

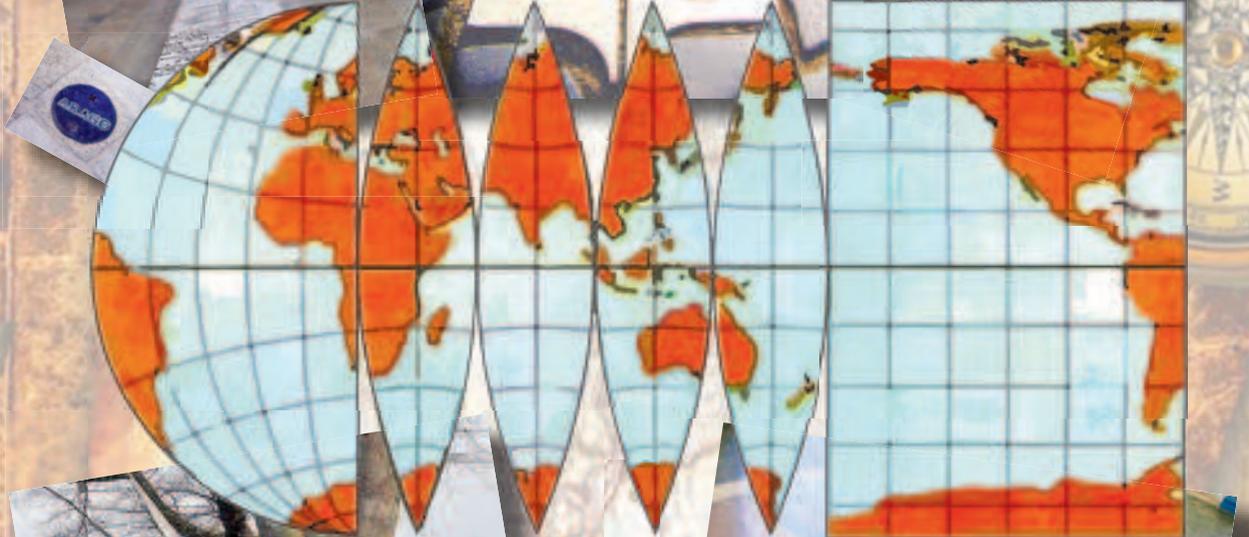
СЕНТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

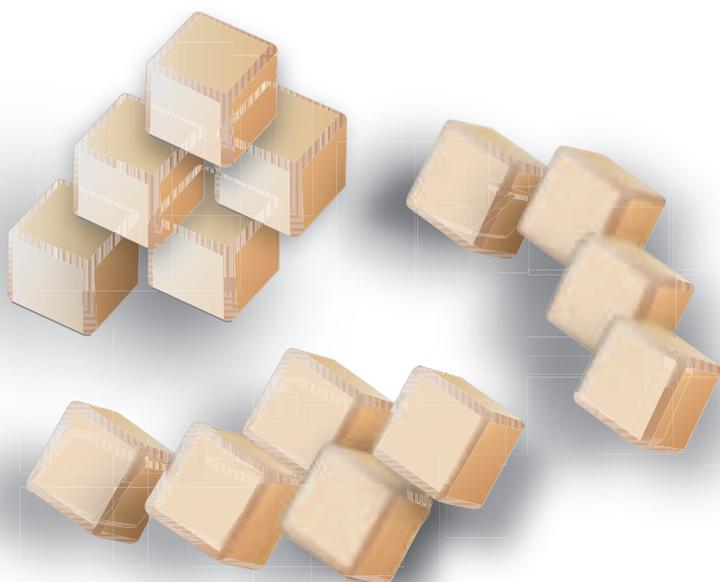
2019 · № 9

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# СИМФОНИЯ СИММЕТРИИ



Эта головоломка Люси Пауэлс (Lucie Pauwels) – хорошая проверка для пространственного воображения! В ней всего три детали, составленные из единичных кубиков (две детали – из пяти кубиков, одна – из четырех). Соседние кубики перекрываются по четвертинкам граней. Требуется сложить их в симметричную фигуру. Желаем успеха!

*Е.Епифанов*

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Ветру и солнцу навстречу. *А.Минеев*  
9 Картография и кривизна. *И.Тайманов*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи M2574–M2577, Ф2581–Ф2584  
15 Решения задач M2562–M2565, Ф2569–Ф2572

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 22 Задачи

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 23 Ледяная сосулька и космический трос.  
*А.Стасенко*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 25 Точка Нагеля и окружности пяти точек.  
*Н.Вяткин*  
30 Точка Нагеля и разностный треугольник.  
*С.Арутюнян*

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 33 Задачи 1–4

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 34 ЕГЭ по физике  
42 Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова. Физика  
44 Физико-математическая олимпиада «Физтех»  
52 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (21, 64)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье И.Тайманова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Ветру и солнцу навстречу

А.МИНЕЕВ

*А путь и далек, и долог,  
И нельзя повернуть назад.  
Держись, геолог, крепись, геолог,  
Ты ветра и солнца брат.*

Гимн геологов XX века

**В**ГИМНЕ ГЕОЛОГОВ XX ВЕКА РЕЧЬ ШЛА об открытии геологами месторождений, главным образом, руд, металлов и *невозобновляемых* источников энергии – нефти, газа и каменного угля, урана и тория и т.д. А ветер и солнце – «братья геолога» – в этой песне шли фоном, на котором разворачивались открытия полезных ископаемых.

В XXI веке другие вызовы. Тут уже ветер и солнце рвутся в лидеры мировой *возобновляемой* энергетики. Рвутся с такой силой и скоростью, что грозят потеснить и даже вытеснить со временем уголь, нефть, газ и атом с пространства энергетики. Пройдемся с ручкой и блокнотом по этому новому «возобновляемому полю» и присмотримся к цифрам и некоторым проблемам.

## Сколько нужно энергии?

В настоящее время в мире проживает около 7,7 млрд человек (май 2019 г.) и на каждого в среднем тратится мощность 2,3 кВт. Общее потребление энергии приблизилось к величине  $0,6 \cdot 10^{21}$  джоулей в год, или  $0,6 \text{ Q/год}$  ( $1 \text{ Q} = 10^{21} \text{ Дж}$ ), или около 20 ТВт мощности ( $2 \cdot 10^{13} \text{ Вт}$ ).

Много это или мало? Приведенная удельная мощность средних потребностей людей на Земле (2,3 кВт/чел) складывается из бытовых энергозатрат (холодильник – 150 Вт, компьютер – 300 Вт...), затрат на транспорт, промышленность и т.д. Перепроверим еще раз указанные цифры, воспользовавшись следующей информа-

цией: в 2017 году мир в целом потребил 13,5 миллиардов тонн нефтяного эквивалента (ТНЭ). Одна ТНЭ по энергии равна  $4,2 \cdot 10^{10}$  Дж, а 13,5 млрд ТНЭ составит  $0,57 \text{ Q/год}$ , или действительно около 2,3 кВт на человека.

В будущем (к 2050 г.) ожидаются увеличение населения до 10 млрд человек, некоторый рост удельной мощности потребления энергии и в результате человечеству нужно будет добывать около  $1 \text{ Q/год}$ , или непрерывно потреблять 30 ТВт мощности.

## Структура производства энергии из невозобновляемых и возобновляемых источников

Сложившаяся к настоящему времени структура производства энергии и динамика ее изменения в течение последних 10 лет приведены в таблице 1. Что следует из этой таблицы?

1) Невозобновляемые ресурсы обеспечивают основную выработку энергии. Их доля сейчас более 80%.

2) Доля атомной энергетики остается примерно постоянной на уровне 5%.

3) Что касается возобновляемых источников энергии – ВИЭ, – то:

- больше всего энергии дает пока сжигание древесины и биомассы, но доля этого ресурса постепенно падает и сейчас составляет около 10%;

- на втором месте – гидроэнергетика; этот ресурс по величине абсолютной мощности генерации практически вышел на стационар, так как районы, в которых целесообразно строить ГЭС, в основном уже освоены; сейчас она составляет 2,5%, но по мере роста суммарного потребления энергии в мире доля гидроэнергии будет постепенно падать;

- доля ветра и солнца быстро растет, хотя пока в *мировом* производстве энергии она невелика;

Таблица 1

Вид энергоресурса	2008 г.	2018 г.	
Нефть + газ + уголь, %	78	81	Невозобновляемые
Атомная энергия, %	5	5	
Древесина и биомасса, %	13,5	10	Возобновляемые
Гидро, %	3	2,5	
Ветер+солнце, %	0,5	1,5	
Сумма по всем ресурсам, %	100	100	
Возобновляемые (древесина + био + гидро + ветер + солнце)	17	14	

• суммарная доля возобновляемых ресурсов (несмотря на рост доли ветра и солнца) пока снижается, главным образом из-за снижения выработки энергии из древесины и биомассы.

На этом фоне планы *отдельных* стран по развитию возобновляемой энергетики, приведенные в таблице 2, выглядят очень

в 2020 году намечено достичь уровня генерации энергии от ВИЭ в 27%, к 2030 году также можно ожидать 35–40%. И даже Франция, где ядерная энергетика всегда была национальным приоритетом и ее доля в выработке энергии в недавнем прошлом достигала 75–78%, в последнее время намечает рост доли ВИЭ до 40% (к 2035 г.)

Таблица 2

Страна	Население, млн чел. (2019 г.)	Доля ВИЭ (2014г.)	Цель
Германия	80	28%	80% к 2050 г.
Дания	5,5	49%	100% к 2050 г.
Индия	1400	10%	40% к 2030 г.
Китай	1400	9%	27% к 2020 г.
Франция	65	18%	40% к 2030 г.

амбициозно. Отдельно отметим ситуацию в Германии и Дании. Германия после аварии на АЭС в японской Фукусиме приняла решение полностью закрыть атомную генерацию у себя в стране и форсированно перейти к возобновляемым источникам энергии. В 2014 году суммарная доля ВИЭ в Германии составила уже 28% (ветер – 10%, солнце – 6%, гидро – 3%, био – 9%). В «крошечной» Дании, пионере освоения ветроэнергетики, достигли уровня ветрогенерации в 50% и не собираются на этом останавливаться. Что касается «тяжеловесов» по населению (Индия и Китай), то Индия предполагает выйти на 40% ВИЭ к 2030 году. Судя по тому, что в Китае уже

и постепенное снижение атомной генерации до уровня 50% (к 2035 г.).

С чем связано такое внимание к ВИЭ? Тут несколько составляющих. Во-первых – *экологическая*. При производстве электроэнергии с помощью возобновляемых источников энергии (ветер, солнце, гидро) отсутствуют вредные выбросы и, особенно, образование углекислого газа ( $\text{CO}_2$ ), влияющего на климат и глобальное потепление. Во-вторых – *ресурсная*. Запасы невозобновляемых источников энергии на Земле ограничены. Ресурс же ветра и солнечной энергии весьма велик и поддерживается, пока светит наше небесное светило.

### Невозобновляемые источники энергии: ресурсы

На рисунке 1 показаны основные страны-производители и ожидаемые периоды максимума добычи этими странами нефти, газа и каменного угля. Видно, что в XXI

гетике существенно выше. Есть возможность использования как уранового, так и ториевого топлива, а также сжигание топлива в реакторах на быстрых нейтронах, что еще более расширяет ресурсную базу атомной генерации. По степени влияния

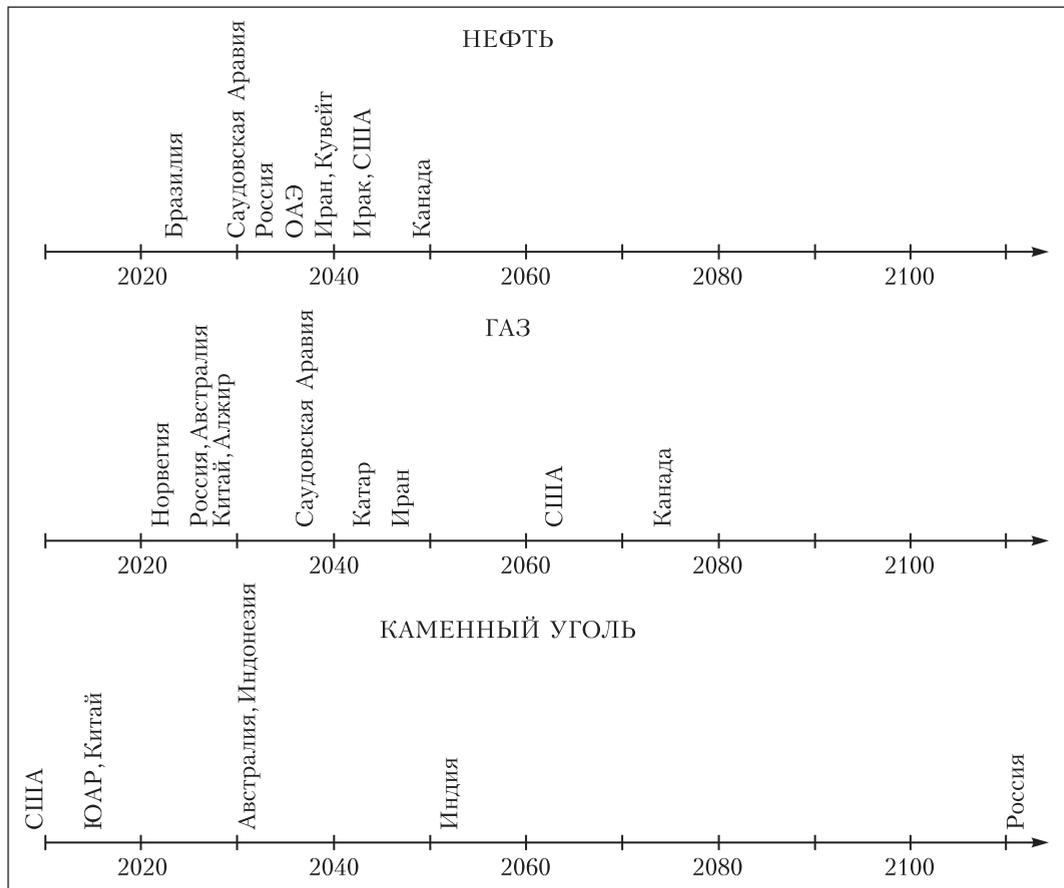


Рис. 1. Временное положение пиков добычи

столетии будет пройден пик добычи и должно произойти постепенное истощение запасов этих полезных ископаемых. Отметим, что пик добычи каменного угля в США, ЮАР и Китае уже миновал. Добыча нефти и газа будет снижаться уже в ближайшие десятилетия в большинстве стран, за исключением США и Канады. В сланцах (США) и битумных песках и глинах (Канада) довольно много нефти и газа, однако их извлечение вызывает серьезные экологические проблемы. В этом смысле ресурсы сырья для атомной энер-

на окружающую среду из большой тройки невозобновляемых ресурсов (газ, нефть, уголь) газ является наиболее чистым, каменный уголь – наиболее грязным (выбросы электростанций на газе примерно в 2 раза меньше, чем на угле; при газовой генерации нет золы и сажи и т.д.). Газ чище, чем биотопливо. Наконец, есть еще одно важнейшее достоинство газовой генерации электроэнергии – возможность *быстрой регулировки мощности*, что важно при балансировке генерации энергии с ее потреблением.

### Возобновляемые источники энергии, особенности генерации

Мотором, приводящим в движение основные возобновляемые источники энергии, является излучение Солнца. Благодаря этому текут реки, дует ветер и растут растения. Энергию солнечного излучения, движения ветра, течения воды и биомассу естественно использовать для нужд человека (рис.2). Получать энергию можно также, используя тепловые процессы, происходящие в толще земной поверхности и

*В раю Архимед, Паскаль и Ньютон играют в прятки. Архимед водит и начинает считать. Паскаль убегает за горизонт, а Ньютон оглядывается, берет палку, рисует вокруг себя квадрат со стороной один метр и становится внутри квадрата. Архимед заканчивает считать, открывает глаза и видит Ньютона. – Я вижу Ньютона! – Э, нет! Ньютон на квадратный метр это Паскаль!*

Мы тоже, как и в этой шуточной притче, присмотримся сначала издали и за-



ВЭС (ветровые электростанции на суше и на море)



СЭС

(солнечные электростанции)



ГЭС

(гидроэлектростанции)



Биомасса

Рис. 2. Основные виды возобновляемых источников энергии

океанах. Эти возобновляемые источники энергии на небольшом уровне использовались испокон веков, но сейчас на наших глазах происходит революция в их применении.

Из возобновляемых источников энергии гидро и биомасса близки к насыщению, в то время как генерация с помощью ветра и солнца быстро растет. На них мы и посмотрим поближе. Навскидку – нет проблем. Известна такая притча:

тем поближе, какая мощность от возобновляемых источников приходится на квадратный метр. В роли Ньютона здесь выступит Джеймс Уатт. Удельная мощность излучения Солнца вблизи орбиты Земли составляет  $1,4 \text{ кВт/м}^2$  (солнечная постоянная). Если бы эту мощность можно было без потерь перевести в электроэнергию, то требуемые человечеству 20–30 ТВт заняли бы площадь всего  $(1,5 - 2) \cdot 10^{10} \text{ м}^2 = 15000 - 20000 \text{ км}^2$ . Не

так много – площадь квадрата со стороной 120–140 км.

Если не вдаваться в детали, то и с ветром похожая благоприятная картина. Действительно, мощность  $N$ , развиваемую вращающимися лопастями ветроагрегата, можно оценить в виде произведение силы  $F$  на скорость ветра  $v$ :

$$N = Fv = \frac{\rho v^2}{2} Sv, \text{ или } \frac{N}{S} = \frac{\rho v^3}{2},$$

где  $S$  – эффективная площадь,  $\rho$  – плотность воздуха. При  $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$  и скорости ветра  $v = 10 \text{ м/с}$  удельная мощность составляет  $N/S \sim 650 \text{ Вт/м}^2$  – величину того же порядка, что и солнечная постоянная.

Казалось бы все хорошо. Но если приглядеться...

**Солнечная генерация.** Величина электроэнергии, снимаемой с единицы площади солнечных панелей в *реальных конструкциях*, оказывается на несколько порядков ниже. Причин несколько. Например:

- излучение Солнца, проходя атмосферу, приходит на поверхность Земли сильно ослабленным;
- в материале солнечной панели излучение поглощается лишь частично;
- КПД преобразования поглощенной энергии в электричество не слишком высок;
- в ночной период и при облачности излучение существенно меньше.

Что получается в итоге для реальных конструкций солнечных панелей? По данным немецких исследователей (не заинтересованных в занижении величин), характерная величина удельного энергопотребления с солнечных панелей составляет всего  $\sim 1 \text{ Вт/м}^2$  в среднем по солнечным СЭС в мире,  $\sim 5 \text{ Вт/м}^2$  на территории Германии и  $\sim 20 \text{ Вт/м}^2$  в Сахаре. Это приводит к очень большим площадям и огромному расходу материалов. В результате при удельном энергопотреблении в  $5 \text{ Вт/м}^2$  для полной замены требуемой человечеству энергии (20–30 ТВт) с помощью СЭС требуется площадь панелей  $\sim (4-6) \cdot 10^{12} \text{ м}^2 = (4-6) \cdot 10^6 \text{ км}^2$ !

Что касается материалоемкости, то приведем всего пару показательных цифр. Известно, что для обеспечения конструкции солнечных панелей требуется несколько килограммов алюминия на каждый квадратный метр их площади. Если для оценки взять  $2 \text{ кг/м}^2$ , то при площади панелей  $(4-6) \cdot 10^{12} \text{ м}^2$  потребуется около  $10^{10}$  тонн алюминия (!). При той же потребности в материалах каждому мегаватту электрической мощности, снимаемому с солнечной панели, соответствует 400 тонн металлоконструкций (!).

**Ветровая генерация.** При использовании ветра снимаемая с ветроагрегата мощность быстро растет при увеличении скорости ( $\sim v^3$ ). Однако, как и в случае солнечной генерации, есть ряд факторов, уменьшающих выход энергии с единицы площади. Так, ветроагрегаты должны располагаться на достаточном удалении друг от друга, иначе будет нарушен характер течения воздуха; площадь лопастей ветроагрегата всегда гораздо меньше заметаемой ими площади; ветроагрегаты плохо работают при очень большой и очень малой скорости воздуха.

Типичное значение удельной мощности на единицу площади земной поверхности, отчуждаемой ветроагрегатом (по данным немецких исследователей), составляет  $2-3 \text{ Вт/м}^2$ . Тот же порядок, что в случае солнечной генерации. Поэтому для полной замены требуемой человечеству энергии при использовании ветра потребуются тот же огромный уровень необходимых площадей для размещения ветроустановок, порядка  $10^{13} \text{ м}^2 = 10^7 \text{ км}^2$ , и тот же уровень материалоемкости. В литературе приводится такая цифра для ветряной генерации: 1 МВт соответствует 100 т стальных конструкций ветроагрегата, т.е. для полной замены требуемой энергии ветряной генерацией потребуется порядка  $(2-3) \cdot 10^9$  тонн стальных конструкций.

В результате получается, что переход на ветер и солнце должен сопровождаться огромными затратами материалов и очень большими площадями для размещения оборудования. Причем производство этих

материалов (не говоря уже о редкоземельных элементах, требующихся для производства солнечных батарей) не является экологичным. Не случайно Германия выводит из страны стальную и алюминиевую отрасли промышленности в страны Юго-Восточной Азии и Восточной Европы, перемещая неэкологичные технологии в другие регионы мира. Но куда в таком случае перемещать, если все страны решат переходить на ветер и солнце?

**Временной баланс потребления и генерации.** На рисунке 3 приведен характерный вид кривой потребления электроэнергии в течение суток. На нем можно выде-

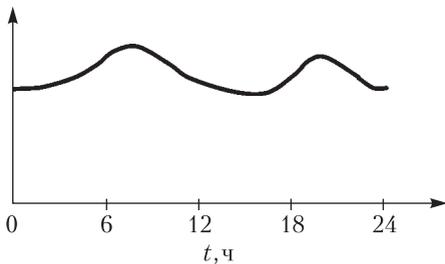


Рис. 3. Временной характер потребления электроэнергии

лить утренний и вечерний пики потребления (6–9 ч и 18–21 ч соответственно) и некоторый спад в дневное и ночное время. Пик производства электроэнергии при использовании солнечной генерации, при-

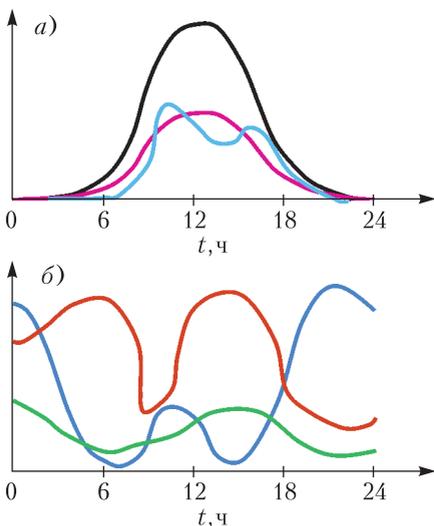


Рис. 4. Временной характер солнечной (а) и ветряной (б) генерации

ходящийся на дневное время, приведен на рисунке 4,а. Черная кривая соответствует безоблачному небу, цветные — вариантам облачности. Переменчивый характер вариантов ветряной генерации показан на рисунке 4,б. Сопоставление картин поступления и потребления электроэнергии показывает, что корреляции между ними нет и соблюсти баланс *в каждый момент времени* при прямом использовании только солнечной и ветряной генерации невозможно.

**Коэффициент использования мощности возобновляемых и невозобновляемых источников энергии.** Переменный и даже непредсказуемый характер генерации энергии ветра и солнца приводит к тому, что соответствующие агрегаты используются неоптимально и коэффициент использования мощности снижается. На атомных электростанциях этот коэффициент достигает 95–98% (в среднем он выше 80%). Для ветроагрегатов он составляет приблизительно 17% в среднем по Европе, 15–20% в Германии, 15% в Китае, 25% в США, где много территорий, на которых постоянно дуют сильные ветры. Для солнечных электростанций коэффициент использования мощности порядка 10% в Германии, 15% во Франции, 15–10% в США. Это означает, что *установленная* мощность генерации ветра и солнца, т.е. та, которую можно было бы получать при оптимальных условиях, существенно превышает мощность, которая фактически вырабатывается.

### Что делать?

Вернемся к таблице 2, в которой отражены планы резкого увеличения доли возобновляемых источников энергии, и попробуем нащупать пути выхода из проблем балансировки генерации и потребления электроэнергии при высоком уровне быстро меняющейся во времени доле ветряной и солнечной генерации. Из общих соображений отметим, что необходима своеобразная «основа», или «энергетическая подушка», т.е. «постоянный энергетический фон», на котором будет вырастать «надстройка» в виде перемен-

ной ветряной и солнечной генерации. Затем нужны системы, которые могут быстро менять выдаваемую в электрическую сеть мощность, компенсируя скачки ветряной и солнечной генерации. Наконец, необходимы системы накопления излишков энергии с тем, чтобы в нужное время потратить их.

На роль «постоянного энергетического фона» идеально подходит атомная энергетика. Ее лучшие показатели соответствуют постоянной мощности генерации, поэтому нынешнюю долю (5% в мировой энергетике) желательно не снижать, а наоборот наращивать. Подходят и энергия ГЭС, нынешний уровень которой (3%) также уменьшать нежелательно, и использование биомассы для производства электроэнергии. Таким образом, можно обеспечить «фон» на уровне минимум 20% мирового потребления электроэнергии (лучше – еще больше).

Важной составляющей может стать газовая генерация. Она, с одной стороны, является наиболее чистой из нынешней «большой тройки» (газ, нефть, уголь). С другой стороны – запасы газа достаточно велики (в рамках XXI века). Наконец, газовые электростанции могут увеличивать постоянный «фон» производства электроэнергии и, что очень важно, позволяют легко и быстро менять выдаваемую в сеть мощность.

Варианты на основе гидроаккумулирующих электростанций – ГАЭС – также важны при покрытии пиков и спадов мощности. Согласно принципу действия, ГАЭС закачивает воду в бассейн наверх, когда есть избыток мощности, и сбрасывает воду вниз, вырабатывая электроэнергию, когда мощности не хватает.

Кроме того, использование биомассы для производства энергии тоже нельзя сбрасывать со счета. Ее можно использовать и для поддержания «фона», и для компенсации пиков потребления мощности.

А что делать, если уровень ветряной и солнечной генерации станет очень большим? В этом случае понадобятся более радикальные решения. В литературе предложен такой комплекс мер:

- создать *резерв* мощностей *невозобновляемых* источников;
- увеличить установленную мощность возобновляемых источников (*запас по генерации ВИЭ*);
- перекачивать мощность из регионов, где она в избытке, в те регионы, где ее не хватает (*сети* передачи энергии);
- аккумулировать избыточную энергию с целью ее использования во время недостаточной ветро- и солнечной генерации (*накопители*).

Кратко остановимся на этих мерах.

Если энергосистема основана только на ветровой и солнечной генерации, то необходим резерв невозобновляемых источников той же мощности. Фактически это приводит к *дублированию* устройств генерации мощности, причем каждый из элементов используется неоптимально.

Если существенно повысить установленную мощность ветро- и солнечной генерации так, чтобы даже при слабом ветре и слабом освещении энергии было достаточно, то устройств генерации потребуется гораздо больше. Было подсчитано, что при доле ветра и солнца 60% этих устройств нужно вдвое больше, при 80% – в 6 раз больше и при 100% – в 10 раз больше(!). Это огромный расход ресурсов, опять же используемых неэффективно.

Развитие магистральных систем передачи энергии в другие регионы требует радикального обновления сетей и увеличения их пропускной способности в 7 раз при доле ветра и солнца 60% и в 12 раз при 100%. Задача очень амбициозная.

Использование накопителей или аккумуляторов энергии упрощает задачу балансировки производимой и потребляемой мощности и в принципе может позволить полностью обойтись без невозобновляемых источников энергии. Однако хранение избыточной энергии в больших масштабах сталкивается с нерешенными пока проблемами – емкостью накопителей, ресурсом, т.е. количеством циклов заряда-разряда, потерями при зарядке и разрядке. Кроме того, для *изготовления* накопителей нужно затратить довольно большое количество энергии. Так, в

Европе при использовании в качестве накопителей литий-ионных батарей и эффективности цикла зарядка/разрядка в 85% для производства этих батарей требуется энергия, в 15 раз (!) превышающая нынешнее годовое потребление энергии в Европе.

В последнее время очень широко обсуждается переход к так называемой водородной энергетике. Само название намекает на новый способ *производства* энергии. Но фактически это один из вариантов *накопителя* (аккумулятора) энергии, в котором сначала получают водород из воды, затрачивая энергию, затем хранят ее (в баллонах или топливных ячейках) и, наконец, высвобождают по мере надобности (например, в автомобиле).

Применительно к мировой энергетике с большой долей ветро- и солнечной генерации этот способ оказывается не слишком эффективным. Действительно, КПД получения водорода из воды составляет 65–70%, а КПД получения электричества из водорода ~ 50%. Таким образом, суммарный КПД составляет всего 30–35%,

т.е. большая часть энергии выбрасывается на ветер. В то же время использование водорода как *вида топлива* (в транспорте) в принципе может стать реальной заменой нефти, запасы которой весьма ограничены.

\* \* \*

В итоге развитию возобновляемых источников энергии сейчас придан большой импульс. Уровень затрат на ветро- и солнечную генерацию превысил один триллион долларов (!). По мере роста доли ВИЭ появились проблемы и факторы, сдерживающие ее развитие: дублирование мощностей, управляемость, сети и потери в сетях, ресурс оборудования, медленное развитие накопителей, КПД накопителей, низкий коэффициент использования мощности. Ближайшие 10–20 лет покажут, насколько реальны планы и амбиции, как удастся решить проблемы и каким окажется на деле уровень ВИЭ в мире.

При подготовке статьи использовались данные А.Анпилогова, С.Безгина и Д.Станкевича.

# Картография и кривизна

И. ТАЙМАНОВ

**ЗАДАЧА** О ПОСТРОЕНИИ НАИБОЛЕЕ точной или удобной для использования карты земной поверхности известна с давних времен. Отображение земной поверхности (или части ее) на плоскость называется картографической проекцией (картой) и сопоставляет точке поверхности точку на плоскости.

Понятия долготы и широты ввел в начале II века нашей эры древнегреческий математик и географ Марин Тирский для

того, чтобы построить с их помощью карту, которая сохраняет масштаб длин вдоль экватора и всех меридианов. Эта прямоугольная карта строится очень просто: обозначим через  $\lambda$  долготу, а через  $\varphi$  широту; если точка с координатами  $(\lambda_0, \varphi_0)$  отображается в точку  $(0, 0)$ , то точка с координатами  $(\lambda, \varphi)$  отображается в точку плоскости с координатами  $x = \lambda - \lambda_0$ ,  $y = \varphi - \varphi_0$ . Такая проекция (рис. 1) называется равнопромежуточной и до сих пор используется, например, в геоинформационных системах. При ней не сохраняются

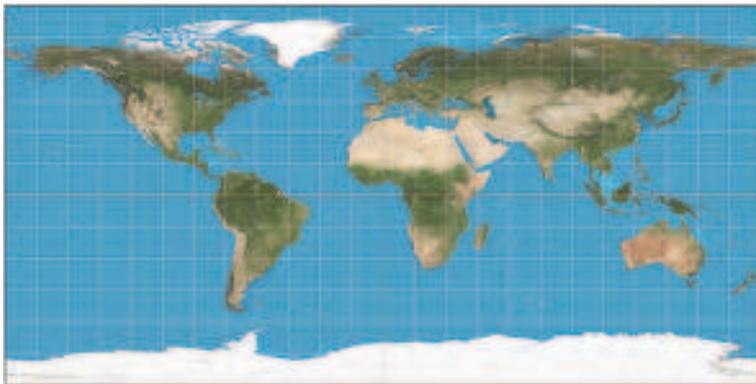


Рис. 1. Равнопромежуточная проекция

ни масштабы длин, ни углы, но сохраняются масштабы вдоль параллелей и меридианов, причем масштабы вдоль различных параллелей (линий постоянной широты  $\varphi$ ) отличаются друг от друга, а масштабы вдоль всех меридианов (линий, вдоль которых долгота  $\lambda$  постоянна) и экватора (параллели с  $y = 0$ ) совпадают.

Заметим, что у Марина Тирского «экватор»  $y = 0$  проходил через остров Родос в Эгейском море и за его длину была принята величина  $R_e \approx 33300$  км, т.е. длина параллели, проходящей через Родос и лежащей на уровне  $36^\circ$  северной широты. Если в результате географических открытий экватор был зафиксирован однозначно, то до конца XIX века нулевые меридианы, от которых отсчитываются долготы, в разных странах были различными. Марин Тирский, а за ним Клавдий Птолемей и многие географы вплоть до XIX века использовали меридиан Ферро, проходящий через одноименный канарский остров, считавшийся самой западной точкой Старого света. Парижский меридиан проходил через центр Парижа, и до сих пор его метки можно найти на улицах. В России отсчет шел от Пулковского меридиана, проходившего через Пулковскую обсерваторию под Санкт-Петербургом. В Испании же было несколько различных меридианов, и возникшая коллизия лежит в основе романа А. Переса-Реверте «Карта небесной сферы, или Тайный меридиан». Герои романа обладают картой, на которой указано место затонувшего корабля, но не знают, по отношению к какому

нулевому меридиану на карте указаны долготы. Чтобы избежать подобных ситуаций, в конце XIX века был принят единый нулевой меридиан – Гринвичский, проходящий через Гринвичскую обсерваторию под Лондоном.

В середине XVI века Меркатор построил карту, которая сохраняет углы. Она до сих пор широко применяется. На

ней горизонтальная координата  $x$  тоже пропорциональна долготе  $\varphi - \varphi_0$ . Равнопромежуточная карта Марина Тирского и карта Меркатора относятся к цилиндрическому, в которых параллели и меридианы переходят в прямые линии и всюду перпендикулярны друг другу.

Известные из школьных учебников карты устроены сложнее и относятся к псевдоцилиндрическому. Они учитывают то, что в более точном приближении поверхность Земли является эллипсоидом, и хотя на них всегда указан масштаб, но он только указывает, насколько масштабируется размер эллипсоида перед применением к нему той или иной картографической проекции. В любом случае измерять длины линий на земной поверхности с помощью карт можно только приближенно, и при этом хорошей точности можно достичь только внутри малых областей, как показывают приведенные нами примеры.

Строгий математический критерий того, что участок поверхности может быть отображен на плоскость так, чтобы сохранялись длины всех линий и площади всех областей, принадлежит Гауссу. Он состоит в том, что на поверхности гауссова кривизна  $K$  как функция от точки поверхности должна всюду обращаться в ноль. Это вытекает из более общего результата Гаусса о кривизне, который он назвал «Theorema Egregium», что переводится с латыни как «замечательная теорема».

Заметим, что интерес Гаусса к этой задаче был вызван вопросом о построении достаточно точных карт, и он предложил

новую проекцию, полученную модификацией из проекции Меркатора с учетом того, что форма Земли приближается эллипсоидом. Эта проекция и отвечающие ей координаты Гаусса–Крюгера используются военными топографами.

Гауссова кривизна вычисляется достаточно сложно, хотя ее можно сразу найти для поверхностей, которые получаются из листа бумаги свертыванием в цилиндр или конус или любой другой деформацией, при которой лист не рвется: поскольку они разворачиваются в плоский лист, их гауссова кривизна всюду равна нулю.

Мы приведем для сферы радиуса  $R$  другое объяснение, почему любой сколь угодно малый ее участок не картографируется точно на плоскую область.

На плоскости кратчайшая линия между любой парой различных точек является отрезком прямой, а точки, которые отстоят от заданной точки  $X$  на расстояние  $r$ , образуют окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $X$ . Посмотрим, как устроены кратчайшие линии на сфере. Можно попытаться установить это экспериментально, закрепив один конец нитки в полюсе глобуса и, натягивая нитку вдоль его поверхности, рассмотреть всевозможные положения ее концов. Если длина нитки достаточно мала, то это будут в точности параллели, и при этом нитка будет проходить по меридиану. Математически это означает, что точки, отстоящие от полюса на расстояние  $r < \pi R$ , где  $R$  – радиус глобуса, образуют параллели – аналоги окружностей радиуса  $r$ , а кратчайшие линии – это участки меридианов, т.е. линий, которые получаются при пересечении сферического глобуса с плоскостью, проходящей через его центр и полюс. Мы можем вращать сферу вокруг ее центра так, что расстояния сохраняются, а любая заданная точка сферы перейдет в любую другую заданную точку. Поэтому с сохранением расстояний можно перевести любую точку в полюс и применить к ней предыдущее рассуждение.

Линии – большие окружности, которые получаются при пересечении сферы с плоскостью, проходящей через ее центр, – называются *геодезическими* (на сфере).

Это общее понятие, обобщающее на произвольные метрические пространства понятие прямых с двумя важными отличиями, которые проявляются для некоторых пространств и, в частности, для сферы. Во-первых, участки геодезических линий имеют кратчайшую длину среди всех кривых, соединяющих их концы, но только в случае, когда концы достаточно близки друг к другу. Например, рассмотрим большую окружность на сфере: если угловая длина дуги отрезка геодезической не больше  $\pi$ , то он имеет кратчайшую длину среди всех линий, соединяющих его концы, а если больше  $\pi$ , то кратчайшим является другой, дополнительный к нему, участок большой окружности. Во-вторых, для некоторых пар точек кратчайший отрезок геодезической, соединяющий их, не является единственным: например, противоположные точки сферы связаны бесконечным числом кратчайших геодезических длины  $\pi R$ .

Мы приходим к следующему заключению:

1) кратчайшие линии на сфере радиуса  $R$  являются участками больших кругов (геодезических на сфере);

2) аналоги прямых на сфере – геодезические – являются замкнутыми линиями, окружностями;

3) при  $r < \pi R$  «окружность радиуса»  $r$  с центром в точке  $P$  – это параллель  $S_r$ , которая получается при пересечении сферы с плоскостью, перпендикулярной оси, проходящей через точку  $P$  и противоположную ей точку сферы (рис.2); при

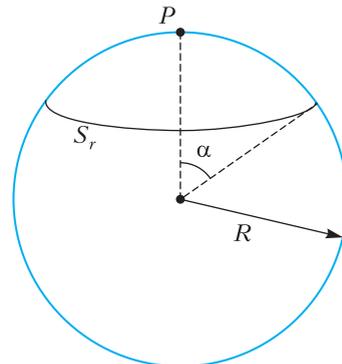


Рис. 2. Окружность радиуса  $r$  на сфере

$r = \pi R$  такая «окружность» сливается в точку, центрально-симметричную точке  $P$ ; расстояние от любой точки сферы до любой другой точки не превосходит  $\pi R$ . Это – так называемый *внутренний диаметр* сферы. Он равен расстоянию между двумя наиболее удаленными точками, измеренному по сфере, а не напрямую.

Если бы малый участок сферы (скажем, в окрестности ее полюса) можно было абсолютно точно картографировать участком плоскости, то длины окружностей и площади кругов с одинаковыми радиусами совпадали бы. На плоскости длина  $l(r)$  окружности радиуса  $r$  и площадь  $A(r)$  ограниченного им круга, как известно, равны

$$l(r) = 2\pi r, \quad A(r) = \pi r^2.$$

Вычислим их аналоги  $\tilde{l}$  и  $\tilde{A}$  для окружностей и кругов сферы радиуса  $R$ . Положим  $\alpha = \frac{r}{R}$ , это – угловое расстояние от центра до окружности радиуса  $r$  (см. рис.2). Теперь из формул, известных из школьной программы, следует, что

$$\tilde{l}(r) = 2\pi R \sin \alpha,$$

$$\tilde{A}(r) = 2(1 - \cos \alpha)\pi R^2, \quad \alpha = \frac{r}{R}.$$

Эти функции отличаются от функций  $l(r)$  и  $A(r)$  всюду, в том числе и около точки  $r = 0$ . Поэтому никакой сколь угодно малый участок сферы нельзя с сохранением длин и площадей отобразить на участок плоскости.

Возникает вопрос: где в этих рассуждениях проявляется гауссова кривизна?

При малых значениях  $\alpha$  функции  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  приближенно ведут себя как  $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$  и  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4$  и, подставляя эти выражения в формулы для  $\tilde{l}$  и  $\tilde{A}(r)$ , мы получаем

$$\tilde{l}(r) \approx 2\pi r - \frac{\pi}{3R^2}r^3 = 2\pi r - \frac{\pi K}{3}r^3,$$

$$\tilde{A}(r) \approx \pi r^2 - \frac{\pi}{12R^2}r^4 = \pi r^2 - \frac{\pi K}{12}r^4,$$

где  $K = \frac{1}{R^2}$  и есть гауссова кривизна сферы радиуса  $R$ . Из этих формул мы видим, что в первом приближении при малых значениях  $r$  длины окружностей и площади кругов ведут себя как их аналоги на сфере, а в следующие по малости поправки входит гауссова кривизна поверхности.

В середине 1820-х годов Лобачевский построил геометрию, в которой не выполняется аксиома Евклида о параллельных прямых. Эта аксиома утверждает, что через точку, лежащую вне заданной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Отрицать аксиому Евклида можно двумя способами: либо утверждая, что через точку не проходит ни одна параллельная прямая, либо – что проходит несколько прямых. Первый случай реализуется на сфере, если под аналогом прямых понимать геодезические, – все большие окружности на сфере пересекаются друг с другом в двух точках, но при этом аналоги прямых не продолжают бесконечно в обе стороны, а замыкаются (*сферическая геометрия*).

Лобачевский построил геометрию, не указав пространство, в котором его геометрия реализуется. Примеры таких пространств были построены через сорок лет после его первых работ. Но Лобачевский вывел все аналитические формулы этой теории. При этом оказалось, что если понимать под треугольниками фигуры, составленные из трех отрезков геодезических, то возникают нетривиальные соотношения между длинами сторон и углами треугольников, чего нет в евклидовой геометрии, а суммы углов треугольников всегда меньше, чем  $\pi$ . (Лежандр, пытаясь вывести аксиому Евклида из других, доказал, что если существует хотя бы один треугольник с суммой углов, равной  $\pi$ , то аксиома Евклида выполняется.) Аналоги функций  $\tilde{l}(r)$  и  $\tilde{A}(r)$  в геометрии Лобачевского выглядят абсолютно так же, как в сферической геометрии, только вместо тригонометрических функций возникают гиперболические (геометрия Лобачевского

часто называется *гиперболической*), вид приведенных приближенных формул сохраняется, только гауссова кривизна становится отрицательной:  $K < 0$ . Лобачевский писал, что, хотя он и не может указать явную модель, непротиворечивость его геометрии вытекает уже из того, что при умножении длин сторон на мнимую единицу  $\sqrt{-1}$  его формулы переходят в формулы сферической геометрии, которые непротиворечивы.

Обобщение понятия кривизны на многомерные пространства связано с другим свойством прямых на плоскости. Если две точки  $A$  и  $B$  соединены отрезком прямой и вектор  $\mathbf{v}$  приложен к точке  $A$ , то параллельный перенос этого вектора в точку  $B$  реализуется семейством векторов, приложенных ко всем точкам отрезка так, что их длины и угол между векторами и прямой сохраняются. Эта процедура и называется параллельным переносом. Если мы на плоскости последовательно параллельно перенесем вектор  $\mathbf{v}$  вдоль сторон треугольника  $ABC$ , то он перейдет сам в себя. В искривленном пространстве это не так.

Рассмотрим геодезический треугольник  $ABC$  на сфере радиуса  $R$ , взяв за точку  $A$  полюс сферы, а за точки  $B$  и  $C$  точки на экваторе (рис.3). Обозначим через  $\alpha$  угол

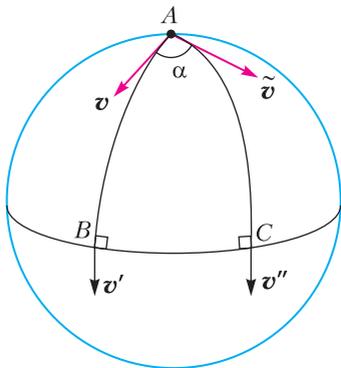


Рис. 3. Параллельный перенос на сфере

между геодезическими отрезками  $AB$  и  $AC$ , другие углы этого треугольника – прямые. Возьмем в точке  $A$  ненулевой вектор  $\mathbf{v}$ , направленный вдоль отрезка  $AB$ . Перенесем его параллельно в точку  $B$  вдоль отрезка  $AB$ , мы получим вектор  $\mathbf{v}'$ ,

перпендикулярный экватору. Теперь перенесем вектор  $\mathbf{v}'$  вдоль экватора в точку  $C$ , а затем полученный вектор  $\mathbf{v}''$ , перпендикулярный экватору, перенесем в точку  $A$  параллельно вдоль отрезка  $CA$  и получим вектор  $\tilde{\mathbf{v}}$ , приложенный к точке  $A$ . Очевидно, что он направлен вдоль отрезка  $AC$  и поэтому образует угол  $\alpha$  с исходным вектором  $\mathbf{v}$ , т.е. в результате параллельного переноса вектора вдоль сторон геодезического треугольника мы получили другой вектор. В этом проявляется кривизна пространства, и она измеряется отклонением исходного вектора от его параллельного переноса.

Обратим внимание и на другой факт: сумма углов треугольника  $ABC$  равна

$$\angle A + \angle B + \angle C = \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \alpha + \pi,$$

т.е. больше, чем  $\pi$ , и отличается от развернутого угла на  $\alpha$ . Площадь  $S$  треугольника  $ABC$  легко найти:  $S = \alpha R^2$ , и, обозначив через  $\Sigma$  сумму углов треугольника, мы можем связать ее с площадью треугольника формулой

$$\Sigma = \pi + KS,$$

так как для сферы  $K = \frac{1}{R^2}$ . Эта формула верна для всех поверхностей постоянной кривизны, в том числе и в геометрии Лобачевского, в которой  $K < 0$ . В частности, сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского всегда меньше, чем  $\pi$ . Более того, эта формула (Гаусса–Бонне) верна для поверхностей, у которых кривизна меняется от точки к точке (например, для гиперboloидов), только вместо  $KS$  надо брать интеграл от гауссовой кривизны  $K$  по внутренности треугольника.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2574 предлагалась на 36-й Математической олимпиаде Ирана, задача M2576а – на XXV Турнире имени А.П.Савина.

Автор задач Ф2581–Ф2584 – С.Варламов.

## Задачи M2574–M2577, Ф2581–Ф2584

**M2574.** Дано натуральное число  $n$ . Докажите, что числа вида  $x^n + y^n$  при всевозможных натуральных  $x$  и  $y$  дают не более чем  $\frac{n(n+1)}{2}$  разных остатков при делении на  $n^2$ .

*Н.Сафаеи (Иран)*

**M2575.** Дано вещественное число  $t \in (1; 2)$ . Докажите, что существует многочлен  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , у которого все коэффициенты равны  $\pm 1$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) и такой, что  $|P(t) - 2019| \leq 1$ .

*Н.Сафаеи (Иран)*

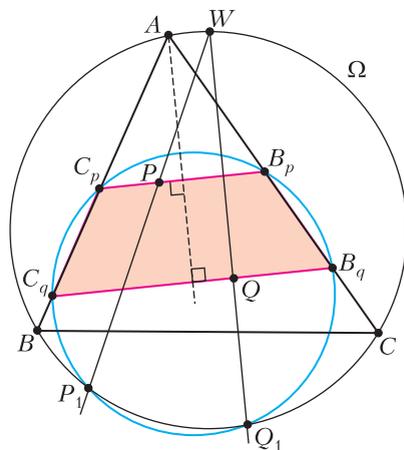
**M2576.** Доска  $8 \times 8$  разрезана на доминошки (прямоугольники  $1 \times 2$  и  $2 \times 1$ ).

а) Докажите, что длина границы между горизонтальными и вертикальными доминошками не превышает 52.

б\*) Найдите максимально возможную длину границы между горизонтальными и вертикальными доминошками.

*Б.Френкин, А.Заславский, Е.Аржанцева*

**M2577\*** Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  такие, что  $\angle ABP = \angle CBQ$  и  $\angle ACP = \angle BCQ$  (т.е. *изогонально сопряженные точки*). Через точки  $P$  и  $Q$  провели прямые, перпендикулярные биссектрисе угла  $BAC$  (см.рисунок). Эти перпендикуляры пересекают от-



резки  $AC$  и  $AB$  в точках  $B_p, B_q, C_p, C_q$ . Пусть  $W$  – середина дуги  $BAC$  описанной окружности  $\Omega$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $WP$  и  $WQ$  пересекают вторично  $\Omega$  в точках  $P_1$  и  $Q_1$ . Докажите, что точки  $P_1$  и  $Q_1$  лежат на описанной окружности трапеции  $B_p B_q C_p C_q$ .

*П.Бибиков*

**Ф2581.** Гелий находится в сосуде кубической формы с ребром  $a = 1$  м и жесткими стенками, имеющими нулевую теплоемкость и нулевую теплопроводность. Сосуд движется со скоростью  $v = 1$  км/с в направлении жесткой стенки. Удар – и сосуд мгновенно остановился. До удара давление газа было  $p = 1$  Па, а температура была  $T = 1$  К. Каковы установившиеся давление



**Ответ:** нет, не может.

Приведем два алгоритма, позволяющих Паше победить (любой из них дает решение задачи).

*Алгоритм 1.* Пусть масса исходного куска равна 1 кг. Паша каждым ходом будет отрезать от самого большого из имеющихся кусков два куска массой по 0,01 г. Докажем, что не позже чем через 10000 ходов Паша победит.

Предположим, что это не так. Рассмотрим 100 последовательных ходов Паши. Всего за эти 100 ходов появятся 200 кусков массой 0,01 г. Если бы каждым своим ответным ходом Вова слеплял два куска массой по 0,01 г, то в итоге получилось бы 100 кусков массой 0,02 г, и Паша бы победил. Значит, по крайней мере один раз Вова не слепит между собой два куска массой 0,01 г. Поэтому спустя 100 ходов Паши и 100 ходов Вовы количество кусков массой 0,01 г увеличится хотя бы на 1.

Разобьем 10000 ходов Паши на сотни последовательных. По доказанному выше, после каждой сотни последовательных ходов Паши и ответных ходов Вовы количество кусков массы 0,01 г увеличивается хотя бы на 1. Таким образом, через 100 таких сотен последовательных ходов количество кусков массой 0,01 г увеличится хотя бы на 100. Поэтому Паша так или иначе победит.

*Алгоритм 2.* Опять же положим массу исходного куска равной 1 кг. Приведем другой алгоритм действий Паши. Пока это возможно, он будет добиваться выполнения следующего условия (\*): массы всех кусков на столе составляют целое число граммов. Заметим, что Вова своим ходом не может нарушить (\*).

Если перед ходом Паши на столе есть кусок массой хотя бы 3 г, он может отрезать от него два куска по 1 г, сохраняя (\*). Значит, если Паша не может сделать ход, каждый кусок имеет массу либо 1 г, либо 2 г (такой момент обязательно наступит, так как количество кусков перед ходом Паши растет). Но тогда он уже выиграл: в противном случае общая мас-

са всех кусков (в граммах) меньше  $1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 = 300$ , что не так.

*Д.Белов, И.Богданов, Р.Ефремов*

**M2564.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AC < BC$  (рис. 1). Окруж-

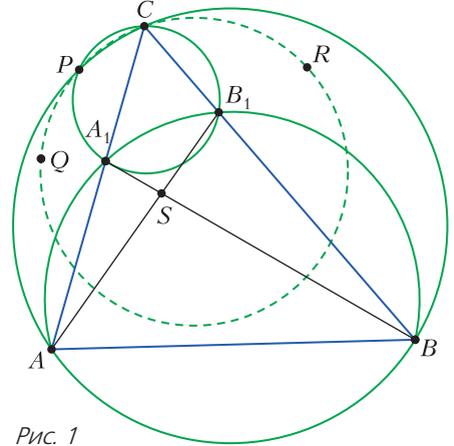


Рис. 1

ность проходит через точки  $A$  и  $B$  и пересекает отрезки  $CA$  и  $CB$  повторно в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C$  пересекаются повторно в точке  $P$ . Отрезки  $AB_1$  и  $BA_1$  пересекаются в точке  $S$ . Точки  $Q$  и  $R$  симметричны  $S$  относительно прямых  $CA$  и  $CB$ . Докажите, что точки  $P, Q, R$  и  $C$  лежат на одной окружности.

Используя окружности  $(PABC)$  и  $(PA_1B_1C)$ , получаем  $\angle PAB = 180^\circ - \angle PCB = \angle PA_1B_1$ , и аналогично,  $\angle PBA = \angle PB_1A_1$ . Тем самым,  $\triangle PAB \sim \triangle PA_1B_1$ . Из этого подобия вытекает, что  $\angle APA_1 = \angle APB \pm \angle BPA_1 = \angle BPA_1$  и  $PA/PA_1 = PB/PB_1$ . Следовательно,  $\triangle PAA_1 \sim \triangle PBB_1$ , и существует поворотная гомотетия  $h$  с центром  $P$ , переводящая  $\overline{AA_1}$  в  $\overline{BB_1}$ . Угол поворота для  $h$  равен  $\angle APB = \angle ACB$  (рис. 2).

Треугольник  $A_1QA$  равен треугольнику  $A_1SA$ , который в свою очередь подобен треугольнику  $B_1SB$  (так как четырехугольник  $AA_1B_1B$  – вписанный). Итак, треугольники  $A_1QA$  и  $B_1SB$  подобны и одинаково ориентированы, поэтому  $S = h(Q)$  и, значит,  $\angle QPS = \angle ACB$ . Ана-

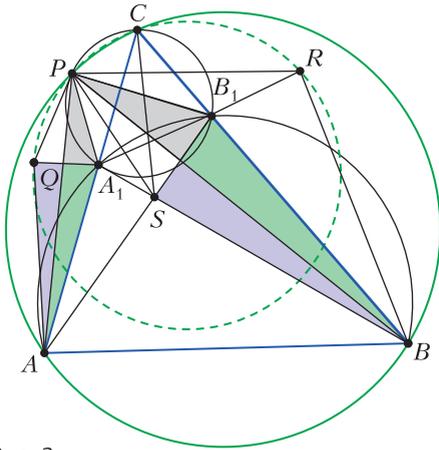


Рис. 2

логично,  $\angle SPR = \angle ACB$ ,  $\angle QPR = 2\angle ACB$ .  
Но

$$\begin{aligned} \angle QCR &= \angle QCA + \angle ABC + \angle BCR = \\ &= \angle ACS + \angle ABC + \angle SCB = 2\angle ABC. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали равенство  $\angle QPR = \angle QCR$ , из которого следует утверждение задачи.

Д.Прокопенко

**M2565\***. а) Даны  $n$  монет попарно различных масс и  $n$  чашечных весов,  $n > 2$ . При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжелую монету?

б) Решите ту же задачу, если на чаши весов разрешается класть сколько угодно монет.

**Ответ:** а) за  $2n - 1$  взвешивание;

б) тоже за  $2n - 1$  взвешивание.

а) Докажем сначала, что за  $2n - 1$  взвешивание можно найти самую тяжелую монету. Более точно, мы докажем по индукции по  $n$ , что самую тяжелую из  $n \geq 2$  данных монет можно определить за  $2n - 1$  взвешивание, имея трое весов, одни из которых, возможно, испорчены.

Если  $n = 2$ , то взвесим данные две монеты по очереди на трех разных весах. Если при одном из взвешиваний весы оказались в равновесии, то эти весы испорчены, значит, мы можем определить более тяжелую монету по показаниям любых из остальных весов. Если равновесия ни разу не было, то какая-то из монет перевесит хотя бы два раза – она и есть более тяжелая, так как неверный результат могут давать только одни весы. Это дает базу индукции.

Пусть теперь  $n \geq 3$ . Выберем две монеты и двое весов и сравним за первые два взвешивания эти монеты друг с другом на первых и на вторых весах. Возможны два случая.

1. Оба раза перевешивала одна и та же из двух монет; назовем ее монетой  $a$ , а вторую из них – монетой  $b$ . Так как хотя бы одни из двух весов правильные, то монета  $a$  действительно тяжелее монеты  $b$ . Значит,  $b$  не самая тяжелая. Задача сводится к тому, чтобы определить самую тяжелую из  $n - 1$  монеты: монеты  $a$  и  $n - 2$  монет, не участвовавших в первых двух взвешиваниях. По предположению индукции мы можем сделать это за  $2n - 3$  взвешивания. Вместе с первыми двумя взвешиваниями получаем  $2n - 1$  взвешивание.

2. Либо одно из первых двух взвешиваний дало равновесие, либо результаты первых двух взвешиваний противоречат друг другу: один раз перевесила одна монета, а другой – другая. Значит, одни из двух использованных весов точно испорчены. Возьмем третьи весы. Тогда они обязательно правильные. Используя их, мы легко можем определить самую тяжелую монету за  $n - 1$  взвешивание: сравниваем первую монету со второй, более тяжелую из них с третьей, более тяжелую из них с четвертой и т.д. до последней. Вместе с первыми двумя взвешиваниями получаем  $n + 1 < 2n - 1$  (так как  $n > 2$ ) взвешивание. Покажем теперь, что менее чем за  $2n - 1$  взвешивание заведомо определить самую тяжелую монету нельзя. Достаточно показать, что ее нельзя определить ровно за  $2n - 2$  взвешивания, так как можно добавить произвольные взвешивания и игнорировать их результаты. Предположим про-

тивное: имеется алгоритм действий, позволяющий определить самую тяжелую монету за  $2n - 2$  взвешивания.

Пронумеруем монеты числами  $1, \dots, n$ . Сделаем первые  $2n - 3$  взвешивания согласно алгоритму. Предположим, что в каждом из них перевешивала монета с бóльшим номером. Согласно принципу Дирихле, среди монет с номерами  $1, \dots, n - 1$  найдется такая, которая за произведенные  $2n - 3$  взвешивания «проигрывала» (оказывалась более легкой) не более одного раза; обозначим номер этой монеты через  $k$ . Конечно же, монета с номером  $n$  ни разу не «проигрывала». Покажем, что такие результаты взвешиваний возможны. Действительно, такое могло произойти по крайней мере в следующих двух ситуациях.

(А) Монеты упорядочены по возрастанию масс и все весы (в том числе испорченные) показывали правильные результаты во всех взвешиваниях.

(Б) Монеты упорядочены по возрастанию масс, за исключением монеты номер  $k$ , которая самая тяжелая. При этом те весы, на которых монета номер  $k$  «проиграла» (если такое взвешивание было), испорчены и в этом взвешивании показали неверный результат, а в остальных взвешиваниях все весы показывали верные результаты.

Рассмотрим два случая.

1. В последнем,  $(2n - 2)$ -м взвешивании, не участвует монета с номером  $k$ . Предположим, что опять перевесила монета с бóльшим номером. Тогда каждая из ситуаций (А) и (Б) по-прежнему возможна.

2. В последнем взвешивании участвует монета с номером  $k$ . Предположим, что она перевесила. Тогда, с одной стороны, возможно, что имеет место ситуация (А) и последнее взвешивание выполнялось на испорченных весах. С другой стороны, возможно, что имеет место ситуация (Б) и в последнем взвешивании весы показали правильный результат.

Итак, каким бы ни было одно оставшееся взвешивание, его результат может быть таков, что после него каждая из ситуаций (А) и (Б) будет по-прежнему возможной. Тогда каждая из монет  $k$  и  $n$  может быть

самой тяжелой, т.е. нам не удалось определить самую тяжелую монету.

б) Нам нужно лишь доказать, что даже если на чаши весов разрешается класть по несколько монет, то все равно самую тяжелую монету нельзя заведомо определить менее чем за  $2n - 1$  взвешивание. Положим  $N = 2^{n-1} \cdot n$ . Предположим, что массы монет равны  $N - 1, N - 2, N - 4, \dots, N - 2^{n-1}$  (в некоторых единицах измерения) и нам откуда-то известно, что они именно такие. Докажем, что, даже обладая этой дополнительной информацией, мы не сможем заведомо определить самую тяжелую монету менее чем за  $2n - 1$  взвешивание. Так же, как и в пункте а), достаточно доказать, что мы не сможем ее определить ровно за  $2n - 2$  взвешивания. Покажем, что при указанных массах монет, если количества монет на чашах весов различны, то обязательно более тяжелым является содержимое чаши с бóльшим числом монет. Действительно, пусть на одной чаше  $k$  монет, а на другой  $l$  монет и  $k > l$ . Тогда разность масс содержимых первой и второй чаш больше, чем

$$k(N - 2^{n-1}) - lN = (k - l)N - k \cdot 2^{n-1} \geq \geq N - n \cdot 2^{n-1} = 0,$$

значит, содержимое первой чаши весов тяжелее. Таким образом, всякое взвешивание с разным количеством монет на чашах бессмысленно: всегда можно считать, что перевесит чаша, на которой больше монет, и тогда мы не получим из этого взвешивания совсем никакой информации. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что в каждом взвешивании на чашах весов лежит по одинаковому количеству монет.

Далее, покажем, что если в некотором взвешивании на чашах весов лежит по одинаковому количеству монет, то более легким является содержимое той чаши весов, на которой находится самая легкая из участвующих во взвешивании монет. Действительно, пусть на одной чаше весов лежат монеты с массами  $N - 2^{i_1}, \dots, N - 2^{i_k}$ , а на другой — с массами  $N - 2^{j_1}, \dots, N - 2^{j_k}$ , где  $i_1 > \dots > i_k$  и  $j_1 > \dots > j_k$ , причем  $i_1 > j_1$ , т.е. самая легкая из участвующих во взвешивании монет

на первой чаше. Тогда

$$\begin{aligned} (N - 2^i) + \dots + (N - 2^{i_k}) &\leq \\ &\leq kN - 2^i < kN - \sum_{s=0}^{i-1} 2^s \leq \\ &\leq (N - 2^{j_1}) + \dots + (N - 2^{j_k}). \end{aligned}$$

Теперь покажем, как модифицировать решение из пункта а) в рассматриваемой ситуации. Предположим, что имеется алгоритм действий, позволяющий определить самую тяжелую монету за  $2n - 2$  взвешивания. Пронумеруем монеты числами  $1, \dots, n$ . Сделаем первые  $2n - 3$  взвешивания согласно алгоритму. Для каждого из этих взвешиваний назовем *главной монетой* для этого взвешивания монету с самым маленьким номером из всех, участвующих в этом взвешивании. Согласно принципу Дирихле, среди монет с номерами  $1, \dots, n - 1$  найдется такая, которая за произведенные  $2n - 3$  взвешиваний была главной не более одного раза; обозначим номер этой монеты через  $k$ . Конечно же, монета с номером  $n$  ни разу не могла быть главной. Предположим, что в каждом из произведенных взвешиваний «проигрывала» (оказывалась более легкой) чаша, на которой лежит главная монета этого взвешивания. Покажем, что указанные результаты взвешиваний возможны. Действительно, такое могло произойти по крайней мере в следующих двух ситуациях.

(А) Монеты упорядочены по возрастанию масс и все весы (в том числе, испорченные) показывали правильные результаты во всех взвешиваниях.

(Б) Монеты упорядочены по возрастанию масс, за исключением монеты номер  $k$ , которая самая тяжелая. При этом те весы, на которых производилось взвешивание, в котором  $k$  была главной (если такое взвешивание было), испорчены, а в остальных взвешиваниях все весы показывали верные результаты.

Рассмотрим два случая.

1. В последнем,  $(2n - 2)$ -м взвешивании, главной является не монета с номером  $k$ . Предположим, что опять «проиграла» чаша, на которой лежит главная монета.

Тогда каждая из ситуаций (А) и (Б) по-прежнему возможна.

2. В последнем взвешивании главной является монета с номером  $k$ . Рассмотрим все остальные участвующие в этом взвешивании монеты. Пусть монета номер  $l$  — монета с самым маленьким номером из них. Предположим, что «проиграла» чаша, на которой лежит монета  $l$ . Тогда, с одной стороны, возможно, что имеет место ситуация (А) и последнее взвешивание выполнялось на испорченных весах. С другой стороны, возможно, что имеет место ситуация (Б) и в последнем взвешивании весы показали правильный результат.

Итак, каким бы ни было одно оставшееся взвешивание, его результат может быть таков, что после него каждая из ситуаций (А) и (Б) будет по-прежнему возможной. Тогда каждая из монет  $k$  и  $n$  может быть самой тяжелой, т.е. нам не удалось определить самую тяжелую монету.

А.Гайфуллин, М.Дидин

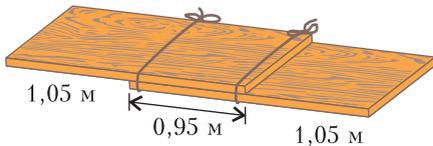
**Ф2569.**<sup>1</sup> На плоской вертикальной стене висят часы, у которых секундная стрелка движется плавно (без скачков) в вертикальной плоскости. Длина стрелки  $R = 10$  см, ось вращения стрелок часов горизонтальна и находится на высоте  $h = 2$  м над полом. На кончике секундной стрелки сидит муха и относительно стрелки не движется, а по горизонтальному полу вдоль стены с часами на расстоянии  $L = 10$  см от нее бежит таракан с постоянной скоростью  $v = 10$  см/с. В некоторый момент таракан находится ближе всего к часам. Какой по величине в этот момент может быть скорость таракана в системе отсчета мухи, где она и секундная стрелка часов покоятся, а весь мир вращается вокруг оси часов? Какой по величине в этот момент может быть скорость мухи в системе отсчета таракана, где его туловище покоится, ножки шевелятся и мимо него весь мир движется?

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2569-Ф2572 — С. Варламов.

В системе отсчета, где туловище таракана неподвижно, а ножки шевелятся, скорость мухи будет складываться из относительной скорости по отношению к прежней системе отсчета, равной  $2\pi R/60 \text{ с} \approx 1 \text{ см/с}$ , и переносной скорости, равной по величине скорости таракана  $v$ , но направленной в противоположную сторону. Поэтому скорость мухи относительно таракана может находиться в диапазоне от  $v_{\min} \approx 9 \text{ см/с}$  до  $v_{\max} \approx 11 \text{ см/с}$ . Точнее, от  $|v - 2\pi R/60 \text{ с}|$  до  $|v + 2\pi R/60 \text{ с}|$ .

Скорость таракана в системе отсчета мухи может быть либо  $2\pi h/60 \text{ с} - v \approx 10,9 \text{ см/с}$ , либо  $2\pi h/60 \text{ с} + v \approx 30,9 \text{ см/с}$ . Величина скорости зависит от того, в какую сторону по отношению к стене бежит таракан. А от расстояния  $L$  ответы не зависят вовсе.

**Ф2570.** *Между двумя домами с плоскими крышами, которые располагаются на одной высоте над землей, расстояние 3 метра. Вася принес на одну из крыш две легкие и прочные доски одинаковой ширины и толщины, каждая из которых имеет длину 2 метра. Связав веревками эти доски так, как показано на рисунке, Вася соединил крыши домов мостиком. Доски*



*своими свободными концами опираются о края крыш, «заходя» на каждую крышу на 2,5 см. А каждый из привязанных к другой доске концов охвачен веревкой, образующей «одинарное» кольцо. Масса Васи 60 кг. При какой минимальной прочности веревок на разрыв Вася может, не боясь упасть и не торопясь, переходить с одной крыши на другую?*

Поскольку считается, что доски легкие, учитывать в нагрузке мостика нужно только массу Васи. В каком бы месте на мостике ни находился Вася, сила натяжения веревок не должна превышать величины, при которой веревка рвется. Следовательно, нужно найти такое положение Васи

на мостике, при котором веревка одного из колец натянута наиболее сильно. Легко догадаться, что веревочное кольцо, изображенное на рисунке справа, вообще не напряжено, так как верхняя доска при нагрузке сверху непосредственно упирается в нижнюю доску. Иными словами, сила натяжения веревки этого кольца не влияет на безопасность перехода с крыши на крышу и эту веревку можно просто не учитывать. А веревка, изображенная на рисунке слева, будет натянута, причем сила ее натяжения зависит от положения Васи на мостике. Пренебрегая разницей длин 0,95 м и 1,05 м, будем считать, что эти отрезки имеют одинаковые длины. Когда Вася находится на верхней доске, сила натяжения веревки растет по мере его удаления от левого конца мостика вплоть до крайнего правого конца верхней доски. В этот момент суммарная сила натяжения вертикальных участков веревки с одной и другой стороны от досок должна быть равна  $2Mg/3$ , где  $M = 60 \text{ кг}$  – масса Васи. При дальнейшем перемещении к правому концу мостика по нижней доске сила натяжения веревочного кольца слева становится все меньше. Таким образом, веревка должна выдерживать силу натяжения  $F = Mg/3 = 200 \text{ Н}$ .

**Ф2571.** *Сплошной стальной шарик радиусом  $R = 5 \text{ см}$  привязан тонкой прочной и нерастяжимой нитью к дну сосуда. В сосуд налили столько ртути, что шарик не касается дна, а нить натянута с силой  $F = 13,6 \text{ Н}$ . В этот же сосуд дополнительно наливают столько воды, что весь шарик оказывается ниже ее верхнего уровня. Какой теперь стала сила натяжения нити? Плотность ртути  $\rho_{\text{рт}} = 13,6 \text{ г/см}^3$ , плотность стали  $\rho_{\text{ст}} = 7,8 \text{ г/см}^3$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1,0 \text{ г/см}^3$ . Считайте, что  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .*

Сумма сил, действующих на покоящийся предмет, погруженный в одну или две жидкости, равна нулю. А силы эти – сила тяжести, направленная вниз, Архимедова сила, т.е. выталкивающая сила со стороны одной или двух жидкостей, направленная

вверх, и сила натяжения нити, направленная вниз. Плотность воздуха настолько мала в сравнении с плотностями воды, стали и ртути, что выталкивающей силой со стороны воздуха можно смело пренебречь.

Обозначим долю объема шарика  $V$ , находящуюся ниже уровня ртути, через  $x$ . Эта доля одинакова и до и после добавления в сосуд воды. До того, как в сосуд дополнительно налили воду, условие равновесия было таким:

$$0 = V\rho_{\text{ст}}g + F - xV\rho_{\text{рт}}g.$$

Отсюда,

$$x = \frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_{\text{рт}}} + \frac{F}{V\rho_{\text{рт}}g}.$$

А после добавления в сосуд воды условие равновесия будет другим:

$$0 = V\rho_{\text{ст}}g + F_1 - xV\rho_{\text{рт}}g - (1-x)V\rho_{\text{в}}g.$$

Отсюда найдем новую сила натяжения нити:

$$\begin{aligned} F_1 &= xV\rho_{\text{рт}}g + (1-x)V\rho_{\text{в}}g - V\rho_{\text{ст}}g = \\ &= xVg(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}) - Vg(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}) = \\ &= F\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}}\right) + Vg\rho_{\text{в}}\left(1 - \frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_{\text{рт}}}\right) = 14,8 \text{ Н}. \end{aligned}$$

**Ф2572.** *Водопроводный кран сломался, поэтому из него в раковину постоянно капает горячая вода с температурой  $+60^\circ\text{C}$ . Вода скапливается в подставленной тарелке, а ее излишек стекает в сливное отверстие. Температура воды в тарелке через сутки после поломки установилась равной  $+30^\circ\text{C}$ . Какой станет температура воды в тарелке через сутки после починки крана сантехником Джамшудом, если после «починки» частота падения капель увеличилась в 4 раза? Комнатная температура  $+20^\circ\text{C}$ . Мощность тепловых потерь пропорциональна разнице температур.*

После установления теплового режима, когда тарелка уже наполнилась и лишняя вода переливается через край, мощность тепловых потерь в окружающий воздух становится равной разнице мощности, поступающей с падающими в тарелку горячими каплями, и мощности, уносимой во-

дой, вытекающей из тарелки. Условие теплового баланса можно записать в таком виде:

$$N(T_{\text{г}} - T) = K(T - T_{\text{к}}).$$

Здесь  $N$  – частота падения капель в тарелку,  $K$  – некий постоянный размерный коэффициент, который определяется габаритами тарелки,  $T_{\text{г}} = 60^\circ\text{C}$ ,  $T$  – установившаяся температура,  $T_{\text{к}} = 20^\circ\text{C}$ . Из условия известна температура, установившаяся до «починки»:  $T_1 = 30^\circ\text{C}$ , поэтому можно записать

$$N(60^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}) = K(30^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}),$$

откуда

$$K = 3N.$$

Когда частота падения капель увеличилась в 4 раза, установившаяся температура станет больше:

$$4N(60^\circ\text{C} - T_2) = 3N(T_2 - 20^\circ\text{C}),$$

откуда находим

$$T_2 = \frac{300}{7}^\circ\text{C} \approx 43^\circ\text{C}.$$

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
1957  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ  
МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

**УСЛУГИ**

- Интернет-магазин [www.bgshop.ru](http://www.bgshop.ru)
- Кафе
- Клубные (дисконтные) карты и акции
- Подарочные карты
- Предварительные заказы на книги
- Встречи с авторами
- Читательские клубы по интересам
- Индивидуальное обслуживание
- Подарочная упаковка
- Доставка книг из-за рубежа
- Выставки-продажи

**АССОРТИМЕНТ**

- Книги
- Аудиокниги
- Антиквариат и предметы коллекционирования
- Фильмы, музыка, игры, софт
- Канцелярские и офисные товары
- Цветы
- Сувениры

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город,  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

## Задачи

1. В клетчатом квадрате закрасили две диагонали, имеющие общую клетку. В одной из них 20 клеток, а в другой — 19. Может ли этот квадрат иметь размеры  $33 \times 33$ ?

*А.Блинков*



2. В выражении  
 ГУРУ + НОРА + РАГУ + РУНО  
 одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, различными буквами — различные цифры. Докажите, что эта сумма делится на трехзначное число.

*С.Токарев*



3. Найдите длину отрезка, отмеченного на рисунке знаком вопроса.

*Е.Бакаев*

Эти задачи предлагались на XXV Турнире математических боев имени А.П.Савина.



4. Однажды Гоголь решил напугать Тургенева: переоделся Пушкиным и пошел к Тургеневу в гости. А Тургенев в тот же день решил напугать Гоголя: он также переоделся Пушкиным и пошел к Гоголю в гости. Ровно в полдень они встретились на Тверском бульваре, но не узнали друг друга и прошли мимо. В 12:45 Тургенев дошел до дома Гоголя, увидел, что того нет дома, и сразу пошел назад. А Гоголь дошел до дома Тургенева в 13:15 и тоже сразу пошел назад, потому что Тургенева не оказалось дома. В 13:45 Гоголь и Тургенев снова встретились и хором закричали: «Ай да Пушкин! Ай да сукин сын!» Кто из них и на сколько минут раньше вышел из дома? (Каждый писатель ходит со своей постоянной скоростью.)

*И.Раскина, Д.Хармс*



# Ледяная сосулька и космический трос

А. СТАСЕНКО

*Дифференциальный закон является той единственной формой причинного объяснения, которая может полностью удовлетворять современного физика. Ясное понимание дифференциального закона есть одно из величайших духовных достижений Ньютона.*

А.Эйнштейн. Физика и реальность

**К**ТО ЖЕ НЕ ВИДЕЛ СВЕРКАЮЩИХ НА солнце сосулек, столь опасных по весне! Всякий осторожный прохожий должен помнить

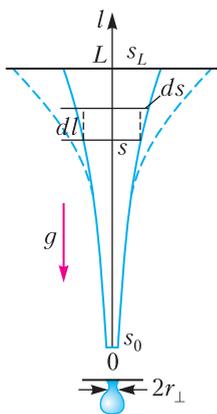


Рис. 1. Вертикальное сечение «оптимальной» сосульки – тела вращения в поле тяжести. Внизу – к определению максимального радиуса висящей капли воды

схему сосульки длиной  $L$ , изображенную на рисунке 1. Понятно, почему она к низу утончается, – ведь с увеличением координаты  $l$  поперечное сечение  $s_l$  должно выдерживать все большую нагрузку ниже расположенной массы. Вес этой массы, деленный на площадь, называется растягивающим напряжением  $\sigma$ .

Представим себе «оптимальную» сосульку, у которой напряжение во всех сечениях одинаково. На элемент объема сосульки  $sdl$  действует сила тяготения  $gpsdl$ . Это приращение должно компенсироваться приращением упругой

силы  $\sigma ds$ . В результате имеем уравнение

$$gpsdl = \sigma ds, \text{ или } \frac{ds}{s} = \frac{gp}{\sigma} dl. \quad (*)$$

Тут уж всякому современному школьнику это уравнение напомнит рост банковского вклада (где  $dl$  – элементарное приращение времени, а  $\frac{gp}{\sigma}$  – процентная ставка). Решение этого уравнения в случае постоянного по длине значения ускорения свободного падения  $g = g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$  известно:

$$\frac{s}{s_0} = \exp\left(\frac{gpL}{\sigma}\right),$$

где  $s_0$  – площадь сечения нижнего конца сосульки. Отметим, что безразмерный показатель экспоненты можно считать отношением объемных плотностей потенциальных энергий с размерностью  $[gpL] = [\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$ .

Разумно предположить, что радиус  $r_0 = \sqrt{\frac{s_0}{\pi}}$  нижнего сечения сосульки порядка размера той капли воды, которая уж было собралась сорваться вниз, но призадумалась и успела примерзнуть. Это известная задача о капле, оторвавшейся под действием собственной силы тяжести, превзошедшей силу поверхностного натяжения:

$$gm \geq 2\pi r_{\perp} \alpha,$$

где  $[\alpha] = \text{Н/м}$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $r_{\perp}$  – радиус перешейка (см. рис.1, внизу) в момент отрыва.

Однако пора сделать численные оценки, используя характерные табличные данные для льда:  $\rho = 920 \text{ кг/м}^3$  – плотность,  $\sigma = 1 \text{ МПа}$  – предел упругости при разрыве. Получим

$$\frac{s}{s_0} = \exp\left(\frac{9,8 \cdot 920 \cdot 1}{10^6}\right) = \exp(9 \cdot 10^{-3}) \approx 1 + 0,01.$$

Таким образом, для сосульки длиной  $L = 1 \text{ м}$  достаточно иметь площадь у основания всего на один процент больше, чем на ее конце.

Конечно, не все сосульки «оптимальны» в рассмотренном нами смысле – капли воды могут отвердевать, не достигнув нижнего

конца. В результате сосулька окажется относительно толще в своей верхней части (см. пунктир на рисунке 1), с запасом обеспечивая прочность своего тела.

Но что сосулька! Представим себе радиальную шахту, прорытую до самого центра однородного гравитирующего шара, например Луны, спутника Юпитера или даже Земли (рис.2). (Конечно, ситуация вообра-

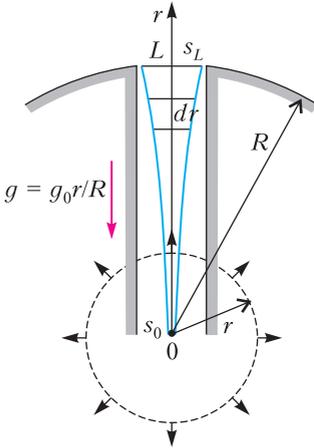


Рис. 2. К задаче об оптимальной форме троса в радиальной шахте в гравитирующем шаре. Штриховая кривая – сечение сферической поверхности для определения радиальной зависимости ускорения тяготения

жаемая, ибо планеты устроены сложно.) Ясно, что сила тяжести в центре такого тела равна нулю. А чтобы описать ее зависимость от радиуса, можно использовать так называемую теорему Гаусса: поток вектора  $\vec{g}$  напряженности поля тяготения через сферу радиусом  $r < R$  пропорционален массе шара радиусом  $r$  (см. рис.2, внизу):

$$4\pi r^2 g \sim \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{ср}} r^3,$$

где  $\rho_{\text{ср}}$  – среднеобъемная плотность тела. Отсюда находим

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R},$$

где  $g_0$  – значение ускорения тяготения на поверхности гравитирующего шара. Подставив это выражение в дифференциальное уравнение (\*) и проинтегрировав его, получим (с учетом равенств  $R = L$  и  $r = l$ )

$$\frac{s}{s_0} = \exp\left(\frac{\rho_{\text{ср}} g_0 r^2}{2\sigma R}\right).$$

Здесь в числителе показателя экспоненты можно усмотреть намек на энергию растянутой пружины, равную  $\frac{kx^2}{2}$ .

А вот пример создания «искусственной тяжести» в космической капсуле за счет центробежной силы (силы инерции). Две кабины массой  $M$  вращаются на тросе длиной  $L$  каждая с угловой скоростью  $\omega$  вдали от всех небесных тел (рис.3). Для удобства

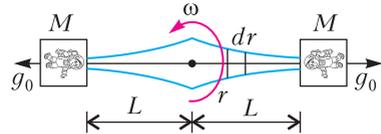


Рис. 3. К определению оптимальной формы троса в системе, вращающейся в невесомости с постоянной угловой скоростью

космонавтов центробежное ускорение обеспечивается равным ускорению тяготения  $g_0$  на Земле:

$$\omega^2 L = g_0.$$

Понятно, что в уравнение (\*) нужно подставить линейную зависимость  $g(r) = \omega^2 r$ . Это такая же зависимость от радиуса, как и в случае однородного гравитирующего шара, поэтому и результат интегрирования будет таким же.

Похожее выражение получится и для площади сечения лопатки быстро вращающегося колеса турбины с одинаковым по ее длине значением растягивающего напряжения. Конечно, при этом связь площади с ее шириной будет иная, чем в случае круглого сечения.

Читатель без особого труда сделает оценки, аналогичные приведенным выше. Например, можно для космического троса и лопатки турбины выбрать  $\rho = 1,84 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = 1 \text{ ГПа}$ ,  $s_0 = 1 \text{ мм}^2$ , длину  $L = 100 \text{ м}$  для троса и ширину 1 см для лопатки (из двух последних данных получим предельную угловую скорость  $\omega_{\text{max}}$ ).

Но все сказанное верно, только если пренебречь массой капсул ( $M = 0$ ). В противном случае в правой части уравнения (\*) нужно добавить центробежную силу  $M\omega^2 L$ , действующую на капсулу и равномерно распределенную по площади сечения троса. В результате интегрирования желаемый да получит новое выражение для  $s(r)$ .

Заранее предупредим Читателя, что оно будет называться страшным словом – трансцендентное.

Дальше – больше. Что если связать друг с другом два астероида, вращающихся вокруг общего центра масс? Это очень облегчило бы грузоперевозки между ними. Тут уж придется учесть и гравитацию, так что суммарная плотность энергии в точке  $r$  (см. рис.3) будет равна

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} + GM \left( \frac{1}{L-r} - \frac{1}{L+r} \right),$$

где  $G$  – гравитационная постоянная. Видно, что сила гравитации заставит сделать трос еще толще.

Можно надеяться, что Читатель уже приобрел достаточный опыт в решении подобных инженерных проблем. А с точки зрения физики в приведенных рассуждениях гравитационная и инертная массы молчаливо предполагались одинаковыми. Однако, их эквивалентность на заре современной физики (опыты Галилея) не казалась очевидной, и только благодаря все более тонким экспериментам к началу прошлого века она оказалась одним из наиболее точно установленных фактов. Наконец, А.Эйнштейн догадался связать поле тяжести с ускоренно движущейся системой отсчета, положив начало современной теории относительности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Точка Нагеля и окружности пяти точек

Н.ВЯТКИН

В произвольном треугольнике  $ABC$  выполним следующее построение. На продолжении отрезка  $AC$  за точку  $C$  отложим отрезок, равный по длине  $AB$ . Аналогичным образом построим еще пять отрезков (рис. 1). Известно, что концы шести построенных

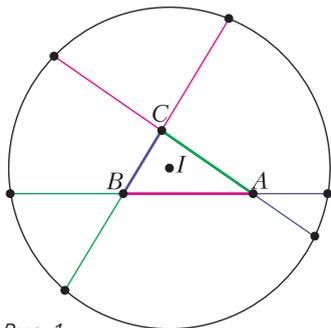


Рис. 1

отрезков лежат на одной окружности – окружности Конвея. Ее центр совпадает с центром  $I$  вписанной в треугольник  $ABC$  окружности.

Оказывается, если отрезки, равные противоположным сторонам, откладывать в другую сторону, получается не менее интересная шестерка точек, которая связана с *точкой Нагеля* (точкой пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания внеписанных окружностей со сторонами).

Этой конструкции и посвящена настоящая статья.

Итак, рассмотрим произвольный неравобедренный треугольник  $ABC$ , для определенности упорядочим длины его сторон:  $a = BC < b = CA < c = AB$ . На лучах  $AC$  и  $AB$  отметим точки  $B_a$  и  $C_a$  соответственно, такие, что  $AB_a = AC_a = a$ . Аналогично, на лучах  $BC$ ,  $BA$  и  $CB$ ,  $CA$  отметим точки  $A_b$ ,  $C_b$  и  $A_c$ ,  $B_c$  соответственно, такие, что  $BA_b = BC_b = b$  и  $CA_c = CB_c = c$  (рис.2). Заметим, что расположение отмеченных точек на сторонах треугольника или их продолжениях однозначно определяется неравенством  $a < b < c$ .

1. Из построения очевидно, что треугольник  $AB_aC_a$  равнобедренный и прямая  $B_aC_a$  перпендикулярна биссектрисе угла  $BAC$ . Аналогично, прямые  $C_bA_b$  и  $A_cB_c$  перпендикулярны соответствующим биссектрисам.

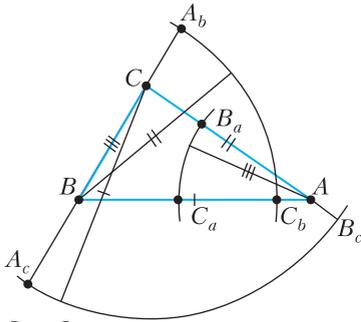


Рис. 2

Кроме того,  $AB_c = AC_b = c - b$ ,  $BA_c = BC_a = c - a$ ,  $CA_b = CB_a = b - a$ . Треугольник  $AB_cC_b$  равнобедренный, откуда видно, что

• *прямая  $B_cC_b$  параллельна биссектрисе угла  $A$  (рис.3).*

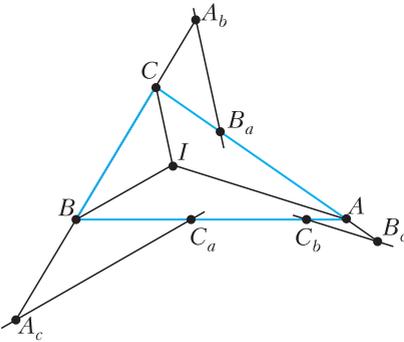


Рис. 3

Аналогично выясняются направления прямых  $A_bB_a$  и  $C_aA_c$ .

2. Докажем, что

• *прямые  $A_bB_a$ ,  $B_cC_b$  и  $C_aA_c$  пересекаются в одной точке.*

Обозначим центры внеписанных окружностей треугольника  $ABC$  как  $I_a$ ,  $I_b$  и  $I_c$  ( $I_a$  соответствует стороне  $BC$  и т. д.).

Как было замечено ранее, треугольники  $BA_cC_a$  и  $CA_bB_a$  равнобедренные. Серединные перпендикуляры к их основаниям совпадают с внешними биссектрисами треугольника  $ABC$ . Треугольник  $AB_aC_a$  также равнобедренный по построению. Серединный перпендикуляр к его основанию совпадает с биссектрисой угла  $A$  треугольника  $ABC$ . Следовательно,  $I_aA_b = I_aB_a = I_aC_a = I_aA_c$ . Значит, точки  $A_b$ ,  $B_a$ ,  $C_a$ ,  $A_c$  лежат на одной окружности (рис.4). Обозначим ее  $\omega_a$ . Аналогично определим окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$ .

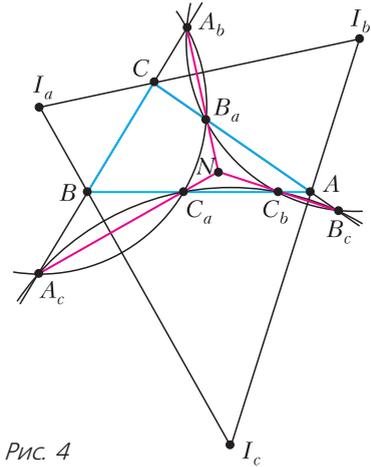


Рис. 4

Для окружностей  $\omega_a$  и  $\omega_b$  прямая  $A_bB_a$  является радикальной осью (см. рис.4). Так же для пар окружностей  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  и  $\omega_b$ ,  $\omega_c$  прямые  $C_aA_c$  и  $B_cC_b$  являются радикальными осями, поэтому все три прямые пересекаются в одной точке – радикальном центре окружностей  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и  $\omega_c$  (очевидно, эти прямые не параллельны).

Точку пересечения прямых  $A_bB_a$ ,  $B_cC_b$  и  $C_aA_c$  назовем  $N$ .

3. Проведем еще одно рассуждение, из которого вытекает другое описание точки  $N$ .

Пусть  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ , также обозначим через  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  середины его сторон (рис.5), и пусть  $S$  – центр вписанной окружности серединного треугольника  $M_aM_bM_c$  (точка  $S$  также называется центром Шпикера треугольника  $ABC$ ).

Пусть луч  $M_cS$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $P$ . Как известно,  $BC \parallel M_bM_c$  и  $CA \parallel M_aM_c$ , поэтому  $CI \parallel M_cP$  и  $\angle M_bM_cP = \angle BCI = \angle ICM_b = \angle M_cPM_b$ , откуда  $PM_b = M_bM_c = a/2$ . Далее,  $CP = CM_b - PM_b = (b - a)/2 = CB_a/2$ . Также  $M_cS \parallel CI \parallel A_bB_a$ .

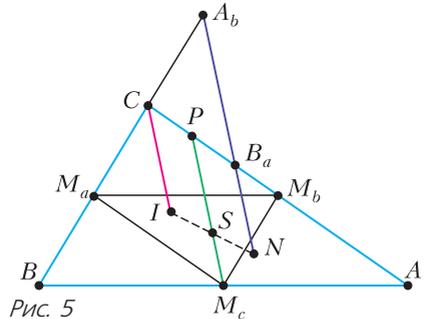


Рис. 5

Это означает, что прямая  $M_cS$  лежит «посередине» между прямыми  $CI$  и  $A_bB_a$  (иначе говоря, середина любого отрезка с концами на прямых  $CI$  и  $A_bB_a$  лежит на прямой  $M_cS$ ). Тогда  $A_bB_a$  проходит через точку, симметричную  $I$  относительно  $S$ . То же верно и для прямых  $B_cC_b$  и  $C_aA_c$ .

Получается, что  $N$  – точка, симметричная  $I$  относительно  $S$ . Однако известно, что для любого треугольника центр вписанной окружности  $I$ , точка Нагеля и центр Шпикера  $S$  лежат на одной прямой – так называемой *прямой Нагеля*, причем  $S$  является серединой отрезка между  $I$  и точкой Нагеля. Это и означает, что

•  $N$  – точка Нагеля!

По пути еще отметим, что на прямой Нагеля  $IN$  лежит также и точка  $M$  пересечения медиан, при этом  $\overline{MN} = 2\overline{IM}$ , а в центре Шпикера треугольника находится центр тяжести проволочного треугольника  $ABC$ , стороны которого являются тонкими однородными стержнями с массами, равными длинам соответствующих сторон. Это свойство центра Шпикера мы доказывать не будем.

4. Согласно исходному построению,  $AB_a = AC_a = a$ . Это означает, что мы можем вписать в угол  $A$  окружность  $\Omega_a$ , касающуюся сторон угла именно в точках  $B_a$  и  $C_a$ . Так же получим окружности  $\Omega_b$  и  $\Omega_c$  (рис.6). Их центры обозначим  $O_a, O_b$  и  $O_c$  соответственно.

Докажем, что

•  $N$  лежит на каждой из окружностей  $\Omega_a, \Omega_b$  и  $\Omega_c$ , т.е. все они пересекаются в точке  $N$  (см. рис.6).

Докажем, что  $N \in \Omega_a$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} 2\angle B_aNC_a &= 360^\circ - 2\angle CA_bB_a - 2\angle C_aA_cB = \\ &= 360^\circ - \angle C - \angle B = 180^\circ + \angle A = \angle B_aO_aC_a. \end{aligned}$$

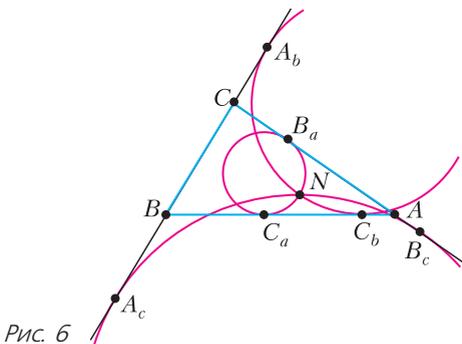


Рис. 6

(Обратите внимание на рисунок 7, этот угол больше развернутого.) Значит, угол  $B_aNC_a$  равен половине центрального угла  $B_aO_aC_a$

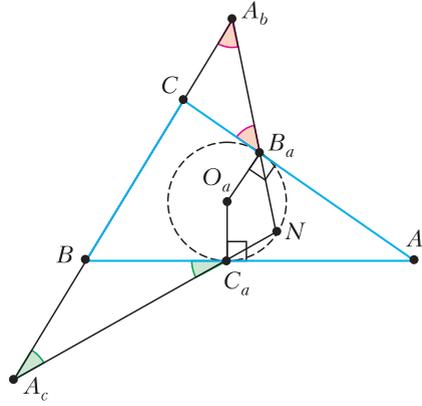


Рис. 7

окружности  $\Omega_a$ . Из этого следует, что данный угол является вписанным в окружность  $\Omega_a$ , поэтому  $N \in \Omega_a$ . Проведя аналогичные рассуждения для двух других окружностей, получим, что точка  $N$  принадлежит всем трем данным окружностям.

5. Вернемся к равнобедренным треугольникам  $AB_cC_b, BA_cC_a, CA_bB_a$ . Описанные окружности этих треугольников обозначим  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ .

Покажем, что

• середина  $M'_c$  дуги  $ACB$  описанной окружности треугольника  $ABC$  является центром окружности  $\lambda_c$  (рис.8).

Имеем  $AM'_c = BM'_c, \angle M'_cAC = \angle M'_cBC = \angle M'_cBA_b$ . Но  $AC = BA_b = b$ , следовательно,  $\Delta M'_cAC = \Delta M'_cBA_b$ , откуда  $M'_cC = M'_cA_b$ . Аналогично,  $\Delta M'_cAB_a = \Delta M'_cBC$ , поскольку  $AB_a = BC = a$ . Значит,  $M'_cB_a = M'_cC$ . Получаем требуемое:  $M'_c$  – центр описанной окружности  $\Delta CA_bB_a$ .

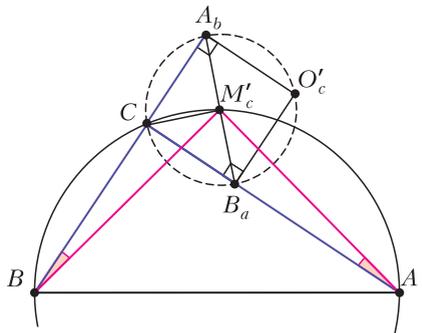


Рис. 8

Поскольку  $CA_b = CB_a$ , во внешний угол  $C$  можно вписать окружность, касающуюся  $AC$  и  $BC$  в  $B_a$  и  $A_b$  соответственно. Обозначим ее центр  $O'_c$ . Очевидно,  $O'_c B_a \perp AC$  и  $O'_c A_b \perp BC$ , поэтому  $O'_c$  – точка на окружности  $\lambda_c$ , диаметрально противоположная точке  $C$  (см. рис.8).

Аналогично определяются точки  $O'_a, O'_b$  и  $M'_a, M'_b$ . Для них также верны соответствующие утверждения.

6. Далее нам понадобятся две леммы.

**Лемма 1.** Пусть некоторая окружность  $\theta$  вписана в угол  $A$  треугольника  $ABC$ . Ближнюю к вершине  $A$  точку пересечения прямой  $AN$  – нагелианы – с окружностью  $\theta$  обозначим через  $P$ . Тогда касательная к окружности  $\theta$  в точке  $P$  параллельна  $BC$  (рис.9).

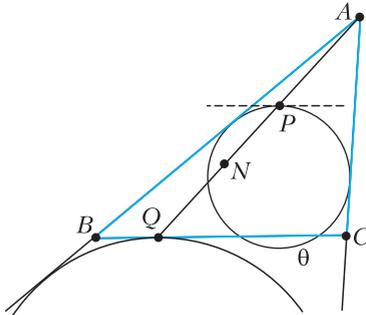


Рис. 9

**Доказательство.** Поскольку окружность  $\theta$  вписана в угол  $A$ , то существует гомотетия с центром в точке  $A$ , переводящая вневписанную окружность треугольника  $ABC$ , касающуюся стороны  $BC$  в точке  $Q$ , в окружность  $\theta$ . При такой гомотетии прямая  $AN$  перейдет в себя, но так как точки  $A, P$  и  $Q$  лежат на одной прямой (см. рис.9), то  $Q$  перейдет в  $P$ , а касательная  $BC$  перейдет в параллельную ей касательную к окружности  $\theta$  в точке  $P$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть три окружности пересекаются в одной точке. Тогда эта точка лежит на одной окружности с их центрами тогда и только тогда, когда их попарные точки пересечения лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Пусть  $O$  – общая точка трех окружностей,  $A, B$  и  $C$  – их попарные точки пересечения,  $O_3, O_2$  и  $O_1$  – центры этих окружностей (рис.10). Тогда имеем равенства  $\angle OO_1O_3 = \frac{1}{2} \angle OO_1B = \angle OCB$  и

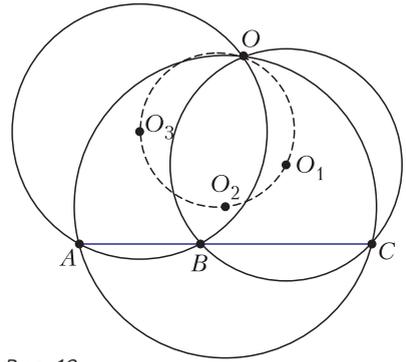


Рис. 10

$\angle OO_2O_3 = \frac{1}{2} \angle OO_2A = \angle OCA$ . Но равенство углов  $OCB$  и  $OCA$  означает коллинеарность точек  $A, B$  и  $C$ , а равенство углов  $OO_1O_3$  и  $OO_2O_3$  – вписанность четырехугольника  $OO_1O_2O_3$ . Из этого следует утверждение леммы.

Обозначим вторую точку пересечения (отличную от  $N$ ) окружностей  $\Omega_a$  и  $\Omega_b$  как  $D_c$ . Аналогично определим точки  $D_a$  и  $D_b$ .

Докажем, что

• точки  $O_a, O_b, O'_c, M'_c$  и  $D_c$  лежат на одной окружности (рис.11).

Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle B_a D_c A_b &= 180^\circ - \angle D_c A_b N - \angle A_b B_a D_c = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle D_c O_b N - \frac{1}{2} \angle N O_a D_c = \\ &= 180^\circ - \angle D_c O_b O_a - \angle O_b O_a D_c = \angle O_a D_c O_b. \end{aligned}$$

Угол  $O_a D_c O_b$  по сути равен углу между окружностями  $\Omega_a$  и  $\Omega_b$ , но поскольку касательные к ним в точке  $N$  параллельны соответственным сторонам треугольника  $ABC$  (по лемме 1), то  $\angle B_a C A_b = \angle O_a D_c O_b =$

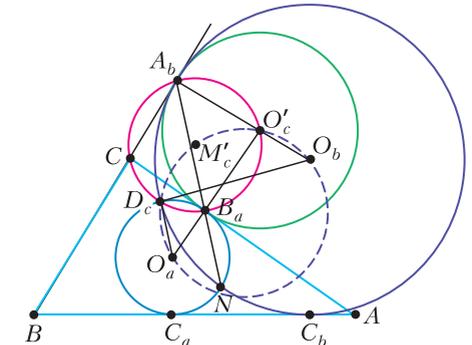


Рис. 11

$= \angle B_a D_c A_b$ , следовательно, точка  $D_c$  принадлежит окружности  $\lambda_c$ .

Применяя лемму 2 для окружностей  $\lambda_c$ ,  $\Omega_a$  и  $\Omega_b$  (точка  $D_c$  для них общая, а попарные их точки пересечения –  $A_b$ ,  $B_a$  и  $N$  коллинеарны), получаем, что четырехугольник  $O_a D_c M'_c O_b$  вписанный.

Далее заметим, что точки  $O'_c$ ,  $O_a$  и  $B_a$ , как и  $O'_c$ ,  $O_b$  и  $A_b$ , коллинеарны, откуда  $\angle O'_c O_a D_c = \angle B_a O_a D_c = 2\angle B_a N D_c =$   
 $= 2\angle A_b N D_c = \angle A_b O_b D_c = \angle O'_c O_b D_c$ .

Значит, четырехугольник  $O_a D_c O'_c O_b$  также вписанный.

Ясно, что эти два четырехугольника вписаны в одну окружность, так что все пять точек  $O_a$ ,  $O_b$ ,  $O'_c$ ,  $M'_c$  и  $D_c$  лежат на одной окружности. Назовем ее *окружностью пяти точек для вершины C* и обозначим  $\pi_c$ .

**7.** Завершая исследование нашей конструкции, докажем совершенно удивительное **утверждение**, связывающее окружности пяти точек воедино:

• *три окружности пяти точек треугольника пересекаются в одной точке на описанной окружности этого треугольника.*

Для доказательства нам потребуется еще одна лемма.

**Лемма 3.** Пусть  $D$ ,  $E$  и  $F$  – образы произвольной точки  $P$  при симметрии относительно сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ . Тогда описанные окружности треугольников  $ADF$ ,  $BDE$  и  $CEF$  пересекаются в одной точке на описанной окружности треугольника  $ABC$  (рис.12,а).

**Доказательство.** Пусть описанные окружности треугольников  $ADF$  и  $BDE$  вторично пересекаются в точке  $Q$  (рис.12,б). Так как точки  $D$  и  $F$  симметричны точке  $P$  относительно сторон угла  $A$ , то  $\angle FAD = 2\angle A$  и  $AF = AP = AD$ , откуда  $\angle DFA = 90^\circ - \angle A$ . Аналогично,  $\angle BED = 90^\circ - \angle B$ . Из вписанности четырехугольников  $AFQD$  и  $DQEB$  имеем  $\angle DFA = \angle DQA$  и  $\angle BED = \angle BQD$ . Объединяя все это, получим

$$\begin{aligned} \angle BQA &= \angle BQD + \angle DQA = \angle BED + \angle DFA = \\ &= 90^\circ - \angle B + 90^\circ - \angle A = \angle C. \end{aligned}$$

Это означает, что точка  $Q$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тем самым, любые две из трех окружностей пересекаются на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Поэтому все три окружнос-

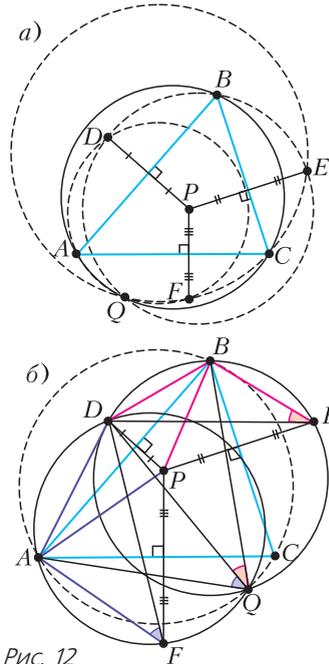


Рис. 12

ти пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству **утверждения**. Для этого рассмотрим три окружности: окружность  $\Omega_a$ , вписанную в треугольник  $ABC$ , и внеписанную, касающуюся стороны  $BC$ . А именно, их центры –  $O_a$ ,  $I$  и  $I_a$ , которые лежат на биссектрисе угла  $A$ , и точки касания со стороной  $AB - C_a$ ,  $L$  и  $K$  (рис.13).

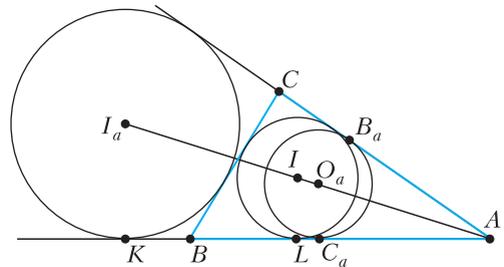


Рис. 13

Заметим, что отрезки  $KL$  и  $AC_a$  соответственно пропорциональны отрезкам  $II_a$  и  $AO_a$ . С другой стороны,  $KL = AC_a$ :

$$\begin{aligned} KL &= KA - LA = \\ &= \frac{a+b+c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = a = AC_a. \end{aligned}$$

Следовательно,  $AO_a = II_a$ . Треугольник

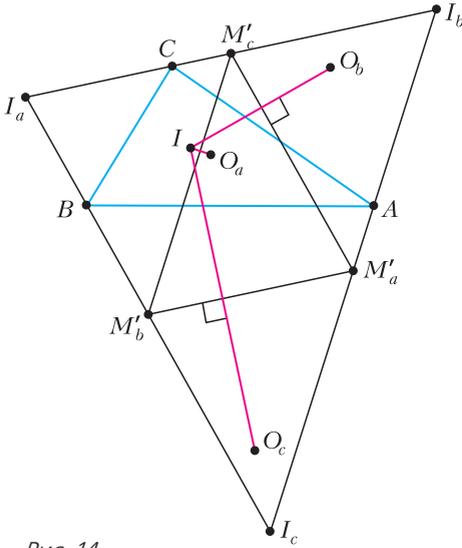


Рис. 14

$ABC$  является ортотреугольником в треугольнике  $I_a I_b I_c$ , а  $\Delta M'_a M'_b M'_c$  – середин-

ным треугольником; это известные факты. Поэтому  $M'_b M'_c$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AI_a$ . Получается, что точки  $O_a$  и  $I$  симметричны относительно прямой  $M'_b M'_c$  (рис.14). Аналогичные рассуждения верны для пар точек  $O_b, I$  и  $O_c, I$ .

Применяя лемму 3 для треугольника  $M'_a M'_b M'_c$  и точки  $I$ , получаем, что описанные окружности треугольников  $O_a M'_c O_b$ ,  $O_b M'_a O_c$  и  $O_c M'_b O_a$  пересекаются в одной точке на описанной окружности треугольника  $M'_a M'_b M'_c$ . Однако эти окружности в точности являются окружностями пяти точек треугольника  $ABC$ , а описанная окружность треугольника  $M'_a M'_b M'_c$  является описанной окружностью треугольника  $ABC$ . Утверждение доказано.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А.И.Перегудину и П.А.Кожевникову за плодотворное обсуждение материалов настоящей статьи и ценные замечания по ее содержанию.

## Точка Нагеля и разностный треугольник

С.АРУТЮНЯН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ РЕЧЬ ПОЙДЕТ ОБ ОДНОЙ замечательной точке треугольника – точке Нагеля. Это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вневписанными окружностями. С точкой Нагеля связано много красивых геометрических фактов. Упомянем известный факт о *прямой Нагеля*, которым мы будем пользоваться:

*Для любого треугольника центр вписанной окружности  $I$ , точка Нагеля  $N$  и точка  $M$  пересечения медиан лежат на одной прямой, при этом  $MN = 2IM$ .*

Немного по-другому этот факт можно переформулировать так. Пусть  $M_a, M_b, M_c$

– середины соответствующих сторон треугольника. Тогда при гомотетии с центром в  $M$  и коэффициентом  $-1/2$  треугольник  $ABC$  переходит в  $\Delta M_a M_b M_c$ , а точка  $N$  – в точку  $I$ , т.е.  $I$  является точкой Нагеля для серединного треугольника  $M_a M_b M_c$ .

А теперь посмотрим на один замечательный класс треугольников – так называемые *разностные треугольники*. Разностным называют треугольник, длины сторон которого составляют арифметическую прогрессию. У класса разностных треугольников существует много других красивых эквивалентных определений. Этому классу, например, посвящен параграф книги А.Д.Блинкова «Классические средние в арифметике и геометрии» (М.: МЦНМО, 2016). Упомянем два условия, эквивалентных условию разностности (при этом ограничимся рассмотрением только неравнобедренных треугольников).

Итак, пусть  $ABC$  – неравнобедренный треугольник,  $a = BC, b = CA, c = AB$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $a + c = 2b$  (т.е. треугольник разностный, со средней по длине стороной  $b$ );
- (2) точка  $I$  равноудалена от  $M_a$  и  $M_c$  (рис.1);
- (3) *четыреугольник  $BM_a IM_c$  – вписанный.*

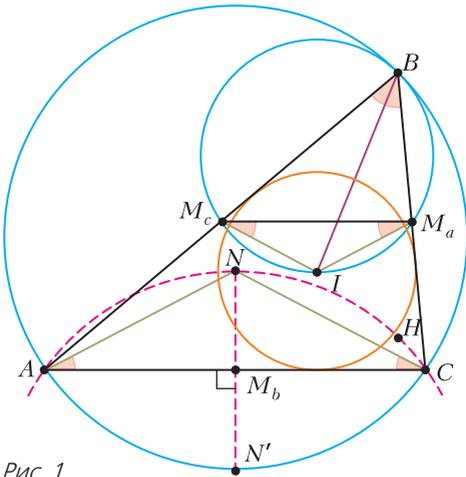


Рис. 1

Условие (3), очевидно, эквивалентно условию на углы

$$(3') \angle M_a I M_c = 180^\circ - \angle ABC.$$

Попробуем получить условия на треугольник, эквивалентные приведенным, но связанные с точкой Нагеля.

Рассмотренная выше гомотетия переводит треугольник  $ANC$  в  $\Delta M_a I M_c$ . А это значит, что условие (2) эквивалентно условию

(4) точка  $N$  равноудалена от  $A$  и  $C$ .

Да, оказывается, из равенства  $NA = NC$  совершенно не следует, что треугольник равнобедренный! Неожиданно, но красиво!

Уже неплохо. Попробуем поработать с другими условиями.

Все та же гомотетия помогает переформулировать условие (3') как

$$(5) \angle ANC = 180^\circ - \angle ABC.$$

Рассмотрим точку  $N'$ , симметричную  $N$  относительно  $AC$ , так что  $\angle ANC = \angle AN'C$ . Условие (5) эквивалентно тому, что  $\angle AN'C + \angle ABC = 180^\circ$ , т.е. тому, что четырехугольник  $ABCN'$  вписанный, или условию

(5')  $N'$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Как известно, точка, симметричная ортоцентру  $H$  относительно прямой, содержащей сторону треугольника, лежит на описанной окружности. Отражение относительно  $AC$  дает возможность теперь переформулировать условие (5') как

(5'') точки  $A, C, N, H$  лежат на одной окружности.

Заметим, что из условия (5') следует (4), значит,  $AN' = CN'$ , т.е.  $N'$  – середина дуги.

Получается, что (5') эквивалентно формально более слабому факту

(5''')  $N'$  является серединой дуги  $AC$  (не содержащей точки  $B$ ).

Видим, что в разностном треугольнике  $N'$  лежит на биссектрисе угла  $B$ . Этот факт можно переформулировать в такой занятой форме. Пусть имеется бильярд в форме треугольника  $ABC$ , в котором  $a + c = 2b$ . Тогда бильярдный шар, выпущенный из вершины  $B$  вдоль биссектрисы угла  $ABC$ , после отражения относительно борта  $AC$  пройдет через точку Нагеля. Предлагаем читателю подумать, верно ли утверждение, обратное данному.

Можно продолжать и получать другие условия, в том числе и не использующие точку  $N$ . Например, при помощи изогонального сопряжения условие (5'') можно переформулировать так.

Пусть  $S$  – центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей вписанную окружность в описанную. Тогда условие (5'') эквивалентно тому, что точки  $A, C, O, S$  лежат на одной окружности (рис.2). Секрет здесь в том, что  $O$  и  $H$ , а также  $S$  и  $N$  – пары изогонально сопряженных точек; а кроме того, если точки  $A, C, X, Y$  лежат на одной окружности, то же верно и для точек  $A, C, X_1, Y_1$ , где  $X_1$  и  $Y_1$  – точки, изогонально сопряженные точкам  $X$  и  $Y$ . (Докажите это!)

Но вернемся к условию (5). Продлим отрезки  $AN$  и  $CN$  до нагелиан  $AN_a$  и  $CN_a$ . Условие (5) приводим к виду

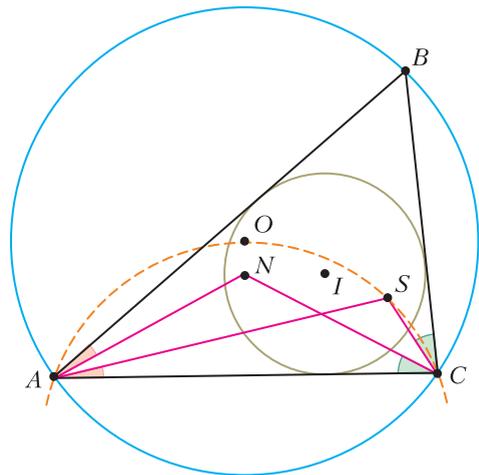


Рис. 2

$\angle N_a N N_c = 180^\circ - \angle N_a B N_c$ . А это эквивалентно тому, что

(6) точки  $B, N_a, N, N_c$  лежат на одной окружности (рис. 3).

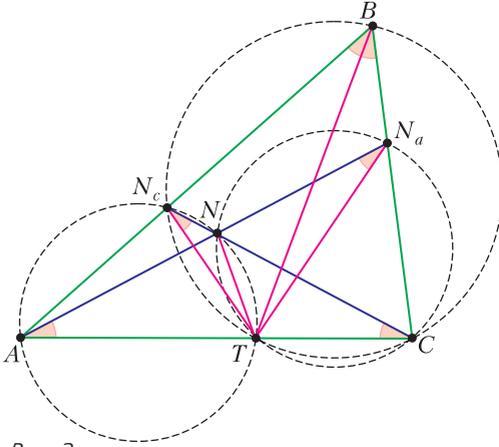


Рис. 3

Проведем окружность  $CNN_a$  и найдем точку  $T$  ее пересечения с  $AC$ . Тогда  $\angle NTA = \angle NN_aC$ . Условие (6) эквивалентно равенству

$$\angle NN_cB = \angle NN_aC \Leftrightarrow \angle NN_cB = \angle NTA,$$

следовательно, точки  $A, N_c, N, T$  лежат на одной окружности. Иными словами, (6) эквивалентно тому, что окружности  $CNN_a$  и  $ANN_c$  пересекаются на  $AC$ .

В разностном треугольнике, с учетом условия (4), получаем

$$\angle CN_cT = \angle NAC = \angle NCA = \angle AN_aT.$$

Тогда треугольники  $ATN_a$  и  $CTN_c$  равнобедренные и  $T$  – точка пересечения средних перпендикуляров к нагелианам  $AN_a$  и  $CN_c$ . (Подумайте, следует ли из того, что серединные перпендикуляры к нагелианам  $AN_a$  и  $CN_c$  пересекаются на  $AC$ , что треугольник  $ABC$  разностный.)

Продолжаем рассуждения для разностного треугольника  $ABC$ . Треугольники  $TCN_a$  и  $TN_cA$  равны (получаются один из другого поворотом вокруг точки  $T$ ), значит,  $T$  равноудалена от прямых  $AB$  и  $BC$ , т.е.  $T$  является основанием биссектрисы!

В завершение обсудим ситуацию, когда отрезок  $BD$  делит треугольник  $ABC$  на два разностных треугольника  $ABD$  и  $CBD$  со средней стороной  $BD$  (рис.4). Нетрудно понять (сделайте это), что в таком случае

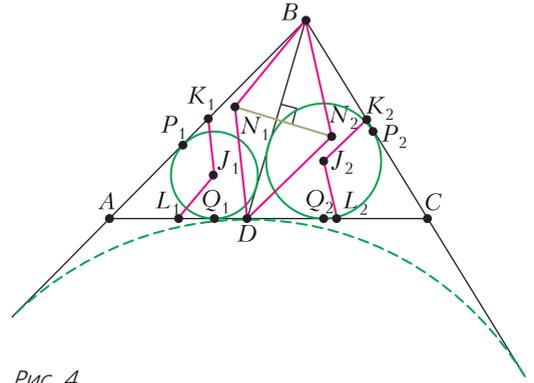


Рис. 4

$BD$  обязана быть нагелианой  $BN_b$ , и при этом  $BN_b = p/2$ , т.е. нагелиана равна четверти периметра. Если это условие выполнено, то точки Нагеля  $N_1$  и  $N_2$  треугольников  $ABD$  и  $CBD$  равноудалены от точек  $B$  и  $D$ , откуда  $BD \perp N_1N_2$ .

Зададимся вопросом – верно ли обратное? Следует ли из условия  $BD \perp N_1N_2$  то, что  $BD = p/2$ ? Оказывается, ответ на этот вопрос положительный. Докажем это.

Впишем в треугольники  $ABD$  и  $CBD$  окружности с центрами  $J_1$  и  $J_2$  и отметим точки  $P_1, Q_1, Q_2, P_2$  их касания с отрезками  $BA, AD, DC, CB$  соответственно. Также обозначим через  $K_1, L_1, L_2, K_2$  середины отрезков  $BA, AD, DC, CB$  соответственно.

Для того чтобы имело место  $N_1N_2 \perp BD$ , необходимо и достаточно, чтобы  $N_1B^2 - N_1D^2 = N_2B^2 - N_2D^2$  (проверьте это). Рассматривая гомотегию, упомянутую в доказательстве условия (4), получаем, что  $DN_1 = 2K_1J_1$  и  $BN_1 = 2L_1J_1$ ,  $DN_2 = 2K_2J_2$  и  $BN_2 = 2L_2J_2$ . Отсюда

$$\begin{aligned} N_1B^2 - N_1D^2 = N_2B^2 - N_2D^2 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow J_1L_1^2 - J_1K_1^2 = J_2L_2^2 - J_2K_2^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (J_1Q_1^2 + Q_1L_1^2) - (J_1P_1^2 + P_1K_1^2) = \\ &= (J_2Q_2^2 + Q_2L_2^2) - (J_2P_2^2 + P_2K_2^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_1L_1^2 - P_1K_1^2 = Q_2L_2^2 - P_2K_2^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (AB - BD)^2 - (AD - BD)^2 = \\ &= (CB - BD)^2 - (CD - BD)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow BD = \frac{AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2}{2(AB - BC + CD - AD)}. \end{aligned}$$

Подставив  $AB = c, BC = a, AD = p - c,$

$CD = p - a$ , получаем

$$BD = \frac{c^2 - a^2 + (p - a)^2 - (p - c)^2}{2(c - a + (p - a) - (p - c))} = \frac{p}{2}.$$

Нетрудно заметить, что проведенные выше рассуждения не изменяются, если «вырожденный четырехугольник»  $ABCD$  заменить на любой другой четырехугольник, в котором  $BA + AD = BC + CD$  (для таких четырехугольников, как и для описанных, существует окружность, касающаяся всех прямых, содержащих их стороны).

Завершая наш рассказ, отметим, что есть несколько других интересных свойств, связывающих точку Нагеля с треугольниками, в которых отношение суммы длин двух сторон к длине третьей стороны равно некоторому фиксированному числу. Треугольники, для которых это отношение равно 3, хорошо исследованы и про них можно прочитать в статье А. Заславского «Приключения одной задачи» в «Кванте» №12 за 2017 год. Читатель может самостоятельно попробовать исследовать свойства таких классов треугольников и связать их с точкой Нагеля.

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

*Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте [sites.google.com/view/savin-contest](http://sites.google.com/view/savin-contest)  
Желаем успеха!*

1. Вася хочет выбрать среди чисел а) 1, 2, ..., 50; б) 1, 2, ..., 51 как можно больше чисел так, чтобы любые два числа различались хотя бы на 3. Сколько способов сделать это есть у Васи?

*П. Кожевников*

2. Квантик загадал целое число от 0 до 99, а Ноутик его отгадывает. Число считается отгаданным, если Ноутик его назвал. За ход Ноутик называет четыре целых числа от 0 до 99, обладающих одним из двух свойств: либо первый разряд у всех чисел совпадает, а вторые разряды последовательные, либо второй разряд у всех чисел совпадает, а первые разряды последовательные (у однозначных чисел первый разряд считаем равным 0). Например, наборы 13, 14, 15, 16 и 3, 13, 23, 33 подходят, а набор 18, 19, 20, 21 – нет. За какое минимальное чис-

ло ходов Ноутик может гарантированно отгадать число?

*Ю. Маркелов, С. Маркелов*

3. Дан отрезок  $a$  и правильный треугольник со стороной  $b$ . Постройте (циркулем и линейкой) внутри этого треугольника правильный треугольник со стороной  $a$  такой, чтобы вершины внешнего треугольника лежали на продолжениях сторон внутреннего.

*Е. Бакаев*

4. Верно ли, что числа вида  $1 + x + x^{2017} + x^{2018} + x^{2019}$  являются составными для всех натуральных  $x > 1$ ?

*В. Расторгуев*

# ЕГЭ по физике

Варианты ЕГЭ по физике 2019 года не отличались по структуре от вариантов предыдущего года. Они содержали 32 задания, и максимальная сумма первичных баллов составляла 52 балла. При этом 17 заданий (1–4, 8–10, 13–15, 19, 20, 22, 23, 25–27) оценивались максимум в 1 балл, 10 заданий (5–7, 11, 12, 16–18, 21, 24) оценивались максимум в 2 балла, 5 заданий (28–32), требующие развернутого решения, оценивались максимум в 3 балла каждое.

В 2020 году структура вариантов по физике немного изменится. Заданий будет также 32, но задание 27 перейдет из разряда заданий с кратким ответом в разряд заданий с развернутым ответом и будет оцениваться максимум в 3 балла. Максимальная сумма первичных баллов составит 54 балла. И еще одно новшество: задание 24 (по астрономии) будет содержать неопределенное количество правильных утверждений – от одного до пяти. В ответе надо указать номера *всех* правильных утверждений.

Приведем один из вариантов открытого сегмента 2019 года.

## Вариант 1

### Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 32 задания.

В заданиях 1–4, 8–10, 14, 15, 20, 25–27 ответом является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответов №1. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

Ответ:  $-2,5 \text{ м/с}^2$ .

Ответом к заданиям 5–7, 11, 12, 16–18, 21, 23 и 24 является последовательность двух цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу без пробелов, запятых и других дополнительных символов в бланк ответов №1.

Ответ: 

А	Б
4	1

Ответом к заданию 13 является слово. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответов №1.

Ответ: вправо.

Ответом к заданиям 19 и 22 являются два числа. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу, не разделяя числа пробелом, в бланк ответов №1.

Заряд ядра $Z$	Массовое число ядра $A$
38	94

Ответ:  $(1,4 \pm 0,2) \text{ н.}$

Бланк

Ответ к заданиям 28–32 включает в себя подробное описание всего хода выполнения задания. В бланке ответов №2 укажите номер задания и запишите его полное решение.

При вычислениях разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

*Желаем успеха!*

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться Вам при выполнении работы.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИСТАВКИ

Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	$10^9$
мега	М	$10^6$
кило	к	$10^3$
гекто	г	$10^2$
деци	д	$10^{-1}$
санти	с	$10^{-2}$
милли	м	$10^{-3}$
микро	мк	$10^{-6}$
нано	н	$10^{-9}$
пико	п	$10^{-12}$

КОНСТАНТЫ

число  $\pi$

$$\pi = 3,14$$

ускорение свободного падения на Земле

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

гравитационная постоянная

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$$

универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

постоянная Авогадро

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

скорость света в вакууме

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

коэффициент пропорциональности в законе Кулона

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$$

модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

постоянная Планка

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ЕДИНИЦАМИ

температура  $0 \text{ К} = -273 \text{ }^\circ\text{С}$

атомная единица

массы  $1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

1 атомная единица

массы эквивалентна  $931,5 \text{ МэВ}$

1 электронвольт  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

1 астрономическая

единица  $1 \text{ а.е.} \approx 150 \text{ 000 000 км}$

1 световой год  $1 \text{ св. год} \approx 9,46 \cdot 10^{15} \text{ м}$

1 парсек  $1 \text{ пк} \approx 3,26 \text{ св. года}$

МАССА ЧАСТИЦ

электрона  $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.}$

протона  $1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,007 \text{ а.е.м.}$

нейтрона  $1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,008 \text{ а.е.м.}$

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

средний радиус Земли  $R_{\oplus} = 6370 \text{ км}$

радиус Солнца  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$

температура поверхности Солнца

$$T = 6000 \text{ К}$$

ПЛОТНОСТЬ

воды  $1000 \text{ кг/м}^3$

древесины (сосна)  $400 \text{ кг/м}^3$

керосина  $800 \text{ кг/м}^3$

подсолнечного масла  $900 \text{ кг/м}^3$

алюминия  $2700 \text{ кг/м}^3$

железа  $7800 \text{ кг/м}^3$

ртути  $13600 \text{ кг/м}^3$

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ

воды  $4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

льда  $2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

железа  $460 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

свинца  $130 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

алюминия  $900 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

меди  $380 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

чугуна  $500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОТА

парообразования воды  $2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$

плавления свинца  $2,5 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$

плавления льда  $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$

НОРМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

давление –  $10^5 \text{ Па}$ , температура –  $0 \text{ }^\circ\text{С}$

МОЛЯРНАЯ МАССА

азота  $28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

аргона  $40 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

водорода  $2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

воздуха	$29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воды	$18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
гелия	$4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
кислорода	$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
лития	$6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
неона	$20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
углекислого газа	$44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

**ЧАСТЬ 1**

Ответами к заданиям 1–24 являются слово, число или последовательность цифр или чисел. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

1. На рисунке 1 представлен график зависимости скорости  $v$  прямолинейно движущегося тела от времени  $t$ . Определите по графику путь, пройденный телом в интервале времени от 0 до 3 с после начала движения.

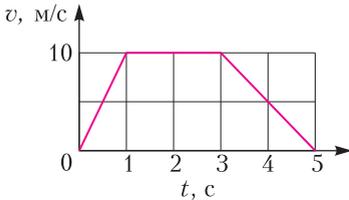


Рис. 1

2. На рисунке 2 представлен график зависимости модуля силы упругости  $F$  от удлинения пружины  $x$ . Какова жесткость пружины?

3. Два тела движутся по взаимно перпендикулярным пересекающимся прямым, как показано на рисунке 3. Модуль импульса первого тела  $p_1 = 8$  кг · м/с, второго тела  $p_2 = 6$  кг · м/с. Каков модуль импульса системы этих тел после их абсолютно неупругого удара?

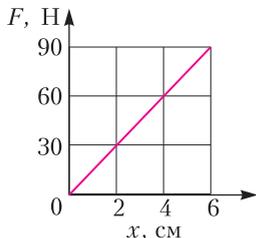


Рис. 2

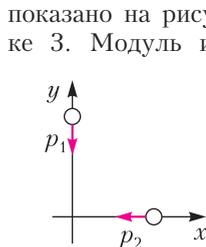


Рис. 3

пульса первого тела  $p_1 = 8$  кг · м/с, второго тела  $p_2 = 6$  кг · м/с. Каков модуль импульса системы этих тел после их абсолютно неупругого удара?

4. Мальчик взвесил рыбу на самодельных весах из легкой удочки (рис.4). В качестве гири он использовал батон хлеба массой 1 кг. Определите массу рыбы.

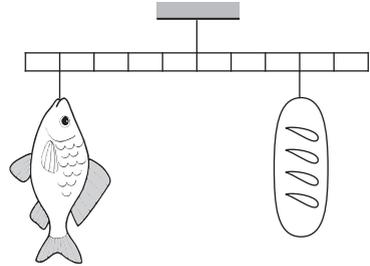


Рис. 4

5. Ученик помещал цилиндр объемом  $V = 10$  см<sup>3</sup>, не удерживая его, в различные жидкости, плотности которых представлены в таблице, и измерял объем погруженной в

Жидкость	Бензин	Спирт	Вода	Глицерин
$\rho, \text{г/см}^3$	0,71	0,79	1,0	1,26
Хлороформ	Бромформ	Дийодметан		
1,49	2,89	3,25		

жидкость части цилиндра  $V_{\text{погр}}$ . По результатам измерений была получена зависимость объема погруженной части цилиндра  $V_{\text{погр}}$  от плотности жидкости  $\rho$  (рис.5).

Выберите два верных утверждения, согласующихся с данными, представленными на рисунке и в таблице.

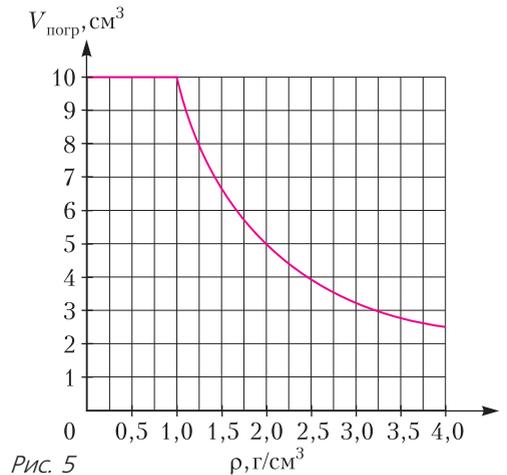


Рис. 5

1) В бензине и спирте сила Архимеда, действующая на цилиндр, одинакова.

2) Цилиндр тонет в спирте.

3) На цилиндр, плавающий в бромформе, действует выталкивающая сила около 35 мН.

4) Цилиндр плавает во всех жидкостях, указанных в таблице.

5) При плавании цилиндра в хлороформе и дийодметане сила Архимеда, действующая на него, одинакова.

**6.** Подвешенный на пружине груз совершает вертикальные свободные гармонические колебания. Массу груза увеличили, оставив жесткость пружины и амплитуду колебаний неизменными. Как при этом изменились частота колебаний груза и его максимальная скорость?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличилась;

2) уменьшилась;

3) не изменилась

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Частота колебаний груза	Максимальная скорость груза

**7.** После удара в момент  $t = 0$  шайба начинает скользить вверх по гладкой наклонной плоскости с начальной скоростью

$v_0$ , как показано

на рисунке 6, и в

момент  $t = t_0$  возвраща-

ется в исходное положение.

Графики А и Б

(рис.7) отобража-

ют изменение с те-

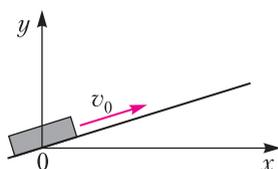
чением времени

физических величин, характеризующих движение шайбы.

Установите соответствие между графиками и физическими величинами, изменение которых со временем эти графики могут отображать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные

цифры под соответствующими буквами А и Б.



цифры под соответствующими буквами А и Б.

ГРАФИКИ

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

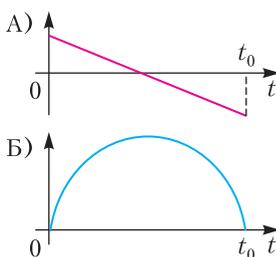


Рис. 7

1) кинетическая энергия  $E_k$

2) проекция ускорения  $a_x$

3) координата  $x$

4) проекция скорости  $v_y$

**8.** При увеличе-

нии абсолютной

температуры сред-

няя кинетическая

энергия хаотического

теплого движения

молекул гелия увеличилась в 2 раза.

Конечная температура газа равна 400 К.

Какова начальная температура газа?

**9.** Рабочее тело тепловой машины с КПД 30% за цикл работы отдает холодильнику количество теплоты, равное 70 Дж. Какое количество теплоты за цикл рабочее тело получает от нагревателя?

**10.** Температура медной детали снизилась с 80 до 40 °С. Масса детали равна 0,4 кг. Какое количество теплоты отдала деталь при остывании?

**11.** В сосуде под поршнем при комнатной температуре долгое время находятся вода и водяной пар. Масса воды равна массе пара. Объем сосуда медленно изотермически увеличивают в 3 раза.

Выберите **два** утверждения, которые верно отражают результаты этого опыта.

1) Плотность пара в начале и конце опыта одинакова.

2) Давление пара сначала было постоянным, а затем стало уменьшаться.

3) Концентрация пара в сосуде в начале опыта больше, чем в конце опыта.

4) В конечном состоянии давление пара в сосуде в 3 раза меньше первоначального.

5) Масса пара в сосуде не изменяется.

**12.** На рисунках А и Б (рис.8) приведены графики двух процессов 1-2 и 3-4, каждый из которых совершает 1 моль разреженного аргона. Графики построены в координатах  $p-T$  и  $V-T$ , где  $p$  – давление,  $V$  – объем и  $T$  – абсолютная температура газа.

Установите соответствие между графиками и утверждениями, характеризующими изображенные на графиках процессы.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами А и Б.

ГРАФИКИ

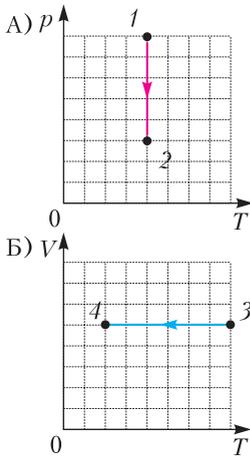


Рис. 8

УТВЕРЖДЕНИЯ

- 1) Газ получает количество теплоты, при этом его внутренняя энергия увеличивается.
- 2) Газ отдает количество теплоты, при этом его внутренняя энергия уменьшается.
- 3) Газ получает количество теплоты и совершает положительную работу.
- 4) Над газом совершают положительную работу, при этом газ отдает тепло.

13. Протон  $p$  влетел в зазор между полюсами магнита со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной вектору индукции  $\vec{B}$  магнитного поля (рис.9; значком  $\otimes$  показано направление движения протона).

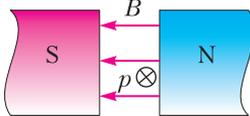


Рис. 9

Куда направлена относительно рисунка (вправо, влево, вверх, вниз, к наблюдателю, от наблюдателя) действующая на протон сила Лоренца  $\vec{F}$ ? Ответ запишите словом (словами).

14. Расстояние между двумя точечными зарядами увеличили в 3 раза и каждый из зарядов уменьшили в 3 раза. Во сколько раз уменьшился модуль силы взаимодействия между ними?

15. Какая точка является изображением точки  $S$  (рис.10), создаваемым тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием  $F$ ?

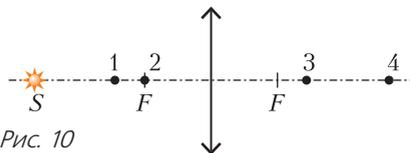


Рис. 10

16. По гладким параллельным рельсам, замкнутым на резистор, перемещают легкий

тонкий проводник. Рельсы, резистор и проводник образуют контур, который находится в однородном магнитном поле, как показано на рисунке 11,а. При движении проводника площадь контура изменяется так, как указано на рисунке 11,б.

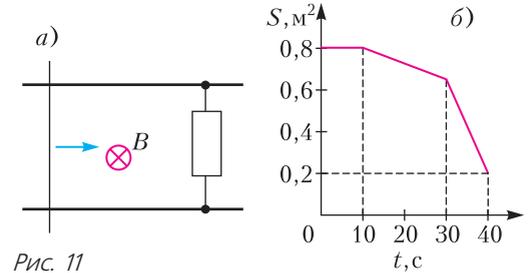


Рис. 11

Выберите два верных утверждения, соответствующих приведенным данным и описанию опыта.

- 1) Поскольку рельсы гладкие, для перемещения проводника в любой момент времени силу прикладывать не надо.
- 2) Максимальная ЭДС наводится в контуре в интервале от 10 до 30 с.
- 3) Сила, прикладываемая к проводнику для его перемещения, максимальна в интервале времени от 30 до 40 с.
- 4) В течение первых 15 с ток течет через резистор непрерывно.
- 5) В интервале времени от 15 до 25 с через резистор течет ток.

17. Резистор  $R_1$  и реостат  $R_2$  подключены последовательно к источнику напряжения  $U$  (рис.12). Как изменится сила тока в цепи и мощность, выделяющаяся на резисторе  $R_1$ , если ползунок реостата переместить до конца вверх? Считайте, что напряжение на выводах источника остается при этом прежним.

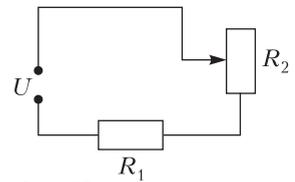


Рис. 12

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличится;
- 2) уменьшится;
- 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

18. Конденсатор колебательного контура длительное время подключен к источнику

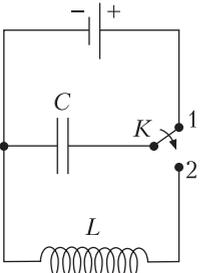


Рис. 13

постоянного напряжения (рис.13). В момент  $t = 0$  переключатель  $K$  переводят из положения 1 в положение 2. Графики А и Б (рис.14) отображают изменения физических величин, характеризующих колебания в контуре после этого ( $T$  – период колебаний).

Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут отображать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами А и Б.

ГРАФИКИ

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

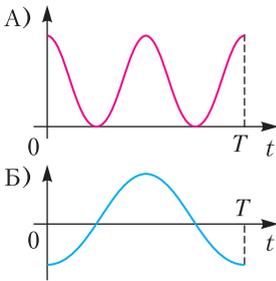


Рис. 14

- 1) сила тока в катушке
- 2) заряд левой обкладки конденсатора
- 3) энергия электрического поля конденсатора
- 4) заряд правой обкладки конденсатора

19. Ядро  $^{195}_{76}\text{Os}$  осмия испытывает электронный  $\beta$ -распад, при этом образуется ядро элемента  $^A_Z\text{X}$ . Каковы заряд  $Z$  (в единицах элементарного заряда) и массовое число  $A$  образовавшегося ядра  $X$ ?

Заряд ядра $Z$	Массовое число ядра $A$

**В бланк ответов № 1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.**

20. Какая доля от исходного большого количества радиоактивных ядер распадется за интервал времени, равный двум периодам полураспада?

21. На установке, представленной на фотографии (рис.15; а – общий вид, б –

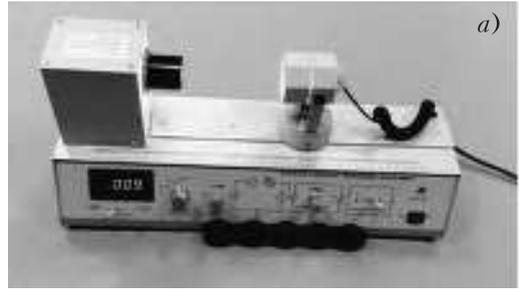


Рис. 15

фотоэлемент), исследовали зависимость кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего света. Для этого в прорезь осветителя помещали различные светофильтры и измеряли запирающее напряжение. В первой серии опытов использовался светофильтр, пропускающий только красный свет, а во второй – пропускающий только желтый свет.

Как изменяются модуль запирающего напряжения и максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов при переходе от первой серии опытов ко второй? Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Модуль запирающего напряжения	Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов

22. Определите показания динамометра (рис.16), если погрешность прямого измере-



Рис. 16

ния силы равна цене деления динамометра. Динамометр проградуирован в ньютонах.

**В бланк ответов № 1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.**

**23.** Ученику нужно обнаружить зависимость периода свободных электромагнитных колебаний в колебательном контуре от емкости конденсатора. Какие **два** колебательных контура (рис. 17)

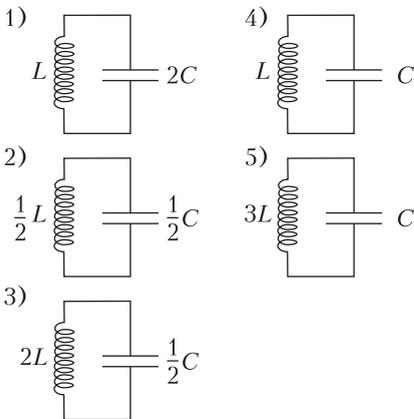


Рис. 17

он должен выбрать для проведения такого исследования?

Запишите в ответе номера выбранных колебательных контуров.

**24.** Рассмотрите таблицу, содержащую сведения о ярких звездах.

Выберите **два** верных утверждения, которые соответствуют характеристикам звезд.

- 1) Звезда Ригель является сверхгигантом.
- 2) Звезда Альдебаран является красным гигантом.
- 3) Так как звезды Антарес А и ан-Ният имеют примерно одинаковые массы, они относятся к одному спектральному классу.
- 4) Температура поверхности звезды Бетельгейзе выше, чем температура поверхности Солнца.
- 5) Так как звезды Ригель и Бетельгейзе относятся к одному созвездию, они находятся на одинаковом расстоянии от Земли.

## ЧАСТЬ 2

**Ответом к заданиям 25–27 является число. Это число запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке обозначениями. Единицы измерения физических величин писать не нужно.**

**25.** Какой путь пройдет тело за 2 с, двигаясь по прямой в одном направлении, если его скорость за это время уменьшается в 3 раза? Модуль ускорения тела равен  $5 \text{ м/с}^2$ .

**26.** При изохорном нагревании идеального газа на 300 К его давление удвоилось. Какова была первоначальная абсолютная температура газа?

Наименование звезды	Температура поверхности, К	Масса (в массах Солнца)	Радиус (в радиусах Солнца)	Название созвездия
Альдебаран	3600	5,0	45	Телец
Меропа	14000	4,5	4	Телец
Антарес А	3400	12,5	5	Скорпион
ан-Ният	30700	15	5	Скорпион
Мирфак	6600	11	56	Персей
Алголь А	12000	3,6	2,3	Персей
Ригель	11200	40	138	Орион
Бетельгейзе	3100	20	900	Орион

27. Две частицы с отношением зарядов  $\frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{8}$  движутся в однородных магнитных полях, перпендикулярных их скоростям: первая – в поле с индукцией  $B_1$ ; вторая – в поле с индукцией  $B_2$ . Найдите отношение радиусов траекторий частиц  $\frac{R_2}{R_1}$ , если их импульсы одинаковы, а отношение модулей индукции  $\frac{B_2}{B_1} = 2$ .

**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

**Для записи ответов на задания 28–32 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер задания (28, 29 и т. д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записываются четко и разборчиво.**

28. В сосуд наливают воду при комнатной температуре. В воду погружают нагревательные элементы с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , подключенные к источнику постоянного напряжения так, как показано на рисунке 18,а. Оставив ключ в положении 1, доводят воду до кипения. Затем кипяток выливают, сосуд охлаждают до комнатной температуры, вновь наполняют таким же количеством воды при комнатной

температуре и, повернув ключ  $K$  в положение 2 (рис.18,б), повторяют опыт. Напряжение источника в опытах одинаково. Опираясь на законы электродинамики и молекулярной физики, объясните, в каком из приведенных опытов вода закипит быстрее.

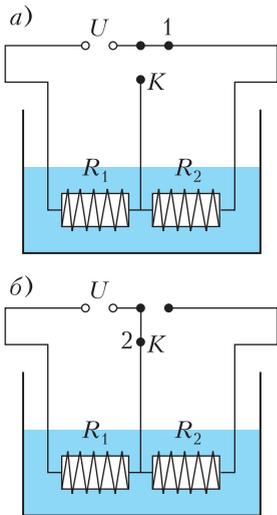


Рис. 18

**Полное правильное решение каждой из задач 29–32 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты счисленным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.**

29. Небольшой брусок массой  $m = 100$  г, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, абсолютно неупруго сталкивается с неподвижным телом массой  $M = 2m$ . При дальнейшем поступательном движении тела налетают на недеформированную пружину, одним концом прикрепленную к стене (рис. 19). Через какое время  $t$  после абсолют-

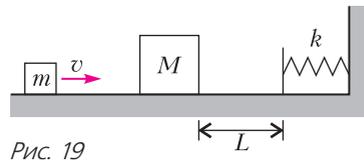


Рис. 19

но неупругого удара бруски вернуться в точку столкновения? Скорость движения бруска до столкновения  $v = 2$  м/с, жесткость пружины  $k = 30$  Н/м, а расстояние от точки столкновения до пружины  $L = 10$  см.

30. Два одинаковых теплоизолированных сосуда соединены короткой трубкой с краном. В первом сосуде находится  $\nu_1 = 2$  моль гелия при температуре  $T_1 = 400$  К, во втором –  $\nu_2 = 3$  моль аргона при температуре  $T_2 = 300$  К. Кран открывают. В установившемся равновесном состоянии давление в сосудах становится  $p = 5,4$  кПа. Определите объем  $V$  одного сосуда. Объемом трубки пренебречь.

31. В электрической цепи, показанной на рисунке 20,  $r = 1$  Ом,  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 7$  Ом,  $C = 0,2$  мкФ, ключ  $K$  дли-

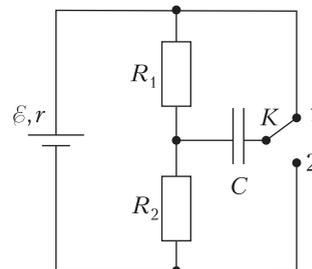


Рис. 20

тельное время находится в положении 1. За длительное время после перевода ключа в положение 2 изменение заряда на правой обкладке конденсатора  $\Delta q = -0,55$  мкКл. Найдите ЭДС источника  $\mathcal{E}$ .

**32.** На плоскую цинковую пластинку ( $A_{\text{вых}} = 3,75$  эВ) падает электромагнитное излучение с длиной волны  $0,3$  мкм. Какова напряженность задерживающего однородного электрического поля, вектор напряженности ко-

торого перпендикулярен пластинке, если фотоэлектрон может удалиться от поверхности пластинки на максимальное расстояние  $d = 2,5$  мм?

**Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.**

*Публикацию подготовили  
М. Демидова, А. Черноуцан*

# Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

## ФИЗИКА

### Профильный экзамен

В 2019 году профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа.

Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена 2019 года.

### МЕХАНИКА

**1.** Запишите формулы для зависимости от времени координаты и скорости точки, совершающей прямолинейное равнопеременное движение.

**Задача.** Два одинаковых груза массой  $M = 1$  кг каждый соединены между собой легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через невесомый блок, причем правый груз находится выше левого (рис.1). На правый груз осторожно положили перегрузок в виде диска с прорезью, выступающего за края груза, после чего система грузов пришла в движение. Переместившись вниз на некоторое расстояние, правый груз встре-

тил ограничитель в виде горизонтально закрепленного кольца, сквозь которое груз прошел беспрепятственно, а перегрузок был удержан кольцом. На какую величину  $\Delta T$  изменится сила натяжения нити после прохождения правым грузом кольца ограничителя, если масса перегрузка  $m = 250$  г? Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

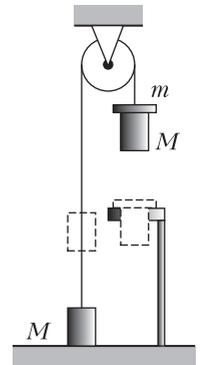


Рис. 1

**2.** Сформулируйте закон сохранения механической энергии системы материальных точек. Поясните смысл входящих в этот закон величин.

**Задача.** На краю стола лежит шайба 1 радиуса  $R = 10$  см, такая же шайба 2 находится на расстоянии  $s = 15$  см от первой шайбы (рис.2). Какую минимальную ско-

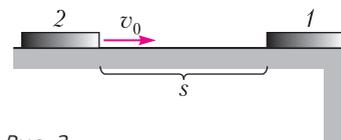


Рис. 2

рость  $v_0$  надо ударом сообщить второй шайбе в направлении первой, чтобы та упала со стола? Коэффициент трения шайб о поверхность стола  $\mu = 0,2$ . Соударение шайб счи-

тайте центральным и абсолютно упругим. Центры шайб расположены на одном перпендикуляре к краю стола. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

1. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории. Каковы по порядку величины масса и размеры молекул?

*Задача.* В два одинаковых цилиндрических сообщающихся сосуда, герметично закрытых крышками, налита жидкость плотностью  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$  (рис.3).

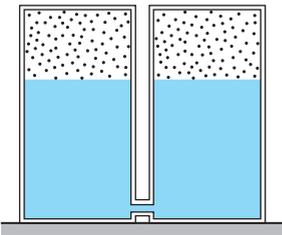


Рис. 3

Сверху над жидкостью находится идеальный газ. Расстояние между уровнем жидкости и крышками сосудов  $h = 50 \text{ см}$ . В начальном состоянии температура и давление газа в обоих сосудах были одинаковыми и равными  $T_0 = 300 \text{ К}$  и  $p_0 = 10^3 \text{ Па}$  соответственно. Определите, до какой температуры  $T$  надо нагреть газ в правом сосуде, чтобы в левом сосуде жидкость поднялась на высоту  $\Delta h = 1 \text{ см}$ , если температуру газа в левом сосуде поддерживать равной  $T_0$ . Давлением паров жидкости, тепловым расширением жидкости и сосудов можно пренебречь. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

2. Сформулируйте определение внутренней энергии термодинамической системы. Укажите способы изменения внутренней энергии.

*Задача.* Над некоторым количеством идеального одноатомного газа осуществляют процесс, представленный на рисунке 4, где участок 1–2 – адиабатное расширение. Най-

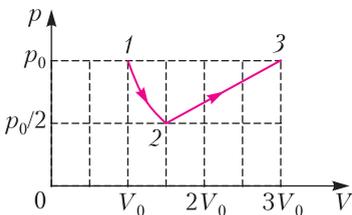


Рис. 4

дите отношение  $\eta$  работы, совершенной газом, к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя.

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

1. Дайте определение потенциала электростатического поля. Запишите формулу, связывающую разность потенциалов с напряженностью однородного электростатического поля.

*Задача.* Три одинаковых маленьких шарика массой  $m = 10 \text{ г}$  каждый, несущие заряды  $q = 10^{-8} \text{ Кл}$ , связаны тремя непроводящими нитями длиной  $l = 5 \text{ см}$  каждая и располагаются на

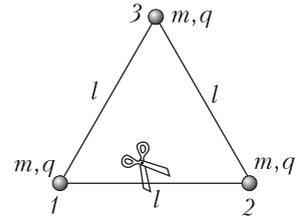


Рис. 5

гладком непроводящем горизонтальном столе, образуя равносторонний треугольник (рис.5). Нить, соединяющую шарики 1 и 2, перерезают, и шарики приходят в движение. Пренебрегая поляризацией поверхности стола, найдите максимальную скорость  $v_3$  шарика 3. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ .

2. Как определяются величина и направление вектора магнитной индукции?

*Задача.* Деревянный цилиндр массой  $m = 25 \text{ г}$  и длиной  $l = 10 \text{ см}$  лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , так, что ось цилиндра горизонтальна (рис.6). Цилиндр плотно (без

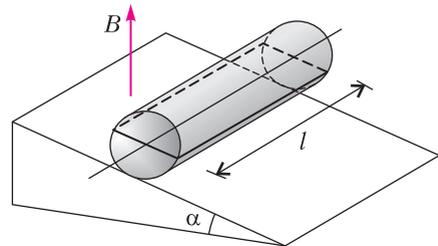


Рис. 6

ззора) охватывает закрепленная на нем тонкая прямоугольная проволочная рамка, плоскость которой проходит через ось цилиндра. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1 \text{ Тл}$ , вектор которой направлен вертикально. Какой минимальный ток  $I_{\text{min}}$  нужно пропус-

тить по рамке, чтобы цилиндр не скатывался по наклонной плоскости? Трение между цилиндром и наклонной плоскостью достаточно велико для того, чтобы цилиндр не скользил. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

### ОПТИКА

1. Какие линзы называются тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

*Задача.* Предмет высотой  $h = 2$  см расположен на расстоянии  $a = 20$  см от плоско-выпуклой тонкой линзы с фокусным расстоянием  $F = 16$  см перпендикулярно ее главной оптической оси. Выпуклая поверхность линзы обращена к предмету. Определите высоту  $H$  изображения предмета, даваемого этой линзой после того, как ее плоскую поверхность посеребрят.

2. Постройте ход световых лучей в призме. Что такое полное внутреннее отражение?

*Задача.* Перед плоским зеркалом, расположенным вертикально, стоит горящая све-

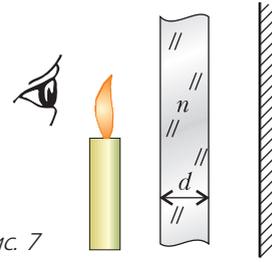


Рис. 7

ча, изображение пламени которой рассматривают, направив взгляд по нормали к поверхности зеркала. На какое расстояние  $x$  сместится изображение пламени, если между свечой и зеркалом поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку, параллельную зеркалу (рис.7)? Толщина пластинки  $d = 1,2$  см, показатель преломления стекла  $n = 1,5$ . Углы падения света на пластинку и преломления в ней считайте малыми. Учтите, что для малых значений аргумента  $\alpha$ , заданного в радианах, справедливо приближенное равенство  $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$ .

*Публикацию подготовил С.Чесноков*

## Физико-математическая олимпиада «Физтех»

Олимпиада «Физтех» проходит в два этапа, отдельно по математике и физике. Заключительный этап олимпиады проводится очно в городах России и ближнего зарубежья. Победители и призеры имеют льготы, определяемые приемной комиссией вуза, в который подаются документы для поступления.

Физико-математическая олимпиада «Физтех» входит в перечень олимпиад школьников, утвержденный Министерством просвещения Российской Федерации.

Ниже приводятся материалы по математике и физике, предлагавшиеся в 2019 году на заключительном этапе олимпиады «Физтех».

### МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 1

1. Даны квадратные трехчлены  $f_1(x) = x^2 - ax + 2$ ,  $f_2(x) = x^2 + 3x + b$ ,  $f_3(x) = 3x^2 + (3 - 2a)x + 4 + b$  и  $f_4(x) = 3x^2 +$

$(6 - a)x + 2 + 2b$ . Пусть разности их корней равны  $A, B, C$  и  $D$  соответственно и при этом  $|A| \neq |B|$ . Найдите отношение

$$\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}.$$

Значения  $A, B, C, D, a, b$  не заданы.

2. Известно, что

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ctg} \frac{x+y}{2}$$

и

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \text{tg} \frac{x+y}{2}.$$

Найдите все возможные значения выражения  $\text{tg}(x+y)$ , если известно, что их не менее трех.

3. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, ..., 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать

3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются внешним образом в точке  $F$ , а их общая внешняя касательная касается окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Прямая  $l$  проходит через точку  $B$ , вторично пересекает окружность  $\omega$  в точке  $C$ , а также пересекает  $\Omega$  в точках  $D$  и  $E$  (точка  $D$  расположена между  $C$  и  $E$ ). Общая касательная окружностей, проходящая через точку  $F$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BE$  в точках  $P$  и  $H$  соответственно (точка  $F$  лежит между точками  $P$  и  $H$ ). Известно, что  $BC = 42$ ,  $DH = HC = 4$ . Найдите длину отрезка  $HP$  и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left( \log_{\frac{3}{2}} x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6} (1 + 4x^2) \right) \times \left( \log_{\frac{3}{2}} x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6} (1 - 4x^2) + 1 \right) \times \log_{1-16x^4} \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{4x}{3} + \frac{5}{6} \right) \geq 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой  $y = b$ , пересекает параболу  $y = \frac{3}{4}x^2$  хотя бы в трех различных точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой  $y = \frac{3}{4}x + b$ . Найдите все значения  $b$ , при которых описанная конфигурация возможна.

7. На ребрах  $AC$ ,  $BC$ ,  $BS$ ,  $AS$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$  выбраны точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно. Известно, что точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  лежат в одной плоскости, причем  $KL = MN = 2$ ,  $KN = LM = 18$ . В четырехугольнике  $KLMN$  расположены две окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , причем окружность  $\Omega_1$  касается сторон  $KN$ ,  $KL$  и  $LM$ , а окружность  $\Omega_2$  касается сторон  $KN$ ,  $LM$  и  $MN$ . Прямые круговые конусы  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  с основаниями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно расположены внутри данной пирамиды, причем вершина  $P$  конуса  $\mathcal{F}_1$  лежит на ребре  $AB$ , а вершина  $Q$  конуса  $\mathcal{F}_2$  лежит на ребре  $CS$ .

- а) Найдите  $\angle SAB$ .
- б) Найдите длину отрезка  $CQ$ .

Вариант 2

1. Дана линейная функция  $f(x)$ . Известно, что расстояние между точками пересечения графиков  $y = x^2 + 1$  и  $y = f(x)$  равно  $3\sqrt{2}$ , а расстояние между точками пересечения графиков  $y = x^2$  и  $y = f(x) - 2$  равно  $\sqrt{10}$ . Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций  $y = x^2$  и  $y = f(x)$ .

2. Известно, что

$$\frac{\cos 3x}{(2 \cos 2x - 1) \cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x + y)$$

и

$$\frac{\sin 3x}{(2 \cos 2x + 1) \sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2(x + y).$$

Найдите все возможные значения выражения  $\cos(x + 3y)$ , если известно, что их не менее двух.

3. Есть 207 различных карточек с числами  $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \dots, 2^{103}, 3^{103}$  (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

4. Хорды  $AB$  и  $CD$  окружности  $\Gamma$  с центром  $O$  имеют длину 4. Продолжения отрезков  $BA$  и  $CD$  за точки  $A$  и  $D$  соответственно пересекаются в точке  $P$ . Прямая  $PO$  пересекает отрезок  $AC$  в точке  $L$ , причем  $AL:LC = 2:3$ .

- а) Найдите  $AP$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности  $\Gamma$  равен 2,5, а точка  $T$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ACP$ . Найдите длину отрезка  $PT$  и площадь треугольника  $ACP$ .

5. Решите неравенство

$$\log_{1+x^2} (1 + 27x^5) + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + x^2) \leq 1 + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + 27x^5).$$

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y \sin 2a - x \cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y \cos 3a - x \sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$  такие, что расстояние между точками  $P(x_1; y_1)$  и  $Q(x_2; y_2)$  равно 10.

7. Дана усеченная пирамида  $ABCA_1B_1C_1$  с боковыми ребрами  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  ( $ABC \parallel A_1B_1C_1$ ) такая, что треугольник  $ABA_1$  – равносторонний. На ребре  $CC_1$ , перпендикулярном основанию  $ABC$  пирамиды, лежит точка  $M$  такая, что  $CM : MC_1 = 1 : 2$ . Сфера  $\Omega$  с радиусом  $R = \sqrt{5}$  проходит через вершины треугольника  $ABA_1$  и касается отрезка  $CC_1$  в точке  $M$ .

а) Найдите длину ребра  $AB$ .

б) Пусть дополнительно известно, что  $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Найдите угол между прямой  $CC_1$  и плоскостью  $ABA_1$ , а также длину ребра  $A_1C_1$ .

#### Избранные задачи для 10 класса

1. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения  $f(x) = \sqrt{21 - x^2 - 4x}$  и  $g(x) = |x + 2|$  определены, причем  $\min(f(x); g(x)) > \frac{x + 4}{2}$ .

2. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех ее членов к сумме всех членов этой прогрессии равно  $\frac{48}{7}$ , а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно  $\frac{144}{17}$ .

3. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ,  $AD > BC$ ). Окружность  $\Omega$  вписана в угол  $BAD$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $S$  и повторно пересекает  $CD$  в точке  $E$  так, что  $CE = 9$ ,  $ED = 7$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь трапеции  $ABCD$ .

4. На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x - 1| + |5 - x| \leq 4, \\ \frac{x^2 - 6x + 2y + 7}{y + x - 4} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите ее площадь.

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} - \sqrt{4x^2}}{(x^2 - 4|x|)^2 - 8x^2 + 32|x| - 48} \geq 0.$$

6. В окружность  $\Omega$  радиуса 13 вписаны трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) и прямоугольник  $A_1B_1C_1D_1$  таким образом, что  $AC \perp B_1D_1$ ,  $BD \perp A_1C_1$ . Найдите отношение площади  $ABCD$  к площади  $A_1B_1C_1D_1$ , если известно, что  $AD = 10$ ,  $BC = 24$ .

## Ф И З И К А

9 класс

Вариант 1

1. Пловец переплывает через реку шириной  $d = 100$  м за наименьшее время  $\tau = 100$  с. За это время течение сносит его на  $s = 200$  м. Снос – это расстояние, на которое сместится пловец вдоль реки к моменту достижения противоположного берега. В подвижной системе отсчета, связанной с водой, пловец движется с постоянной скоростью. Найдите:

- 1) скорость  $v$  течения реки;
- 2) скорость  $u$  пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой;
- 3) продолжительность  $T$  заплыва, в котором снос будет минимальным.

2. Плоский склон холма образует угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Мяч, брошенный с поверхности склона в горизонтальном направлении вниз по склону, через  $\tau = 0,5$  с движется со скоростью  $v_1 = 13$  м/с. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой. Найдите:

- 1) начальную скорость  $v_0$  мяча;
- 2) через какое время  $t_1$  после старта мяч находился на максимальном расстоянии от поверхности склона;
- 3) на каком максимальном расстоянии  $H$  от поверхности склона находился мяч в этот момент.

3. Цилиндрический сосуд с водой стоит на весах. Показание весов  $P_1 = 10$  Н. В воду опустили льдинку с замороженным в нее металлическим шариком. Уровень воды в сосуде повысился на  $h = 4$  см, а льдинка стала плавать, полностью погрузившись в воду, не касаясь дна и стенок. Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_1 = 0,9\rho$ , плотность металла  $\rho_2 = 2,7\rho$ , площадь поперечного сечения сосуда  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Найдите:

Вариант 2

1) показание  $P_2$  весов после погружения в сосуд льдинки;

2) массу  $m_1$  льда;

3) изменится ли показание весов после таяния льда, ответ обоснуйте.

4. В системе, показанной на рисунке 1, массы грузов равны  $m_1 = m_3 = m = 0,1$  кг,  $m_2 = 3m$  соответственно. Первоначально систему удерживают, затем отпускают. Грузы приходят в движение. Начальные скорости всех грузов нулевые. Ускорение свободного падения равно  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Массы блоков и нитей по сравнению с массой грузов пренебрежимо малы. Нерастяжимые нити свободно скользят по блокам. Найдите:

1) скорость  $v_1$  груза 1 в тот момент, когда груз 2 опустится на  $H = 0,5$  м;

2) силу  $T_2$  натяжения нити, на которой подвешен груз 2.

5. При подключении источника постоянного напряжения к точкам  $A$  и  $B$  электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 2, в цепи выделяется мощность

$P_1 = 100$  Вт. При подключении того же источника постоянного напряжения к точкам  $B$  и  $C$  в цепи выделяется мощность  $P_2 = 2P_1$ . Найдите:

1) отношение  $\frac{R_2}{R_1}$ ;

2) какая мощность  $P_3$  будет выделяться в цепи при подключении того же источника постоянного напряжения к точкам  $A$  и  $C$ .

1) Лодочник пересекает реку шириной

$d = 200$  м за время  $\tau = 200$  с. За это время течение сносит лодку на  $s = \sqrt{3}d$ . В подвижной системе отсчета, связанной с водой, лодка движется со скоростью  $u = 1,3$  м/с. Снос – это расстояние, на которое сместится лодка вдоль реки к моменту достижения противоположного берега. В подвижной системе отсчета, связанной с водой, лодка движется с постоянной скоростью. Найдите:

1) скорость  $v$  течения реки;

2) за какое время  $T$  лодка пересечет реку, двигаясь по кратчайшему (относительно берега) пути.

2. На плоском склоне с уклоном  $\alpha = 45^\circ$  бросают мяч с начальной скоростью  $v_0 = 20$  м/с, перпендикулярной склону. Точка старта находится на поверхности склона. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Найдите:

1) какое время  $T$  после старта мяч будет находиться на максимальном расстоянии от поверхности склона;

2) скорость  $v_1$  мяча перед соударением со склоном;

3) на каком расстоянии  $s_3$  от точки старта мяч упадет на склон после двух абсолютно упругих ударов о склон.

3. Некоторые планеты (Венера, Земля, Нептун) движутся вокруг Солнца по орбитам, близким к круговым. Венера совершает один оборот вокруг Солнца за время  $T_B = 0,615 \cdot T_3$ , где  $T_3 = 365$  суток – продолжительность земного года. Планеты движутся по орбитам в одной плоскости и в одном и том же направлении. Найдите:

1) отношение  $\frac{R_3}{R_B}$  радиуса земной орбиты к радиусу орбиты Венеры;

2) через какой наименьший промежуток времени  $\tau$  расстояние между Землей и Венерой периодически достигает наименьшего значения.

4. На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту коэффициент трения скольжения шайбы по плоскости на высотах, меньших некоторой неизвестной высоты  $h$ , равен  $\mu_1$  ( $\mu_1 > \text{tg } \alpha$ ), на больших высотах коэффициент трения скольжения шайбы равен  $\mu_2$  ( $\mu_2 < \text{tg } \alpha$ ). По наклонной плоско-

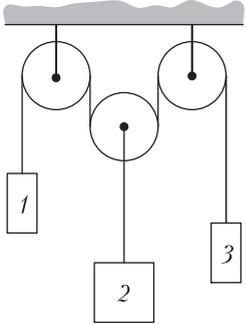


Рис. 1

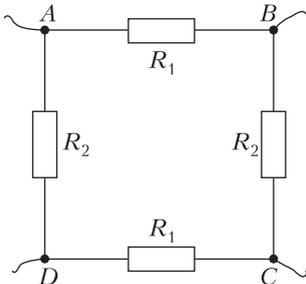


Рис. 2

сти с высоты  $H$  шайба движется с нулевой начальной скоростью и останавливается у основания наклонной плоскости. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Найдите:

- 1) высоты  $h$ ;
- 2) максимальную скорость  $v_{\max}$  шайбы в процессе движения;
- 3) продолжительность  $T$  движения на участке разгона.

5. На сопротивлениях  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  при подаче на каждое из них одного и того же напряжения выделяются мощности  $P$ ,  $2P$ ,  $3P$  соответственно. Найдите:

1) какая мощность  $P_1$  будет выделяться при подаче того же напряжения на эти три сопротивления, соединенные последовательно;

2) какая мощность  $P_2$  будет выделяться при подаче того же напряжения на цепь, в

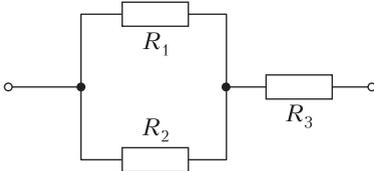


Рис. 3

которой эти сопротивления соединены по схеме, приведенной на рисунке 3.

10 класс

Вариант 1

1. Пушка установлена на плоском склоне горы, образующем угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. При выстреле вверх по склону снаряд падает на склон на расстоянии  $s_1 = 700$  м от места выстрела. В момент падения скорость снаряда перпендикулярна поверхности склона. Пушку разворачивают на  $180^\circ$  и производят второй выстрел вниз по склону. Затем пушку перемещают на горизонтальную поверхность и производят третий выстрел. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой. Угол наклона ствола к поверхности, с которой стреляют, при всех выстрелах одинаков. Найдите:

- 1) на каком расстоянии  $s_2$  от места второго выстрела снаряд упадет на склон;
- 2) дальность  $L$  стрельбы при третьем выстреле.

2. На шероховатой горизонтальной поверхности стола покоится чаша. Внутренняя поверхность чаши – гладкая полусфера радиусом  $R$ . На дне чаши лежит небольшая шайба массой  $m$ . Масса чаши  $3m$ . Ударом шайбе сообщают горизонтальную скорость  $v_0 = \sqrt{2gR}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Скольжение чаши начинается в тот момент времени, когда вектор скорости шайбы повернется на угол  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . Найдите:

- 1) с какой силой  $P$  шайба действует на чашу в этот момент;
- 2) коэффициент  $\mu$  трения скольжения чаши по столу.

3. Гладкая упругая шайба радиусом  $R$ , движущаяся со скоростью  $v_0$ , упруго сталкивается с такой же шайбой, покоящейся на гладкой горизонтальной поверхности. В результате столкновения скорость налетающей шайбы уменьшается вдвое. Найдите:

- 1) расстояние  $d$  от центра покоившейся шайбы до прямой, по которой двигался центр налетающей шайбы;
- 2) через какое время  $T$  после соударения расстояние между центрами шайб будет равно  $s$ .

4. Горизонтальный цилиндр длиной  $L = 0,5$  м вначале открыт в атмосферу и заполнен воздухом при температуре  $T_0 = 300$  К. Цилиндр плотно закрывают тонким поршнем и охлаждают. Поршень смещается и останавливается на расстоянии  $h = 0,4$  м от дна. Далее цилиндр нагревают до температуры  $T_0$ , при которой поршень останавливается на расстоянии  $H = 0,46$  м от дна. Атмосферное давление  $p_0 = 100$  кПа, площадь поперечного сечения цилиндра  $S = 0,1 \text{ м}^2$ . Внутренняя энергия воздуха  $U = \frac{5}{2}pV$ , где  $p$  – давление,  $V$  – объем. Считайте силу трения, действующую на поршень, постоянной в процессе движения поршня. Найдите:

- 1) до какой температуры  $T_1$  был охлажден воздух в цилиндре;
- 2) силу трения  $F_{\text{тр}}$ , действующую на поршень в процессе движения поршня;
- 3) какое количество  $Q$  теплоты подвели к воздуху в цилиндре в процессе нагревания к тому моменту, когда поршень начал смещаться.

5. Теплоизолированный цилиндр объемом  $V$  разделен на две части перегородкой. В одной части находится водород в количестве  $\nu$  при температуре  $T_1$ , а в другой – азот в количестве  $1,5\nu$  при температуре  $5/4T_1$  и другом давлении. Перегородка прорывается. Найдите:

- 1) какая температура  $T_2$ , установится в смеси;
- 2) давление  $p$  в смеси.

Вариант 2

1. Теннисист тренируется на горизонтальной площадке, посылая мяч к вертикальной стенке. В первом случае мяч после удара ракеткой летит практически с уровня земли со скоростью  $v_0 = 18$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту и ударяется в стенку. Во втором случае мяч стартует из той же точки со скоростью  $v_0/2$  под углом  $2\alpha$  к горизонту и ударяется в ту же точку стенки. Соударения мяча со стенкой абсолютно упругие. Мяч движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной стенке. Силой сопротивления воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Найдите:

- 1) через какое время  $\tau$  мяч будет находиться на максимальной высоте в первом случае;
- 2) на какой высоте  $h$  мяч ударится в стенку;
- 3) на каком расстоянии  $L$  от стенки мяч упадет на площадку во втором случае.

2. Тонкостенный полый шар радиусом  $R = 0,05$  м зажат между двумя горизонтальными параллельными пластинами, одна из которых движется вправо со скоростью  $v_1 = 0,8$  м/с, а другая – влево со скоростью  $v_2 = 0,2$  м/с (рис.4). Проскальзывания меж-

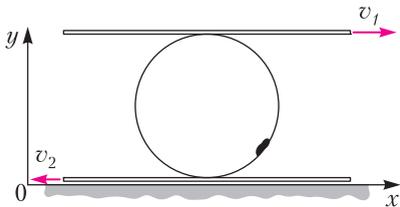


Рис. 4

ду пластинами и шаром нет. На внутренней поверхности полого шара сидит жук массой  $m = 2$  г. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Найдите:

1) за какое время  $T$  шар совершает один оборот вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр;

2) силу  $P$ , с которой жук действует на шар, в тот момент, когда жук находится в высшей точке траектории.

3. Две одинаковые гладкие упругие шайбы движутся по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 5). Скорость первой шайбы

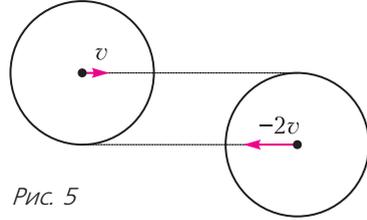


Рис. 5

$\vec{v}$ , скорость второй ( $-2\vec{v}$ ). Для каждой шайбы прямая, сонаправленная с вектором скорости и проходящая через центр шайбы, касается другой шайбы. Происходит абсолютно упругое соударение. Найдите:

- 1) скорость  $v_2'$  (по модулю) второй шайбы после соударения;
- 2) на какой угол  $\beta$  повернется вектор скорости второй шайбы в результате соударения.

4. В цилиндре с вертикальными гладкими стенками под покоящимся поршнем находятся вода и влажный воздух при температуре  $t_1 = 100$  °С. Площадь поршня  $S = 80$  см<sup>2</sup>, масса  $M$  поршня такова, что  $Mg = 0,3p_0S$ , где  $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$  Па – давление в окружающей атмосфере. Высота поршня над поверхностью воды  $H = 30$  см. Температуру в цилиндре медленно уменьшают до  $t_2 = 4$  °С. Давление водяного пара при  $t_2$  считайте пренебрежимо малым. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К). Молярная масса воды  $M_1 = 18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Найдите:

- 1) массу  $M_n$  пара в цилиндре при  $t_1 = 100$  °С;
- 2) на каком расстоянии  $h$  от поверхности воды остановится поршень при температуре  $t_2$ .

5. Теплоизолированный сосуд объемом  $V$  разделен на две части перегородкой. В одной части находится гелий в количестве  $\nu$  при температуре  $T_1$ , а в другой – кислород в количестве  $2\nu$  при температуре  $4/5T_1$  и при другом давлении. Перегородка прорывает-

ся. Известно, что молярная теплоемкость кислорода при постоянном объеме равна  $2,5R$ . Найдите:

- какая температура  $T_2$ , установится в смеси;
- давление  $p$  в смеси.

11 класс

Вариант 1

1. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом

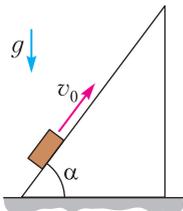


Рис. 6

угол  $\alpha$  такой, что  $\cos \alpha = 0,6$ . Если шайбе, находящейся у основания клина, сообщить начальную скорость  $v_0$  вдоль поверхности клина (рис.6), то к моменту достижения шайбой высшей точки траектории скорость шайбы уменьшается в  $n = 5$  раз. В процессе движения шайба безотрывно скользит по клину, а клин – по столу. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считайте известными  $v_0$ ,  $n$  и  $\alpha$ . Найдите:

- отношение  $m/M$  массы шайбы к массе клина;
- на какую максимальную высоту  $H$ , отсчитанную от точки старта, поднимается шайба в процессе движения по клину;
- через какое время  $T$  после старта шайба поднимется на максимальную высоту.

2. Подвижный поршень делит объем горизонтально расположенного сосуда на два отсека с общим объемом  $V = 150$  л. В первый отсек ввели  $\nu_1 = 1$  моль воды, а во второй ввели  $\nu_2 = 2$  моль азота. Можно считать, что объем введенной воды намного меньше  $V$ . В отсеках установилась температура  $T_1 = 275$  К. Сосуд вместе с содержимым прогревают до температуры  $T_2 = 373$  К. Давление насыщенного пара воды при температуре  $T_1$  равно  $p_n = 705$  Па. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Трением между поршнем и стенкой сосуда пренебречь. Найдите:

- давление  $p_1$  в сосуде до прогрева;
- объем  $V_1$  первого отсека до прогрева;
- давление  $p_2$  в сосуде после прогрева.

3. В электрической цепи (рис.7) все элементы идеальные, их параметры указаны. Ключ  $K$  замыкают. Найдите:

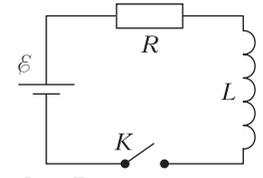


Рис. 7

- напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа;
- максимальную скорость изменения энергии  $N_{\max}$  в катушке индуктивности;
- скорость изменения тока в цепи в момент, когда скорость изменения энергии в катушке равна  $24/49$  от максимальной скорости  $N_{\max}$ .

4. По длинному соленоиду пропускается переменный ток, изменяющийся по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega$ . В результате вдали от торцов соленоиды внутри него возникает однородное магнитное поле с максимальной индукцией  $B_0$ . В плоскости торца соленоиды между двумя закрепленными тонкими гладкими стеклянными пластинами помещена прямоугольная жесткая рамка из проволоки со сторонами  $a$  и  $2a$  (рис.8). Зазор между пластинами незначи-

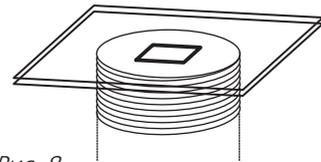


Рис. 8

тельно больше диаметра проволоки. Сопротивление единицы длины проволоки  $\rho$ . Магнитное поле, создаваемое током в рамке, значительно слабее поля соленоиды. Размеры рамки сравнимы с диаметром соленоиды. Найдите:

- максимальный ток в рамке;
- максимальную силу натяжения длинной стороны рамки.

5. На главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $F = -30$  см находится муравей  $S$  на расстоянии  $d_1 = 45$  см от линзы (рис.9). По другую сторону линзы находится плоское зеркало, перемещающееся вдоль главной оптической оси линзы со скоростью  $v = 6$  мм/с. В неко-

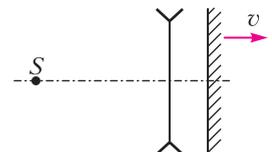


Рис. 9

торый момент времени  $t_0$  зеркало было на расстоянии  $L = 6$  см от линзы. Найдите:

- 1) на каком расстоянии от линзы получится изображение муравья при отсутствии зеркала;
- 2) на каком расстоянии от линзы получится изображение муравья в момент времени  $t_0$  в оптической системе, состоящей из линзы и зеркала;
- 3) с какой скоростью движется изображение муравья в момент времени  $t_0$  в этой оптической системе.

*Вариант 2*

**1.** Самолет совершает перелет дальностью  $L = 2000$  км на высоте  $h \approx 10$  км с постоянной скоростью. Отношение подъемной силы к силе сопротивления воздуха (аэродинамическое качество самолета) остается постоянным и равным  $K = 20$  почти все время полета. КПД двигателя  $\eta = 40\%$ , удельная теплота сгорания топлива  $q = 50$  МДж/кг. Масса израсходованного топлива значительно меньше общей массы самолета. Влиянием ветра пренебречь. Сила сопротивления направлена против скорости. Подъемная сила перпендикулярна скорости. Найдите:

- 1) отношение  $x$  силы тяги (развивается двигателем в направлении скорости) к силе тяжести, действующей на самолет;
- 2) долю  $\alpha$  массы израсходованного топлива от массы самолета.

**2.** На диаграмме зависимости температуры  $T$  газа от объема  $V$  для гелия в количестве  $\nu = 1$  моль показано (рис.10), что сначала

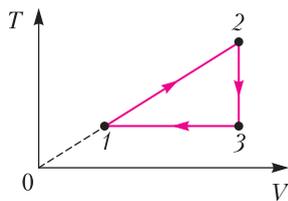


Рис. 10

газ переводится из состояния с температурой  $T_1 = 100$  К в процессе 1-2 прямой пропорциональной зависимости температуры от объема, при этом объем газа увеличивается в 2 раза. Затем газ охлаждается до температуры  $T_3 = T_1$  в изохорическом процессе 2-3. Далее в изотермическом процессе 3-1 газ переходит в начальное состояние, при этом внешнее давление совершает над газом работу  $A_{31} \approx 576$  Дж. Найдите:

- 1) максимальную температуру газа в этом цикле;

2) работу, совершенную газом в процессе 1-2;

3) КПД цикла.

**3.** В электрической цепи (рис. 11) все элементы идеальные, их параметры указаны, конденсатор не заряжен. Ключ  $K$  замыкают. Найдите:

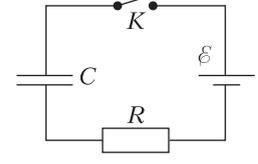


Рис. 11

1) какой максимальный ток будет течь через резистор после замыкания ключа;

2) максимальную скорость изменения энергии  $N_{\max}$  конденсатора;

3) напряжение на конденсаторе в момент, когда скорость изменения энергии конденсатора равна  $5/9$  от максимальной скорости  $N_{\max}$ .

**4.** В цепи, схема которой показана на рисунке 12, все элементы идеальные, их

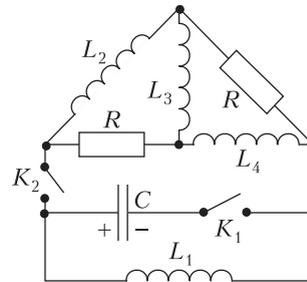


Рис. 12

параметры указаны, причем  $L_1 = L$ ,  $L_2 = 2L$ ,  $L_3 = 3L$ ,  $L_4 = 4L$ . Конденсатор емкостью  $C$  заряжен до напряжения  $U_0$ , ключи разомкнуты, режим в цепи установлен. Ключ  $K_1$  замыкают. Когда напряжение на конденсаторе уменьшается в 3 раза, замыкают ключ  $K_2$ . Найдите:

- 1) ток  $I_0$  через  $L_1$  непосредственно перед замыканием ключа  $K_2$ ;
- 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме после замыкания ключа  $K_2$ ;
- 3) количество теплоты, выделившееся в цепи после замыкания ключа  $K_2$ .

**5.** На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F = 16$  см находится муха  $S$  на расстоянии  $d_1 = 24$  см от линзы (рис.13). По другую сторону линзы расположено плоское зеркало, перемещающееся вдоль главной оптической

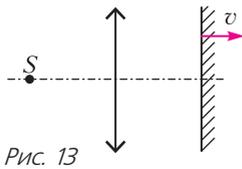


Рис. 13

кой оси линзы со скоростью  $v = 1 \text{ мм/с}$ . В некоторый момент времени  $t_0$  зеркало было на расстоянии  $L = 36 \text{ см}$  от линзы. Найдите:

- 1) на каком расстоянии от линзы получится изображение мухи при отсутствии зеркала;
- 2) на каком расстоянии от линзы получится изображение мухи в момент времени  $t_0$  в

оптической системе, состоящей из линзы и зеркала;

3) с какой скоростью движется изображение мухи в момент времени  $t_0$  в этой оптической системе.

*Публикацию по математике подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, И.Глухов, А.Головко, С.Городецкий, В.Дубинская, Ю.Кузьменко, О.Подлипский, Д.Терёшин;*

*по физике – В.Бабинцев, В.Плис, В.Усков, В.Чивелёв, А.Шеронов, Ю.Юрьев*

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №8)

1. Решение показано на рисунке 1.

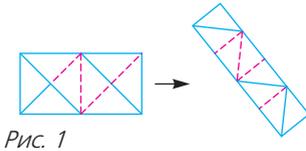


Рис. 1

2. 10.

*Оценка.* Есть ровно две вертикали и ровно две горизонтали, которые не заняты ладьями. На их пересечениях ровно четыре клетки. Слоны могут стоять только в этих клетках, поэтому их не больше четырех. *Пример* показан на рисунке 2.

						С	С
		Л					
Л							
					Л		
	Л						
			Л				
				Л			
						С	С

Рис. 2

3. Шесть. *Первое решение.* Только одно двузначное число записывается двумя двойками – это 22, поэтому только одно из указанных чисел может быть без цифры 2. Существуют только два двузначных числа, в записи которых есть и 2, и 3, – это 23, 32. Еще в одном числе может быть тройка без двойки. Эти три числа составляют по крайней мере половину от заданных, но из условия задачи следует, что всего чисел не менее шести. Следовательно, их ровно шесть. Это выполняется, например, для набора 22, 23, 32, 25, 52, 30.

*Второе решение.* Из условия задачи следует, что количество чисел кратно шести. Предположим, что их хотя бы 12, тогда и двоек хотя бы 12. Так как только в одном числе 22 могут быть две двойки, то не менее десяти чисел должны содержать двойку и другую цифру. При этом в шести числах есть цифра 3. Значит, не меньше чем  $10 + 6 - 12 = 4$  числа должны содержать и 2, и 3. Но двузначных чисел, содержащих 2 и 3, только два: 23 и 32. Противоречие. Значит, чисел шесть. Пример приведен выше.

4. а) Решение этого пункта следует из решения пункта б).

б) *Первый способ.* Выберем вопрос с заведомо известным ответом, например: «Верно ли, что дважды два равно четырем?» Теперь будем задавать его островитянам, пока не получим семь одинаковых ответов. Так как рыцари и лжецы дают на этот вопрос разные ответы, и каждого из них на острове не более шести, то среди семи одинаково ответивших островитян есть монахи. А так как все монахи отвечают одинаково, то среди ответивших иначе их нет. Назовем эту группу людей «чистой». Далее заметим, что, во-первых, мы знаем, из лжецов или рыцарей состоит «чистая» группа, а во-вторых, зная, кто перед нами (рыцарь или лжец) и задав два вопроса «Я рыцарь?» и «Я лжец?» (и заменив ответы на противоположные, если разговариваем со лжецом), мы сможем узнать, кто мы. Возможны три случая.

1) Если в «чистой» группе никого не оказалось, то попытаемся все же найти человека в эту группу. В худшем случае мы можем задать 12 вопросов и так никого и не найти, продолжая получать один и тот же ответ. Но тогда, если эти одинаковые ответы были «да», то это 6 рыцарей

и 6 монахов и больше их на острове нет, следовательно, задающий вопросы – лжец. Аналогично, если это ответы «нет», то задающий вопросы – рыцарь.

2) Если удалось кого-то найти либо в «чистой» группе уже было от одного до пяти человек, то задано не более 12 вопросов, и за два вопроса представителю чистой группы задающий вопросы узнает, кто он.

3) Если в чистой группе шесть человек и это рыцари, то, во-первых, рыцарей на острове больше нет, а во-вторых, задано ровно 13 вопросов. Значит, задающий вопросы – не рыцарь, и достаточно еще только одного вопроса «Я лжец?». Тогда в случае отрицательного ответа задающий вопросы – монах. Аналогично, если это лжецы, то задающий вопросы – не лжец, и достаточно спросить «Я рыцарь?». В случае положительного ответа он монах. Более шести человек в «чистой» группе быть не может (по принципу Дирихле).

*Второй способ.* Будем каждому островитянину два раза подряд задавать вопрос «Говорил ли я с тобой сегодня?» Рыцари будут отвечать «нет, да», лжецы – «да, нет», а монахи два раза ответят одинаково. Опросив таким образом шесть островитян, мы либо найдем рыцаря или лжеца и за два вопроса узнаем у него, кто мы (см. первый способ), либо найдем шесть монахов. В этом случае больше монахов нет, значит, спрашивавший – не монах. Зададим еще кому-нибудь вопрос с заведомо известным ответом, чтобы узнать, рыцарь он или лжец. Последним вопросом узнаем у него, кто мы.

Заметим, что в последнем случае можно было задать на один вопрос меньше, так как узнавать, с лжецом или рыцарем мы разговариваем, не обязательно, можно сразу задать вопрос примерно такой формы: «Что бы ты мне ответил, если бы я у тебя спросил, рыцарь ли я?» Этой же идеей будем пользоваться в следующих способах решения.

*Третий способ.* Назовем рыцарей и лжецов «мирянами». Придумаем вопрос, на который монахи дают один ответ, а мирыне – другой. Например: «Что бы ты мне ответил, если бы я тебя спросил, верно ли, что монах даст отрицательный ответ на этот вопрос?» Будем задавать этот вопрос, пока не получим 7 одинаковых ответов. Ясно, что это будут мирыне, так как монахов всего шесть. Это произойдет не позже чем через 13 вопросов. При этом если задано ровно 13 вопросов, то всех шестерых монахов мы уже нашли и спрашивающий – не монах. Поэтому достаточно задать один вопрос мирынину. А если задано менее 13 вопросов, то у спрашивающего

осталось два вопроса к мирынину, чтобы узнать, кто он.

*Четвертый способ.* Покажем, что хватит и 13 вопросов. Будем задавать островитянам вопрос «Что бы ты мне ответил, если бы я у тебя спросил: верно ли, что ответы на вопросы “Я рыцарь?” и “Я с тобой сегодня уже разговаривал?” различны?» Заметим, что только монахи на этот вопрос могут ответить неправду и что только они на него два раза отвечают одинаково, а остальные первый раз фактически сообщают задающему ответ на вопрос, рыцарь он или нет. Поэтому аналогично второму способу решения зададим этот вопрос по два раза шести островитянам. Если мы получили шесть пар одинаковых ответов, то все монахи найдены и достаточно у любого оставшегося жителя за один вопрос узнать, кто спрашивающий: рыцарь или лжец. Если же кто-то ответил по-разному, то спрашивающий узнает, рыцарь он или нет. Если нет, то у этого же островитянина за один вопрос он узнает, кто он: лжец или монах.

**ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ**

**Ответы к заданиям 1 – 27**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	1500	10	0,75	25	22	43	200	100	6080
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
23	32	вверх	81	3	35	22	32	77195	75
21	22	23	24	25	26	27			
11	4,70,1	14	12	20	300	4			

**Решения заданий 28 – 32** (официальные решения предметной комиссии)

28. Согласно закону Джоуля–Ленца  $\left( Q = \frac{U^2 t}{R} \right)$  при протекании электрического тока через нагревательный элемент выделяется количество теплоты, которое расходуется на нагревание воды и доводит ее до кипения:  $Q = cm(t_{\text{кип}} - t_0)$ . В первом опыте к источнику подключены два нагревательных элемента, соединенных последовательно. Их общее сопротивление  $R = R_1 + R_2$ . Во втором опыте при переключении ключа  $K$  в положение 2 нагревательный элемент сопротивлением  $R_2$  отключается от источника, при этом общее сопротивление уменьшается:  $R = R_1$ . Уменьшение общего сопротивления нагревательных элементов  $R$  приведет к увеличению выделяемой тепловой мощности:  $N = \frac{U^2}{R}$ . Следова-

тельно, во втором опыте для доведения воды до кипения потребуется меньше времени:  $Q = Nt$ . Вода закипит быстрее во втором опыте.

**29.** В процессе абсолютно неупругого столкновения сохраняется суммарный импульс системы тел:  $mv = (m + M)v_1$ , где  $v_1$  – скорость тел после столкновения. Так как поверхность гладкая, трения нет и движение тел от момента удара до момента касания свободного конца пружины будет равномерным:  $L = v_1 t_1$ , где  $t_1$  – время движения на этом участке. После касания пружины и до отрыва от нее тела будут двигаться, совершая гармонические колебания. До отрыва пройдет время  $t_2 = \frac{T}{2}$ , где  $T$  – период колебаний груза на пружине:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{k}}$ . Отрыв тел от пружины произойдет в точке касания пружины. По закону сохранения механической энергии при гармонических колебаниях, скорость тел в точке отрыва равна  $v_1$ . Дальнейшее движение тел будет равномерным. Поэтому полное время движения тел до точки столкновения равно

$$t = 2t_1 + t_2 = \frac{2L}{v_1} + \frac{T}{2} = \frac{2L(m + M)}{mv} + \pi\sqrt{\frac{m + M}{k}}.$$

Учитывая, что  $M = 2m$ , получим

$$t = \frac{6L}{v} + \pi\sqrt{\frac{3m}{k}} = 0,614 \text{ с}.$$

**30.** Поскольку в указанном процессе газ не совершает работы и система является теплоизолированной, то в соответствии с первым законом термодинамики суммарная внутренняя энергия газов сохраняется:

$$\frac{3}{2}v_1RT_1 + \frac{3}{2}v_2RT_2 = \frac{3}{2}(v_1 + v_2)RT,$$

где  $T$  – температура в объединенном сосуде в равновесном состоянии после открытия крана. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона для конечного состояния можно записать

$$p(2V) = (v_1 + v_2)RT.$$

Исключая из двух записанных уравнений конечную температуру  $T$ , получаем искомого выражение для объема:

$$V = \frac{(v_1T_1 + v_2T_2)R}{2p} \approx 1,3 \text{ м}^3.$$

**31.** Когда ключ  $K$  находится в положении 1 (см. рис.20 в статье), эквивалентная схема электрической цепи выглядит, как показано на рисунке 3. Когда заряд на конденсаторе уже установился, ток через конденсатор равен нулю. Напряжение на конденсаторе равно напряжению на резисторе  $R_1$ :

$$U_{1C} = IR_1, \text{ где } I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2}.$$

Заряд конденсатора равен

$$q_1 = CU_{1C} = \frac{C\mathcal{E}R_1}{r + R_1 + R_2}.$$

Правая обкладка конденсатора соединена с положительным полюсом источника и заряжена положительно. Поэтому ее заряд равен  $q_1$ . Когда ключ  $K$  находится в положении 2, эквивалентная схема электрической цепи выглядит, как показано на рисунке 4. Когда заряд на конденсаторе уже установился, ток через конденсатор равен нулю. Напряжение на конденсаторе равно напряжению на резисторе  $R_2$ :

$$U_{2C} = IR_2, \text{ где по-прежнему } I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2}.$$

Заряд конденсатора равен

$$q_2 = CU_{2C} = \frac{C\mathcal{E}R_2}{r + R_1 + R_2}.$$

Правая обкладка конденсатора соединена теперь с отрицательным полюсом источника и заряжена отрицательно. Поэтому ее заряд равен  $(-q_2)$ . Изменение заряда на правой обкладке конденсатора равно

$$\Delta q = (-q_2) - q_1 = -\frac{C\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{r + R_1 + R_2},$$

откуда находим

$$\mathcal{E} = \frac{(-\Delta q) \cdot (r + R_1 + R_2)}{C(R_1 + R_2)} = 3 \text{ В}.$$

**32.** Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта связывает длину световой волны  $\lambda$  с работой выхода фотоэлектрона  $A_{\text{вых}}$  и его максимальной кинетической энергией  $W_{\text{кин}}$ :

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + W_{\text{кин}}.$$

Фотоэлектроны останавливаются, если

$$W_{\text{кин}} = eU.$$

Связь разности потенциалов  $U$  с напряженностью  $E$  однородного электростатического поля

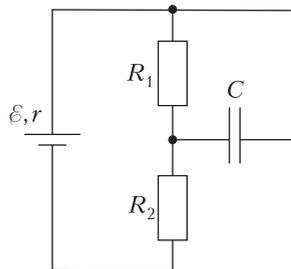


Рис. 3

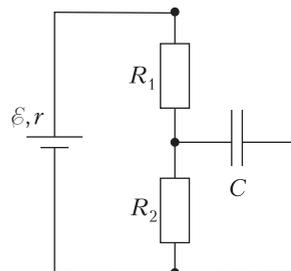


Рис. 4

имеет вид

$$U = Ed.$$

Объединяя три соотношения, получаем

$$E = \frac{hc - A_{\text{вых}}}{ed} = 150 \text{ В/м}.$$

## МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

### Ф И З И К А

*Профильный экзамен*

#### МЕХАНИКА

1. Уравнения движения левого и правого грузов соответственно на начальном этапе имеют вид  $Ma = T_1 - Mg$ ,  $(M + m)a = (M + m)g - T_1$ . Отсюда находим силу натяжения нити при ускоренном движении системы:  $T_1 = \frac{2M(M + m)}{2M + m}g$ . При равномерном движении системы, когда перегрузок удален ограничителем с правого груза, натяжение нити равно  $T_2 = Mg$ . Искомая величина равна

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{Mmg}{2M + m} \approx 1,11 \text{ Н}.$$

2. Скорость налетающей шайбы непосредственно перед ударом можно определить из закона сохранения энергии  $\frac{mv_0^2}{2} - \mu mg s = \frac{mv_1^2}{2}$ . Здесь учтено, что работа силы трения скольжения  $\mu mg s$  до удара отрицательна. Из законов сохранения импульса и механической энергии при абсолютно упругом центральном ударе одинаковых шайб следует, что шайбы обмениваются скоростями. Таким образом,  $v_1$  будет начальной скоростью движения шайбы, лежавшей на краю стола. Эта шайба упадет, если после удара сместится на расстояние  $R$ . Поэтому  $v_1$  должна быть больше значения, которое можно найти из равенства  $\frac{mv_1^2}{2} - \mu mg R = 0$ . Используя записанные уравнения, приходим к выводу, что искомая минимальная скорость равна

$$v_0 = \sqrt{2\mu g(s + R)} = 1 \text{ м/с}.$$

#### МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. После того, как в правом сосуде из-за нагревания газа его объем увеличится, уровень жидкости в правом сосуде опустится на величину  $\Delta h$  и (с учетом одинаковых площадей сосудов) на столько же поднимется в левом сосуде. Разность давлений газа в этих сосудах станет равной

$p_2 - p_1 = 2\rho g \Delta h$ . Поскольку температура в левом сосуде остается постоянной, то, согласно закону Бойля–Мариотта,  $p_0 h = p_1 (h - \Delta h)$ , откуда  $p_1 = \frac{p_0 h}{h - \Delta h}$ . Для правого сосуда, используя объединенный газовый закон, получим равенство  $\frac{p_0 h}{T_0} = \frac{p_2 (h + \Delta h)}{T}$ , откуда  $p_2 = \frac{p_0 h T}{(h + \Delta h) T_0}$ . Следовательно, справедливо равенство  $\frac{p_0 h T}{(h + \Delta h) T_0} - \frac{p_0 h}{h - \Delta h} = 2\rho g \Delta h$ . Отсюда находим искомую температуру:

$$T = T_0 \frac{h + \Delta h}{p_0 h} \left( 2\rho g \Delta h + \frac{p_0 h}{h - \Delta h} \right) \approx 373 \text{ К}.$$

2. Работа  $A$  газа равна сумме работ  $A_{12} + A_{23}$ . На этапе адиабатного расширения ( $Q = 0$ ) работа равна  $A_{12} = -\Delta U_{12} = -\frac{3}{2} \left( \frac{p_0}{2} \cdot \frac{3}{2} V_0 - p_0 V_0 \right) = \frac{3}{8} p_0 V_0$ . На втором этапе работа вычисляется как площадь под графиком зависимости  $p(V)$ , т.е.  $A_{23} = \frac{1}{2} \left( p_0 + \frac{p_0}{2} \right) \cdot \frac{3}{2} V_0 = \frac{9}{8} p_0 V_0$ . Таким образом,  $A = \frac{3}{2} p_0 V_0$ . Тепло газ получает только на этапе увеличения давления. Полученное количество теплоты равно сумме приращения внутренней энергии и работы, совершенной газом:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2} \left( p_0 \cdot 3V_0 - \frac{p_0}{2} \cdot \frac{3}{2} V_0 \right) + \frac{9}{8} p_0 V_0 = \frac{9}{2} p_0 V_0.$$

Искомое отношение равно

$$\eta = \frac{3p_0 V_0 / 2}{9p_0 V_0 / 2} = \frac{1}{3}.$$

#### ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Поскольку силы взаимодействия между шариками являются внутренними и консервативными, в системе из трех шариков сохраняются импульс и полная механическая энергия. В проекции на вертикальную ось закон сохранения импульса дает равенство  $mv_3 - mv_1 - mv_2 = 0$ . Отсюда и из соображений симметрии следует, что  $v_1 = v_2 = \frac{v_3}{2}$ . Используя формулу для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $x$  друг от друга,  $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}$ , находим потенциальную энергию системы в начальном состоянии:  $W_{\text{нач}} = W_{12} + W_{13} + W_{23} = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$ . Потенциальная энергия системы будет минимальной, когда заряды удалятся на максимальное

расстояние, т.е. будут располагаться на одной прямой:

$$W_{\text{кон}} = W_{13} + W_{23} + W'_{12} = 2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2l} = \frac{5q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2l}.$$

Из закона сохранения механической энергии находим

$$v_3 = \frac{q}{\sqrt{6\pi m \epsilon_0 l}} \approx 3,5 \text{ см/с}.$$

2. Цилиндр находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых показаны на рисунке 5, где

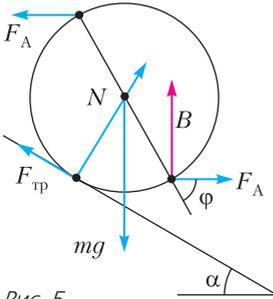


Рис. 5

$mg$  – модуль силы тяжести,  $N$  – модуль нормальной составляющей силы реакции наклонной плоскости,  $F_{\text{тр}}$  – модуль силы трения покоя,  $F_A$  – модуль силы Ампера. Записывая уравнение моментов относительно оси цилиндра,

имеем  $2F_A R \sin \phi = F_{\text{тр}} R$ , где  $R$  – радиус цилиндра,  $\phi$  – угол, который плоскость рамки образует с горизонтом. Из условия равновесия цилиндра следует, что  $F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha$ . По закону Ампера,  $F_A = IBl$ . Учитывая эти соотношения, находим ток  $I$ . Минимальное значение найденный ток принимает при  $\sin \phi = 1$ , т.е. при  $\phi = 90^\circ$ . Таким образом,

$$I_{\text{min}} = \frac{mg \sin \alpha}{2Bl} = 0,625 \text{ А}.$$

**ОПТИКА**

1. Ход лучей, формирующих изображение предмета, изображен на рисунке 6. Для простоты

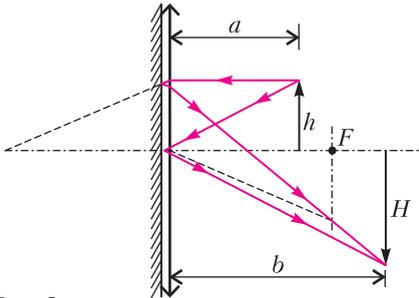


Рис. 6

расчета следует учесть, что посеребренную линзу можно рассматривать как систему двух плосковыпуклых линз, прижатых плоскими поверхностями вплотную друг к другу. Оптическая

сила такой системы  $D = \frac{2}{F}$ , а ее фокусное расстояние  $F_1 = \frac{F}{2}$ . Согласно формуле тонкой линзы,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_1} = \frac{2}{F}$ , где  $b$  – расстояние от линзы до изображения предмета. Следовательно,  $b = \frac{aF}{2a - F}$ . Поскольку  $\frac{H}{h} = \frac{b}{a}$ , то искомая высота изображения предмета равна

$$H = \frac{Fh}{2a - F} \approx 13 \text{ мм}.$$

2. Ход одного из лучей, дающих изображения  $I$  и  $I_1$  пламени свечи  $C$ , показан на рисунке 7.

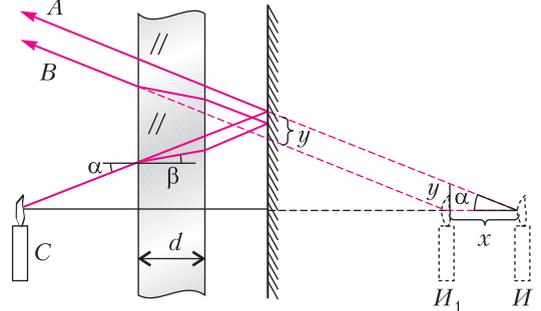


Рис. 7

Буквой  $A$  отмечен луч, распространяющийся в отсутствие пластинки, буквой  $B$  – при наличии пластинки. Пусть  $\alpha$  – угол падения луча на пластинку, а  $\beta$  – угол преломления в ней. Учитывая малость этих углов, запишем закон преломления в виде  $\alpha = n\beta$ . Из рисунка видно, что наличие пластинки приводит к смещению вертикально вниз отраженного от зеркала луча  $B$  на расстояние  $y \approx 2(\alpha - \beta)d \approx 2\alpha d \frac{n-1}{n}$ . Поскольку  $\frac{y}{x} = \alpha$ , то искомая величина равна

$$x = 2d \frac{n-1}{n} = 0,8 \text{ см}.$$

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ»**

**МАТЕМАТИКА**

**11 класс**

**ВАРИАНТ 1**

1.  $\frac{1}{3}$ .

Пусть  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  – квадратный трехчлен с положительным дискриминантом  $T$ . Тогда его корни определяются формулой  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{T}}{2\alpha}$ ,

поэтому

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{-\beta + \sqrt{T} - (-\beta - \sqrt{T})}{2\alpha} \right| = \frac{\sqrt{T}}{|\alpha|}.$$

Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{a^2 - 8}, \quad B = \sqrt{9 - 4b},$$

$$C = \frac{1}{3} \sqrt{(3 - 2a)^2 - 12(4 + b)},$$

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{(6 - 2a)^2 - 12(2 + 2b)}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} C^2 - D^2 &= \\ &= \frac{1}{9} \left( (4a^2 - 12a - 12b - 39) - (a^2 - 12a - 24b + 12) \right) = \\ &= \frac{1}{3} (a^2 + 4b - 17), \quad A^2 - B^2 = a^2 + 4b - 17. \end{aligned}$$

Значит, искомое отношение равно  $\frac{1}{3}$ .

2.  $-1, \frac{12}{35}$  или  $-\frac{12}{35}$ .

Перемножая два данных равенства, получаем  $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos y \sin y} = -2$ , что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\begin{aligned} \cos 2x = -2 \sin y \cos y &\Leftrightarrow \cos 2x + \cos \left( 2y - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos \left( x + y - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( x - y + \frac{\pi}{4} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что либо  $x + y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , либо  $x - y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

В первом случае получаем, что  $x + y = \frac{3\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , откуда мгновенно следует, что  $\operatorname{tg}(x + y) = -1$ .

Во втором случае  $x = y + \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части второго из исходных уравнений:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Подставляем сюда выражение для  $x$  и получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos \left( y + \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{2} \cos(y + \pi k) = \\ &= \sqrt{2} (\cos y \cos \pi k - \sin y \sin \pi k) = (-1)^k \sqrt{2} \cos y. \end{aligned}$$

Второе уравнение при этом принимает вид

$$(-1)^k \sqrt{2} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x + y}{2}.$$

Отсюда  $\operatorname{tg} \frac{x + y}{2}$  может принимать значения  $\pm \frac{1}{6}$ .

Значит,

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x + y}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x + y}{2}} = \frac{2 \cdot \left( \pm \frac{1}{6} \right)}{1 - \frac{1}{36}} = \pm \frac{12}{35}.$$

Так как в условии задано, что выражение  $\operatorname{tg}(x + y)$  может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

*Замечание.* Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x + y}{2}, \Leftrightarrow \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} - y + \pi k \right)}{\cos y} = -6 \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right), \Leftrightarrow \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^k \operatorname{tg} y = -6 \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, у первого уравнения есть решения (тангенс принимает любые значения), а значит, есть решения и у системы.

Во втором случае подставим  $x$  не только в левую часть второго уравнения, но и в правую:

$$\begin{aligned} (-1)^k \sqrt{2} &= -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \left( y + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} \left( y + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{6}. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых  $k$ , поэтому оба значения  $\operatorname{tg}(x + y)$  могут приниматься.

3. 119282.

Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид  $3k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то следующее за ним число есть  $3k + 2$  — и оно дает остаток 2 от деления на 3, далее идет  $3k + 4$ , дающее остаток 1 от деления на 3, а затем  $3k + 6$ , которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке ...0; 2; 1; 0; 2; 1; 0...

Среди данных нам чисел есть 44 числа, дающие остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество  $A = \{502; 508; 514; \dots; 760\}$ ), 43 числа, делящихся на 3 ( $B = \{504; 510; 516; \dots; 756\}$ ), 43 числа, дающих остаток 2 от деления на 3 ( $C = \{506; 512; 518; \dots; 758\}$ ).

Сумма трех чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть  $C_{44}^3$  способов выбрать 3 числа из множества  $A$  и по  $C_{43}^3$  способов выбрать 3 числа из множеств  $B$  и  $C$ . В сумме получаем

$$\frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{6} + 2 \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{6} = 13244 + 2 \cdot 12341 = 37926 \text{ способов.}$$

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств  $A, B, C$ . Получаем  $44 \cdot 43 \cdot 43 = 81356$  способов.

В сумме выходит 119282 способа.

4.  $HP = 7\sqrt{46}$ ,  $r = 5\sqrt{\frac{138}{7}}$ ,  $R = 5\sqrt{\frac{322}{3}}$ .

Трижды применяем теорему о касательной и секущей (рис.8):

$$HF^2 = HC \cdot HB = 4 \cdot 46 \Rightarrow HF = 2\sqrt{46};$$

$$HF^2 = HD \cdot HE \Rightarrow HE = \frac{HF^2}{HD} = 46;$$

$$BA^2 = BD \cdot BE = 50 \cdot 92 \Rightarrow BA = 10\sqrt{46}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведенных к

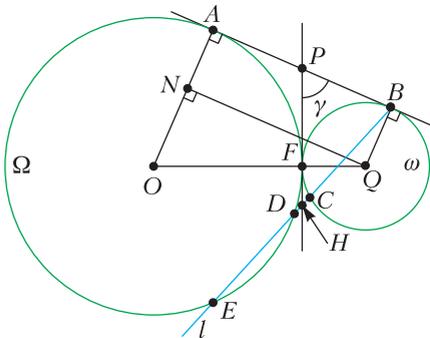


Рис. 8

окружности из одной точки, равны между собой,

$PF = PA = PB$ , следовательно,  $PF = \frac{1}{2} AB = 5\sqrt{46}$ . Итак,  $PH = PF + FH = 7\sqrt{46}$ . Пусть  $\angle BPH = \gamma$ . Тогда по теореме косинусов для треугольника  $BPH$  получаем  $BH^2 = HP^2 + BP^2 - 2BP \cdot PH \cdot \cos \gamma$ , т.е.  $46^2 = 7^2 \cdot 46 + 5^2 \cdot 46 -$

$$- 70 \cdot 46 \cos \gamma, \text{ откуда } 46 = 49 + 25 - 70 \cos \gamma, \cos \gamma = \frac{2}{5}.$$

Пусть  $O$  и  $Q$  – центры, а  $R$  и  $r$  – радиусы окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно; так как окружности касаются, точка касания  $F$  лежит на линии центров  $OQ$  и при этом  $OQ \perp PH$ . Углы  $A$  и  $F$  четырехугольника  $AOFQ$  прямые, поэтому  $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$ .

Рассмотрим прямоугольную трапецию  $ABQO$ . В ней  $OQ = R + r$ ,  $OA = R$ ,  $BQ = r$ ,  $AB = 10\sqrt{46}$ ,  $\angle AOQ = \gamma$ . Опустив из точки  $Q$  высоту  $QN$  на основание  $AO$ , получаем прямоугольный треугольник  $ONQ$ , в котором  $QN = AB = 10\sqrt{46}$ ,  $ON = R - r$ . По теореме Пифагора,  $(R + r)^2 = (R - r)^2 + (10\sqrt{46})^2$ ; кроме того,

$$\frac{2}{5} = \cos \gamma = \frac{R - r}{R + r}.$$

Из последнего уравнения получаем  $R = \frac{7}{3}r$ , а из первого следует, что  $Rr = 25 \cdot 46$ . Решая эту систему уравнений, на-

ходим, что  $R = \frac{5\sqrt{322}}{\sqrt{3}}$ ,  $r = \frac{5\sqrt{138}}{\sqrt{7}}$ .

5.  $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left[-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$ .

ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$1 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},$$

$$1 - 16x^4 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0,$$

$$1 + 4x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{3x^2}{2} - \frac{4x}{3} + \frac{5}{6} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{3x^2}{2} - \frac{4x}{3} + \frac{5}{6} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

В итоге получаем  $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  и  $x \neq 0$ ,  $x \neq -\frac{1}{9}$ .

Обозначим  $\frac{3x^2}{2} - \frac{4x}{3} + \frac{5}{6} = u$ ,  $1 + 4x^2 = v$ ,  $1 - 4x^2 = w$ . Записываем и преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} (\log_u v \cdot \log_u w + 1) \log_{vw} u &\geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_u v \cdot \log_u w + 1}{\log_u vw} - 1 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_u v \cdot \log_u w + 1 - \log_u v - \log_u w}{\log_u vw} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\log_u v - 1)(\log_u w - 1)}{\log_u vw} &\geq 0. \end{aligned}$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности  $\log_a b - \log_a c$  на области допустимых значений совпадает со знаком выражения  $\frac{b-c}{a-1}$ ; в частности (при  $c = 1$ ), знак логарифма  $\log_a b$  совпадает со знаком выражения  $\frac{b-1}{a-1}$ . Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(v-u)(u-1)(w-v)}{(u-1)(u-1)(vw-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geq 0.$$

Подставляем сюда выражения для  $u, v, w$  и решаем получающееся неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{5x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(-\frac{11x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{4x}{3} - \frac{1}{6}\right)(-16x^4)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(15x^2 + 8x + 1)(33x^2 - 8x - 1)}{x^2(9x^2 - 8x - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(5x+1)(3x+1)(3x-1)(11x+1)}{x^2(x-1)(9x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left[-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty). \end{aligned}$$

С учетом ОДЗ остается

$$x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left[-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right].$$

6.  $b = \frac{25}{12}$ .

Рассмотрим сначала  $b > 0$ . Обозначим начало координат через  $O(0;0)$  (рис.9), центр окружности – через  $Q(a;b)$  (так как он лежит на прямой  $y = b$ , его ордината равна  $b$ ), точки пересечения прямой с параболой – через  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  ( $x_1 < 0, x_2 > 0$ ). Пусть также  $T(0;b)$  – точка пересечения данной прямой с осью ординат,  $C$  – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от  $O$ .

Треугольник  $QOC$  равнобедренный ( $QO = QC$  как радиусы),  $QT$  – его высота, следовательно,  $QT$  также и медиана,  $CT = OT$ , поэтому точка  $C$  имеет координаты  $(0;2b)$ . Опустим из точки  $A$  перпендикуляр  $AH$  на ось ординат. Тогда  $\angle TАН$

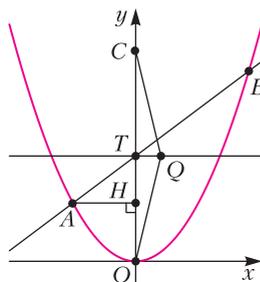


Рис. 9

есть угол наклона прямой, его тангенс равен  $\frac{3}{4}$ . Отсюда

$$\cos \angle TАН = \frac{4}{5}, AT = AH : \cos \angle TАН = \frac{5}{4} AH = -\frac{5x_1}{4}.$$

Аналогично находим, что  $BT = \frac{5x_2}{4}$ .

Отрезка  $AB$  и  $OC$  – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах,  $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ , т.е.  $b \cdot b = -\frac{5x_1}{4} \cdot \frac{5x_2}{4}$ . (Заметим, что для отрезков  $AB$  и  $OC$ , пересекающихся в точке  $T$ , условие  $CT \cdot OT = AT \cdot BT$  является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки  $A, B, C, O$  лежат на одной окружности.) Абсциссы  $x_1$  и  $x_2$  точек пересечения прямой  $y = \frac{3}{4}x + b$  и параболы  $y = \frac{3}{4}x^2$  определяются уравнением  $\frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{4b}{3} = 0$ . По теореме Виета,  $x_1 x_2 = -\frac{4b}{3}$ . Значит,  $b^2 = -\frac{25}{16} \cdot \left(-\frac{4b}{3}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{25b}{12}$ , откуда  $b = \frac{25}{12}$ .

Значение  $b = 0$  не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид  $y = \frac{3}{4}x$ , т.е. проходит через начало координат, что противоречит условию.

При  $b < 0$  (естественно, мы рассматриваем только те  $b$ , при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа  $x_1$  и  $x_2$  положительны. Точка  $T$  является серединой отрезка  $OC$  (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда, с одной стороны, выходит, что точка  $T$  – середина хорды  $OC$ , т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности, поэтому  $AB$  является хордой этой окружности, а точка  $T$  лежит на продолжении хорды  $AB$ , т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. а)  $\angle SAB = \arccos \frac{1}{6}$ ; б)  $CQ = \frac{52}{3}$ .

Противоположные стороны четырехугольника  $KLMN$  попарно равны (рис.10), так что он параллелограмм. Поскольку плоскость  $KLMN$  пересекает плоскости  $ABC$  и  $ABS$  по параллельным прямым  $KL$  и  $MN$ , эти прямые параллельны прямой пересечения плоскостей – т.е.  $AB$ . Аналогично,  $NK \parallel LM \parallel SC$ . В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра перпендикулярны друг другу, поэтому  $SC \perp AB$ , а  $KLMN$  – прямоугольник. Значит, радиусы окружностей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равны 1.

Отсюда также следует, что прямоугольник  $KLMN$

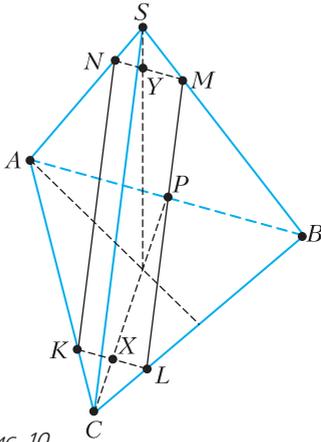


Рис. 10

симметричен относительно плоскости  $\alpha$ , содержащей ребро  $SC$  и середину  $AB$ . Тогда и конусы  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому  $P$  – середина  $AB$ .

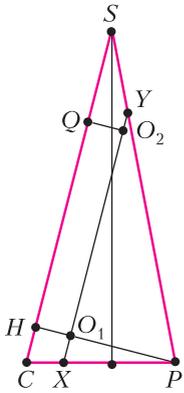


Рис. 11

Обозначим через  $X$  и  $Y$  середины сторон  $KL$  и  $MN$  соответственно, а через  $O_1$  и  $O_2$  – центры окружностей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно (рис.11); эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника  $KLMN$ , параллельной  $KN$ , а значит – в плоскости  $\alpha$ . Более того,  $XY \parallel SC$ , т.е. треугольники  $PCS$  и  $PXY$  подобны.

Пусть  $AB = BC = CA = 2a$ ,  $SA = SB = SC = l$ ,  $v = a/l$ . Тогда  $CP = a\sqrt{3}$ ,  $SP = \sqrt{l^2 - a^2}$ . Поскольку  $XY = KN = 18$ , из подобия получаем  $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$ , т.е.  $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{18}{l}$ ,  $XP = \frac{18\sqrt{3}a}{l} = 18v\sqrt{3}$ . Аналогично,  $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$ ,  $\frac{YP}{\sqrt{l^2 - a^2}} = \frac{18}{l}$ ,  $YP = \frac{18\sqrt{l^2 - a^2}}{l} = 18\sqrt{1 - v^2}$ . С другой стороны, так как конус  $\mathcal{F}_1$  – прямой, имеем  $PO_1 \perp XY$ , причем  $XO_1 = \frac{1}{2}KL = 1$ ,  $YO_1 = XY - XO_1 = 17$ .

Отсюда

$$17^2 - 1^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 18^2(1 - v^2 - 3v^2),$$

или  $16 \cdot 18 = 18^2(1 - 4v^2)$ , откуда  $v = \frac{1}{6}$ . Зна-

чит,  $\angle SAB = \arccos \frac{AP}{AS} = \arccos v = \arccos \frac{1}{6}$ .

Итак,  $l = 6a$ , и из подобия имеем

$$\frac{2}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{18}{l} = 1 - \frac{3}{a},$$

откуда  $a = 4$  и  $l = 24$ . Пусть  $PO_1$  пересекает  $SC$  в точке  $H$ . Тогда  $PH$  – высота треугольника  $SCP$ , причем (поскольку  $XY \parallel CS$ )  $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{1}{18}$ . Значит,  $CH = \frac{SC}{18} = \frac{4}{3}$ . Поскольку  $O_2Q \perp XY$ ,  $HO_1O_2Q$  – прямоугольник, так что  $HQ = O_1O_2 = 16$ . Отсюда

$$CQ = CH + HQ = \frac{52}{3}.$$

ВАРИАНТ 2

1.  $\sqrt{26}$ .

Пусть  $f(x) = ax + b$ . Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения  $x^2 + 1 = ax + b$ , а во втором случае – из уравнения  $x^2 = ax + b - 2$ .

Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид  $x^2 - ax - (b - 1) = 0$ , откуда

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b - 4}}{2}, \quad |x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b - 4}.$$

Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом  $a$ , расстояние между точками в  $\sqrt{a^2 + 1}$  раз больше, чем  $|x_2 - x_1|$ . Значит, расстояние между точками равно  $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b - 4)}$ . Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно  $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b - 8)}$ . Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (a^2 + 1)(a^2 + 4b - 4) = 18, \\ (a^2 + 1)(a^2 + 4b - 8) = 10, \end{cases}$$

решая которую, находим, что  $a^2 = 1$ ,  $b = 3$ .

Найдем необходимое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением  $x^2 - ax - b = 0$ , поэтому  $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b} = \sqrt{13}$ , а расстояние между самими точками пересечения есть  $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{13}\sqrt{2} = \sqrt{26}$ .

2.  $-1$  или  $\frac{1}{5}$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= \cos 2x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \\ &= \cos 2x \cos x - (1 - \cos 2x) \cos x = \\ &= (2 \cos 2x - 1) \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos 2x = \\ &= \sin x(1 + \cos 2x) + \sin x \cos 2x = \\ &= (2 \cos 2x + 1) \sin x. \end{aligned}$$

С учетом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x + y), \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2(x + y). \end{cases} \quad (1)$$

Заменяя второе уравнение системы (1) на сумму обоих уравнений этой системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x + y), \\ \frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases} \quad (2)$$

Второе уравнение на ОДЗ равносильно следующему:

$$\begin{aligned} \cos x \sin y + \sin x \cos y &= 2 \cos y \sin y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin(x + y) &= \sin 2y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2y + 2\pi k, \\ x + y = \pi - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2\pi k, \\ x = \pi - 3y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Значит, система (2) эквивалентна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x + y), \\ x = y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x + y), \\ x = \pi - 3y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим систему (3). Подставляя  $x$  из второго уравнения в первое, получаем  $1 = \frac{2}{5} + \cos^2 2y \Leftrightarrow \cos^2 2y = \frac{3}{5}$ . При этом

$$\begin{aligned} \cos(x + 3y) &= \cos(y + 2\pi k + 3y) = \cos 4y = \\ &= 2 \cos^2 2y - 1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Для системы (4) из второго уравнения следует, что  $x + 3y = \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , и  $\cos(x + 3y) = -1$ . Поскольку в условии задачи сказано, что выражение  $\cos(x + 3y)$  может принимать по крайней

мере два различных значения, можно не проверять, совместны ли системы (3) и (4).

Итак,  $\cos(x + 3y)$  может быть равен  $\frac{1}{5}$  или  $-1$ .

**3. 267903.**

Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны четные степени двоек и троек. Есть 51 способ выбрать четную степень двойки и 51 способ выбрать четную степень тройки, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно  $51^2 = 2601$ .

Теперь перейдем к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями тройки и одну со степенью двойки или наоборот.

Пусть мы берем две карточки со степенями двойки. Так как в произведении выбранных чисел двойка обязана присутствовать в четной степени, степени двойки на взятых карточках должны иметь одинаковую четность. Всего у нас есть 52 карточки с нечетными степенями и 51 карточка с четными степенями. Значит, есть  $C_{52}^2 = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$  способов выбрать карточки с нечетными степенями и  $C_{51}^2 = \frac{51 \cdot 50}{2} = 1275$

способов выбрать две карточки с четными степенями – всего получаем 2601 способ. После того, как выбраны карточки со степенями двойки, мы можем выбрать любую карточку с четной степенью тройки (51 способ). Так как выбор карточки со степенью тройки осуществляется независимо от предыдущего выбора, выходит  $2601 \cdot 51 = 132651$  способ.

Несложно видеть, что если мы возьмем две карточки со степенями тройки и одну со степенью двойки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем  $2601 + 132651 \cdot 2 = 267903$  способа.

4. а)  $AP = 8$ ;

б)  $PT = \frac{\sqrt{409} - 5}{2}$ ,

$S_{\Delta APC} = \frac{5760}{409}$ .

а) Опустим из точки  $O$  перпендикуляры  $OH$  и  $ON$  на хорды  $CD$  и  $AB$  соответственно (рис.12). Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружно-

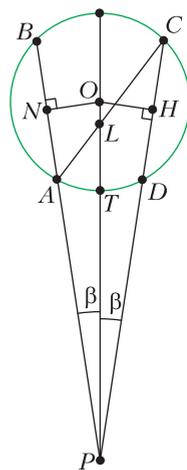


Рис. 12

сти до них равны, поэтому  $OH = ON$ . Прямоугольные треугольники  $OPN$  и  $OPH$  равны по катету и гипотенузе ( $OP$  – общая), поэтому  $PN = PH$ ,  $\angle OPN = \angle OPH$  (последнее означает, что  $PO$  – биссектриса угла  $BPC$ ). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, точки  $H$  и  $N$  являются серединами  $CD$  и  $AB$  соответственно, поэтому  $AN = HD = 2$ ; отсюда следует, что  $AP = DP$ . Пусть  $AP = DP = y$ . Так как  $PL$  – биссектриса треугольника  $APC$ , то  $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$ , откуда  $\frac{y}{y+4} = \frac{2}{3}$ ,  $y = 8$ .

б) Треугольники  $OPA$  и  $OPD$  равны по двум сторонам и углу между ними ( $PO$  – общая,  $AP = DP$ ,  $\angle APO = \angle DPO$ ), поэтому  $\angle AOP = \angle DOP$ . Это означает, что отрезок  $OP$  делит дугу  $AD$  пополам. Обозначим точку пересечения отрезка  $OP$  с окружностью через  $J$ . Тогда  $CJ$  – биссектриса угла  $ACD$  (углы  $ACJ$  и  $DCJ$  – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того,  $PJ$  – биссектриса угла  $APC$ , поэтому  $J$  – точка пересечения биссектрис треугольника  $APC$ , т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки  $J$  и  $T$  совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника  $DHO$  получаем  $OH^2 = OD^2 - DH^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$ . По теореме Пифагора для треугольника  $PHO$ :  $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 10^2 + \frac{9}{4} = \frac{409}{4}$ . Следовательно,  $PT = PO - OT = \frac{\sqrt{409}}{2} - \frac{5}{2}$ .

Пусть  $\angle CPO = \beta$ . Тогда

$$\sin \beta = \frac{OH}{OP} = \frac{3}{2} : \frac{\sqrt{409}}{2} = \frac{3}{\sqrt{409}},$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{20}{\sqrt{409}},$$

$$\sin 2\beta = 2 \cos \beta \sin \beta = \frac{120}{409},$$

$$S_{\Delta APC} = \frac{1}{2} PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{120}{409} = \frac{5760}{409}.$$

$$5. x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{27}}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

Пусть  $1 + x^2 = u$ ,  $1 - 2x^2 + 27x^4 = v$ ,  $1 + 27x^5 = w$ . Тогда данное неравенство принимает вид  $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leq 0$ . Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \log_v u - \log_v u \cdot \log_u w - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_u w - 1)(1 - \log_v u) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_u w - \log_u u)(\log_v v - \log_v u) \leq 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем

метод рационализации: знак разности  $\log_a b - \log_a c$  на области допустимых значений совпадает со знаком выражения  $\frac{b-c}{a-1}$ ; в частности (при  $c = 1$ ), знак логарифма  $\log_a b$  совпадает со знаком выражения  $\frac{b-1}{a-1}$ . Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leq 0. \quad (*)$$

ОДЗ исходного неравенства задается условиями  $u > 0$ ,  $v > 0$ ,  $w > 0$ ,  $u \neq 1$ ,  $v \neq 1$ . При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (\*), так как при  $u = 1$  или  $v = 1$  знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого  $u = 1 + x^2$  и  $v = 1 - 2x^2 + 27x^4$  положительны при всех значениях  $x$ . Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство  $1 + 27x^5 > 0$ , откуда  $x > -\frac{1}{\sqrt[5]{27}}$ . Возвращаемся в (\*) к переменной  $x$  и решаем полученное неравенство:

$$\frac{(27x^5 + 1 - x^2 - 1)(1 - 2x^2 + 27x^4 - 1 - x^2)}{(1 + x^2 - 1)(1 - 2x^2 + 27x^4 - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^4(27x^3 - 1)(9x^2 - 1)}{x^4(27x^2 - 2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x-1)(9x^2+3x+1)(3x+1)(3x-1)}{(27x^2-2)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x+1)(3x-1)^2}{\left(x - \sqrt{\frac{2}{27}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{27}}\right)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ окончательно получаем

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{27}}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

$$6. \frac{(-1)^{k+1}}{5} \arcsin \frac{119}{169} + \frac{\pi k}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x + 13 \cos 2a)^2 + (y - 13 \sin 2a)^2 = 169, \\ (x + 13 \sin 3a)^2 + (y - 13 \cos 3a)^2 = 169. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задает окружность радиуса 13; у первой из них центром является точка  $A(-13 \cos 2a; 13 \sin 2a)$ , а у второй – точка  $B(-13 \sin 3a; 13 \cos 3a)$ .

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 10 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos 2a = \sin 3a, \\ \sin 2a = \cos 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3a\right) = 0, \\ \cos 3a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2a\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos \frac{\pi + 10a}{4} \cos \frac{\pi + 2a}{4} = 0, \\ 2 \cos \frac{\pi + 10a}{4} \cos \frac{\pi - 2a}{4} = 0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо  $\cos \frac{\pi + 10a}{4} = 0$ , либо  $\cos \frac{\pi + 2a}{4} = \cos \frac{\pi - 2a}{4} = 0$ .

В первом случае получаем

$$a = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Во втором случае  $\frac{\pi + 2a}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$  и  $\frac{\pi - 2a}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi l$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ , т.е.  $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  и  $a = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ , что невозможно.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда четырехугольник  $APBQ$  – ромб (рис.13). Известно, что в любом параллелограмме (в том числе и в ромбе) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырех сторон, откуда  $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$ . Так как мы хотим, чтобы точки  $P$  и  $Q$  располагались на расстоянии 10 друг от друга,  $PQ = 10$ , поэтому  $AB^2 + 100 = 4 \cdot 169$ ,  $AB = 24$ . Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей  $A$  и  $B$  было равно 24. Отсюда

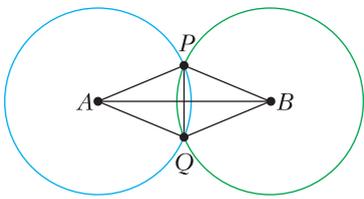


Рис. 13

т.е. что в любом параллелограмме (в том числе и в ромбе) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырех сторон, откуда  $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$ . Так как мы хотим, чтобы точки  $P$  и  $Q$  располагались на расстоянии 10 друг от друга,  $PQ = 10$ , поэтому  $AB^2 + 100 = 4 \cdot 169$ ,  $AB = 24$ . Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей  $A$  и  $B$  было равно 24. Отсюда

$$\sqrt{(-13 \sin 3a + 13 \cos 2a)^2 + (13 \cos 3a - 13 \sin 2a)^2} = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 338 - 338 \sin 3a \cos 2a - 338 \sin 2a \cos 3a = 576 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 338 \sin 5a = -238 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{(-1)^{k+1}}{5} \arcsin \frac{119}{169} + \frac{k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

7. а)  $AB = \sqrt{15}$ ; б)  $\angle(CC_1, ABA_1) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$ ,  $A_1C_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ .

а) Пусть  $O$  – центр сферы  $\Omega$ ,  $Q$  – центр треугольника  $ABA_1$ ,  $A_1X$  – его медиана (рис.14). Тогда  $O$  лежит на перпендикуляре  $l$  к

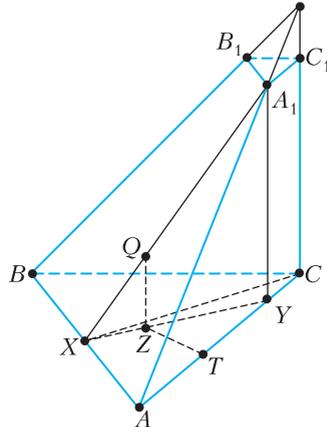


Рис. 14

плоскости  $ABA_1$ , проходящем через  $Q$ . С другой стороны,  $O$  лежит в плоскости  $\alpha$ , проходящей через  $M$  перпендикулярно  $CC_1$  – т.е. параллельно  $(ABC)$ . Заметим, что  $Q$  лежит в  $\alpha$ , поскольку  $XQ : QA_1 = 1 : 2 = CM : MC_1$ . Но  $Q$  лежит и на  $l$ . Если бы плоскость  $(ABB_1A_1)$  была перпендикулярна плоскости  $(ABC)$ , то все три боковые грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усеченной пирамиде. Следовательно,  $\alpha$  и  $l$  пересекаются ровно в одной точке – в точке  $Q$ . Итак,  $Q = O$ .

Значит, окружность, описанная около треугольника  $ABA_1$ , является большой окружностью на сфере  $\Omega$  и ее радиус равен  $R$ . Отсюда

$$AB = R\sqrt{3} = \sqrt{15}.$$

б) Пусть  $Y$  и  $Z$  – проекции точек  $A_1$  и  $O$  на плоскость  $ABC$ ; тогда  $Z$  делит отрезок  $XY$  в отношении  $XZ : ZY = XO : OA_1 = 1 : 2$ . Поскольку  $CC_1 \perp ABC$ , точка  $Y$  лежит на прямой  $AC$ . Прямоугольные треугольники  $A_1YA$  и  $A_1YB$  равны по катету и гипотенузе, так что  $YA = YB$ .

Значит, медиана  $YX$  треугольника  $ABY$  является также его высотой и она равна

$$XA \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{15}{8}}.$$

Из прямоугольного треугольника  $A_1YX$  находим

$$\begin{aligned} \angle(CC_1, ABA_1) &= \angle YA_1X = \arcsin \frac{YX}{A_1X} = \\ &= \arcsin \left( \sqrt{\frac{15}{8}} : \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{15}{8}} \right) \right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$YZ = \frac{2}{3} YX = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Пусть  $T$  – проекция  $Z$  на  $AC$  (рис.15). Тогда

$$ZT = YZ \cos \angle YZT = YZ \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ и}$$

$$YT = YZ \sin \angle YZT = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}.$$

С другой стороны, поскольку  $CZ = MO = R =$

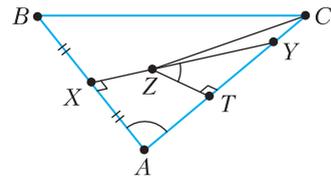


Рис. 15

$= \sqrt{5}$ , имеем

$$CT = \sqrt{CZ^2 - ZT^2} = \sqrt{5 - \frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

Отсюда

$$A_1C_1 = YC = CT - YT = \frac{2\sqrt{10}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

(Продолжение следует)

### ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ И АВТОРОВ НАШЕГО ЖУРНАЛА!

Начиная с прошлого года, некоторым статьям журнала «Квант» присваивается принятый в научной среде цифровой идентификатор публикаций – DOI (Digital Object Identifier). По присвоенному (раз и навсегда) данной статье идентификатору можно получить информацию о ней в базах данных, в частности – в интернете.

Посылая в редакцию нашего журнала статью, просим авторов сообщать о себе, кроме фамилии, имени и отчества, также место работы, занимаемую должность и электронный адрес.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте <http://kvant.ras.ru>

# КВАНТ 12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в типографии ООО «ТДС-СТОЛИЦА-8»**

**Телефон: +7 495 363-48-86,**

**<http://capitalpress.ru>**

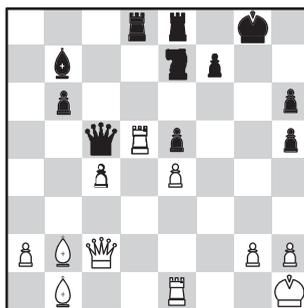
## Преимущество ДВУХ СЛОНОВ

Практически любой начинающий шахматист знает, что слон и конь относятся к легким фигурам и «стоят» по три пешки. Конь лучше себя чувствует в закрытых позициях, а слон – в открытых. При этом слон все же немного сильнее, а сила согласованных действий двух слонов получила отдельное шахматное наименование: «преимущество двух слонов». Разберем две партии недавнего супертурнира в Загребе, демонстрирующие силу двух слонов в руках лучших гроссмейстеров.

**Ш.Мамедьяров – В.Ананд**  
Загреб, 2019

1. d4 ♗f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. ♘c3 dc 5. e4 ♗b4 6. ♗c4 ♗e4 7. 0-0 ♗f6 8. ♖a4+ ♗c6 9. ♗g5 ♗c3. Сыграно в духе современных шахмат: компьютерный анализ считает этот ход сильнейшим, однако в докомпьютерную эпоху едва ли гроссмейстер сделал бы такой ход, предоставляющий сопернику преимущество двух слонов. 10. bc 0-0 11. ♖fe1 ♗e7 12. ♗d3 ♗f5 13. ♖ad1 h6 14. ♗c1 b6 15. c4 ♗e8 16. ♗b2 ♗b7 17. ♗e5 ♗e7. Слишком пассивно. Предпочтительнее 17... ♗h5 с последующим переводом коня на f4 и угрозами на королевском фланге. 18. ♗b1 c5 19. ♖c2 ♖c7 20. dc ♗ad8 21. cb ab 22. ♗g4 (с угрозой мата после ♗h7) ♗e4 23. f3 ♖c5+ 24. ♗h1 h5 25. ♗h6+ gh 26. fe c5.

27. ♖d5! Жертва качества с целью открыть диагональ b1-h7. 27... ♗d5 28. ed ♗g6 29. ♖f1 ♗e7 (компьютер предпочитает 29...b5 с контригрой на ферзевом фланге) 30. ♖c1 ♗a7 31. h3 ♗d6 32. ♖h6 ♗e7. Пешку на c4 брать нельзя из-за ♖c1, и ладья проникает в лагерь черных с матовыми угроза-

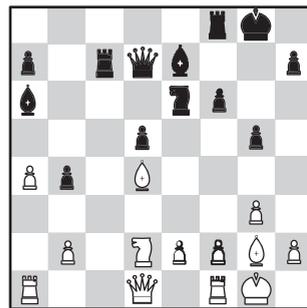


ми. 33. ♖c1 b5 34. ♗a3 b4 35. ♗b2. Маневром слона белые создали пару проходных. 35... ♗a6 36. ♖f5 f6 37. ♖h6 ♗f4 38. ♗e5! ♗e5. В цейтноте черные не находят спасительное 38... ♖f2! Брать коня нельзя: 39. ♗f4? ♗e1+ 40. ♖h2 ♖g1+ 41. ♖g3 ♗a3+! с матом; 39. ♖f4 ♖e1+ 40. ♖h2 fe 41. ♖f6 ♗f6 42. ♖f6 h4!, и белые вынуждены форсировать вечный шах. 39. ♖e5 fe 40. ♖a6 ♖f2 41. ♖c8+ ♗f7 42. ♖f5+ ♗g8 43. ♖g5+ ♗f8 44. ♖h2. Ферзь успел на защиту королевского фланга, и две лишние пешки решают исход партии. 44...h4 45. ♗f5. **Выигрыш белых.**

**Дин Лижэнь – М.Карлсен**  
Загреб, 2019

1. d4 ♗f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. g3 ♗e7 5. ♗g2 0-0 6. 0-0 dc 7. ♖c2 b5 8. a4 b4 9. ♗fd2 ♗d5 10. ♗c4 c5!? Внешне рискованный вариант. После партии чемпион мира отметил, что подготовил его к матчу с Ф.Каруаной. 11. dc ♗a6 12. ♗e3 ♗d7 13. ♗d5 ed 14. c6 ♗c8. Белая пешка лишь выглядит опасной, на деле же аккуратными ходами черные ловят ее. 15. ♗f4 ♗c5 16. c7 ♖d7 17. ♗d2 g5 18. ♗e5 f6 19. ♗d4 ♗c7 20. ♖d1 ♗e6!

21. ♗b3 ♗c4 22. ♗a5 (более надежно 22. ♗e3 d4 23. ♗d4 ♗d4 23. ♖d4 ♖d4 24. ♗d4 с ничейной позицией) 22... ♗d4 23. ♖d4 ♗g7 24. ♖fc1 ♗e2 25. ♖c7 ♖c7 26. ♖e1 ♗c5 27. ♖d5 ♗e8! Чемпион мира всеми силами пыта-



ется сохранить пару слонов, что даст ему преимущество в грядущем эндшпиле. 28. ♖b7 ♖b7 29. ♗b7 ♗f8 30. ♗c6 ♗e7 31. f3 ♗c4 32. ♖e7+ ♗c7 33. ♖f2 f5. План игры на победу у стороны, обладающей двумя слонами, обычно заключается в пешечном наступлении. 34. ♖c3! Активизация короля – основной козырь белых. 34... ♗g8 35. ♖d3 g4 36. ♗a5?! Необходимо было решиться на 36. a5!, ограничивающее чернопольного слона черных. 36... ♗c5 37. ♗c4 ♗g1 38. ♗e3 ♗e6 39. fg fg 40. ♖e2 h5! Черные пользуются пассивностью оппонента, партию уже вряд ли возможно спасти. 41. ♗d5 ♗d7 42. ♗b3 ♗h2 43. ♖f2 h4 44. gh ♗c5 45. ♗c4 g3+ 46. ♖g1 ♗f4 47. ♗d1 ♗c6 48. b3 ♗h6 49. a5 ♗e4!. На доске почти цугцванг: белый король вынужден перемещаться между полями f1 и g1, в то время как его черный оппонент с решающим эффектом переводится на ферзевый фланг. 50. ♖f1 ♖g7 51. ♖g1 ♗f6 52. ♖f1 ♖e6 53. h5 ♗d5 54. a6 ♗d4 55. ♗g4 ♗c3 56. ♗e6 ♗c2 57. ♗a5 ♗c7 58. ♗b7 ♗d3+ 59. ♖g1 ♗a6. Черные могли поставить эффектную точку: 59... ♗e4 60. ♗h3 ♗b6 61. ♖f1 ♗d2! 62. h6 g2+ 63. ♗g2 ♗d3×!, но и сделанного в партии хода достаточно для победы. **Выигрыш черных.**

*А.Русанов*

Индекс 90964

## ПОТРЕБЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЗЕМЛЯНАМИ

Возобновляемые и невозобновляемые  
источники энергии – кто главнее?

*Уроки с физикой*

ISSN 0130-2221 19009



(Подробнее – на с. 2 внутри журнала)