$u = 6u - 4iR_1.$$

Аналогичное уравнение можно записать и для определения значения R_2 :

$$4u = 6u - iR_2.$$

Решая эти уравнения, получаем ответы:

$$R > \frac{2u}{i}, \quad R < \frac{5u}{4i}.$$

Б. Параллельное соединение туннельного диода и резистора может обеспечить постоянный ток в этой цепи (в некотором диапазоне напряжений) в том случае, если вольт-амперная характеристика этого параллельного соединения имеет горизонтальный участок, что реализуется при значении сопротивления балластного резистора

$$R_0 = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = \frac{600}{9} \text{ Ом} \approx 66,7 \text{ Ом}.$$

Теперь можем легко вычислить постоянное значение тока через нагрузку:

$$I = I_1 + \frac{U_1}{R_0} = 13 \text{ мА}.$$

Обозначим минимальное входное напряжение $U_{\min} = 3,0$ В, тогда значение тока I через нагрузку реализуется при следующих значениях сопротивления нагрузки:

$$\frac{U_{\min} - U_2}{I} \leq R \leq \frac{U_{\min} - U_1}{I},$$

или

$$170 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}.$$

Рассуждая аналогично, можем рассчитать диапазон возможных значений сопротивления нагрузки для максимального входного напряжения $U_{\max} = 3,4$ В. Получится двойное неравенство

$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 246 \text{ Ом}.$$

Пересечение этих диапазонов дает ответ на вопрос задачи:

$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}.$$

5. Для того чтобы изображение предмета получалось наиболее резким, необходимо, чтобы прямые, на которых лежат предмет BC , отрезок, символизирующий плоскость пленки, и линза пересекались в одной точке. В этом случае изображение предмета будет полностью лежать в плоскости пленки. Обозначим буквой G точку, в которой пересекаются описанные прямые (рис. 9). Искомый угол обозначен синей дугой на рисунке, a и a_1 — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на линзу. Длины a и a_1 связаны формулой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}.$$

При этом, поскольку искомый угол φ мал, $a \approx AO$

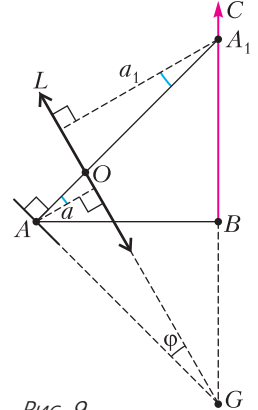


Рис. 9

и $a_1 \approx A_1O$, получаем уравнение

$$a + a_1 = AA_1 = \frac{L}{\cos \alpha} = L\sqrt{2},$$

где $L = AB$. Решая эти два уравнения как систему, отбираем решение, не противоречащее физическому смыслу:

$$a = L\sqrt{2} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}f}{2L}}}{2} \approx L\sqrt{2} \frac{4\sqrt{2}f}{4 \cdot 2L} = f.$$

Поскольку $\angle A_1AB = \frac{\pi}{4}$, то $AA_1 = AG = L\sqrt{2}$. Таким образом, искомым углом

$$\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}} \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 0,4^\circ.$$

10 класс

1. Векторы скоростей всех точек твердого стержня в рассматриваемый момент времени равны друг другу. Чтобы через малое время Δt проекции скоростей всех точек на направление стержня по-прежнему оставались одинаковыми, проекции ускорений на направление стержня тоже должны быть одинаковыми. Абсолютные значения ускорений концов стержня различны, но при этом ускорения направлены вдоль параллельных прямых, поэтому векторы ускорений могут давать одинаковые проекции на направление стержня только в том случае, если векторы ускорений перпендикулярны стержню. Перейдем в инерциальную систему отсчета, в которой в данный момент времени стержень покоится. Ускорения точек стержня не изменяют своего значения и направления. Через бесконечно малый промежуток времени Δt скорости точек стержня будут перпендикулярны стержню и скорость точки A будет вдвое больше скорости точки B . Скорости остальных точек стержня будут пропорциональны расстояниям до мгновенного центра вращения. Пусть на стержне это точка O , тогда ускорения точек в начале интервала времени Δt должны быть тоже пропорциональными расстояниям до точки O . Проведем прямые через начала ускорений \vec{a}_A и \vec{a}_B и через их концы. Точка стержня, которая лежит на пересечении этих прямых, имеет нулевое ускорение (точка O). Найдем ускорение центра масс стержня. Если ускорения точек A и B направлены в одну сторону, то ускорение центра масс равно $\frac{3}{2}a_0$ и совпадает с направлением векторов \vec{a}_A и \vec{a}_B . Если ускорения точек A и B направлены в разные стороны, то ускорение центра масс равно $\frac{1}{2}a_0$ и совпадает с направлением вектора \vec{a}_A . Результи-

рующую силу, действующую на стержень, найдем, воспользовавшись теоремой о движении центра масс. В итоге получаем, что на стержень действует либо сила $\frac{3}{2}ma_0$, либо сила $\frac{1}{2}ma_0$. В обоих случаях вектор силы направлен в ту же сторону, что и вектор \vec{a}_A .

2. Используя график в условии, находим КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{0,8 \text{ кДж}}{9,0 \text{ кДж}} = 8,9\%,$$

где A – работа, совершенная газом за цикл, Q – подведенное к газу количество теплоты. Найдем теплоемкость газа в процессе, который описывается уравнением $A = \frac{1}{6}Q$ (прямолинейный участок, проходящий через начало координат). Запишем первое начало термодинамики для процесса с постоянной теплоемкостью:

$$c\Delta T = c_V\Delta T + A,$$

откуда получим

$$A = (c - c_V)\Delta T = \frac{(c - c_V)}{c}Q,$$

следовательно,

$$\frac{c_1 - c_V}{c_1} = \frac{1}{6}, \quad c_1 = \frac{6}{5}c_V = 3R.$$

Зная теплоемкость газа, найдем изменение температуры в этом процессе:

$$Q = 3R\Delta T_1, \quad \Delta T_1 = \frac{9 \text{ кДж}}{3 \cdot 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})} = 361 \text{ К}.$$

Во втором процессе работа газа равна нулю, поэтому для него справедливо равенство $Q = c_V\Delta T_2$, из которого следует

$$\Delta T_2 = -\frac{7,5 \text{ кДж}}{\frac{5}{2} \cdot 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})} = -361 \text{ К}.$$

В начале и в конце третьего процесса с постоянной теплоемкостью температуры газа равны, следовательно, это изотермический процесс.

Минимальная температура газа в цикле равна

$$T_{\min} = T_{\max} + \Delta T_2 = 481 \text{ К} - 361 \text{ К} = 120 \text{ К}.$$

(Продолжение следует)

Региональный этап I Всероссийской олимпиады школьников по математике

(см. «Квант» № 3)

9 класс

1. Не может.

Предположим противное, и пусть $n > 1$ – наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k \times k$, где

$k \geq n > 1$. Значит, его площадь не менее n^2 . С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times n$, т.е. не больше $1 + 2 + 3 + \dots + n < n^2$. Противоречие.

2. Пусть $ABCD$ – одна из рассматриваемых трапеций, $AD \parallel BC \parallel Ox$ (рис.10). Пусть точки A и C имеют координаты $(a; a^2)$ и $(c; c^2)$. Легко получить уравнение прямой AC : $(c^2 - a^2)x - (c - a)y + (ca^2 - ac^2) = 0$, которое после сокращения на $c - a \neq 0$ превращается в $y = (a + c)x - ac$. Но $-ac$ равно произведению половин оснований трапеции (это произведение расстояний от A и C до оси Oy). Отсюда $-ac = \frac{k}{4}$. Следовательно, прямая AC проходит через фиксированную точку $(0; \frac{k}{4})$.

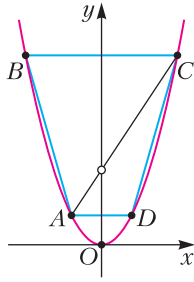


Рис. 10

3. Победила команда A . Пусть в B есть хотя бы один рыцарь r . Тогда r выиграл хотя бы у двоих рыцарей из A , пусть s – один из них. Поскольку s – рыцарь, он правдиво ответил на заданный ему вопрос, т.е. он проиграл лжецу. Но из правил следует, что каждый игрок проигрывает не более одного раза, а s проиграл и рыцарю r , и лжецу. Это противоречие показывает, что B состоит лишь из лжецов. Предположим, что A состоит только из рыцарей. В этом случае каждый из них проиграл кому-то лжецу из команды B , однако каждый лжец в B выиграл не более чем у одного рыцаря из A , так как он солгал, отвечая на вопрос. Следовательно, разным рыцарям из A соответствуют разные лжецы из B , поэтому в B людей не меньше, чем в A ; противоречие.

Таким образом, в команде A есть хотя бы один лжец; обозначим одного из них через l . Тогда l солгал, т.е. он не проиграл ни одному лжецу из B – а значит, ни одному игроку из B . Это значит, что l либо выиграл все свои партии, либо до него не дошла очередь. В любом из этих случаев команда A выиграла.

4. Сумма всех чисел ряда, кроме числа 500, равна $(1 + 2 + 3 + \dots + 1000) - 500 > 2 \cdot 100000$, поэтому сумма чисел с какой-то из сторон от числа 500 больше 100000, пусть для определенности справа. Пусть справа от 500 стоят (слева направо) числа a_1, a_2, \dots, a_k . Обозначим $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; выберем наименьшее n , для которого $S_n > 100000$,

так что $S_n > 100000 \geq S_{n-1}$. Если $S_n \leq 100500$, то мы уже нашли желаемую группу чисел.

Пусть теперь $S_n > 100500$. Докажем, что тогда нам подходит сумма $500 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 500 + S_{n-1}$. Действительно, поскольку $a_n \leq 1000$, имеем $500 + S_{n-1} = 500 + S_n - a_n > 500 + 100500 - 1000 = 100000$. С другой стороны, $500 + S_{n-1} \leq 500 + 100000 = 100500$, что и требовалось.

5. Обозначим через O середину дуги DBE окружности, описанной около треугольника DBE (рис. 11). Прямая BO является внешней биссек-

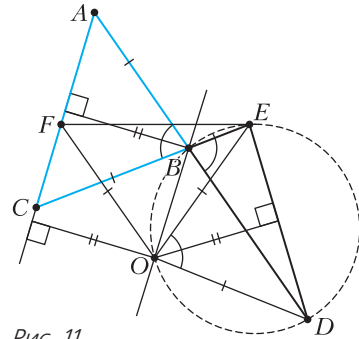


Рис. 11

трисой в треугольнике DBE , а следовательно, и в треугольнике ABC . Но треугольник ABC равнобедренный, поэтому $BO \parallel AC$.

Заметим далее, что $\angle EOD = \angle EBD = \angle ABC$. Таким образом, в равнобедренных треугольниках EOD и ABC равны углы при вершинах, а также основания, поэтому равны и сами треугольники. Отсюда, во-первых, $BA = BC = OE = OD$. Во-вторых, расстояние от точки O до прямой DE равно расстоянию от точки B до AC , а последнее равно расстоянию от O до AC (поскольку $BO \parallel AC$). Значит, точка O лежит на биссектрисе угла между прямыми DE и AC .

Из условия $\angle DEF = \angle CFE$ вытекает, что эта биссектриса является серединным перпендикуляром к отрезку EF . Таким образом, $OF = OE = OD$. Иными словами, точка O – центр окружности, описанной около треугольника DFE . Следовательно, $2\angle DFE = \angle DOE = \angle ABC$, что и требовалось.

6. -20 .

Для каждого числа x , написанного на доске, произведение x и суммы шести оставшихся равно $f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$. Квадратичная функция $f(x)$ принимает все значения, кроме максимального, два раза – а именно, в точках a и $10 - a$. Значит, если $f(a) = f(b)$ при $a \neq b$, то $a + b = 10$.

Таким образом, каждое число встречается в тетради не более двух раз. Значит, так как в тетради всего четыре различных числа, три из них встречаются по два раза и еще одно – один раз. Таким

образом, шесть из семи чисел на доске разбиваются на пары так, что сумма чисел каждой пары равна 10. Значит, сумма этих шести чисел равна 30, тогда седьмое число равно $10 - 30 = -20$.

7. На нулевом.

Назовем быстрого и медленного тараканов B и M соответственно. Если таракан бежит в том же направлении, что и в момент старта, то будем говорить, что он бежит *вперед*, в противном случае будем говорить, что он бежит *назад*.

До первой встречи оба таракана бегут вперед, между первой и второй встречами B бежит вперед, а M – назад. Между второй и третьей встречами оба таракана бегут назад, а между третьей и четвертой встречами B бежит назад, а M – вперед. Наконец, на четвертой встрече B разворачивается и они оба снова начинают бег вперед.

Будем следить за перемещением M . Если между двумя встречами тараканы бегут в противоположные стороны, между такими встречаем всегда проходит одно и то же время, а значит, M всегда пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, между первой и второй встречами, а также между третьей и четвертой встречами M пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Аналогично, когда между двумя встречами тараканы бегут в одном направлении, это тоже всегда занимает одинаковое время и M пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, до первой встречи, а также между второй и третьей встречами M также пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Стало быть, в момент четвертой встречи M (а значит, и B) будет в точке старта.

Далее эта ситуация будет повторяться каждые 4 встречи. Следовательно, в точке старта тараканы будут и в момент соотой встречи.

8. Пусть M – середина BC (тогда M – еще и середина PQ); пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC .

По свойству медианы имеем $MG:GA = 1:2$. А так как $MP:PB = 1:2$, получаем, что $PG \parallel BA$. Тогда $\angle YPG = \angle PYB$ и $\angle QPG = \angle PBY$. Но YP – медиана прямоугольного треугольника BYQ , поэтому $\angle PYB = \angle PBY$. Значит, $\angle YPG = \angle QPG$, т.е. PG – биссектриса угла QPY . Поэтому точка G равноудалена от прямых PQ и PY .

Аналогично показывается, что QG – биссектриса угла PQX и потому точка G равноудалена от PQ и QX . Значит, она равноудалена от трех прямых YP , PQ и QX . Этим завершается решение.

10. Да.

Заметим, что числа $13^2 = 169$ и $14^2 = 196$ получа-

ются друг из друга перестановкой цифр.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}(13 \cdot 1000 + 14) = 6507$. Положим $n = 10^{100} \cdot a + 13$. Заметим тогда, что

$$n^2 = 10^{200} \cdot a^2 + 10^{100} \cdot (1000 \cdot 13^2 + 14 \cdot 13) + 13^2, \\ (n+1)^2 = 10^{200} \cdot a^2 + 10^{100} \cdot (1000 \cdot 13 \cdot 14 + 14^2) + 14^2.$$

Иначе говоря, десятичная запись числа n^2 состоит из блоков a^2 , $182 = 14 \cdot 13$ и $169 = 13^2$ (дважды), разделенных нулями; у числа же $(n+1)^2$ эти блоки суть a^2 , $182 = 14 \cdot 13$ и $196 = 14^2$ (дважды). Поскольку количества разделяющих нулей в обоих случаях одинаковы, получаем, что число n удовлетворяет требованиям.

10 класс

2. Аналогично решению задачи 2 для 9 класса, покажите, что $\left(0; -\frac{k}{4}\right)$ – искомая точка.

5. В прямоугольном треугольнике AOB (рис.12) радиус вписанной окружности равен $\frac{1}{2}(OA + OB - AB)$ (что также равно расстоянию от вершины прямого угла до точки касания катета со вписанной окружностью). Складывая это равенство с аналогичными для треугольников BOC , COD , DOA , получаем, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB , BOC , COD , DOA равна

$$S = \frac{1}{2}(2(OA + OB + OC + OD) - P_{ABCD}) = \\ = AC + BD - \frac{P_{ABCD}}{2}.$$

Пусть вписанные окружности треугольников ABC и DAB имеют центры I , J и касаются стороны AB в точках K и L соответственно (рис.13). Поскольку KL – проекция IJ на прямую AB , имеем

$$IJ \geq KL = AK - AL = \\ = \frac{1}{2}(AC + AB - BC) - \frac{1}{2}(AD + AB - BD) = \\ = \frac{1}{2}(AC + BD - BC - AD).$$

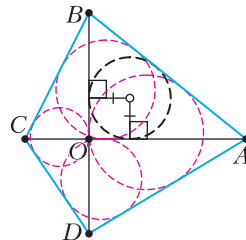


Рис. 12

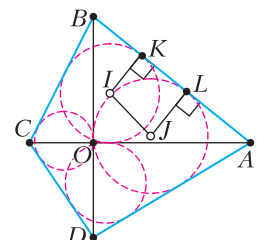


Рис. 13

Сложим это неравенство с аналогичными для расстояний между другими парами центров вписанных окружностей треугольников ABC , BCD , CDA , DAB . Получим оценку на периметр P :

$$P \geq \frac{1}{2}(4AC + 4BD - 2P_{ABCD}).$$

Сравнивая с выражением S , получаем требуемое неравенство $P \geq 2S$.

6. Не могут.

Заметим, что

$$4(x^2 + x + 1) = (4x^2 + 4x + 1) + 3 = (2x + 1)^2 + 3 \geq 3,$$

причем равенство достигается только при $x = -1/2$. Тогда первое слагаемое $\frac{1}{x^2 + x + 1}$ все-

гда положительно и не превосходит $4/3$. То же верно и для других слагаемых. Значит, левая часть уравнения Сергея не превышает $4/3 \cdot 3 = 4$, причем равенство достигается лишь при $x = y = z = -1/2$, следовательно, равенство невозможно для различных x, y, z .

7. Могли.

Примером могут служить числа вида $\overline{A0}, \overline{A1}, \overline{A2}, \overline{A3}, \overline{A4}, \overline{A5}, \overline{A6}, \overline{A7}, \overline{A8}, \overline{A9}$, где $A = 1023456789$.

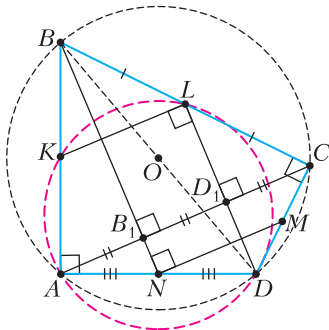


Рис. 14

8. Обозначим через K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно (рис. 14). По условию, четырехугольник $AKLD$ вписанный. Значит, $\angle KLD = 180^\circ - \angle KAD = 90^\circ$. Поскольку KL – средняя линия треугольника ABC , то $KL \parallel AC$, поэтому $LD \perp AC$. Пусть отрезки DL и AC пересекаются в точке D_1 .

Опустим из точки B перпендикуляр BB_1 на прямую AC . Тогда $BB_1 \parallel LD_1$, значит, D_1 – середина отрезка CB_1 по теореме Фалеса. Кроме того, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, построенную на отрезке BD как на диаметре, обозначим центр этой окружности через O . Вновь по теореме Фалеса проекции точек B и D на прямую AC находятся на равном расстоянии от проекции точки O , т.е. от середины отрезка AC . Это означает, что $CD_1 = AB_1$. Итого,

$AB_1 = CD_1 = B_1D_1$. Значит, B_1N – средняя линия в треугольнике AD_1D , поэтому $B_1N \parallel DD_1$ и $\angle D_1B_1N = 90^\circ$. Поскольку еще и NM – средняя линия треугольника ACD , то $NM \parallel AC$ и $\angle B_1NM = 90^\circ$. Следовательно, точки B, C, N и M лежат на окружности с диаметром BM , что и требовалось доказать.

9. (1,1,1).

Видим, что $a = b = c = 1$ удовлетворяет условию. Далее будет доказано, что других ответов нет.

Давайте предположим сначала, что $s = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ делится на pqr , где $p = a + bc, q = b + ca, r = c + ab$ (в частности, это следует из условия, если дополнительно предполагать, что p, q, r различны).

Заметим, что один из трех сомножителей $a^2 + 1, b^2 + 1, c^2 + 1$ не может делиться на произведение двух из чисел p, q, r , так как он меньше этого произведения. Действительно, рассмотрим, например, $pq = (a + bc)(b + ca)$. Из раскрытия скобок видим, что

$$pq > c^2(ab) + ab \geq c^2 + 1, pq > b^2c + ab \geq b^2 + 1$$

и аналогично $pq > a^2 + 1$. Значит, каждый из сомножителей $a^2 + 1, b^2 + 1, c^2 + 1$ должен делиться ровно на одно из чисел p, q, r . Пусть, для определенности, a – наименьшее из чисел a, b, c . Тогда $a^2 \leq bc$ и $1 \leq a$, поэтому $a^2 + 1$ может делиться на $p = bc + a$ только в случае $a^2 = bc$ и $a = 1$, т.е. в случае $a = b = c = 1$. Далее, $a^2 \leq ac$ и $1 \leq b$, поэтому $a^2 + 1$ может делиться на $q = ac + b$ только в случае $a^2 = ac$ и $b = 1$, т.е. в случае $a = b = c = 1$. Аналогично, $a^2 + 1$ может делиться на $r = ab + c$ только при $a = b = c = 1$.

Пусть теперь какие-то два из трех чисел p, q, r совпадают, скажем, $p = q$. Тогда

$$0 = q - p = b + ca - a - bc = (a - b)(c - 1).$$

Значит, либо $a = b$, либо $c = 1$. Первый случай возможен лишь при $a = b = 1$, иначе $p = a + bc = a + ac = a(a + c)$ – составное число, что дает противоречие. Следовательно, в любом случае среди a, b, c присутствует единица, скажем, $c = 1$.

Тогда наши данные простые числа – это $p = a + b, q = a + b$ и $r = ab + 1$, и они должны быть делителями $s = 2(a^2 + 1)(b^2 + 1)$. Если хотя бы одно из чисел a, b больше 1, то $p > 2$ и на $p = a + b$ обязан делиться хотя бы один из сомножителей $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$. А поскольку разность

$$(a^2 + 1) - (b^2 + 1) = (a - b)(a + b)$$

делится на $p = a + b$, получаем, что оба числа $a^2 + 1, b^2 + 1$ делятся на p . Тогда, если r отлично

от $p = q$, то s делится на pqr , что разобрано в начале решения.

Остается вариант $p = q = r$. Рассуждаем как в предыдущем случае и получаем, что хотя бы два из трех чисел a, b, c обязаны равняться 1. Пусть, например, $a = b = 1, p = q = r = c + 1, s = 4(c^2 + 1)$. Случай $c = 1$ уже был ранее. Если $c > 1$, то $c + 1$ — нечетное простое, значит, $c^2 + 1$ должно делиться на $c + 1$. Отсюда $(c^2 + 1) - (c + 1) = c(c - 1)$ должно делиться на $c + 1$. Но это невозможно, так как $0 < c - 1 < c < c + 1$ и $c + 1$ простое.

10. 1012.

Положим $n = 1012$.

Оценка. Людей сопоставим вершинам графа, номер вершины будет означать ответ соответствующего человека, а если пара людей дружит, то проведем ребро между соответствующими вершинами.

Пусть A — множество всех людей, которые назвали числа от 0 до $n - 1$, а B — множество всех людей, которые назвали числа от n до $2n - 1$. Пусть d_i — степень вершины i (т.е. количество ребер, выходящих из вершины i). Тогда по условию $d_i = i$, если i — рыцарь, и $|d_i - i| = 1$ в противном случае. Пусть в множестве A ровно x лжецов, а в множестве B — ровно y .

Оценим количество E ребер между людьми из разных множеств A и B .

С одной стороны, E не больше суммы степеней вершин множества A , откуда

$$E \leq d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1} \leq 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + x = \frac{(n-1)n}{2} + x.$$

С другой стороны, из каждой вершины i множества B не более $n - 1$ ребер идет в вершины множества A , а значит, не менее $d_i - (n - 1)$ ребер идет в вершины множества A . Отсюда

$$E \geq d_n + d_{n+1} + \dots + d_{2n-1} - n(n-1) \geq n + (n+1) + \dots + (2n-1) - y - n(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - y.$$

Получаем неравенство

$$\frac{(n-1)n}{2} + x \geq \frac{n(n+1)}{2} - y,$$

откуда $x + y \geq n$. Это означает, что всего лжецов не менее n .

Пример. Как и прежде, номер человека будет означать его ответ. Возьмем два множества людей: $C = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $D = \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$. Пусть в множестве C никакие двое людей не дружат друг с другом, а в множестве D — любые двое дружат. Далее, пусть человек $i \in C$ и человек $j \in D$ дружат тогда и только тогда, когда

$i + j \geq 2n - 1$. Тогда у человека $i \in C$ всего $i + 1$ друзей: $2n - 1, 2n - 2, \dots, 2n - i - 1$. У человека $j \in D$ будет всего j друзей: это $j - n + 1$ людей $n - 1, n - 2, \dots, 2n - j - 1$ из множества C и все люди множества D , кроме него самого. При этом все люди в C — лжецы, а в D — рыцари. Видим, что все условия задачи выполняются.

11 класс

2. 2023.

Заметим, что число $p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1}$ не может быть натуральным. Действительно, если $x_1 = 1$, то $p_1 = 0$, если же $x_1 > 1$, то p_1 — не целое, как разность целого и нецелого чисел. Поэтому натуральными могут быть не более 2023 чисел p_i . Покажем, как получить 2023 натуральных числа. Если $x_1 = 2, x_2 = 3$, то

$$p_2 = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right) = 4.$$

При $n > 2$ положим $x_{n+1} = p_n > x_n$. Тогда $p_{n+1} = p_n\left(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = p_n^2 - 1$ также будет натуральным.

5. Обозначим $k = -a, l = a + b$ и перепишем уравнение в виде

$$t^4 - kt^3 + (k+l)t^2 - 2lt + l = 0.$$

Заметим, что $k = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 > 0$ и $l = t_1t_2t_3t_4 > 0$. Далее, перепишем уравнение в виде

$$t^4 + l(t-1)^2 = kt^2(t-1),$$

откуда сразу следует, что все его корни строго больше 1.

Добавим к каждой части $2\sqrt{l}t^2(t-1)$, уравнение превратится в

$$(t^2 + u(t-1))^2 = v^2t^2(t-1),$$

где $u = \sqrt{l}, v = \sqrt{k + 2\sqrt{l}}$. Если обозначить $s = \sqrt{t-1}$, то получим однородное уравнение

$$t^2 - vst + us^2 = 0, \text{ из которого следует, что } t/s = c_1, 2, \text{ где } c_1 = \left(v - \sqrt{v^2 - 4u}\right)/2, c_2 = \left(v + \sqrt{v^2 - 4u}\right)/2.$$

Далее, каждое из уравнений $t/s = c_i$ можно переписать в виде $t^2 - c_it + c_i = 0$. Эти уравнения различны, и каждое из них имеет два различных положительных корня, так как исходное уравнение имеет 4 различных положительных корня. Из этого следует, что $4 < c_1 < c_2$.

Так как функция $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x}$ строго убывает при $x > 4$ (это несложно показать, например взяв производную), то

$$c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2} < c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}.$$

Теперь уже легко вычислить и упорядочить t_i :

$$t_1 = \frac{c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2} < t_2 = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} < \\ < t_3 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} < t_4 = \frac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2},$$

значит, $t_1 t_4 = c_2 > c_1 = t_2 t_3$.

6. Сможет.

Выберем 30 гирь с массами вида $3k + 1$ и дадим Пете, а Васе дадим 30 гирь с массами вида $3k + 2$. Тогда масса любых 12 гирь, взятых у одного человека, будет делиться на 3, а масса любых 11 гирь, взятых у одного человека, не будет делиться на 3.

7. 2.

Касательная в точке $A(x_a; x_a^2)$ к графику G_2 имеет уравнение

$$y = f'(x_a)(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a x - x_a^2.$$

Аналогично, уравнение касательной в точке $B(x_b; x_b^2)$ есть $y = 2x_b x - x_b^2$, откуда точка пересечения C имеет координаты $\left(\frac{x_a + x_b}{2}; x_a x_b\right)$. Три точки A, B и C принадлежат графику квадратного трехчлена $px^2 + qx + r$, поэтому

$$\begin{cases} px_a^2 + qx_a + r = x_a^2, \\ px_b^2 + qx_b + r = x_b^2, \\ p\left(\frac{x_a + x_b}{2}\right)^2 + q\frac{x_a + x_b}{2} + r = x_a x_b. \end{cases}$$

Сложим первые два равенства и вычтем удвоенное третье, получим

$$p\left(x_a^2 + x_b^2 - \frac{x_a^2}{2} - x_a x_b - \frac{x_b^2}{2}\right) + \\ + q(x_a + x_b - x_a - x_b) + 2r - 2r = \\ = x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b,$$

$$p\left(\frac{x_a^2}{2} - x_a x_b + \frac{x_b^2}{2}\right) = x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b,$$

$$\frac{p(x_a - x_b)^2}{2} = (x_a - x_b)^2.$$

Так как $x_a \neq x_b$, получаем, что $p = 2$.

8. Обозначим через O_1 центр окружности, описанной около треугольника $A_1 B_1 C_1$, через P — центр сферы ω (рис.15). При центральной симметрии относительно точки M треугольник ABC переходит в треугольник $A_1 B_1 C_1$. Следовательно, точки O и O_1 симметричны относительно точки M , т.е. M — середина отрезка OO_1 . Также мы

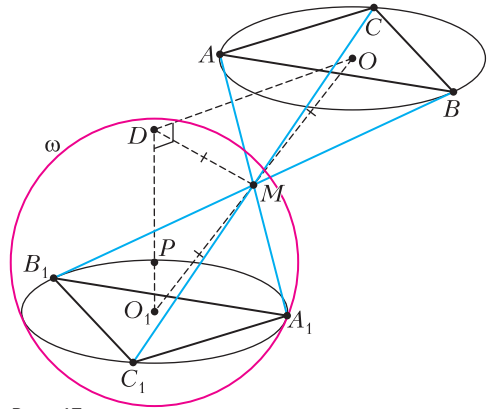


Рис. 15

получаем, что плоскости ABC и $A_1 B_1 C_1$ параллельны. Тогда на прямой, проходящей через точку P перпендикулярно этим плоскостям, лежат точки D и O_1 , поэтому $\angle O_1 D O = 90^\circ$. Таким образом, DM — медиана в прямоугольном треугольнике $O_1 D O$, значит, $MO = MD$, что и требовалось.

Олимпиада «Ломоносов»

(см. «Квант» №3)

Физика

Отборочный этап

7–9 классы

1. Плотность новогоднего подарка равна $\rho = \frac{3m}{V_1 + V_2 + V_3}$, где m — масса одной части подарка, V_1, V_2, V_3 — объем каждой из трех частей подарка соответственно. Плотности каждой части подарка равны, соответственно, $\rho_1, \rho_2 = 2\rho_1, \rho_3 = 3\rho_1$. Объем каждой из частей новогоднего подарка $V_1 = \frac{m}{\rho_1}, V_2 = \frac{m}{\rho_2}, V_3 = \frac{m}{\rho_3}$. Используя записанные формулы, получим $\rho = \frac{18\rho_1}{11}$. Искомая плотность равна

$$\rho_3 = 3\rho_1 = \frac{11\rho}{6} \approx 1,8(3) \cdot \rho.$$

2. Найдем расстояние, которое проползла букашка за первые три минуты: $s_1 = v_1 t_1 = 360$ см, за первые шесть минут: $s_2 = v_2 t_2 = 1800$ см, за девять минут: $s_3 = v_3 t_3 = 4320$ см. Тогда расстояние, пройденное за четвертую, пятую, шестую минуту, равно $l_2 = s_2 - s_1 = 1440$ см, а за последние три минуты составляет $l_3 = s_3 - s_2 = 2520$ см. Стоит заметить, что значение величины s , приведенной в условии задачи, подчиняется неравенству $s > (l_2 + l_3)$. Из последних s см пути со скоростью v_1 букашка проползет расстояние $l = s - l_2 - l_3$, затратив на это время $\frac{l}{v_1}$. Оставше-

еся расстояние она проползет за время $t_3 - t_1$. Следовательно, искомая средняя скорость равна

$$v_{\text{cp}} = \frac{s}{\frac{l}{v_1} + (t_3 - t_1)}$$

Заметим, что общая формула справедлива при условии $s > (l_2 + l_3)$, а значения v_2 и t_2 заданы для того, чтобы было обеспечено выполнение вышеприведенного условия.

3. Количество теплоты, требуемое для нагрева воды, $Q_1 = cm_1(t_2 - t_1)$. Количество теплоты, выделяющееся при сжигании газа для нагрева первого котелка, $Q_2 = q(m_2 - m_3)$, а для нагрева второго котелка $Q_3 = q(m_3 - m_4)$. КПД системы нагрева при использовании первого котелка $\eta_1 = \frac{Q_1}{Q_2}$, а при использовании второго $\eta_2 = \frac{Q_1}{Q_3}$.

Искомое количество процентов, на которое КПД системы нагрева больше во втором случае, чем в первом, $p = \eta_2 \cdot 100\% - \eta_1 \cdot 100\%$. Подставляя сюда записанные выше соотношения, получаем

$$p = \frac{cm_1}{q}(t_2 - t_1) \left(\frac{1}{m_3 - m_4} - \frac{1}{m_2 - m_3} \right) \cdot 100\%$$

4. Обозначим резисторы цифрами (рис. 16,а). Резисторы 7, 8, 9 шунтированы проводами, следовательно, можно считать, что ток через них протекать не будет, поэтому их можно удалить из схемы. В результате получится схема, изображенная на рисунке 16,б. Резисторы 2, 3, 4 соединены последовательно, следовательно, их общее сопротивление равно $R_{24} = 3R$. Аналогично, общее сопротивление резисторов 5, 6 равно $R_{56} = 2R$. Резисторы R_{24} и R_{56} в схеме соединены параллельно, их общее сопротивление равно $R_{26} = \frac{R_{24} \cdot R_{56}}{R_{24} + R_{56}} = \frac{6}{5}R$. Общее сопротивление всей

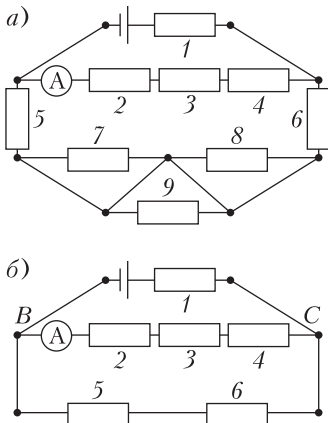


Рис. 16

схемы $R_{\text{общ}} = R_1 + R_{26} = \frac{11}{5}R$, где R_1 – сопротивление резистора 1. Ток, протекающий через R_1 , равен $I_1 = \frac{U_0}{R_{\text{общ}}} = \frac{5U_0}{11R}$. Напряжение между точками B и C равно $U_{BC} = I_1 R_{26} = \frac{6}{11}U_0$. Искомая сила тока, протекающего через идеальный амперметр, равна

$$I_2 = \frac{U_{BC}}{R_{24}} = \frac{2U_0}{11R}$$

5. Линейная зависимость удельного сопротивления меди от температуры означает, что сопротивление R нагревательного элемента может быть представлено в виде $R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$, где R_0 – сопротивление нагревательного элемента при температуре T_0 , α – температурный коэффициент сопротивления. Пусть за время τ температура воды изменилась от T_1 до T_2 , тогда, согласно закону сохранения энергии и закону Джоуля–Ленца, будет справедливо соотношение $m c (T_2 - T_1) = \frac{U^2}{R_{\text{cp}}} \tau$, где c – удельная теплоемкость воды, m – масса воды, U – напряжение источника,

$$R_{\text{cp}} = \frac{R(T_1) + R(T_2)}{2} = R_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2}(T_1 + T_2) \right)$$

Здесь $T_0 = 0$ °C. Пусть τ_1 – время нагрева воды от T до $T + \Delta T$, а τ_2 – время нагрева воды от $T + \Delta T$ до $T + 2\Delta T$. Тогда

$$\tau_1 = \frac{mcR_0\Delta T}{U^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}(2T + \Delta T) \right),$$

$$\tau_2 = \frac{mcR_0\Delta T}{U^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}(2T + 3\Delta T) \right).$$

По условию задачи имеем

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{1 + \frac{\alpha}{2}(2T + 3\Delta T)}{1 + \frac{\alpha}{2}(2T + \Delta T)} = 1 + \frac{p}{100}.$$

Из этих равенств находим

$$\Delta T = \left(\frac{1}{\alpha} + T \right) \frac{2p}{200 - p}.$$

10 класс

1. Закон сохранения и изменения энергии на этапах спуска до места остановки и подъема обратно можно записать в виде $mgh + A_{\text{тр}} = 0$ и $0 + A_{\text{min}} + A_{\text{тр}} = mgh$ соответственно. Отсюда получаем $A_{\text{min}} = 2mgh = -2A_{\text{тр}}$. С другой стороны, работа силы трения в обоих случаях равна

$A_{\text{тр}} = -\mu mgs - \mu mghctg\alpha$. Используя эти соотношения, приходим к ответу

$$A_{\text{min}} = \frac{2\mu mgs}{1 - \mu ctg\alpha}.$$

2. Запишем для желоба уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку крепления правой нити с учетом малости угла α (рис. 17):

$$T_1 l - mg \left(\frac{l}{2} + d \right) - Mg \frac{l}{2} = 0.$$

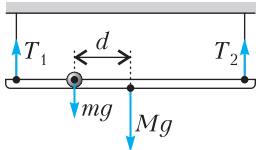


Рис. 17

Чтобы нить разорвалась, необходимо, чтобы сила натяжения T_1 достигла своего максимального значения, которое равно $T_1 = 0,6Mg$. Используя оба равенства, получим, что это произойдет, когда шарик сместится вдоль желоба из его центра на расстояние $d = \frac{0,2M - m}{2m}l$. Движение шарика

равноускоренное с ускорением $a = g \sin \alpha \approx g\alpha$, и он преодолет это расстояние за время

$$\tau = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{0,2M - m}{mg\alpha}l}.$$

3. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона, $p_1 nV = \frac{m}{M} RT_1$. После подъема аэростата на высоту h и потери части газа массой Δm в оболочке аэростата остается водород массой $(m - \Delta m)$, для которого справедливо уравнение $p_2 V = \frac{(m - \Delta m)}{M} RT_2$. Из объединенного газового закона следует, что $\frac{p_1 nVM}{RT_1} = \frac{p_2 VM}{RT_2} + \Delta m$. Отсюда получаем конечную температуру газа: $T_2 = \frac{p_2 VT_1 M}{np_1 VM - \Delta m RT_1}$. Изменение температуры с высотой равно $T_2 - T_1 = \tau h$. Окончательно получаем

$$h = \frac{T_1 - T_2}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left(T_1 - \frac{p_2 VT_1 M}{np_1 VM - \Delta m RT_1} \right).$$

4. На заряженную бусинку помимо силы тяжести и силы натяжения нити действует вертикально вверх сила, равная qE , со стороны электрического поля Земли. Эта сила по мере подъема до верхней точки траектории совершает над бусинкой положительную работу, равную $-2qEl$. В

соответствии с законом сохранения механической энергии можно записать $\frac{mv_0^2}{2} - 2qEl = \frac{mv^2}{2} + 2mgl$. Минимальная начальная скорость бусинки обеспечивает условие, при котором в момент, когда бусинка достигнет наивысшей точки своей траектории, натяжение нити на мгновение обращается в ноль. Центробежное ускорение при этом обеспечивает сумма только двух сил: mg и qE . Уравнение движения для этой точки будет выглядеть так: $m \frac{v^2}{l} = mg + qE$. Выражая скорость из второго уравнения и подставляя в первое, получаем

$$v_0 = \sqrt{5 \left(g + \frac{qE}{m} \right) l}.$$

5. Луч света перестанет проходить через призму, если при падении на вторую грань призмы AC (рис. 18) будет наблюдаться полное внутреннее

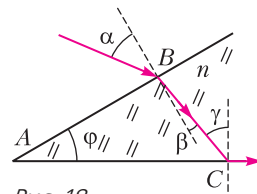


Рис. 18

отражение, т.е. углы падения на эту грань превысят значение, определяемое равенством $\sin \gamma = 1/n$. Для первой грани призмы запишем закон преломления света: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$. Угол β определяется из соотношения для треугольника ABC : сумма внутренних углов данного треугольника равна $\phi + \pi/2 + \beta + (\pi/2 - \gamma) = \pi$, откуда $\beta = \gamma - \phi$. Подставляя β в равенство $\sin \alpha = n \sin \beta$ и используя тригонометрическую формулу для синуса разности углов (заменяя в ней $\sin \gamma = 1/n$) получим, $\sin \alpha = n \sin (\gamma - \phi) = \cos \phi - \sin \phi \cdot \sqrt{n^2 - 1}$.

Отсюда

$$\alpha = \arcsin \left(\cos \phi - \sin \phi \cdot \sqrt{n^2 - 1} \right).$$

11 класс

1. Выберем систему отсчета, связанную с поверхностью земли. Координатную ось x направим горизонтально, ось y — вертикально вверх. Начало отсчета выберем в точке броска. В процессе движения на мяч действуют сила тяжести и сила сопротивления, пропорциональная скорости мяча: $\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}$, где коэффициент сопротивления $k > 0$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y : $m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -mg - kv_y$, где $\Delta t \rightarrow 0$.

Учитывая, что $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$, преобразуем уравнение движения в проекции на ось y к виду $m\Delta v_y = -mg\Delta t - k\Delta y$. Просуммируем (проинтегрируем) последнее соотношение на всем времени полета. При этом полное изменение вертикальной составляющей скорости, в соответствии с условием задачи, равно $\Delta v_y = (-0,7v_0 \sin \alpha) - v_0 \sin \alpha = -1,7v_0 \sin \alpha$, а полное изменение вертикальной координаты $\Delta y = 0$. В результате суммирования получаем $-1,7mv_0 \sin \alpha = -mgt_{\text{пол}} + 0$. Следовательно, время полета равно

$$t_{\text{пол}} = \frac{1,7v_0 \sin \alpha}{g}.$$

2. Будем считать грузы материальными точками. Направим ось x декартовой системы координат по направлению движения третьего груза, а ось y – вертикально вниз. Ускорения грузов обозначим через a_1 , a_2 и a_3 соответственно. В дальнейшем учтем, что $a_3 = 0$. Запишем систему уравнений Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат: $m_1 a_1 = m_1 g - T_1$, $m_2 a_2 = m_2 g - T_2$, $m_3 a_3 = T_1 - F_{\text{тр}}$. Здесь T_1 и T_2 – силы, действующие со стороны нитей на первый и второй грузы соответственно, а $F_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, действующая на третий груз. Дополним записанную выше систему очевидными соотношениями $T_2 = 2T_1$ и $F_{\text{тр}} = \mu m_3 g$, а также уравнением кинематической связи, которое имеет вид $-a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$. Учитывая, что $a_3 = 0$, находим $T_1 = F_{\text{тр}} = \mu m_3 g$. Выражая ускорения a_1 и a_2 , подставим полученные выражения в кинематическое уравнение: $2g - \frac{4T_1}{m_2} + g - \frac{T_1}{m_1} = 0$. Таким образом, сила натяжения нити, действующая на первый груз, равна $T_1 = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$. Окончательно для коэффициента трения μ между третьим грузом и горизонтальной плоскостью, при котором груз будет двигаться по плоскости равномерно, получим

$$\mu = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 m_3 + m_2 m_3}.$$

3. КПД тепловой машины равен $\eta = \frac{A}{Q^+}$, где A – работа, совершенная газом за цикл, Q^+ – полученное газом за цикл количество теплоты. Учитывая, что изменение внутренней энергии идеального газа за цикл равно нулю, формулу для КПД тепловой машины можно переписать в виде $\eta = \frac{Q^+ - |Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+}$. Для данного цикла $|Q^-| = |Q_{31}|$, где $|Q_{31}|$ – модуль количества теплоты, отданного газом на участке $3-1$, а

$Q^+ = Q_{12} + Q_{23}$ – количество теплоты, полученное газом на участках $1-2$ и $2-3$ соответственно. Так как участок $2-3$ изотерма, то $Q_{23} = A_{23}$, где A_{23} – работа газа на участке $2-3$. Таким образом, КПД рассматриваемой тепловой машины имеет вид $\eta = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12} + A_{23}}$. Далее воспользуемся

первым началом термодинамики. Изменение внутренней энергии газа на участке $1-2$ равно $\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)$, где R – универсальная газовая постоянная. Работа газа на этом участке равна $A_{12} = \frac{1}{2} (p_2 + p_1) (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1)$. Здесь было использовано соотношение $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$, представляющее собой уравнение процесса $1-2$, и уравнение состояния идеального газа. Таким образом, $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 2\nu R (T_2 - T_1)$. Модуль изменения внутренней энергии газа на участке $3-1$ равен $|\Delta U_{31}| = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)$, а модуль работы газа на этом участке равен $A_{31} = p_1 (V_3 - V_1) = \nu R (T_2 - T_1)$. Здесь учтено, что процесс $3-1$ – изобара. Таким образом, $|Q_{31}| = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1)$. Найдем соотношение между температурами T_2 и T_1 . Пусть температура газа в состоянии 2 равна T_2 . Если давление газа на участке $1-2$ изменяется в n раз, т.е. $\frac{p_2}{p_1} = n$, то и $\frac{V_2}{V_1} = n$. Тогда $p_2 V_2 = np_1 n V_1 = n^2 p_1 V_1 = n^2 \nu R T_1$. Отсюда следует, что $T_2 = n^2 T_1$. Таким образом, $Q_{12} = 2\nu R T_1 (n^2 - 1)$, $|Q_{31}| = \frac{5}{2} \nu R T_1 (n^2 - 1)$.

Итак, для КПД цикла получаем $\eta = 1 - \frac{2,5\nu R T_1 (n^2 - 1)}{2\nu R T_1 (n^2 - 1) + A_{23}}$, откуда $n^2 = 1 + \frac{2A_{23}(1-\eta)}{\nu R T_1 (1+4\eta)}$.

Используя уравнение процесса $2-3$, а именно $p_2 V_2 = p_1 V_3$, получим $V_3 = \frac{p_2}{p_1} V_2$. Поскольку $\frac{V_2}{V_1} = n$ и $\frac{p_2}{p_1} = n$, находим

$$V_3 = n^2 V_1 = \left(1 + \frac{2A_{23}(1-\eta)}{\nu R T_1 (1+4\eta)}\right) V_1.$$

4. По теореме о кинетической энергии, $\frac{mv^2}{2} = A$, где $A = q_1 (\Phi_2 - \Phi_1)$ – работа сил электростатического поля зарядов, расположенных в вершинах квадрата. Потенциал электростатического поля

в центре квадрата равен

$$\varphi_1 = 4 \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{2q}{\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}}.$$

Потенциал электростатического поля в середине стороны квадрата равен

$$\varphi_2 = 2 \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} + 2 \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Окончательно получаем

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{qq_1}{\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right)} = \sqrt{\frac{qq_1}{5\pi m\epsilon_0 a} (10 + \sqrt{20} - 2\sqrt{50})}.$$

5. Луч, падающий на конус, после прохождения конуса повернется на угол $\delta = \beta - \alpha$ (рис. 19,а). Поскольку $\beta = \alpha n$, то $\delta = \alpha(n-1)$. Таким обра-

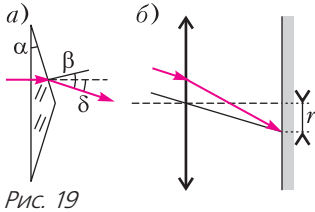


Рис. 19

зом, верхняя часть пучка повернется вниз, а нижняя – вверх на такой же угол δ , в результате чего после прохождения линзы на экране получится светлое кольцо радиусом $r = F \operatorname{tg} \delta = F\alpha(n-1)$ (рис. 19,б). Соответственно, диаметр светлого кольца равен

$$D = 2F\alpha(n-1).$$

Заключительный этап

7–9 классы

1. Запишем уравнения кинематики для участков пути, пройденных за времена t_1 и $t_1 + t_2$:

$$s = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \quad 2s = v_0(t_1 + t_2) - \frac{g(t_1 + t_2)^2}{2},$$

где s – длина двух одинаковых участков, v_0 – начальная скорость камня. Решая эти уравнения, получим

$$v_0 = \frac{2gt_1^2 - g(t_1 + t_2)^2}{2(t_1 - t_2)}.$$

Тогда полное время полета до соударения с землей равно

$$t_{\text{пол}} = \frac{2t_1^2 - (t_1 + t_2)^2}{t_1 - t_2} = 7c.$$

2. Площадь правильного шестиугольника определяется формулой $S_{\text{ш}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$, где a – сторона

шестиугольника. Объем прямой призмы $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$, где h – высота призмы. Давление, оказываемое основанием призмы, будет определяться соотношением $p_1 = \frac{mg}{S_{\text{ш}}} = \frac{2mg}{3\sqrt{3}a^2}$. Отсюда найдем сторону шестиугольника: $a = \sqrt{\frac{2mg}{3\sqrt{3}p_1}}$.

Давление, оказываемое боковой гранью призмы, определяется соотношением $p_2 = \frac{mg}{ah}$, откуда най-

дем высоту призмы: $h = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{mgp_1}{p_2}}$. Теперь найдем плотность материала призмы:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S_{\text{ш}} h} = \sqrt{\frac{2p_1}{3\sqrt{3}mg}} \frac{p_2}{g} = 8160 \text{ кг/м}^3.$$

3. Количество теплоты, отданное кипятком при его охлаждении до конечной температуры: $Q_{\text{отд}} = c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_{\text{в}} - t_{\text{к}})$. Количество теплоты, полученное ложкой, чашкой и заваркой при их нагревании до конечной температуры:

$$Q_{\text{пол}} = c_{\text{ф}} m_{\text{ф}} (t_{\text{к}} - t_{\text{ф}}) + c_{\text{с}} m_{\text{с}} (t_{\text{к}} - t_1) + c_{\text{в}} m_{\text{з}} (t_{\text{к}} - t_1).$$

Запишем уравнение теплового баланса $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}}$:

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_{\text{в}} - t_{\text{к}}) = c_{\text{ф}} m_{\text{ф}} (t_{\text{к}} - t_{\text{ф}}) + c_{\text{с}} m_{\text{с}} (t_{\text{к}} - t_1) + c_{\text{в}} m_{\text{з}} (t_{\text{к}} - t_1).$$

Отсюда находим

$$m_{\text{ф}} = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_{\text{в}} - t_{\text{к}}) - c_{\text{с}} m_{\text{с}} (t_{\text{к}} - t_1) - c_{\text{в}} m_{\text{з}} (t_{\text{к}} - t_1)}{c_{\text{ф}} (t_{\text{к}} - t_{\text{ф}})} = 0,2 \text{ кг}.$$

4. Обозначим резисторы цифрами (рис. 20,а). Резисторы 4, 5, 6 шунтированы проводником, следовательно, можно считать, что ток через них протекать не будет и их можно удалить из схемы. В результате получается эквивалентная схема, изображенная на рисунке 20,б. Общее сопротивление резисторов 1 и 2 будет равно

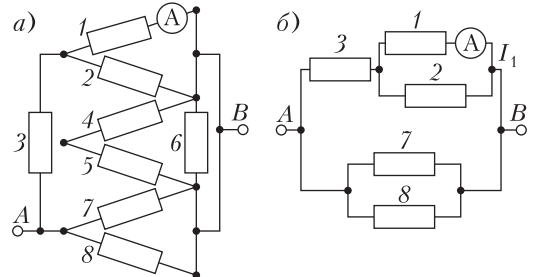


Рис. 20

$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2}$. Общее сопротивление резисторов 1, 2, 3 определяется соотношением

$R_{123} = R_3 + R_{12} = \frac{3R}{2}$. Сила тока через данный составной резистор будет равна $I_1 = \frac{U_0}{R_{123}} = \frac{2U_0}{3R}$.

Напряжение на составном резисторе R_{12} равно $U_{12} = I_2 R_{12} = \frac{U_0}{3}$. Искомая сила тока, протекающего через резистор R_1 , будет равна

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{U_0}{3R} = 16 \text{ мА.}$$

5. В начальный момент времени напряжение между точками A и B равно нулю. Поэтому токи, протекающие через элементы цепи, в том числе предохранители, заведомо меньше I_{Π} . Поскольку сопротивление предохранителей пренебрежимо мало, через сопротивления R_1 и R_2 , подключенные параллельно к Π_1 , токи не протекают. Схема, эквивалентная исходной, представлена на рисунке 21,а. Общее сопротивление участка AB равно $R/3$. При этом ток I , протекающий через предохранитель Π_1 , будет определяться выражением $I = \frac{U_{AB}}{R/3} = \frac{3U(t)}{R} = \frac{3at}{R}$. Распреде-

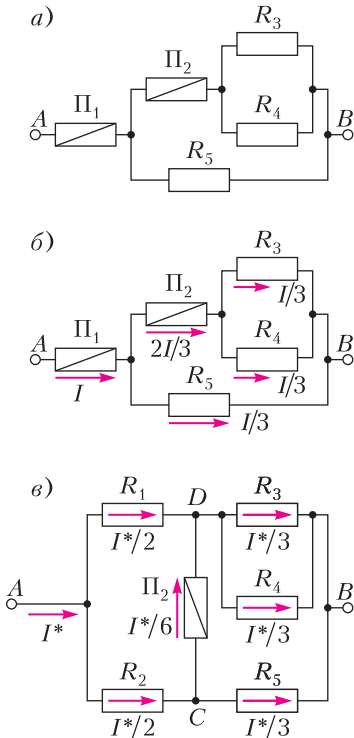


Рис. 21

ние токов в системе показано на рисунке 21,б. Ток I достигает номинального значения на Π_1 в момент времени

$$t_1 = \frac{I_{\Pi} R}{3a} = 4 \text{ мин.}$$

При этом предохранитель Π_1 перегорает, а эквивалентная схема принимает вид, изображенный на рисунке 21,в. Общее сопротивление участка AB в данном случае будет равно $R_{AB}^* = \frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{5R}{6}$. Ток, протекающий через это сопротивление, равен $I^* = \frac{U_{AB}}{R_{AB}^*} = \frac{6a(\tau + t_1)}{5R}$, где τ – время, отсчитываемое от момента перегорания Π_1 . В силу симметрии схемы, $I_{AD} = I_{AC} = \frac{I^*}{2}$, $I_{DB} = \frac{2I^*}{3}$, $I_{CB} = \frac{I^*}{3}$. Тогда ток I_{CD} , протекающий через предохранитель Π_2 , будет равен $I_{CD} = I_{AC} - I_{CB} = \frac{I^*}{6} = \frac{a(\tau + t_1)}{5R}$. Ток через Π_2 станет равным номинальному значению спустя время τ после перегорания Π_1 , равное

$$\tau = \frac{5I_{\Pi} R}{a} - t_1 = \frac{14I_{\Pi} R}{3a} = 56 \text{ мин.}$$

Общее время работы предохранителя Π_2 равно

$$t_2 = \tau + t_1 = 60 \text{ мин.}$$

10 класс

1. Укажем все силы, действующие на доску и брусок, в предположении, что доска движется вниз по плоскости, а брусок – вверх по плоскости (рис. 22). По третьему закону Ньютона силы трения между доской и бруском равны по модулю, противоположны по направлению и приложены к обоим телам ($\vec{F}_{1\text{тр}} = -\vec{F}'_{1\text{тр}}$). Аналогично для сил реакции опоры ($\vec{N}_1 = -\vec{N}'_1$) между бруском и доской. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x , направленную вниз вдоль наклонной плоскости: $Ma_1 = Mgs \sin \alpha - T - F_{1\text{тр}} - F_{2\text{тр}}$, $ma_2 = mgs \sin \alpha + F'_{1\text{тр}} - T$. Так как нить нерастяжима, то $a_1 = -a_2 = a$. Второй закон Ньютона в проекции на ось y , перпендикулярной к оси x ,

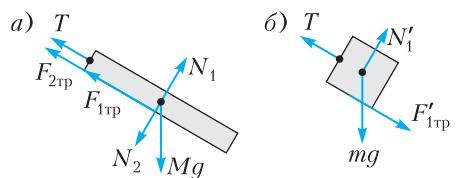


Рис. 22

запишется в виде $N_2 = N_1 + Mg \cos \alpha$, $N'_1 = mg \cos \alpha$. С учетом того, что $N_1 = N'_1$, $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}} = \mu_1 N_1$ и $F_{2\text{тр}} = \mu_2 N_2$, получим

$$Ma = Mg \sin \alpha - T - \mu_1 mg \cos \alpha + \mu_2 (m + M) g \cos \alpha,$$

$$ma = T - mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha.$$

После сложения уравнений находим ускорение a :

$$a = \frac{M-m}{M+m} g \sin \alpha - \left(\frac{2m}{M+m} \mu_1 + \mu_2 \right) g \cos \alpha \approx 0,54 \text{ м/с}^2.$$

2. Учитывая невесомость нитей, а также симметрию системы, можно сделать вывод о том, что силы натяжения нитей, на которых подвешен шарик M , равны друг другу по модулю (рис. 23,а): $|\vec{T}_O| = |\vec{T}_{O1}| = |\vec{T}_B| = |\vec{T}_{B1}| = T_1$. Записав

второй закон Ньютона для шарика в проекции на ось y , получим $Mg = 2T_1 \cos \alpha$, откуда $T_1 = \frac{Mg}{2 \cos \alpha}$, где $\alpha = \pi/6$. Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку O , примет вид $T_A \frac{L}{4} = mg \frac{L}{4} + T_1 \frac{3L}{4} \sin 2\alpha$, или $T_A = mg + 3Mg \sin 2\alpha$, где L – длина стержня AB .

После пережигания нити шарик будет двигаться по дуге окружности с центром в точке B и радиусом $\frac{3L}{4}$. Сила натяжения нити, прикрепленной к шарiku, будет максимальна при его прохождении точки E , когда нить займет вертикальное положение (рис. 23,б). Скорость v шарика в точке E может быть найдена из закона сохранения полной механической энергии:

$$\frac{Mv^2}{2} = Mg \frac{3L}{4} (1 - \cos \alpha), \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{3}{2} gL (1 - \cos \alpha)}.$$

Значение $T_2 = T_{B2}$ может быть получено из второго закона Ньютона, записанного в проекции на

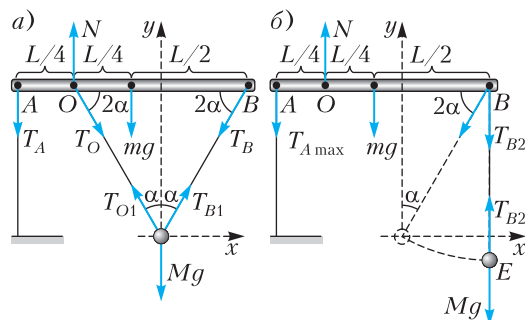


Рис. 23

ось y : $\frac{Mv^2}{3L/4} = T_2 - Mg$, откуда

$$T_2 = \frac{4M}{3L} \frac{3}{2} gL (1 - \cos \alpha) + Mg = Mg (3 - 2 \cos \alpha).$$

Момент силы натяжения T_2 относительно оси O в этом случае также будет максимальным. Поэтому будет максимальной и сила натяжения нити, прикрепленной к точке A стержня, которая может быть найдена из уравнения для моментов сил, относительно той же оси: $T_{A\text{max}} \frac{L}{4} = mg \frac{L}{4} + T_2 \frac{3L}{4}$. С учетом полученного выше выражения для T_2 имеем $T_{A\text{max}} = mg + 3Mg (3 - 2 \cos \alpha)$. Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{T_{A\text{max}}}{T_A} = \frac{mg + 3Mg (3 - 2 \cos \alpha)}{mg + 3Mg \sin \alpha} = \frac{1 + 18(3 - \sqrt{3})}{10} \approx 2,4.$$

3. Из условия задачи ясно, что сначала газ изобарно сжимается. Здесь он отдает количество теплоты. Затем газ изохорно нагревается, где он получает количество теплоты. По первому закону термодинамики найдем количество теплоты, отданное газом в изобарном процессе:

$$Q_p = \Delta U_p + A_p = \frac{5}{2} \nu R (T_{\text{min}} - T_{\text{н}}),$$

где ν – количество вещества газа, $T_{\text{н}}$ – начальная температура газа. Данное количество теплоты является отрицательной величиной. Теперь найдем количество теплоты, полученное газом в изохорном процессе:

$$Q_V = \Delta U_V = \frac{3}{2} \nu R (T_{\text{к}} - T_{\text{min}}),$$

где $T_{\text{к}}$ – конечная температура газа. Общее подводимое количество теплоты равно

$$Q = Q_V + Q_p = \nu R \left(T_{\text{min}} - T_{\text{н}} + \frac{3}{2} (T_{\text{к}} - T_{\text{н}}) \right).$$

По первому закону термодинамики модуль работы внешних сил при адиабатическом процессе равен

$$A_{\text{ад}} = A = \frac{3}{2} \nu R (T_{\text{к}} - T_{\text{н}}).$$

С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона для двух состояний газа получаем

$$p_{\text{н}} V_{\text{н}} = \nu R T_{\text{н}}, \quad p_{\text{н}} V_{\text{к}} = \nu R T_{\text{min}}, \text{ откуда } \frac{V_{\text{н}}}{V_{\text{к}}} = \frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{min}}}.$$

Объединяя записанные уравнения и учитывая, что $\frac{V_{\text{н}}}{V_{\text{к}}} = 10$, находим

$$Q = A - 9\nu R T_{\text{min}} = 10 \text{ кДж}.$$

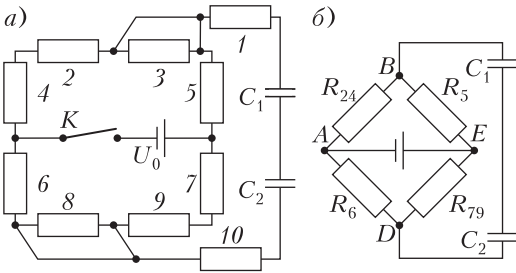


Рис. 24

4. Обозначим резисторы цифрами (рис. 24, а). Резисторы 3, 8 шунтированы проводником, следовательно, можно считать, что ток через них протекать не будет и их можно удалить из схемы. Через длительное время после замыкания ключа конденсаторы зарядятся и ток через резисторы 1, 10 протекать не будет. Следовательно, падение напряжения на этих резисторах будет равно нулю и их в схеме можно заменить проводниками. В результате получится эквивалентная схема, изображенная на рисунке 24, б, где $R_{24} = R_{79} = 2R$, $R_3 = R_6 = R$. Ток через резисторы R_{24} и R_5 будет равен $I_1 = \frac{U_0}{R_{24} + R_5} = \frac{U_0}{3R}$. Напряжение между точками А и В будет $U_{AB} = I_1 R_{24} = \frac{2U_0}{3}$. Ток через резисторы R_6 и R_{79} будет равен $I_2 = \frac{U_0}{R_6 + R_{79}} = \frac{U_0}{3R}$. Напряжение между точками А и D будет $U_{AD} = I_2 R_6 = \frac{U_0}{3}$, а между точками В и D будет $U_{BD} = U_{AB} - U_{AD} = \frac{U_0}{3}$. Конденсаторы соединены последовательно, поэтому их общая емкость равна $C_{\text{общ}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Заряд на каждом из конденсаторов $q = C_{\text{общ}} U_{BD} = \frac{C_1 C_2 U_0}{3(C_1 + C_2)}$. Искомая энергия электрического поля в конденсаторе C_1 равна

$$W_C = \frac{q^2}{2C_1} = \left(\frac{C_1 C_2 U_0}{3(C_1 + C_2)} \right)^2 \frac{1}{2C_1} = 2 \text{ нДж.}$$

5. На деталь, погруженную в масло, действуют силы (рис. 25) натяжения нити \vec{T} , тяжести $m\vec{g}$ (приложена к центру O параллелепипеда), сила реакции опоры \vec{N} , сила Архимеда $\vec{F}_{\text{Арх}}$ (приложена к точке пересечения медиан треугольника ABC). Так как ABCD – прямоугольник, а AB и DC – его диагонали, то $AO = OC = OB = x$, $AB = 2x$. Применяя теорему Пифагора к $\triangle ABC$, получаем, $BC = \frac{x}{2}$. Из $\triangle OBC$, используя теорему косинусов, найдем $\cos \angle BOC = \frac{7}{8}$ и

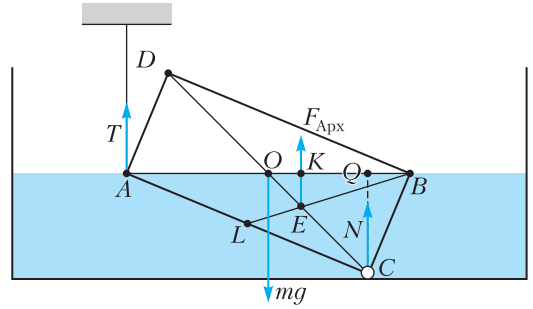


Рис. 25

$OQ = x \cos \angle BOC = \frac{7x}{8}$. Согласно свойству медиан, $OE:EC = 1:2$, тогда $OK = \frac{x}{3} \cos \angle BOC = \frac{7x}{24}$, $KQ = OQ - OK = \frac{7x}{12}$. Запишем уравнение моментов сил, действующих на деталь, относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости чертежа: $T \cdot AQ + F_{\text{Арх}} \cdot KQ = mg \cdot OQ$. Пусть ρ – плотность масла, V – объем детали, тогда $m = 3\rho V$, $F_{\text{Арх}} = \rho g V/2$. Выражая плечи сил через x , получим

$$T \cdot \frac{15x}{8} + \rho g \frac{V}{2} \cdot \frac{7x}{12} = 3\rho V g \cdot \frac{7x}{8}, \text{ откуда } T = \frac{56}{45} \rho g V.$$

В отсутствие масла в кювете уравнение моментов примет вид

$$T_0 \cdot \frac{15x}{8} = 3\rho g V \cdot \frac{7x}{8},$$

где T_0 – сила натяжения нити в отсутствие масла в кювете. Тогда

$$T = \frac{7}{5} \rho g V \text{ и } \frac{T}{T_0} = \frac{8}{9}.$$

11 класс

1. При движении спутника массой m по круговой орбите радиусом R вокруг планеты массой M с угловой скоростью ω , согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения, имеем $m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2}$, где G – гравитационная постоянная. Отсюда угловая скорость спутника $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$. Так как ускорение свободного падения на поверхности планеты равно $g = \frac{GM}{r^2}$, то $\omega = r \sqrt{\frac{g}{R^3}}$. Для нахождения времени пребывания спутников в «слепой» зоне свяжем начало вращающейся системы отсчета с центром планеты (точкой O на рисунке 26), а ее ось направим к одному из спутников (к точке A). Проведем из

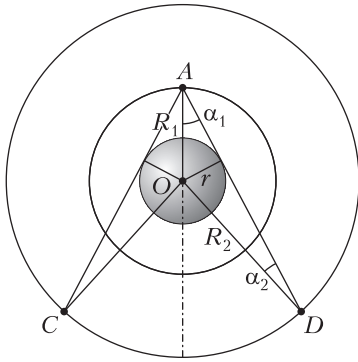


Рис. 26

точки A две касательные к поверхности планеты до пересечения с орбитой второго спутника в точках C и D . Дуга CD – это и есть «слепая» зона. Из рисунка видно, что центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен $\angle COD = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$, где $\alpha_1 = \arcsin \frac{r}{R_1}$, $\alpha_2 = \arcsin \frac{r}{R_2}$.

Учитывая, что $r \ll R_1, R_2$, приближенно имеем $\angle COD = 2\left(\frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}\right)$. Пусть угловые скорости спутников в не вращающейся системе отсчета равны ω_1 и ω_2 . Поскольку спутники движутся в одном направлении, угловая скорость второго спутника относительно первого равна $\omega_{\text{отн}} = \omega_1 - \omega_2$. Поэтому время нахождения спутников в «слепой» зоне равно

$$\tau = \frac{2r}{\omega_1 - \omega_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2(R_1 + R_2)\sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{g}(R_2\sqrt{R_2} - R_1\sqrt{R_1})} \approx 17923 \text{ с} \approx 298,7 \text{ мин.}$$

2. Начальное давление p_0 в трубке равно сумме парциального давления p_1 сухого воздуха и парциального давления $p_{\text{нас}}$ насыщенного водяного пара, т.е. $p_0 = p_1 + p_{\text{нас}}$, откуда $p_1 = p_0 - p_{\text{нас}}$. Обозначив через p_2 давление сухого воздуха в трубке после ее частичного погружения в воду, по закону Бойля–Мариотта имеем $p_1 l S = p_2 \left(\frac{l}{2} + h\right) S$, где S – площадь поперечного сечения трубки. Отсюда $p_2 = p_1 \frac{2l}{l + 2h}$. Из условия равновесия столбика воды в трубке следует, что $p_2 + p_{\text{нас}} = \rho_0 g h + p_0$. Объединяя записанные выражения, приходим к уравнению

$$(p_0 - p_{\text{нас}}) \frac{2l}{l + 2h} + p_{\text{нас}} = \rho_0 g h + p_0,$$

решая которое, получаем

$$p_{\text{нас}} = p_0 - \rho_0 g h \frac{l + 2h}{l - 2h} = 14,5 \text{ кПа.}$$

3. После перераспределения зарядов потенциалы шаров выравниваются: $\Phi_1 = \Phi_2$. Потенциал Φ_1 первого шара, заключенного в оболочку, складывается из потенциала поля, созданного самим шаром на его поверхности, и потенциала поля, которое создает оболочка в том месте, где находится шар: $\Phi_1 = \Phi_{\text{ш}} + \Phi_{\text{об}}$. Поскольку оболочка проводящая и соединена с практически бесконечным источником зарядов, на ее внутренней поверхности индуцируется заряд, равный по модулю заряду шара внутри и противоположный ему по знаку. Если заряд первого шара стал q_1 , то заряд оболочки стал $-q_1$, следовательно,

$$\Phi_{\text{ш}} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ и } \Phi_{\text{об}} = \frac{-q_1}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Потенциал второго шара $\Phi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Теперь мы можем записать равенство

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Отсюда получаем

$$R = \frac{q_1}{q_1 - q_2} r = 3 \text{ см.}$$

4. При падении на поверхность жидкости рассеянного света наибольший угол преломления будет у лучей, падающих по касательной. В результате в жидкости образуется расходящийся конус лучей света, ограниченный предельным углом, для которого $\sin \alpha = \frac{1}{n}$. При отражении от зеркала на дне угол раствора конуса не изменяется, поэтому

$$R = 2h \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h \sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 8,94 \text{ см.}$$

5. Когда сила тока в контуре достигает локального максимального значения, ЭДС самоиндукции катушки равна нулю. Сила тока в этот момент времени равна $I = \frac{U}{R}$. Период слабо затухающих колебаний можно считать равным $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Действующее значение силы тока $I_{\text{д}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$. Тогда количество теплоты, выделяющееся за малый интервал времени (период), можно считать равным

$$Q = \frac{\pi U^2 \sqrt{LC}}{R} = 37,68 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \approx 38 \text{ мДж.}$$

Лингвистическая задача

(с.м. 2-ю с. обл.)

Сравнивая географические названия на китайском и русском языках, приходим к выводу, что иероглиф соответствует одному слогу названия: восемь китайских названий состоят из двух иероглифов и соответственно восемь русских переводов – из двух слогов; три китайских названия состоят из трех иероглифов – среди русских переводов находим два трехсложных названия и одно, состоящее из трех слов (Северный Ледовитый океан). Видимо, это единственный случай, когда русское название соответствует не звучанию иероглифов, а их значению.

Только один иероглиф повторяется в китайских названиях трижды – 山. Видимо, ему соответствует трижды повторяющийся в русских переводах слог **шань**. В русских словах он дважды стоит на первом месте (*Шаньси, Шаньдун*), один раз – на втором (*Тянь-Шань*). Такой же порядок в китайских названиях, из чего делаем вывод, что направление записи иероглифических слов в строке – слева направо. Итак, 天山 – *Тянь-Шань*. Иероглиф 天 и слог **тянь** встречаются еще один раз: 天津 (*Тяньцзинь*). В словах 山西 и 山东 на первом месте 山 (*шань*). Иероглиф 东 больше не повторяется, а 西 встречается в слове 墨西哥. Видимо, 山西 – *Шаньси*, а 墨西哥 – *Мексика*. Тогда 山东 – *Шаньдун*. Сравнивая вторые элементы оставшихся слов, видим, что названиям 南京 и 北京 соответствуют *Пекин* и *Нанкин*. Но которое из них какое? Иероглиф 北 встречается еще в одном названии: 北冰洋. Оно трехчастное; это либо *Северный Ледовитый океан*, либо *Парагвай*. Чтобы сделать выбор, обратимся к последнему оставшемуся слову из трех иероглифов: 巴拉圭. Такое же начало имеет и название из двух иероглифов: 巴黎. Видимо, 巴拉圭 – *Парагвай*, а 巴黎 – *Париж*. Тогда для 北冰洋 остается только перевод *Северный Ледовитый океан*. Мы не знаем порядка следования элементов в этом сочетании иероглифов, но можно думать, что значения самих иероглифов близки к значению слов, составляющих русский топоним. Иероглиф 北 встречается также в одном из членов пары *Пекин – Нанкин*. Маловероятно, чтобы в название этих городов входили элементы «ледовитый» или «океан», значит, 北 – «северный». Тем самым мы ответили на вопрос второго задания.

Теперь, зная значение этого иероглифа, мы должны определить китайскую запись названий *Пекин* и *Нанкин*. Здесь необходимы минимальные географические познания. Достаточно знать, ка-

кой из этих городов расположен севернее; это *Пекин* (дословно – «Северная столица»). Значит, 北京 – *Пекин*, 南京 – *Нанкин*. Среди китайских и русских слов осталось еще одно неопознанное название, состоящее из не встречающихся в других названиях частей. Очевидно, что 上海 – *Шанхай*.

Итак, мы установили переводы всех географических названий:

1. 山西 – *Шаньси*
2. 上海 – *Шанхай*
3. 北京 – *Пекин*
4. 天山 – *Тянь-Шань*
5. 巴黎 – *Париж*
6. 墨西哥 – *Мексика*
7. 天津 – *Тяньцзинь*
8. 北冰洋 – *Северный Ледовитый океан*
9. 南京 – *Нанкин*
10. 巴拉圭 – *Парагвай*
11. 山东 – *Шаньдун*

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

Тел.: (831) 218-40-40

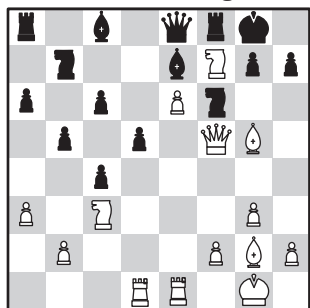
Самый МОЛОДОЙ ПРЕТЕНДЕНТ

17-летний индийский шахматист Доммараджу Гукеш выиграл турнир претендентов в Торонто и стал самым молодым соискателем титула чемпиона мира в истории. Теперь он встретится в матче с чемпионом мира Дин Лижэнем.

В турнире претендентов играли сразу три шахматиста из Индии, они провели целый ряд ярких поединков, и наиболее интересные партии мы разберем сегодня.

**Р.Прагнанандха – Д.Гукеш
Торонто, 2024**

1. d4 d5 2. c4 e6 3. ♔f3 ♕f6 4. g3 ♖b4+ 5. ♗c3 dc 6. ♖g2 0-0 7. 0-0 ♗c6 8. a3 ♗e7 9. e4 a6 10. ♗e3 b5 11. ♖e2 ♖b7 12. ♗ad1 ♗a5 13. d5 ed 14. e5?! Компьютерный советник рекомендует быть осторожнее и взять пешку на d5, но белые намерены играть в гамбитном стиле. 14... ♗e8 15. e6 f5 16. ♗e5 ♗f6 17. ♖c2 c6 18. ♗f5 ♖e8 19. ♗f7?! Первая неточность, сильнее 19. ♗h3 ♗c8 20. ♗c6! ♗c6 21. ♗d5 ♗d5 22. ♗d5 h6 23. ♗e4 с идеей ♗d7 и мощной атакой. 19... ♗c8 20. ♗fe1 ♖b7 21. ♗g5.

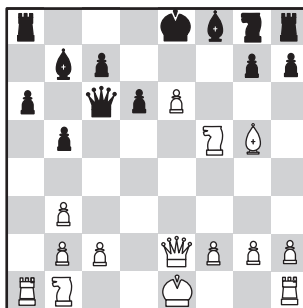


21... ♗a7! Блестящая защитная идея – ладья уходит с большой диагонали и защищает седьмую горизонталь. 22. ♗f6 ♗f6 23. ♗d5 cd 24. ♗d5 ♗e7

25. ♖g4?! (точнее 25. ♗h6+, и партия могла закончиться вечным шахом после 25... ♗h8 26. ♗f7+ ♗g8) ♗d8! 26. ♗d8 ♗d8 27. ♖d4 ♗b7 28. ♗e4 ♗f6 29. ♖e3 ♗e7 30. h4 ♖c6 31. h5 ♗c5! 32. ♖g5 ♗e6 33. h6 ♗f2, белые сдались.

**С.Видит – Р.Прагнанандха
Торонто, 2024**

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 f5 (улучшенный гамбит Яниша – редчайший гость в партиях гроссмейстеров) 5. d4! ed 6. e5 b5 7. ♗b3 ♗a5. 8. ♗d4 ♗b7 9. ♗f5?! ♗b3 10. ab d6! 11. ♖e2 ♖d7! 12. e6 ♖c6 13. ♗g5!?

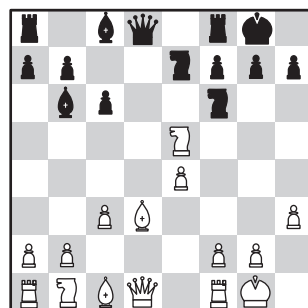


13... ♗g5 (конечно, не 13... ♖g2???, и белые ставят красивый мат: 14. ♗g7+ ♗g7 15. ♖h5+ ♖f8 16. ♖f7x) 14. ♗e3 h6 15. ♗f4 ♗e7 16. c4 b4! 17. ♖g4 ♖c5 18. 0-0 ♗g7 19. ♗d2 0-0-0? (рокироваться надо в другую сторону, препятствуя вторжению коня на d5) 20. h4? (необходимо 20. ♗d5! ♗d5 21. e7! ♗d7 с опасной инициативой) ♗de8 21. ♗ad1 ♗b2 22. ♗d5 ♗d5 23. cd ♗d5 24. e7+? (в отличие от варианта, указанного в примечаниях к 20 ходу, здесь эта идея не работает; необходимо 24. ♗fe1, защищая пешку) ♗b8 25. ♗e3 ♖b5 26. ♗c4 ♗c3 27. ♗d4 ♗h8? (27... ♗h7, нападая на пешку сбоку; оба соперника в цейтноте, следует серия ошибок) 28. ♗c3 bc 29. ♖d4?! (29. ♗a3!) ♗b7?! (29... ♗a8!)

30. ♖c3 ♗e7 31. ♗a5! (нападая на слона b7) ♗e5 32. b4? Решающая ошибка. В открытой позиции слон сильнее коня, поэтому важно его разменять: 32. ♗b7! с шансами на ничью из-за слабости черного короля. 32... ♗g5 33. h5 g4 34. ♗fe1 g3! 35. ♗b7 gf+ 36. ♗f2 ♖b7 37. ♖f3 ♗cg5 38. ♖b7+ ♗b7 39. g4 ♗g4 40. ♗e6 ♗h4 41. ♗h6 ♗g5 42. ♗h7 ♗hh5 43. ♗d7 ♗c8 44. ♗e7 ♗e5 45. ♗g7 ♗hf5+, белые сдались.

**Х.Накамура – С.Видит
Торонто, 2024**

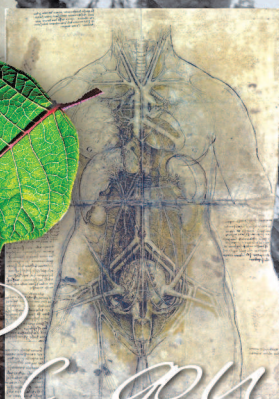
1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗b5 ♗f6 4. d3 ♗c5 5. c3 0-0 6. 0-0 d6 7. h3 ♗e7 8. d4 c6!? (Дебютная новинка!) 9. ♗d3 (9. dc cb 10. cd ♗g6 11. ♖d3 ♗e6 с идеей ♗h5-f4 и контригрой) ♗b6 10. de de 11. ♗e5.



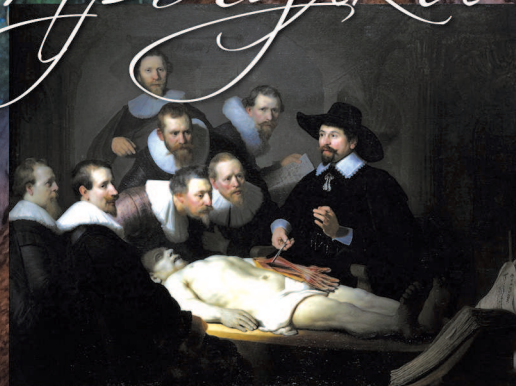
11... ♗h3! 12. ♗c4. Жертвы стоило принять – 12. gh ♗b8! 13. ♗f4 ♗c7 14. ♗g3 ♗e5 15. f4 с равными шансами. 12... ♗g4 13. ♖c2 ♗c7 14. e5 ♗d7 15. ♗h7+ ♗h8 16. ♗d3 b5 17. ♗e3 ♗e5 18. ♗e2? Решающая ошибка. Необходимо 18. ♗g4 ♗g4 19. g3 f5 20. ♗g5, тормозя атаку черных на королевском фланге и развивая свой ферзевый фланг. 18... f5 19. f4 ♗b6 20. ♗f2 ♗d5 21. ♗h1+ ♖g8 22. fe ♖g5 23. ♗e1 ♗e3 24. ♗g4 ♖g4 25. ♗e3 ♗e3 26. ♖e2 ♖g3+ 27. ♗d2 ♗ad8+ 28. ♗c1 ♖g5 29. b3 ♗f1+!, на любое отступление короля последует вилка с g3, поэтому белые сдались.

А.Русанов

Индекс 90964



Уроки с физикой



СОСУДИСТАЯ СИСТЕМА ЧЕЛОВЕКА И ДЕРЕВА

Что общего и каковы
принципиальные различия?



ISSN 0130-2221 24004



(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 8 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)