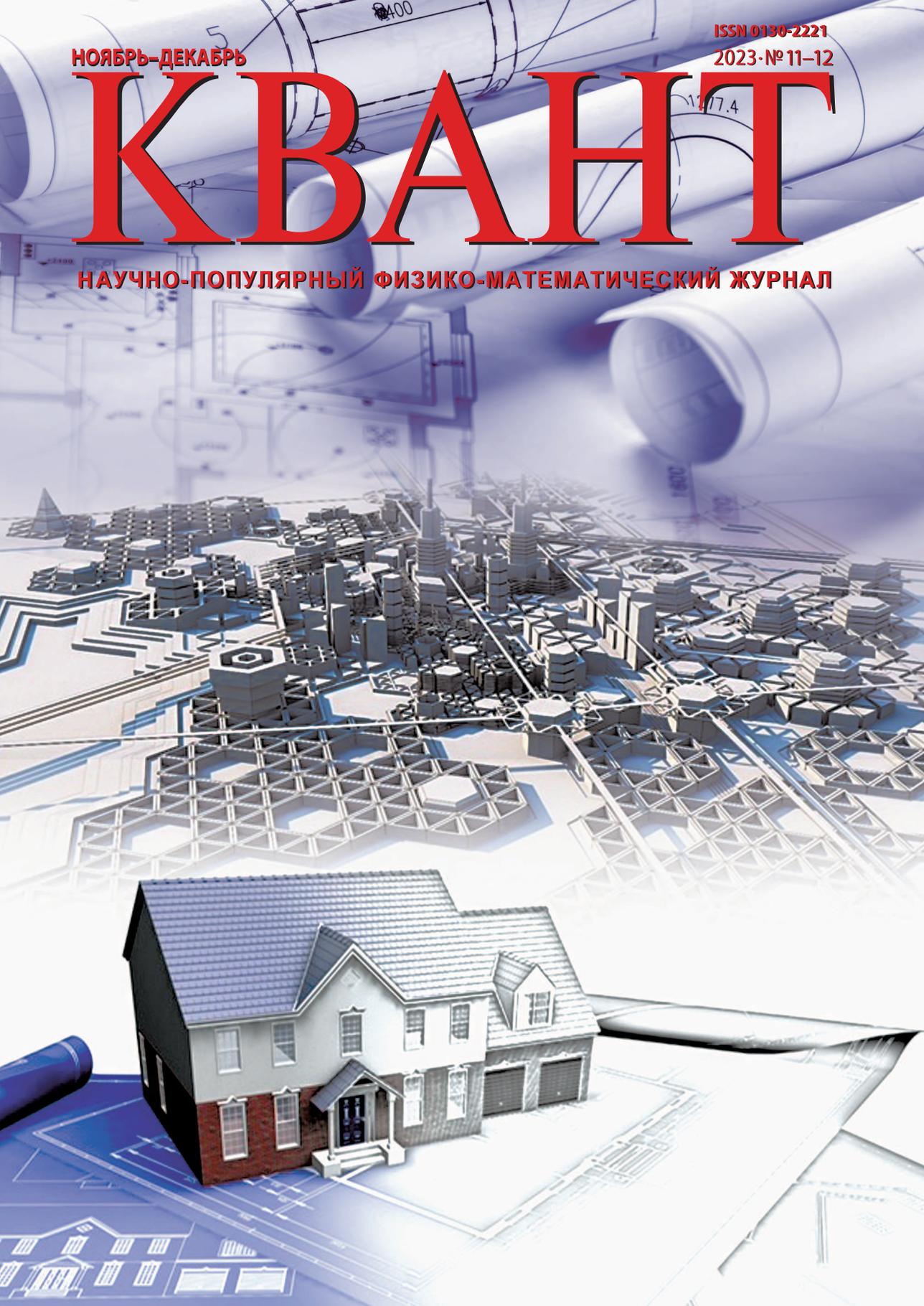


НОЯБРЬ-ДЕКАБРЬ

ISSN 0130-2221
2023·№ 11-12

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Правило старой орфографии

Даны русские слова в старой орфографии:

бѢлить, грезить, дѢльный, медокъ, мѢлокъ,
плеть, рѢка, свѢтлый, селить, сельскій, снѢгъ,
сѢтка, тѢмный, щека, щѢлка.

Буква **Ѣ** («ять») до 1918 года писалась в некоторых словах, где по современной орфографии пишется **е**. Разницы в произношении букв **е** и **Ѣ** не было, поэтому, когда учились писать, написание многих слов приходилось просто заучивать. Однако в первом приближении употребление букв **е** и **Ѣ** описывается достаточно простым правилом. Конечно, из этого правила есть исключения, но примеры и контрольные слова в задаче подобраны так, чтобы среди них не было исключений и чтобы правило можно было обнаружить.



ЗАДАНИЕ

Сформулируйте это правило и напишите в старой орфографии следующие слова:

беда, верить, весна, ель, клѢн, клетъ, лесок,
плен, пчельник, резать, сера, стена, стрела.



КВАНТ

НОЯБРЬ-
ДЕКАБРЬ

2023

№ 11-12

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

**ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 И снова премия за лазерные инструменты.
Л.Белопухов
- 10 Числа Бернулли, множества Эйлера и
формулы сложения. *А.Веселов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 20 Таймер из фитилей. *А.Заболотский*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

- 23 Математики, которые играли в математику

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 26 Задачи M2770–M2777, Ф2777–Ф2784
28 Решения задач M2758–M2761, Ф2765–Ф2768

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Задачи M2770–M2777, Ф2777–Ф2784

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 38 Задачи

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 39 Задачи 9–16
40 Итоги конкурса 2022/23 учебного года

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 41 Дифракционные решетки. *П.Крюков*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 43 Как хаставить капли дождя лететь вверх, или
Секрет стробоскопа. *А.Иванов*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 47 Физико-математическая олимпиада «Физтех».
Математика
- 49 Ответы, указания, решения
- 62 Напечатано в 2023 году
Вниманию наших читателей (48)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к Калейдоскопу «Кванта»*
II *Лингвистические задачи*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

И снова премия за лазерные инструменты

Л. БЕЛОПУХОВ

НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ ПО ФИЗИКЕ 2023 года присуждена «за экспериментальные методы генерации аттосекундных световых импульсов для изучения движения электронов в веществе». Так переведен на русский язык официальный английский текст «*for experimental methods that generate attosecond pulses of light for the study of electron dynamics in matter*». Это шестая по счету премия, касающаяся лазеров и их применения в разных областях науки. Из обоснования премии следует, что она присуждена, прежде всего, за создание методик получения аттосекундных импульсов, а не за их применение. Член комитета по присуждению Нобелевских премий по физике шведский профессор Ева Ольссон в интервью сразу после объявления о присуждении премии сказала: «Отмеченные премией исследования открывают дверь в мир электронов... Следующим шагом будет их использование». А в более подробном пресс-релизе о премии «*in matter*» расшифровывается как «в атомах, молекулах и твердых телах».

Лауреатами очередной Нобелевской премии по физике стали Пьер Агостини, Ференц Краус и Анн Л'Юилье.

Аттосекундная физика

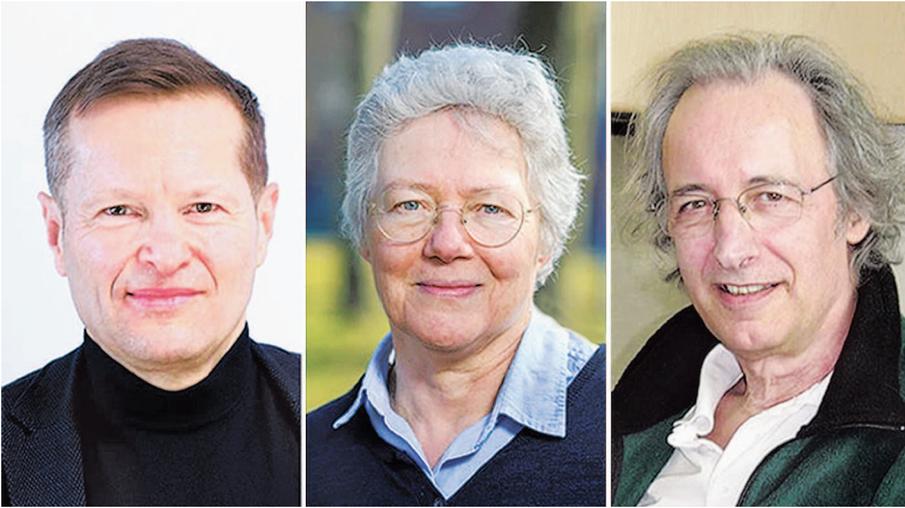
Что такое аттосекунда? Приставка к единицам измерений *атто-* утверждена в 1964 году Генеральной комиссией по мерам и весам как означающая для десятичных дольных единиц долю в 10^{-18} от основной единицы. Тогда же была утверждена и приставка *фемто-* для десятичной дольной единицы 10^{-15} . Интересно происхождение этих наименований. Если *микро-* и *нано-*

произошли от древнегреческих слов *маленький* и *карлик*, а *пико-* от латинского *piccolo* (маленький), то *фемто-* и *атто-* взяты из датского языка. Не правда ли, неожиданно? Дело в том, что когда в 1964 году готовилось утверждение новых наименований приставок, для них не нашлось ни в древнегреческом, ни в латыни других коротких слов, означающих что-либо очень-очень маленькое. А в датском такие слова есть: 15 по-датски *femten*, 18 – *atten*.

Любопытно, что такими же словами обозначались 15 и 18 в некоторых древнегерманских диалектах. Почему? А потому, что у тех народов была не десятичная система счисления, а двадцатиричная – по общему числу пальцев на руках и на ногах. Так и представляется некий древний пращур, загибающий при счете пальцы на руках и длинные пальцы на ногах.

Во всяком случае, в 1964 году появились эти приставки – *фемто-* и *атто-*. И если сегодня интернет еще не признает их и продолжает подчеркивать красным, то вскоре все изменится. Ведь когда в 1960 году официально была введена приставка *нано-*, мало кто пользовался этим понятием, например – термином *нанометр*. А сегодня любой старшеклассник знает слова *нанотехнологии* и *наночастицы*.

Пока по отношению к физике речь идет только о единицах времени – фемтосекунде и аттосекунде. Насколько мала аттосекунда? Человек привык называть самые маленькие интервалы времени мигом, мгновением, чаще всего понимая под этим длительность одного моргания, взмаха ресниц. Так вот, аттосекунда меньше любого мгновения, какое только можно вообразить. В популярных статьях о нынешней Нобелевской премии повторяется один и тот же



Ференц Краус, Анн Л'Юилье, Пьер Агостини

пример: аттосекунда во столько же раз меньше секунды, во сколько раз сама секунда меньше возраста Вселенной (проверьте сами, приняв условный возраст Вселенной в 13,8 миллиардов лет). Физики же скажут по-другому. Известно, что за одну наносекунду свет проходит расстояние 30 сантиметров, а за одну пикосекунду – 0,3 миллиметра. Примем условный размер атома легкого элемента за 0,1 нанометра. Свет пройдет такое расстояние за 0,3 аттосекунды. Можно сказать, что если нанометр – пространственная характеристика атома, то аттосекунда – его временная характеристика.

Одно из самых главных средств «общения» с элементами микромира, электронами атомов и молекул – это свет, точнее, электромагнитное излучение. Оно взаимодействует с электроном, передавая ему энергию, и электрон меняет свое состояние. Атомный электрон, например, переходит в область пространства, более удаленную от ядра. Говоря языком квантовой механики, плотность вероятности его нахождения имеет максимум на большем расстоянии от ядра. Наглядное, но слишком грубое истолкование ситуации – электрон переходит на более удаленную орбиту. Электрон может совсем удалиться из атома (фотоионизация) или даже покинуть вещество (внешний фотоэлектрический эффект). Есть и более сложные случаи. Например, возбуждаемый электромагнитным излучением элек-

трон выбивает другой электрон из атома, занимая его место. Фотоионизация происходит при этом, так сказать, в два приема (эффект Оже). Все эти процессы имеют, как и всё в микромире, не обязательный, а вероятностный характер. А для практических целей важно уметь рассчитывать эти вероятности.

Используя квазиклассическую (боровскую) модель атомного электрона и соотношения неопределенностей, можно оценить порядок длины волны излучения, которое нужно для возбуждения электрона. Эта длина волны имеет порядок 10^{-8} м, т.е. относится к диапазону крайне жесткого ультрафиолетового или мягкого рентгеновского излучения. Но получить мощный «луч» с высокой степенью когерентности (согласованности всех квантов) можно только с помощью лазеров инфракрасного диапазона.

Не следует думать, что результатом опытов будут фотографии электрона. Нет, конечно. Электрон, вылетевший из атома или молекулы, попадает в прибор, который измерит его энергию и определит направление его полета. А соответствующая математическая обработка укажет, из какого места атома он вылетел, когда на него подействовал короткий импульс излучения. Возможно, что компьютерная обработка результатов многих измерений параметров электронов позволит создать нечто вроде изображения электрона в атоме. Здесь просматри-

вается аналогия с «фотографией черной дыры», которую несколько лет назад усердно перепечатывала пресса. Конечно, это не было фотографией в обычном понимании этого слова. Это был результат огромного количества отдельных наблюдений и измерений параметров излучения, исходящего из пространства около черной дыры.

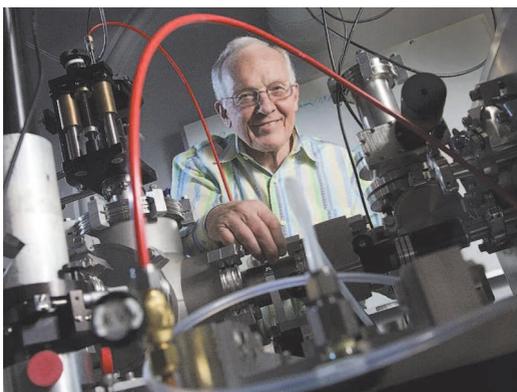
Физики-лазерщики больше 30 лет назад начали заниматься проблемой, как превратить лазерное инфракрасное излучение в ультрафиолетовое с сохранением когерентности и мощности излучения (числа фотонов, падающих в единицу времени на единицу площади). Задача состояла в том, как из «длинной» инфракрасной синусоиды вырезать ее малую часть, которая сама уже будет представлять очень малую длину ультрафиолетовой синусоиды и будет действовать чрезвычайно короткое время. Образно говоря, нужно было создать «затвор», который включал бы свет на это невообразимо малое время воздействия излучения на электрон. И примерно 25 лет назад такие лазерные инструменты были созданы. Был достигнут временной интервал действия излучения в несколько десятков фемтосекунд. Эти инструменты кроме самих лазеров содержали многие другие оптические устройства (поляризаторы, зеркала, дифракционные решетки и др.) и стоили недешево.

В 1999 году Нобелевскую премию по химии «за исследования переходных состояний во время химических реакций с использованием фемтосекундной техники» получил (всю премию целиком) Ахмед Зевейл, египетско-американский химик, профессор Калифорнийского технологического университета, имеющий 16 самых престижных для химика премий и медалей, почетный доктор шести университетов (в том числе Бакинского государственного университета). Египет считает его своим национальным героем. Еще бы! Зевейл – единственный Нобелевский лауреат египетского происхождения в научных областях (физика, химия, физиология и медицина). Он – основатель фемтохимии, раздела химической динамики, изучающего молекулярные процессы в их реальном времени фемтосекундных временных интервалов.

Фемтосекундные лазерные установки уже нашли применение в создании новых технологий получения нанометровых масок для полупроводниковой литографии. Широкое поле применения открывается перед фемтосекундными технологиями в медицине, например – для изготовления высококачественных стентов в сосудистой хирургии. Физики вначале не нашли области применения фемтосекундных лазеров, в которых эксперимент дал бы возможность выявить какие-либо новые теоретические положения для взаимодействия атомов и молекул между собой. Для того чтобы «заглянуть» внутрь атома, нужны были более короткие импульсы излучения, аттосекундные. И физики-лазерщики продолжали совершенствовать фемтосекундные лазерные устройства.

Переход к аттосекундным импульсам был впервые сделан французским физиком Анн Л'Юилье, руководившей лабораторией во французском центре ядерных исследований. В 1987 году она открыла интересное явление. Когда мощный инфракрасный лазерный луч пропускался через инертный газ (аргон), то появлялось излучение на больших частотах – «радуга», состоящая из отрезков волн более высоких частот, вплоть до жестких ультрафиолетовых лучей. Это излучение было довольно слабым, и его раньше никто не замечал. Л'Юилье удалось это сделать потому, что в ее опытах газ помещался внутри тончайших трубочек (волокон) кварцевого стекла, где и фокусировался лазерный луч. Это делалось для того, чтобы исключить взаимодействие излучения с разными атомами – оставить взаимодействие только с атомами аргона. А аргон был выбран из-за сравнительной простоты и сферической симметрии его электронной конфигурации ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$). К ее удивлению, эти неизвестно откуда взявшиеся волны имели одинаковую интенсивность, начиная с 5-й по 33-ю частоту.

Канадский физик-теоретик Пол Коркум создал теорию происхождения этих коротковолновых излучений. Эта теория содержала, кроме классических представлений о появлении обертонов (гармоник) в стоячих



Пол Коркум

волнах, квантовые представления о туннельном механизме взаимодействия электрона с суммарным электрическим полем ядра и электромагнитного излучения. А в 1994 году Л'Юилье стала соавтором полностью квантовой теории этого процесса.

Но потребовалось больше десяти лет, чтобы разобраться с теоретическими вопросами и понять, как использовать рождаемые атомными электронами высокочастотные гармоники для получения достаточно мощного аттосекундного импульса. Исследование шло по различным путям. При этом применялись разные методы интерференции либо этих гармоник, либо их сложения с исходным лучом. Каждая такая установка представляла собой сложную (и очень дорогую) оптическую систему. Даже популярный разбор и обсуждение такой системы выходит за рамки данной статьи.

Между различными группами исследователей началось негласное соревнование за получение сверхкоротких импульсов электромагнитного излучения. Начали появляться и практические результаты этих работ. На рубеже 2000 года Л'Юилье впервые удалось преодолеть фемтосекундный барьер. В ее исследовательской группе был получен и надежно измерен импульс длительностью 0,67 фемтометра, что стало именоваться как 670 аттометров. А в 2001 году сразу в двух группах исследователей были получены аттосекундные импульсы. Франко-американской группой Пьера Агостини была получена серия импульсов длительностью по 250 аттосекунд каждый. И в этом же году в Венском технологичес-

ком университете немецкий физик венгерского происхождения Ференц Краус при участии Пола Коркума получил мощный импульс длительностью 650 аттосекунд и применил его для изучения динамики электрона при его вылете из атома.

В 2003 году вперед «вырвалась» снова группа Л'Юилье – длительность рожденного импульса составила 170 нм. Прошло двадцать лет, и сегодня речь идет уже о получении импульсов в 20 аттосекунд. Стали рождаться аттофизика и аттохимия, включившие и все исследования, которые велись и ведутся с фемтосекундными импульсами. Ведь 650 аттосекунд, например, можно понимать и как 0,65 фемтосекунд. Первый интересный результат, полученный недавно, заключался в том, что было измерено, насколько в эффекте Оже время отрыва от атома вторичного электрона больше, чем время фотоионизации первичного электрона. Оказалось что эта разность составляет 21 ± 1 аттосекунд.

Но основное применение фемтосекундных и аттосекундных импульсов – это изучение динамики электронов при химических реакциях, структуры промежуточных комплексных состояний молекул. Сегодня ставится вопрос о возможности такого электронного или фотонного воздействия на этот промежуточный комплекс, чтобы его развал происходил в определенном направлении. Другими словами, возникает возможность управления глубиной сущностью атомных и молекулярных процессов, вмешательства в «интимный» атомно-молекулярный электронный мир, который природа сделала сугубо вероятностным, точно не определяемым. И это не противоречит квантовому принципу о невозможности точного наблюдения за объектами микромира без разрушения структуры, в которой объекты находятся. Во всех фемто- и аттосекундных воздействиях системы преобразуются – электрон вылетает из атома, молекулы меняют свою структуру. Но при этом можно получить более точную информацию об отдельных моментах динамического процесса.

Во всех материалах о нынешней Нобелевской премии приводится аналогия со сверх-

скоростной киносъемкой быстрых процессов, когда можно увидеть отдельные кадры движения, которые при обычной киносъемке сливаются в одно пятно. Так, при ночных съемках потока автомашин, которые по необходимости производятся с большой выдержкой (из-за малой освещенности), вместо автомашин видны желтые или красные линии, представляющие собой слившийся свет фар. Поэтому неудивительны такие заголовки статей об этой премии, как «самая короткая вспышка света», «дверь (окно) в мир электронов».

Нобелиаты-23

Так кто же такие Нобелевские лауреаты по физике 2023 года?

Анн Л'Юилье (Anne L'Huillier) родилась в Париже в 1958 году. В Высшей нормальной школе она в 1980 году стала дважды магистром – и по физике, и по математике. Но позже ее привлекла экспериментальная физика. Она получила ученую степень доктора наук за исследования по многократной ионизации в лазерных лучах большой интенсивности. Эти исследования ею были проведены в лазерной лаборатории французского Комиссариата по атомной и альтернативной энергии (CEA) в Сакле, где она и стала продолжать свои эксперименты, а в 1987 году сделала свое открытие о рождении атомным электроном в лазерном инфракрасном луче большого числа импульсов излучения малой длительности («обертон»). После создания Коркумом теории этого явления, комбинируя эти импульсы, ей удалось получить импульс излучения протяженностью меньше одного фемтометра. Так родилась аттофизика. С участием Л'Юилье был создан твердотельный титано-сапфировый лазер инфракрасного излучения, наиболее подходящий для дальнейших работ по аттосекундным лазерным установкам. С помощью этих установок она поставила в 2003 году своеобразный рекорд, получив и измерив длительность импульса в 170 ас (так теперь обозначаются аттосекунды).

Л'Юилье стала признанным специалистом в этой новой области физики, была приглашенным профессором в самых пре-

стижных мировых университетах. Сейчас она – профессор шведского Лундского университета, где ею была создана лазерная лаборатория. Несколько лет она была членом Нобелевского комитета по физике. Известие о присуждении Нобелевской премии 2023 года застигло ее, когда она читала очередную лекцию студентам. По ее словам, ей с трудом удалось завершить лекцию из-за волнения, вызванного известием. Ведь в прошлом году она уже стала лауреатом второй по престижности научной премии по физике – премии Вольфа.

Анн Л'Юилье – пятая женщина, ставшая Нобелевским лауреатом по физике. А всего она награждена десятью премиями и медалями, имеет девять званий почетного доктора и почетного академика и сейчас находится в расцвете своих творческих научных сил.

Ференц Краус (Ferenc Krausz), немецкий физик венгерского происхождения, родился в 1962 году в венгерском городе Мор. Степень магистра по физике он получил в университете Этвеша Лоранда в 1979 году, а магистра по электротехнике – в Будапештском техническом университете в 1981 году. В Венском техническом университете он защитил докторскую диссертацию по физической оптике и в 1991 году стал (и остается до сегодняшнего дня) профессором этого университета. Но параллельно с этой работой он создает в Мюнхенском университете Центр передовой фотоники, а в 2003 году становится директором Мюнхенского Института квантовой оптики общества Макса Планка.

По сути, Краус стал одним из основателей фотоники, передовой отрасли физики по обработке и передаче информации не с помощью электронов, а с помощью фотонов – квантов электромагнитного излучения. Иногда фотонику образно называют *электроникой 21-го века*. Основой фотоники является квантовая оптика, точнее – лазерная физика и техника. В фотонике очень важны точные измерения длительности импульсов излучения и их энергии.

В сущности, создание сверхкоротких импульсов излучения – это тоже раздел фотоники. И неслучайно Краус еще в

Венском университете возглавил группу по получению и измерению длительности сверхкоротких импульсов излучения. Взяв за основу идею Коркума и Л'Юилье об излучении атомным электроном большого числа гармоник (обертонов) и применяя свои собственные методы обработки этих сигналов, Краус в 2001 году получил импульс длительностью в 650 ас. Благодаря большей мощности этого импульса, чем был тогда же получен группой Л'Юилье, Краус смог с большой точностью измерить эту длительность и провести цикл исследований динамики электрона в атомах и молекулах. Это и стало настоящим рождением аттофизики.

Интересно отметить, что список научных работ Крауса в интернетовских статьях занимает очень много места. И не только потому, что статей много. Дело в том, что в каждой статье велик перечень авторов. Указаны (в алфавитном порядке) все участники работы, а их бывает больше десяти. И в общем перечне фамилия руководителя работы Ференца Крауса стоит не первой, а на своем алфавитном месте. Так бывает далеко не всегда.

Вместе с Л'Юилье Краус стал в 2022 году лауреатом премии Вольфа. А кроме этой и нобелевской наград он обладатель еще 11 престижных премий и наград. Германия наградила его в 2011 году орденом «За заслуги перед Федеративной Республикой Германия».

Пьер Агостини (Pierre Agostini), французско-американский физик-экспериментатор, родился в 1941 году в Тунисе (тогда еще французском протекторате). Учился он во французской национальной военной школе, а в 20-летнем возрасте получил степень бакалавра технических наук в Университете Экс-Марсель. Через год Агостини стал там магистром, а в 1968 году – доктором философии по физике, защитив диссертацию из области физической оптики. В 1969 году его пригласили на работу в исследовательскую лазерную лабораторию французского Комиссариата по атомной и альтернативной энергии (CEA). Когда через 15 лет туда пришла работать Анн Л'Юилье, Агостини уже не было во Франции,

он принял предложения нескольких американских университетов и стал американским физиком. Работая в Брукхейвенской национальной лаборатории, где в его распоряжении были мощные лазеры, он разработал собственный метод получения аттосекундных импульсов ультрафиолетового диапазона с очень короткой длительностью (серию из нескольких импульсов длительностью по 250 аттосекунд). Этот оригинальный метод, получивший в фотонике название RABBIT (Reconstruction of Attosecond Beating By Interference of Two-photon Transitions), основывался на эффекте интерференции при рекомбинации ультракоротких ультрафиолетовых импульсов с исходным инфракрасным светом. В 2005 году он стал членом американского Оптического общества. Его избрание обосновывалось «лидерством в разработке инновационных экспериментов, которые дают новое понимание динамического нелинейного отклика атомов и молекул под действием сильных инфракрасных лазерных импульсов». Вот такова весьма длинная формулировка его заслуг.

Премия Вольфа за аттосекундные исследования

В 2022 году премия Вольфа по физике была присуждена «за новаторский вклад в науку о сверхбыстрых лазерах и аттосекундную физику». Лауреатами премии стали Анн Л'Юилье, Пол Коркум и Ференц Краус.

Очевидна разница в подходе к присуждению премий. Вольфовский комитет сделал упор на всю проблему рождения аттофизики и включил в число лауреатов Коркума, замечательного канадского физика-теоретика, создавшего теорию рождения аттоимпульсов и тем самым вдохновившего физиков-лазерщиков на упорные поиски путей рождения этих импульсов. Поскольку Вольфовский комитет следовал традиции Нобелевского комитета присуждать одну премию не больше, чем трем лауреатам, Пьер Агостини не был награжден. Нобелевский комитет в 2023 году решил по-другому. Он присудил премию только за экспериментальные достижения. По-

этому Пол Коркум и не стал Нобелевским лауреатом. Зато им стал Пьер Агостини.

Присуждение двух престижных премий по науке за одни и те же достижения стало уже некоторой традицией. Из 66 лауреатов премии Вольфа по физике 16 стали лауреатами и Нобелевской премии, а из 56 Вольфовских лауреатов по химии стали и Нобелевскими лауреатами 11 ученых. Как правило, сначала присуждается премия Вольфа, а потом премия Нобеля. Перерывы между присуждениями этих двух премий бывают достаточно большими. Так, например, российский физик-теоретик Виталий Гинзбург, единственный российский физик, получивший Вольфовскую премию (1995 год), Нобелевским лауреатом стал только через восемь лет. Еще больший разрыв – целых 12 лет – между премиями за эксперименты по проверке неравенств Белла (квантовой запутанности).

Престижность премии Вольфа очевидна, у физиков эта премия – вторая после Нобелевской. Но если о том, что такое премия Нобеля, хорошо известно, то о премии Вольфа мало кто знает. Думается, здесь уместно сказать о ней несколько слов.

Фонд Вольфа, проценты с которого и представляют премии, основан Рикардо Вольфом, химиком, изобретателем, дипломатом и филантропом. Один из 14 детей немецкого предпринимателя Морица Вольфа, в двадцатипятилетнем возрасте он эмигрировал на Кубу. Талантливый ученый, Рикардо Вольф изобрел несколько способов извлечения металлов из отходов металлургических производств, успешно реализовал свои изобретения и стал обладать очень большим состоянием. Он поддерживал кубинскую революцию 1953-1959 годов (в том числе и финансово). В 1960 году Фидель Кастро назначил его послом в Израиль. Но после разрыва дипломатических отношений Кубы с Израилем в 1973 году Вольф не вернулся на Кубу и стал израильским гражданином. В 1975 году он превратил свое состояние в фонд Вольфа.

Номинации вольфовских премий несколько отличаются от нобелевских. Это – математика, физика, химия, медицина, сельское хозяйство и искусство (раз в

четыре года либо музыка, либо живопись, либо скульптура, либо архитектура). Сумма премии – сто тысяч долларов каждому награжденному. Первые премии Вольфа были присуждены в 1978 году. По физике лауреатом стала знаменитая американская физик-экспериментатор китайского происхождения Ву Цзяньсюн, по математике – крупнейший математик XX века российский академик И.М.Гельфанд. Российских математиков, Вольфовских лауреатов, еще пятеро – А.Н.Колмогоров, В.И.Арнольд, С.П.Новиков, М.Г.Крейн, Я.Г.Синай. Среди награжденных этой премией деятелей искусства Мстислав Ростропович, Владимир Горовиц. Пол Маккартни, Пласидо Доминго, Марк Шагал.

Начало российской аттофизики

Какова роль российской физики в прорывных исследованиях, приведших к созданию аттофизики? В России 25 лет назад стали осваивать фемтосекундные лазеры. Эти лазеры нужно было покупать за немалые деньги у зарубежных фирм. Совместные работы с Нобелевскими лауреатами Жераром Муру и Донной Стрикленд велись в Нижнем Новгороде, в Институте прикладной физики РАН под общим руководством академика Александра Сергеева, директора этого института (с 2015 года), создавшего в нем российский центр фемтосекундной оптики на мощных инфракрасных лазерах. Но в 2017 году академик Сергеев был избран Президентом Россий-



Александр Сергеев

ской академии наук, а потом грянула пандемия и политические осложнения последних лет. Работы затормозились, прервалось снабжение лазерных установок необходимыми материалами и деталями. И тем более теперь нет возможности приобрести аттосекундные лазерные установки.

3 октября этого года, в день присуждения Нобелевской премии по физике, Александр Сергеев, наш главный физик-лазерщик, сказал: «Эту премию мы давно ждали. Но меня расстроило то, что в команде нет Пола Коркума. Это великий канадский ученый, который понял, откуда берется аттосекундный импульс, и открыл обратное соударение, т.е. сделал принципиальное открытие в этом направлении. Но все ученые, получившие Нобелевскую премию, очень ее достойны».

Год назад, в сентябре 2022 года академик Сергеев снял свою кандидатуру с очередных выборов Президента РАН и был назначен научным руководителем новой для России мощной научной организации – Национального центра физики и математики (НЦФМ). В программе первых задач этого Центра есть и работы по аттосекундной физике. Лазерная база уже есть. В Сарове, где располагается НЦФМ, действует одна из самых мощ-

ных научных организаций в нашей стране – Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ) со своим научным городком и 25-тысячным научным коллективом. Этой осенью на работу туда пришли первые магистры из расположенного в Сарове нового филиала МГУ имени М.В.Ломоносова. Их выпускные магистерские работы и намечаемая научная деятельность посвящены аттофизике.

За аттофизикой – будущее. Это, прежде всего, дальнейшее развитие фемтосекундных технологий, а значит, новые материалы, новые медицинские препараты и лекарства, новые более быстродействующие электронные устройства и еще многое, что трудно заранее предсказать. А если немного пофантазировать, то можно представить, что аттофизика прокладывает путь к генерации *zeptosekundных* (10^{-21} с) и *yoctosekundных* (10^{-24} с) импульсов излучения, с помощью которых можно будет «заглянуть» уже не в атом, а в атомное ядро и «увидеть», как таинственные кварки объединяются тройками в протоны и нейтроны и в чем заключается механизм ядерных превращений.



Первое здание Национального центра физики и математики

Числа Бернулли, многочлены Эйлера и формулы сложения

А. ВЕСЕЛОВ

60-летию Колмогоровского
интерната посвящается

САМОЕ УДИВИТЕЛЬНОЕ В ИСТОРИИ математики – как великие ее представители могли видеть большое за не очень значительными на вид наблюдениями. Замечательным примером является открытие чисел Бернулли и многочленов Эйлера, играющих важную роль в различных областях математики. Мы объясним, как можно взглянуть на них с точки зрения теории элементарных функций, удовлетворяющих формулам сложения.

Числа Бернулли: как Бернулли вычислял суммы степеней

Числа Бернулли являются, пожалуй, самыми мистическими числами в математике, загадочным образом появляющимися в различных ее областях от алгебры и теории чисел до анализа и алгебраической топологии.

А начиналось все с невинного вычисления сумм степеней первых n натуральных чисел $S_m(n) = 0^m + 1^m + \dots + (n-1)^m$. Мы здесь (по французской традиции) включили 0 в натуральные числа, полагая, что $0^0 = 1$, для того чтобы в сумме было n членов и чтобы $S_0(n) = n$ (здесь важно, что сумма вычисляется до $(n-1)^m$ включительно).

Следующие формулы были известны в математике очень давно и могут быть доказаны, например, методом математической индукции:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n,$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Последнее равенство можно переписать в замечательном виде

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = (1 + 2 + \dots + (n-1))^2,$$

что послужило предметом дальнейшего изучения сумм нечетных степеней немецким ученым Иоганном Фаульхабером в книге 1631 года, одной из первых книг по алгебре, написанных на немецком языке.

Швейцарский математик Якоб Бернулли продолжил исследования Фаульхабера в 1703 году и нашел, в частности, что

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^3 - \frac{1}{12}n^2,$$

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n.$$

Две закономерности легко видеть: старший коэффициент $S_m(n)$ равен $\frac{1}{m+1}$, а следующий коэффициент всегда равен $-\frac{1}{2}$.

Гениальное наблюдение Бернулли состоит в том, что все коэффициенты $S_m(n)$ легко определяются по коэффициентам при первой степени n , которые теперь называются *числами Бернулли* и обозначаются B_m . Формула Бернулли для сумм степеней имеет вид

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}. \quad (1)$$



Якоб Бернулли (1654–1705) и его самый знаменитый труд, где были введены числа Бернулли

Здесь $C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ – это биномиальные коэффициенты из разложения

$$(a + b)^l = \sum_{k=0}^l C_l^k a^k b^{l-k}.$$

Числа Бернулли однозначно определяют-ся рекуррентно из свойства

$$\sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k = S_m(1) = 0, \quad m > 0, \quad (2)$$

где $B_0 = 1$. В частности, для первых m имеем

$$2B_1 + B_0 = 0,$$

$$3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0,$$

$$4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0,$$

откуда $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$. Продолжая вычисления¹, получаем

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0,$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0,$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Этих вычислений было достаточно для Бернулли, чтобы посчитать сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел $S_{10}(1000)$ «в течение половины четверти часа», чем он явно очень гордился.

Бросается в глаза, что все числа Бернулли B_k с нечетным $k > 1$ равны нулю, а знаки чисел Бернулли B_k с четными k чередуются. Это действительно так, и мы это сейчас докажем. Однако в остальном последовательность чисел Бернулли выглядит довольно загадочно и появляется в целом ряде поистине магических связей.

Чудеса чисел Бернулли

Нам будет удобно использовать следующую «магическую» символику. Запишем равенства (2) в символическом виде следующим образом:

$$(B + 1)^n = B^n, \quad n > 1, \quad (3)$$

где по договоренности B^k следует заменить на B_k . Например, для $n = 3$ имеем

$$B^3 + 3B^2 + 3B + 1 = B^3,$$

¹ Интересно, что вычисления чисел Бернулли было целью одной из первых «компьютерных» программ, написанной в 1841 году Адой Лавлейс, дочерью Байрона и ученицей Бэббиджа. В честь нее назван один из языков программирования.

$$3\beta^2 + 3\beta + 1 = 0.$$

Заменяя теперь β^2 на B_2 , β на B_1 и $1 = \beta^0$ на B_0 , получаем наше второе уравнение для чисел Бернулли:

$$3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0.$$

В этих обозначениях формула Бернулли (1) может быть записана в виде

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} \left((\beta+n)^{m+1} - \beta^{m+1} \right). \quad (4)$$

Часть свойств чисел Бернулли мы докажем, используя «магические» обозначения. Читателю предлагается продумать, как это соотносится с традиционным подходом.

Другим удобным средством описания последовательностей чисел является метод производящих функций (см., например, статью [1] или более детальные лекции [2]).

Экспоненциальной производящей функцией последовательности a_0, a_1, a_2, \dots называется ряд

$$a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + a_3 \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

Например, для последовательности $1, 1, 1, \dots$ экспоненциальная производящая функция является рядом Тейлора для экспоненты (см. [3]):

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

В случае чисел Бернулли она имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}. \quad (5)$$

Для доказательства этого нам надо показать равенство рядов

$$(e^z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = z,$$

где правую часть следует рассматривать как ряд, в котором все коэффициенты, начиная со второго, равны нулю. Заметим, что, используя нашу символику, мы можем записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{z^n}{n!} = e^{\beta z},$$

так что наше равенство можно переписать в виде

$$(e^z - 1)e^{\beta z} = e^{(\beta+1)z} - e^{\beta z} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[(\beta+1)^n - \beta^n \right] \frac{z^n}{n!} + z,$$

что верно в силу (3), так как единственный ненулевой коэффициент при z равен 1.

Соотношение (5) часто используется как определение чисел Бернулли. Воспользуемся им для доказательства того, что B_{2k+1} при $k > 0$ равны нулю. Для этого добавим к нашей производящей функции линейный член $z/2 = -B_1 z$:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} \quad (6)$$

где $\operatorname{cth} x$ – гиперболическая версия котангенса, определяемая как

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Поскольку эта функция четная, все ее нечетные коэффициенты равны нулю. По этой причине иногда числами Бернулли называют только четные коэффициенты, забывая про нули и B_1 , однако мы так делать не будем.

Докажем теперь формулу Бернулли (1). Для этого введем, используя нашу символику, классические многочлены Бернулли $\mathbf{B}_m(x)$ как

$$\mathbf{B}_m(x) = (\beta + x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k B_k x^{m-k}, \quad m \geq 0. \quad (7)$$

Например,

$$\mathbf{B}_0 = 1, \quad \mathbf{B}_1 = x - \frac{1}{2}, \quad \mathbf{B}_2 = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$\mathbf{B}_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad \mathbf{B}_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

Их свободные члены – это числа Бернулли: $\mathbf{B}_n(0) = B_n$.

Экспоненциальная производящая функция многочленов Бернулли имеет вид

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n(x) \frac{z^n}{n!}. \quad (8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} &= e^{\beta z} e^{xz} = e^{(\beta+x)z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta+x)^n \frac{z^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n(x) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Многочлены Бернулли обладают следующими двумя замечательными свойствами, определяющими их однозначно: разностная производная

$$\mathbf{B}_m(x+1) - \mathbf{B}_m(x) = mx^{m-1} \quad (9)$$

совпадает с обычной производной степенной функции x^m , а обычная производная удовлетворяет свойству

$$\frac{d}{dx} \mathbf{B}_m(x) = m\mathbf{B}_{m-1}(x), \quad (10)$$

аналогичному свойству степенной функции.

Свойство (9) проще всего доказать, используя производящую функцию (8):

$$\begin{aligned} \frac{ze^{(x+1)z}}{e^z - 1} - \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} &= \frac{ze^{xz}(e^z - 1)}{e^z - 1} = ze^{xz} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^{n+1}}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} mx^{m-1} \frac{z^m}{m!}. \end{aligned}$$

Свойство (10) следует прямо из определения (7).

Нетрудно доказать также свойство симметрии многочленов Бернулли:

$$\mathbf{B}_m(1-x) = (-1)^m \mathbf{B}_m(x), \quad (11)$$

из которого следует, в частности, что $\mathbf{B}_m(1) = (-1)^m B_m$.

Докажем теперь, что суммы степеней можно выразить через многочлены Бернулли как

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} (\mathbf{B}_{m+1}(n) - B_{m+1}).$$

Действительно, по определению $S_m(n)$ и свойству многочленов Бернулли (9) находим

$$\begin{aligned} S_m(n+1) - S_m(n) &= n^m = \\ &= \frac{1}{m+1} (\mathbf{B}_{m+1}(n+1) - \mathbf{B}_{m+1}(n)). \end{aligned}$$

Это означает, что $S_m(n) = \frac{\mathbf{B}_{m+1}(n)}{m+1} + c_m$,

где константа c_m находится из условия $S_m(1) = 0$, дающего $c_m = -\frac{B_{m+1}}{m+1}$. Так как

$B_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k B_k x^{m+1-k}$, это и доказывает формулу Бернулли (1).

Расскажем теперь о других поистине мистических проявлениях чисел Бернулли.

Формулы Эйлера–Маклорена и Стирлинга. Начнем с замечательного открытия Леонарда Эйлера и его современника шотландского математика Колина Маклорена, что те же самые числа Бернулли появляются при суммировании значений любой (достаточно хорошей) функции! Более точно, имеет место следующая формула суммирования Эйлера–Маклорена:

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{b-1} f(k) &= \int_a^b f(x) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)) + R_N, \quad (12) \end{aligned}$$

где $f^{(k)}(x)$ – k -я производная функции $f(x)$, B_k – числа Бернулли, а остаток имеет вид

$$R_N = \frac{(-1)^{N+1} b}{N!} \int_a^b f^{(N)}(x) \mathbf{B}_N(x - [x]) dx,$$

где $\mathbf{B}_k(x)$ – многочлены Бернулли, а $[x]$ обозначает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .

Применим формулу (12) к функции $f(x) = x^m$ при $a = 0$, $b = n$, $N = m + 1$. Поскольку $(m + 1)$ -я производная x^m тождественно равна нулю, мы имеем $R_N = 0$ и, как следствие, формулу Бернулли (1). Таким образом, формула Эйлера–Маклорена является далеко идущим обобщением формулы Бернулли.

Применим теперь эту формулу к натуральному логарифму $f(x) = \ln x$ при $a = 1$, $b = n$, $N = 1$. Так как неопределенный интеграл $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$, имеем

$$\int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1,$$

значит,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = n \ln n - n + 1 - \frac{1}{2} \ln n + R_1(n),$$

где мы использовали, что $B_1 = -\frac{1}{2}$. Добавляя член $\ln n$ к обеим частям, получаем, что

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2} \ln n + R_1(n),$$

откуда

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{R_1(n)+1}.$$

Можно показать (см. например, [4]), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{R_1(n)+1} = \sqrt{2\pi},$$

это приводит к одной из самых замечательных формул в математике – *формуле Стирлинга*², еще одного шотландского математика XVIII века:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (13)$$

Здесь символ \sim означает, что предел отношения левой и правой частей стремится к 1, когда n стремится к бесконечности. Сочетание чисел e , π вместе с алгебраическим квадратным корнем объединяет в этой формуле анализ, геометрию и алгебру. Заметим, что квадратный корень из n происходит здесь из первого числа Бернулли!

Базельская проблема и значения дзета-функции. Поистине чудесным образом числа Бернулли появились и в решении Эйлера следующей знаменитой *Базельской проблемы*. Якоб Бернулли привлек внимание к этой проблеме в 1698 году, не зная о более ранней работе 1650 года итальянского математика Пьетро Менголи, также содержащей этот вопрос. Проблема состоит в том, чтобы найти «в явном виде» сумму обратных квадратов всех натуральных чисел, т.е. в вычислении бесконечной суммы

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Проблема, в частности, предполагает, что такой явный вид возможен. И действительно, Эйлер показал, что это так, доказав, что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Более того, Эйлер вычислил значения знаменитой *дзета-функции*

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

² Интересно, что Стирлинг не знал точного значения этого предела еще несколько лет после его вычисления де Муавром.

при всех целых четных $s = 2m$, получив замечательную формулу

$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}}{(2m)!} B_{2m} \pi^{2m}, \quad (14)$$

где B_{2m} – числа Бернулли. Узнав об этом замечательном открытии, учитель Эйлера Иоганн Бернулли сокрушался: «Вот если бы брат был жив...»

Гениальная идея Эйлера состояла в использовании следующего разложения котангенса на простые дроби:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Строгое обоснование подобных разложений было дано в конце XIX века шведским математиком Густавом Миттаг-Леффлером.

Аналогичное разложение имеет место для гиперболического котангенса:

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2\pi^2}. \quad (16)$$

А теперь вспомним формулу (6), из которой следует, что

$$z \operatorname{cth} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k}. \quad (17)$$

Сравнение двух последних формул дает формулу Эйлера для значений дзета-функции (14) (проверьте). Так как они очевидно положительны, мы, в частности, получаем доказательство чередующести знаков чисел B_{2k} . А используя формулу Стирлинга, мы получаем асимптотику чисел Бернулли при больших k :

$$|B_k| \sim 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k},$$

откуда видно, что они растут быстрее любой экспоненты.

Интересно, что про значения дзета-функции в нечетных натуральных числах практически ничего не известно, так что если бы Бернулли спросил, чему равна сумма

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots,$$

мы бы до сих пор не знали ответа... Гении

знали, что спрашивать (и что не спрашивать)!

Многочлены Эйлера: как Эйлер вычислял сумму натуральных чисел

Гениальный Эйлер пошел дальше и «почитал» сумму всех степеней натуральных чисел!

Точный математический смысл его ответам придал Бернхард Риман и использует глубокую идею *аналитического продолжения*, которую мы оставляем за пределами нашей статьи. Скажем только, что все формулы Эйлера правильные и могут быть строго обоснованы, но не могут пониматься буквально и требуют специальной интерпретации.

Ответ оказался поистине замечательным и опять привел к числам Бернулли:

$$\zeta(-m) = 1^m + 2^m + 3^m + \dots = (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1}. \quad (18)$$

В частности, сумма натурального ряда оказалась «равна»

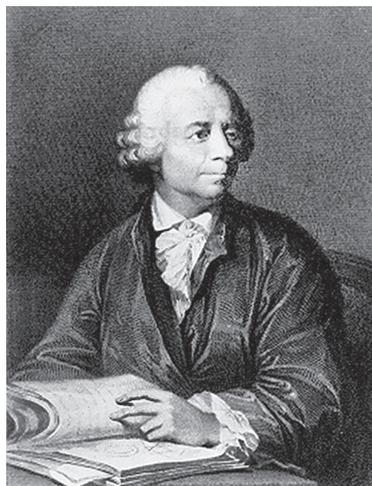
$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12},$$

а сумма квадратов натурального ряда

$$\zeta(-2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots = -\frac{B_3}{3} = 0$$

«равна» нулю.

Ясно, что без «магии» здесь обойтись не удастся. Попробуем понять логику великого Эйлера.



Леонард Эйлер (1707–1783) и его многочлены

Первый шаг Эйлера состоял в замене ряда

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

сходящегося при $s > 1$, на знакопеременный ряд

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s},$$

который сходится уже для $s > 0$. При этом в области сходимости обоих рядов $s > 1$ выполняется формула

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s). \quad (19)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{2}{2^s} \zeta(s) &= \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right) - \\ &- 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots = \eta(s). \end{aligned}$$

Далее Эйлер предполагает, что формула (19) верна для всех (вещественных) s (что верно в смысле аналитического продолжения) и вычисляет $\eta(s)$.

Начинает он с формулы для геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

$a = \frac{1}{1(p-1)}$	Многочлены Эйлера $\frac{A_n(p)}{n!(p-1)^n} \quad (1 \leq n \leq 7)$
$b = \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}$	
$g = \frac{pp+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}$	
$\delta = \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4(p-1)^4}$	
$\epsilon = \frac{p^4+26p^3+66p^2+26p+1}{1.2.3.4.5(p-1)^5}$	
$\zeta = \frac{p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1}{1.2.3.4.5.6(p-1)^6}$	
$\eta = \frac{p^6+120p^5+1191p^4+2416p^3+1191p^2+120p+1}{1.2.3.4.5.6.7(p-1)^7}$	
&c.	

Конечно, эта формула верна только в области сходимости ряда $|x| < 1$, но Эйлер выходит за рамки обычного анализа и считает, что она верна для всех $x \neq 1$. Дифференцируя обе части этого равенства, он получает

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (20)$$

и подставляет в него $x = -1$:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{2^2},$$

откуда получается, что $\eta(-1) = \frac{1}{4}$. Отсюда, в силу соотношения (19), он получает свою мистическую формулу для суммы натурального ряда:

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \dots = \frac{1}{1-2^2} \eta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

Чтобы вывести общую формулу для $\zeta(-m)$, Эйлер умножает равенство (20) на x и дифференцирует, получая

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} &= 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \dots = \\ &= \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Далее, подставляя $x = -1$, Эйлер получает, что $\eta(-2) = 0$, а следовательно, и

$$\zeta(-2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots = 0.$$

Продолжая этот процесс, Эйлер получает явные выражения для рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} = \frac{d}{dx} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^{n-1} = \frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 x^{n-1} = \frac{1+26x+66x^2+26x^3+x^4}{(1-x)^6}.$$

После чего он вводит свои знаменитые многочлены $A_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} A_{m,k} x^k$ (известные теперь как *многочлены Эйлера*³) как чис-

³ В литературе имеются и другие многочлены Эйлера, обозначаемые $E_n(x)$, поэтому иногда $A_m(x)$ называются Эйлеровскими многочленами (Eulerian polynomials).

лители в сумме ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m x^{n-1} = \frac{A_m(x)}{(1-x)^{m+1}}, \quad (21)$$

которые можно вычислять последовательно, начиная с $A_1 = 1$, по формуле

$$A_{n+1}(x) = x(1-x) \frac{d}{dx} A_n(x) + (nx+1) A_n(x):$$

$$A_1 = 1, A_2 = x + 1, A_3 = x^2 + 4x + 1,$$

$$A_4 = x^3 + 11x^2 + 11x + 1,$$

$$A_5 = x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1,$$

$$A_6 = x^5 + 57x^4 + 302x^3 + 302x^2 + 57x + 1.$$

Коэффициенты $A_{n,k}$ известны как *числа Эйлера* (первого рода) и играют важную роль в комбинаторике и теории вероятности: $A_{n,k}$ равно числу перестановок i_1, i_2, \dots, i_n чисел $1, 2, \dots, n$ с k подъемами, т.е. таких, что существует ровно k индексов j , для которых $i_j < i_{j+1}$. Они образуют треугольник Эйлера, аналогичный треугольнику Паскаля, удовлетворяя соотношению

$$A_{n,k} = (k+1) A_{n-1,k} + (n-k) A_{n-1,k-1}$$

(см. например, [4], с. 298).

Производящая функция многочленов Эйлера была известна уже самому Эйлеру и имеет вид

$$\sum_{n \geq 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{x-1}{x - e^{(x-1)t}}. \quad (22)$$

Воспользуемся этим, чтобы вычислить $\eta(-m) = A_m(-1)$, подставив в последнюю формулу $x = -1$:

$$\sum_{n \geq 0} 2^{n+1} A_n(-1) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^{-2t} + 1}.$$

Чтобы найти разложение этой функции в ряд Тейлора, воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{e^z + 1} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{2}{e^{2z} - 1}$$

и производящей функцией чисел Бернулли

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^z + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^{n-1}}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2z)^{n-1}}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^n) B_n \frac{z^{n-1}}{n!}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{2}{e^{-2t} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^n (1 - 2^n) B_n \frac{t^{n-1}}{n!}.$$

Таким образом, оказывается, что значение многочлена Эйлера при $x = -1$

$$A_m(-1) = (-1)^m (1 - 2^{m+1}) \frac{B_{m+1}}{m+1} \quad (23)$$

просто связано с соответствующим числом Бернулли, т.е. многочлены Эйлера «знают» числа Бернулли!

Отсюда и следует магическое соотношение Эйлера

$$\zeta(-m) = \frac{\eta(-m)}{1 - 2^{m+1}} = \frac{A_m(-1)}{1 - 2^{m+1}} = (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1}. \quad (24)$$

Повторимся, во избежание недоразумений, что понимать его следует не буквально, а в смысле аналитического продолжения из комплексного анализа.

Приведем еще одну «магическую» формулу для следующего обобщения дзета-функции, принадлежащего Гурвицу:

$$\zeta(s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s}.$$

При $a = 1$ получаем обычную дзета-функцию: $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$. Оказывается, что дзета-функция Гурвица при целом отрицательном $s = -m$ (как функция a) становится многочленом Бернулли. Более точно,

$$\zeta(-m, a) = -\frac{B_{m+1}(a)}{m+1}. \quad (25)$$

При $a = 1$ получаем соотношение Эйлера:

$$\begin{aligned} \zeta(-m) &= -\frac{B_{m+1}(1)}{m+1} = \\ &= (-1)^m \frac{B_{m+1}(0)}{m+1} = (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались симметрией многочленов Бернулли (11).

Числа Бернулли, многочлены Эйлера и формулы сложения

Добавим теперь новую загадку в этой истории, позволяющую взглянуть на природу этих замечательных чисел и многочленов с некоторой общей точки зрения.

Напомним, что формулой сложения для функции $f(x)$ называется выражение

$f(x+y)$ через $f(x)$ и $f(y)$:

$$f(x+y) = F(f(x), f(y)).$$

Например, формула сложения для экспоненты имеет вид

$$e^{x+y} = e^x e^y,$$

а для тангенса –

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Зададимся вопросом, какие еще функции $f(x)$ удовлетворяют подобным формулам сложения

$$f(x+y) = F(f(x), f(y)), \quad (26)$$

$$F(u, v) = \frac{a_0 + a_1(u+v) + a_2 uv}{b_0 + b_1(u+v) + b_2 uv}.$$

Например, для $f(x) = e^x$ и $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеем $F(u, v) = uv$ и $F(u, v) = \frac{u+v}{1-uv}$ соответственно.

Приведем еще примеры таких функций и соответствующих формул сложения:

$$f(x) = e^x - 1, \quad F(u, v) = u + v + uv,$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad F(u, v) = \frac{1 - uv}{u + v},$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad F(u, v) = \frac{uv}{1 + u + v}.$$

Есть и более элементарные примеры:

$$f(x) = x, \quad F(u, v) = u + v,$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(u, v) = \frac{uv}{u + v}.$$

Нетрудно проверить, что если $f(x)$ удовлетворяет формулам сложения (26), то это же верно для ее дробно-линейного преобразования

$$\tilde{f}(x) = \frac{af(x) + b}{cf(x) + d},$$

что позволяет построить много других примеров.

Оказывается (и это важно для нас), что все функции, удовлетворяющие формулам сложения (26), получаются из $f(x) = x$ и $f(x) = e^{\mu x}$ дробно-линейными преобразованиями, если допускать комплексные значения параметров.⁴ Для этого надо знать еще одну замечательную формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad i^2 = -1,$$

позволяющую выразить косинус и синус через комплексную экспоненту:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

В частности, тангенс выражается как дробно-линейная функция от e^{2ix} :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}.$$

Отметим также, что тригонометрические и гиперболические функции связаны соотношениями

$$\cos x = \operatorname{ch} ix, \quad \sin x = -i \operatorname{sh} ix, \\ \operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix, \quad \operatorname{ctg} x = i \operatorname{cth} ix,$$

что, в частности, объясняет связь разложений котангенса (15) и гиперболического котангенса (16).

Посмотрим на коэффициенты разложения в ряд в нуле таких функций. Дробно-линейные функции

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = A + \frac{B}{1 - Dx}, \\ A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{cd}, \quad D = -\frac{d}{c}$$

разлагаются по формуле геометрической прогрессии как

$$f(x) = A + \frac{B}{1 - Dx} = A + B \sum_{n=0}^{\infty} D^n x^n,$$

так что соответствующие коэффициенты являются просто степенной функцией параметра D .

Оказывается, что задача о разложении в нуле остальных функций, удовлетворяющих формулам сложения (26), естественно приводит к числам Бернулли и многочленам Эйлера, что дает новый взгляд на их природу.

Действительно, числа Бернулли появляются при разложении в ряд функции

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},$$

⁴ Доказательству этого утверждения был посвящен доклад ученика ФМШ №18 (также известной как Колмогоровский интернат) Алексея Каноненко на XVIII Празднике юных математиков в Батуми в 1986 году.

что эквивалентно разложению

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{n!},$$

начинаясь с x^{-1} (такие версии рядов Тейлора, содержащие отрицательные степени x , называются рядами Лорана).

С разложением тангенса поспложнее: его ряд Тейлора в нуле имеет вид

$$\operatorname{tg} u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (1 - 4^n)}{(2n)!} B_{2n} u^{2n-1}, \quad (27)$$

где B_{2n} – числа Бернулли. Доказательство следует из тождества

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{ctg} u - 2 \operatorname{ctg} 2u,$$

вытекающего из формулы удвоения для котангенса, и формулы (17).

Общий случай

$$f(x) = \frac{ae^{mx} + b}{ce^{mx} + d} = \frac{A}{e^{mx} - q} + B,$$

$$A = \frac{bc - ad}{c^2}, \quad q = -\frac{d}{c}, \quad B = \frac{a}{c}$$

сводится к разложению функции

$$f(x) = \frac{1}{e^x - q},$$

удовлетворяющей формуле сложения с

$$F(u, v) = \frac{uv}{1 + \frac{1+q}{2}(u+v)}.$$

Посмотрим на разложение в нуле

$$f(x) = \frac{1}{e^x - q} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(q) \frac{x^n}{n!}.$$

Полагая $x = 0$, получаем $C_0(q) = \frac{1}{1-q}$.

Продолжая далее, как и в случае чисел Бернулли, получаем рекуррентно

$$C_1 = -\frac{1}{(1-q)^2}, \quad C_2 = \frac{1+q}{(1-q)^3},$$

$$C_3 = -\frac{1+4q+q^3}{(1-q)^4}, \quad C_4 = \frac{1+11q+11q^2+q^3}{(1-q)^5}, \dots$$

Мы уже видели что-то похожее.

Да, это многочлены Эйлера! Более точно, имеет место равенство

$$C_m(q) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} n^m q^{n-1} = (-1)^m \frac{A_m(q)}{(1-q)^{m+1}}. \quad (28)$$

Для доказательства вспомним производящую функцию многочленов Эйлера (22):

$$\sum_{n \geq 0} A_n(q) \frac{t^n}{n!} = \frac{q-1}{q - e^{(q-1)t}}.$$

Подставляя сюда $t = \frac{x}{1-q}$, получаем

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{A_n(q)}{(1-q)^{n+1}} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{e^x - q},$$

что и доказывает равенство (28).

Интересно, что случай $q = 1$, отвечающий числам Бернулли, является критическим и требует отдельного рассмотрения. Но теперь по крайней мере связь многочленов Эйлера с числами Бернулли не выглядит столь загадочной.

Однако загадочной выглядит сама связь этой истории с формулами (или, как говорят

в математике, теоремами) сложения. Дальнейшее продумывание этой связи приводит к теории формальных групп и объясняет неожиданно важную роль чисел Бернулли в алгебраической топологии. Мы оставляем это за рамками этой статьи, отсылая заинтересованного читателя к статье [5].

Литература

1. С.Воронин, А.Кулагин. Метод производящих функций. – «Квант», 1984, №5.
2. С.К.Ландо. Лекции о производящих функциях. – М.: МЦНМО, 2007.
3. Б.Голубов. Что такое ряд Тейлора. – «Квант», 1979, №5.
4. Д.Кнут, Р.Грэхем, О.Паташник. Конкретная Математика. Основания Информатики. – М.: Бином, 2009.
5. А.П.Веселов. Числа Бернулли и формальные группы. – Математическое просвещение, сер.3, вып.33.

В декабре 2023 года физико-математическая школа-интернат имени А.Н.Колмогорова (СУНЦ МГУ) отпраздновала 60-й день рождения. «Квант» не раз рассказывал о ФМШ при МГУ, но связи между журналом и школой гораздо теснее. Иначе и не может быть, ведь создатели «Кванта» — выдающиеся ученые, академики Андрей Николаевич Колмогоров и Исаак Константинович Кикоин — были и создателями ФМШ. Многие из членов редколлегии журнала разных лет преподавали в интернате. Заместителями главного редактора работали Ю.П.Соловьев и Н.П.Долбилин, а в настоящее время — А.В.Устинов, в «математическую часть» редколлегии входили (и входят) А.Б.Сосинский, А.А.Егоров, В.В.Вавилов, А.П.Веселов, В.Н.Дубровский, А.Н.Земляков, а в физическую — Г.И.Косоуров, Я.А.Сморodinский, А.Р.Зильберман, автор и составитель множества выпусков Задачника «Кванта» по физике, С.Д.Варламов. Им принадлежит и множество опубликованных в «Кванте» статей. Всего же преподавателями и выпускниками интерната в нашем журнале напечатано более 200 статей по математике и почти 100 по физике. Избранные статьи по математике составили два сборника «Колмогоровской школе — пятьдесят» (131 и 132 выпуски серии «Библиотечка «Квант»).

«Квант» поздравляет преподавателей, учеников и выпускников СУНЦ МГУ с днем рождения школы и желает ей успехов в воспитании новых поколений ученых!

Таймер из фитилей

А.ЗАБОЛОТСКИЙ

ПРОДОЛЖАЕМ ГОВОРИТЬ ОБ интересных находках из Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей – OEIS. В этот раз речь пойдет не столько о последовательностях, сколько о задачах, с которыми они связаны.

Несколько фитилей

Известна такая головоломка: *Имеется зажигалка и два бикфордовых шнура, или, для краткости, фитиля. Каждый фитиль, будучи подожженным с одного любого конца, сгорает целиком ровно за 1 час, но горят фитили неравномерно, т.е. нельзя, например, разрезать часовой фитиль пополам и получить два получасовых. Требуется отмерить при помощи одних только этих фитилей интервал времени в 45 минут.*

Вот ее решение. Подожем одновременно один конец у первого фитиля и оба конца у второго. Второй фитиль сгорит ровно через полчаса, и в этот момент поджигаем второй конец первого фитиля; это вдвое ускорит его сгорание, так что оставшаяся часть сгорит за 15 минут. Таким образом, всего пройдет как раз 45 минут, или $3/4$ часа.

Заметим, что из-за неравномерности горения фитилей их нет смысла поджигать где-либо, кроме как с концов (часть фитиля будет гореть неизвестное количество времени). А поскольку из инструментов измерения времени у нас только фитили, то после первоначального поджигания поджигать новые концы фитилей можно только в момент догорания какого-то из предыдущих фитилей.

Зададимся вопросом: какие интервалы времени в принципе можно отмерить, имея n одинаковых фитилей?

С одним фитилем можно отмерить 1 час, если поджечь только один его конец, или $1/2$ часа, если поджечь сразу оба. С двумя фитилями возможны 5 интервалов: добавляются $3/4$ часа (обсуждалось выше), 2 и $3/2$ часа (спалить один целый фитиль после 1 и $1/2$ часа соответственно). Кроме того, если считать, что начало отмеряемого интервала времени не обязано совпадать с моментом поджигания первого фитиля, то добавляется интервал $1/4$ часа (от догорания первого фитиля до догорания второго при получении $3/4$ часа). С тремя фитилями можно отмерить 15 интервалов, 11 из которых – от момента поджигания первого фитиля. Попробуйте доказать это.

Таким образом, в зависимости от того, обязательно ли отмерять интервал времени от начала процедуры или нет, последовательность количества интервалов, которые можно отмерить с помощью 1, 2 и т.д. фитилей, начинается как 2, 5, 11, 23, ... или 2, 6, 15, 34, ... Эти последовательности содержатся в OEIS под номерами A283075 и A287012 соответственно; их вычисление может быть симпатичной задачей по программированию.

Зажигательные числа: неограниченное количество фитилей

Теперь забудем об ограниченном количестве фитилей – пусть их у нас сколь угодно много. Какие интервалы времени можно отмерить в этом случае?

Удобно считать, что мы всегда умеем отмерять нулевой интервал времени. Также можно сказать, что мы умеем отмерять интервал 1, и если мы умеем отмерять от момента поджигания первого фитиля интервалы x и y , то также умеем отмерять и интервал $x + y$. Если же вдобавок выполнено неравенство $|x - y| < 1$, то умеем отмерять и $(x + y + 1)/2$ – если зажжем один конец фитиля по прошествии x , а другой конец того же фитиля по прошествии y . В самом деле, скажем, при $y > x$ в момент времени y сгорит часть $y - x$ от этого фитиля, оставшаяся его часть будет сгорать вдвое быстрее, так что когда этот фитиль сгорит, наступит момент времени $y + (1 - (y - x))/2$ от начала процесса.

Все числа, которые можно получить таким образом, называются *зажигательными* (изначально по-английски – *fusible*). В частности, к зажигательным относятся упомянутые выше числа $1, 1/2, 3/4, 2$ и $3/2$, а также 0 . Что можно сказать про множество всех зажигательных чисел?

Поскольку каждое зажигательное число получается из 0 и 1 в результате конечного числа операций сложения и деления на 2 , то все зажигательные числа – двоично-рациональные, т.е. представимы в виде $m \cdot 2^{-k}$; здесь и далее k и m – целые неотрицательные числа. Количество зажигательных чисел бесконечно, но счетно.

Несложно доказать следующие факты (попробуйте).

Утверждение 1. Все числа вида $1 - 2^{-k}$ – зажигательные.

Утверждение 2. Все числа вида $m(1 - 2^{-k})$ – зажигательные.

Утверждение 3. Любое двоично-рациональное число представимо в виде разности двух чисел вида $m(1 - 2^{-k})$.

Если разрешить использовать в качестве начала отсчета времени не обязательно момент поджигания первого фитиля, а еще и момент догорания какого-то из фитилей, то станет возможно отмерить всевозможные разности зажигательных чисел (в частности, число $1/4$, упомянутое выше). Все такие числа тоже двоично-рациональные, а утверждение 3 гарантирует, что при таких условиях можно отмерить интервал длительностью в любое двоично-рациональное число.

Вернемся к отсчету времени от поджигания первого фитиля и к множеству зажигательных чисел. Оно исследовано в работе [1]. В OEIS задача о зажигательных числах непосредственно представлена последовательностью A188545, n -й член кото-

рой равен $-\log_2(f(n) - n)$, где $f(n)$ – наименьшее зажигательное число, превышающее n . Эта последовательность начинается со значений $1, 3, 10$, и на рисунке действительно можно видеть отрезки $(0; 0 + 2^{-1})$ и $(1; 1 + 2^{-3})$, не содержащие зажигательных чисел. Промежуток от 2 до $2 + 2^{-10}$ на этом рисунке увидеть уже нельзя, а следующий член последовательности (он соответствует $n = 3$) невероятно, колоссально, ужасающе велик – поменьше знаменитого числа Грэма и некоторых других ужасно больших чисел, но гораздо больше, например, гуголплекса ($10^{10^{100}}$). Иными словами, между числом 3 и следующим зажигательным числом невероятно маленький промежуток. Плотность зажигательных чисел нарастает очень быстро при продвижении по числовой оси.

Присмотримся повнимательнее к зажигательным числам на отрезке $[0; 1)$.

Утверждение 4. Указанные в утверждении 1 числа вида $1 - 2^{-k}$ составляют все зажигательные числа на отрезке $[0; 1)$ – других нет.

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи. Пусть для определенности всегда $x \geq y \geq 0$.

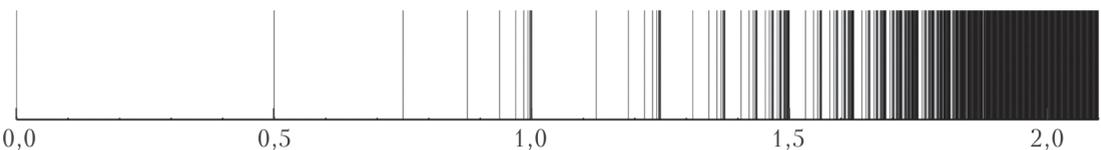
Если $x = 1 - 2^{-k}$ и $y = 0$, то $(x + y + 1)/2 = 1 - 2^{-(k+1)}$.

Если $x = 1 - 2^{-k}$ и $y = 1 - 2^{-l}$ при $k \geq l > 0$, то $(x + y + 1)/2 = 3/2 - 2^{-(k+1)} - 2^{-(l+1)} \geq 1$.

Если $x \geq 1$, то $(x + y + 1)/2 \geq 1$.

Стало быть, операция $(x + y + 1)/2$ либо приводит к числу именно вида $1 - 2^{-k}$, либо выводит нас за пределы отрезка $[0; 1)$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, на отрезке $[0; 1)$ имеется бесконечное множество зажигательных



Зажигательные числа

чисел, у которого есть предельная точка (т.е. точка, в любой окрестности которой бесконечное множество зажигательных чисел) 1 – тоже зажигательное число.

В процессе доказательства мы увидели, что числа вида $3/2 - 2^{-(k+1)} - 2^{-(l+1)}$ при $k \geq l > 0$ – зажигательные. Попробуйте провести аналогичные рассуждения и доказать, что на отрезке $[1; 3/2)$ нет других зажигательных чисел. Получается, что на отрезке $[1; 3/2)$ есть бесконечная последовательность предельных точек $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{8}$, $1\frac{7}{16}$, ..., которая сама по себе сходится к предельной точке $3/2$. Как описать столь хитро устроенное множество?

Ординалы

Эта часть сложнее предыдущих, но понятие *ординала* – из тех, о которых полезно прочесть несколько раз в разное время в разных местах, чтобы постепенно разобраться и оценить красоту и разнообразие этих объектов.

Есть разные способы классификации бесконечных множеств, которые можно использовать для их сравнения в каком-то разумном смысле. Например, можно разделить множества на счетные и несчетные, и в рамках этой классификации несчетные бесконечные множества в каком-то смысле больше счетных, а все счетные множества имеют одинаковый «размер». Возможны и более тонкие классификации, если мы что-нибудь знаем про множество. В частности, примечателен случай, когда множество вполне упорядоченное, т.е. любые два элемента можно сравнить и сказать, который из них больше, причем у любого непустого подмножества можно указать минимальный элемент. Множество натуральных чисел – вполне упорядоченное. Множество слов длиной до 20 букв, записываемых алфавитом из 33 букв, – тоже вполне упорядоченное, если снабдить его алфавитным порядком. Множество чисел вида $1 - 2^{-k}$ тоже вполне упорядоченное. А вот множество всех целых чисел – нет, поскольку у него нет минимального элемента.

Если мы абстрагируемся от всего, что знаем о множестве, кроме порядка его элементов, то разница между множествами натуральных чисел и чисел вида $1 - 2^{-k}$ исчезнет: и в том, и в другом множестве есть наименьший элемент, следующий за наименьшим элементом и т.д. Говорят, что эти два множества принадлежат к одному и тому же порядковому типу (а вышеупомянутое множество слов – конечное и потому принадлежит к другому типу). Порядковый тип вполне упорядоченных множеств коротко называется ординалом. Конкретно порядковый тип множества натуральных чисел – это ординал ω .

Опишем еще несколько ординалов, каждый из которых в определенном смысле больше предыдущего.

Если добавить к счетному множеству один элемент, оно останется счетным. Но если добавить к вполне упорядоченному множеству один элемент, то его порядковый тип может измениться или остаться прежним в зависимости от того, куда именно этот элемент добавлен. Если добавить к множеству натуральных чисел еще одно любое действительное число, например $3/2$, то порядковый тип останется тем же самым; однако если добавить «число», которое больше всех натуральных чисел, то получившееся множество относится уже к новому порядковому типу $\omega + 1$. А к множеству чисел вида $1 - 2^{-k}$ мы можем добавить число 1 (или любое большее 1), и тогда тоже получится множество с порядковым типом $\omega + 1$.

Возьмем два множества с порядковым типом ω , скажем «обычные натуральные числа» и «козырные натуральные числа», и объявим, что любое козырное число больше любого обычного (а натуральные числа одинаковой «масти» сравниваются обычным образом). Получится тип $\omega + \omega$, или $\omega \cdot 2$. Такой же тип имеет множество зажигательных чисел на отрезке $[0; 5/4)$, т.е. числа вида $1 - 2^{-k}$ («обычные») и $3/2 - 2^{-(k+1)}$ («козырные»).

Теперь возьмем «натуральные числа 1-го ранга», «натуральные числа 2-го ранга» и так далее до бесконечности; считаем, что

число более высокого ранга всегда больше (например, число 5 третьего ранга больше, чем миллион первого ранга, но меньше, чем число 6 третьего ранга). Такое множество уже относится к ординалу $\omega \cdot \omega$, или ω^2 . Такой же тип имеет множество «слов» из двух «букв» из бесконечного алфавита, и такой же тип имеет множество зажига- тельных чисел на отрезке $[0; 3/2)$ или $[1; 3/2)$.

В [1] доказано, что множество всех зажига- тельных чисел вполне упорядоченное и его порядковый тип – ординал $\epsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$. Иными словами, с точки зрения ординалов, зажига- тельных чисел довольно много, куда «больше», чем, скажем, натуральных.

Подробнее об ординалах можно прочи- тать, например, в книге [2].

Обобщение результатов работы [1] на случай функции $(x_1 + \dots + x_n + 1)/n$ вместо $(x + y + 1)/2$ рассмотрено в статье [3]; имен- но ее авторы предложили русскоязычный термин «зажигательные числа».

Литература

1. J. Erickson, G. Nivasch, J. Xu. Fusible numbers and Peano arithmetic. – Logical Methods in Computer Science, vol. 18, 2022, issue 3, p. 1–26.

2. Н.К. Верецагин и А.Шень. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 2017.

3. A. I. Bufetov, G. Nivasch, F. Pakhomov. Generalized fusible numbers and their ordinals. – Annals of Pure and Applied Logic, vol. 175, 2023, issue 1, part A.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

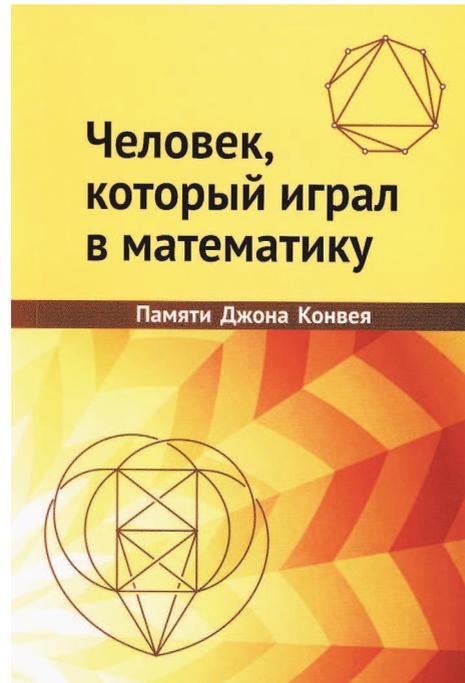
Математики, которые играли в математику

Книга, о которой пойдет речь, представля- ет собой сборник статей.¹ В первой части собраны статьи о Джоне Хортоне Конвее, а в остальные части входят статьи его самого, сгруппированные по темам:

- Вокруг арифметики
- Универсальные квадратичные формы
- На плоскости и в пространстве
- Квантовая механика и свобода воли
- Игры Конвея

Читатели журнала «Квант» уже знакомы с играми Конвея по статье В. Клепцына, опубликованной в «Кванте» №5 за 2020 год, она так и называется «Игры Джона Кон- вея». И если вы пока еще не играли, то немедленно поиграйте. А книга расскажет подробнее и о жизни Конвея, и о его матема- тике. Вы узнаете о становлении ученого, попробуете на вкус математические изюмин- ки, окупаетесь в философские размышления о свободе воли, просто поиграете в математи- ку. И конечно, ближе познакомитесь с Кон- веем.

¹ Человек, который играл в математику / Сборник статей под редакцией А.В. Устинова. – М.: МЦНМО, 2023.



Больше других своих результатов Конвей выделял два: теорему о свободе воли и построение сюрреальных чисел. Об этих числах есть прекрасная книга Дональда Кнута. А вот

теорема о свободе воли не так хорошо знакома нашим читателям; в сборнике ей отведен специальный отдел. Это не философский, а математический результат, относящийся к физике элементарных частиц.

Конвей не обсуждает, есть у нас свобода воли или все в этом мире предопределено. Он показывает: «если существуют экспериментаторы хотя бы с каплей свободной воли, то и элементарные частицы должны иметь свою долю этого ценного блага». Свободу воли авторы рассматривают не во всех мыслимых формах, но лишь как условие того, что экспериментатор может свободно выбрать, какое из нескольких наблюдений выполнить, этот выбор не предопределен предыдущей историей.

Автор вводит три физические аксиомы — о спинах частиц и о том, что скорость передачи информации ограничена. Исходя из аксиом и наличия свободы выбора у экспериментатора, он делает вывод о том, что тогда и у частицы есть «свобода воли» — в том смысле, что отклик частицы тоже не предопределен предыдущей историей.

Этой теореме совершенно необязательно было давать громкое название, оно не столько передает смысл, сколько привлекает внимание. В сборнике вы встретите еще много таких ярких и даже романтических терминов, которые Конвей ввел в математику. Он играет в нее на разных уровнях — и на уровне слов тоже.

Тот, кто хочет приобщиться к математике в стиле Конвея, может начать со статьи «Триангуляции многоугольников и фризы». Здесь предложено поэтапное исследование, посильное школьнику. Свойства фризос строятся в большой серии содержательных, но не таких уж сложных задач и вопросов.

Вот пример, для которого достаточно понимать, что фриз — это числовая таблица особого вида. Посмотрите на три фризса на рисунке 1. Конвей ставит вопрос: какое арифметическое (в терминах сложения и умножения) условие удовлетворяется каждым из предыдущих числовых фризос? Подсказка: посмотрите на «ромбы» на рисунке 2. Это условие будет удобно назвать *унимодулярным*.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	1	3	1	3	1	3	1	...
2	2	2	2	2	2	2	2	2
...	3	1	3	1	3	1	3	...
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	1	2	5	3	2	1	2	...
...	1	2	3	1	1	2	...	
1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	1	3	2	2	1	1	4	1
1	2	5	3	1	1	3	7	2
...	1	3	7	1	2	3	5	3
2	1	4	2	1	1	3	2	2
...	1	1	1	1	1	1	1	...

Рис. 1

2	5
5	3
7	3
	4
	7

Рис. 2

Вам предлагается рассмотреть и найти полезную взаимосвязь (это то, чем математики занимаются часто). Поскольку текст учебный, вам подсказывают, куда именно смотреть. Автор играет и здесь — на уровне изложения — и к тому же доверяет вам, поэтому не указывает это свойство, а говорит: то, что вы заметили, называется *унимодулярностью*.

Книга подойдет любителям математики. Многие статьи доступны старшеклассникам. В конце — совет от Конвея, как заниматься математикой:

«Всегда думайте о шести вещах сразу. Не обязательно совсем одновременно, но вот у вас есть задача, вы не продвигаетесь в ней — и у вас есть другая задача, на которую вы переключаетесь. У меня получалась смесь разных задач: одна из них могла быть из кроссворда или вроде того. В наши дни она могла бы быть из sudoku. Одна из задач может быть такова, что ее решение немедленно сделало бы меня знаменитым, а я не рассчитываю ее решить, но и не сдаюсь — имеет смысл попытаться. Также должна быть одна задача, где вы определенно можете продвинуться просто за счет интенсивной работы. И когда нарастает чувство вины — а я в Кембридже чувствовал угрызения совести, когда не делал никакой работы, — вы можете продвинуться в этой задаче. В стандартной задаче, не совсем бессмысленной и, возможно, полезной. Вот мой рецепт успеха».



Дональд Кнут многим известен как автор многотомника «Искусство программирования» и создатель системы TEX для верстки математических текстов.

Полвека назад за обедом Конвей рассказал Кнуту о сюрреальных числах. В это множество входят не только привычные нам действительные числа, но и много других, которые условно можно назвать «бесконечностями». Для них определены операции сложения, умножения, извлечения корня (как бы вы определили корень бесконечной степени из бесконечности?)...

У Кнута была только идея, которую Конвей набросал на салфетке. Кнут захотел самостоятельно ее развить и написать книгу об этом — книгу, которая открывала бы кухню математического творчества.²

По сюжету юноша и девушка на необитаемом острове нашли скрижаль с аксиомами:

«Вначале земля была пуста и безвидна, и Дж.Х.Конвей начал творить числа. Конвей сказал: “Да будут два правила, которые рождают все числа, большие и маленькие.

Да будет первое правило:

Каждому числу соответствуют два множества ранее сотворенных чисел, так что в левом множестве нет ни одного элемента, больше или равно какому-нибудь элементу в правом множестве.

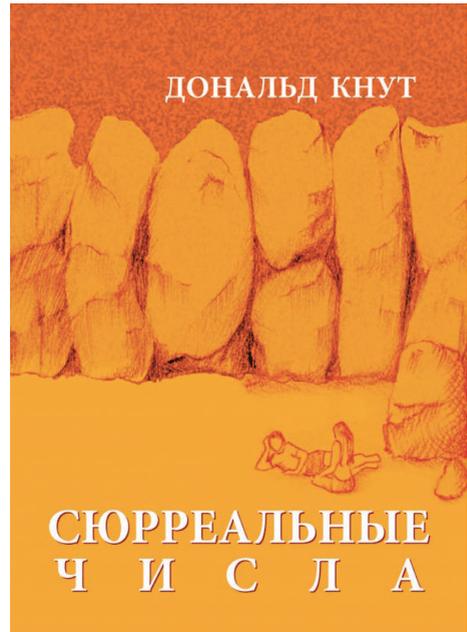
Да будет второе правило:

Одно число меньше или равно другому, если и только если в левом множестве первого числа нет ни одного элемента, больше или равно второму числу, и в правом множестве второго числа нет ни одного элемента, меньше или равно первому числу”.

И Конвей испытал эти два правила, которые он придумал, и они были хороши».

Герои книги уясняют аксиомы, пытаются вывести из них следствия, совершают ошибки, обдумывают их и делают выводы, строят гипотезы и изучают их... — идет живой процесс математического исследования.

Кнут снял в гостинице номер на неделю и начал работу. Каждый день он по кирпичикам строил свою математику, наблюдал за



процессом, отмечал вопросы, сомнения и ошибки, которые возникали по дороге, записывал, как он с ними справлялся. И каждый вечер на этом материале писал книгу. Кнут планировал написать ее за 7 дней, но справился за 6, увидел, что получилось хорошо, и на седьмой день отдыхал.

С карандашом и бумагой каждый читатель может, работая вместе с героями Кнута, открыть эти сюрреальные числа для себя самостоятельно. Книга подойдет увлеченным старшеклассникам, которым математика интересна сама по себе, а не только как инструмент для решения задач из других областей. Вряд ли ее можно одолеть за неделю, но это прекрасный вариант, например, летнего чтения — понемногу каждый день. Материала книги хватит на полгода или даже год занятий в математическом кружке не олимпиадного, а исследовательского направления.

Н. Шихова

² Д.Кнут. Сюрреальные числа — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2770 – M2772 предлагались на XLV Турнире городов, задача M2774 предлагалась на Южно-российской математической олимпиаде «Ассара», а задачи M2776 и M2777 предлагались на июньских учебно-тренировочных сборах кандидатов в команду на Международную математическую олимпиаду.

Задачи Ф2777–Ф2784 предлагались участникам отборочных туров олимпиады «Физтех-2024». Автор этих задач – В.Плис.

Задачи M2770–M2777, Ф2777–Ф2784

M2770. В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $1/6$.

А.Юран

M2771. Для какого наибольшего N существует N -значное число со следующим свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?

А.Глебов

M2772. В белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и черные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?

А.Грибалко

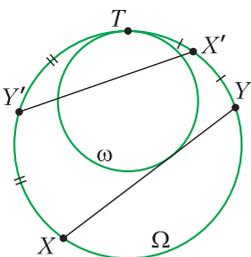


Рис. 1

M2773. Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается ее внутренним образом в точке T (рис. 1). Пусть XY –

переменная хорда окружности Ω , касающаяся ω . Обозначим X' и Y' середины дуг TY и TX , не содержащих точек X и Y соответственно. Докажите, что всевозможные прямые $X'Y'$ проходят через фиксированную точку.

Ф.Петров

M2774. В клетчатом квадрате 50×50 каждая клетка покрашена в один из 100 данных цветов так, что все цвета присутствуют и из квадрата нельзя вырезать одноцветную доминошку (т.е. прямоугольник 1×2). Галия хочет перекрасить все клетки одного из цветов в другой цвет (из данных 100 цветов) так, чтобы по-прежнему нельзя было вырезать одноцветную доминошку. Верно ли, что Галия наверняка сможет это сделать?

Г.Шарафетдинова

M2775. Существует ли бесконечная периодическая последовательность цифр, для которой выполнено условие: для любого натурального n из этой последовательности цифр можно вырезать (как подслово) натуральное число, делящееся на 2^n ?

П.Кожевников

M2776*. В стране ходят n валют, пронумерованных от 1 до n ; в каждой валюте возможны лишь целые неотрицательные

суммы денег. У человека в любой момент может быть лишь одна валюта. В обменнике человек может обменять все имеющиеся у него деньги из валюты i на валюту j по курсу α_{ij} : если у него было d единиц валюты i , он взамен получает $\alpha_{ij}d$ единиц валюты j , при этом это число округляется до ближайшего целого (число вида $t - 1/2$ округляется до t при целом t). При этом $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ и $\alpha_{ii} = 1$ (числа α_{ij} – положительные вещественные). Может ли в такой стране (хотя бы при каком-то n) найтись человек, могущий разбогатеть неограниченно (т.е. чтобы для любого числа D человек мог через несколько обменов получить больше чем D единиц некоторой валюты)?

И. Богданов

M2777*. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник P , обладающий центром симметрии O . Докажите, что в P можно поместить ромб так, чтобы его образ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 2 содержал P .

И. Богданов, С. Герджиков (Болгария), Н. Николов (Болгария)

Ф2777. Белка, сидящая на ветке дерева, кидает орешек мышонку, находящемуся на горизонтальной поверхности. Через некоторое время орешек падает на поверхность у лап мышонка. Направление «от белки на мышонка» составляет угол β с вертикалью. Начальная скорость орешка наименьшая в таком полете. Какой угол α вектор начальной скорости орешка образует с горизонтом? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Ф2778. Из жесткой однородной проволоки длиной L изготовлен обруч. В первом опыте обруч кладут плашмя на шероховатую горизонтальную поверхность и ударом приводят в поступательное движение с некоторой горизонтальной скоростью. В процессе торможения перемещение каждой точки обруча равно s . Во втором опыте (рис. 2) обруч устанавливают на ту же

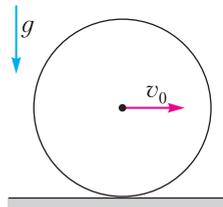


Рис. 2

поверхность, удерживая его в вертикальной плоскости, и ударом приводят в поступательное движение; в начальный момент все точки обруча движутся с той же горизонтальной скоростью, что и в первом опыте. Известно, что в процессе скольжения угловое ускорение постоянно и равно $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{a}{R}$, где a – модуль ускорения центра масс обруча. Какое число оборотов в системе центра масс совершит обруч к тому моменту времени, когда движение обруча перейдет в качение без проскальзывания? Коэффициент трения скольжения обруча по горизонтальной поверхности одинаков во всех точках этой поверхности.

Ф2779. В вертикальном цилиндре под легким подвижным поршнем содержится некоторое количество одноатомного идеального газа. Газ медленно нагревают. В процессе расширения газ совершает работу $A = 10U_0$, где U_0 – внутренняя энергия газа в начальном состоянии. Найдите отношение средних чисел соударений атомов газа со стенками в расчете на единицу площади за единицу времени в начальном и конечном состояниях. Трение считайте пренебрежимо малым.

Ф2780. В процессе нагревания газообразного гелия в количестве $\nu = 1$ моль молярная теплоемкость газа растет с абсолютной температурой T по закону $C = R \frac{T}{T_1}$, где $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная, $T_1 = 400$ К – начальная температура. Найдите работу газа к тому моменту, когда объем газа станет минимальным.

Ф2781. Сфера радиусом $R = 8$ см однородно заряжена по поверхности. Мысленно рассечем заряженную сферу на две части плоскостью, проходящей на расстоянии $d = 2$ см от центра сферы. На каком расстоянии r от центра сферы за ее пределами лежит точка, в которой обе части однородно заряженной сферы создают одинаковые векторы напряженности электрического поля?

Ф2782. В электрической цепи (рис. 3) все элементы идеальные. Известны емкость конденсатора $C = 80 \text{ мкФ}$, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 150 \text{ В}$, отношение сопротивлений $\frac{r}{R} = 0,25$. До замыкания ключа конденсатор не

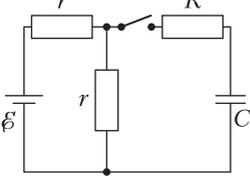


Рис. 3

был заряжен. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R после замыкания ключа к моменту, когда ток, текущий на конденсатор, станет нулевым?

Ф2783. Планета «Фантазия» – однородный шар. У этой планеты есть магнитное поле, сходное с земным. Вблизи магнитных полюсов планеты линии индукции магнитного поля направлены по вертикали, поле однородное. Для определения величины индукции B в этой области ученик бросает заряженный шарик со скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Через некоторое время шарик возвращается в точку старта. За время полета проекция шарика на горизонтальную плоскость совершила $n = 2$ оборота. Найдите величину B индукции магнитного поля. Отношение заряда шарика к его массе $\frac{q}{m} = 2 \cdot 10^6 \text{ Кл/кг}$. Ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = 8 \text{ м/с}^2$. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

Ф2784. Заряженная частица влетает в область пространства, где созданы однородные электрическое и магнитное поля. Если частица влетает в эту область со скоростью v в направлении, показанном стрелкой 1 на рисунке 4, она движется в этой области равномерно и прямолинейно. Если же частица влетает в область электрического и магнитного полей с той же по модулю скоростью в направлении, показанном стрелкой 2, то частица

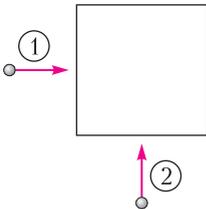


Рис. 4

тоже движется в этой области равномерно и прямолинейно. Модуль напряженности электрического поля E . Найдите магнитную индукцию B . Направления, задаваемые стрелками 1 и 2, взаимно перпендикулярны.

Решения задач М2758–М2761, Ф2765–Ф2768

М2758. Числа $2, 4, 8, 16, \dots, 2^{100}$ написаны на доске. За один ход можно стереть два числа a, b и заменить их на число $\frac{ab}{a+b}$. Докажите, что в конечном итоге на доске останется одно число, большее 1.

Заметим, что в процессе выполнения данных операций сумма чисел, обратных к написанным, не изменяется. Действительно, пусть за один ход два числа a, b заменили на число $c = \frac{ab}{a+b}$. Тогда

$$\frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

Пусть z – число, оставшееся на доске после выполнения 99 ходов. Тогда

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{100}} = 1 - \frac{1}{2^{100}}.$$

Видим, что $0 < \frac{1}{z} < 1$. Отсюда $z > 1$.

П. Кожевников

М2759. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E (рис. 1). Биссектриса угла BEC пересекает основания BC и AD в точках X и Z . Серединный перпендикуляр к отрезку XZ пересекает боковые стороны AB и CD в точках Y и T . Докажите, что $XYZT$ – ромб.

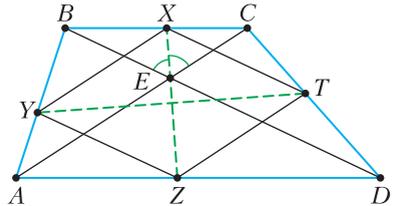


Рис. 1

Докажите, что $XYZT$ – ромб.

Вначале вспомним, что для любого выпуклого четырехугольника $ABCD$ есть семей-

ство вписанных в него параллелограммов со сторонами, параллельными диагоналям AC и BD . Действительно, возьмем на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно точки K, L, M, N так, что $AK/KB = CL/LB = CM/MD = AN/ND = \lambda$ (рис. 2). Тогда согласно теореме о пропорциональных отрезках имеем

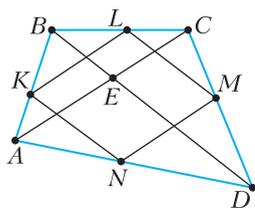


Рис. 2

$$KL \parallel AC \parallel MN \text{ и } LM \parallel BD \parallel NK.$$

Покажем, что в этом семействе параллелограммов есть единственный ромб. Из подобия треугольников AKN и ABD имеем $KN/BD = AK/AB = \lambda/(1 + \lambda)$, откуда $KN = \frac{\lambda BD}{1 + \lambda}$. Аналогично, из подобия треугольников BKL и BAC выводим, что $KL = \frac{AC}{1 + \lambda}$. Получается, что условие $KN = KL$ (эквивалентное тому, что параллелограмм $KLMN$ – ромб) равносильно равенству $\lambda BD = AC$. Итак, $KLMN$ является ромбом при $\lambda = AC/BD$.

Вернемся к задаче. Пусть $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$ и ромб $KLMN$ вписан в $ABCD$, как показано выше (так, что $\lambda = AC/BD$). Покажем, что тогда данный в условии задачи четырехугольник $XYZT$ совпадает с $KLMN$.

Действительно, из подобия треугольников BEC и DEA получаем, что $AE/ED = CE/EB = AC/BD = \lambda$. Тогда по свойству биссектрисы $AZ/ZD = CX/XB = \lambda$, поэтому $X = L$ и $Z = N$. Так как $KLMN$ – ромб, то K и M – точки пересечения серединного перпендикуляра к LN (или XZ) со сторонами AB и CD . Поэтому $Y = K, T = M$, что завершает решение.

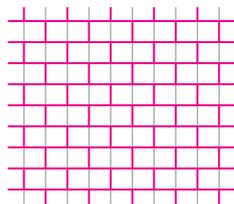
В дополнение отметим следующий факт, который несложно доказать: для любого четырехугольника $ABCD$ во вписанном в него ромбе $KLMN$, о котором шла речь выше, диагонали KM и LN параллельны биссектрисам угла между прямыми AC и BD .

П. Кожевников

М2760. Клетчатую плоскость разбивают (по клеткам) на доминошки (прямоугольники 2×1 и 1×2). При каком наибольшем k всегда можно выбрать клетчатый квадрат 100×100 , содержащий не менее k целых доминошек?

Ответ: при $k = 4950$.

Пример. Разобьем плоскость на горизонтальные доминошки «кирпичной кладкой» (см. рисунок). Тогда границу каждого квадрата 100×100 пересекают 100 доминошек и в каждом квадрате 100×100 будет $(100^2 - 100)/2 = 4950$ целых доминошек.



Оценка. Достаточно доказать, что всегда можно выбрать квадрат 100×100 , граница которого пересекает не более 100 доминошек. Предположим противное – пусть границу каждого квадрата 100×100 пересекает не менее 101 доминошек.

Выделим на плоскости клетчатый квадрат $N \times N$, где N – большое число (насколько N велико, будет видно из дальнейшего). Рассмотрим все $(N - 101)^2$ квадратов 100×100 , лежащих строго внутри нашего квадрата $N \times N$. Так как границу каждого из них пересекает не менее 101 доминошек, то суммарное количество S пересекающихся пар «граница–доминошка» не меньше чем $101 \cdot (N - 101)^2$.

Каждая доминошка, пересекающаяся хотя бы с одной из рассматриваемых границ квадратов 100×100 , целиком лежит в квадрате $N \times N$, поэтому таких доминошек не более $N^2/2$. Каждую такую доминошку пересекает не более 200 из рассматриваемых границ квадратов 100×100 (разрез доминошки может совпасть с одним из 200 положений единичного отрезка на границе квадрата 100×100). Это дает оценку сверху $S \leq 200 \cdot N^2/2 = 100N^2$.

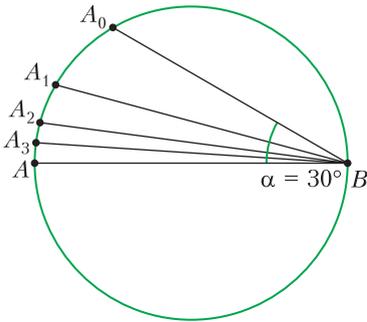
Таким образом, $101 \cdot (N - 101)^2 \leq 100N^2$, или $(1 - 101/N)^2 \leq 100/101$, что при достаточно большом N неверно. Противоречие.

С. Берлов

М2761. Можно ли в окружность радиуса 1 вписать правильный многоугольник так, чтобы среди длин его диагоналей нашлось 2023 различных, в произведении дающих 1?

Ответ: можно.

Рассмотрим диаметр AB . Отметим точку A_0 на окружности такую, что $\angle BAA_0 = 30^\circ = \alpha$ (см. рисунок). Пусть A_1 – се-



дина меньшей дуги AA_0 , A_2 – середина меньшей дуги AA_1 , A_3 – середина меньшей дуги AA_2 и т.д. Тогда $BA_i = 2 \sin \angle BAA_i = 2 \cos \angle BAA_i = 2 \cos \frac{\alpha}{2^i}$.

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} \Pi &= BA_1 \cdot BA_2 \cdot BA_3 \cdot \dots \\ &\dots \cdot BA_n \cdot AA_n = \left(2 \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \dots \\ &\dots \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{\alpha}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Множкратным применением формулы двойного угла $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ преобразуем произведение:

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \dots \\ &\dots \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{\alpha}{2^n}\right) = \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \dots \\ &\dots \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{2^{n-2}}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{\alpha}{2^{n-2}}\right) = \dots = 2 \sin \alpha = 1. \end{aligned}$$

Ясно, что $BA_1, BA_2, \dots, BA_n, AA_n$ – диагонали правильного $(3 \cdot 2^{n+2})$ -угольника, у которого A и B – противоположные верши-

ны. В частности, при $n = 2022$ мы получаем требуемый пример.

А. Кузнецов

Ф2765. На гладкую горизонтальную поверхность положили маленький шарик массой m . К нему прикрепили легкую нерастяжимую нить, переброшенную через легкий блок пренебрежимо малого радиуса, на другом конце которой подвесили груз массой M

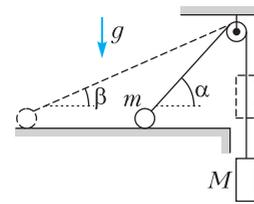


Рис. 1

(рис. 1). Систему отпустили из состояния покоя (изображенного на рисунке пунктирной линией). В некоторый момент времени, когда нить наклонена к горизонту под углом α , шарик отрывается от поверхности, а ускорение груза в этот момент времени равно нулю. Трение в оси блока отсутствует.

1) Найдите отношение m/M .
2) Найдите $\sin \beta$ – синус угла наклона нити к горизонту в начальный момент времени.

1) Введем систему координат xu так, как показано на рисунке 2. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y для шарика и груза, принимая во внимание, что в момент отрыва ускорение груза, а значит, и вертикальная проекция ускорения шарика равны нулю:

$$mg - T \sin \alpha = 0,$$

$$Mg - T = 0.$$

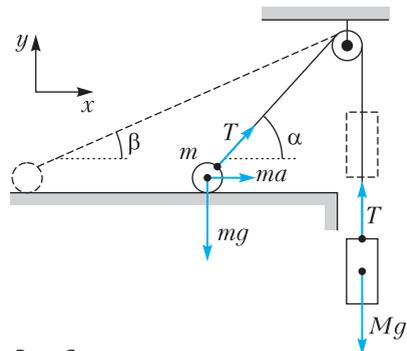


Рис. 2

Исключая из этих уравнений силу натяжения T , находим отношение масс:

$$\frac{m}{M} = \sin \alpha.$$

2) Пусть v и u – скорости шарика и груза соответственно в рассматриваемый момент, а h – высота блока над поверхностью. Поскольку нить нерастяжима,

$$v = \frac{u}{\cos \alpha},$$

а так как трения в системе нет, выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = -Mg\Delta l,$$

где $\Delta l = h(1/\sin \alpha - 1/\sin \beta)$ – изменение длины наклонного участка нити. Подставляя отношение m/M и соотношения между скоростями в последнее уравнение, получим

$$\frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{mgh}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\sin \beta} - \frac{1}{\sin \alpha} \right),$$

откуда

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{v^2 (\sin \alpha + \cos^2 \alpha)}{2gh}.$$

Таким образом, задача сводится к определению безразмерного параметра gh/v^2 , для чего проанализируем динамику шарика. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на горизонтальную ось x :

$$ma_x = ma = T \cos \alpha,$$

$$a = \frac{T \cos \alpha}{m} = \frac{g \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Введем ось z , направленную вдоль наклонного участка нити от шарика к блоку (т.е. образующую угол α с горизонтом). Проекция ускорения шарика на эту ось равна

$$a_z = a \cos \alpha = \frac{g \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Перейдем в систему отсчета точки A наклонного участка нити, в которой он касается блока. Ускорение шарика $\vec{a}_{\text{отн}}$ в данной системе отсчета равно

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a} = \vec{a}_A.$$

Поскольку ускорение груза равняется нулю, тангенциальное ускорение точки A также равняется нулю, откуда следует, что полное ускорение точки A направлено перпендикулярно наклонному участку нити. Тогда в рассматриваемой системе отсчета

$$a_{\text{отн}z} = a_z.$$

В системе отсчета точки A шарик движется по окружности радиусом $l = h/\sin \alpha$, равным длине наклонного участка нити, со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$, равной проекции скорости шарика на ось, перпендикулярную оси z . Поэтому из выражения для центростремительного ускорения получим

$$a_{\text{отн}z} = \frac{v_{\perp}^2}{l} = \frac{v^2 \sin^3 \alpha}{h}.$$

Приравнявая a_z и $a_{\text{отн}z}$, находим

$$\frac{gh}{v^2} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Подставляя в выражение для $1/\sin \beta$, получим

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha (\sin \alpha + \cos^2 \alpha)}{2 \sin^4 \alpha},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{2 \sin^4 \alpha}{\sin \alpha + \sin^3 \alpha + \cos^4 \alpha}.$$

И.Юдин

Ф2766. Герметично закрытый с обоих концов теплоизолированный цилиндр расположен горизонтально. Внутри цилиндра находится непроводящий тепло легкий вертикальный поршень площадью S , делящий цилиндр на два отсека. Поршень может перемещаться внутри цилиндра без трения. Отсеки заполнены идеальным одноатомным газом при давлении p_0 . В первый отсек помещен нагреватель, по которому может поступать тепло, во втором отсеке размещен теплообменник, с помощью которого тепло отводится из отсека. Модули мощностей подвода и отвода тепла равны q_1 и q_2 соответственно. Нагреватель и теплообменник приводят в действие одновременно. Все процессы считать равновесными.

(Продолжение см. на с. 34)

Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию моих сот.

Пчела («Тысяча и одна ночь»)

Тело, висящее как гибкая цепь, в перевернутом состоянии имеет форму арки.

Роберт Гук

Любой звук, произведенный в здании, довольно долго раздается по окончании звучания источника; вследствие многократных отра-

жений, он несколько раз обходит кругом здания...

Роберт Вуд

Симметрия... есть идея, с помощью которой человек веками пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство.

Герман Вейль

Сначала, когда мы взяли модель собора, сделанного из настоящих спичек, и настоящую Землю, то все было отлично и устойчиво. Но потом, когда мы увеличили собор, то должны увеличить и Землю!..

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + АРХИТЕКТУРА?

Когда заходит речь об архитектуре, как правило, в памяти возникает прежде всего целый ряд гармоничных, классических, можно сказать, сувенирных образов – дворцов, усадеб, соборов. Но это всего одна, эстетическая сторона такой многообразной области человеческой деятельности, как зодчество. Другая, может быть не столь возвышенная, земная ее сторона – это воплощение замыслов архитекторов, требующее основательной инженерно-технической подготовки, знания статики и акустики, геодезии и гидравлики, материаловедения и светотехники.

Какая же это уникальная профессия – архитектор! И чтобы освоить ее, придется научиться не только чертить и рисовать, но и развивать пространственное воображение – а это геометрия, уметь вычислять – а это алгебра и математический анализ, да и решать физические – куда уж без этого! – задачи. Их же немало разбросано по всем разделам школьного курса физики, требуется лишь должная выборка.

Вопросы и задачи

1. Почему в жарких странах, например в Иране, традиционные постройки размещают группами?
2. Высокие здания с проемами на первых этажах непригодны для ветреных районов. Отчего?

3. При проектировании железнодорожного моста один конец его стальной фермы закрепляли, а второй помещали на передвигающуюся тележку. В чем смысл такой операции?

4. Плотность используемого для теплоизоляции пенопласта меняется в широких пределах в зависимости от объема его пор. А зависит ли теплопроводность пенопласта от его плотности?

5. Почему вытяжку в кухне располагают у потолка?

6. Хорошо ли инфракрасные лучи проходят через стекло? А ультрафиолетовые? Какое это имеет значение, если стекло используют при постройке зданий?

7. Почему нефтехранилища на крупных предприятиях почти всегда делают цилиндрическими (а иногда даже шарообразными), а не в виде, например, куба, что технологически было бы гораздо удобнее?

8. Несколько одинаковых пирамидок с квадратным основанием изготовлены из материала плотностью $1,5 \text{ г/см}^3$. Из них можно собрать кубик с длиной ребер 4 см так, что внутри него не будет полостей. Какова масса одной пирамидки?

9. Останкинская телебашня высотой 540 метров имеет массу (без фундамента) более 30 тысяч тонн, а ее верхушка в ветреную погоду колеблется с амплитудой несколько метров. Что же придает башне устойчивость?



10. Эйфелева башня высотой 300 метров имеет массу 7200 тонн. Какую массу будет иметь модель этой башни высотой 30 сантиметров, сделанная из вещества, плотность которого в 3 раза меньше плотности материала башни?

11. Построенный почти 2000 лет назад купол римского Пантеона имеет диаметр 43,2 метра, а его вес 4535 тонн. Как удалось распределить в нем внутреннее давление?

12. В 1985 году во время сильного землетрясения в Мехико разрушались здания высотой в 7–8 этажей, хотя оставались целыми здания в 4–5 и 10–12 этажей. Чем это можно объяснить?

Микроопыт

Сможете ли вы (очень осторожно!) поставить стол ножками на четыре сырых куриных яйца? Предварительно для устойчивости вертикального положения яиц их надо снабдить снизу резиновыми или пластилиновыми колечками. Если, надемся, опыт удался, то что он подтвердил?

Любопытно, что...

... развитие городов требовало постройки сооружений для подвода и отвода воды. Задолго до новой эры в городе Мохенджо-Даро на берегу Инда имелись водопровод и канализация для сброса дождевой воды, а Греция славилась публичными банями с совершенной сантехнической системой.

... Галилею удалось понять, что прочность материалов изменяется не в прямой пропорции с их размерами. Он был настолько потрясен своим открытием, что считал его столь же важным, как и открытие законов движения.

... знакомый школьникам по одному из газовых законов французский физик Эдм Мариотт занимался еще и теорией изгиба балок, внося поправки в исследования Галилея, а проектируя водопровод для Версальского дворца, изучал прочность труб на разрыв.

... великий английский ученый Роберт Гук был и талантливым зодчим – по его проектам был возведен ряд общественных зданий. А важное открытие, касающееся использования цепных кривых в архитек-

туре (см. эпиграф), было сделано им в 1671 году.

... выдающийся физик Джон Рэлей показал в 1877 году, что задачу о колебаниях сложной системы можно свести к исследованию колебаний с одной степенью свободы. Усовершенствованный позже, этот метод получил большое применение в решении задач теорий сооружений.

... строители и архитекторы издавна и с охотой возводят дома на песке. А в 1885 году английский физик Осборн Рейнольдс объяснил, когда и почему песчинки приходят в состояние наиплотнейшего расположения и грунт приобретает все свойства твердого тела.

... использование арочных конструкций позволило к концу XIX века создавать гигантские сооружения. Например, к Парижской всемирной выставке 1889 года был построен Дворец машин – в те времена самое большое по пролету здание, занимающее в плане 421×115 метров.

... один из узнаваемых архитектурных символов Москвы – 150-метровая башня, построенная по проекту инженера и ученого В.Г. Шухова. Ее конструкция состоит из шести секций, собранных из прямых стальных балок, расположенных по образующим гиперboloидов.

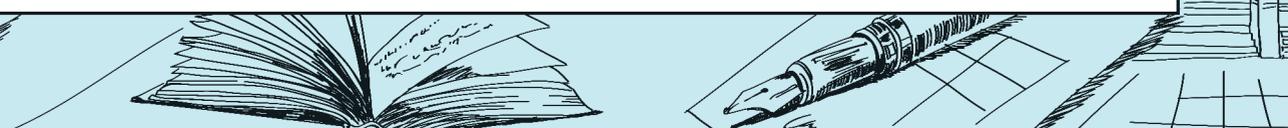
... за несколько последних десятилетий сложилась отрасль новой архитектуры, занимающейся теорией и практикой проектирования и строительства жилой среды в космическом пространстве. Прежде всего, это разработки концепции орбитальных станций и кораблей для исследования Луны и Марса.

Что читать в «Кванте» о союзе физики и архитектуры

(публикации последних лет)

1. «Аплодисменты здесь тихие» – 2016, №3, с. 34;
2. Калейдоскоп «Кванта» – 2019, №2, с. 32;
3. «Шуховские башни» – 2022, №3, с. 2;
4. «Башня Толи Втулкина» – 2022, №9, с. 26;
5. «Фризы» – 2023, №2, с. 2.

Материал подготовил А. Леонович



(Начало см. на с. 26)

В пунктах 1 и 2 считайте, что первоначальные объемы отсеков равны.

1) Определите скорость перемещения поршня в начальный момент времени – сразу после включения нагревателя и теплообменника.

2) Определите скорость перемещения поршня в момент времени, когда поршень делит объем цилиндра в отношении 2 : 1, если модули мощностей q_1 и q_2 одинаковы и равны q .

3) Пусть в начальный момент времени поршень делит объем цилиндра в отношении 3 : 1, а во втором (меньшем) отсеке вместо теплообменника установлен нагреватель мощностью q_2 . Определите отношение q_2/q_1 , при котором поршень останется неподвижным.

1) По условию поршень легкий и перемещается в сосуде без трения. Следовательно, в любой момент времени давление газа по обе стороны от поршня одинаково. Для объемов отсеков V_1 и V_2 справедливо равенство $V_1 + V_2 = 2V_0$, где V_0 – начальный объем отсека. Рассмотрим процесс, происходящий с газом за малый промежуток времени Δt , и запишем первое начало термодинамики для каждого отсека:

$$q_1 \Delta t = \frac{3}{2} \nu_1 R \Delta T_1 + p \Delta V,$$

$$-q_2 \Delta t = \frac{3}{2} \nu_2 R \Delta T_2 - p \Delta V.$$

Теперь запишем для каждого отсека уравнение Менделеева–Клапейрона и выразим изменение температуры:

$$pV_1 = \nu_1 RT_1,$$

$$pV_2 = \nu_2 RT_2,$$

откуда

$$\nu_1 R \Delta T_1 = p \Delta V + V_1 \Delta p,$$

$$\nu_2 R \Delta T_2 = -p \Delta V + V_2 \Delta p.$$

Отсюда получим

$$q_1 \Delta t = \frac{3}{2} V_1 \Delta p + \frac{5}{2} p \Delta V,$$

$$-q_2 \Delta t = \frac{3}{2} V_2 \Delta p - \frac{5}{2} p \Delta V.$$

Сложим и вычтем друг из друга эти урав-

нения:

$$(q_1 - q_2) \Delta t = 3V_0 \Delta p, \quad (*)$$

$$(q_1 + q_2) \Delta t = \frac{3}{2} (V_1 - V_2) \Delta p + 5p \Delta V.$$

Тогда для начального момента ($p = p_0$, $V_1 = V_2 = V_0$) получим

$$(q_1 + q_2) \Delta t = 5p_0 \Delta V.$$

Отсюда, учитывая, что $\Delta V = S v_0 \Delta t$, найдем начальную скорость поршня v_0 :

$$v_0 = \frac{q_1 + q_2}{5p_0 S}.$$

2) Если $q_1 = q_2 = q$, то задача упрощается: $p = p_0 = \text{const}$, $2q \Delta t = 5p_0 \Delta V$. Это означает, что скорость движения поршня постоянна и равна

$$v = \frac{2q}{5p_0 S}.$$

3) Если отношение объемов $V_1 : V_2 = 3 : 1$, то $V_1 = 3V_0/2$, $V_2 = V_0/2$. Поскольку поршень в этом пункте задачи неподвижен, объем обоих отсеков со временем не меняется. Перепишем уравнения (*), изменив знак у q_2 и учитывая, что в каждом отсеке происходит изохорный процесс ($\Delta V = 0$):

$$(q_1 + q_2) \Delta t = 3V_0 \Delta p,$$

$$(q_1 - q_2) \Delta t = \frac{3}{2} V_0 \Delta p.$$

Отсюда получаем

$$\frac{q_1 + q_2}{q_1 - q_2} = 2, \quad \frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{3}$$

А.Аполонский

Ф2767. В упрощенной модели источник постоянного тока состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения U_0 и резистора сопротивлением r (рис. 1). При подключении источника постоянного тока

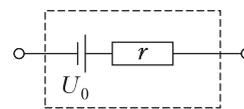


Рис. 1

в цепь, содержащую резисторы сопротивлением $R \ll r$, можно считать, что сила тока $I_0 \approx U_0/r$. Электрическая цепь (рис. 2) представляет со-

бой проволочную сетку, которая состоит из звеньев одинакового сопротивления R . Три звена заменены на одинаковые источники постоянного тока I_0 . Найдите,

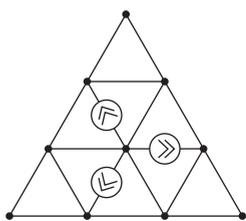


Рис. 2

через какие звенья цепи течет минимальный ток и чему равна его сила I_{\min} . Ответ выразите только через I_0 .

Первое решение. Заметим, что схема переходит сама в себя при повороте на 120° вокруг центрального узла. У всех источников постоянного тока один узел общий, а вторые узлы подключены к эквипотенциальным точкам. Значит, через источники протекают одинаковые токи, при этом равные I_0 (рис. 3), поскольку $R \ll r$. Также из симметрии следует, что должны быть равны и токи I_1 (рис. 4), втекающие в центральный узел. Алгебраическая сумма токов для центрального узла равна нулю, значит $I_1 = I_0$.

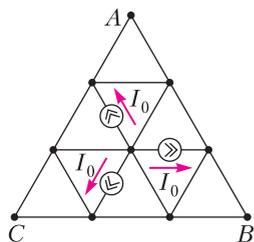


Рис. 3

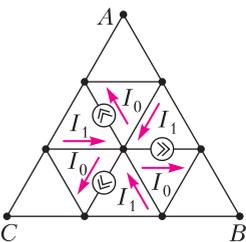


Рис. 4

Расставим токи, текущие через элементы цепи, находящиеся в вершине A (рис. 5), в силу симметрии такие же токи протекают через элементы, находящиеся в вершинах B и C . Пусть через каждый из оставшихся элементов цепи протекает некоторый ток I_2 . Так как схема симметрична, потенциалы узлов A и C равны, а значит, разность потенциалов $\varphi_C - \varphi_A = 0$, или

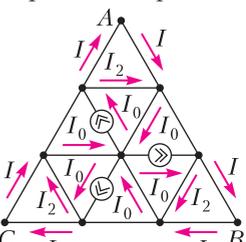


Рис. 5

$$IR - I_2R + IR = 0, \quad I_2 = 2I.$$

Тогда

$$I_0 = I + 2I + 2I = 5I, \quad I_{\min} = I = \frac{I_0}{5}.$$

Второе решение.

Расставим по переключкам цепи токи I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 (рис. 6). Потенциал в центральной точке цепи примем равным нулю. Запишем разность потенциалов между узлами 3 и 1:

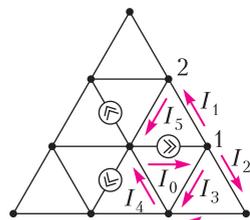


Рис. 6

$$\Delta\varphi_{13} = RI_3 = RI_2 + RI_2 = 2RI_2, \quad I_3 = 2I_2.$$

В силу симметрии цепи, $\varphi_2 = \varphi_3$ (при повороте на 120° цепь переходит сама в себя), поэтому

$$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{13}, \quad RI_1 = RI_3, \quad I_1 = I_3.$$

Запишем закон сохранения заряда для узла 1:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = 2I_3 + I_2 = 5I_2, \quad I_2 = \frac{I_0}{5} = I_{\min}.$$

А.Вергунов

Ф2768. В непрозрачном плоском слое толщиной h просверлено отверстие, форма боковой поверхности которого представляет собой усеченный конус с диаметрами оснований d и D , ось которого перпендикулярна плоским поверхностям слоя (рис. 1). Боковая поверхность конуса посеребрена и идеально отражает падающий на нее свет. За слоем на расстоянии L от ближайшей к нему плоской поверхности находится плоский экран. Система освещается параллельным потоком света, направленным вдоль оси конуса. Геометрические параметры h, d, D и L связаны соотношениями $D \ll h \ll L, D = 4d$.

- 1) Изобразите картину, наблюдаемую на экране. На рисунке укажите все характерные геометрические размеры.
- 2) Как изменится картина из пункта 1, если между слоем и экраном поместить тонкую собирающую линзу? Фокусное расстояние линзы $F = L/2$, главная опти-

ческая ось линзы совпадает с осью конуса, экран расположен в фокальной плоскости линзы.

Примечание. Все характерные геометрические размеры должны быть выражены через d , h и L .

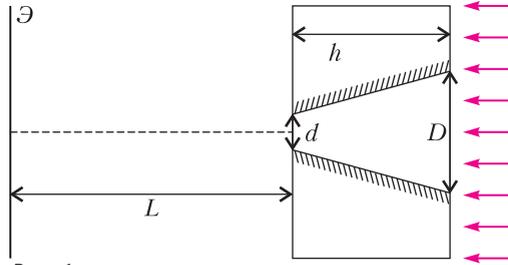


Рис. 1

1) Рассмотрим пучок лучей падающих на правое (по рисунку 1) основание конуса диаметром D . Часть лучей, идущих в пределах круга диаметром d с центром на оси конуса, проходят без препятствий и образуют на экране круглое пятно того же диаметра. Остальные лучи, прошедшие через входное сечение конуса, испытывают не менее одного отражения от боковой поверхности конуса. Поскольку оптическая схема имеет осевую симметрию, то эти испытавшие отражения лучи будут образовывать кольца с центром в точке пересечения экрана осью конуса. Выясним количество и геометрию этих колец (радиусы и ширину колец, а также возможность их перекрытия друг с другом).

Первое решение. Рассмотрим луч, падающий на самый край входного сечения конуса. До попадания на экран он испытает максимальное количество отражений от боковой поверхности конуса. После каждого отражения от зеркальной поверхности угол между лучом и осью конуса увеличивается на 2α , где $\text{tg } \alpha = \frac{D-d}{2h} = \frac{3d}{2h}$.

Применим для определения числа отражений известный в оптике метод, когда вместо отражения луча от поверхности и изменения его направления рассматривают прямую линию луча, отражая вместо него в границе раздела область пространства. При этом вместо ломаной и равнобокой

трапеции, соответствующей осевому сечению конуса, получится луч и система трапеций. Малые и большие основания трапеций при этом почти соответствуют сторонам многоугольников, вписанных в две концентрические окружности (рис. 2).

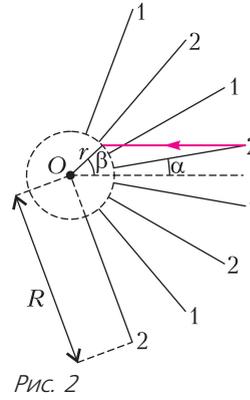


Рис. 2

радиус внутренней r и внешней R окружностей определяются из соотношений $d = 2r \sin \alpha$ и $D = 2R \sin \alpha$. Тогда отношение радиусов окружностей равно отношению соответственных диаметров конуса: $R = 4r$. Также

несложно получить такое соотношение:

$$h = (R - r) \cos \alpha = 3r \cos \alpha.$$

Пусть угол, который образует выбранный луч с радиусом в точке пересечения внутренней окружности, равен β , тогда $\sin \beta = 4 \sin \alpha$. Искомое число отражений луча равно целой части отношения:

$$x = \frac{\beta + \alpha}{2\alpha}.$$

Если применить условие $D \ll h$, получим, что $\beta \ll 1$, следовательно, $\beta \approx 4\alpha$ и $x \approx 2,5$. Численное значение величины x можно использовать для нахождения числа колец и их ширины. Целая часть соответствует числу полных колец ширины d (вместе с центральным пятном диаметром d). Дробная часть соответствует ширине (в единицах d) последнего неполного наблюдаемого кольца наибольшего радиуса. Таким образом, при $x = 2,5$ на экране помимо центрального пятна наблюдается еще два кольца (рис. 3).

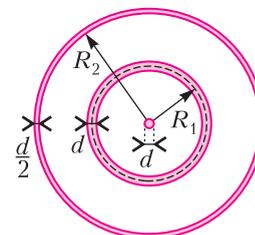


Рис. 3

Первое кольцо имеет ширину d (полное) и радиус средней линии

$$R_1 = 2\alpha L = \frac{3dL}{h}.$$

Второе кольцо имеет ширину $d/2$, что

соответствует дробной части числа x , и радиус внешней границы

$$R_2 = 4\alpha L = \frac{6dL}{h}.$$

Второе решение. Рассмотрим влияние «конического зеркала» на параллельный его оси пучок световых лучей. Учитывая очевидную симметрию картины относительно вращений вокруг оси конуса, рассмотрим одно его осевое сечение и лучи, падающие только на одну из боковых сторон получившейся в сечении трапеции. Обозначим угол полураствора конуса α .

Из геометрии находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D-d}{2h} = \frac{3d}{2h}$. Так как $D \ll h$, то α и все углы того же порядка можно считать малыми. Тогда $\alpha = \frac{3d}{2h}$.

Ясно, что лучи, не испытавшие отражения от поверхности конуса, продолжат идти параллельно его оси и образуют на экране круглое пятно диаметром d . Лучи, испытавшие одно отражение и попавшие после этого в выходное отверстие, будут идти

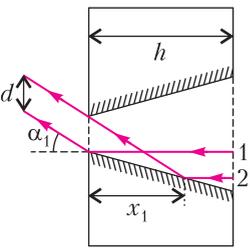


Рис. 4

под углом $\alpha_1 = 2\alpha$ к оси. Зона отражения этих лучей (x_1) определяется по точке отражения «крайнего» луча 2 (рис. 4). С учетом малости углов легко найти ширину этой зоны:

$$x_1(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha) = d, \quad x_1 \approx \frac{d}{\alpha} \approx \frac{2h}{3}.$$

Данная группа лучей образует на экране кольцо (см. рис. 3) ширины d с центром на оси и радиусом средней линии

$$R_1 = \alpha_1 L = \frac{3dL}{h}.$$

Далее, рассуждая аналогично, мы понимаем, что каждое дополнительное отражение увеличивает угол наклона луча к оси еще на 2α . Рассмотрим лучи, отразившиеся от конической поверхности отверстия дважды (рис. 5). Они выйдут из пластины под углом $\alpha_2 = 4\alpha$ и образуют на экране следу-

ющее кольцо. Найдем расстояние x_2 между точками и первого отражения пограничных лучей из этой группы.

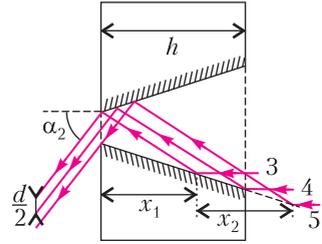


Рис. 5

Так как $\alpha \ll 1$, то с хорошей точностью $x_2 = x_1 = 2h/3$. Заметим, что $x_1 + x_2 = 4h/3 > h$. Это означает, что лучи, испытавшие два отражения, пересекают не всю площадь выходного отверстия. По крайним лучам этой группы (3 и 4) можно определить толщину второго кольца: $d_2 = d/2$ и радиус его внешней границы:

$$R_2 = \frac{6dL}{h}.$$

2) Поместим посредине между пластиной и экраном тонкую линзу (рис. 6). По усло-

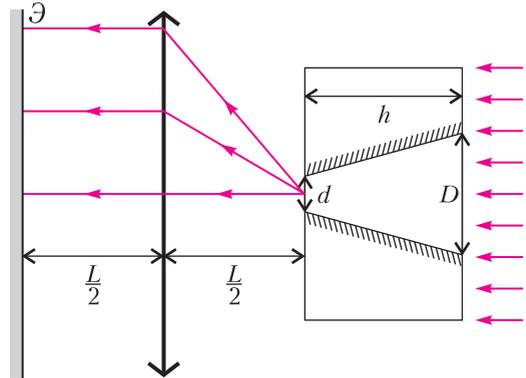


Рис. 6

вию $L = 2F$, значит, плоскость экрана является для линзы фокальной и параллельные пучки лучей сфокусируются. Центральное пятно превратится в точку (не в математическом смысле, а в физическом, поскольку дифракционные явления принципиально ограничивают минимальный размер области фокусировки), а кольца – в окружности. Радиусы окружностей (бывших колец) уменьшатся вдвое:

$$R'_1 = \alpha L = \frac{3dL}{2h} \quad \text{и} \quad R'_2 = 2\alpha L = \frac{3dL}{h}.$$

А.Аполонский

Задачи

1. Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различ-



ны и каждая является либо суммой, либо разностью двух других цифр числа.

Н.Агаханов

2. Поверхность куба $2 \times 2 \times 2$ разбита на единичные квадратные клетки и оклеена в один слой бумажными фигурками, каждая из которых покрывает три клетки. Клетки фигурок окрашены белым и черным цветом. Оказалось, что



каждая грань куба целиком белая или черная, а если фигурки развернуть на плоскости, то не найдется одинаковых по форме и окраске. Может ли белых и черных граней быть не поровну?

А. Шаповалов

3. Царь пригласил несколько придворных мудрецов и огласил правила ново-

Задача 1 предлагалась на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады по математике в Московской области. Задачи 2–4 предлагались на XXVIII Турнире математических боев имени А.П.Савина.



го испытания. Каждому из них на лоб будет наклеена бумажка с целым числом, причем числа будут последовательными. Каждый мудрец будет видеть все числа, кроме своего. После этого они все должны будут произнести по одной фразе. Если мудрец не может точно определить свое число, то он должен сказать об этом, а если может — должен назвать число. Однако порядок, в котором мудрецы будут говорить, заранее не известен ни им, ни царю — он будет определен жребием. Оказалось, что как бы ни выпал жребий, хотя бы один мудрец не сможет назвать свое число. При каком наибольшем количестве мудрецов такое возможно?

А. Грибалко

4. Верно ли, что любой прямоугольный треугольник можно с помощью циркуля и линейки разбить на два меньших, в которых найдется по равной биссектрисе?

А. Шаповалов,



КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest
Желаем успеха!*

9. В полдень из пункта А в пункт Б выехали велосипедисты Алеша и Вася, а навстречу им из пункта Б в пункт А – велосипедисты Боря и Гриша. Каждый ехал с какой-то постоянной скоростью. Спустя какое-то время все четверо одновременно встретились, после чего Алеша и Гриша поехали в пункт А, Боря – в пункт Б, а Вася – в один из этих пунктов, причем он приехал четвертым (позже всех). Каким по счету приехал Гриша?

Т.Казицына, Б.Френкин

10. На шахматной доске 8×8 на клетке с4 стоит фишка. Сколько есть способов поставить на доску 9 не бьющих друг друга ладей? (Ладья бьет клетки в своей строке и в своем столбце, но не бьет через фишку.)

П.Кожевников

11. Перед вами и зрителями выложат несколько монет. Вам по секрету скажут про каждую монету, какая у нее масса, а зрителям откроют лишь, что масса каждой монеты 2 г или 3 г, а вместе их масса N г. Всегда ли вы сможете сделать перед зрителями всего одно взвешивание на чашечных весах без гирь, после которого они тоже поймут про все монеты, какая у какой монеты масса? Ответьте на вопрос задачи: а) для $N = 77$, б) для всех N .

А.Грибалко

12. В ряд написаны 9 единиц. Можно ли между некоторыми из этих единиц поста-

вить три плюса так, чтобы полученное в результате число было полным квадратом? Ответ положителен:

$$111 + 11 + 11 + 11 = 144 = 12^2.$$

Пусть теперь в строку написаны 2023 единицы. Можно ли между некоторыми из этих единиц поставить k плюсов так, чтобы полученное в результате число было полным квадратом? Решите задачу для: а) $k = 6$; б) $k = 5$.

С.Костин

13. Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось придумать конечную арифметическую прогрессию, у которой первый член, разность и количество членов равны по модулю, а сумма всех членов равна 2023. Не обманывает ли барон?

(Конечная арифметическая прогрессия – это такая последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, в которой разность $d = a_k - a_{k-1}$ между соседними числами одинакова для всех k от 2 до n ; она называется разностью прогрессии.)

С.Костин

14. По кругу стоят 7 диванов, на них сидит всего 50 человек, на каждом диване – хотя бы один человек. Каждый сказал: «На следующем по часовой стрелке диване ровно половина людей выше меня ростом, а ровно половина – ниже». Какое наибольшее число людей могло сказать правду?

Т.Казицына

15. Внутри квадрата со стороной, равной диагонали прямоугольника 1×3 клеточки, отметили три угла – красный, синий и зеленый, как показано на рисунке 1. Чему равна их сумма?

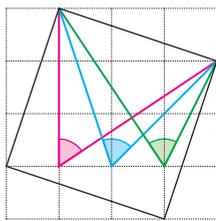


Рис. 1

К. Кноп

16. Квадрат 2023×2023 покрашен в красный цвет. Два игрока ходят по очереди. Первый игрок при своем ходе любую фигуру в виде буквы Т или в виде буквы Z, если все клетки этой фигуры красные, может перекрасить в желтый цвет. Второй

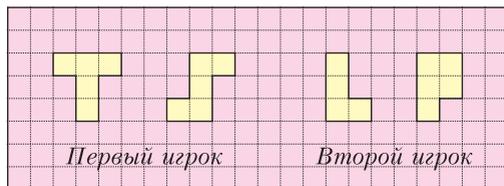


Рис. 2

игрок при своем ходе любую фигуру в виде буквы L или в виде буквы P, если все клетки этой фигуры красные, может перекрасить в желтый цвет. Все перечисленные фигуры изображены на рисунке 2 (каждую из них можно произвольно поворачивать и переворачивать). Проигрывает тот из игроков, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

С. Костин

ИТОГИ КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА 2022/23 УЧЕБНОГО ГОДА

Победители

Лучшие результаты показали

Чалык Павел – Балаково Саратовской области, гимназия 2, 11 кл.,

Часовских Иван – Химки Московской области, школа 14, 9 кл.,

команда 9А класса Академического лицея (Магнитогорск):

Полужетов Дмитрий, Фахрутдинов Тимур,

Новиков Александр, Викторов Михаил.

Призеры

Также высоких результатов достигли

Белов Лев – Москва, школа 1547, 8 кл.,

Приходько Тамара – Красноярск, школа 3, 10 кл.,

Савин Михаил – Протвино Московской области, Лицей, 9 кл.

Поздравляем!

Победителям и призерам высланы дипломы журнала «Квант» и призы от издательства МЦНМО. Помимо этого, призы получили также наиболее активные участники конкурса.

Дифракционные решетки

П. КРЮКОВ

НА МОСКОВСКОЙ ОЛИМПИАДЕ школьников 2023 года одиннадцатиклассникам была предложена задача по волновой оптике, в которой речь шла о различных дифракционных решетках. Формулировка задачи опубликована в «Кванте» №5 за 2023 год. Коротко напомним ее.

В первой части задачи рассматривается одномерная дифракционная решетка, представляющая собой непрозрачную пластинку, в которой с пространственным периодом D сделаны N ($N \gg 1$) узких прорезей (штрихов) толщиной h (рис. 1). Обратите внима-

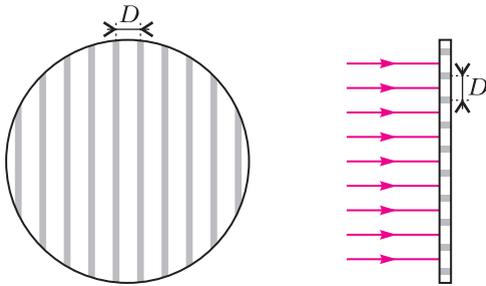


Рис. 1

ние, на рисунке прорези показаны серым. Известно, что $h = 0,2D$, при этом $N \gg 1$, поскольку решетка содержит 100 штрихов на миллиметр, а диаметр лазерного луча, которым она освещается, равен $d_0 = 2$ мм. Диск, изображенный на рисунке 1, символизирует область, занятую лазерным излучением с длиной волны $\lambda = 532$ нм. Свет падает на решетку нормально, а дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии $L = 3$ м от решетки параллельно ей.

Вопрос первой части задачи – о количестве светлых пятен на экране и о расстоянии между соседними пятнами – не слишком интересен. На него можно ответить на основе известной школьной формулы, определяю-

щей направления на главные максимумы:

$$D \sin \theta_n = n\lambda.$$

Интереснее наложение двух одномерных решеток, формирующих двумерную решетку, которая рассматривается во второй части задачи. Пусть штрихи одной решетки располагаются горизонтально, а штрихи другой составляют угол α с горизонтальной прямой. В результате получается непрозрачная пластинка, на которой периодически распределяются прозрачные области в виде параллелограммов. Схематично такая пластинка показана на рисунке 2, темные параллелограммы символизируют прозрачные области. При освещении такой двумерной решетки лазером на экране наблюдается система светлых пятен. Пусть на экране задана система координат x, y , направление осей x и y совпадает с направлением осей на рисунке, начало координат находится в центре экрана. Требуется определить координаты светлых пятен на экране, учитывая те пятна, для которых углы дифракции можно считать малыми. Иначе говоря, следует описать дифракционную картину вблизи начала координат.

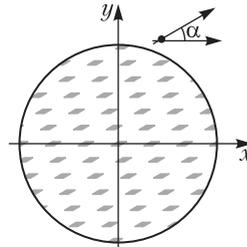


Рис. 2

Сначала рассмотрим случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Будем считать прозрачные области в виде параллелограммов точечными источниками. Координаты этих источников равны

$$x_n = nD, y_m = mD,$$

где m и n – произвольные целые числа. Предположим, что в точку экрана с координатами (x, y) на экране попадают два луча: один идет из центра решетки, т.е. из точки с координатами $(0, 0)$, а другой идет из точки с координатами (x_n, y_m) . Считая координаты x и y , а также x_n и y_m малыми по сравнению с расстоянием до экрана L , получим для разности хода этих лучей приближенную формулу

$$\Delta l(n, m) = \frac{x D n + y D m}{L},$$

при выводе которых были сделаны приближенные преобразования такого типа:

$$\sqrt{L^2 + x^2 + y^2} \approx L \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2L^2} \right).$$

Отметим также, что слагаемыми, пропорциональными D^2 , можно пренебречь по сравнению со слагаемыми, пропорциональными Dx или Dy . Дифракционные максимумы будут наблюдаться в точках с координатами (x, y) , для которых одновременно выполняются равенства

$$\lambda n_1 = \Delta l(n+1, m) - \Delta l(n, m) = \frac{x D}{L},$$

$$\lambda m_1 = \frac{y D}{L}.$$

Таким образом, для координат максимумов имеем такие формулы:

$$x = \frac{L \lambda}{D} n_1, \quad y = \frac{L \lambda}{D} m_1,$$

где n_1 и m_1 – целые числа. Дифракционная картина будет представлять собой совокупность светлых точек, расположенных в узлах квадратной сетки с периодом $\frac{L \lambda}{D} \approx 15$ см.

Если одна решетка повернута относительно другой на угол α , координаты точечных источников в плоскости решетки оказываются такими:

$$x' = \frac{n D}{\sin \alpha} + \frac{m D}{\sin \alpha} \cos \alpha,$$

$$y' = \frac{m D}{\sin \alpha} \sin \alpha = m D.$$

Рассуждая аналогично предыдущему пункту, для разности хода получим подобное соотношение:

$$\Delta l(n, m) = \frac{D}{L \sin \alpha} (x n + x m \cos \alpha + y m \sin \alpha).$$

Из этой формулы следует, что максимумы в этом случае будут наблюдаться в точках с координатами, удовлетворяющими уравнениям

$$\frac{n_1 \lambda L \sin \alpha}{D} = x,$$

$$\frac{m_1 \lambda L \sin \alpha}{D} = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Решая эту систему, определяем координаты

максимумов:

$$x = \frac{n_1 \lambda L}{D} \sin \alpha,$$

$$y = -\frac{n_1 \lambda L}{D} \cos \alpha + \frac{m_1 \lambda L}{D},$$

где n_1 и m_1 – целые числа.

Если ввести в рассмотрение векторы

$$\vec{a} = \frac{D}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{D}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix},$$

то радиус-вектор некоторой прозрачной области будет определяться формулой

$$\vec{r}_{nm} = n \vec{a} + m \vec{b}.$$

С другой стороны, если определить пару других векторов формулами

$$\vec{A} = \frac{\lambda L}{D} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \frac{\lambda L}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

то получится, что координаты светлых пятен на экране, или максимумов дифракционной картины, даются формулой $\vec{R}_{n_1 m_1} = n_1 \vec{A} + m_1 \vec{B}$. Обратите внимание на тот факт, что векторы \vec{a} и \vec{B} ортогональны, как и пара векторов \vec{b} и \vec{A} . При этом справедливы равенства для скалярных произведений:

$$\vec{a} \cdot \vec{A} = \vec{b} \cdot \vec{B} = \lambda L.$$

Векторы \vec{A} и \vec{B} можно рассматривать как базисные для построения узлов сетки, дающей дифракционную картину. В качестве упражнения рекомендуем изобразить дифракционную картину для угла $\alpha = 30^\circ$.

Теперь рассмотрим последнюю часть задачи. В ней рассматривается гитарная струна с оплеткой, представляющая собой отражательную дифракционную решетку. Оплетка – это тонкая проволока, навитая в один слой виток к витку на сердечник струны

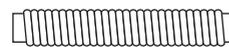


Рис. 3

(рис. 3). При освещении горизонтально расположенной струны лучом лазерной указки, направленным под небольшим углом к горизонтали (рис. 4), на вертикальном экра-

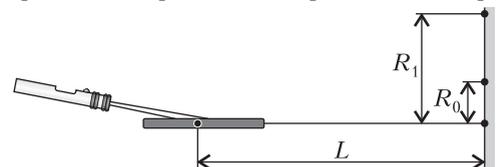


Рис. 4

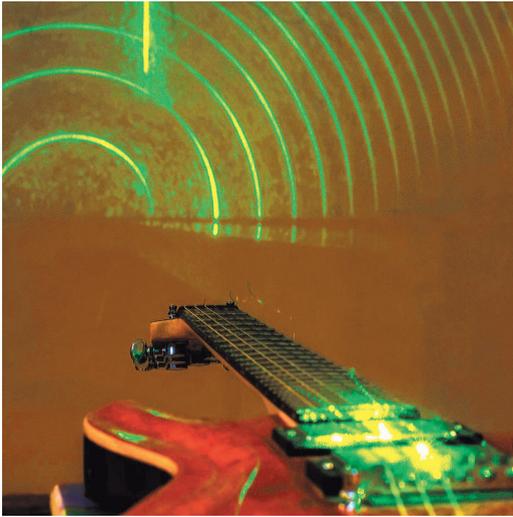


Рис. 5

не, находящемся в 2–3 метрах от струны, наблюдается дифракционная картина в виде концентрических полуокружностей (рис. 5).

В эксперименте были измерены следующие величины: расстояние от точки падения лазерного луча на струну до стены $L = 2$ м, радиусы первых двух полуокружностей $L_0 = 4$ см, $R_1 = 12,5$ см. «Первых двух» означает наименьшей и следующей по размеру.

Использовался тот же лазер, что и в предыдущих пунктах. Требовалось найти диаметр проволоки оплетки.

Для отражательной решетки можно легко получить следующее условие максимумов:

$$D(\cos \theta_0 - \cos \theta_n) = n\lambda,$$

где θ_0 – угол между падающим лучом и плоскостью решетки (в нашем случае между лучом и струной), θ_n – угол, определяющий максимум n -го порядка (отсчитывается также от струны). Максимум нулевого порядка соответствует углу θ_0 . Косинусы углов θ_0 и θ_1 выражаются через радиусы следующим образом:

$$\cos \theta_0 = \frac{L}{\sqrt{R_0^2 + L^2}}, \quad \cos \theta_1 = \frac{L}{\sqrt{R_1^2 + L^2}}.$$

Подставляя эти значения в формулу для максимумов, для периода решетки получаем

$$D = \frac{\lambda}{\frac{L}{\sqrt{R_0^2 + L^2}} - \frac{L}{\sqrt{R_1^2 + L^2}}}.$$

Расчет, сделанный по этой формуле, дает значение $D \approx 0,3$ мм. Это и есть приближенное значение диаметра проволоки оплетки.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Как заставить капли дождя лететь вверх, или Секрет стробоскопа

А. ИВАНОВ

ВЫ ЗАДУМЫВАЛИСЬ КОГДА-НИБУДЬ над вопросом, могут ли капли дождя замереть на месте или вовсе лететь

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20231105>

вверх к облакам, как, например, это было в фильме «Иллюзия обмана 2». Казалось бы, это невозможно, однако наш мозг довольно легко обмануть и вполне возможно сделать так, чтобы капли летели вверх. Это становится выполнимым с помощью специального устройства – стробоскопа.

Стробоскоп – это прибор, позволяющий быстро воспроизводить повторяющиеся яркие световые импульсы с заданной частотой. Он был изобретен в 1832 году Жозефом Плато. Стробоскоп зачастую представляет собой матрицу из светодиодов и генератора электрических импульсов с регулируемой частотой. Современный стробоскоп часто используется на дискотеках и концертах. А как же стробоскоп может помочь в нашем случае?

Попробуем остановить дождь

Давайте рассмотрим модель дождя как установку, которая выпускает одинаковые капли с определенной частотой N (рис. 1, а). Если поставить стробоскоп, настроенный на ту же частоту N или N/k , где k – натуральное число, так, чтобы он освещал весь полет каплей, то будет наблюдаться полная оста-

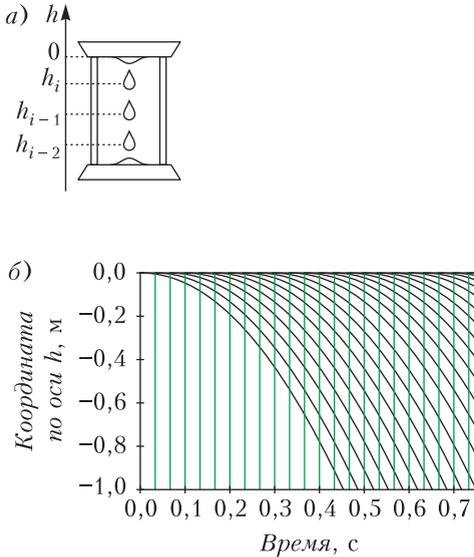


Рис. 1. Схема установки (а) и график зависимости координаты от времени (б) при частоте мерцания стробоскопа 30 Гц

новка каплей (рис. 1, б). На графике каждая парабола соответствует одной капле (в нашем случае $N = 30$ Гц, так как именно при частотах больше 24 Гц мы начинаем наблюдать не отдельные кадры, а монолитную картинку, следовательно, перестаем различать отдельные вспышки стробоскопа и видим однородное свечение). Здесь отмечен каждый момент времени, когда сработал стробоскоп (зеленые линии на графике), координаты по оси h точек пересечения каждой прямой с параболой – это положения каплей относительно верхней части установки в моменты срабатывания стробоскопа.

Для лучшего понимания на рисунке 2 показаны положения разных каплей в моменты очередного срабатывания стробоскопа. Одинаковым цветом на разных рисунках отмечены одни и те же капли в разные моменты времени, когда зеленая капля а) сверху, б) в середине, в) внизу.

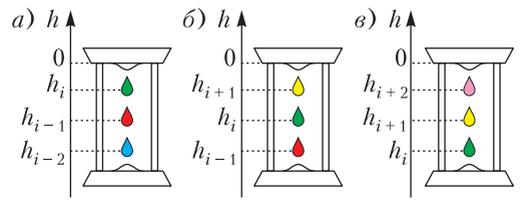


Рис. 2. Три последовательных срабатывания стробоскопа

Нетрудно заметить, что в первый раз сверху была зеленая капля, но затем на ее место пришла желтая, а потом и розовая. Иными словами, в разные моменты срабатывания стробоскопа в определенных местах обязательно есть какая-то капля, а это значит, что наш глаз будет видеть лишь те моменты, когда в этих местах есть одинаковые капли. Можно сказать иначе: координата определенной капли в момент срабатывания стробоскопа равна координате предыдущей капли в момент предыдущего срабатывания стробоскопа, но поскольку капли одинаковы, то мы не будем замечать смены каплей, а будем видеть именно остановку капли. В этом и заключается стробоскопический эффект.

А что будет, если понизить частоту срабатывания стробоскопа в k раз? На рисунке 1 был представлен график, где частота выпущения каплей совпадала с частотой световых импульсов стробоскопа. Теперь рассмотрим случай, когда частота стробоскопа равна $N/2$ (рис. 3). Очевидно, что получается такая же

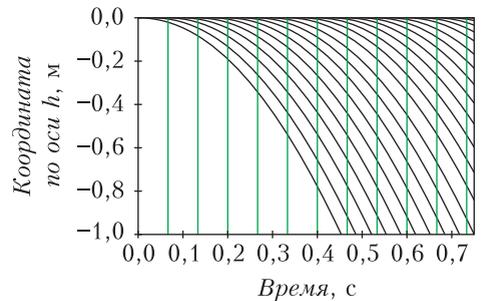


Рис. 3. Зависимость координаты от времени при частоте мерцания стробоскопа 15 Гц

картина, как и при частоте N . Это значит, что при любом N/k , где k – натуральное число, будет наблюдаться полная остановка каплей.

Уменьшаем скорость падения каплей

Пусть частота световых импульсов K отличается от частоты падения каплей N на 5 Гц

($K = 25$ Гц, $N = 30$ Гц). В этом случае каждой параболе соответствует зависимость

$$h = -\frac{g\left(t - \frac{i}{N}\right)^2}{2},$$

где g – ускорение свободного падения, i – номер соответствующей капли (для удобства начнем нумерацию с нуля). Каждой вертикальной (зеленой) прямой соответствует выражение

$$t = \frac{j}{K},$$

где j – номер каждой прямой.

Чтобы найти зависимость $h(t)$ для видимого полета капли, воспользуемся равенством

$$i = j + Z,$$

где Z – любое целое число (номер видимой капли). Это равенство получается, если посмотреть на график на рисунке 4 и заметить,

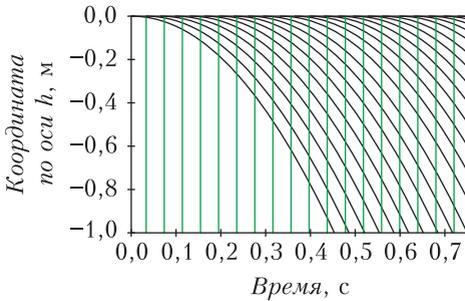


Рис. 4. Зависимость координаты от времени при частоте мерцания стробоскопа 25 Гц

что каждое пересечение параболы i с прямой $j + Z$ происходит чуть выше, чем пересечение параболы $i + 1$ с прямой $j + Z + 1$. А это значит, что мы не будем видеть момент смены капель, но будем лишь наблюдать одну медленно падающую каплю.

Выведем зависимость координаты видимой капли от времени:

$$h = -\frac{g\left(t - \frac{j+Z}{N}\right)^2}{2}, \quad j = Kt,$$

откуда

$$h = -\frac{g\left(t - \frac{Kt+Z}{N}\right)^2}{2} = -\frac{g\left(\frac{(N-K)t+Z}{N}\right)^2}{2}.$$

На рисунке 5 построена зависимость $h(t)$ видимого полета всех наблюдаемых капель

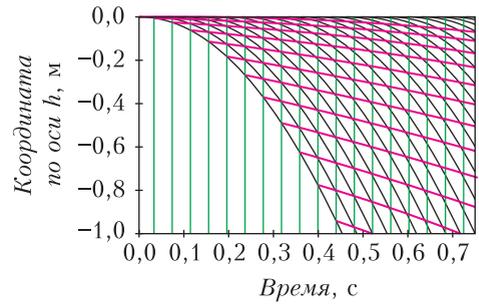


Рис. 5. Зависимость координаты от времени всех капель и координаты одной видимой капли при частоте мерцания стробоскопа 25 Гц

(красные линии). Видно, что они падают медленнее. Кажется, что для них ускорение свободного падения стало меньше:

$$\bar{a} = \bar{g}\left(1 - \frac{K}{N}\right)^2.$$

Но это только при условии $K < N$ и если $(N - K)/N$ небольшое по сравнению с 1.

Обратное падение

Но как же все-таки заставить капли лететь вверх? Все очень просто! Достаточно настроить частоту стробоскопа K так, чтобы она была немного больше частоты падения капель N , но при этом $(K - N)/K$ было небольшое по сравнению с 1, как на рисунке 6. Исходя из сказанного выше, у нас получится то же выражение, что и для $K < N$, но с противоположным знаком:

$$\bar{a} = -\bar{g}\left(1 - \frac{K}{N}\right)^2.$$

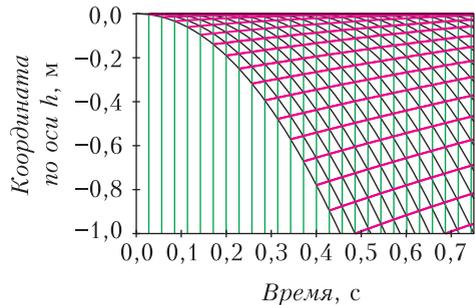


Рис. 6. Зависимость координаты от времени при частоте мерцания стробоскопа 35 Гц и зависимость координаты от времени видимой капли

Таким образом, мы получили общее выражение для зависимости координаты от времени для капель, летящих в лучах стробоскопа.

Используя подобные рассуждения для стробоскопа и любого другого циклического или периодического механического процесса, можно вывести подобные зависимости для «иллюзионного» движения, когда со стробоскопическим освещением процесс происходит медленней, чем при постоянным освещении, или вовсе замирает.

Периодический процесс (маятник)

Обсудим, можно ли остановить периодический процесс, в котором есть только один объект, а не несколько сменяющих друг друга. В качестве модели возьмем математический маятник с малым периодом колебаний (рис. 7). Его период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – расстояние от точки подвеса до центра масс груза, g – ускорение свободного падения.

Рассмотрим график гармонических колебаний координаты математического маятника (в условных единицах) с нанесенными поверх прямыми, соответствующими моментам срабатывания стробоскопа (рис. 8). Как видно, если частоты колебаний маятника и

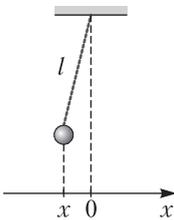


Рис. 7. Математический маятник

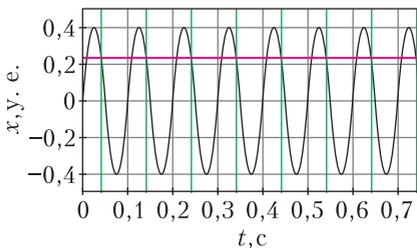


Рис. 8. График колебаний математического маятника с периодом колебания 0,1 с, частота мерцаний стробоскопа 10 Гц

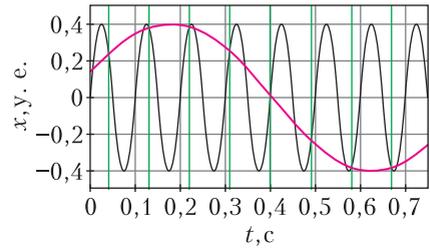


Рис. 9. График зависимости $x(t)$ маятника с периодом колебаний 0,1 с, частота мерцаний стробоскопа 11,11 Гц

срабатывания стробоскопа совпадают, груз маятника для нас будет оставаться на месте.

Пусть теперь частота колебаний маятника отлична от частоты срабатывания стробоскопа: частота срабатывания стробоскопа $K = 11,11$ Гц, а частота колебаний маятника $N = 10$ Гц, т.е. его период $T = 0,1$ с. Видно (рис. 9), что точки пересечения черной линии с зелеными прямыми лежат на красной синусоиде, описывающей кажущиеся гармонические колебания с периодом, большим по сравнению с периодом настоящих колебаний.

Заключение

Эффект, описанный в статье, можно заметить и без специальной установки. Например, при просмотре фильма, когда машина движется по дороге, обратите внимание на ее колеса. При съемке фильмов используется частота смены кадров 24 Гц. Во время разгона машины количество оборотов колеса меняется. Когда частота вращения колес будет приближаться к частоте 24 Гц или кратной ей, мы увидим, как колеса начнут медленно «тормозить», будто машина ехала в противоположную сторону, затем остановятся, а после вновь начнут крутиться в направлении движения машины, хотя машина двигалась все время в одном направлении.

Стробоскоп нашел применение и в науке. С его помощью можно дистанционно определять частоту вращения моторов, динамиков и прочих устройств, совершающих циклические и колебательные процессы, не подключая к ним тахометр.

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

Математика

10 класс

Вариант 1

(заключительный этап)

1. Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$. При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC:CB=7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$.

5. На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ \left((x+8)^2 + y^2 - 1 \right) \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC ,

если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

11 класс

Вариант 1

(отборочный этап)

1. Решите уравнение

$$3\operatorname{tg}2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

2. Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geq 0.$$

4. На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом $x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}$. Найдите минимально возможное значение произведения xyz .

7. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

Вариант 2*(заключительный этап)*

1. Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведенную к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD:DB = 3:1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. Решите уравнение

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

4. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

и

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, И.Глухов, М.Голубев, С.Городецкий, В.Дубинская, Н.Королев, П.Останин, О.Подлипский, С.Саулин, А.Скубачевский, Д.Терёшин

« К В А Н Т » У Л Ы Б А Е Т С Я**ТЕОРВЕР БОЛЬШОЙ...**

Во время сессии в коридоре мехмата встречаются преподаватели А и Б, только что закончившие принимать экзамены в своих группах.

– Ну, как студенты? – спрашивает А. – Нормально сдают?



– Да как сказать, – говорит Б. – Вот сейчас мне сдавал один студент. По билету ничего не сказал, на дополнительные вопросы не ответил. Но я ему все-таки поставил «четыре».

– Как? За что? – поражается собеседник. – Он же ничего не знает!

– Теорвер большой, – задумчиво отвечает Б, – что-нибудь да знает...

Потом спрашивает:

– А у тебя как студенты?

– Да тоже не очень, – отвечает А. – Только что принимал экзамен у студента. По билету все рассказал без запинок, на все дополнительные вопросы ответил, однако я ему поставил таки «три».

– Но почему?! – теперь уже поражается Б.

– Теорвер большой, – невозмутимо говорит А, – что-нибудь да не знает.

(Из книги «Математики тоже шутят»)

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Квант для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №10)

1. Решение показано на рисунке 1.

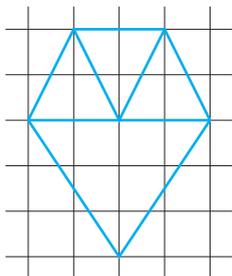


Рис. 1

2. Пронумеруем монеты по кругу числами от 1 до 8 и сравним пары (1, 5) и (3, 7).

1) Если весы оказались в равновесии, то обе фальшивые монеты либо на весах, либо не участвуют во взвешивании. В любом случае они имеют номера одной четности и не могут быть соседними.

2) В случае неравенства обе монеты на более тяжелой чаше настоящие. Будем считать, что это пара (1, 5). Тогда сравним группы (2, 3, 4) и (6, 7, 8). Если они весят одинаково, то фальшивые монеты оказались на разных чашах и не являются соседними. Если же одна из групп тяжелее, например (2, 3, 4), то обе фальшивые монеты находятся на другой чаше, при этом монета 7 точно фальшивая, поэтому фальшивые монеты лежат рядом.

3. При $n = 15$.

Оценка. Коробку можно разделить семью прямыми, для каждой есть два количества конфет с разных сторон от нее. Значит, можно отделить не более 14 различных количеств конфет, поэтому конфет не больше 15.

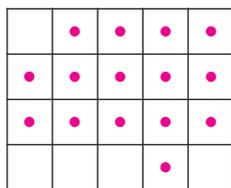


Рис. 2

Пример показан на рисунке 2.

4. Петя.

Заметим, что после каждого хода количество фишек в вершинах либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, поэтому перед ходом Пети всегда будет нечетное количество свободных вершин. Следовательно, среди блоков пус-

тых вершин будет хотя бы один нечетной длины. Если у Пети есть возможность сходить так, чтобы забрать призовые фишки, то он делает такой ход. Если же такой возможности нет, то Петя ставит фишку в крайнюю вершину нечетного блока, делая его четным (первый ход – в любую вершину). После такого хода Вася тоже не сможет сходить так, чтобы забрать призовые фишки. Таким образом, Вася будет иметь возможность брать призовые фишки только после ходов Пети, когда и тот берет призовые фишки. Это значит, что у Пети их всегда будет не меньше, чем у Васи, поэтому он первым соберет 100 призовых фишек.

Задачи

(см. «Квант» №11-12)

1. 9871.

Наибольшее четырехзначное число с различными цифрами начинается с 987. Но тогда последняя цифра должна равняться 1. При этом $9 = 8 + 1$, $8 = 7 + 1$, $7 = 8 - 1$, $1 = 9 - 8$.

2. Не может.

Каждая фигурка – это прямоугольник или угол, на рисунке 3 показаны все возможные виды

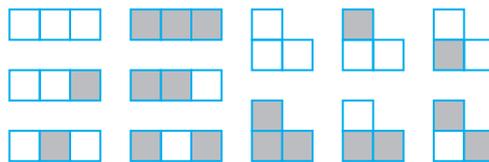


Рис. 3

их раскрасок. Так как все грани куба одноцветны, то прямоугольники, у которых цвет центральной клетки отличается от цвета двух других клеток, не могут участвовать в оклейке. На оставшихся фигурках суммарно по 15 белых и черных клеток, этого недостаточно для четырех граней. Следовательно, у куба три белых и три черных грани.

3. При 4 мудрецах.

Пусть всего мудрецов N и им достались числа от 1 до N . Будем называть мудрецов в соответствии с числами на их лбах. В самом начале у мудреца 1 есть два варианта, какое у него может быть число: 1 или $N + 1$. Также два варианта есть у мудреца N : 0 или N . Остальные мудрецы сразу понимают, какие числа у них на лбах.

При $N = 4$, если первым будет говорить мудрец 1 или 4, то он не сможет назвать свое число. Если жребий выпадет первым говорить мудрецу 2, то после этого мудрец 4 уже не сможет определить свое число. Действительно, даже если ему придется говорить после мудрецов 1 и 3, то он не

поймет, с самого начала те знали свои числа или получили эту информацию, услышав мудреца 2. Аналогично, если первым будет говорить мудрец 3, то мудрец 1 не сможет определить свое число. Если $N \geq 5$, то пусть жребий выпал так, что первым говорит мудрец 2, а сразу после него – мудрец $N - 1$. Они назовут свои числа, а так как эти числа не последовательные, то для мудрецов 1 и N неправильные варианты отпадут, поэтому далее все мудрецы назовут свои числа.

4. Верно.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C построим биссектрису CD . Докажем, что биссектрисы DE и DF треугольников ACD и BCD равны. Заметим, что угол EDF прямой, так как образован биссектрисами смежных углов. Далее можно рассуждать по-разному.

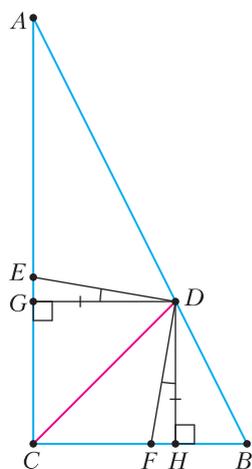


Рис. 4

$CEDF$ вписанный. Дуги DE и DF описанной около него окружности равны, поскольку равны опирающиеся на них углы DCE и DCF , значит, равны и стягивающие их хорды DE и DF .

Способ 1. Опустим перпендикуляры DG и DH на катеты AC и BC соответственно (рис. 4). Так как точка D лежит на биссектрисе угла C , то $DG = DH$. Кроме того, $\angle GDH = \angle EDF = 90^\circ$, поэтому $\angle EDG = \angle FDH$. Следовательно, прямоугольные треугольники DEG и DFH равны по катету и острому углу, откуда $DE = DF$.

Способ 2. Так как $\angle C + \angle EDF = 180^\circ$, то четырехугольник

Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №9)

1. $(90^\circ, 180^\circ)$.

Пусть углы треугольника $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Если $\alpha + \gamma \leq 90^\circ$, то $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \geq 90^\circ$, тогда β – наибольший угол треугольника, а это не так. Значит, $\alpha + \gamma > 90^\circ$.

Приведем соответствующие примеры. Рассмотрим прямоугольный треугольник с углами $\gamma = 90^\circ$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ < \beta$. В нем $\alpha + \gamma$ может принимать любое значение из $(90^\circ, 135^\circ)$. Рассмотрим равнобедренный треугольник с углами $0^\circ < \alpha = \beta < 60^\circ$, тогда $\gamma > 60^\circ$. В нем $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$ может принимать любое значение из $(120^\circ, 180^\circ)$.

2. Пронумеруем миньонов. Первым взвешиванием на одну чашу поставим миньонов с номерами от 1 до 7, а на другую – от 8 до 14. Если одна из чаш перевесила, то воршишка среди 7 миньонов на этой чаше. Взвесив три разные пары из этих семерых (по одному миньону на чаше), мы либо найдем перевесившего, либо поймем, что тяжелый – оставшийся из семи. Если же сначала было равновесие, то миньоны с 1 по 14 – честные. Взвесим теперь по 5 миньонов: на одной чаше с номерами от 15 до 19, на другой – от 20 до 24. Если одна из чаш перевесит, то двух взвешиваний по одному миньону на чаше хватит, чтобы найти воршишку среди перевесивших пяти. Если снова равновесие – взвешенные миньоны не ели банан. Тогда третьим взвешиванием сравним миньонов 25, 26, 27 и 28, 29, 30. Воршишка будет в перевесившей тройке или, при равновесии, в тройке 31, 32, 33. Взвесив четвертым взвешиванием двух из трех «кандидатов», мы узнаем, кто в этой тройке воршишка.

3. а) Да; б) нет.

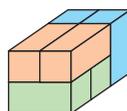


Рис. 5

а) Взяв по два кирпича каждого из трех типов, сложим блок $3 \times 2 \times 2$ (рис. 5), а из 20 таких блоков сложим стенку $3 \times 8 \times 10$.

б) В стенке $3 \times 9 \times 10$ должно быть по 45 кирпичей каждого вида.

Мысленно выделим в стенке три слоя $1 \times 9 \times 10$. Любой кирпич лежит либо целиком в одном слое, либо в двух соседних слоях. Каждый из 45 кирпичей, лежащих в двух слоях, состоит из двух кубиков, один из которых – в среднем слое. Но оставшиеся 45 кубиков среднего слоя невозможно нацело разбить между кирпичами, которые лежат в слое целиком (занимая по 2 кубика), поэтому стенку $3 \times 9 \times 10$ сложить нельзя.

4. 1.

Так как должен найтись квадрат 1×1 с нулевой суммой, то нужно не менее одного нуля. Приведем пример: в левом верхнем углу 0, в правой клетке второй строки 2, остальные клетки заполнены числами 1 и -1 в шахматном порядке. На рисунке 6 показано заполнение для таблицы 6×6 , таблица 100×100 заполняется аналогично.

Покажем, как выбрать прямоугольник $i \times j$ с нулевой суммой.

0	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	2
1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1

Рис. 6

Если i и j оба нечетны, то выбираем прямоугольник, один угол которого совпадает с левым верхним углом квадрата. В таком прямоугольнике $i \times j$ сумма чисел нулевая (например, потому что после

отбрасывания клетки с числом 0 оставшаяся часть прямоугольника режется на доминошки 1×2 , в каждой из которых сумма нулевая).

Остался случай, когда есть четная сторона. Если хотя бы одна из сторон не больше 98, то выберем прямоугольник так, чтобы он лежал внутри нижних 98 строк. В этом прямоугольнике сумма нулевая (например, потому что он делится на доминошки).

Осталось рассмотреть только случаи, когда есть четная сторона и обе стороны не меньше 99. Тем самым, прямоугольник имеет размеры 100×100 или 99×100 . В первом случае выбираем все клетки, во втором случае выбираем все клетки, кроме нижней строки.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Постройки должны быть адаптированы к местному климату. Так, дома строят группами, чтобы они отбрасывали друг на друга тень.
2. Ветер, попадающий на здание, частично прогоняется через нижний просвет. При этом скорость ветра возрастает, порой достигая напора, сбивающего людей.
3. Таким образом учитывалось изменение длины фермы при нагревании и охлаждении.
4. Чем больше плотность пенопласта, тем больше его теплопроводность. У материала с небольшой плотностью больше пор, занимаемых воздухом, поэтому он обладает меньшей теплопроводностью.
5. Чтобы выходили наружу более горячие газы, образующиеся в процессе приготовления пищи.
6. Тем самым можно избежать потерь энергии за счет конвекции воздуха между стенами.
7. Инфракрасное излучение значительно хуже проходит через стекло, чем видимое. Благодаря этому тепло, излучаемое нагретыми в комнате телами, удерживается в помещении. (Правда, надо учитывать размеры окон современных зданий.) Ультрафиолетовые лучи, увы, не пропускаются обычными стеклами, а они уничтожают бактерии и необходимы для нормального развития организма человека.
8. При одной и той же вместительности хранилища цилиндрической (а тем более шарообразной) формы требуют значительно меньшего расхода материала оболочки, чем кубические. Легко догадаться, когда этот расход будет минимальным.
9. Каждый элемент такой конструкции опирается на смещенные в сторону другие элементы под ним. При этом максимальное давление на пол достигается не в центре, а на окружности, расположенной между центром и периметром структуры.

10. Давление пропорционально отношению массы пирамиды к площади ее основания. Масса пропорциональна кубу линейных размеров, площадь – квадрату. Значит, отношение давлений равно отношению линейных размеров, в данном случае $140 \text{ м} : 0,14 \text{ м} = 1000$.

11. Масса сплошного кубика будет равна 96 граммам. Пирамидок же может быть три или шесть (рис. 7). В первом случае масса одной

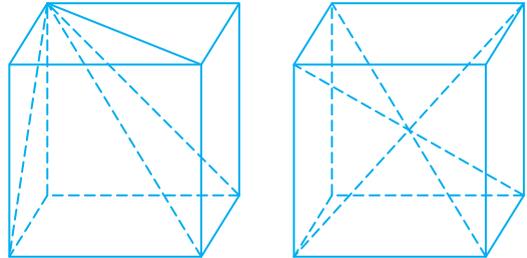


Рис. 7

пирамидки составит 32 грамма, во втором – 16 граммов.

12. Внутри телебашни натянуты тросы, прижимающие кольца, образующие башню, друг к другу и к фундаменту.

13. Отношение масс оригинала и модели равно произведению отношения их плотностей на отношение кубов их линейных размеров. Из чего следует, что масса модели в 3 миллиарда раз меньше массы башни и составляет 2,4 грамма.

14. Исходя из нагрузки, приходящейся на самый низ колонны, где она сжата более всего и испытывает максимальную деформацию.

15. Строеение купола помогает снизить давление, поскольку его верхняя часть значительно тоньше, чем нижняя (рис. 8). Кстати, он до сих пор

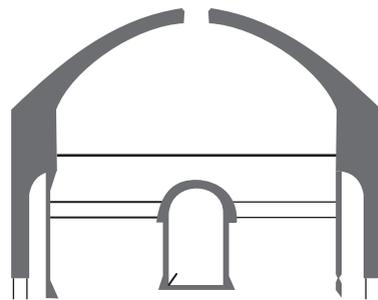


Рис. 8

является самым крупным в мире неармированным бетонным куполом.

16. У зданий высотой 7–8 этажей собственная (резонансная) частота колебаний совпала с частотой сейсмических волн, тогда как у более низких и более высоких зданий собственные

частоты в резонанс не попали, и им удалось устоять.

Микроопыт

Удачно проведенный опыт лишний раз свидетельствует о необычайной крепости яичной скорлупы, объясняемой ее выпуклой формой, как и высокая прочность всякого рода сводов и арок.

ЕГЭ по физике

(см. «Квант» №10)

Ответы к заданиям 1–23

№ задания	Ответы	№ задания	Ответы
1	5	13	12
2	36	14	40
3	3	15	34
4	24	16	31
5	32	17	23
6	32	18	2,5
7	16	19	32
8	500	20	134
9	5	21	531
10	35	22	2,2±0,1
11	32	23	35
12	144		

Решения задач 24–30

24. 1) При изменении света с зеленого на фиолетовый его длина волны уменьшится, частота увеличится ($v_\Phi > v_\lambda$).

2) Работа выхода электронов из материала не зависит от частоты падающего света, поэтому, в соответствии с уравнением Эйнштейна для фотоэффекта $h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{max}}$, увеличится максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов E_{max} . Так как $E_{\text{max}} = e|U_3|$, то увеличится и модуль запирающего напряжения U_3 .

3) Мощность поглощенного света связана с частотой волны ν соотношением $P = N_\Phi E_\Phi = N_\Phi h\nu$, где N_Φ – число фотонов, поглощенных катодом за 1 с, $E_\Phi = h\nu$ – энергия одного фотона (соотношение Планка). Так как мощность поглощенного света не изменилась, а энергия одного фотона E_Φ увеличилась, то уменьшается число фотонов, падающих на катод за 1 с.

4) Сила тока насыщения $I_{\text{нас}}$ определяется числом выбитых светом электронов N_e , которое пропорционально числу падающих на катод за 1 с фотонов, поэтому сила тока насыщения уменьшится.

Итак, точка отрыва графика от горизонтальной оси U сдвинется влево, горизонтальная асимптота графика $I_{\text{нас}}$ сдвинется вниз.

25. 1) Выберем систему отсчета, направив ось x вдоль велодорожки по скорости движения бегуна и приняв за начало отсчета времени момент начала движения велосипедиста.

2) За время t , в течение которого велосипедист догонит бегуна, они совершат одинаковое перемещение:

$$x(t) - x_0 = v_1 t = \frac{at^2}{2}, \text{ откуда } v_1 = \frac{a}{2}t,$$

где v_1 – скорость бегуна, a – ускорение велосипедиста.

3) Так как велосипедист стартовал с места равноускоренно, то время до встречи t находим из зависимости скорости от времени при равноускоренном движении:

$$t = \frac{v_2 - 0}{a},$$

где v_2 – скорость велосипедиста в момент времени, когда он догнал бегуна.

4) Искомая скорость бегуна равна

$$v_1 = \frac{v_2}{2}t = \frac{v_2}{2} = \frac{4\text{ м/с}}{2} = 2\text{ м/с}.$$

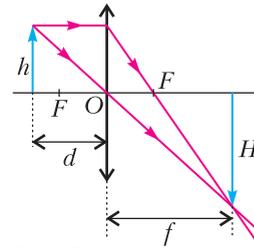


Рис. 9

26. Построим изображение предмета в линзе, используя свойства луча, проходящего через главный оптический центр линзы, и луча, параллельного главной оптической оси (рис. 9). По формуле тонкой линзы, $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$. Увеличение линзы $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}$. Следовательно, $f = \Gamma d$. Теперь найдем расстояние от предмета до линзы:

$$D = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma d}, \quad d = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma D} = \frac{5 + 1}{5 \cdot 4 \text{ дптр}} = 0,3 \text{ м}.$$

27. 1) Клапан откроется, когда избыточная сила F_d давления воздуха на клапан изнутри цилиндра сравняется с силой давления стержня на этот клапан. Если превышение давления воздуха в цилиндре над атмосферным Δp , а площадь клапана s , то $F_d = s\Delta p$. Из условия равновесия рычага $Fl - mgL = 0$ и из третьего закона Ньютона следует, что сила действия стержня на клапан равна $mg \frac{L}{l}$, где m , L и l – соответственно масса

груза, длина стержня и длина его участка AB .

Итак, должно выполняться условие $s\Delta p \geq mg \frac{L}{l}$.

2) Дополнительное давление воздуха определяется увеличением массы Δm_b воздуха в цилиндре. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, $\Delta p = \frac{\Delta m_b}{MV} RT$, где M – молярная масса воздуха. Поэтому условие открытия клапана имеет вид

$$\frac{s\Delta m_b}{MV} RT \geq mg \frac{L}{l}, \text{ или } \Delta m_b \geq \frac{mgLMV}{lsRT}.$$

3) Если насос закачивает каждую секунду w кг воздуха, то массу Δm_b он закачает в цилиндр за время $t = \frac{\Delta m_b}{w}$. Следовательно, клапан откроется в момент времени

$$t = \frac{mgLMV}{lsRTw} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 0,029 \cdot 0,5}{0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot 0,002} \text{ с} \approx 582 \text{ с} \approx 9,7 \text{ мин.}$$

28. 1) Количество теплоты, выделяющееся на резисторе после размыкания ключа,

$$Q = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}.$$

2) Напряжение на конденсаторе до размыкания ключа равно напряжению на резисторе, которое, согласно закону Ома для участка цепи, равно

$$U = IR.$$

3) Согласно закону Ома для полной цепи, сила тока через резистор до размыкания ключа $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Тогда

$$U = \mathcal{E} \frac{R}{r+R} = \frac{\mathcal{E}}{1+k}.$$

4) Объединяя выделенные выражения, получим

$$q = \frac{2Q(1+k)}{\mathcal{E}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot (1+0,2)}{12} \text{ Кл} = 2 \text{ мкКл.}$$

29. 1) При прохождении ускоряющей разности потенциалов U заряженная частица массой m с зарядом q приобретает кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = qU.$$

Здесь учтено, что начальная скорость частицы равна нулю.

2) При движении заряженной частицы в однородном магнитном поле \vec{B} по окружности радиусом R сила Лоренца вызывает центростремительное ускорение частицы:

$$ma_{ц} = \frac{mv^2}{R} = F_{л} = qvB.$$

Отсюда

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

3) Из пунктов 1) и 2) получим

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}} = \frac{1}{0,5} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-25} \cdot 2 \cdot 10^3}{3,2 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} \approx 0,087 \text{ м} = 8,7 \text{ см.}$$

30. Обоснование

1) Систему отсчета, связанную с землей, будем считать инерциальной.

2) Шар и пулю будем считать материальными точками, так как их размеры малы по сравнению с длиной нити.

3) При соударении для системы «пуля – шар» в инерциальной системе отсчета выполняется закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальную ось, так как внешние силы (силы тяжести и сила натяжения нити) вертикальны.

4) При движении шара на нити вниз и вверх выполняется закон сохранения механической энергии, так как сопротивлением воздуха по условию задачи можно пренебречь, а работа силы натяжения нити равна нулю (эта сила в любой точке траектории перпендикулярна скорости тела).

Решение

По закону сохранения полной механической энергии для движения шара вниз с высоты H ,

$$MgH = \frac{Mu^2}{2}, \text{ где } H = l - l \cos \alpha.$$

Таким образом, скорость шара в нижней точке его траектории перед попаданием в него пули

$$u = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Согласно закону сохранения импульса,

$$Mu - mv_1 = Mu' - mv_2,$$

где M и m – массы шара и пули соответственно. Изменение импульса пули

$$\Delta p = mv_2 - mv_1 = M(u' - u).$$

Шар после попадания в него пули получит кинетическую энергию и поднимется на новую высоту, равную h . По закону сохранения полной механической энергии,

$$\frac{Mu'^2}{2} = Mgh, \text{ где } h = l - l \cos \beta.$$

Таким образом,

$$u' = \sqrt{2gl(1 - \cos \beta)}.$$

В итоге имеем

$$|\Delta p| = \left| M \left(\sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} - \sqrt{2gl(1 - \cos \beta)} \right) \right| = \\ = \left| 1 \cdot \left(\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,9(1 - \cos 60^\circ)} - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,9(1 - \cos 39^\circ)} \right) \right| \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Избранные задачи открытого сегмента

1. 1) Согласно фотографии, глаз видит прямое увеличенное изображение стрелок. Рассеивающая линза дает всегда, если предмет действительный, мнимое уменьшенное изображение, а собирающая линза, в зависимости от расстояния до действительного предмета, может давать как действительное перевернутое изображение, так и мнимое прямое увеличенное изображение.

2) Линза является собирающей, так как только такая линза способна давать прямое увеличенное мнимое изображение.

3) По фотографии видно, что увеличение линзы равно 2. По формуле для увеличения линзы

$$\Gamma = \frac{|f|}{|d|} = 2,$$

где d – расстояние от линзы до предмета (стрелочки), а f – расстояние от линзы до изображения.

4) Так как изображение мнимое, то $f = -2d = -6$ см.

5) По формуле тонкой линзы вычислим фокусное расстояние F линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}, F = 2d = 2 \cdot 3 \text{ см} = 6 \text{ см}.$$

2. 1) При движении стержней с разными скоростями изменение потока вектора магнитной индукции, пронизывающего контур, за промежуток времени Δt определяется по формуле $\Delta \Phi = Bl(v_1 - v_2)\Delta t = Blv_{\text{отн}}\Delta t$, что приводит к возникновению в контуре ЭДС индукции. Согласно закону Фарадея, $\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -Blv_{\text{отн}}$. Здесь мы пренебрегли самоиндукцией контура.

2) В соответствии с законом Ома для замкнутой цепи, в контуре появился ток

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{2R} = \frac{Blv_{\text{отн}}}{2R}.$$

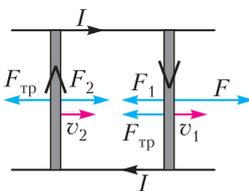


Рис. 10

3) На проводники с током в магнитном поле действуют силы Ампера \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , $F_1 = F_2 = IBl$, как показано на рисунке 10. Кроме этих сил, на каждый стержень дей-

ствует тормозящая сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Так как стержни движутся равномерно, сумма сил, приложенных к каждому стержню, равна нулю: $F - F_1 - F_{\text{тр}} = 0$, $F_2 - F_{\text{тр}} = 0$. Отсюда получим

$$F = 2F_1 = \frac{(Bl)^2}{R} v_{\text{отн}} v_{\text{отн}} = \frac{FR}{(Bl)^2} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{(1 \cdot 0,1)^2} \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}.$$

3. 1) Лыдка сможет выскользнуть из ямы через ее правый край.

2) Стенки ямы гладкие; значит, можно считать, что трения при движении лыдки нет, поэтому ее механическая энергия $E_{\text{мех}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$ сохраняется. Запас кинетической энергии лыдки $E_{\text{к}} = 2$ Дж в точке A позволяет ей подняться до уровня, где ее потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ немного больше 4 Дж, так как в точке A она немного больше 2 Дж.

3) Левый край ямы поднят до большей высоты. Следовательно, этого края лыдка не достигнет и заскользит вправо. Правый же край ямы ниже: в верхней точке этого края потенциальная энергия лыдки меньше 4 Дж. Следовательно, в этой точке кинетическая энергия лыдки $E_{\text{к}} > 0$. Значит, в этой точке лыдка движется и поэтому сможет выскользнуть из ямы через ее правый край.

4. Обоснование

1) Рассмотрим задачу в системе отсчета, связанной с землей. Будем считать эту систему отсчета инерциальной.

2) Описываем стержень моделью твердого тела (форма и размеры тела неизменны, расстояние между любыми двумя точками тела остается неизменным).

3) Сумма приложенных к стержню внешних сил равна нулю, так как он находится в равновесии относительно поступательного движения. Сумма моментов этих сил относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку шарнирного крепления (точку O), равна нулю, так как стержень не вращается.

4) Доска движется поступательно. Движение доски в инерциальной системе отсчета можно описать с помощью законов Ньютона, сформулированных для материальных точек.

5) Согласно третьему закону Ньютона, силы, с которыми доска и стержень взаимодействуют друг с другом, равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

Решение

1) В инерциальной системе отсчета, связанной с землей, доска по условию движется поступательно с постоянной скоростью. Поэтому, в частности, сумма горизонтальных сил \vec{F} и $\vec{F}_{\text{тр}}$, приложенных к доске, равна нулю (рис. 11,а). Отсю-

да получаем $F = F_{\text{тр}1}$.
 2) На рисунке 11,б показаны силы, приложенные к стержню. По третьему закону Ньютона, $\vec{F}_{\text{тр}2} = -\vec{F}_{\text{тр}1}$. Поэтому

$$F_{\text{тр}2} = F_{\text{тр}1} = F.$$

3) По условию задачи стержень не вращается, поэтому выполненное условие равновесия стержня на оси шарнира O (правило моментов). Обозначив длину стержня через L , запишем это условие:

$$mg \frac{L}{2} \cos \alpha - F_{\text{тр}2} L \sin \alpha - NL \cos \alpha = 0.$$

4) Доска движется относительно стержня, поэтому $F_{\text{тр}2} = \mu N$.

5) Окончательно получаем

$$mg \cos \alpha - 2F \sin \alpha - 2 \frac{F}{\mu} \cos \alpha = 0,$$

откуда находим

$$m = \frac{2F}{g} \left(\frac{1}{\mu} + \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2 \cdot 2}{10} \left(\frac{1}{0,2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ кг} = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{15} \right) \text{ кг} \approx 2,2 \text{ кг}.$$

**Санкт-Петербургский
 политехнический университет
 Петра Великого**
 (см. «Квант» №10)

**Математика
 Сборочный тур**

1. 3. 2. 2. 3. 10. 4. 8. 5. 18. 6. 16. 7. 15. 8. 3. 9. 2. 10. 10.

Заключительный тур

1. 45.

Обозначим за n искомое число. По условию $n - 5$ делится на 40, а $n - 21$ - на 24. Тогда $6(n - 5)$ и $5(n - 21)$ делятся на 120. Следовательно, $6(n - 5) - 5(n - 21) - 120 = n - 45$ также делится на 120. Последнее означает, что остаток от деления n на 120 равен 45.

$$2. \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 7 + 2xy, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

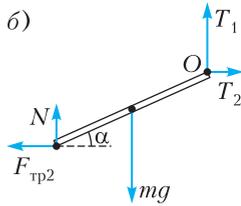
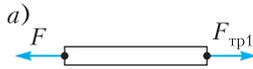


Рис. 11

Возведем в квадрат второе уравнение:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 7 + 2xy, \\ x + y = 5 - 2\sqrt{xy}, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Подставляя выражение для $x + y$ из второго уравнения в первое и вводя обозначение $t = \sqrt{xy}$, получаем

$$\begin{cases} (5 - 2t)^2 = 7 + 2t^2, \\ 0 \leq t \leq 5/2, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t^2 - 10t + 9 = 0, \\ 0 \leq t \leq 5/2. \end{cases}$$

Решая уравнение с учетом условия $0 \leq t \leq 5/2$, получаем, что $t = 1$ и, следовательно, $xy = 1$. Из первого уравнения системы получаем, что $x + y = 3$, откуда находим

$$x + \frac{1}{x} = 3, x^2 - 3x + 1 = 0, x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ и, наконец, } y = \frac{2}{3 \pm \sqrt{5}} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

$$3. \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Проведем преобразование левой части уравнения. Возведя в квадрат равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получаем, что $\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$ и $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$. Опять возводим в квадрат и находим, что $\sin^8 x + 2\sin^4 x \cos^4 x + \cos^8 x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4} \sin^4 2x$, откуда $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x$.

Домножим уравнение на общий знаменатель левой части:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{2} \sin^2 x \cos^2 x.$$

Применяя полученную выше формулу, можем написать

$$1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x = \frac{1}{8} \sin^2 2x \text{ и}$$

$$1 - \sin^2 2x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (1 - \sin^2 2x),$$

откуда

$$\sin^2 2x = 1, \sin 2x = \pm 1, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$$

С учетом ограничения $x \in [0; \pi]$ получаем, что $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$.

$$4. \{ \pm 2 \}.$$

Пусть $t = (3 + 2\sqrt{2})^x$. Тогда $(3 - 2\sqrt{2})^x = \left(\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^x = \frac{1}{t}$. Уравнение запишется как

$t + \frac{1}{t} = 34$. Домножив на t , получаем $t^2 + 1 = 34t$

и, следовательно, $t^2 - 34t + 1 = 0$,

$$\begin{cases} t = 17 + 12\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2, \\ t = 17 - 12\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^2}. \end{cases}$$

Значит, $x = \pm 2$.

5. 220.

При реальном распределении доли районов в общем числе компьютеров составляют $\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11}$ соответственно. При альтернативном распределении эти доли были бы равны $\frac{10}{20}, \frac{7}{20}, \frac{3}{20}$. Переход к альтернативному распределению дает преимущество $\frac{1}{2} - \frac{5}{11} = \frac{1}{22}$ первому району. Получается, что 10 компьютеров составляют $\frac{1}{22}$ от всей партии. Поэтому общее число компьютеров – 220 штук.

6. 14.

Пусть x – число квадратов 2×2 без углового квадрата 1×1 , а y – число прямоугольников 2×1 , необходимых для настила пола. Тогда суммарная площадь панелей равна площади комнаты, т.е. $3x + 2y = 40$, что можно переписать как $3(x + y) = 40 + y$. Отсюда видно, что наименьшее значение $x + y$ будет при наименьшем y . Из этого же соотношения заключаем, что остаток от деления y на три равен двум. Следовательно,

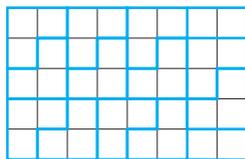


Рис. 12

наименьшее значение y равно двум. Необходимо только убедиться, что настил с $y = 2$ существует. Один из таких настилов показан на рисунке 12. Итак, $y = 2$, следовательно,

$x = 12$, а число панелей $x + y = 14$.

7. 24 и 10.

Пусть A – вершина прямого угла треугольника, а B и C – вершины острых углов (рис. 13), ω – вписанная окружность, ω_1 – окружность, касающаяся двух катетов, ω_2 – окружность, касающаяся катета и гипотенузы, I, J, K – центры окружностей $\omega, \omega_1, \omega_2$ соответственно. По условию радиус r окружности ω_1 равен 4, а радиус ρ окружностей ω_1 и ω_2 равен 3. Через D, E, F обозначим точки касания ω сторон BC, AC, AB соответственно. Точка J лежит на биссектрисе AI угла A , а K – на биссектрисе BI угла B ,

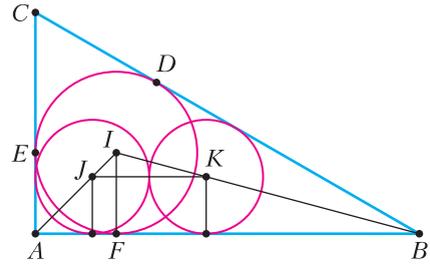


Рис. 13

отрезок JK параллелен AB . Следовательно, треугольник JKI подобен треугольнику ABI . Тогда отношение сторон равно отношению высот, опущенных на эти стороны:

$$\frac{JK}{AB} = \frac{r - \rho}{r}.$$

Учитывая, что $r = 4, \rho = 3, JK = 2\rho = 6$, находим, что $AB = 24$. Выразим гипотенузу через катет:

$$\begin{aligned} BC = BD + DC = BF + CE = (AB - AF) + (AC - AE) = \\ = (24 - 4) + (AC - 4) = 16 + AC. \end{aligned}$$

По теореме Пифагора

$$AC^2 + 24^2 = (16 + AC)^2,$$

$$AC^2 + 576 = 256 + 32AC + AC^2.$$

Отсюда получаем $AC = 10$.

8. $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

Обозначим вершины пирамиды так, как показано на рисунке 14, $\vec{a} = \vec{CA}, \vec{b} = \vec{ED}$. Длину диаго-

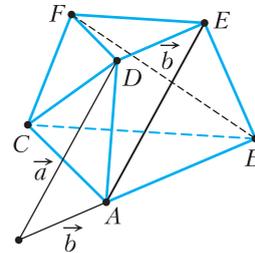


Рис. 14

нали боковой грани обозначим за d , а высоту пирамиды – за h . Тогда

$$\vec{CD} + \vec{EA} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\vec{CD} + 2\vec{CD} \cdot \vec{EA} + \vec{EA}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Учитывая, что \vec{CD} и \vec{EA} взаимно перпендикулярны, а угол между \vec{a} и \vec{b} равен 60° , получаем, что $2d^2 = 11^2 + 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2$, откуда $d = 7\sqrt{\frac{3}{2}}$. С другой стороны, сумма $\vec{CD} + \vec{AE} + \vec{BF}$ не меняется

при повороте на 120° вокруг оси, проходящей через центры треугольников оснований. Это означает, что проекция этой суммы на плоскость основания равна нулевому вектору. Проекция суммы на ось, перпендикулярную основанию, равна сумме проекций отдельных слагаемых,

т.е. $3h$. Следовательно, $\left(\vec{CD} + \vec{AE} + \vec{BF}\right)^2 = 9h^2$.

Откуда $3d^2 = 9h^2$ и $h = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$.

9. $p(x) = x^3(x-1)$.

Пусть $\frac{2x}{x+1} = x$. Тогда $x^2 - x = 0$, $x \neq -1$, следовательно, $x = 1$ или $x = 0$. Подставляя $x = 1$ в соотношение из условия задачи, получаем

$p(1) = \frac{p(1)}{2}$, откуда $p(1) = 0$, а тогда $p(x)$ делится на $x-1$. Аналогично, для $x = 0$ получим $p(0) = 8p(0)$. Тогда $p(0) = 0$ и $p(x)$ делится на x . Пусть $p_1(x)$ — частное от деления $p(x)$ на $x(x-1)$. Подставим $p(x) = x(x-1)p_1(x)$ в соотношение из условия задачи:

$$\frac{2x}{x+1} \left(\frac{2x}{x+1} - 1 \right) p_1 \left(\frac{2x}{x+1} \right) = \frac{8x(x-1)p_1(x)}{(x+1)^4},$$

$$p_1 \left(\frac{2x}{x+1} \right) = \frac{4p_1(x)}{(x+1)^2}.$$

При $x = 0$ получаем $p_1(0) = 4p_1(0)$, следовательно, $p_1(0) = 0$ и $p_1(x)$ делится на x . Тогда $p_1(x) = xp_2(x)$, а значит,

$$\frac{2x}{x+1} p_2 \left(\frac{2x}{x+1} \right) = \frac{4xp_2(x)}{(x+1)^2}$$

и, как следствие,

$$p_2 \left(\frac{2x}{x+1} \right) = \frac{2p_2(x)}{x+1}.$$

Опять при $x = 0$ получаем $p_2(0) = 2p_2(0)$, следовательно, $p_2(0) = 0$ и $p_2(x) = xp_3(x)$, а значит,

$$\frac{2x}{x+1} p_3 \left(\frac{2x}{x+1} \right) = \frac{2xp_3(x)}{x+1}$$

и, как следствие,

$$p_3 \left(\frac{2x}{x+1} \right) = p_3(x).$$

Последнее равенство возможно только при $p_3(x)$, тождественно равном константе. С учетом того, что старшие коэффициенты $p(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ равны единице, получаем, что $p_3(x) = 1$ при всех вещественных x . Следовательно, $p(x) = x^3(x-1)$.

$$10. \left\{ -\frac{9}{5}; -1 \right\}.$$

Находим ОДЗ: $x \in [-2; 0]$. Преобразуем обе части уравнения.

Для правой части имеем

$$\begin{aligned} \pi \cos(\arcsin(x+1)) &= \pi \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x+1))} = \\ &= \pi \sqrt{1 - (x+1)^2} = \pi \sqrt{-2x - x^2}. \end{aligned}$$

Корень берется со знаком плюс, поскольку на множестве значений арксинуса косинус неотрицателен.

Теперь займемся левой частью.

При $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ выражение $\frac{\pi}{2} - \pi x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \subset [0; \pi]$, следовательно,

$$2 \arccos(\sin \pi x) = 2 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)\right) = \pi(1 - 2x).$$

При $x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ выражение $\frac{3\pi}{2} + \pi x \in [0; \pi]$, следовательно,

$$\begin{aligned} 2 \arccos(\sin \pi x) &= 2 \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \pi x\right)\right) = \\ &= \pi(3 + 2x) = \pi|3 + 2x|. \end{aligned}$$

При $x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right]$ выражение $-\frac{3\pi}{2} - \pi x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \subset [0; \pi]$, следовательно,

$$\begin{aligned} 2 \arccos(\sin \pi x) &= 2 \arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \pi x\right)\right) = \\ &= -\pi(3 + 2x) = \pi|3 + 2x|. \end{aligned}$$

Тогда для $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ уравнение переписывается в виде

$$\pi(1 - 2x) = \pi \sqrt{-2x - x^2}.$$

Возводя в квадрат, получаем

$$(1 - 2x)^2 = -2x - x^2 \text{ и } 5x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Последнее уравнение не имеет решений.

Для $x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ уравнение запишется как

$$\pi|3 + 2x| = \pi \sqrt{-2x - x^2}.$$

Опять возводим в квадрат. Получаем $(3 + 2x)^2 = -2x - x^2$ и $5x^2 + 14x + 9 = 0$. Решая полученное квадратное уравнение, находим $x = -\frac{9}{5}$

и $x = -1$, принадлежащие промежутку $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Физика
Отборочный тур

- $t_3 = 2 \frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} \approx 181$ мин.
- $r_1 = r_2 \frac{n-1}{n+1} = 20,0$ м.
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{x_m}{a}} = 8,67$ с.
- $a = \left(\frac{4\rho_{ж}}{2\rho_{д} + \rho_{п} + \rho_{пр}} - 1 \right) g = 8,52$ м/с².
- $t_2 = \frac{mct_0 + (m_1 - m_2)c_{в1} - m_2(r + c_{в}(100 - t_1))}{(m_1 - m_2)c_{в} + mc} = 7,49$ °С.
- $A = \frac{5}{2}(1 - \eta)(n - 1)vRT = 9,26$ кДж.
- $U_0 = U_4 \left(\frac{c_4}{c_1} + \frac{c_2 c_3}{c_1(c_2 + c_3)} + 1 \right) = 267$ В.
- $\rho = \frac{4k}{\pi d^2 L g} (\Delta l_1 + \Delta l_2) = 7600$ кг/м³.
- $B_{верт} = \frac{I \Delta t R}{2ab} = 54$ мкТл.
- $a = \frac{l}{2 \sin \alpha} = 49,8$ см.

Заключительный тур

1. Максимальное расстояние s_m , которое может пролететь мяч, будет при броске под углом $\alpha = 45^\circ$. При этом максимальная высота подъема

$$h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Допустим, что она находится над серединой контейнера (рис. 15). Тогда

$$x_m + \frac{L}{2} = v_{0x} t_{пол} = v_{0x} \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{2g},$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{L}{2} = 3,75 \text{ м.}$$

При этом высота, на которой мяч пролетит над стенками контейнера, составит

$$h = v_0 \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2} = \left(v_0 \sin \alpha - g \frac{t}{2} \right) t = \left(v_0 \sin \alpha - g \frac{x_m}{2v_0 \cos \alpha} \right) \frac{x_m}{v_0 \cos \alpha} = x_m - g \frac{x_m^2}{v_0^2} = 2,35 \text{ м.}$$

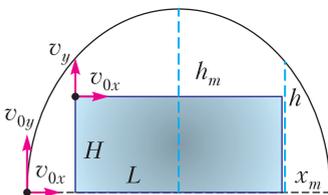


Рис. 15

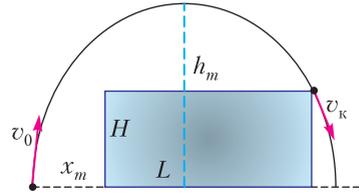


Рис. 16

Это больше высоты контейнера ($H = 1,75$ м). Таким образом, мяч пролетает над контейнером, а значит, мальчик может отойти дальше так, чтобы мяч пролетал, почти касаясь дальней стенки контейнера (рис. 16). Нарисуем векторы начальной скорости \vec{v}_0 и скорости \vec{v}_k в момент пролета над дальней стенкой контейнера (рис. 17). Площадь треугольника и дальность полета равны, соответственно,

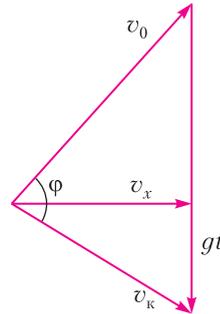


Рис. 17

$S_{тр} = \frac{1}{2} v_x g t, s = v_x t = \frac{2S_{тр}}{g}$.
С другой стороны, по теореме синусов,

$$S_{тр} = \frac{1}{2} v_0 v_k \sin \phi,$$

где ϕ – угол между скоростями. Синус будет максимальным (равным единице), когда векторы скоростей перпендикулярны. Поэтому максимальная дальность

$$s_m = \frac{v_0 v_k}{g} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g} = 8,06 \text{ м,}$$

а максимальное расстояние до стенки контейнера

$$x_m = s_m - L = 5,56 \text{ м.}$$

2. Пусть H – высота тела, h – высота его подводной части. По закону Архимеда,

$$\rho g H = \rho_{в} g h.$$

Равенство гидростатических давлений в основании отверстия (внутри и снаружи) имеет вид

$$\rho_0 g x H + \rho_{в} g (1 - x) H = \rho_{в} g h.$$

Отсюда находим

$$\rho = \rho_0 x + \rho_{в} (1 - x) = 940 \text{ кг/м}^3.$$

3. Положим, что второй шар более массивный, чем первый, т.е. после первого столкновения первый шар отскакивает назад. Тогда из законов сохранения импульса и энергии следует

$$mv_1 = -mv_{11} + m_2 v_2,$$

$$mv_1^2 = m v_{11}^2 + m_2 v_2^2.$$

Отсюда

$$v_2 = \frac{2v_1}{\left(\frac{m_2}{m} + 1\right)}.$$

(Легко проверить, что при обратном исходном предположении о соотношении масс шаров полученное выражение будет таким же.)

Аналогичным образом рассматриваем второе столкновение:

$$m_2 v_2 = -m_2 v_{22} + 3m v_3,$$

$$m_2 v_2^2 = m_2 v_{22}^2 + 3m v_3^2,$$

$$v_3 = \frac{2v_2}{\left(\frac{3m}{m_2} + 1\right)} = \frac{4v_1}{\left(\frac{m_2}{m} + 1\right)\left(\frac{3m}{m_2} + 1\right)} = \frac{4v_1 m m_2}{(m + m_2)(3m + m_2)}.$$

Берем производную по переменной m_2 , приравняем к нулю и получаем

$$m_2 = \sqrt{3m} \approx 173 \text{ г}.$$

4. Тепло, которое будет поглощено тающим льдом, пойдет на охлаждение трески и охлаждение самой смеси. Запишем уравнение теплового баланса для начальной температуры 0°C :

$$Q_{\text{льда}} + Q_{\text{трески}} + Q_{\text{смеси}} = 0,$$

$$m_{\text{л}} \lambda - m_{\text{тр}} q(t) + c_{\text{см}}(m_{\text{л}} + m_{\text{соли}})(t - 0) = 0.$$

Для 1 кг льда и трески и 300 г соли уравнение принимает вид

$$1 \cdot 330 \cdot 10^3 - 1 \cdot (-0,16t^2 - 7,9t + 185) \cdot 10^3 + 3,3 \cdot 10^3 \cdot 1,3 \cdot (t - 0) = 0,$$

$$0,16t^2 + 12,2t + 145 = 0,$$

откуда находим

$$t_{1,2} = \frac{-12,2 \pm 7,5}{0,32}, \quad t_1 = -14,7^\circ\text{C} \text{ и } t_2 = -61,6^\circ\text{C}.$$

Температура не может опуститься ниже $-21,2^\circ\text{C}$, поэтому остается только первый корень.

5. Запишем соответствующие соотношения:

$$\epsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\Delta S}{\Delta t},$$

$$I = \frac{\epsilon_i}{R} = \frac{\epsilon_i s}{\rho \cdot 4l},$$

$$Q = I^2 R \Delta t = \frac{\epsilon_i^2}{R} \Delta t = \frac{\epsilon_i s}{\rho \cdot 4l} \Delta t = \frac{s \Delta t}{\rho \cdot 4l} \left(\frac{B \Delta S}{\Delta t}\right)^2,$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = \frac{\epsilon_1^2}{R} \Delta t + \frac{\epsilon_2^2}{R} \Delta t + \frac{\epsilon_3^2}{R} \Delta t + \dots,$$

$$Q = \frac{\Delta t s}{4l \rho} \left(\frac{B}{\Delta t}\right)^2 (\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2 + \Delta S_3^2 + \dots) =$$

$$= \frac{B^2 s}{4l \rho \Delta t} \left(\left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{S}{4}\right)^2 + \left(\frac{S}{8}\right)^2 + \dots\right) =$$

$$= \frac{B^2 s}{4l \rho \Delta t} \frac{S^2}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{B^2 s}{4l \rho \Delta t} \frac{l^4}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right).$$

Сумма убывающей геометрической прогрессии равна

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Окончательно получаем

$$Q = \frac{B^2 l^3 s}{12 \rho \Delta t} = 1,25 \text{ МДж}.$$

6. Нормальное расстояние наилучшего видения $d = 25$ см. Изображение Ксении Петровны в зеркале находится на расстоянии $f = 2l = 40$ см. Оптическая сила очков

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{f - d}{df} = \frac{2l - d}{2dl} = +1,5 \text{ дптр}.$$

Ксения Петровна дальнорозорка, ее очки с собирающими линзами, изображение в них прямое мнимое.

Информатика Отборочный тур

1. Левая сверху – правая снизу; центральная сверху – левая снизу; правая сверху – центральная снизу. 2. 8 1 2. 3. А3, В2, С1, D4. 4. 4375. 5. 51, 937, 1. 6. 90, 96. 7. 6.

Новосибирский государственный университет

(с.м. «Квант» №10)

Физика I (отборочный) этап

Вариант 1

8 класс

1. $t = N \left(\frac{v_{\text{П}}}{v_{\text{П}} - v_{\text{Т}}} \right) \tau = 2 \text{ ч } 30 \text{ мин}$ (здесь $N = 5$ – количество встреч Пети и Тани).

2. $\rho = \frac{2}{3} \rho_{\text{ж}}$.

3. $l_2 = \frac{v - u}{v + u} l_1 = \frac{2}{3} l_1 = 2 \text{ км}$.

4. $x = \frac{a_1^3 - a_2^3}{a_1^3 + a_2^3} \frac{l}{2}$.

9 класс

2. $A = 3kL^2$.

3. $R_1 = \frac{9R_x - 4R_y}{7} = 8 \text{ Ом}$.

4. $\frac{q_{\text{T}}}{q} = \frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_0} = \frac{1}{9}$.

10 класс

4. $F = \mu(M + m)g + mg \sin \alpha.$

11 класс

1. $A = 2MgH.$

3. $m = \frac{2\rho S}{g}.$

4. $q_{\min} = \frac{l\sqrt{lk}}{4}.$

Вариант 2

8 класс

1. $\rho = \frac{2}{3}\rho_0 = 0,67 \text{ г/см}^3.$

2. $\Delta\tau = \Delta t - 0,1t = 35 \text{ мин} - 0,1 \cdot 330 \text{ мин} = 2 \text{ мин}.$

3. $m_1 = \frac{Ml_2}{l_1 + l_2}, m_2 = \frac{Ml_1}{l_1 + l_2}.$

4. $M = \frac{mb^2}{a^2} + \rho b^2(b - a).$

9 класс

1. $\frac{R}{R_L} = \frac{U - U_L}{U_L} = 3,4.$

3. $A = T_{\text{cp}}H = \frac{1+3}{2} \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} = 4 \text{ кДж}.$

4. $W = T - \frac{T}{N} = \frac{2022}{2023}T.$

10 класс

1. $\mu = \frac{v^2}{14gl}.$

3. $v_{\max} = \sqrt{2N(a-d)\mu g} \approx 2 \text{ м/с}.$

4. $x_{\text{опт}} = \frac{u}{2v} = \frac{1}{10} = 10\%.$

11 класс

2. $F = \left(v_1 + \frac{1}{3}v_2\right)\frac{RT}{L}.$

3. $m_{\min} = 3M\frac{r}{R}.$

4. $V' = 2V + 6xhd.$

II (заключительный) этап

8 класс

1. $s = \frac{t_{\text{п}} - t_{\text{с}}}{(1/v_{\text{с}}) - (1/v_{\text{а}})} = 6 \text{ км}.$

2. $t' = \frac{t_{\text{ком}}(t - t_{\text{ком}}) + t_{\text{кшп}}(t_{\text{кшп}} - t)}{t_{\text{кшп}} - t_{\text{ком}}} = 50 \text{ }^\circ\text{C}.$

3. $t = \frac{3}{2}\tau = \frac{3}{2} \cdot 80 \text{ с} = 120 \text{ с}.$

4. $\rho_2 = \frac{2\rho_{\text{в}}V_2g - \rho_1V_1g + \rho_{\text{в}}V_1g - F}{2V_2g} = 0,4 \text{ г/см}^3.$

9 класс

1. $L = \frac{c^2 - v^2}{2v}\Delta t \approx 110 \text{ м}.$

2. $t_x = \frac{R_x(t_2 - t_1) - R_1t_2 + R_2t_1}{R_2 - R_1} = 800 \text{ }^\circ\text{C}.$

3. $l = 2L.$

4. $M = \frac{2W}{gv \sin \alpha} = 1000 \text{ кг}.$

5. Часть резинки, оставшаяся на полу, длиннее части, оставшейся прикрепленной к потолку, в $\sqrt{2}$ раз.

10 класс

1. $F = p_0S.$

2. $F = 2kl\left(\text{ntg}\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ (резинка натянется так, что обе ее половины будут перпендикулярны соответствующим спицам).

3. $T = \frac{Mg}{\sqrt{1 - (R+r)^2/(R+r+L)^2}}.$

4. $x = H_0/2 + H - \sqrt{H^2 + (H_0/2)^2}.$

5. $l_{\max} = 2H\text{tg}\alpha$ (траектория струи – парабола, вершина которой касается потолка).

11 класс

1. $x = \frac{1}{3}.$

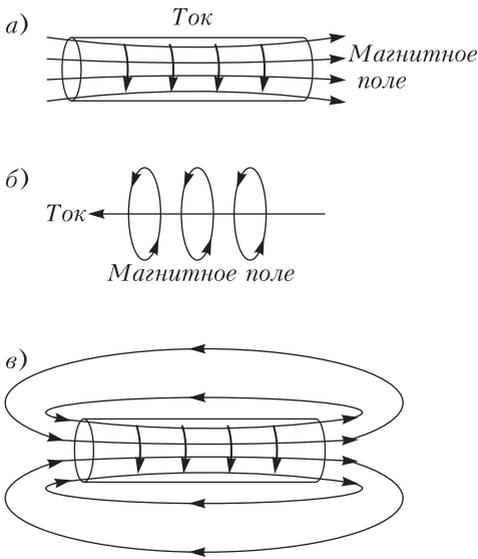
2. $\Delta t = \frac{mg}{k\beta}.$

3. $W = \frac{B^2v^3t^2}{\rho}.$

4. $a = \frac{\sqrt{3} - 3\mu}{2}g.$

5. $T = T_0 + \frac{v^2}{8c}.$

6. Если источник тока выключен, стрелки всех компасов показывают направление магнитного поля Земли, т.е. направлены приблизительно *на север*. При включении источника к магнитному полю Земли прибавляется магнитное поле, создаваемое током. Когда сила тока становится достаточно большой, магнитное поле тока преобладает над магнитным полем Земли и стрелки компасов ориентируются вдоль линий магнитного поля тока.Вспомним картину линий магнитного поля соленоида, т.е. цилиндра, по боковой поверхности которого течет ток (рис. 18,а). Сравнивая ее со схемой эксперимента, мы видим, что у торца катушки силовые линии направлены вдоль ее оси – с востока на запад. Поэтому стрелка торцевого компаса отклоняется *на запад*.



Лингвистические задачи

Прежде всего замечаем, что слова с *ѣ* в старой орфографии пишутся через *ѣ*: *тѣмный, щѣлка*. (Впрочем, разрешалось писать и простое *е*, как и в современной орфографии.) Далее, если в современной орфографии в корне какого-то слова пишется *е* и при изменении слова или в родственных ему словах вместо *е* когда-нибудь появляется *ѣ*, то в старой орфографии пишется *ѣ*, а если *ѣ* никогда не появляется, то пишется *ѣ*. Установления этой зависимости достаточно, чтобы записать в старой орфографии контрольные слова (важно только не забыть поставить *ѣ* на конце существительных, оканчивающихся на твердый согласный).

Однако за пределами контрольного списка применение этого простого правила может привести к трудностям и даже неверному результату. Например, нужно узнать, через *е* или *ѣ* писать слова *пень, семь, беда*. Начинаем перебирать другие формы этих слов и родственные слова: *пень* – *пенёк* – *пеньки* – *пенёчек*; *семь* – *семи* – *седьмой* – *семью* – *семьдесят* – *семнадцатый* – *семёрка* – *семеро* – *семерик* – ... Среди выписанных слов нигде нет *ѣ* на нужном месте, но, может быть, такое слово все же существует? Где должен остановиться наш перебор? На самом деле слова *пень* и *семь* пишутся по старой орфографии через *е*, так как есть слова *опѣнки* (грибы, растущие на пне) и *сам-сѣм* (об урожае: «в семь раз больше того, что посеяли»). Но что бы мы делали, если бы мы их не нашли? Желательно поэтому найти такое правило, которое не было бы связано с перебором.

Разделим все данные слова на 3 группы (см. таблицу), в зависимости от того, в какой позиции находится звук, обозначаемый интересующей нас буквой:

| Буква группы | ѣ | е | ѣ |
|--|-----------------|------------------------------|---------------------------|
| I. Под ударением перед твердым согласным | щѣлка
тѣмный | — | сѣтка
свѣтлый
снѣгъ |
| II. Под ударением перед мягким согласным | — | плеть
грѣзить
сельскій | дѣльный |
| III. В безударной позиции | | щека
селить
медокъ | рѣка
бѣлить
мѣлокъ |

Замечаем, что в I группе оказываются слова с *ѣ* и *ѣ* и нет слов с *е*. Во II и III группах есть слова с *е* и *ѣ*, слов с *ѣ* нет.

Рассмотрим слова II и III групп. Легко видеть, что в формах этих слов или в однокоренных словах, относящихся к I группе, произносится *ѣ* на месте *е* и *е* на месте *ѣ*: *плѣтка, грѣзы, сѣла, щѣк, мѣд, но дел, рек, бел, мел*.

Рис 18

Чтобы понять поведение верхнего и нижнего компасов, заметим, что провод намотан на трубку по спирали. Движение заряженных частиц (электронов) по такому проводу можно представить как комбинацию кругового движения вокруг оси катушки (см. рис. 18,а) и движения вдоль оси катушки, как если бы ток протекал по прямому проводу (рис. 18,б). Движение зарядов вокруг оси катушки создает магнитное поле соленоида, которое «заперто» внутри катушки, а движение зарядов вдоль оси катушки порождает магнитное поле, линии которого – круги вокруг катушки. Именно по этим круговым силовым линиям выстраиваются стрелки верхнего и нижнего компасов в первом эксперименте: верхнего – *на юг*, нижнего – *на север*.

Во втором эксперименте, когда подводящий провод пропущен внутри трубки, движение зарядов вдоль трубки оказывается скомпенсированным. Действительно, каждый заряд проходит по замкнутой цепи: сначала слева направо по катушке, а затем справа налево по проводу внутри трубки. Поэтому ток вдоль оси трубки во втором эксперименте не течет. Остается только магнитное поле соленоида. Чтобы понять, как оно действует на верхний и нижний компасы, нужно вспомнить, что линии магнитного поля – замкнутые кривые. Продолжив их до замыкания, можно увидеть (рис. 18,в), что над и под трубкой они ориентированы в противоположную сторону по сравнению с их направлением у торцов трубки. Поэтому стрелки верхнего и нижнего компасов отклоняются *на восток*, т.е. противоположно отклонению торцевого компаса.

Получаем правило: «Если в формах данного слова или в родственных ему словах под ударением перед твердым согласным произносится *ё*, то в исходном слове пишется *е*; если произносится *е*, то пишется *ё*».

Контрольные слова в старой орфографии выглядят так: *бѣда* (*бед*), *вѣрить* (*вера*), *весна* (*вѣсны*), *ель* (*ѣлка*), *клѣнь*, *клѣть* (*клетка*), *лѣсок*

(*лес*), *плѣнь*, *пчельникъ* (*пчѣлы*), *рѣзать*, *сѣра*, *стѣна* (*стен*), *стрѣла* (*стрел*).

Следует учитывать, однако, что даже из более точного второго правила есть много исключений (*кедръ*, *звѣзда*) и есть много непроверяемых случаев (*лѣсок*, *олень*), так что мы не советуем вам, решив эту задачу, считать себя умеющим писать по старой орфографии.

НАПЕЧАТАНО В 2023 ГОДУ

№ журнала с.

№ журнала с.

Статьи по математике

| | | |
|--|-------|----|
| Еще об одной олимпиадной задаче про графы, или Еще одна задача о раскраске.
<i>А.Райгородский</i> | 3 | 14 |
| За игрой в карты с чертиком Визинга.
<i>Б.Раберн, Л.Раберн</i> | 10 | 2 |
| К 120-летию со дня рождения
<i>А.Н.Колмогорова</i> | 5 | 2 |
| Конечные геометрии. <i>А.Колмогоров</i> | 5 | 3 |
| Математика языка. <i>В.Успенский</i> | 4 | 14 |
| Плотные упаковки шаров в пространстве.
<i>Н.Долбилин</i> | 6 | 15 |
| – " – | 7 | 2 |
| Последовательности Сомоса. <i>А.Устинов</i> | 8 | 8 |
| – " – | 9 | 11 |
| Сила математики. <i>Дж.Конвей</i> | 1 | 2 |
| Фризы. <i>А.Панов, Д.Панов, П.Панов</i> | 2 | 2 |
| Числа Бернулли, многочлены Эйлера и формулы сложения. <i>А.Веселов</i> | 11-12 | 10 |

Статьи по физике

| | | |
|---|-------|----|
| Альbedo и парниковый эффект. <i>В.Сурдин</i> | 1 | 10 |
| И снова премия за лазерные инструменты.
<i>Л.Белопухов</i> | 11-12 | 2 |
| Кирхгоф (к 200-летию со дня рождения).
<i>Л.Белопухов</i> | 9 | 2 |
| Космические тросовые системы.
<i>М.Никитин, А.Тепляков</i> | 2 | 12 |
| Курчатов и советский атомный проект.
<i>Л.Белопухов</i> | 6 | 2 |
| Малые составляющие атмосферы и парниковый эффект.
<i>М.Никитин, В.Сурдин</i> | 8 | 2 |
| Переменность. <i>Л.Ашкинази</i> | 10 | 7 |
| Про запас... <i>А.Минеев</i> | 4 | 2 |
| Проблемы резистора. <i>Л.Ашкинази</i> | 5 | 15 |
| Трансурановые элементы. <i>Л.Белопухов</i> | 3 | 2 |
| Что происходит при контакте.
<i>Л.Ашкинази</i> | 7 | 11 |

Из истории науки

| | | |
|--|---|----|
| Из истории раннего развития физики.
<i>С.Инишаков</i> | 2 | 20 |
|--|---|----|

Математический мир

| | | |
|---|-------|----|
| Дендрокомбинаторика. <i>А.Заболотский</i> | 3 | 20 |
| Письма А.Н.Колмогорова о ФМШ МГУ | 7 | 19 |
| Таймер из фитилей. <i>А.Заболотский</i> | 11-12 | 20 |

Задачник «Кванта»

| | | |
|---|------|----|
| Задачи М2730–М2777, Ф2737–Ф2784 | 1–12 | |
| Решения задач М2714–М2761, Ф2721–Ф2768 | 1–12 | |
| Левые и правые треугольники.
<i>Л.Шатунов, Т.Казанцева</i> | 1 | 28 |

«Квант» для младших школьников

| | | |
|--------|------|--|
| Задачи | 1–12 | |
|--------|------|--|

Статьи по математике

| | | |
|---|---|----|
| Как коллега Спрудль дорожил памятью.
<i>К.Кохась</i> | 4 | 30 |
| Сто замков и сто ключей. <i>С.Дориченко</i> | 1 | 33 |

Статьи по физике

| | | |
|---|---|----|
| Задача Джона Сильвера (о математических задачах с позиций физики).
<i>С.Дворянинов</i> | 3 | 34 |
| Как облегчить сизифов труд.
<i>С.Дворянинов</i> | 1 | 36 |
| Разумное моделирование. <i>С.Дворянинов</i> | 6 | 23 |

Конкурс имени А.П.Савина

| | | |
|--------------------------------------|-----------|----|
| Задачи | 1–4, 9–12 | |
| Итоги конкурса 2022/23 учебного года | 11-12 | 40 |

Калейдоскоп «Кванта»

| | | |
|---|-------|----|
| М а т е м а т и к а | | |
| Одна задача по геометрической вероятности | 4 | 32 |
| Ф и з и к а | | |
| Физика + архитектура | 11-12 | 32 |
| Физика + живопись | 8 | " |

| | № журнала | с. | | № журнала | с. |
|---|-----------|----|---|-----------|----|
| Физика + медицина | 6 | “ | Физика гитарного эффекта. <i>Д.Богатова,</i> | | |
| Физика + музыка | 9 | “ | <i>И.Пылев, С.Пылев</i> | 9 | 35 |
| Физика + спорт | 5 | “ | Электричество с парусами. <i>С.Герасимов</i> | 10 | 36 |
| Физика + экология | 2 | “ | Наши наблюдения | | |
| Школа в «Кванте» | | | Парад ледяных сталагмитов. <i>В.Птушенко</i> | 5 | 42 |
| М а т е м а т и к а | | | Светлое отражение темного пятна.
<i>В.Птушенко</i> | 3 | 37 |
| Вспомогательные равносторонние тре-
угольники. <i>М.Васильев, Т.Корчемкина</i> | 3 | 38 | Практикум абитуриента | | |
| Теорема о трех плоскостях. <i>Ю.Блинков</i> | 10 | 27 | Диаграмма состояния. <i>В.Белонучкин</i> | 7 | 37 |
| Ф и з и к а | | | Олимпиады | | |
| Лунная лыжня? <i>Е.Германюк</i> | 6 | 36 | Избранные задачи XXVIII Турнира
имени А.П.Савина | 9 | 38 |
| Любимый город в синей дымке тает...
<i>А.Стасенко</i> | 7 | 36 | Заключительный этап XLIX Всероссийской
олимпиады школьников по математике | 6 | 51 |
| Проводящий шар в однородном поле.
<i>А.Черноуцан</i> | 2 | 31 | Заключительный этап Всероссийской
олимпиады школьников по физике
имени Дж.Максвелла 2023 года | 7 | 42 |
| Физический факультатив | | | Заключительный этап LVI Всероссийской
олимпиады школьников по физике | 9 | 39 |
| Диск Фейнмана, конденсатор Тамма
и импульс электромагнитного поля.
<i>С.Герасимов</i> | 5 | 37 | LXIV Международная математическая
олимпиада | 8 | 34 |
| Дифракционные решетки. <i>П.Крюков</i> | 11-12 | 41 | XXIX и XXX Международные олимпиады
школьников «Туймаада». Физика | 9 | 43 |
| Как частица к Солнцу стремилась.
<i>А.Стасенко</i> | 1 | 43 | 84-я Московская олимпиада школьников
по физике | 5 | 47 |
| Капля, отвердевающая в поле центро-
бежных сил. <i>А.Кашеваров, А.Стасенко</i> | 3 | 43 | Муниципальный этап LVII Всероссийской
олимпиады школьников по физике | 2 | 50 |
| Конфигурационное и импульсное
пространства. <i>А.Бычков</i> | 6 | 40 | Олимпиада «Ломоносов». Физика | 4 | 45 |
| Космические парусники на световой тяге.
<i>М.Никитин</i> | 4 | 40 | Региональный этап XLIX Всероссийской
олимпиады школьников по математике | 3 | 45 |
| Кривая через точки. <i>Л.Ашкинази</i> | 2 | 45 | Региональный этап LVII Всероссийской
олимпиады школьников по физике | 3 | 47 |
| Механика сферы Дайсона. <i>М.Никитин,</i>
<i>А.Тепляков</i> | 10 | 31 | Экзаменационные материалы | | |
| Поглощение частиц в простейшей
неоднородной системе. <i>Р.Коркин</i> | 8 | 29 | ЕГЭ по физике 2023 года | 10 | 39 |
| Таутохронизм, или Два путника и линза.
<i>А.Стасенко</i> | 9 | 34 | Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова. Профильный
экзамен по физике | 9 | 46 |
| Математический кружок | | | Национальный исследовательский
университет «МИЭТ» | 7 | 45 |
| Волшебные пятерки. <i>А.Устинов</i> | 7 | 41 | Новосибирский государственный
университет | 10 | 52 |
| Геометрия фейерверка. <i>А.Заславский,</i>
<i>Ф.Нилов</i> | 1 | 39 | Олимпиада «Покори Воробьевы горы!».
Физика | 8 | 36 |
| Задача о двух биссектрисах. <i>Е.Бакаев</i> | 5 | 43 | Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого | 10 | 45 |
| Метод стирания точек. <i>М.Дидин</i> | 6 | 45 | Физико-математическая олимпиада
«Физтех». Математика | 11-12 | 47 |
| Мудрецы на графе. <i>К.Кохась,</i>
<i>А.Латышев</i> | 8 | 24 | Информация | | |
| Платные веса. <i>А.Грибалко, А.Заславский</i> | 9 | 30 | Заочная физико-техническая школа
МФТИ | 1 | 42 |
| Повороты и круговые интерпретации.
<i>Е.Бакаев, П.Кожевников</i> | 2 | 39 | | | |
| Лаборатория «Кванта» | | | | | |
| Как заставить капли дождя лететь вверх,
или Секрет стробоскопа. <i>А.Иванов</i> | 11-12 | 43 | | | |
| Связанные маятники. <i>Е.Бутиков</i> | 4 | 37 | | | |

| | № журнала | с. |
|--|-----------|---------------|
| Нам пишут | | |
| Еще раз об огранке бриллианта | 4 | 43 |
| Рецензии, библиография | | |
| В погоне за красотой геометрии | 6 | 49 |
| Математики, которые играли
в математику | 11-12 | 23 |
| Вниманию наших читателей | | |
| Падежи на карте мира | 4 | 18 |
| Теорвер большой... | 11-12 | 48 |
| Типы фризмов по Джону Конвею | 2 | 11 |
| Фатбол | 1 | 9 |
| Коллекция головоломок | | |
| Аквариум | 6 | 2-я
с. обл |
| Бутылочное горлышко | 2 | “ |
| Двуслойный шестиугольник | 10 | “ |
| Дотрис | 4 | “ |
| Квадро | 8 | “ |
| Круг и квадрат | 5 | “ |
| Лингвистические задачи | | |
| Да и нет | 9 | 2-я
с. обл |
| Две задачи | 7 | “ |
| Зверь не стол, а собака не медведь... | 3 | “ |
| Китайские числа | 5 | “ |
| Правило старой орфографии | 11-12 | “ |
| Три задачи | 1 | “ |
| Шахматная страничка | | |
| Абсолютный чемпион | 1 | 3-я
с. обл |
| Большая швейцарка | 10 | “ |
| В чем сила, брат? | 11-12 | “ |
| Два билета | 6 | “ |
| Исчезающая классика | 7 | “ |
| Коварные разноцветные слоны | 3 | “ |
| Красиво и результативно | 2 | “ |
| Кубок остается в России | 8 | “ |
| Новый чемпион | 5 | “ |
| Полная коллекция | 9 | “ |
| Чемпион Европы | 4 | “ |
| Прогулки с физикой | | |
| Загадочные цвета | 7 | 4-я
с. обл |
| Космолет на солнечной тяге | 4 | “ |
| Ледяные сталагмиты | 5 | “ |
| Льжжня на Луне – ?! | 6 | “ |
| Опрокидывание через ребро | 1 | “ |
| От шарманки до терменвокса | 9 | “ |

| | № журнала | с. |
|----------------------------------|-----------|----|
| Парус и электричество | 10 | “ |
| Свет и цвет в природе | 8 | “ |
| Следы от рук на замерзшем стекле | 3 | “ |
| Трос в ... космосе | 2 | “ |
| Физика и архитектура | 11-12 | “ |

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

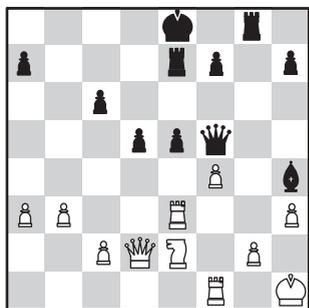
**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40**

В чеМ СИЛА, БРАТ?

Сенсационной победой Рамешбабу Вайшали закончилась женская часть соревнований в рамках «Большой швейцарки» на острове Мэн. Индийская шахматистка завоевала путевку в турнир претенденток (ранее ее младший брат Рамешбабу Прагнананда уже вышел в турнир претендентов). Второе место заняла Анна Музычук, а третье-четвертое поделили бывшая чемпионка мира Тань Чжуньи, которой путевка досталась напрямую, и воспитанница московского Дворца пионеров монгольская шахматистка Бат Монгнтуул, которая отправится на турнир претенденток в случае почти гарантированного отказа Хоу Ифань, еще одной бывшей чемпионки мира.

Вайшали Р. – Тань Чжуньи
FIDE Grand Swiss Women, 10 тур

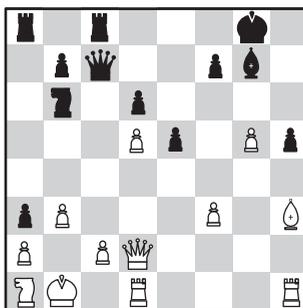
1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♘f6 5. ♘c3 ♘c6 6. ♘g5 ♘d7 7. ♘c6 ♘c6 8. ♘f6 gf 9. ♘b5 ♘g8 10. 0-0 ♘d7 11. ♘c6 bc 12. f4 ♘b8 13. ♘f3 ♘g4 14. b3 ♘b4 15. ♘ad1 e6?! (переход в окончание после 15... ♘f3 16. ♘f3 e6 17. ♘h3 ♘h8 выглядит предпочтительнее) 16. ♘f2! (не давая второго шанса на упрощения) f5 17. a3 ♘b7 18. ♘d3 ♘e7 19. ♘h1 ♘h4 20. ♘d2 d5 21. h3 ♘g6 22. ef ♘f5 23. ♘e2 e5 24. ♘e3 ♘e7. Единственный шанс давало 24... e4!, стараясь закрыть вертикаль 25. c4 ♘f8 26. ♘d4 ♘d7 27. b4 с перевесом у белых.



25. ♘b4! (с угрозой выиграть ладью) ♘g6 26. g4! h5 27. fe hg 28. ♘b8+ ♘d7 29. ♘a7+ ♘c8 30. ♘a8+ ♘c7 31. ♘a7+ ♘c8 32. ♘a6+ ♘c7 33. ♘f4! (выигрывающий ход) ♘h7 (33... ♘c2 ведет к потере ладьи после 34. ♘a7+ ♘c8 35. ♘a8+ ♘d7 36. ♘g8) 34. ♘a7+ ♘c8 35. ♘a8+ ♘d7 36. ♘b7+ ♘d8 37. ♘b8+ ♘d7 38. ♘b7+ ♘d8 39. ♘c6 ♘c7 40. ♘d5+ ♘e8 41. ♘a8+ ♘d8 42. ♘d1 ♘h4 43. ♘ed3, черные сдались.

Тань Чжуньи – Г.Мамедзаде
FIDE Grand Swiss Women, 11 тур

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. ♘e3 e5 7. ♘b3 ♘e6 8. f3 h5 9. ♘d5 ♘d5 10. ed ♘bd7 11. ♘d2 g6 12. 0-0-0 ♘g7 13. ♘b1 0-0 14. h3 ♘c7 15. g4 ♘b6 16. ♘g5 h4 17. ♘h4 ♘fc8 18. ♘f6 ♘f6 19. h4 a5 20. g5 ♘g7 21. h5 a4 22. ♘a1 a3 23. b3 gh 24. ♘h3.

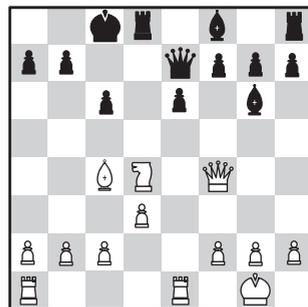


24... ♘f8?! В остром миттельшпиле черные упускают 24... ♘c3! из-за матовых угроз после 25... e4!; здесь белые вынуждены менять ферзей и остаются со слабыми пешками на f3 и d5. 25. c4! e4. Жертва пешки уже не проходит, так как белые успевают защитить большую диагональ. 26. fe ♘e7 27. ♘c2 ♘e5 28. ♘d6 ♘g3 29. ♘d3 ♘d4 30. ♘g3 ♘e5 31. ♘f3 f6 32. ♘g1 ♘f7 33. g6+ ♘g7 34. ♘e3, и ввиду критической слабости белых полей черные сдались.

M.Нарва – Б.Монгнтуул
FIDE Grand Swiss Women, 10 тур

1. e4 c6 2. ♘c3 d5 3. ♘f3 de 4. ♘e4 ♘f6 5. ♘e2 (старинный ход, более популярно 5. ♘f6 gf 6. d4) ♘e4 6. ♘e4 ♘d5 7. ♘h4

♘f5 8. ♘c4 ♘d6 9. d3 e6 10. ♘f4 ♘e7 11. ♘g3 ♘d7 12. 0-0 ♘f6 13. ♘d4 ♘g6 14. ♘fe1 ♘h5 15. ♘f3 ♘f4 16. ♘f4 0-0.



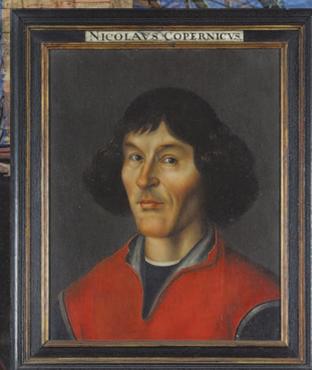
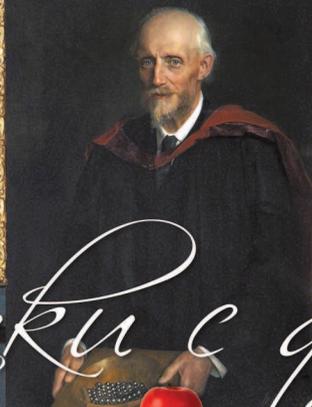
17. ♘e6 (соблазнительная, но некорректная жертва, аккуратнее спокойное 17. ♘f3) fe 18. ♘e6+ ♘d7 19. h4 ♘d6 20. ♘g4 ♘c7 21. h5 ♘f7 22. ♘d7 ♘d7 23. ♘g5 h6 24. ♘h4 ♘d6 25. ♘e4 ♘d5 26. ♘e3 ♘f8 27. ♘ae1 ♘f4 28. ♘f4 ♘f4 29. ♘e7 ♘f7 30. ♘1e4 ♘c1 31. g4 ♘d5 32. ♘d7+ ♘d7 33. ♘a4 a6 34. b3 c5 35. d4 ♘c6 36. ♘h2 ♘d2 37. ♘g3 a5 38. dc ♘c5 39. a3 b5 40. b4+ ab 41. ab+ ♘xb4 42. ♘a7 ♘c3 43. f3 b4 44. ♘f2 ♘d4+ 45. ♘e2 ♘c4+ 46. ♘d2 ♘d6 47. ♘b7 ♘c3+ 48. ♘e3 ♘g8 49. ♘e2 ♘e6 50. ♘b8 ♘f7 51. ♘b7 ♘e8 52. ♘e3?! (точнее 52. ♘a7, держа под контролем линию a) ♘a4! 53. ♘d3 ♘c6 54. ♘b6 ♘d7 55. ♘e3 ♘c7 56. ♘a6 ♘b7 57. ♘a5 b3! Черные отдают слонов, но пешка проходит в ферзи. 58. ♘a3 b2 59. ♘c3 ♘d5 60. ♘d3 b1 ♘ 61. ♘d5 ♘c2. На доске технически выигранная позиция. 62. ♘d2 ♘c1 63. ♘e2 ♘c6 64. ♘d4 ♘c5 65. ♘e4 ♘d5 66. ♘f2 ♘c2+ 67. ♘g3 ♘b1 68. ♘g2 ♘d1 69. ♘e8 ♘c2+ 70. ♘g3 ♘b1 71. ♘g2 ♘d6 72. ♘e2 ♘d1 73. ♘e4 ♘d7 74. ♘f2 ♘h1 75. ♘g3 ♘g1+ 76. ♘f4 ♘f2 77. ♘e5 ♘h2+ 78. ♘f5 ♘g3 79. ♘e4 ♘d6 80. ♘f5 ♘e6 81. ♘e3 ♘c7 82. ♘f2 ♘h2+ 83. ♘e3 ♘g2 84. ♘f4 ♘c2 85. ♘e4+ ♘f6 86. ♘f4 ♘h2+ 87. ♘e3 ♘g5 88. ♘d4 ♘h4 89. ♘d5 ♘g3 90. ♘f5 ♘f2+ 91. ♘e4 ♘e2+ 92. ♘d5 ♘f3+! 93. ♘f3+ ♘f3 94. g5 hg 95. ♘e6 ♘g4, белые сдались.

А.Русанов

Индекс 90964

ФИЗИКА И АРХИТЕКТУРА

Можно ли возводить дома на песке?
В чем преимущества арочных конструкции?
Почему нельзя строить здания с проемами в ветреных районах?



Уроки с физикой



ISSN 0130-2221 23011



9 770130 222238

(ОТВЕТЫ НА ЭТИ И ПОДОБНЫЕ ВОПРОСЫ – НА С. 32 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)