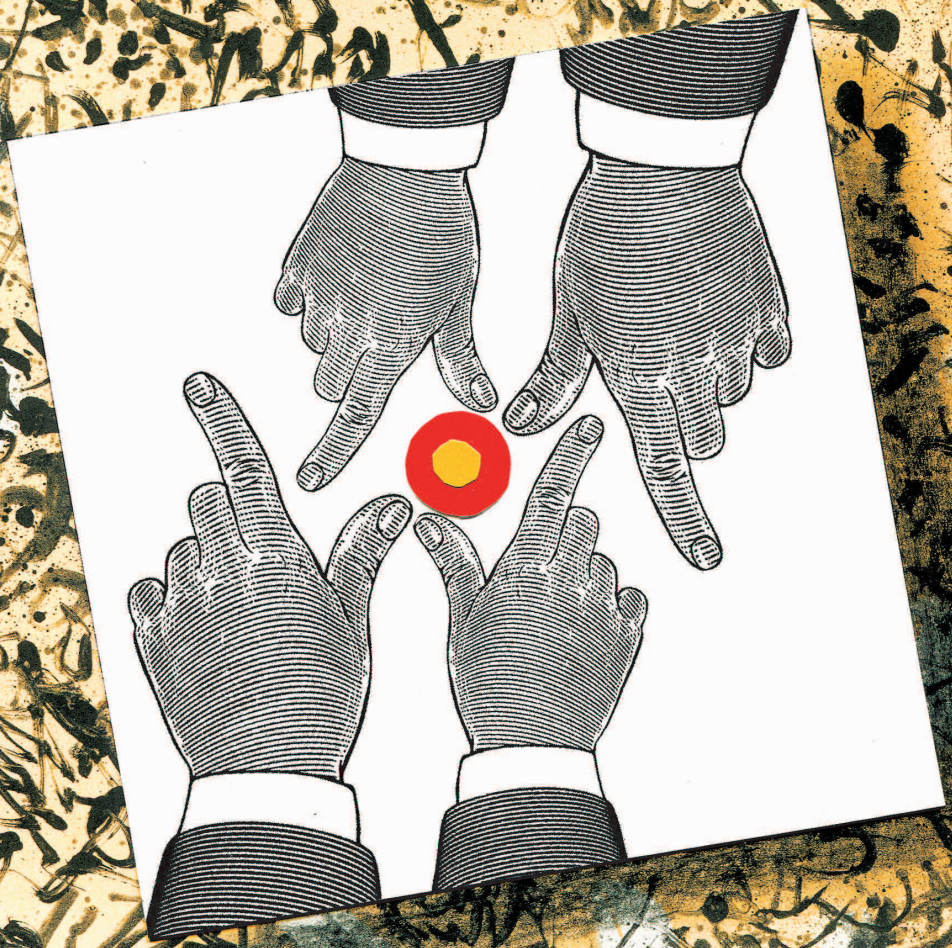
ISSN 0130-2221
МАРТ 2019 · № 3

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Собери друзей

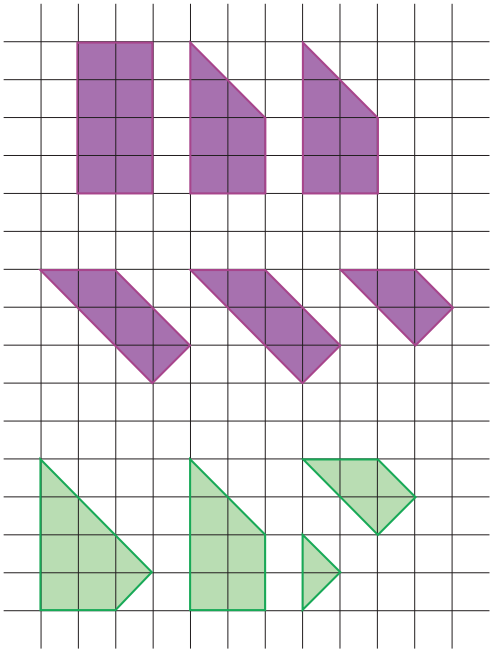


Рис.1

«Базовый» вариант этой головоломки, который можно найти в магазинах, состоит из восьми деталей: двух кругов и шести четырехугольников (фиолетовые на рисунке 1). Из них нужно сложить фигурки держащихся за руки человечков, показанные слева на рисунке 2.

Изготовить детали можно из бумаги, картона, фанеры или пластика. Важно соблюдать лишь относительные размеры четырехугольников, поскольку очевидно, что круги нужно использовать для голов человечков. При решении головоломки детали можно поворачивать и переворачивать как угодно.

С этим же набором четырехугольников можно придумать и другие задания. Например, попробуйте сложить из них симметричную фигуру.

А если добавить к деталям головоломки еще четыре многоугольника (зеленые на рисунке 1) и один круг, то можно составить трех человечков, показанных справа на рисунке 2. Отдельно из этого расширенного набора многоугольников, кстати, можно еще и квадрат сложить.

Желаем успехов в решении всех этих задач!

В.Журавлев

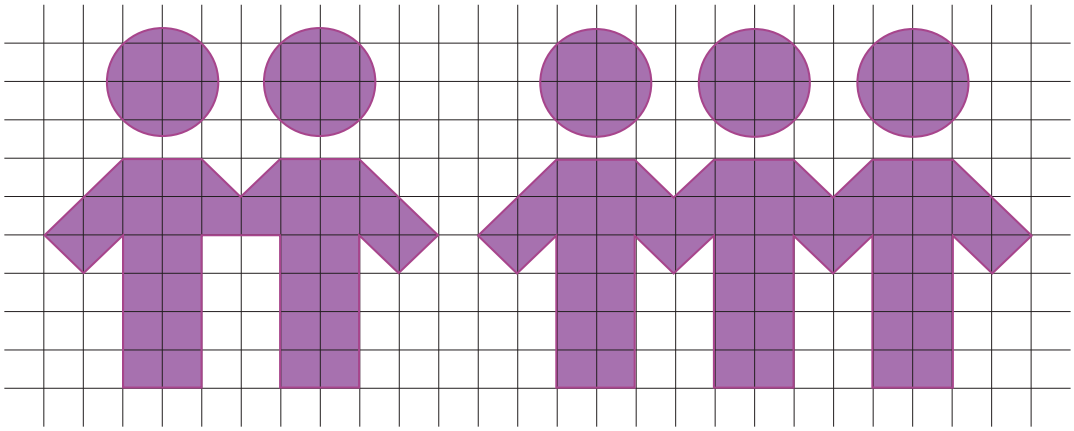


Рис.2

КВАНТ

МАРТ 2019 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Премия за лазерные инструменты. *Л.Белопухов*

10 Прямоугольник из квадратов. *Ф.Шаров*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

15 Задачи М2550–М2553, Ф2557–Ф2560

16 Решения задач М2538–М2541, Ф2545–Ф2548

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

23 О длине траектории баллистического движения. *Ф.Григорьев*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

25 Задачи

26 Левая, правая – где сторона? *С.Дворянинов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

28 Задачи 25–28

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

29 Еще раз о полуправильных многогранниках. *С.Кузнецов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Физика+техника (материалы)

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

34 Исследуем сферу ЭКСПО-2017. *Б.Мукушев, А.Турдин*

ОЛИМПИАДЫ

40 Региональный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике

42 Региональный этап LIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

48 Олимпиада «Ломоносов». Физика

54 Ответы, указания, решения

Нам пишут (53)

Вниманию наших читателей (14, 28)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье Л.Белопухова*

II *Коллекция головоломок*

III *Шахматная страничка*

IV *Прогулки с физикой*

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов, А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский, А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников (заместитель главного редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.В.Устинов, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Премия за лазерные инструменты

Л.БЕЛОПУХОВ

Нобелевская премия по физике 2018 года – это уже пятая премия, присужденная за изобретение и усовершенствование лазеров и их применение в разных областях науки.

Первая премия была присуждена «за фундаментальные исследования в области квантовой электроники, которые привели к созданию генераторов и усилителей нового типа – мазеров и лазеров». Лауреатами этой премии стали российские (советские) физики А.М.Прохоров и Н.Г.Басов, разделившие ее с американским физиком Ч.Таунсом. С тех пор слово «лазер» стало общеупотребительным названием очень узенького светового луча самого различного цвета. А само устройство источника этого луча уже мало кому интересно. Точно так же почти всем пользователям компьютеров и всевозможных гаджетов совсем неинтересно, что там у них внутри и как они работают.

А между тем изобретение лазеров (и мазеров) стало не только эпохальным достижением науки XX века. Оно блистательно утвердило квантовые представления об излучении, перевернувшие классическую физику. Недаром теоретическое обоснование лазеров было сделано великим Эйнштейном еще в 1917 году – только что миновало столетие этого события. Слова «лазер» и «мазер» еще не родились тогда. Но то, что установил Эйнштейн, «сидит» в этих названиях – это третья и четвертая буквы *з* и *е*. А в латинице это *s* и *e*, первые буквы термина *stimulated emission*, введенного в квантовую физику Эйнштейном.

Им было установлено, что коллективы возбужденных частиц (прежде всего, атомов и молекул), стремясь перейти в нормальное (с минимально возможной энергией) состояние, излучают двумя способами. Один из них – когда возбужденная частица излучает независимо от наличия таких же соседних частиц. Научно выражаясь, плотность вероятности возвращения ее в нормальное состояние (т.е. вероятность в единицу времени) зависит только от свойств самой частицы (ее электрон-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190301

Артур Эшкин, Жерар Муру и Донна Стрикленд

ной оболочки). Такое излучение Эйнштейн назвал спонтанным (самопроизвольным). Колебания электрического и магнитного поля в каждом кванте этого излучения совершенно не согласованы у разных частиц ни по фазе, ни по направлению. Физики называют такие источники излучения некогерентными.

Но для того чтобы объяснить планковский закон теплового излучения и его гипотезу о квантованности энергии колеблющихся частиц вещества, необходимо предположить, как заявил Эйнштейн, наличие еще одного вида излучения, плотность вероятности которого пропорциональна плотности энергии уже имеющегося излучения такой же частоты, как бы заставляющего, вынуждающего частицу излучить. Эту часть излучения Эйнштейн назвал стимулированным (вынужденным) излучением. У всех квантов такого излучения характер колебания полей совершенно одинаков – оно согласованное, когерентное.

В обычном (равновесном) состоянии вещества доля такого согласованного излучения мала, основное излучение – самопроизвольное. При этом большое число возбужденных частиц успевает вернуться в нормальное состояние и число частиц в возбужденном состоянии всегда меньше числа «нормальных» частиц. Такое распределение частиц по энергиям было установлено еще Больцманом как следствие законов термодинамики в применении к системам частиц и поэтому носит его имя. Но если число возбужденных частиц по каким-то причинам становится больше числа «нормальных» частиц, такое состояние называется инверсным, то главным становится вынужденное излучение.

Можно проиллюстрировать эту ситуацию таким «житейским» примером. Когда в большой ярусной аудитории число студентов меньше числа мест, то характер заполнения этой аудитории может быть различным. Нормальное заполнение (распределение по ярусам) – это большая плотность студентов в нижних ярусах и меньшая в верхних. Но допустим, что прошел слух о замене привычного студентам профессора, хорошо читающего лекции и при этом обращающего внимание на усердие студентов, неизвестным ассистентом. И студенты тогда дружно занимают верхние ряды в аудитории, собираясь готовиться к очередной контрольной работе или просто отдохнуть со своим смартфоном. Это – инверсное, не нормальное распределение студентов. Но вдруг слух не оправдался, и в аудиторию входит их профессор. Тогда студенты начинают быстро перемещаться вниз. Это перемещение стимулировано первыми перемещающимися студентами и, глядя друг на друга (согласованно), они восстанавливают нормальное распределение по рядам.

Эйнштейн не развивал идею о том, как можно получить инверсное состояние вещества. В то время его больше всего интересовала теория тяготения (общая теория относительности), и он готовился к ее экспериментальному подтверждению.

В 1939 году советский физик В.А.Фабрикант на опыте показал наличие небольшой примеси вынужденного излучения при обычном равновесном состоянии вещества. В 1951 году он разработал принцип усиления вынужденного излучения средой с инверсной заселенностью энергетических состояний (уровней). Это был принцип двух параллельных зеркал, между которыми вынужденное излучение лавинно усиливается в направлении, перпендикулярном плоскостям этих зеркал. В этом и заключается смысл слова «усилитель» в названиях лазера и мазера (вторая буква *a*

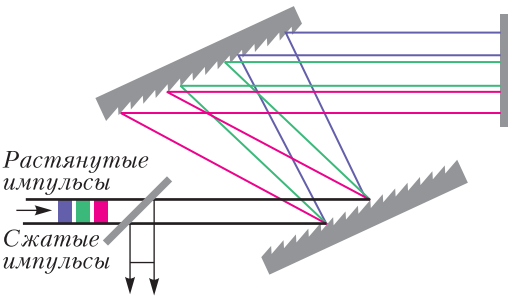
названий соответствует английскому *acceleration*). Лазерный луч вырывается из среды между зеркалами за счет полупрозрачности одного из зеркал или с помощью других устройств.

Заслуга Таунса, Басова и Прохорова состоит в том, что они разработали методы создания среды с инверсной заселенностью уровней. Басов и Прохоров осуществили способ усиления микроволнового радио-излучения и назвали эти устройства мазерами (первая буква *м* названия – от *microwave*). Только с помощью мазеров стало возможным осуществление связи между земными и искусственно созданными космическими источниками и приемниками остронаправленного излучения. Таунс и его коллеги сосредоточили свои усилия на разработке усилителей (генераторов) излучения в оптическом диапазоне (первая буква *л* в слове «лазер» соответствует английскому *light*). Был создан так называемый рубиновый трехуровневый лазер, в котором инверсное состояние заселенности достигалось за счет безизлучательных переходов между возбужденными атомами алюминия и примеси к нему – хрома. Необходимая поддержка возбужденных состояний атомов производилась за счет облучения прозрачного кристалла рубина достаточно мощной спиральной лампой с широким диапазоном излучения. Такой лазер мог работать непрерывно.

Очень быстро стало ясно, что лазер может стать исключительно мощным и точным техническим инструментом. Концентрация энергии в узком лазерном луче создает сильное световое давление. Прежде всего это могло быть использовано в прецизионной обработке металлов – резке, сварке и тому подобное. Но для этого нужно было повышать мощность луча. Препятствиями этому у непрерывных лазеров стали перегрев излучающей среды и разрушение световым давлением отражающих зеркал. Поэтому мощные лазеры принципиально могли быть только импульсными.

В импульсных лазерах пределом их мощности стало 10^3 Вт, что давало давление, оказываемое лучом на преграду, порядка $10^3 - 10^4$ МПа. Для решения технологических задач этого было уже достаточно. Появилось много лабораторий и фирм, создающих промышленные лазеры. Для применения лазеров в исследовании сверхбыстрых процессов, протекающих в атомах, молекулах, твердых телах и биологических объектах, более важным, чем мощность луча, была как можно меньшая временна́я длительность (и, соответственно, малая протяженность в пространстве) лазерного импульса. Но это неизбежно приводило к увеличению мощности до разрушающих значений. Казалось, что выхода нет.

Но в 1985 году произошел прорыв. Жерар Муру (Gérard Mourou) и его ученица Донна Стрикленд (Donna Strickland) изобрели технологию создания чирпированного импульса (chirped pulse amplification).



Усиление чирпированных импульсов

Проще всего переводить слово «чирпирование» как *чириканье*, что-то напоминающее птичий щебет. Чирпом еще в 1960 году назвали частотную модуляцию радиоволн, примененную для усиления мощности радаров. Однако перенос этой идеи от радиоволн на оптический диапазон с частотами, в десятки тысяч раз большими, требовал совсем другого решения и в теоретическом плане и в практическом.

Вначале импульс вынужденного лазерного излучения растягивается в тысячи раз по длине и во времени. Соответственно, мощность излучения уменьшается в тысячи раз. Такой импульс можно впустить в лазер, где его мощность будет увеличена до предельно допустимых конструкцией лазера пределов. После этого луч должен поступить в специальное устройство, где

частота будет увеличена до прежних высоких (световых) значений. Это устройство называется компрессором, поскольку импульс в нем сжимается. При этом, естественно, мощность в импульсе возрастет. Но это уже не будет опасно, поскольку в устройстве импульс будет находиться очень короткое время и не успеет произвести нагревательное и разрушительное действие.

Вот только как растягивать и сжимать импульс? Первой идеей было использовать дисперсию. Ведь это только приближенно можно считать лазерный луч монохроматическим. На самом деле даже при вынужденном излучении всегда существует некий набор длин волн (естественная ширина спектральной линии). В квантовом представлении это означает, что кванты вынужденного излучения все-таки чуть-чуть разные по энергии. Следовательно, дисперсия должна иметь место. В веществе импульс излучения будет расширяться по длине и во времени.

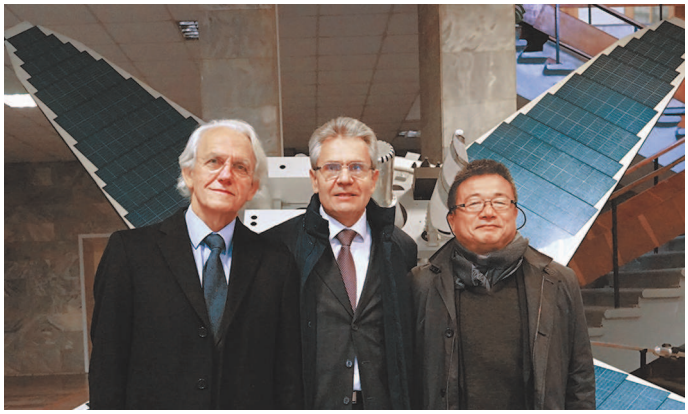
В качестве дисперсионных устройств Муру и Стрикленд вначале использовали оптические волокна как с нормальной, так и с аномальной дисперсией, которые могли как удлинять, так и укорачивать импульс. Но длина этого волокна, способного на необходимые растяжения и сжатия, в первых опытах достигала полутора километров. Получить такой оптический «путепровод» как раз стало возможным благодаря замечательным работам англо-американо-китайского инженера-физика Чарльза Као (1/2 Нобелевской премии по физике 2009 года «за новаторские достижения в области передачи света по волокнам для оптической связи»), в прошлом году скончавшегося в 85-летнем возрасте. Результатом его работ стало появление оптических волокон, способных передавать информацию почти без затухания на десятки километров.

Хотя принципиально задача чирпирования световых импульсов была решена, использование приборов таких габаритов не допускало их применения в научных лабораториях. И Муру и Стрикленд, уже после опубликования своей статьи в 1985 году, заменяют дисперсию дифракцией. Обычно дифракционная решетка расширяет импульс, а особым способом изготовленная решетка может, наоборот, сужать его, служить компрессором. Сжатие импульса во времени удалось сделать до величины 10^{-18} с (аттосекунды).

Так родилась «аттосекундная физика» изучения поведения отдельных электронов в атомах, молекулах и в твердом теле. Высокая мощность излучения и, соответственно, сверхвысокое световое давление сделали такие лазеры инструментом создания (пока в микромасштабах) экстремальных плазменных состояний вещества огромной плотности, когда, например, диэлектрики становятся проводниками. Такая плазма осуществляется во Вселенной внутри звезд и других космических объектов. Появилась возможность воспроизводить космические состояния в земной лаборатории.

«Космическое» значение таких лазеров проявилось и в задаче очистки околоземных спутниковых орбит от космического мусора. Мощный лазер может сбить мусор с орбиты и заставить его двигаться к земной поверхности, где он будет благополучно сгорать.

Мощные лазеры используются и для создания ускорителей заряженных частиц



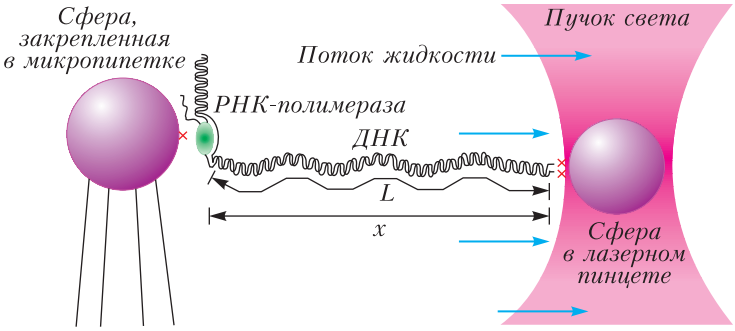
Жерар Муру, Александр Сергеев и Тоси Эбисудзаки на фоне спутника с мощным лазером для уборки космического мусора

нового типа – так называемых драйверных ускорителей. Мощный короткий лазерный импульс дифференцирует плазму на более легкую (электронную) и более тяжелую (ионную) части. Между ними возникает электрическое поле с огромной напряженностью $\sim 10^{21}$ В/м, даже большей, чем внутри атома. Это поле представляет собой как бы хвост, кильватер самого импульса. Уже созданы ускорители электронов до энергии 4,2 ГэВ длиной всего лишь в 15 см, работающие по этому принципу. А в качестве режущего инструмента как в технологиях, так и в медицине (хирургии) сегодня применяются только аттосекундные лазеры. Понятно и оборонное значение такого лазера.

Теперь стало ясно огромное значение изобретения Муру и Стрикленд, увенчанное Нобелевской премией 2018 года «за метод генерации высокоинтенсивных ультракоротких оптических импульсов». Точнее, это была только половина Нобелевской премии. Другая половина была присуждена Артуру Эшкину (Arthur Ashkin) «за изобретение оптических пинцетов и их применение в биологических системах». Она стала второй премией, присужденной за необычное применение давления света, оказываемого лазерным лучом.

После создания лазеров Эшкин стал заниматься воздействием лазерного луча на микроскопические объекты, где не нужно большой мощности излучения. Вскоре он обнаружил необычное на первый взгляд явление – давление света смещало микрочастицы не по направлению луча, а в боковом направлении к середине этого луча. Каким бы узким с макроскопических позиций ни был лазерный луч, дифракция обязательно приводит к перераспределению интенсивности излучения по ширине луча. По его оси образуется нечто вроде центрального максимума, а интенсивность по краям луча в несколько десятков раз меньше. Это немного напоминает картину дифракции света на щели. Возникает градиент напряженности электрического поля, направленный от боковой поверхности луча к его оси. На частицы вещества или даже на отдельные молекулы, которые в первом приближении можно считать электрическими диполями, действует боковая (градиентная) сила, перемещающая их к оси луча. Она прижимает частицы к оси, где они находятся в равновесном положении. Особенно устойчиво это положение, когда луч лазера в этом месте сужается, фокусируется сильной линзой. Отрезок луча представляется уже не цилиндром, а усеченным конусом. В этом случае равнодействующая градиентных сил имеет осевое направление и может уравновесить давление света, оказываемое лучом на поверхность микрообъекта. Возникает идеальная лазерная ловушка с устойчивым положением объекта в одной точке.

Имея в распоряжении самые первые маломощные лазеры, Эшкин исследовал поведение объектов, где легко можно было осуществить ловушки. Это были пластмассовые шарики микронных размеров. С увеличением мощности лазеров он исследовал поведение все более мелких частиц. Вначале он совсем не думал об исследовании биологических объектов. Перейти к ним помог случай. В лаборатории росли комнатные цветы, листья которых были поражены мозаичным вирусом. Он часто поражает листья и в подмосковных садах, особенно листья черной смородины и флоксов. На листьях появляется как бы налет мельчайшей пудры различных цветов. Эшкин изучил этот порошок под микроскопом и убедился, что вирусные шарики имели размер всего лишь несколько нанометров. Возможно, это были самые маленькие микрообъекты, которые Эшкин мог иметь в это время. Но они были настолько малы, что микроскопы не могли заметить их передвижение в лазерном луче. В какой-то момент времени на вирусы стали нападать более крупные биологические объекты – бактерии, питавшиеся этими вирусами. Вот их перемещение Эшкин и стал изучать. Правда для этого ему пришлось заменить лазер с зеленой длиной волны на инфракрасный лазер. Зеленый свет губительно действовал на бактерии, а вот в инфракрасном освещении они превосходно себя чувствовали и, находясь дли-



Использование оптического пинцета для изучения структуры РНК-полимеразы

тельное время в ловушках, даже были способны к размножению.

Лазерная ловушка Эшкина скоро стала называться оптическим пинцетом (*optical twizers*), поскольку микрообъекты можно было перемещать в пространстве вместе с перемещением лазерного луча. В 1986 году пинцет был окончательно сконструирован как установка, включающая лазер и микроскопы. Сегодня трудно представить серьезную биологическую лабораторию без оптического пинцета. За прошедшие 30 лет он стал, конечно, более усовершенствованным, удобным в работе и более дешевым. Использованием лазерной ловушки в атомной физике сам Эшкин не занимался. Это стало предметом исследований группы его учеников, выделившихся в самостоятельную лабораторию. В 1997 году Стивен Чу, Клод Коэн-Таннуджи и Уильям Филипс стали нобелевскими лауреатами «за создание методов охлаждения и улавливания атомов лазерным лучом». Создателя лазерного пинцета среди них не было.

И вот в прошлом году Нобелевский комитет осуществил похвальную справедливость, и нобелевским лауреатом «за пинцет» стал, наконец, его первооткрыватель. При этом он стал и самым «возрастным» лауреатом – ему исполнилось 96 лет. Именно биологическая направленность открытия Эшкина отмечается в обосновании этой премии.

А применение пинцета в атомной физике дало замечательные результаты. В 2017 году с помощью микроскопа с сильным разрешением удалось зафиксировать сближение двух атомов щелочных металлов и их превращение в молекулу. Это была, так сказать, документальная киносъемка интимнейшего атомно-молекулярного процесса перерождения электронных атомных орбиталей в молекулярную орбиталь.

Получило распространение и голографическое применение пинцета. Одновременно используя тысячи лазерных ловушек, в медицине стало возможным создать 3d-зображение группы клеток и отделить здоровые клетки от инфицированных, например для получения более эффективных и безопасных лекарств.

И в заключение несколько слов о лауреатах 2018 года.

Артур Эшкин родился в 1922 году в Нью-Йорке в семье одесского эмигранта Исидора Ашкенази, дантиста по профессии, покинувшего Россию в 1909 году. Артур Эшкин, как и его старший брат, хотел стать физиком. Война прервала его учебу. Он служил в инженерных войсках, занимался совершенствованием радаров. А брат его, уже ставший физиком, работал в Лос-Аламосе, ядерном центре США. После окончания учебы и защиты докторской диссертации Артур Эшкин стал работать в Лаборатории Белла, американском центре радиоэлектроники, где как раз в это время и появились первые квантовые генераторы. Вскоре он возглавил лазерный отдел лаборатории. После создания лазерных ловушек (лазерного пинцета) он руководил усовершенствованием этого своего изобретения. Выйдя на пенсию в 70 лет, он продолжал работу, создав в подвале своего дома собственную лабораторию. Фактически Артур Эшкин был неофициальным шефом работ, развивавших и само изобретение и его внедрение в биологические исследования. И когда ему исполнилось 96 лет, он все-таки получил заслуженную награду и стал самым возрастным нобелевским лауреатом. Пожелаем ему доброго здоровья!

Жерар Альбер Муру считается американским и французским физиком. Он родился во Франции в 1944 году, в 1967 году закончил университет в Гренобле, а в 1973 году стал доктором философии (по физике) в Парижском университете имени Марии и Пьера Кюри. Интересы французских физиков в то время были сосредоточены на ядерной физике, на мирном использовании ядерной энергии. Франция переходила от электростанций, работавших на немецком каменном угле, к урановым ядерным электростанциям, сегодня почти 80% электростанций Франции – это ядерные реакторы. И не случайно именно Франция определена местом осуществления крупнейшего международного проекта – созданием экспериментального термоядерного реактора.

Но Муру хотел заниматься лазерами. И он уехал в США, где работал сначала в Рочестерском, а потом в Мичиганском университете, где возглавил работы по сверхмощным и сверхбыстрым импульсным квантовым генераторам. В 1980-е годы он со своими учениками воплотил в жизнь идею чирпирования лазерных импульсов, принесшую ему через 30 лет нобелевскую награду.

В 2004 году во Франции развернулись лазерные исследования и была создана лаборатория прикладной оптики в национальной высшей школе передовых технологий. Муру был приглашен возглавить лабораторию. В России это направление лазерной физики развивалось в нижегородском академическом Институте прикладной физики. И когда в 2001 году институт организовал международную конференцию по лазерной тематике, Муру был приглашен на эту конференцию и стал ее деятельным участником. А после конференции активно работал вместе с сотрудниками института над созданием самой мощной тогда в мире лазерной установки ПЕРЛ. Первые две буквы названия этой установки расшифровываются как *петаваттная* мощность лазера (1 ПВт = 10^{15} Вт). И это в 300 раз больше, чем мощность всех мировых электростанций! (При этом не следует, конечно, забывать, что эта мощность осуществляется в очень короткое время порядка 10^{-18} с. Так что энергия в импульсе – всего лишь миллиджоули.)

В 1908 году Муру был избран иностранным членом Российской академии наук. И когда в 2010 году Нижегородский университет при участии Института прикладной физики РАН получил мегагрант российского правительства на создание лаборатории международного уровня «Экстремальные световые поля и их приложения» (ELSALab), Муру в течение 5 лет был ее научным руководителем. Каждый год он четыре месяца проводил в Нижнем Новгороде и успешно справился с поставленной задачей – лаборатория была создана и продолжает успешно работать. В настоящее время на базе этой лаборатории осуществляется масштабный проект Международного центра исследования экстремальных световых полей на базе сверхмощного лазера XCELS. Муру стал председателем международного консультативного совета этого проекта. В 2011 году Правительственная комиссия РФ по высо-

Велосипедные прогулки Жерара Муру по Нижнему Новгороду

ким технологиям и инновациям включила проект в список из шести проектов типа мегасайенс, которые должны быть реализованы к 2022 году.

В повседневной жизни Муру очень доброжелательный и общительный человек. В Нижнем Новгороде он поразил всех тем, что первым делом приобрел себе и своей жене хорошие велосипеды и стал совершать длинные велопрогулки по городу и его живописным окрестностям. Он хороший пловец и в свои 70 лет переплывает Оку, где она перед впадением в Волгу становится довольно широкой. Его уважают и любят не только молодые коллеги, но и их подрастающие дети. Дружеские отношения вот уже почти 20 лет связывают Жерара Муру с одним из российских ведущих «лазерщиков» Александром Михайловичем Сергеевым, ныне президентом РАН, который своим другом и коллегой был приглашен на церемониальные Нобелевские торжества в Стокгольм в декабре 2018 года. Одно из самых ярких воспоминаний А.М.Сергеева об этих днях – это традиционные нобелевские лекции всех лауреатов. В своем интервью корреспонденту газеты «Московский комсомолец» от 10 января 2019 года президент РАН отмечает, что для него был неожиданным огромный интерес к физике: «Идет череда лекций, три из них в один день – физика, химия, экономика. Часть аудитории в Стокгольмском университете занята приглашенными со всего мира людьми – коллегами, родственниками лауреатов, а вторая часть – это шведская публика, для которой вход в зал был свободным. И что я вижу? На физике с утра – аншлаг, на химии народу поменьше, а на экономике существенно меньше. Вы понимаете, о чем это говорит? Как нация заинтересована в естественных науках! У нас же в России мы, к сожалению, констатируем переполненность залов на различных экономических форумах и заметное снижение интереса к естественным дисциплинам».

Третий Нобелевский лауреат по физике 2018 года Донна Стрикленд стала третьей женщиной-физиком, получившей эту почетную награду. Первой была Мария Склодовская-Кюри (1903 г.), второй – физик-теоретик Мария Гёпперт-Майер (1963 г.).

Донна Стрикленд родилась в 1959 году в Канаде и стала физиком после окончания канадского университета Макнестера. Она хотела заниматься мощными лазерами и поехала в США, в Мичиганский университет, в лабораторию Жерара Муру, где стала его аспиранткой. Муру поручил ей важнейший участок экспериментальных работ по чирпированию лазерных импульсов, и уже в 1985 году, на втором году ее аспирантуры, была опубликована совместная статья Муру и Стрикленд, ставшая основополагающей для всех лазерщиков и давшая основание для присуждения Нобелевской премии 2018 года именно им, авторам этой работы. Саму диссертацию на эту тему Стрикленд защитила в 1989 году. Тем самым она установила своеобразный «нобелевский рекорд» присуждения премии за работу, выполненную в аспирантуре.

Донна Стрикленд успешно продолжала работать над увеличением мощности импульсных лазеров в канадском университете Ватерлоо, где она стала президентом Оптического общества. В момент присуждения премии ее должность в университете соответствовала должности доцента (адъюнкт-профессор). Но уже на другой день она стала полным профессором. «Я счастлива и польщена, – сказала она, – что стала одной из трех великих женщин».

Необычайно моложавая и стройная, на церемонии получении знаков нобелевской награды, вручаемых шведским королем Карлом XIV Густавом, она была в строгом, но очень изящном красном платье с одной ниткой жемчуга. Прибывшая в Стокгольм и приглашенная на церемонию вручения наград делегация преподавателей и студентов ее родного университета горячо приветствовала своего нобелевского лауреата, ставшего гордостью и своего университета, и всей Канады. Донна Стрикленд стала десятым Нобелевским лауреатом Канады и вторым канадским лауреатом-физиком.

Прямоугольник из квадратов

Ф.ШАРОВ

С ДАВНИХ ВРЕМЕН ЛЮДИ ЗАНИМАЛИСЬ задачами на разрезания. Можно ли разрезать определенную фигуру на какие-то другие (например, на квадраты)? Можно ли из некоторого набора фигур составить другую заданную фигуру (например, правильный треугольник)? В этой статье мы докажем один из классических результатов в этой области математики – теорему Дена.

Теорема 1 (М.Ден, 1903). *Если прямоугольник разрезан на квадраты (не обязательно равные), то отношение длин его сторон рационально.*

Читатель, конечно, без труда сможет догадаться, как разрезать прямоугольник с рациональным отношением длин сторон на квадраты (рис.1). Содержательным

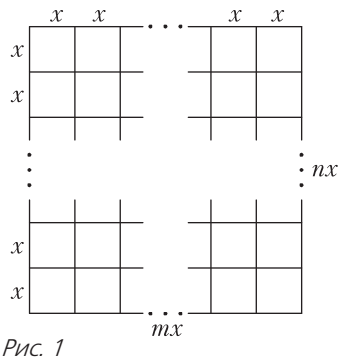


Рис. 1

является лишь вопрос невозможности разрезаний в остальных случаях.

Например, у прямоугольника вида $\left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$, где a, b, c, d рациональны, длины сторон и их отношения уже могут быть иррациональны. На этом простейшем частном случае уже можно продемонстрировать все основные идеи, лежащие в основе доказательства теоремы 1. В дальнейшем для удобства латинские буквы a, b, c, d и эти же буквы с индексами будут означать *рациональные* числа, а все числа вида $a+b\sqrt{2}$ будем называть *хорошими*.

Теорема Дена для хороших чисел

Сначала докажем теорему для частного случая, когда стороны разрезаемого прямоугольника и стороны всех квадратов являются хорошими числами.

Прежде всего рассмотрим пример: прямоугольник $1\times\sqrt{2}$. Решим следующую задачу.

Задача 1. Можно ли прямоугольник $1\times\sqrt{2}$ разрезать на квадраты с рациональными сторонами? А со сторонами, которые либо рациональны, либо имеют вид $b\sqrt{2}$? А со сторонами, которые являются произвольными хорошими числами?

Решение.[1] *Ответ* на первые два вопроса: нет. Решение для третьего вопроса приведено в конце журнала.

Ответим на первый вопрос. Предположим, что прямоугольник $1\times\sqrt{2}$ разрезан на квадраты с рациональными сторонами. Рассмотрим сторону, равную $\sqrt{2}$. Сумма примыкающих к ней сторон квадратов должна равняться $\sqrt{2}$. Сумма рациональных чисел не может быть равна иррациональному, следовательно, такое разрезание невозможно.

Ответим на второй вопрос. Предположим, что прямоугольник $1\times\sqrt{2}$ разрезан на квадраты со сторонами вида a или $b\sqrt{2}$. Его площадь равна $\sqrt{2}$. Площади квадратов имеют вид либо a^2, либо $2b^2$.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190302

[1] Решение задачи 1, а также приведенное ниже доказательство невозможности разрезания прямоугольника $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ на квадраты и решение задачи 3 (приведенное в конце журнала) написаны Е.Алиевой.

Площадь прямоугольника равна сумме площадей квадратов. Получаем противоречие, так как иррациональное число не может быть равно сумме рациональных. Здесь мы опирались на *аддитивность* площади: площадь целого равна сумме площадей частей.

Покажем теперь, что прямоугольник $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ нельзя разрезать на квадраты с хорошими сторонами. Для этого нам понадобится определение сопряженного числа.

Определение 1. Число $\overline{s}=a-b\sqrt{2}$ называется *сопряженным* к числу $s=a+$ $+b\sqrt{2}$.

Задача 2. Докажите, что сопряженное к сумме хороших чисел равно сумме сопряженных, а сопряженное к произведению – произведению сопряженных.

Итак, предположим, что прямоугольник $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ разрезан на n квадратов со сторонами $a_1+b_1\sqrt{2}$, $a_2+b_2\sqrt{2}$, …, a_n+ $+b_n\sqrt{2}$. Площадь данного прямоугольника равна сумме площадей рассматриваемых n квадратов, т.е.

$$1+\sqrt{2}=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)^2+$$
$$+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Найдем сопряженные к обеим частям полученного равенства. Сопряженным к числу $1+\sqrt{2}$ является число $1-\sqrt{2}$. По утверждению задачи 2 получаем, что сопряженным к числу

$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)^2+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)^2$$

является число

$$\left(a_1-b_1\sqrt{2}\right)^2+\left(a_2-b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n-b_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Получаем, что

$$1-\sqrt{2}=\left(a_1-b_1\sqrt{2}\right)^2+$$
$$+\left(a_2-b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n-b_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Число $1-\sqrt{2}$ – отрицательное, а правая часть тождества – сумма неотрицательных. Получаем противоречие. Значит, прямоугольник $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ нельзя разрезать на квадраты с хорошими сторонами.

Заметим, что, например, сопряженное к числу $2+\sqrt{2}$ положительно. Поэтому только что использованный метод доказательства невозможности разрезания прямоугольника $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ неприменим для доказательства невозможности разрезания прямоугольника $1\times\left(2+\sqrt{2}\right)$, а его, согласно теореме Дена, тоже нельзя разрезать на квадраты с хорошими сторонами. Обойти это препятствие можно при помощи следующего обобщения понятия площади.

Определение 2. Пусть x – некоторое действительное число. Назовем *x-площадью* прямоугольника $\left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$ число $(a+bx)(c+dx)$.

Например, $\sqrt{2}$-площадь – это обычная площадь такого прямоугольника, а $\left(-\sqrt{2}\right)$-площадь – сопряженное к ней число.

Задача 3. Найдите все прямоугольники вида $\left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$, x-площади которых неотрицательны при всех x.

Лемма 1 (аддитивность x-площади). *Если прямоугольник разрезан на конечное число прямоугольников, стороны которых – хорошие числа, то для любого действительного числа x x-площадь разрезаемого прямоугольника равна сумме x-площадей прямоугольников, на которые он разрезан.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что сумма x-площадей двух прямоугольников со сторонами вида $a+b\sqrt{2}$, имеющих общую сторону, равна x-площади их объединения.

Действительно, пусть имеется прямоугольник с x-площадью S, который состоит из двух прямоугольников с x-площадями

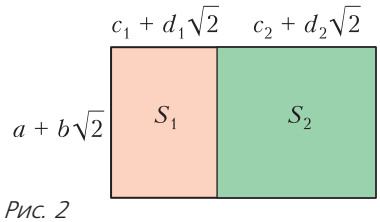


Рис. 2

S_1 и S_2 (рис.2). Тогда

$$S_1 + S_2 = \\ = (a+bx)(c_1+d_1x)+(a+bx)(c_2+d_2x) = \\ = (a+bx)((c_1+c_2)+(d_1+d_2)x) = S .$$

Пусть теперь количество прямоугольников в разрезании больше двух. Продолжим каждый разрез, как показано на рисунке 3. Тогда каждый прямоугольник

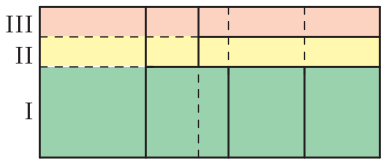


Рис. 3

нового разрезания будет также иметь стороны вида $a+b\sqrt{2}$. Рассмотрим горизонтальные слои из последовательно приложенных друг к другу по общей стороне прямоугольников (I, II, III на рисунке 3). Используя уже доказанное свойство аддитивности x-площади двух прямоугольников с общей стороной, методом математической индукции легко доказывается, что x-площадь любого такого слоя равна сумме x-площадей прямоугольников, составляющих этот слой. Теперь уже эти слои приложим друг к другу и применим только что доказанное утверждение об аддитивности x-площади ряда прямоугольников. Получим, что x-площадь разрезаемого прямоугольника равна сумме x-площадей горизонтальных слоев. Эта сумма равна сумме x-площадей всех прямоугольников нового разрезания. С другой стороны, каждый прямоугольник старого разрезания (так же, как и большой прямоугольник) составлен из прямоугольников нового разрезания, в один или несколько слоев. Таким образом, сумма x-площадей прямоугольников старого разрезания равна x-площади исходного прямоугольника.

Задача 4. Докажите, что отношение двух хороших чисел – хорошее число.

Теорема 2 (частный случай теоремы Дена). *Прямоугольник с хорошими длинами сторон можно разрезать на квадраты с хорошими длинами сторон тогда и только тогда, когда отношение его сторон рационально.*

Доказательство. Предположим, что отношение сторон иррационально, а разрезание существует. Поделим стороны прямоугольника и всех квадратов на меньшую сторону прямоугольника. По задаче 4 все стороны останутся хорошими. В частности, полученный прямоугольник будет иметь вид $1\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$. Его x-площадь равна $c + dx$. Так как отношение сторон иррационально, то $d \neq 0$. Значит, x-площадь отрицательна при некотором x. В то же время x-площадь любого квадрата со стороной $a+b\sqrt{2}$ равна $(a+bx)^2$, что неотрицательно для любого x. Получили противоречие с леммой 1: сумма неотрицательных чисел не может равняться отрицательному.

Задача 5. Пусть z – произвольное иррациональное число. Можно ли прямоугольник $1\times z$ разрезать на квадраты со сторонами вида $a + bz$?

Подсказка: попробуйте модифицировать понятие x-площади так, чтобы оно стало определено для прямоугольника и квадратов, рассматриваемых в задаче.

Доказательство теоремы Дена в общем случае

Для доказательства теоремы Дена в общем случае определение x-площади нам уже не годится: ведь она определена только для хороших чисел, а теперь у нас в разрезании могут присутствовать квадраты с какими угодно сторонами (например, $\sqrt{3}$, π, $\sqrt[3]{2}$ и так далее).

Далее в этом разделе мы считаем, что прямоугольник $s_0\times t_0$ разрезан на прямоугольники $s_1\times t_1$, $s_2\times t_2$, …, $s_N\times t_N$, причем s_0 и t_0 несоизмеримы, т.е. их отношение иррационально.

Лемма 2. *Обозначим*

$$P = \{s_0, t_0, s_1, t_1, \ldots, s_N, t_N\}.$$

Тогда можно выбрать такие числа $e_1, e_2, \ldots, e_n \in P$, *чтобы любое число* $p \in P$ *единственным образом представлялось в виде*

$$p = as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n .$$

Например, для разрезания на рисунке 4, где $s_0 = 1$ и $t_0 = 2 + \sqrt{2}$, необходимо выбрать лишь одно число (либо $e_1 = \sqrt{3}$, либо $e_1 = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$).

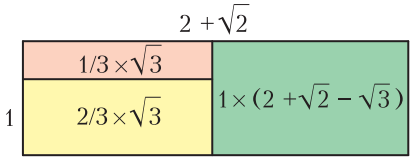


Рис. 4

Доказательство. Выпишем в строку длины сторон прямоугольников разрезания, начиная с s_0 и t_0. Так, для разрезания на рисунке 4 получится такая строка:

$$s_0 = 1,\ t_0 = 2 + \sqrt{2},\ s_1 = 1/3,\ t_1 = \sqrt{3},$$

$$s_2 = 2/3,\ t_2 = \sqrt{3},\ s_3 = 1,\ t_3 = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Теперь[2] подчеркнем в этом списке те числа, которые не представляются в виде суммы предыдущих с рациональными коэффициентами (сейчас поясним, что это значит). Например, s_0 мы подчеркнем (предыдущих чисел вовсе нет). Число t_0 мы тоже подчеркнем, так как оно несоизмеримо с s_0 и, следовательно, не представимо в виде $a_0 s_0$. Далее, если s_1 представляется в виде $a_0 s_0 + b_0 t_0$, то s_1 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. Аналогично, если t_1 представляется в виде $a_0 s_0 + b_0 t_0 + a_1 s_1$, то t_1 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. И так далее. В нашем случае получится такое:

$$\underline{1},\ \underline{2+\sqrt{2}},\ 1/3,\ \underline{\sqrt{3}},\ 2/3,\ \sqrt{3},\ 1,\ 2+\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Докажем теперь, что всякое число из этого списка единственным образом представляется как сумма подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами. Ясно, что неподчеркнутое число представляется нужным образом через подчеркнутые. Подчеркнутое тоже представляется: оно равно само себе. Если же такое представление не единственно, то, вычитая одно представление из другого, мы видим, что сумма неких подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами равна 0. Но это позволяет выразить, опять-таки в виде суммы с рациональными коэффициентами, одно из подчеркнутых чисел через предыдущие подчеркнутые числа, а значит, мы зря его подчеркнули.

Все подчеркнутые числа, начиная с третьего, и будут искомым набором $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Зафиксируем набор чисел $s_0, t_0, e_1, e_2, \ldots, e_n$ из леммы 2. Он называется *базисом*.

Определение 3. Пусть y – некоторое действительное число. Назовем *y-площадью* прямоугольника со сторонами

$$as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$$

$$\text{и}\ \ cs_0 + dt_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n$$

число $(a + by)(c + dy)$.

Например, y-площадь разрезаемого прямоугольника $s_0 \times t_0$ равна y.

Обратите внимание, что это определение не эквивалентно определению x-площади выше! Скажем, для прямоугольника на рисунке 4 x-площадь равна $2 + x$, а y-площадь равна y. Если подставить в качестве x и y одинаковые числа, то могут получиться разные результаты.

Лемма 3. *Любой квадрат в разрезании прямоугольника $s_0 \times t_0$ имеет неотрицательную y-площадь.*

Доказательство. Сторона любого квадрата в разрезании прямоугольника $s_0 \times t_0$ записывается в виде $as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Тогда его y-площадь равна $(a + by)^2$, что неотрицательно при любом действительном y.

Лемма 4. *Для любого y y-площадь разрезаемого прямоугольника $s_0 \times t_0$ равна сумме y-площадей прямоугольников, на которые он разрезан.*

Доказательство леммы 4 дословно повторяет доказательство леммы 1 с той лишь разницей, что нужно заменить в нем x-площадь на y-площадь, а также заменить все числа вида $a + b\sqrt{2}$ на соответствующие числа вида $as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$ (в том числе и на рисунке 2).

[2] Дальнейший текст доказательства леммы 2 с незначительными изменениями заимствован из статьи Д.Фукса «Можно ли из тетраэдра сделать куб?» [4].

Доказательство теоремы 1. Пусть прямоугольник $s_0 \times t_0$ разрезан на квадраты, причем s_0 и t_0 несоизмеримы. По определению его y-площадь равна y. Это число отрицательно при $y < 0$. В то же время y-площадь любого квадрата неотрицательна по лемме 3. Получили противоречие с леммой 4: сумма неотрицательных чисел не может равняться отрицательному.

В заключение отметим, что y-площадь – это не просто олимпиадный трюк. В математике есть важное понятие *меры*. Мерами являются, например длина отрезков на прямой; площадь (обыкновенная, а не y-площадь) фигур на плоскости; объем тел в пространстве. Из двух основных свойств меры – аддитивности и неотрицательности – наша y-площадь обладает только первым.

Если свойство неотрицательности не требуется, вместо слова «мера» используется термин «заряд». Вот примером заряда и является y-площадь.

Литература

1. *М.Скопенков, О.Малиновская, С.Дориченко, Ф.Шаров*. Собери квадрат. В сборнике: Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки — к профессии. – М.: МЦНМО, 2018.
2. *М.Скопенков, О.Малиновская, С.Дориченко*. Собери квадрат. – «Квант», 2015, №2.
3. *М.Скопенков, М.Прасолов, С.Дориченко*. Разрезания металлического прямоугольника. – «Квант», 2011, №3.
4. *Д.Фукс*. Можно ли из тетраэдра сделать куб? – «Квант», 1990, №11.
5. *Ф.Шаров*. Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон. – Математическое просвещение, сер. 3, вып. 20 (2016), с.200–216.
6. *И.М.Яглом*. Как разрезать квадрат? – М.: Наука, 1968.

Вниманию наших читателей!

В предыдущем номере журнала в статье «Объять необъятное …» было допущено несколько опечаток. Необходимо сделать следующие исправления.

Где:	**Было:**	**Должно быть:**
с.4, левая колонка, 6-я строка снизу	немного	намного
с.7, левая колонка, 11-я строка снизу	таких	малых
с.9, правая колонка, последний абзац	E_1 = 85 МэВ/нуклон	E_1 = 8,5 МэВ/нуклон
с.10, левая колонка, 2-й абзац	$\rho_{ср} \sim 5 \cdot 10^{30}$ г/см^3	$\rho_{ср} \sim 5 \cdot 10^{-30}$ г/см^3
с.10, левая колонка, предпоследний абзац	$\frac{c}{H} \sim 10^6$ м	$\frac{c}{H} \sim 10^{26}$ м
с.11, правая колонка, первый абзац	$x = 2$	$x = 1$
с.12, правая колонка, первый абзац	$T_С = T_З \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{l_{СЗ}}{2R_С}\right) = 20T_З = 6000$ К	$T_С = T_З \cdot (4 \cdot 4)^{1/4} \cdot \left(\frac{l_{СЗ}}{2R_С}\right)^{1/2} = 20T_З = 6000$ К

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2551, М2552 предлагались на региональном этапе XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике, задача М2553 предлагалась на XXII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М2550–М2553, Ф2557–Ф2560

М2550. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a+b}{\sqrt{b+c}}+\frac{b+c}{\sqrt{c+a}}+\frac{c+a}{\sqrt{a+b}}\geq$$
$$\geq\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}.$$

Б.Кайрат (Казахстан), А.Храбров

М2551. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n\geq 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ *разноцветной*, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовем *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

С.Берлов

М2552. Последовательность (a_n) натуральных чисел задана условиями $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n\geq 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдется член, делящийся на k.

А.Голованов

М2553*. Обозначим через I центр окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC, через A_1, B_1 и C_1 – точки ее касания со сторонами BC, CA и AB соответственно, через K и L – центры окружностей, вписанных в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1 соответственно, через H – основание высоты, опущенной из точки C (рис.1). Биссектриса угла AHC

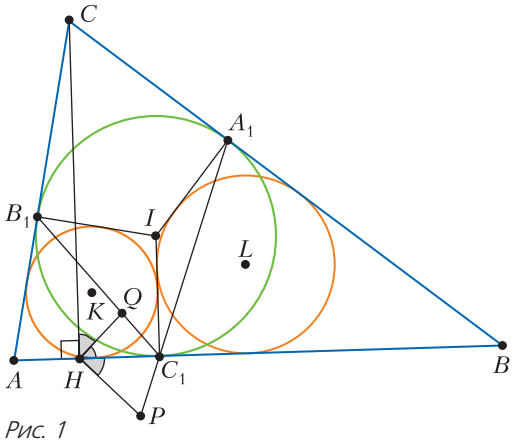


Рис. 1

пересекает прямую A_1C_1 в точке P, а биссектриса угла BHC пересекает прямую B_1C_1 в точке Q. Докажите, что Q – ортоцентр треугольника KLP.

А.Заславский

Ф2557. На горизонтальной плоскости находятся два одинаковых однородных бруска массой M, один из них – «лежачий», а другой – «стоячий» (рис.2). На брусках закреплены невесомые блоки без трения в осях, через которые перекинута невесомая

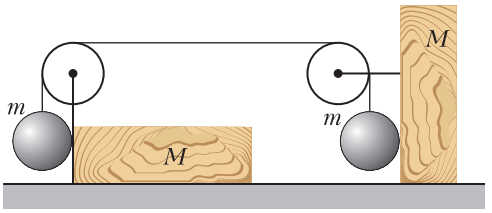


Рис. 2

и нерастяжимая нить, соединяющая два одинаковых шара массой m. У нити имеются вертикальные и горизонтальный участки. Шары касаются брусков. Вначале эти бруски удерживались внешними силами в неподвижном состоянии. Затем бруски отпустили, и они стали двигаться поступательно. С какими начальными ускорениями двигались бруски? Трения в системе нигде нет.

М.Ромашка

Ф2558. Шаровая льдинка радиусом R_0, имеющая температуру 0 °С, в условиях невесомости начинает таять (плавиться) при постоянной «невысокой» температуре окружающей среды T_0 ($T_0 \sim 2-5$ °С). Пренебрегая испарением, определите время таяния льдинки. Во сколько раз возрастает время таяния льдинки при увеличении ее радиуса в два раза? Удельная теплота плавления льда λ, коэффициент теплопроводности воды η. Считайте, что при плавлении льдинка сохраняет форму шара и симметрично окружена водой, образовавшейся при ее таянии, поскольку вода хорошо смачивает лед. Температура на внешней поверхности воды, которая представляет собой сферу, всегда равна температуре окружающей среды T_0.

А.Власов

Ф2559. В точке A, расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R, находится точечный заряд q (рис.3). Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько после заземления изменится потенциал φ точки B, являющейся вершиной равностороннего треугольника ABO? Каким будет изменение вектора напряженности электрического поля в этой же точке?

С.Крюков

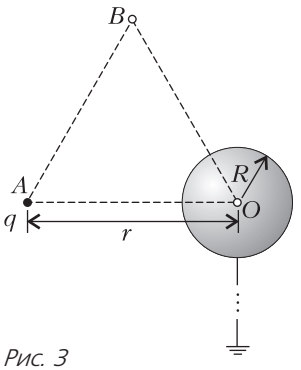


Рис. 3

Ф2560. Имеется бесконечная сетка, сделанная из проволоки постоянного сечения,

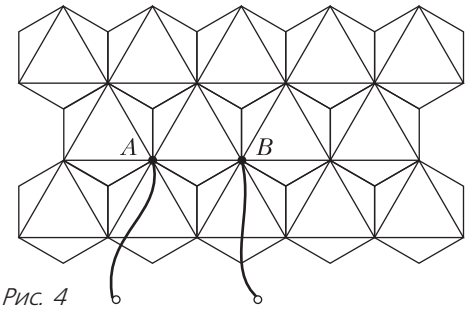


Рис. 4

показанная на рисунке 4. Длина отрезка AB равна a. Сопротивление единицы длины проводника равно ρ. Найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B.

А.Бычков

Решения задач М2538–М2541, Ф2545–Ф2548

М2538. *Петя расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася расставляет 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать?*

Ответ. Больше способов у Васи.

Идея решения – сопоставить каждой Петиной расстановке некоторую Васину расстановку так, чтобы разным расстановкам были сопоставлены разные, а кроме того, указать Васину расстановку, не сопоставленную никакой Петиной расстановке.

Приведем два способа сделать нужное сопоставление.

Первый способ. Совместим Петину доску с левой половиной Васиной доски. Рассмотрим любую расстановку Пети. Оставим всех королей, стоящих на белых полях, на месте, а всех королей, стоящих на черных полях, отразим относительно вертикальной оси симметрии Васиной доски (рис.1). В итоге получим какую-то расста-

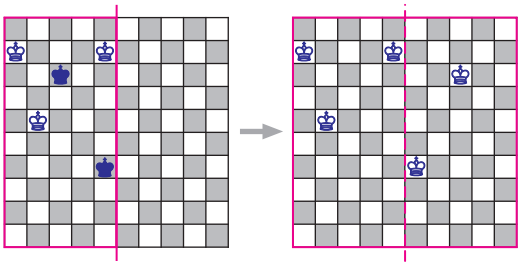


Рис. 1

новку 500 королей на белых клетках доски 100×100. По этой расстановке легко восстановить исходную расстановку на доске 100×50, «перегибая» доску. Покажем, что после отражения короли на доске 100×100 не бьют друг друга. Действительно, короли на одной половине доски не будут бить друг друга, потому что не били до отражения. А из разных половин друг друга может бить только пара королей, стоящих в двух клетках, имеющих общую вершину на оси симметрии. Но тогда эти короли находились в соседних по стороне клетках до отражения – противоречие.

Далее, расставим 500 королей на доске 100×100 в белые клетки 1-го, 3-го, 5-го, 7-го, 9-го столбцов слева, а также в белые клетки 1-го, 3-го, 5-го, 7-го, 9-го столбцов справа. После перегиба доски короли займут весь первый столбец, значит, описанная выше Васина расстановка не сопоставлена ни одной Петиной.

Второй способ. Разобьем каждую горизонталь Васиной доски на доминошки 1×2. Пусть Вася дублирует Петину расстановку на своей «доске» 100×50 из доминошек, а затем поместит каждого короля, стоящего в доминошке, в белую клетку этой доминошки (рис. 2). Очевидно, из разных Петиных расстановок получаются разные Васины. Покажем, что после указанной процедуры короли на доске 100×100 не бьют друг друга. Если, напротив, какие-то два короля будут бить друг друга, то они будут находиться в соседних по стороне или по вершине доминошках, поэтому соответствующие короли били друг друга и в исходной Петиной расстановке – противоречие.

Легко видеть, что Васина расстановка королей из первого способа опять-таки не сопоставлена ни одной Петиной расстановке.

Е.Бакаев

М2539. *а) Докажите, что любое число вида $3k-2$, где k – целое, может быть представлено в виде суммы одного квадрата и двух кубов целых чисел.*

б) Докажите, что любое целое число может быть представлено в виде суммы одного квадрата и трех кубов целых чисел.

а) Достаточно заметить, что

$$k^3-(k+3)^3+(3k+5)^2=3k-2.$$

(Подобрать это разложение можно, рассматривая разности между кубами близких чисел. В данном случае нам пригодилась разность кубов чисел, отстоящих на 3.)

б) Пусть нам нужно представить целое число N в виде суммы трех точных кубов и одного точного квадрата. Вычтем из числа N число t^3, равное 0, 1 или -1, чтобы разность $N-t^3$ имела вид $3k-2$. Теперь достаточно к этой разности применить пункт а).

Н.Седракян

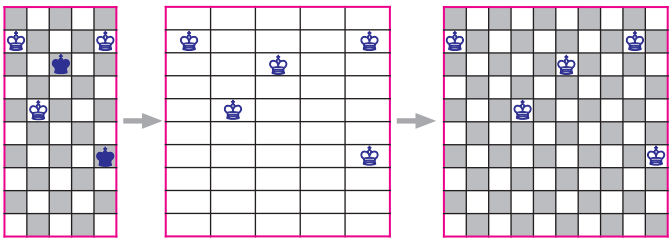


Рис. 2

М2540. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a, BH_b, CH_c. Пусть*

H_{ab} – проекция точки H_a на прямую AC (рис.1). Аналогично определим точки H_{ac}, H_{ba}, H_{bc}, H_{ca}, H_{cb}. Докажите, что

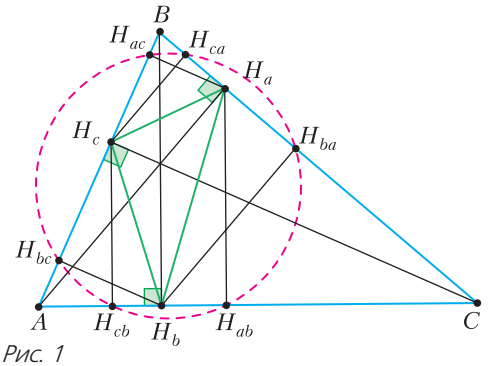


Рис. 1

шесть точек H_{ab}, H_{ac}, H_{ba}, H_{bc}, H_{ca}, H_{cb} лежат на одной окружности, центр которой совпадает с центром масс треугольного контура $H_aH_bH_c$, сделанного из однородной проволоки.

В решении мы многократно будем пользоваться следующим свойством ортотреугольника: $\angle H_cH_aB = \angle H_bH_aC = \angle BAC$ и аналогичными равенствами углов. Отсюда, в частности, следует, что высота H_aA является биссектрисой угла в ортотреугольнике $H_aH_bH_c$.

Пусть X, Y, Z – середины отрезков H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b соответственно (рис.2).

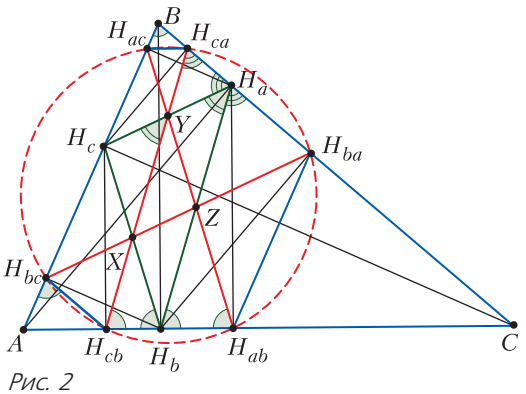


Рис. 2

Имеем (из подобных треугольников BH_aH_c и BAC с проведенными в них высотами): $\angle BH_{ac}H_{ca} = \angle BH_aH_c = \angle BAC$. Отсюда следует, что $H_{ac}H_{ca} \parallel AC$. Аналогично, $H_{cb}H_{bc} \parallel CB$ и $H_{ba}H_{ab} \parallel BA$.

Из прямоугольного треугольника $H_cH_{ca}H_a$ видим, что треугольник H_aYH_{ca} равнобедренный и $\angle H_{ca}YH_c = 2\angle BH_aH_c$. Далее,

$$\angle H_cYX = \angle H_cH_aH_b = 180° - \angle BH_aH_c - \angle CH_aH_b = 180° - 2\angle BH_aH_c.$$

Получаем, что $\angle H_{ca}YH_c + \angle H_cYX = 180°$, следовательно, точка Y лежит на отрезке $H_{ca}H_{cb}$. Аналогично получаем, что стороны треугольника XYZ лежат на отрезках $H_{ca}H_{cb}$, $H_{ab}H_{ac}$, $H_{bc}H_{ba}$. В частности,

$$H_{ca}H_{cb} \parallel H_aH_b, \quad H_{ab}H_{ac} \parallel H_bH_c,$$

$$H_{bc}H_{ba} \parallel H_cH_a.$$

Так как

$$\angle H_{ca}H_{cb}C = \angle H_aH_bC = \angle H_cH_bA = \angle H_{ac}H_{ab}A,$$

то $H_{ac}H_{ca}H_{ab}H_{cb}$ – равнобокая трапеция, она вписана в некоторую окружность ω. Далее, так как

$$\angle H_{ca}H_{cb}C = \angle ABC = \angle AH_{bc}H_{cb},$$

то четырехугольник $H_{ca}H_{cb}H_{bc}H_{ac}$ вписанный, т.е. точка H_{bc} также лежит на окружности ω. Аналогично, и точка H_{ba} лежит на ω.

Далее построим центр масс U для треугольного контура $H_aH_bH_c$. Как известно, центр масс треугольного контура Δ (сделанного из однородной проволоки) совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника с вершинами в серединах сторон Δ (см., например, статью И.Даценко, Ю.Минаева, О.Орлянского «Нахождение центра масс проволочного треугольника» в «Кванте» №1 за 2018 г.). Поскольку YU – биссектриса угла XYZ, а $XY \parallel H_aH_b$, $ZY \parallel H_cH_b$, то $UY \parallel H_bB$, или $UY \perp AC$. Прямая UY тогда является средней линией прямоугольной трапеции $H_{cb}H_cH_aH_{ab}$ и серединным перпендикуляром к хорде $H_{ab}H_{cb}$ окружности ω. Аналогично, U лежит на серединных перпендикулярах к хордам $H_{bc}H_{ba}$ и $H_{ca}H_{ba}$ окружности ω. Значит, U является центром ω. Задача решена.

Замечания. Задача имеет следующее «аффинное» обобщение. Пусть в треугольни-

ке ABC на прямых BC, CA, AB взяты точки K_a, K_b, K_c соответственно так, что прямые AK_a, BK_b, CK_c пересекаются в одной точке. Определим точку K_{ab} как точку пересечения прямой AC и прямой, параллельной BK_b, проходящей через точку K_a. Аналогичным образом определим K_{ac}, K_{ba}, K_{bc}, K_{ca}, K_{cb}. Тогда шесть точек K_{ab}, K_{ac}, K_{ba}, K_{bc}, K_{ca}, K_{cb} лежат на одной конике. В случае, когда точки K_a, K_b, K_c лежат на сторонах BC, CA, AB (а не на их продолжениях), конструкция аффинным преобразованием может быть сведена к условию данной задачи М2540.

Отметим еще несколько свойств данной конструкции (читатель может попробовать вывести их самостоятельно):

1) $H_{ca}H_{cb} = H_{ab}H_{ac} = H_{bc}H_{ba}$ (фактически, мы видели это при доказательстве);

2) треугольники $H_{ab}H_{bc}H_{ca}$ и $H_{ac}H_{ba}H_{cb}$ равны между собой и подобны треугольнику ABC;

3) U является центром симметрии, переводящей треугольник $H_aH_bH_c$ в треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников AH_bH_c, H_aBH_c, H_aH_bC;

4) U является серединой отрезка, соединяющего O (центр описанной окружности треугольника ABC) и ортоцентр треугольника $H_aH_bH_c$.

Окружность ω, существование которой доказано нами, известна как *окружность Тэйлора*. Это одна из окружностей, принадлежащих семейству так называемых *окружностей Таккера*, которые можно определить, например, таким образом. Рассмотрим треугольники $XYZ \backsim ABC$ такие, что X лежит на прямой AB, Y – на BC, а Z – на CA. Окружности Таккера – описанные окружности таких треугольников XYZ. Другие описания и интересные свойства окружностей Таккера можно найти, например, в книге: R.Honsberger «Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry».

И.Вайнштейн

М2541*. *Плоскость разбита на выпуклые семиугольники единичного диаметра. Докажите, что любой круг радиуса 200 пересекает не менее миллиарда из этих семиугольников. (Диаметр многоугольника – это максимум среди расстояний между парами его вершин.)*

Обозначим через O центр данного круга, и пусть K_R – это круг радиуса R с центром в O. Пусть C – множество углов всех данных семиугольников, а $C_R \subset C$ – подмножество тех углов, у которых вершина принадлежит кругу K_R. Для решения задачи достаточно доказать, что $|C_{200}| \geq 7 \cdot 10^9$ (как обычно, $|X|$ обозначает количество элементов в множестве X). В самом деле, тогда количество семиугольников, пересекающихся с кругом K_{200}, не менее $|C_{200}|/7 \geq 10^9$.

Покажем, что среднее значение угла из множества C_R не превосходит $2\pi/3$. Действительно, в «тройной развилке» среднее значение угла равно $2\pi/3$ (рис.1), а в более чем тройной развилке оно еще меньше. Если же вершина лежит на стороне

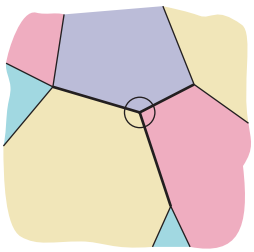


Рис. 1

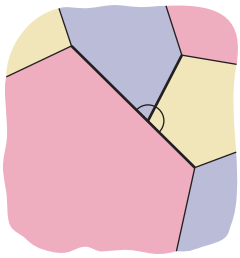


Рис. 2

некоторого семиугольника (рис.2), то среднее значение угла в такой вершине не больше $\pi/2$.

С другой стороны, рассмотрим множество углов T_R всех семиугольников, имеющих непустое пересечение с кругом K_R. Поскольку диаметр каждого семиугольника не превосходит 1, $T_R \subset C_{R+1}$. Для каждого многоугольника среднее значение угла при вершине равно $5\pi/7$, поэтому среднее значение угла в множестве T_R также равно $5\pi/7$.

Пусть $k = |C_R|$, $m = |T_R|$, так что $|T_R \setminus C_R| = m - k$. С учетом того, что каждый угол из множества $T_R \setminus C_R$ меньше π (это верно для любого угла выпуклого многоугольника), баланс средних дает $(m-k)\cdot\pi + k\cdot 2\pi/3 > m\cdot 5\pi/7$. Отсюда

$m > 7k/6$. Следовательно,

$$|C_{R+1}| > \frac{7}{6}|C_R|. \qquad (*)$$

Поскольку

$$\left(\frac{7}{6}\right)^6 = \left(1+\frac{1}{6}\right)^6 > 2 \text{ и } 2^{10} > 10^3,$$

из оценки $(*)$ последовательно выводим:

$$|C_{R+6}| > \left(\frac{7}{6}\right)^6 |C_R| > 2|C_R|,$$

$$|C_{R+60}| > 2^{10}|C_R| > 10^3|C_R|.$$

Так как $|C_2| \geq 1$, имеем

$$|C_{200}| = |C_{2+6+6+6+60+60+60}| >$$

$$> 2\cdot 2\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10^3\cdot 10^3 > 7\cdot 10^9.$$

Задача решена.

Из приведенных оценок видно, что $n = 7$ – в некотором смысле критическое количество вершин: при разрезании плоскости на не менее чем n-угольники ограниченного диаметра функция $f(R) = |C_R|$ растет экспоненциально. Шестиугольные соты – пример, показывающий, что при $n = 6$ функция $|C_R|$ может расти гораздо медленнее (рост квадратичной функции).

В заключение упомянем идейно близкий к нашей задаче известный факт: плоскость нельзя разрезать на выпуклые семиугольники, если их диаметр (или периметр) ограничен сверху, а площадь ограничена снизу.

А.Канель-Белов

Ф2545. *Два сплошных шарика разных размеров из одного химически чистого вещества находятся в космосе вдали от других массивных тел и взаимодействуют друг с другом только гравитационным способом. Они вращаются вокруг общего центра масс, делая один оборот за время одного урока T = 45 мин. Какой может быть минимальная плотность материала, из которого сделаны шарики? Какому металлу такая плотность соответствует?*

Пусть r_1 и r_2 – расстояния от центров шариков до оси вращения, m_1 и m_2 – их массы, ω – величина угловой скорости вращения системы. Так как центры шариков равномерно движутся по окружностям вокруг общей оси, то уравнения их движения в проекции на линию, соединяющую центры, имеют вид

$$m_1 r_1 \omega^2 = G\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2}, \quad m_2 r_2 \omega^2 = G\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2}.$$

При этом

$$m_1 r_1 = m_2 r_2.$$

Отсюда находим

$$\omega^2 = G\frac{m_1+m_2}{(r_1+r_2)^3}.$$

Пусть R_1 и R_2 – радиусы каждого из шариков. Тогда

$$m_1 = \rho V_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3, \quad m_2 = \rho V_2 = \frac{4}{3}\pi\rho R_2^3$$

и величину угловой скорости вращения можно оценить как

$$\omega^2 = \frac{4}{3}\pi\rho G\frac{R_1^3+R_2^3}{(r_1+r_2)^3} \leq$$

$$\leq \frac{4}{3}\pi\rho G\frac{R_1^3+R_2^3}{(R_1+R_2)^3} \leq \frac{4}{3}\pi\rho G.$$

В условии задан период T обращения шариков вокруг общего центра масс. Ему соответствует угловая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \leq \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}.$$

Самая большая (возможная) угловая скорость будет в том случае, когда один шарик имеет размер, значительно меньший, чем размер другого шарика, и шарики движутся, почти касаясь друг друга. При этом плотность материала шариков не может быть меньше величины

$$\rho_{\min} = \frac{3\pi}{GT^2} \approx 19300 \text{ кг/м}^3.$$

Этой плотности соответствует золото.

А.Буров, Е.Шалимова

Ф2546. *Имеется «четверть бесконечная» решетка с квадратными ячейками, состоящая из одинаковых резисторов сопротивлением r, как показано на рисунке 1. Известно, что если в узел A втекает, а из узла B вытекает ток I, то*

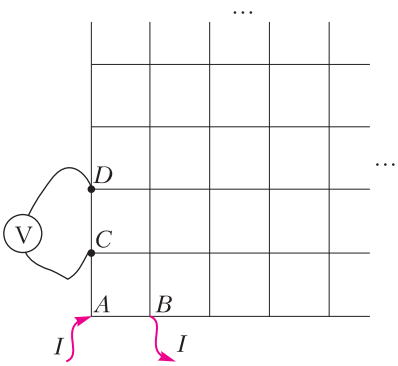


Рис. 1

идеальный вольтметр, подключенный к узлам C и D, показывает напряжение U. Определите по этим данным сопротивление R_{AB} данной решетки.

Рассмотрим два подключения имеющейся решетки, при которых наблюдаются симметричные распределения токов относительно диагонали (пунктирная линия на рисунках 2 и 3).

Сначала создадим такие потенциалы в системе, что в угловую точку втекает ток I, а из двух соседних узлов вытекают токи $\frac{I}{2}$

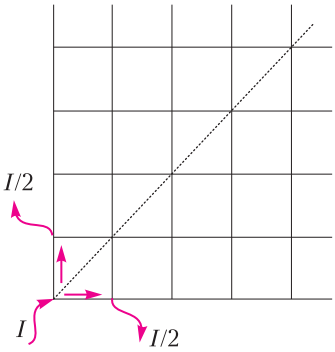


Рис. 2

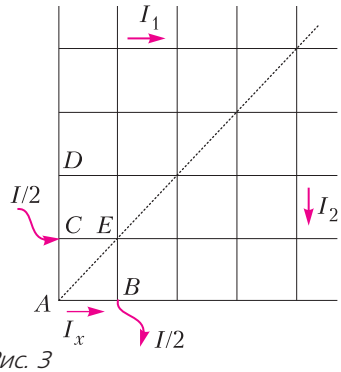


Рис. 3

(см. рис.2). Очевидно, что в этом случае по двум ближайшим резисторам сетки будут течь токи $\frac{I}{2}$, а во всех остальных проводниках токи не текут. Теперь создаем такие потенциалы, чтобы в один узел, ближайший к угловой точке, втекал ток $\frac{I}{2}$, а из другого вытекал такой же ток (см. рис.3). Тогда легко заметить, что в симметричных относительно диагонали проводниках текут одинаковые токи. Например, на рисунке 3 изображены два таких тока I_1 и I_2, которые равны друг другу по модулю.

Но наша задача является ничем иным, как наложением этих двух картин. Сила тока на каждом участке исходной схемы находится как суперпозиция токов на этих участках в каждой упрощенной схеме. Также из приведенных рассуждений следует, что узлы, которые лежат на диагонали, можно разрывать вдоль нее.

Найдем ток I_x (см. рис.3), протекающий через AB. Так как узел E можно разорвать вдоль диагонали, то $I_{CAB} = I_{CEB} = I_x$. Из принципа суперпозиции следует, что токи через CD в исходной схеме и в схеме, изображенной на рисунке 3, равны (так как в исходной схеме ток через CD не течет). Значит,

$$\frac{I}{2} = 2I_x + \frac{U}{r}, \text{ или } I_x = \frac{I}{4} - \frac{U}{2r}.$$

Тогда из принципа суперпозиции следует, что ток через резистор AB в исходной схеме равен

$$I_{AB} = I_x + \frac{I}{2} = \frac{3I}{4} - \frac{U}{2r}.$$

Следовательно, общее напряжение между узлами A и B равно

$$U_{AB} = I_{AB}r = \frac{3I}{4}r - \frac{U}{2}.$$

Тогда окончательно получаем

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{3}{4}r - \frac{U}{2I}.$$

А.Бычков

Ф2547. *Профессор Электра Шар проводит эксперименты с проводящими шариками. В ходе каждого эксперимента она*

медленно сближает три уединенных шарика радиусом R каждый так, что в конечном состоянии центры этих шариков находятся в вершинах правильного треугольника со стороной 3R, и записывает в лабораторный журнал значение работы, которая была ею совершена. При этом шарики в начальном состоянии могут быть как заряженными, так и незаряженными. В случаях, показанных на рисунках 1 а, б, она записала значения

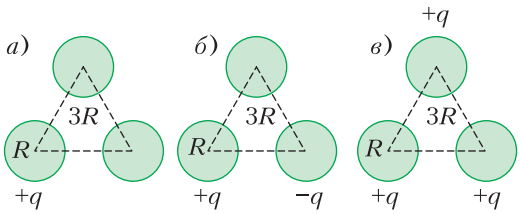


Рис. 1

работ A_1 и A_2 соответственно. Найдите: 1) потенциал заряженного шарика в случае а; 2) потенциалы всех шариков в случае б; 3) значение работы в случае в.

1) Рассмотрим случай *а*. Полная энергия системы проводников в начальном состоянии равна

$$W_0 = \frac{1}{2}qk\frac{q}{R} = \frac{1}{2}k\frac{q^2}{R}.$$

Пусть φ_1 – потенциал заряженного шарика после сближения. Из симметрии (поворот на 180° относительно OO' (рис.2)) следует, что потенциалы двух других шариков одинаковы, обозначим их φ_2. Тогда конечная энергия системы равна

$$W_1 = \frac{1}{2}(q\varphi_1 + 0\cdot\varphi_2 + 0\cdot\varphi_2) = \frac{1}{2}q\varphi_1.$$

Из закона сохранения энергии получаем

$$W_0 + A_1 = W_1, \text{ или } \varphi_1 = k\frac{q}{R} + \frac{2A_1}{q}.$$

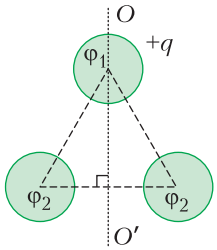


Рис. 2

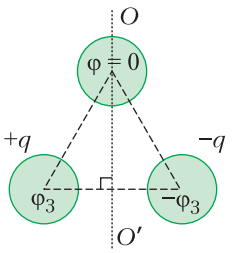


Рис. 3

2) Рассмотрим случай *б*. Полная энергия системы проводников в начальном состоянии равна

$$W_0 = \frac{1}{2}\left(qk\frac{q}{R} + (-q)\left(-k\frac{q}{R}\right)\right) = k\frac{q^2}{R}.$$

Из симметрии следует, что плоскость OO' (рис. 3)) является эквипотенциальной: $\varphi = 0$. Значит, потенциал незаряженного шарика равен нулю. Пусть φ_3 – потенциал положительно заряженного шарика после сближения, тогда $-\varphi_3$ – потенциал отрицательно заряженного шарика. Конечная энергия системы равна

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(q\varphi_3 + (-q)(-\varphi_3)\right) = q\varphi_3.$$

Из закона сохранения энергии получаем

$$W_0 + A_2 = W_1, \text{ или } \varphi_3 = k\frac{q}{R} + \frac{A_2}{q}.$$

3) В случае *в* задача является наложением трех распределений (каждое из которых дает нулевое поле в проводящих шариках, а значит, по теореме единственности других распределений быть не может) из случая *а* (рис.4). Тогда по принципу суперпозиции в случае *в* у шариков потенциалы равны $\varphi_1 + 2\varphi_2$. Найдем потенциал φ_2. Заметим, что случай *б* является наложением двух распределений (каждое из которых дает нулевое поле в проводящих шариках, а значит, по теореме единственности других распределений быть не может) из случая *а* (рис.5). Сле-

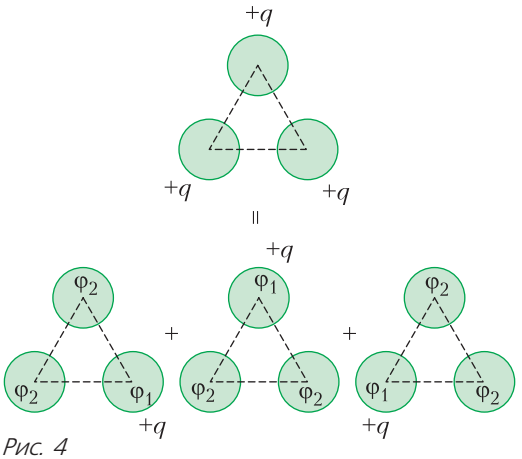


Рис. 4

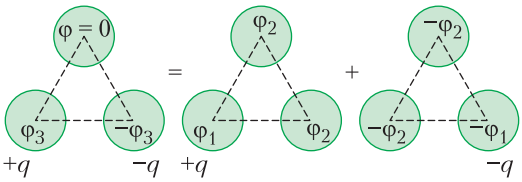


Рис. 5

довательно,

$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$, или

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_3 = k\frac{q}{R} + \frac{2A_1}{q} - \left(k\frac{q}{R} + \frac{A_2}{q}\right) = \frac{2A_1 - A_2}{q}.$$

Полная энергия системы проводников в начальном состоянии равна

$$W_0 = \frac{1}{2}\cdot 3qk\frac{q}{R} = \frac{3}{2}k\frac{q^2}{R}.$$

Конечная энергия системы равна

$$W_1 = \frac{1}{2}\cdot 3\left(q\left(\varphi_1 + 2\varphi_2\right)\right) = \frac{3}{2}q\left(k\frac{q}{R} + \frac{2A_1}{q} + 2\frac{2A_1 - A_2}{q}\right) = \frac{3}{2}q\left(k\frac{q}{R} + \frac{6A_1 - 2A_2}{q}\right).$$

Из закона сохранения энергии получаем $W_0 + A_3 = W_1$, или

$$A_3 = \frac{3}{2}q\left(k\frac{q}{R} + \frac{6A_1 - 2A_2}{q}\right) - \frac{3}{2}k\frac{q^2}{R} = 9A_1 - 3A_2.$$

А.Бычков

(Продолжение см. на с. 24)

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

О длине траектории баллистического движения

Ф.ГРИГОРЬЕВ

После того, как Галилей установил, что траектория баллистического движения вблизи поверхности Земли без учета сопротивления воздуха является параболой, естественно встал вопрос, как найти длину траектории этого движения. С практической точки зрения знать длину траектории полета полезно, например, в случае ее визуализации – в фейерверках, оставляющих след, при показательных выступлениях летательных аппаратов и т.д., так как при фиксированном расходе активного вещества яркость следа зависит от длины траектории.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190303

Также по длине траектории можно выполнить приблизительный расчет работы силы сопротивления движению летящего тела.

Выражение для длины траектории параболического движения можно найти, например, в интернете (см. http://sch1561uz.mskobr.ru/files/didactika2.pdf). Здесь же кратко воспроизведем этот результат.

Чтобы вычислить длину траектории, разобьем ее на малые участки, каждый из которых можно считать прямым. Длина малого участка равна

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,dt.$$

Тогда искомая длина будет равна

$$L = \int_0^T \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,dt = \int_0^T \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}\,dt,$$

где $T = 2v_0\sin\alpha/g$ – время полета. Заменами $a = v_0\cos\alpha$ и $x = v_0\sin\alpha - gt$ интеграл можно свести к табличному:

$$\int\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right).$$

После взятия нашего интеграла получаем

$$\int\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,dt=-\frac{1}{g}\times$$
$$\times\left(\frac{v_0\sin\alpha-gt}{2}\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2+(v_0\sin\alpha-gt)^2}+\right.$$
$$+\frac{(v_0\cos\alpha)^2}{2}\ln\left(v_0\sin\alpha-gt+\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2+(v_0\sin\alpha-gt)^2}\right)\right).$$

Подставив верхний и нижний пределы интегрирования и упростив, находим искомую длину траектории:

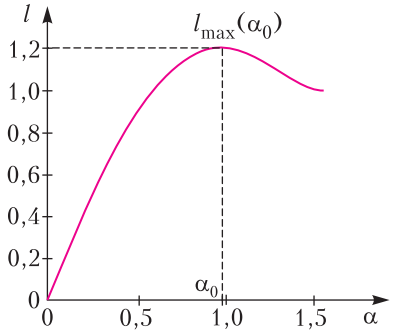
$$L=\frac{v_0^2}{2g}\left(2\sin\alpha+\cos^2\alpha\cdot\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right).$$

Интересно определить, при каком угле броска α_0 при фиксированной скорости v_0 длина траектории максимальна, чему она равна и во сколько раз больше максимальной дальности броска. Возьмем производную от L по α, приравняем ее к нулю и получим уравнение для α_0:

$$2=\sin\alpha_0\cdot\ln\frac{1+\sin\alpha_0}{1-\sin\alpha_0}.$$

Выразив отсюда множитель, содержащий логарифм, и подставив в уравнение для L, получим простое выражение для максимальной длины траектории тела:

$$L_{\max}=\frac{v_0^2}{g\sin\alpha_0}.$$



Зависимость безразмерной длины траектории l от угла броска α (рад)

Уравнение для угла α_0 не имеет аналитического решения. Построим график зависимости безразмерной длины траектории $l=L/L_г$ от угла броска α в пределах от 0 до $\pi/2$ (см. рисунок). Из графика видно, что величина угла α_0, соответствующего $l_{\max}$, близка к 1 рад $\approx 57{,}3°$. Численное решение уравнения дает $\alpha_0\approx 0{,}985$ рад $\approx 56{,}4°$. Максимальная дальность броска по горизонтали достигается при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и равна $L_г=\frac{v_0^2}{g}$. Тогда $L_{\max}\approx 1{,}2L_г$. Так как $\alpha_0>\pi/4$, траектория, имеющая максимальную длину, идет несколько круче траектории, которой отвечает максимальная дальность броска. Максимальная высота, достигаемая при α_0, меньше дальности броска при том же угле.

(Начало см. на с. 16)

Ф2548. *В простейшем «театральном» бинокле расстояние между окуляром и объективом равно 10 см, и оно не регулируется. Бинокль обеспечивает увеличение ×2 при рассматривании далеких предметов. Каковы оптические силы (или фокусные расстояния) объектива и окуляра?*

«Театральный» бинокль представляет собой трубу Галилея, поскольку наблюдатель видит через такой бинокль сцену и актеров, расположенными «правильно», т.е. головами вверх, а ногами вниз. Фокусы рассеивающих линз, т.е. окуляров, располагающиеся с той же стороны, что и глаза зрителей, совпадают с фокусами собирающих линз, т.е. объективов, располагающихся по эту же сторону бинокля. Поскольку коэффициент увеличения равен 2, рассеивающая линза находится от собирающей на расстоянии, равном половине фокусного расстояния собирающей линзы. Расстояние между линзами задано – это 10 см. Поэтому оптическая сила объектива равна +5 дптр, а оптическая сила окуляра равна −10 дптр. Эти оптические силы соответствуют таким фокусным расстояниям линз: 20 см для объектива и 10 см для окуляра.

Д.Александров

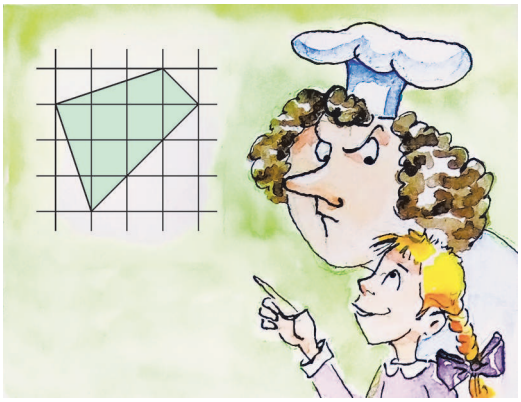
Задачи

1. Саша выписала числа от одного до ста, а Миша часть из них стер. Среди оставшихся у 20 чисел есть в записи единица, у 19 чисел есть в записи двойка, а у 30 чисел нет ни единицы, ни двойки. Сколько чисел стер Миша?

А.Шаповалов

2. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре одинаковые части.

М.Волчкевич

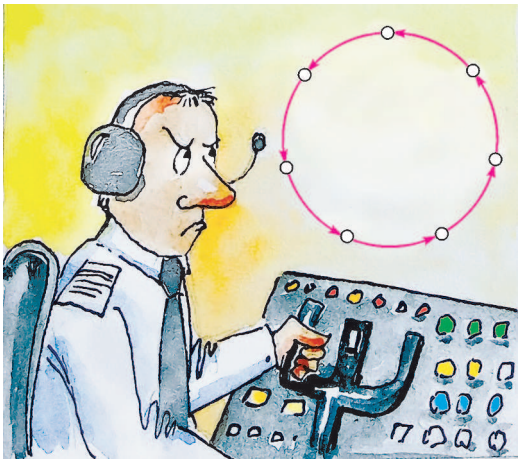


3. Сеня не умеет писать некоторые буквы и всегда в них ошибается. В

слове ТЕТРАЭДР он сделал бы пять ошибок, в слове ДОДЕКАЭДР — шесть, в слове ИКОСАЭДР — семь. А сколько ошибок он сделает в слове ОКТАЭДР?

Е.Бакаев

4. Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рисунок). Назначьте (нарисуйте стрелочками) еще несколько одно-



сторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было добраться, совершив не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше.

В.Клепцын

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6—8 классов.

Эти задачи предлагались на XXX Математическом празднике.

Левая, правая – где сторона?

С.ДВОРЯНИНОВ

Жил в XIX веке русский поэт Василий Иванович Сиротин. Большая часть его творчества безвозвратно утрачена. Самое известное его стихотворение, дошедшее до наших дней, называется «Улица». Опубликовано оно было в 1859 году. Вот его первые строки:

Раз возвращаюсь домой я к себе,
Улица странною кажется мне.
Левая, правая где сторона?
Улица, улица, ты, брат, пьяна.

А теперь объясню, почему я это вспомнил.

Еду по Сокольнической линии московского метро домой. Выходить мне на станции Лубянка. Над выходом из вагона – схема с указанием станций этой линии (рис.1). Хорошо, очень удобно.

Рис. 1

На другой день то же самое. Вечер, метро, подъезжаю к Лубянке. Стою у двери, приготовился выходить. Над дверью привычные названия, но теперь на схеме станции указаны почему-то в другом порядке (рис.2). Оглянулся, посмотрел назад. Над противоположной дверью схема, как на рисунке 1. Здесь названия станций – словно отражение в зеркале рисунка 2. Но тут поезд остановился, двери распахнулись, и я вышел на платформу.

А теперь – вопросы. Почему на разных схемах в одном вагоне названия станций

Рис. 2

идут в разном порядке? С какой стороны к Лубянке подходил мой поезд в случае рисунка 1? Какая станция была предыдущей: Чистые Пруды или Охотный ряд? А в случае рисунка 2?

Советуем читателям сейчас прервать чтение, включить пространственное воображение и подумать над этими вопросами. На всякий случай напомним, что если на вагоне пассажирского поезда висит табличка «Москва–Самара», то этот поезд идет из Москвы в Самару. А на обратном пути на том же вагоне будет другая табличка «Самара–Москва». Да, еще. На Сокольнической линии движение поездов метро правостороннее. На каждой станции выход на платформу слева (с учетом направления движения поезда).

А мы продолжаем наш рассказ. Размышляя о сказанном, следует учитывать психологию пассажира, находящегося в вагоне метро. Пассажир этот хочет, конечно, как можно скорее добраться до нужной станции. Он время от времени посматривает на схему движения, мысленно отмечая на ней свое передвижение. Естественно, станции следует перечислять слева направо – так мы читаем и пишем. Схема А – Б – В означает, что станцию А проехали, подъезжаем к Б, потом будет В. При этом приятнее, если на схеме

направление расположения станций согласовано с их расположением на пути поезда. При этом пассажир смотрит и на дверь – не будут ли ему мешать выйти другие люди в вагоне или же ему следует стать к двери поближе. Значит, нужная ему схема должна располагаться над дверью, через которую пассажиру выходить.

Теперь становится понятно, почему внутри одного и того же вагона мы видим две разные схемы одной и той же линии метро. Обе схемы соответствуют реальному расположению станций вдоль линии метро. Когда мы переводим взор с одной схемы на другую, то поворачиваемся на 180°. Рисунок 1 соответствует случаю когда поезд подходит к Лубянке от Чистых прудов, а рисунок 2 – когда со стороны Охотного Ряда.

В новых поездах метро вместо бумажных схем появились электронные, на которых движение поезда отображают бегущие огоньки. Они дают повод вспомнить другие строки того же стихотворения «Улица»:

И фонари так неясно горят,
Смирно на месте никак не стоят.
Так и мелькают туда и сюда...

Предположим, что вам надо выйти из вагона на станции Баррикадная через дверь, показанную на рисунке 3. Глядя на схему, скажите: куда при этом движется поезд – влево или вправо? Ответить на этот вопрос нельзя! Электронные табло в вагоне метро (возможно, из экономии изготовления) только одного типа, огоньки на них бегут справа налево. Такие табло расположены на обеих сторонах вагона. При этом направление движения огоньков совпадает с направлением движения поезда только на одной стороне вагона. В случае их несовпадения у человека возникает состояние, называемое когнитивным диссонансом. Явление резонанса вам известно, диссонанс, можно сказать, – ему противоположное. Диссонанс в музыке – это нарушение гармонии, неправильное сочетание тонов, которое производит неприятное впечатление на слушателей. Вообще, диссонанс – это то, что вносит разлад во что-либо, вступает в противоречие с чем-нибудь.

Мы надеемся, что наши читатели – будущие инженеры и конструкторы – будут в своей работе учитывать все обстоятельства, и всё, что они создадут, ни к каким диссонансам приводить не будет.

Рис. 3

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

25. Можно ли расставить по окружности числа 1, 2, 3, …, 100 так, чтобы любые два соседних числа различались не более чем на 2?

П.Кожевников

26. Дан треугольник ABC. Верно ли, что на его сторонах обязательно найдутся четыре точки, являющиеся вершинами равнобокой трапеции, основания которой параллельны AB?

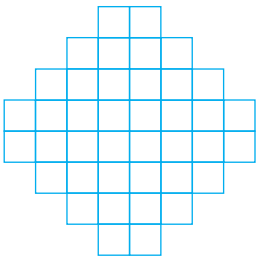
С.Дворянинов

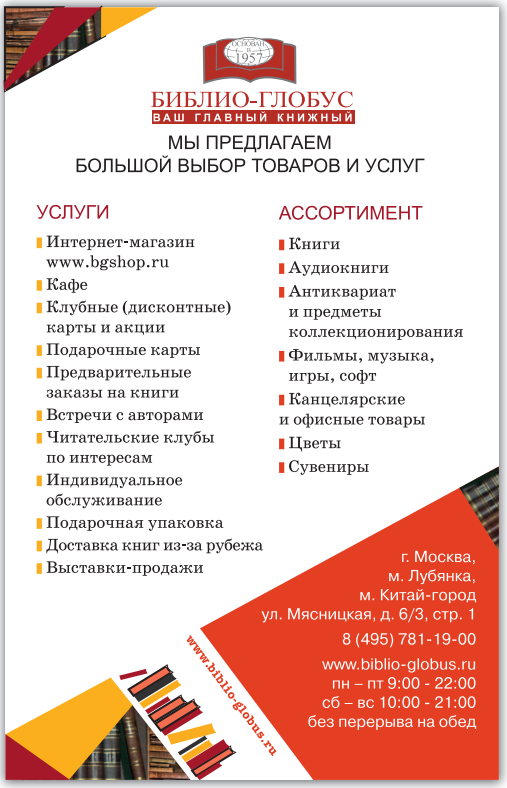
27. По кругу выкладывают 30 одинаковых на вид таблеток, из них 20 хороших и 10 плохих. Два мудреца по очереди берут по одной таблетке. Первый мудрец будет знать, где лежат плохие таблетки, а второй – нет, но они хотят до выкладывания таблеток договориться, как после каждого хода первого второй найдет хорошую таблетку. После 20 ходов на столе должны остаться 10 плохих таблеток. Предложите алгоритм действий для мудрецов. (Беря таблетки, мудрецы не общаются и не подают никаких знаков. Каждый видит, какую таблетку взял партнер.)

А.Ковальджи

28. Дана клетчатая доска в форме квадрата $2n \times 2n$ с вырезанными угловыми «лесенками» высоты $n - 1$ (пример для $n = 4$ приведен на рисунке). Петя расставляет на этой доске несколько кораблей в форме прямоугольников, у которых одна из сторон равна 1. Никакие два корабля не могут иметь общих точек (даже вершин). Какое наибольшее количество клеток может покрывать такой «флот»?

П.Кожевников





Еще раз о полуправильных многогранниках

С.КУЗНЕЦОВ

В «КАЛЕЙДОСКОПЕ «КВАНТА» В №11 ЗА 2018 год мы рассказывали о полуправильных многогранниках, т.е. выпуклых многогранниках, грани которых суть правильные многоугольники и все вершины устроены одинаковым образом. Была приведена полная классификация таких многогранников: две бесконечные серии – призмы и антипризмы, пять правильных многогранников (платоновых тел: икосаэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр) и еще 14 многогранников, традиционно называемых архимедовыми. Полуправильный многогранник определяется *типом вершины*: информацией, какие многоугольники сходятся к ней и в каком порядке. Например, $(3,4,4)$, т.е. «треугольник–квадрат–квадрат» – это треугольная призма. При этом одному из типов вершин, а именно $(3,4,4,4)$, отвечают сразу два многогранника: ромбокубооктаэдр и псевдоромбокубооктаэдр.

Псевдоромбокубооктаэдр стоит среди полуправильных многогранников особняком – и дело не только в том, что его открыли в XX веке, в то время как остальные были известны еще древним грекам. В отличие от других полуправильных, этот многогранник не обладает глобальной симметрией, или свойством транзитивности: хоть любые две его вершины и устроены одинаковым образом, не всегда их можно совместить движением, переводящим многогранник в себя. Из-за этого псевдоромбокубооктаэдр не всегда относят к архимедовым телам, и тогда последних остается 13.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190304

Наш постоянный читатель О.Лазутченко задал следующий интересный вопрос. Псевдоромбокубооктаэдр получается из обычного ромбокубооктаэдра поворотом «шапочки» (рис.1). Эта «шапочка» называется *n-скатным куполом*, где n – число сторон ее верхней грани. А что будет, если повернуть «шапочку» у другого полуправильного многогранника – ромбоикосододекаэдра (рис.2)? Результат немного разочаровывает: получившийся многогранник еще дальше от «правильности», чем полуправильные. У него по-прежнему к каждой вершине сходятся четыре правильных многоугольника – треугольник, два квадрата и пятиугольник, но в разном порядке. У некоторых вершин порядок остался $(3,4,5,4)$, а у других стал $(3,4,4,5)$. Однако почему бы не рассмотреть полуправильные многогранники *в слабом смысле*: потребовать, чтобы к каждой вер-

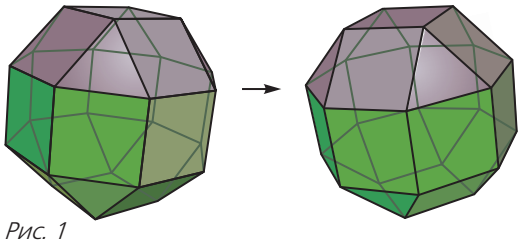


Рис. 1

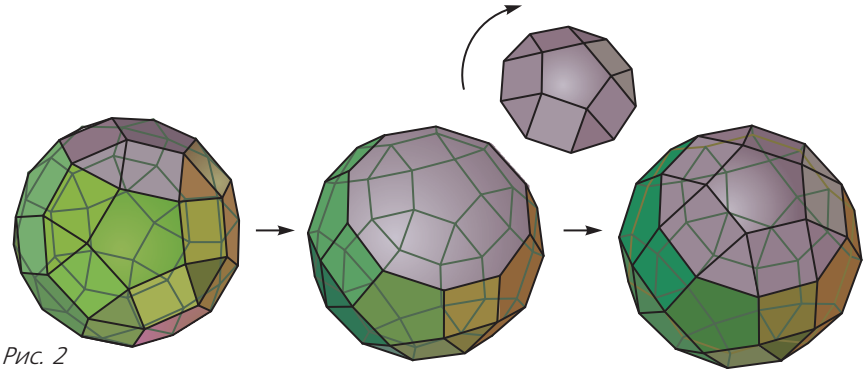


Рис. 2

шине сходился одинаковый набор многоугольников, но в произвольном порядке?

Давайте попробуем перечислить все многогранники, полуправильные в слабом смысле. Воодушевляет на такое исследование следующий более общий факт. Отбросим любые условия на вершины и потребуем только, чтобы у многогранника все грани были правильными многоугольниками – все равно, кроме призм и антипризм, получится конечное число разных многогранников! Такие многогранники называются *правильногранными*. Полная классификация правильногранных многогранников приведена в статье В.А.Залгаллера «Выпуклые многогранники с правильными гранями» (Записки научных семинаров ЛОМИ, №2, 1967, с.5–221). Статья Залгаллера доступна по адресу http://mi.mathnet.ru/znsl1408 – несмотря на ее большой объем и сложность, мы очень советуем читателю ознакомиться с ней.

Семейство правильногранных многогранников включает в себя пять платоновых тел, 13 архимедовых плюс псевдоромбокубооктаэдр, бесконечные серии призм и антипризм, а также еще 91 многогранник. Эти последние многогранники называются *джонсоновыми телами* по имени автора статьи, в которой они впервые все были перечислены: N.W.Johnson. Convex polyhedra with regular faces (Canadian Journal of Mathematics, vol.18, 1966, p.169–200, https://doi.org/10.4153/CJM-1966-021-8). Псевдоромбокубооктаэдр также относится к джонсоновым телам, если его не причислять к архимедовым; тогда джонсоновых тел становится 92. В своей работе Н.Джонсон приводит перечень всех джонсоновых тел, но не доказывает, что других не бывает (это сделал в упомянутой выше статье В.А.Залгаллер).

Нас интересуют полуправильные в слабом смысле многогранники, не являющиеся таковыми в сильном смысле. Ясно, что все они суть джонсоновы тела. Значит, нам достаточно перебрать все джонсоновы тела и отобрать среди них те, у которых в каждой вершине сходятся одни и те же многогранники. Особенно удобно делать это по статье Джонсона, где для каждого многогранника указаны типы его вершин, т.е. какие многоугольники и в каком количестве сходятся в каждую вершину.

Наш перебор дает 6 новых правильногранных многогранников, у которых в каждой вершине сходятся те же многоугольники, но в разном порядке. Интересно, что все они получаются из архимедовых многогранников с помощью операции «поворота шапочки», описанной в начале статьи. Перечислим эти шесть многогранников.

Во-первых, поворотом купола у ромбоикосододекаэдра, как предложил нам О.Лазутченко, можно получить целых четыре многогранника (у Джонсона они имеют номера 72–75). Многогранников получилось несколько, потому что можно повернуть не один, а два или даже три купола. Надобно только следить, чтобы эти купола не имели общих граней: при повороте купол «ломает» все смежные с ним купола. Если повернуть один купол, то получится *скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.3). Два купола можно повернуть двумя способами – либо один напротив другого, и тогда получится *дважды противоположно скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.4); либо два непротиволежащих, что дает *дважды косо скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.5). Наконец, три непересекающихся купола можно выбрать только одним способом; повернув их, получим *трижды скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.6). По Залгаллеру, скрученные версии ромбоикосододекаэдра обозначаются так: $\overline{M}_6 + M_{14} + M_6$ или $\overline{M}_6 + M_{13} + 2M_6$; $\overline{M}_6 + M_{14} + \overline{M}_6$; $2\overline{M}_6 + M_{13} + M_6$; $3\overline{M}_6 + M_{13}$.

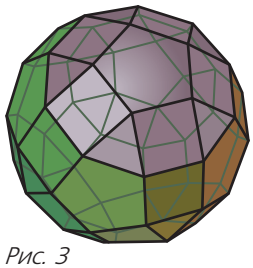


Рис. 3

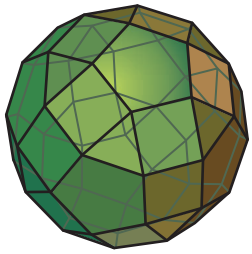


Рис. 4

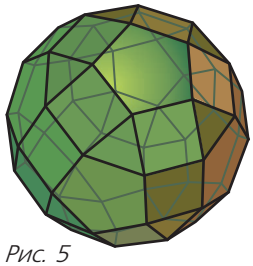


Рис. 5

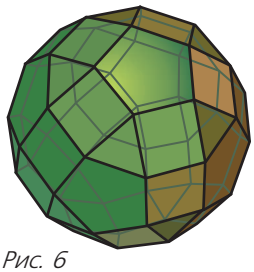


Рис. 6

(Через M_i Залгаллер обозначает *простые* правильногранные многогранники, которые нельзя составить из нескольких правильногранных многогранников; остальные правильногранные многогранники получаются в виде «сумм» простых, при этом черта означает перекручивание. Видно, что M_6 – это как раз и есть «шапочка», пятискатный купол.)

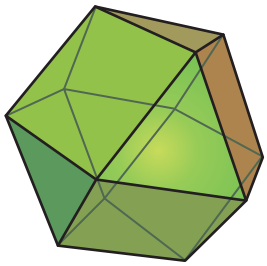


Рис. 7

Во-вторых, заметим, что кубооктаэдр (рис.7) складывается из двух трехскатных куполов, причем повернутых друг относительно друга так, что треугольные грани верхнего купола смежны с квадратными гранями нижнего и наоборот. Это объясняет другое название кубооктаэдра – *трехскатный повернутый бикупол* (или *трехскатный гиробикупол*: приставка «гиро», греческого происхождения, означает «повернутый»).

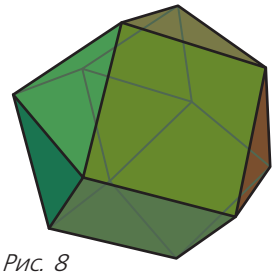


Рис. 8

Если развернуть один из куполов так, что квадраты будут смежны с квадратами, а треугольники с треугольниками, получится еще одно полуправильное в слабом смысле тело – *трехскатный прямой бикупол* (рис. 8; №27 по Джонсону, по Залгаллеру $2M_4$).

В-третьих, еще один многогранник можно получить поворотом из икосододекаэдра (рис.9), повернув одну его половину. В отличие от предыдущих случаев, здесь поворачивается не купол, а более сложная конструкция, называемая *ротондой* (рис.10). Получается полуправильный в слабом смысле многогранник, называемый *пятискатной прямой биротондой* (рис.11, №34 по Джонсону, по Залгаллеру $2M_9$). Сам икосододекаэдр можно назвать *пятискатной гиробиротондой*.

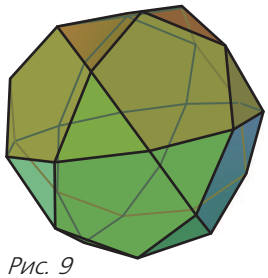


Рис. 9

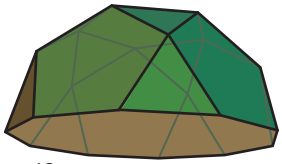


Рис. 10

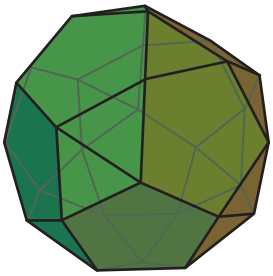


Рис. 11

Наконец, не считая псевдоромбокубооктаэдр полноправным архимедовым телом, Джонсон и Залгаллер также приводят его в числе джонсоновых (№37 у Джонсона, $M_5 + П_8 + \overline{M}_5$ у Залгаллера) под именем *удлиненный четырехскатный повернутый бикупол* («удлиненный» – потому что в середине между двумя куполами вставлена призма).

Таким образом, мы получили следующую классификацию правильногранных многогранников по мере их «удаления от правильности»:

- все грани и все вершины одинаковые – 5 платоновых тел (правильных многогранников);
- все вершины одинаковы и совмещаются симметрией многогранника – добавляется еще 13 архимедовых тел и две бесконечные серии призм и антипризм;
- все вершины одинаковы, но не обязательно совмещаются симметрией – добавляется еще псевдоромбокубооктаэдр;
- в каждой вершине сходится тот же набор многоугольников, но не обязательно в том же порядке – добавляются еще 6 многогранников, полученных из полуправильных посредством перекручивания;
- нет условий на вершины – добавляются оставшиеся 85 джонсоновых тел.

Всего правильногранных многогранников, не считая призм и антипризм, получается 5 + 13 + 1 + 6 + 85 = 110 видов.

...во всяком бруске, опирающемся на опоры, но имеющем возможность свободно изгибаться, при неизменности поперечного сечения и однородности материала та его часть, которая находится на наибольшем расстоянии от опор, изгибается больше всего.

Леонардо да Винчи

Модуль упругости равен отношению нагрузки, приходящейся на единицу площади поперечного сечения, к произведенному ею относительному удлинению.

Анри Навье

...при закалке более твердое вещество сильно закаливается, а другое остается слабо закаленным... получается материал, обладающий одновременно и большой твердостью, и большой вязкостью...

Дмитрий Чернов

Есть... материалы, которые ведут себя очень странным и сложным образом. Чем сложнее материал, тем причудливей его поведение.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам физика+техника?

Сегодня мы сфокусируем ваше внимание на употребляемых в технике МАТЕРИАЛАХ. История их освоения – это история цивилизации. С первых же попыток приспособить – для постройки жилищ либо охоты, для сражений или бытовых нужд – окружающие его камни и деревяшки человек, сначала неосознанно, наталкивался на необходимость разобраться с их свойствами. Твердые и мягкие, прочные и рассыпчатые, упругие и хрупкие, они задавали неокрепшему разуму порой нелегкие загадки. А вот раздумья над ними подталкивали к поиску закономерностей, объясняющих эти свойства. Потребность не только в прикладном, передаваемом из поколения в поколение опыте, но и в его осмыслении росла по мере овладения все новыми предоставляемыми природой *естественными* материалами. Эта потребность особенно возросла, когда человек посягнул на создание материалов *искусственных*. И здесь без науки, неотъемлемо включающей в себя физику, уже было не обойтись.

Конечно, сейчас мы сможем бросить лишь беглый взгляд на крохотную долю неисчислимого множества обступающих нас материалов и их разнообразных характеристик. Но даже те из них, которых касается школьный курс, могут дать представление об огромной области знаний, называемой *материаловедением* – еще одним плодотворным союзом физики и техники.

Вопросы и задачи

1. По камушку и теннисному мячу ударяют доской. Почему мяч при прочих равных условиях летит дальше?

2. Если выпуклый «звездчатый» многогранник, вылепленный из пластилина, с силой бросать вертикально вниз, то он будет отскакивать от пола, как упругий резиновый мячик, практически не сминаясь. В то же время пластилин легко мнется руками. Как это объяснить?

3. Пружина растянута под действием подвешенного груза. Как будет изменяться потенциальная энергия пружины, если ее: а) нагревать; б) охлаждать?

4. Стальной стержень зажат между двумя стойками. Как деформируется стержень при нагревании?

5. Почему в бетонных конструкциях в качестве арматуры – усиливающего элемента – используется только железо, а не другие металлы?

6. Чтобы железобетонную балку сделать прочнее, при ее изготовлении стальные стержни растягивают и заливают жидким бетоном. После его затвердевания стержни освобождают. Каково преимущество такой конструкции?

7. Почему при кладке кирпичных печей используют глиняный раствор, а не, например, цементный (хотя он более твердый)?

8. Одинаковые кубики из стекла и монокристалла кварца опускают в горячую воду. Сохранится ли форма кубиков?

9. Древесина по-разному колется и пилится вдоль и поперек; бревна проводят тепло в поперечном направлении в два с лишним раза хуже, чем в продольном. Почему?

10. Отчего при резких изменениях температуры металл обычно не дает трещин, а камень растрескивается?

11. При склепке толстых листов металла в отверстия листов вставляют раскаленные докрасна заклепки. Какое значение имеет применение именно горячих заклепок?

12. Чтобы приварить один кусок железа к другому, оба куска раскаляют, накладывают друг на друга и сильно бьют по ним кузнечным молотом. Почему при этом получается прочное соединение?

13. Отчего алюминий нельзя паять оловянным припоем?

14. Если в сварочном станке давление электродов на деталь оказывается меньше, то напряжение между ними должно быть больше и наоборот. Чем это можно объяснить?

Микроопыт

Вам необходимо сломать руками не очень тонкий (диаметром 3–4 миллиметра) медный провод. Скорее всего, вы начнете его сгибать-разгибать в нужном месте. Добились своего? Если да, то почему?

Любопытно, что...

...первые исследования по сопротивлению материалов, прочности арок, балок и других элементов механических конструкций были проведены гениальным художником, инженером и ученым эпохи Возрождения Леонардо да Винчи.

...английский ученый Томас Юнг ввел понятие модуля упругости, ставшее важнейшим в новой отрасли механики – теории упругости. Позже воспитанник парижской Политехнической школы Анри Навье указал, что для полного описания свойств материалов нужно знать не только величину предела прочности, но и этот самый модуль, получивший имя Юнга, и дал принятое до сих пор его определение (см. эпиграф).

...кость, с древности используемая для изготовления самых разных инструментов, обладает высокой устойчивостью к внешним воздействиям. Причина в том, что кость – это пример природного композиционного материала, сочетающего свойства входящих в него компонентов. Известнейший искусственный композит – железобетон.

...французский математик и инженер Жан-Виктор Понселе, ведший «Курс индустриальной механики, читанный мастерам и рабочим», ввел в науку и технику термин «усталость», обнаружив снижение прочности стальных конструкций при воздействии циклических напряжений.

...превосходные прочностные качества железобетона позволяют строить высотные дома с толщиной стен всего лишь 20 сантиметров. Однако весьма низкие его теплоизолирующие свойства требуют дополнительного покрытия стен пористыми материалами, обеспечивающими преграду для передачи тепла.

...исследования устойчивости колонн в начале XX века легли в основу теории пластичности, кардинально развитой в 30-х годах теорией дислокаций – изъянов кристаллической решетки. Произошедший благодаря этому переворот в физике твердого тела непосредственно приблизил ее к материаловедению и наметил новые пути и возможности техники.

...замечательные электрические свойства «нобелевского лауреата» графена обусловлены тем, что он имеет вид листиков толщиной всего лишь в один атом углерода. Но эта двухмерность технически очень неудобна, что заставляет физиков искать и, похоже, успешно, его трехмерные подобия.

Что читать в «Кванте» о материалах

(публикации последних лет)

1. «Закон Гука и коэффициент Пуассона...» – 2016, №3, с.30;
2. «Поверхность и что на ней происходит» – 2017, №8, с.7;
3. «Рекордные механические параметры» – 2018, №2, с.7;
4. «Механика невидимого» – 2018, №11, с.10.

Материал подготовил А.Леонович

Исследуем сферу ЭКСПО-2017

Б.МУКУШЕВ, А.ТУРДИН

Движение тела в однородном гравитационном поле в случае преодоления им какой-либо преграды является одним из заманчивых явлений в механике. Преграды могут быть различными, например забором, домом, пирамидой или конусообразным жилищем (чум) и тому подобное.

После проведения выставки ЭКСПО-2017 в городе Астане (Казахстан) нас заинтересовало огромное сферическое сооружение, построенное в центре района выставки и представляющее собой архитектурный символ выставки (рис.1). Это самое большое сферическое здание в мире имеет диаметр 80 метров. Величие рукотворного объекта подтолкнуло нас исследовать сферическое здание с позиции науки, в частности механики. Были проведены компьютерные эксперименты с помощью пакета прикладных программ (ППП) MathCAD для наглядного представления траекторий движения тел при преодолении ими сферического сооружения. Рисунки, которые представлены в статье, являются результатами компьютерных экспериментов.

Рис. 1

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190305

Вот несколько конкретных задач.

Задача 1. *Мячик был брошен с земли с минимальной скоростью так, чтобы он перелетел через сферическое сооружение ЭКСПО-2017, касаясь только вершины здания (рис.2). Найдите: значение скорости и угол броска; уравнение траектории, координаты точек броска и приземления, а также время полета мячика.*

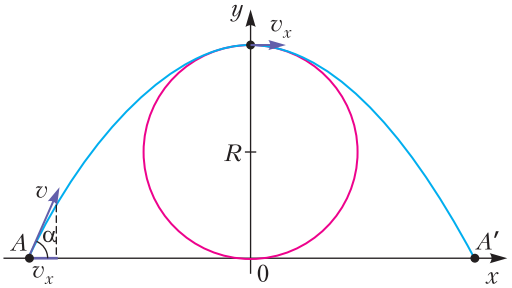


Рис. 2

На основе закона сохранения энергии запишем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + 2mgR .$$

В самой верхней точке нормальное (центростремительное) ускорение обусловлено силой тяжести, поэтому

$$\frac{v_x^2}{R} = g \text{ , или } v_x^2 = gR .$$

Таким образом, скорость броска мячика равна

$$v = \sqrt{5gR} \approx 44{,}3 \text{ м/с} ,$$

а угол броска мячика равен

$$\alpha = \arccos\frac{v_x}{v} = \arccos\frac{\sqrt{gR}}{\sqrt{5gR}} \approx 64^\circ .$$

Рассмотрим движение мячика с момента, как он достиг вершины сферы. Дальнейший этап движения мячика равносилен тому, что он был брошен горизонтально со скоростью v_x с высоты $2R$. Уравнение траектории такого движения имеет вид

$$y = 2R - \frac{gx^2}{2v_x^2} \text{ , или } y = 80 - \frac{x^2}{80} .$$

Следовательно, точки броска и приземления имеют координаты $A(-80;0)$ и $A'(80;0)$, а время полета мячика равно

$$t = \frac{A'A}{v_x} = 8{,}1 \text{ с}.$$

Задача 2. *Чтобы осуществить перелет мячика через сферическое сооружение ЭКСПО-2017, он был брошен с земли с минимальной скоростью. При полете мячик коснулся двух точек сферы. Найдите: скорость мячика в точках касания со зданием и координаты этих точек; координаты максимальной точки траектории мячика и его скорость в этой точке; значение минимальной скорости мячика, сообщенной на уровне земли, при которой он перелетит сферическое сооружение без отскоков, а также угол броска; уравнение траектории мячика и координаты точек броска и приземления, а также время полета мячика.*

При перелете через здание мячик действительно может иметь со сферой две точки касания (рис.3). Радиусы, проведенные в

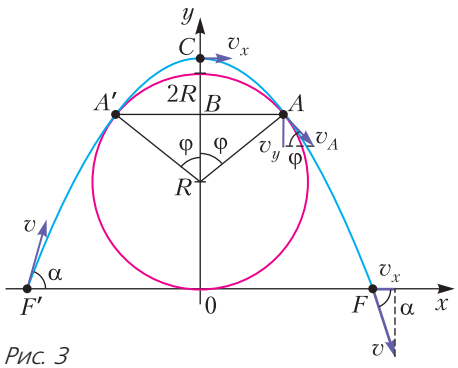


Рис. 3

точки касаний A' и A, образуют с вертикалью угол φ. Из соображений симметрии и обратимости траектории достаточно рассмотреть движение мячика только на участке CAF. Пусть скорость в точке касания v_A, а время движения от вершины до этой точки τ. При этом

$$v_x = v_A \cos\varphi, \quad v_y = v_A \sin\varphi = g\tau,$$

$$AB = R\sin\varphi = v_A \cos\varphi \cdot \tau.$$

Из последних двух равенств находим

$$v_A^2 = \frac{gR}{\cos\varphi}.$$

С помощью закона сохранения энергии запишем выражение для минимальной скорости мячика v на уровне земли:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(\cos\varphi + 1), \text{ или}$$

$$v^2 = 2gR\left(\frac{1}{2\cos\varphi} + \cos\varphi + 1\right).$$

Экстремальное значение последнего выражения в скобках определит искомую минимальную скорость. На основе неравенства Буняковского–Коши,

$$\frac{1}{2\cos\varphi} + \cos\varphi \geq 2\sqrt{\frac{\cos\varphi}{2\cos\varphi}},$$

причем равенство определяет минимальное значение:

$$\left(\frac{1}{2\cos\varphi} + \cos\varphi\right)_{\min} = \sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{и } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, скорость мячика в точках касания со зданием равна

$$v_A = \sqrt{\frac{gR}{\cos\varphi}} = \sqrt{\sqrt{2}gR} \approx 23{,}6 \text{ м/с}.$$

Поскольку $AB = R\sin\varphi \approx 28{,}2$ м и $OB = R(\cos\varphi + 1) \approx 68{,}2$ м, то точки касания имеют следующие координаты:

$$A(28{,}2;\ 68{,}2) \text{ и } A'(-28{,}2;\ 68{,}2).$$

Теперь займемся максимальной точкой траектории мячика. Так как

$$CO = CB + BO = \frac{v_y^2}{2g} + R(\cos\varphi + 1) =$$

$$= \frac{v_A^2 \sin^2\varphi}{2g} + R(\cos\varphi + 1) =$$

$$= \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1\right)R \approx 82{,}4 \text{ м},$$

то максимальная точка C траектории мячика имеет координаты $(0;82{,}4)$. Скорость в этой точке равна

$$v_x = v_A \cos\varphi = \sqrt{gR\cos\varphi} = \sqrt{\frac{gR}{\sqrt{2}}} \approx 16{,}7 \text{ м/с}.$$

Далее, известно, что

$$v^2 = 2gR\left(\frac{1}{2\cos\varphi} + \cos\varphi + 1\right) = 2gR\left(\sqrt{2} + 1\right),$$

откуда находим

$$v \approx 43{,}5 \text{ м/с},$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} \approx 0{,}39\ ,\ \text{и}\ \ \alpha \approx 68^\circ\ .$$

Таким образом, мячик брошен с земли с минимальной скоростью 43,5 м/с под углом к горизонту 68°.

Осталось написать уравнение траектории мячика:

$$y = OC - \frac{gx^2}{2v_x^2} = 82{,}4 - \frac{x^2}{40\sqrt{2}} \approx 82{,}4 - 0{,}018x^2,$$

найти координаты точек броска и приземления:

$$F'(-67{,}6;\,0)\ ,\ \ F(67{,}6;\,0)$$

и определить время полета мячика:

$$t = \frac{FF'}{v_x} = \frac{2\cdot 67{,}6\ \text{м}}{16{,}7\ \text{м/с}} \approx 8{,}1\ \text{с}\ .$$

Задача 3. *Необходимо поразить самую верхнюю точку сферического здания, изображенного на рисунке 4, бросив мячик с*

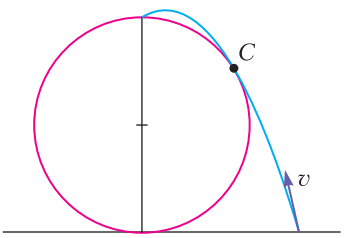


Рис. 4

наименьшей возможной скоростью. До поражения цели отскоки мячика от здания не допускаются. Радиус сферического сооружения $R = 40$ м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Нужно найти следующие параметры: скорость мячика v_0 в момент поражения цели и наименьшую скорость v, с которой мячик был брошен с земли; координаты точки касания траектории мячика со сферой и расстояние между точкой касания и самой верхней точкой; угол падения мячика α в самой верхней точке сферы; координаты точки броска мячика и угол броска; время полета мячика, уравнение траектории мячика и координаты максимальной точки траектории.

Оптимальная траектория мячика касается поверхности сферы в какой-то боковой точке C здания, как показано на рисунке 4. Из соображений обратимости траектории рассмотрим ситуацию, когда мячик брошен с верхней точки здания с минимальной скоростью v_0 так, чтобы он не задел здание

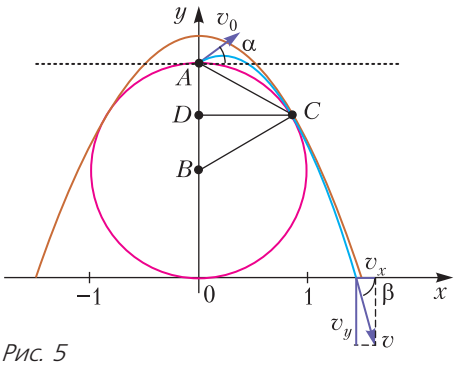


Рис. 5

(пролетел бесконечно близко к нему) при падении на землю (рис.5). Нам нужно найти точку касания окружности и оптимальной траектории мячика. Запишем уравнения окружности:

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2$$

и траектории мячика:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + 2R\ ,\ \text{или}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha\right) + 2R\ .$$

С помощью последнего уравнения невозможно найти координаты точки пересечения траектории с осью x, поскольку оно содержит четыре неизвестных: x, y, v_0 и α. Поэтому мы сначала исследуем уравнение поверхности границы простреливаемой области в условиях, когда из верхней точки сферы были брошены со скоростью v_0 одинаковые мячики под различными углами. Это уравнение известно (см., например, статью «Движение тел в гравитационном поле» в «Кванте» №9 за 2018 г.) и в нашем случае имеет такой вид:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R\ .$$

График данного уравнения (коричневая линия на рисунке 5) проходит через точку пересечения окружности и траектории мячика. Неизвестных кинематических параметров стало три: x, y и v_0. Точка пересечения определяется следующей системой уравнений:

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2\ ,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R\ .$$

Подставив y в первое уравнение, получаем

биквадратное уравнение относительно x:

$$x^4\left(\frac{g}{2v_0^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right) + \left(\frac{v_0^2}{4g} + R\right)\frac{v_0^2}{g} = 0 .$$

Его решение – это уравнение с двумя неизвестными x и v_0:

$$x^2 = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right) \pm \sqrt{D}}{\frac{g^2}{2v_0^4}} .$$

Если дискриминант D равен нулю, то существует только одна траектория, обеспечивающая прохождения мячика через точку C:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2}\right) = 0 .$$

Теперь приступим к ответам на поставленные в задаче вопросы. Из последнего равенства найдем

$$v_0^2 = \frac{gR}{2}, \text{ или } v_0 \approx 14{,}0 \text{ м/с} .$$

В соответствии с законом сохранения энергии, на нулевом уровне (на земле) скорость мячика равна

$$v = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}} \approx 42{,}0 \text{ м/с} .$$

Таким образом, мы нашли значение наименьшей возможной скорости, необходимой для поражения самой верхней точки сферического здания, и скорость в момент поражения цели.

Далее, используя уравнение для x^2, найдем координаты точки C:

$$x^2 = \frac{3R^2}{4}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}R \approx 34{,}6 \text{ м} ,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R = \frac{3R}{2} = 60 \text{ м} .$$

Из теоремы Пифагора

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2} = R .$$

Из соображений симметрии $BC = R$. Таким образом, ABC – равносторонний треугольник.

Подставляя координаты точки C в уравнение траектории мячика, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{6} .$$

Используя уравнение траектории мячика, находим точку на нулевом уровне, из которой был брошен мячик с наименьшей скоростью v:

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx_0^2}{2v_0^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right) + 2R$$

Подставив $y_0 = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $v_0^2 = \frac{gR}{2}$, получим уравнение

$$\frac{4}{3R}x_0^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_0 - 2R = 0$$

и найдем

$$x_0 \approx 1{,}46R = 58{,}4 \text{ м} .$$

Теперь находим угол броска мячика с земли:

$$\beta = \arccos\frac{v_x}{v} = \arccos\frac{v_0\cos\alpha}{v} = \arccos\frac{12{,}12 \text{ м/с}}{42 \text{ м/с}} \approx 73^\circ .$$

Время полета мячика равно

$$t = \frac{x_0}{v_x} \approx \frac{58{,}4 \text{ м}}{12{,}12 \text{ м/с}} \approx 4{,}8 \text{ с} .$$

Уравнение траектории мячика имеет вид

$$y = 80 + \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{30} .$$

Исследуемм его на экстремум:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{15} = 0$$

и найдем координаты максимальной точки траектории мячика: 8,7; 82,5.

Задача 4. *Пластмассовая шайба была брошена с земли с минимальной скоростью в направлении сферы так, чтобы она преодолела верхнюю точку сферического сооружения. Часть траектории движения шайбы без отскока лежит на поверхности сферы. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая поверхность сферы гладкой, найдите: координаты шайбы в момент плавного перехода из состояния свободного параболического движения в состояние кругового движения по поверхности сферы, ее скорость в этой точке и угол к горизонту; значение минимальной скорости шайбы, сообщенной на уровне земли, угол броска шайбы и координаты точки броска; уравнения параболических траекторий шайбы.*

Из соображений обратимости траектории будем считать, что шайба спущена с верхней точки сферы без начальной скорости. В

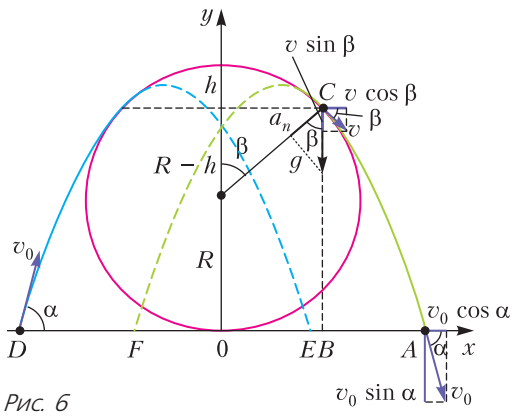


Рис. 6

точке отрыва C (рис.6) центростремительное (нормальное) ускорение шайбы $a_n = \frac{v^2}{R}$ является составляющей ускорения свободного падения:

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\beta = g\frac{R-h}{R}, \text{ или } v^2 = (R-h)g.$$

Применяем закон сохранения механической энергии для движения шайбы по поверхности сферы:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \text{ или } v^2 = 2gh.$$

Из двух уравнений для v^2 находим $h = \frac{1}{3}R$. Тогда координаты точки C будут такими:

$$y_C = 2R - h = 66{,}67 \text{ м},$$

$$x_C = x_B = OB =$$

$$= \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}R \approx 29{,}81 \text{ м}.$$

Скорость шайбы в точке отрыва C равна

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \approx 16{,}2 \text{ м/с}.$$

Из формулы $\cos\beta = \frac{R-h}{R} = \frac{2}{3}$ находим $\beta \approx 48°$.

Используя закон сохранения механической энергии для состояния параболического движения шайбы, находим ее скорость приземления (или скорость броска с земли):

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g(2R-h)} = \sqrt{4gR} \approx 39{,}6 \text{ м/с}.$$

С момента отрыва шайбы от поверхности сферы горизонтальная составляющая ее скорости остается постоянной и равной $v\cos\beta = v_0\cos\alpha$. Отсюда находим

$$\cos\alpha = \frac{v\cos\beta}{v_0} = \sqrt{\frac{2}{27}} \approx 0{,}27, \text{ и } \alpha \approx 73°.$$

Далее,

$$x_A = OA = OB + BA, \quad BA = vt\cos\beta,$$

$$v_0\sin\alpha - v\sin\beta = gt,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}96,$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}74,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}55,$$

$$t = \frac{v_0\sin\alpha - v\sin\beta}{g} = \frac{\left(10-\sqrt{10}\right)\sqrt{Rg}}{3\sqrt{3}g} \approx 2{,}65 \text{ с},$$

$$BA = \frac{2\sqrt{2}R}{27}\left(10-\sqrt{10}\right) \approx 28{,}57 \text{ м},$$

$$x_A = OB + BA =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{27}\left(10-\sqrt{10}\right)\right)R \approx 58{,}38 \text{ м}, y_A = 0.$$

Из соображений симметрии $|x_D| = |x_A|$.

Если шайба брошена со скоростью v_0 под углом к горизонту α из точки 0, то уравнение ее траектории пишут в виде

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right).$$

Поскольку наша шайба брошена из точки $D(-x_A; 0)$, то уравнение траектории параболического движения шайбы с левой стороны будет таким:

$$y_1 = (x+x_D)\operatorname{tg}\alpha - \frac{g(x+x_D)^2}{2v_0^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right).$$

Найдем точки пересечения траектории с осью x, которые соответствуют точкам D и E. Для этого выражение для y_1 приравниваем к нулю и получим

$$x_D \approx -58{,}38; \quad x_E \approx 25{,}83.$$

Аналогично, уравнение траектории параболического движения шайбы с правой стороны будет иметь вид

$$y_2 = (x+x_F)\operatorname{tg}\alpha - \frac{g(x+x_F)^2}{2v_0^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right).$$

Задача 5. *Мячик был отпущен без начальной скорости с верхней точки сферы.*

Трение скольжения между мячиком и сферой велико. Сопротивлением воздуха и трением качения можно пренебречь. Мячик считайте однородным сплошным шаром, его момент инерции $I = \frac{2}{5}mr^2$, *где* m – *масса мячика,* r – *его радиус. Найдите: координаты мячика в момент отрыва от сферы, его скорость в этой точке и угол ее наклона к горизонту; скорость приземления мячика и ее угол с горизонтом в этой точке, а также координату точки приземления; уравнение параболической траектории мячика.*

В точке отрыва C (рис.7) центростремительное (нормальное) ускорение мячика

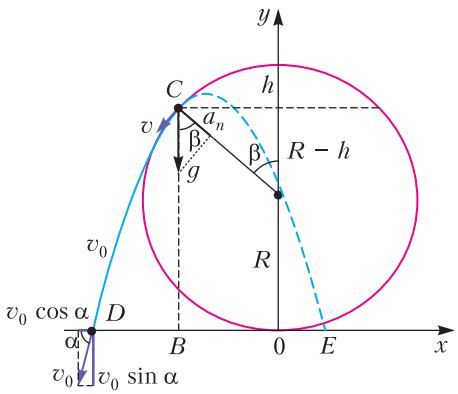


Рис. 7

$a_n = \frac{v^2}{R}$ является составляющей ускорения свободного падения: $\frac{v^2}{R} = g\cos\beta$, где $\cos\beta = \frac{R-h}{R}$. Отсюда

$$v^2 = (R-h)g .$$

Применим закон сохранения механической энергии для движения мячика по поверхности сферы:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \text{ где } \omega = \frac{v}{r},$$

$$\text{или } mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7mv^2}{10}.$$

Подставляя сюда $v^2 = (R-h)g$, находим $h = \frac{7}{17}R \approx 0{,}41R$. Тогда координаты точки C будут такими:

$$y_C = 2R - h = 63{,}6 \text{ м},$$

$$x_C = -OB = -\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = -32{,}3 \text{ м}.$$

Скорость мячика в точке отрыва равна

$$v = \sqrt{(R-h)g} = \sqrt{0{,}59gR} \approx 15{,}2 \text{ м/с}.$$

Из формулы $\cos\beta = \frac{R-h}{R} \approx 0{,}59$ находим $\beta \approx 54°$.

Используя закон сохранения механической энергии для параболического движения мячика, находим его скорость приземления:

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g(2R-h)} \approx 38{,}4 \text{ м/с}.$$

В момент отрыва мячика от поверхности сферы горизонтальная составляющая скорости мячика остается постоянной и равной $v\cos\beta = v_0\cos\alpha$. Отсюда получаем

$$\cos\alpha = \frac{v\cos\beta}{v_0} \approx 0{,}23,$$

$$\alpha \approx 76{,}6°, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \approx 4{,}23,$$

$$\sin\alpha \approx 0{,}97, \quad \sin\beta \approx 0{,}81.$$

Далее,

$$OD = OB + BD, \quad BD = vt\cos\beta,$$

$$v_0\sin\alpha - v\sin\beta = gt,$$

$$t = \frac{v_0\sin\alpha - v\sin\beta}{g} \approx 2{,}5 \text{ с}, \quad BD = 22{,}4 \text{ м},$$

$$OD = 54{,}7 \text{ м}, \quad x_D = -54{,}7 \text{ м}, \quad y_D = 0.$$

Из принципа обратимости параболической траектории считаем, что мячик был брошен из точки D со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Тогда уравнение траектории параболического движения мячика запишется так:

$$y = (x + x_D)\operatorname{tg}\alpha - \frac{g(x+x_D)^2}{2v_0^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right),$$

или

$$y = (x + 54{,}7)\cdot 4{,}23 - 0{,}062(x + 54{,}7)^2.$$

Заметим, что если мячик бросить из точки D со скоростью, равной скорости приземления ($38{,}4$ м/с), и под углом падения ($76{,}6°$), то выполняется принцип обратимости параболического движения тела, т.е. мячик может доходить до точки C за $2{,}5$ с и иметь в этой точке скорость $15{,}5$ м/с. Однако дальше принцип обратимости движения не работает, мячик не доходит до самой вершины сферы – ему не хватает энергии.

Региональный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. Два приведенных квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня и выполняются равенства $f(1)=g(2)$ и $g(1)=f(2)$. Найдите сумму всех четырех корней этих трехчленов.

Н.Агаханов

2. Каждый из 10 человек – либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Мое число больше 1», второй сказал: «Мое число больше 2», …, десятый сказал: «Мое число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Мое число меньше 1», «Мое число меньше 2», …, «Мое число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

О. Подлипский

3. По кругу расставлены 100 различных натуральных чисел. Вася разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; при этом оказалось, что остатки, полученные Васей, принимают всего два различных значения. Петя разделил каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Петей, различны.

Н.Агаханов, С.Берлов

4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность Γ, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω.

А.Кузнецов

5. Каждая грань куба $1000\times1000\times1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?

С.Долгих

6. Даны четыре последовательных натуральных числа, больших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, больших 1.

Н.Агаханов

7. На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь четырех общих вершин. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трех прямоугольников?

И.Богданов

8. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60^\circ$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M – середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC – равнобедренный.

А.Кузнецов

9. См. задачу М2551 «Задачника «Кванта».

10. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на

доске оказалось как можно больше, а Вася – чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

А.Храбров

10 класс

1. См. задачу 2 для 9 класса. Только теперь каждый из 10 человек задумал какое-то число (не обязательно целое).

2. Дан выпуклый четырехугольник периметра 10^{100}, у которого длины всех сторон – натуральные числа, а сумма длин любых трех сторон делится на длину оставшейся четвертой стороны. Докажите, что этот четырехугольник – ромб.

П.Кожевников

3. Клетки таблицы 2×2019 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2019 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2019 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2019 столбцов должны быть записаны два разных числа, причем сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы?

С.Кудря

4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что при всех натуральных $n \geq 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n .$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего.

И.Богданов

5. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Продолжение медианы, проведенной из вершины B, пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке D. Через центр окружности, описанной около треугольника BDL, проведена прямая l, параллельная прямой AC. Докажите, что окружность ω касается прямой l.

А.Кузнецов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Даны действительные числа a и b, причем $b > a > 1$. Пусть

$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right).$$

Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает.

А.Храбров

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведен диаметр BB'. Докажите, что $AB' = CB'$.

А.Кузнецов

9. См. задачу М2551 «Задачника «Кванта».

10. См. задачу М2552 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. См. задачу 2 для 9 класса.

2. Известно, что каждый из трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + ax + b + 1$ имеет хотя бы по одному корню и все корни этих трехчленов целые. Докажите, что трехчлен $x^2 + ax + b + 2$ корней не имеет.

Н.Агаханов

3. Назовем *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.

И.Богданов

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF. Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности и точки A, B, D и F также лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны.

А.Кузнецов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, где $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)$, убывает.

А.Храбров

8. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки D и E соответственно такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

Р.Женодаров

9. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух учеников обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй – нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый – нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.)

Д.Храмцов

10. Дано натуральное число $n \geq 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася – чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

А.Храбров

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский

Региональный этап LIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

7 класс

Задача 1. Термоареометр

Однажды экспериментатору Глюку понадобилось одновременно измерять температуру и плотность исследуемой жидкости. Он разработал универсальный прибор, в котором указатель неподвижен, а шкалы перемещаются независимо (рис.1). Глюк снял показания, которые занес в таблицу. Известно, что температура жидкости изменялась на одинаковую величину за равные промежутки времени. Длины шкал $L = 10$ см, а весь эксперимент длился $\Delta\tau = 5$ мин. Постройте график полученной зависимости $\rho(T)$ и определите, с какой максимальной скоростью перемещались шкалы друг относительно друга в ходе эксперимента.

Температура T, °C	20	18	16	12
Плотность ρ, г/см^3	1,01	1,02	1,03	1,05
Температура T, °C	8	7	6	4
Плотность ρ, г/см^3	1,08	1,11	1,14	1,20

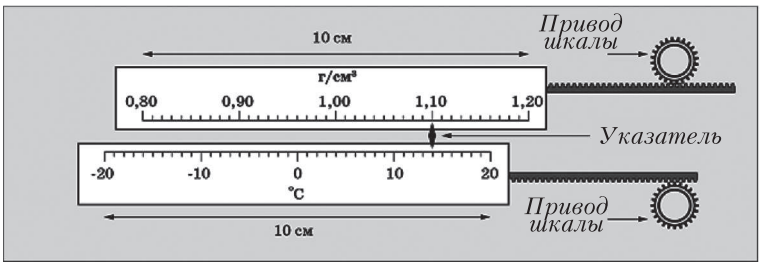


Рис. 1

М.Замятнин

Задача 2. Каникулы в Простоквашино (1)

От станции Простоквашино до дома, в котором живет кот Матроскин, расстояние s = 1,2 км. Дядя Федор с Шариком приехал на станцию Простоквашино и пошел домой со скоростью $v_Ф = 4$ км/ч , а Шарик побежал со скоростью $v_Ш = 12$ км/ч . Добежав до дома, Шарик повернул обратно, навстречу дяде Федору, и так бегал вперед и назад между дядей Федором и домом вплоть до момента прибытия мальчика домой. Какой путь больше: суммарный путь s_1 , который Шарик пробежал, перемещаясь в сторону дома, или s_2 , который он пробежал, перемещаясь в обратном направлении? На сколько один путь длиннее другого? Определите s_1 и s_2 .

А.Лукьянов

Задача 3. Усреднение

На рисунке 2 приведены графики зависимости от времени координат двух машин,

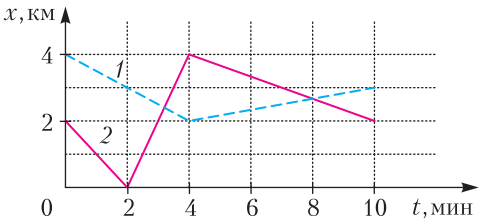


Рис. 2

ехавших по одной прямой дороге. Определите среднюю путевую скорость v_{10} второй машины за 10 минут движения с точки зрения наблюдателя, находящегося в первой. В какие моменты времени движения, кроме конечного, средняя скорость второй машины относительно первой также была равна v_{10} ? Какого максимального значения достигала средняя путевая скорость второй машины в процессе движения?

М.Замятнин

Задача 4. Кубический коктейль

Если в стакан, доверху заполненный жидкостью плотностью $\rho = 1{,}2$ г/см^3, погрузить кубик, то средняя плотность содержимого станет $\rho_1 = 1{,}4$ г/см^3; если вместо этого кубика поместить другой кубик такого же объема, то средняя плотность содержимого станет $\rho_2 = 1{,}6$ г/см^3. Какой окажется средняя плотность ρ_3 содержимого, если в стакан поместить сразу оба кубика? Внутренний объем стакана в 5 раз больше объема кубика.

М.Замятнин

8 класс

Задача 1. Каникулы в Простоквашино (2)

См. задачу 2 для 7 класса. Только теперь Шарик бежал домой вниз по склону со скоростью $v_{Ш1} = 12$ км/ч , а обратно бежал вверх по склону со скоростью $v_{Ш2} = 8$ км/ч .

Задача 2. Качаем пресс

На полозьях, которые могут скользить по *гладкому* полу, установлен гидравлический пресс, заполненный несжимаемым маслом. Шток поршня большего диаметра прикреплен к стене (рис.3,*а*). При движении поршня

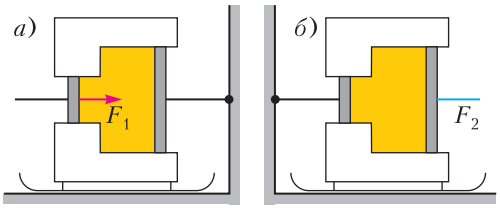


Рис. 3

между ним и стенкой пресса возникает сила трения F (одинаковая для обоих поршней). Чтобы сдвинуть пресс с места, к меньшему поршню необходимо приложить силу не меньшую, чем F_1 = 500 Н. Определите величину силы трения F, если площади поршней отличаются в 4 раза. Какую минимальную горизонтальную силу F_2 необходимо приложить к поршню большего диаметра, чтобы отодвинуть пресс от стены, если установить его так, чтобы шток меньшего поршня был прикреплен к стене (рис.3,*б*)? В какую сторону в этом случае должна быть направлена сила F_2 ?

М.Замятнин

Задача 3. Пластичность

Цилиндрический столбик из пластилина высотой H и площадью основания s плотно прилепили к гладкому дну сосуда, в который налили жидкость плотностью ρ_0 до верха столбика (рис.4,*а*). Вода под столбик плас-

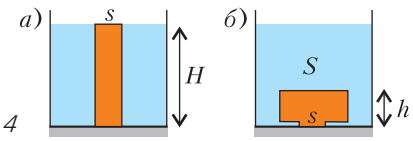


Рис. 4

тилина не подтекает. Не изменяя площади контакта пластилина с дном и не отделяя его от дна, столбик превратили в цилиндр высотой h, стоящий на очень короткой ножке (рис.4,*б*). Определите, в какую сторону направлена и чему равна результирующая сила, действующая со стороны жидкости на деформированный пластилин. Атмосферное давление равно p_0.

М.Замятнин

Задача 4. Нелинейное плавление

В калориметре со встроенным нагревателем расплавили некоторое вещество. На

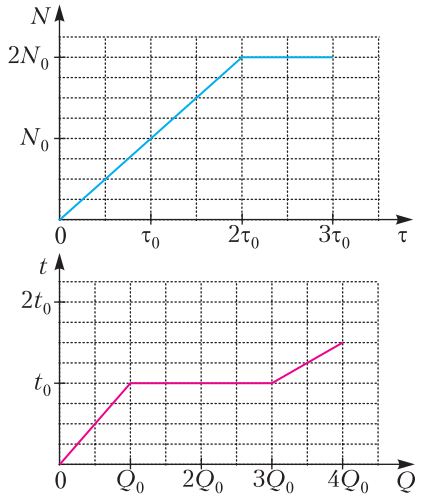


Рис. 5

рисунке 5 приведены графики зависимости мощности N нагревателя от времени τ его работы и температуры t вещества от переданного ему количества теплоты Q. Найдите отношение теплоемкостей вещества в твердом и жидком состоянии. Определите, сколько времени $\tau_п$ длился процесс плавления, считая известным время τ_0. Постройте график зависимости температуры вещества от времени, указав на нем величины τ и t в характерных точках.

М.Замятнин

9 класс

Задача 1. До остановки

Две частицы движутся вдоль оси x. Зависимости их ускорений a_x от времени оказались одинаковыми (рис.6). За все время наблюдений проекция скорости v_x каждой из частиц ровно один раз обращалась в ноль, а пройденные ими пути отличались на

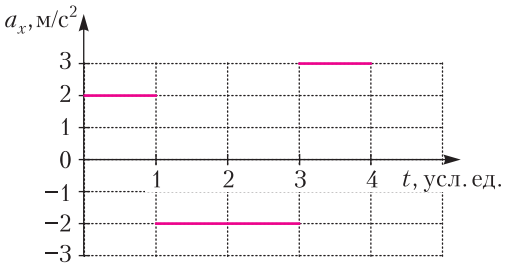


Рис. 6

$\Delta s = 16$ см. Определите пути s_1 и s_2, пройденные частицами, и время τ их движения.

К.Кутелев

Задача 2. «Наморозили»

На весах установлен калориметр с водой при температуре $t_0 = 0$ °C. Весы показывают при этом $m_1 = 100$ г. В воду опускают стальной шарик, закрепленный на нити, с намерзшим на нем толстым слоем льда, который полностью погружен в воду (рис.7). Показания весов увеличиваются до значения $m_2 = 201{,}3$ г. После установления теплового равновесия в калориметре (на этом этапе теплообменом с окружающей средой можно пренебречь) показания весов еще немного возрастают до $m_3 = 204{,}45$ г. Через большой промежуток времени, когда содержимое калориметра нагрелось до комнатной температуры, весы показали $m_4 = 191{,}3$ г. Определите массу $m_с$ стального шарика, массу $m_л$ льда на нем перед опусканием в калориметр, их температуру t перед погружением в воду. Удельная теплоемкость стали $c_с = 450$ Дж/(кг · °C), удельная теплоемкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, плотности стали $\rho_с = 7800$ кг/м^3, льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

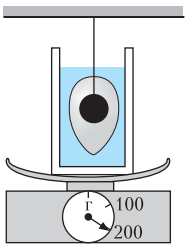


Рис. 7

Фольклор

Задача 3. Пропавшие приборы

Миша собрал электрическую цепь, состоящую из идеального источника, двух резисторов, двух амперметров и одного вольтметра (рис.8). Но второпях он забыл расставить на схеме обозначения приборов, зато точно

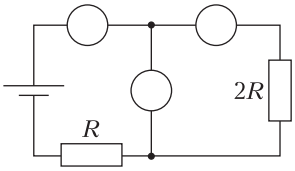


Рис. 8

запомнил, что один из амперметров показывал силу тока I = 1,0 мА, а вольтметр – напряжение U = = 1,2 В. Восстановите обозначения приборов. Дайте обоснование. Определите показания второго амперметра, сопротивления резисторов и напряжение источника U_0. Все приборы можно считать идеальными.

М.Замятнин

Задача 4. Гидростатический «черный ящик»

Имеется прямоугольный сосуд размером $1\times1\times4$ м (рис.9). В верхней крышке сосуда

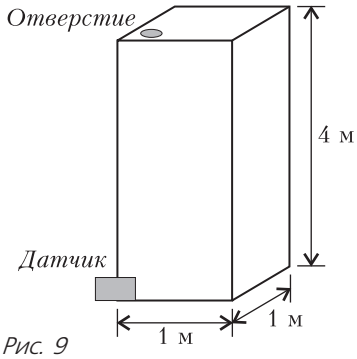


Рис. 9

есть отверстие. В нижней части сосуда вплотную ко дну смонтирован миниатюрный датчик давления. Внутри сосуда может быть расположено произвольное число перегородок и закрытых ими полостей. Каждая перегородка имеет пренебрежимо малый объем и

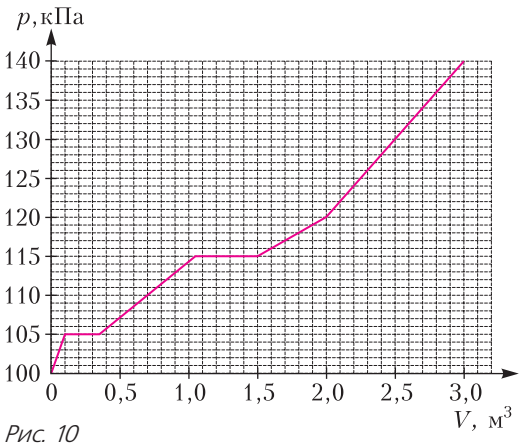


Рис. 10

расположена горизонтально или вертикально. Все вертикальные перегородки параллельны одной и той же стенке сосуда. Через верхнее отверстие в сосуд медленно заливают воду, снимая при этом зависимость показаний датчика давления от объема налитой воды. Полученная зависимость представлена на графике (рис.10). Проанализируйте ее и нарисуйте возможную схему расположения перегородок в сосуде, соответствующую данному графику (достаточно любой одной схемы из множества возможных). На схеме укажите масштаб и все характерные размеры. Поясните, каким образом вы получили эти размеры и определили характерные особенности расположения перегородок. Считайте $g = 10$ м/с^2, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, атмосферное давление p_0 = = 100 кПа.

М.Карманов

Задача 5. Тетрагон

Основание стеклянной призмы имеет форму четырехугольника OAO_1D (рис.11). Угол

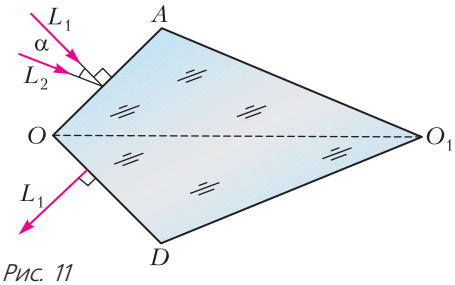


Рис. 11

AOD – прямой. Призма симметрична относительно плоскости, содержащей OO_1 и перпендикулярной основанию. Луч L_1 нормально падает на грань OA и после отражений на гранях DO_1 и AO_1 выходит через грань OD также под прямым углом к ней. Луч L_2 падает на грань OA под углом α. Под каким углом β относительно нормали к грани OD он выйдет из призмы после отражений на гранях DO_1 и AO_1? Все лучи перпендикуляры к граням призмы и лежат в плоскости OAO_1D.

В.Слободянин

10 класс

Задача 1. Воднолыжник

Катер едет посередине прямого длинного канала фиксированной ширины с постоянной скоростью v (рис.12). За катером на

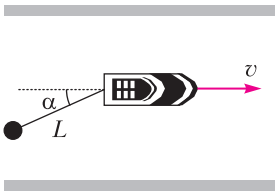


Рис. 12

натянутом все время тросе длиной L курсирует от одного берега канала до другого воднолыжник. В момент времени, когда расстояние между лыжником и правым берегом увеличивалось со скоростью u, а трос составлял с направлением движения катера угол α_0, спортсмен оторвался от воды. Пренебрегая вертикальной составляющей скорости, найдите модуль скорости u_0 спортсмена в этот момент. Какова в этот же момент сила натяжения троса T, если масса спортсмена m? На рисунке в качестве иллюстрации показан вид сверху в некоторый момент движения воднолыжника.

С.Варламов

Задача 2. Шайбу!

Шайба летит в сторону движущейся поступательно тяжелой плиты так, что их плоскости параллельны. Вектор скорости шайбы составляет угол $\varphi = 30°$ с нормалью к поверхности плиты. Происходит столкновение. Векторы скорости шайбы до и после столкновения одинаковы по модулю и перпендикулярны друг другу (рис.13). Кроме того, они лежат в одной плоскости с вектором скорости плиты. Определите минимальное и максимальное значения коэффициента трения μ, при которых возможно такое столкновение.

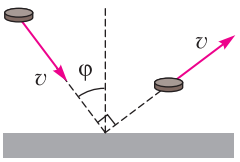


Рис. 13

А.Аполонский

Задача 3. Девять резисторов

Электрическая цепь состоит из 9 резисторов и идеального вольтметра (рис.14). Сопротивления трех резисторов R_x, R_y и R_z неизвестны, сопротивления остальных такие: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм. При подключении к точкам A и B источника с постоянным напряжением $U_0 = 10$ В вольтметр показывает $U_1 = 4$ В, при подключении того же источника к точкам A и C показания вольтметра $U_2 = 5$ В. Определите:

1) значения сопротивлений R_x, R_y и R_z;

2) значения силы тока через источник при подключении его к точкам A и B (I_{AB}) и к точкам A и C (I_{AC}).

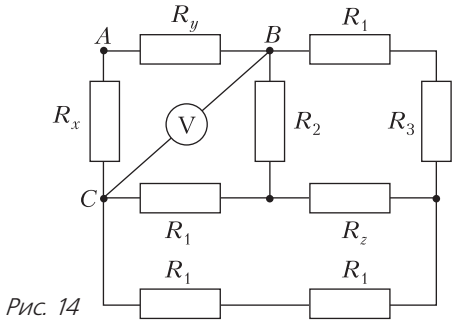


Рис. 14

Фольклор

Задача 4. На планете R19

В далеком космосе астронавты исследовали атмосферу планеты R19. Оказалось, что она очень похожа на атмосферу Земли: состоит из идеального газа с молярной массой $M = 28$ г/моль и имеет схожую зависимость температуры от высоты (рис.15). И даже ускорение свободного падения у поверхности R19 равно $g = 9{,}9$ м/с^2. Однако атмосферное давление на уровне моря отличается от земного. Оно равно $p_0 = 500$ кПа. Определите по этим данным, пренебрегая изменением g с высотой, давление p_1 и плотность ρ_1 на высоте $h_1 = 1{,}0$ км. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

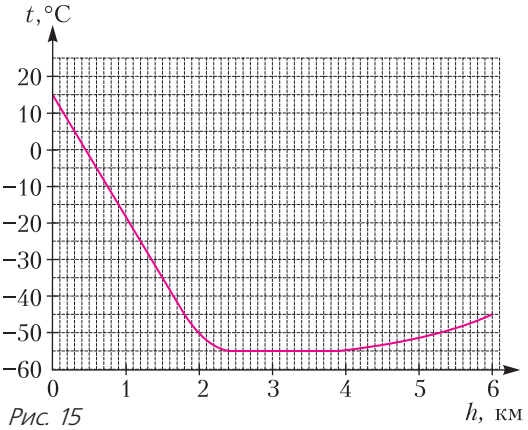


Рис. 15

И.Иоголевич

Задача 5. Бусинка на кольце

На тонкое проволочное кольцо радиусом R свободно надета бусинка массой m (рис.16). Кольцо неподвижно и расположено горизонтально в поле тяжести g. Коэффициент трения скольжения между бусинкой и кольцом

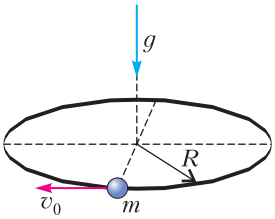


Рис. 16

равен μ. В начальный момент времени бусинка движется со скоростью v_0.

1) Найдите модуль силы трения, действующей на бусинку в начальный момент времени.

2) Найдите модуль полного ускорения бусинки в этот же момент.

3) Запишите выражение, позволяющее с погрешностью не более 2% найти путь бусинки за время, в течение которого ее скорость уменьшилась на 1%.

Фольклор

11 класс

Задача 1. Испытания автомобиля

Плоский горизонтальный полигон для испытаний гоночных автомобилей имеет два участка с разным покрытием. По условиям испытаний автомобиль должен проехать по прямой расстояние L от линии старта до линии границы между участками в одном направлении, стартуя с нулевой начальной скоростью (рис. 17). После пересечения линии границы автомобиль должен остановиться. Коэффициент трения на первом участке равен μ, а на втором 2μ. За какое минимальное время $t_и$ автомобиль может выполнить это испытание (от старта до полной остановки)? Какая при этом будет скорость v_0 у автомобиля при пересечении им линии границы участков? Нарисуйте график зависимости скорости автомобиля от времени, соответствующий вашему решению, и отметьте на нем момент прохождения автомобилем линии границы. Автомобиль полноприводный с неограниченной мощностью двигателя. Размерами машины по сравнению с L пренебречь.

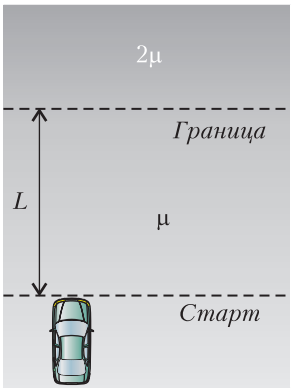


Рис. 17

С.Кармазин

Задача 2. Кубическая планета

На планете в форме куба из однородного материала вдоль большой диагонали высверлили узкий прямой гладкий канал (рис.18). Если маленький шарик отпустить

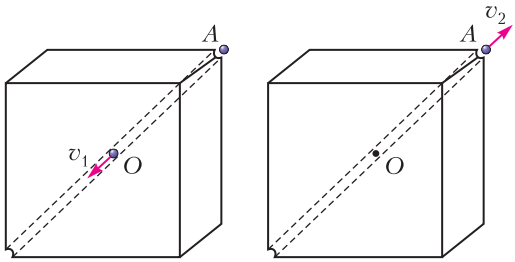


Рис. 18

без начальной скорости из точки A (вершина куба), его скорость в момент прохождения центра куба (точка O) будет равна v_1. Какую минимальную скорость v_2 нужно сообщить шарику при запуске в космос из точки A, чтобы он мог покинуть поле тяготения планеты? Атмосферы у планеты нет.

Фольклор

Задача 3. Сосуд с поршнем

Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться без трения (рис.19). В начальный момент в левой и правой частях сосуда находится по одному молю гелия при одинаковой температуре. В левую часть сосуда подвели тепло с помощью нагревателя. При этом температура гелия в ней увеличилась на *малую величину* ΔT. Определите изменение температуры ΔT_2 в правой части сосуда и количество теплоты Q, переданное нагревателем.

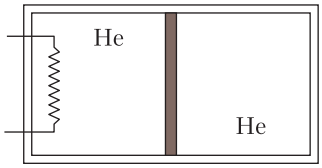


Рис. 19

И.Воробьев

Задача 4. Айс

Вертикальный цилиндрический сосуд с водой, равномерно вращающийся вокруг своей оси с периодом T_0, быстро охлаждают, так что на поверхности появляется тонкая гладкая ледяная корка. На корку вблизи оси сосуда без начальной скорости помещают маленькую бусинку, которая может без тре-

ния скользить по поверхности. Найдите период T ее малых колебаний.

Л.Мельниковский

Задача 5. Остановка частицы в магнитном поле

Маленькая частица с положительным зарядом q движется в однородном магнитном поле с индукцией B в вязкой среде. Сила сопротивления среды, действующая на частицу, прямо пропорциональна ее скорости. В начальный момент времени импульс частицы равнялся p_0 и был направлен перпендикулярно линиям индукции. Вектор перемещения частицы к моменту, когда скорость частицы впервые оказалась противонаправленной начальной скорости, составляет острый угол φ с вектором $\vec{p}_0$.

1) Какой путь прошла частица до остановки?

2) Чему равен модуль перемещения частицы до остановки?

Силой тяжести пренебречь.

А.Аполонский

Публикацию подготовил В.Слободянин

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Олимпиада «Ломоносов». Физика

В 2018/19 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 7–11 классов мог участвовать по собственному выбору в одном или двух турах, проводимых по единой форме. Задания каждого из туров были равноценными по сложности и составлялись раздельно для учащихся младших (7–9) и старших (10–11) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте http://olymp.msu.ru. Доступ к условиям заданий был открыт для участников дважды: с 13 по 17 ноября 2018 года (первый тур) и с 6 по 10 декабря 2018 года (второй тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

7–9 классы

Первый тур

1. Одной из характеристик писчей бумаги является ее плотность σ, для измерения которой обычно используется внесистемная единица г/м^2. Какое давление p оказывает на стол лист бумаги плотностью σ?

2. Мальчик переплывает реку, двигаясь по прямой из точки A, находящейся на одном берегу реки, в точку B, находящуюся ниже по течению на противоположном берегу реки, за время τ. Скорость течения реки u. Найдите ширину реки L, если известно, что модуль скорости мальчика относительно воды v, а вектор этой скорости перпендикулярен прямой AB.

3. Из медной проволоки площадью поперечного сечения s изготовлен контур, имеющий форму квадрата $ABCD$ со стороной a, а из алюминиевой проволоки того же сечения изготовлены его диагонали AC и BD, соединенные в точке O (рис.1). Вершины A и C подключены к источнику постоянного напряжения U. Найдите мощность N, выделяющуюся в рассматриваемой цепи, если сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало. Удельное сопротивление меди $\rho_м$, удельное сопротивление алюминия $\rho_а$.

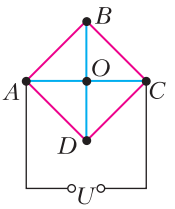


Рис. 1

4. С какой минимальной скоростью v_{min} должен влететь в атмосферу Земли метеорит, состоящий из железа, чтобы полностью расплавиться в воздухе, если на нагрев ме-

теорита расходуется относительная доля его начальной кинетической энергии, равная α? Начальная температура метеорита t_0. Удельная теплоемкость железа c, температура плавления железа $t_{пл}$, удельная теплота плавления железа λ.

5. На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиусом R, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине H_{max} нужно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды n.

Второй тур

1. Бревно массой m плавает в воде, не касаясь дна реки. Какой объем V занимает погруженная в воду часть бревна? Плотность воды ρ.

2. Моторная лодка плывет по реке вниз по течению. В тот момент, когда лодка проплывала мимо пристани, из нее выпал спасательный круг. Рыбак, находившийся в лодке, обнаружил пропажу только спустя промежуток времени t. Он сразу же развернул лодку и поплыл в обратном направлении, не изменяя режима работы мотора. Спасательный круг он нашел на расстоянии s от пристани. Определите скорость v течения реки, считая ее постоянной.

3. Цепь, изображенная на рисунке 2, составлена из четырех одинаковых резисторов

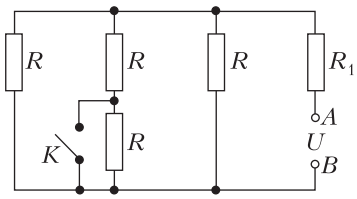


Рис. 2

сопротивлением R каждый и резистора сопротивлением R_1. На клеммах AB поддерживается постоянное напряжение U. На какую величину ΔI изменится сила тока, текущего через резистор сопротивлением R_1, после замыкания ключа K? Сопротивлением проводов и ключа можно пренебречь.

4. При центральном соударении шарика, движущегося со скоростью v, с таким же неподвижным шариком последний приобретает скорость $v/2$. Найдите изменение температуры шариков Δt, если удельная теплоемкость вещества, из которого они состоят, c. Рассеянием тепла в окружающую среду можно пренебречь.

5. Тонкий круглый деревянный диск плавает в бассейне, наполненном водой. В воде под диском на глубине h закреплен точечный источник света S, причем центр диска и источник находятся на одной вертикали (рис.3). Пренебрегая отражением света от стенок и дна бассейна, определите минимальный диаметр диска d, при котором ни один световой луч не выйдет из воды. Показатель преломления воды n.

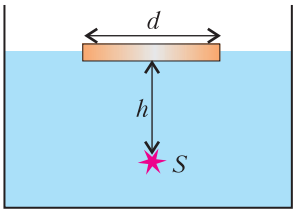


Рис. 3

10–11 классы

Первый тур

1. Два пластилиновых шарика массами m и $2m$ одновременно бросают навстречу друг к другу с одинаковыми скоростями v_0, лежащими в одной вертикальной плоскости и образующими с горизонтом углы α (рис.4).

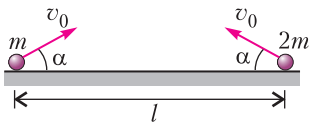


Рис. 4

Точки бросания шариков находятся на поверхности земли на расстоянии l друг от друга. После соударения шарики слипаются и движутся далее как одно тело. Найдите время τ полета этого тела от момента соударения до момента падения на землю. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. Клин с углом α при вершине находится на горизонтальном столе (рис.5). На поверхности клина располагается брусок массой m, к которому привязана невесомая нерастяжимая нить. Второй конец нити перекинут через блок на клине и прикреплен к непод-

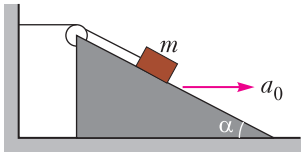


Рис. 5

вижной опоре. При этом отрезок нити от опоры до блока горизонтален, а отрезок нити от блока до бруска параллелен поверхности клина. Найдите модуль T силы натяжения нити, если клин двигают по столу вправо с ускорением a_0. Движение всех тел происходит в плоскости рисунка. Трением можно пренебречь.

3. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под невесомым подвижным поршнем содержится некоторое количество идеального газа. Газ медленно нагревают так, что он совершает работу A. Во сколько раз α изменяется при этом среднее число соударений молекул газа с единичной площадкой на стенке сосуда за единицу времени? Начальный объем газа V_0, атмосферное давление p_0. Трение между поршнем и стенками сосуда считайте пренебрежимо малым.

4. В демонстрационной модели генератора переменного тока плоская проволочная рамка площадью S равномерно вращается в однородном магнитном поле. Ось вращения перпендикулярна вектору магнитной индукции поля, модуль которого равен B. Через токосъемные контактные кольца к рамке подключают лампочку от карманного фонарика с вольфрамовой нитью накаливания. До какой температуры t нагревается эта нить, если мощность светового излучения лампочки $P_{св}$? Относительная доля работы тока, преобразованной в это излучение, равна η. Сопротивление нити накаливания при температуре 0 °C равно R_0. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама α. Угловая скорость вращения рамки ω. Сопротивлением и индуктивностью рамки можно пренебречь.

5. Расстояние от предмета до экрана L. Какое максимальное увеличение Γ_{max} изображения предмета на экране можно получить с помощью тонкой линзы с фокусным расстоянием F?

Второй тур

1. Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам (рис.6). Какова должна быть начальная скорость мяча v_0, если бросок производится с высоты h под углом α к горизонту? Расстояние от мальчика до стены l. Удар мяча о стену считайте абсолютно упругим. Размером мяча и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

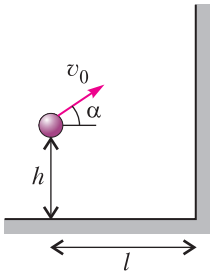


Рис. 6

2. Небольшой шарик массой m подвешен к потолку на невесомой нерастяжимой нити длиной l и совершает малые колебания с периодом T_0. После того, как шарик дополнительно соединили с неподвижной стенкой посредством горизонтальной невесомой пружины (рис.7), период его малых колебаний в плоскости нити и пружины стал равным T_1. При этом пружина в положении равновесия маятника не деформирована. Определите жесткость пружины k, если $(T_0 - T_1)/T_0 = n$. Считайте, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

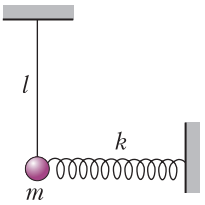


Рис. 7

3. В прочном горизонтальном цилиндре под поршнем находится смесь азота и гелия при температуре T = 84 K и давлении p. Поршень медленно вдвигают в цилиндр, изотермически сжимая смесь. При уменьшении объема в n раз на стенках сосуда появляются капельки жидкости. Давление насыщенных паров азота при температуре T равно $p_{нп}$. Пренебрегая массой и объемом сконденсировавшейся жидкости, определите отношение k числа молекул гелия к числу молекул азота в цилиндре. Критическая температура для паров азота T_1 = 126 K, для паров гелия T_2 = 4,2 K.

4. Плоская рамка площадью S, изготовленная из тонкой проволоки, помещена в однородное магнитное поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости рамки. Если рамку медленно повернуть на 180° вокруг оси, лежащей в ее плоскости, то по рамке протечет заряд q. Пренебрегая индуктивностью рамки, определите среднюю тепловую мощность $N_{ср}$, выделяющуюся в рамке при ее вращении вокруг той же оси с угловой скоростью ω.

5. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F на расстоянии a от нее находится точечный источник, испускающий узкий пучок света (рис.8). По другую сторону линзы на рас-

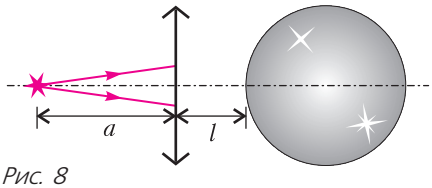


Рис. 8

стоянии l от нее расположен зеркальный шар, центр которого лежит на главной оптической оси линзы. Определите радиус шара R, если лучи, отраженные от него, собираются в фокусе линзы, ближайшем к источнику. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедлива такая приближенная формула: $\operatorname{tg} x \approx x$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Проведение заключительного этапа олимпиады «Ломоносов» было назначено на 22 февраля 2019 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на трех региональных площадках в городах Астана (Казахстан), Белгород и Невинномысск. Задание для учащихся 7–8, а также 9 классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2019 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание включало четыре различных раздела, состоящих из задач и уточняющих вопросов по теории.

7–8 классы

1. Сплошной однородный цилиндр высотой h и диаметром основания D стоит на горизонтальной плоскости. Медленно наклоняя цилиндр, его опрокидывают. Во сколько раз n энергия, выделившаяся при падении цилиндра на плоскость, превысит минимальную работу, совершенную при его опрокидывании?

2. В чайник со свистком налили воду массой m_1 и поставили на электрическую плитку. Через время τ_1 вода закипела и раздался свисток. Какова масса m_2 воды, оставшейся в чайнике после кипения воды, продолжавшегося в течение еще времени τ_2? Начальная температура воды t, температура кипения воды $t_к$. Удельная теплота парообразования воды r, а ее удельная теплоемкость c. Теплоемкостью чайника и потерями тепла за счет рассеяния в окружающую среду можно пренебречь.

3. Гальванометр с неизвестным внутренним сопротивлением включили в цепь источника постоянного тока один раз последовательно с резистором сопротивлением R, а второй раз параллельно с ним. При этом в первый раз стрелка гальванометра отклонилась на $X_1 = 2$ деления шкалы, а во второй раз на $X_2 = 4$ деления. Определите по этим данным внутреннее сопротивление гальванометра r, если напряжение на клеммах источника в обоих случаях одно и то же.

4. Непрозрачный сосуд имеет форму куба с длиной ребра a. Внутрь сосуда параллельно одной из его боковых граней направляют луч света, как показано на рисунке 9. Луч попадает в точку b, находящуюся на ребре куба. До какого уровня h необходимо заполнить сосуд водой, чтобы луч света попал в точку c, расположенную на дне сосуда на расстоянии $a/4$ от точки b? Показатель преломления воды n.

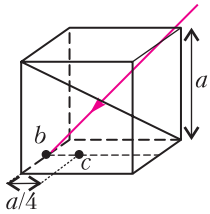


Рис. 9

9 класс

1. Гепард, заметив антилопу, убегающую от него со скоростью $v_А$, начинает ее преследовать. Разгоняясь равноускорено, он за время τ_1 развивает скорость $v_Г$, с которой бежит в течение времени τ_2. Затем, почувствовав перегрев своего тела, гепард прекращает преследование, останавливаясь с тем же по модулю ускорением, что и при разгоне. На каком максимальном расстоянии s_{max} должны находиться друг от друга в начальный момент эти животные, чтобы гепард смог полакомиться пойманной антилопой?

Замечание. Вследствие отсутствия потовых желез на теле и плохого отвода тепла через шкуру гепард не может развивать максимальную скорость (примерно 110 км/ч) в течение длительного времени без опасного для его организма перегрева.

2. В калориметр с водой, имеющей температуру t_1, помещают кусок льда, причем

масса льда равна массе воды. После установления теплового равновесия оказалось, что отношение массы льда к массе воды равно k. Пренебрегая теплообменом калориметра с окружающей средой, определите начальную температуру t_2 льда. Удельные теплоемкости льда и воды $c_л$ и $c_в$ соответственно, удельная теплота плавления льда λ, а температура плавления льда t_0.

3. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 10, подключена к источнику постоянного напряжения в точках A и D. Известно, что сила тока через резистор сопротивлением R_2 равна I_2. Пренебрегая сопротивлением проводов, определите силу тока I_1, текущего через резистор сопротивлением R_1. Считайте, что $R_1 = R_4 = 2R$, $R_2 = R_3 = R$.

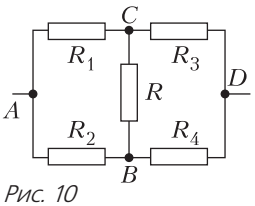


Рис. 10

4. С помощью тонкой собирающей линзы получено мнимое изображение предмета с увеличением Γ_1. Когда, не двигая линзу, сместили предмет параллельно самому себе на расстояние Δa, увеличение изображения предмета стало равным Γ_2. Найдите оптическую силу линзы D.

10–11 классы

1. Задача. Вертолет Ми-171 массой m неподвижно завис над поверхностью Земли. Какую мощность N развивает при этом его двигатель, если диаметр винта вертолета d? Считайте, что доля мощности двигателя, расходуемая на образование вертикальной струи воздуха, составляет η от его полной мощности, а скорость воздуха в этой струе примерно одинакова по всему ее сечению. Плотность воздуха ρ.

Вопросы. Сформулируйте второй и третий законы Ньютона.

2. Задача. Цилиндр A соединен с сосудом B короткой трубкой с краном (рис.11). В исходном состоянии в сосуде и в цилиндре справа от поршня находились равные количества гелия при одинаковой температуре и давлении p_0. Закрыв кран, объем гелия в цилиндре изобарно уменьшили в n раз, а гелий в сосуде нагрели так, что его давление возросло в k раз. Затем, зафиксировав положение поршня, открыли кран. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом гелия с окружающими телами, определите установившееся давление p в сосуде.

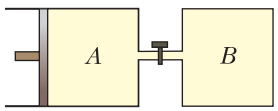


Рис. 11

Вопросы. Запишите уравнение Менделеева–Клапейрона (уравнение состояния идеального газа). Какими уравнениями описываются изотермический, изобарный и изохорный процессы?

3. Задача. По двум проводящим длинным шинам, установленным под углом α к горизонту, поступательно соскальзывает расположенный перпендикулярно шинам медный брусок массой m (рис.12). Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле, модуль индукции которого B.

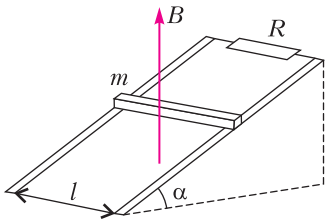


Рис. 12

Сверху шины замкнуты на резистор сопротивлением R. Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска μ, а расстояние между шинами l. Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найдите тепловую мощность N, выделяющуюся в резисторе при движении бруска с установившейся скоростью.

Вопросы. Сформулируйте закон электромагнитной индукции и правило Ленца.

4. Задача. Тонкая собирающая линза плотно вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме (рис.13). Точечный источник света располагается на главной оптической оси на удвоенном фокусном расстоянии от линзы. При этом на экране, установленном в фокальной плоскости по другую сторону от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, наблюдается светлое пятно диамет-

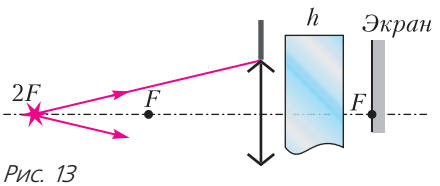


Рис. 13

ром d. Каким станет диаметр d_1 светлого пятна на экране, если между ним и линзой поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной h с показателем преломления n? Фокусное расстояние линзы F. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедливы приближенные формулы: $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$.

Вопросы. Какие линзы называют тонкими? Что такое фокусное расстояние и оптическая сила тонкой линзы?

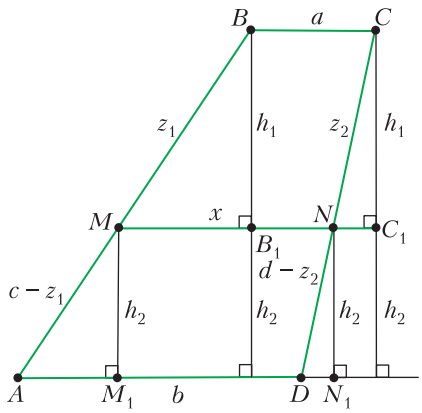
Публикацию подготовил С.Чесноков

Разыскивается... трапеция

В элементарной геометрии широко известна такая задача:

Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции с концами на ее боковых сторонах, делящего площадь трапеции пополам.

Один из путей решения состоит в следующем. Введем обозначения, как показано на рисунке.



Положим $MN = x$. После исключения отношения высот трапеций $\frac{h_2}{h_1}$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{a+x}{2}\right)h_1 = \left(\frac{b+x}{2}\right)h_2, \\ \left(\frac{a+x}{2}\right)h_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)(h_1+h_2) \end{cases} \qquad (1)$$

легко получим

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \qquad (2)$$

А теперь зададимся вопросом, при каком условии отрезок MN делит пополам дополнительно еще и периметр трапеции. Очевидно, что для этого должно выполняться условие

$$2z_1 + 2z_2 = c + d + b - a. \qquad (3)$$

Здесь $z_1 = MB$, $z_2 = CN$, $c = AB$, $d = CD$.

Из первого уравнения системы (1) вытекает

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{a+x}{b+x}. \qquad (4)$$

Из подобия треугольников AMM_1 и MBB_1 следует

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{c-z_1}{z_1}. \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) выражается z_1:

$$z_1 = \frac{c(b+x)}{a+b+2x}. \qquad (6)$$

Из подобия треугольников NCC_1 и DNN_1 следует

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{d-z_2}{z_2}. \qquad (7)$$

Из формул (4) и (7) выводим

$$z_2 = \frac{d(b+x)}{a+b+2x}. \qquad (8)$$

Объединив формулы (3), (6), (8), получим

$$\frac{2\big(b(c+d)+x(c+d)\big)}{a+b+2x} = (c+d)+(b-a).$$

Это равенство последовательно преобразуется так:

$$(c+d)(b-a) = (b+a)(b-a) + 2x(b-a),$$

$$\frac{c+d}{2} = \frac{a+b}{2} + x.$$

С учетом формулы (2) приходим к окончательному результату:

$$\frac{c+d}{2} = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

В силу обратимости всех выкладок это равенство можно сформулировать так:

Отрезок, параллельный основаниям трапеции, с концами на ее боковых сторонах делит одновременно площадь трапеции и ее периметр пополам в том и только в том случае, если среднее арифметическое боковых сторон трапеции равно сумме среднего арифметического и среднего квадратического оснований трапеции.

В.Дроздов

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. В 81 раз.

Пусть квадратик имеет размеры 1×1, а квадрат $n\times n$. Тогда площадь креста равна $2n-1$ (вертикальный столбик имеет размеры $n\times1$, горизонтальная строка $1\times n$, а площадь квадратика мы сосчитали дважды). Из равенства $2n-1=17$ получаем, что $n=9$. Значит, площадь квадрата равна $9\times9=81$.

2. Предположим, что оба мальчика не ошиблись. Поскольку Петя не ошибся, то общее количество принесенных конфет четно (в два раза больше количества конфет, принесенных Петей). Так как Коля принес целое количество конфет и это треть от четного числа, то он принес четное число конфет. Но, по его словам, он отдал девочкам нечетное количество конфет, так как количества конфет, доставшихся Маше и Тане, имеют разную четность (различаются на 3), а сумма двух чисел разной четности нечетна. Получили противоречие.

3. 5.

Пусть в комнате k лжецов. Тогда первые k человек сказали правду (и, следовательно, были рыцарями), а остальные $(10-k)$ соврали (и были лжецами). Значит, $k=10-k$, откуда $k=5$.

4. Не может.

Предположим, что сумма могла равняться 8900098. У каждого из слагаемых одна и та же последняя цифра N. Значит, последняя цифра суммы равна последней цифре числа $13N$. Отсюда следует, что $N=6$. Но тогда каждое из слагаемых делится на 6, т.е. делится на 3. Следовательно, и сумма всех чисел делится на 3. Но по признаку делимости на 3 число 8900098 на 3 не делится. Противоречие.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №1)

17. 4.

Рассмотрим число $\overline{abcde}$ с такими свойствами. Оно делится на 5, поэтому $e=5$. Так как оно делится на 11, то по признаку делимости знакопеременная сумма цифр S делится на 11: $S=a-b+c-d+5\,\vdots\,11$. Наибольшего значения она достигает, когда с плюсом берутся самые большие цифры, а наименьшего – когда самые маленькие. Таким образом, $S\le7+6-4-3+5=11$ и $S\ge4+3-7-6+5=-1$. Заметим, что среди пяти цифр числа ровно 3 нечетные, значит, S нечетно. Итак, S делится на 11, нечетно и $-1\le S\le11$, значит, $S=11$. Такая знакопеременная сумма цифр достигается только тогда, когда с плюсом берутся самые большие цифры. Тем самым, 6 и 7 стоят на первом и третьем местах, а 3 и 4 на втором и четвертом. Это дает 4 возможные комбинации: 63745, 64735, 73645, 74635.

18. Так быть могло.

Приведем пример. Пусть в конструкторе Пети четыре равнобедренных треугольника с ребрами по 2 см и основанием 1 см, у Васи – три таких же треугольника, а четвертый – равносторонний треугольник со стороной 1 см. Тогда Петя сможет собрать тетраэдр, как на рисунке 1,*а*, а Вася – как на рисунке 1,*б*.

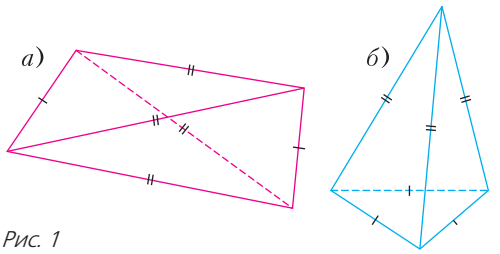


Рис. 1

19. а, б) Да, найдутся.

Например, подходят числа $1\cdot100!+1$, $2\cdot100!+1$, $3\cdot100!+1$, …, $100\cdot100!+1$. Сумма любых k из них (где k от 1 до 100) будет делиться на k, поскольку имеет вид $N\cdot100!+k$, а 100! делится на k, так как делится на все числа от 1 до 100. Значит, среднее арифметическое любых нескольких чисел из нашего примера – целое. Покажем еще, что в приведенном примере нет чисел с общим множителем, большим 1. Предположим противное: какие-то два числа из примера – скажем, $a\cdot100!+1$ и $b\cdot100!+1$ – делятся на простое число p. Тогда $p>100$ (иначе на p делилось бы и число 100! и, следовательно, число 1, что невозможно). Разность наших двух чисел $(a-b)\cdot100!$ тоже делится на p, но у этой разности, очевидно, нет простых делителей, больших 100. Противоречие.

20. а) 4998; б) 4802.

Оценка. Разобьем доску на вертикальные доминошки, раскрасим их в шахматном порядке (каждая доминошка целиком белая или целиком черная).

а) На 50^2 белых доминошках должно быть хотя бы 50^2-1 закрашенных клеток, чтобы нельзя было выбрать 2 белые доминошки без закрытых клеток. Аналогично с черными. Значит, всего закрашено хотя бы $2\left(50^2-1\right)=4998$ клеток.

б) Оценка для этого пункта доказывается аналогично: всего закрашено хотя бы $2\left(50^2-99\right)=4802$ клетки.

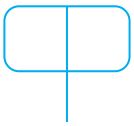


Рис. 2

Пример. Назовем средней линией доминошки отрезок, разделяющий две клетки, из которых она состоит. Заметим, что если у двух доминошек средние линии лежат на одной фигуре Ф (рис.2), то эти доминошки касаются по отрезку.

а) Поставим в левый верхний угол квадрат 2×2, разместим в нем фигуру Ф (аналогичный пример, но для квадрата со стороной 10, а не 100, показан на рисунке 3). На остальном поле закроем клетки в шахматном порядке (их будет

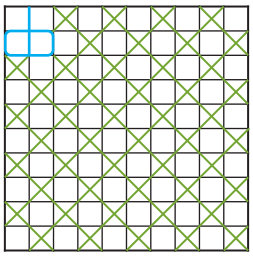


Рис. 3

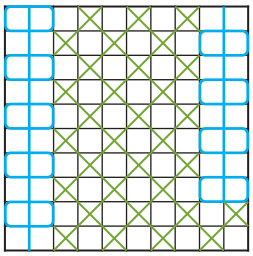


Рис. 4

$2\left(50^2-1\right)=4998$). Если две доминошки получится поставить на незакрытые клетки, то их средние линии будут лежать на фигуре Ф, а значит, они стоят не разрешенным образом.

б) Возьмем 99 квадратов 2×2 в первом столбце и последнем столбце (аналогичный пример для квадрата со стороной 10 показан на рисунке 4). В каждом из них разместим фигуру Ф, а на остальном поле закроем клетки в шахматном порядке (закрытых клеток будет 4802). Фигуры Ф покрывают все линии сетки, которые не являются границами закрытых клеток. Раз в примере 99 букв Ф, то больше 99 доминошек нельзя поставить разрешенным образом.

ПРЯМОУГОЛЬНИК ИЗ КВАДРАТОВ

Задача 1. Третий вопрос

Ответ: нет.

Предположим, что прямоугольник $1\times\sqrt{2}$ разрезан на n квадратов со сторонами $a_1+b_1\sqrt{2}$, $a_2+b_2\sqrt{2}$, …, $a_n+b_n\sqrt{2}$. Площади квадратов равны соответственно

$$a_1^2+2a_1b_1\sqrt{2}+2b_1^2,\ \ a_2^2+2a_2b_2\sqrt{2}+2b_2^2,\ \ \ldots$$
$$\ldots,\ \ a_n^2+2a_nb_n\sqrt{2}+2b_n^2.$$

Введем обозначения:

$$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,\ \ B=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2,$$
$$C=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Тогда A, B, C – рациональные числа. Площадь прямоугольника равна сумме площадей квадратов, значит, $\sqrt{2}=A+2C\sqrt{2}+B$, или

$$\sqrt{2}\cdot(1-2C)=A+B\ .$$

Если $C=1/2$, то $A=B=0$, так как A и B неотрицательны. Значит, $a_1=\ldots=a_n=b_1=\ldots$ $\ldots=b_n=0$, что невозможно. Следовательно, обе части равенства можно разделить на $1-2C$. Таким образом, $\sqrt{2}=(A+B)/(1-2C)$. Получаем противоречие, так как иррациональное число не может быть равно частному двух рациональных. Здесь мы вновь опирались на аддитивность площади.

Задача 3

Ответ: все прямоугольники с рациональным отношением сторон.

Рассмотрим прямоугольник $\left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$. Его x-площадь равна $(a+bx)(c+dx)$. Мы хотим, чтобы она была неотрицательна, т.е.

$$(a+bx)(c+dx)\ge 0\Leftrightarrow bdx^2+(bc+ad)x+ac\ge 0\ .$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) Оба числа b и d равны нулю. В этом случае отношение сторон равно a/c, что рационально.

2) Ровно одно из чисел b и d, например b, равно нулю. Тогда $a\ne 0$, следовательно, $bc+ad\ne 0$. Значит, для каких-то x неравенство не выполняется.

3) Ни одно из чисел b и d не равно нулю. В этом случае старший коэффициент $bd\ne 0$. Из того, что квадратный трехчлен всегда неотрицателен, следует, что у него неположительный дискриминант. Таким образом, $0\ge(bc+ad)^2-4abcd=$ $=(bc-ad)^2$, откуда $bc=ad$, что и дает рациональное отношение сторон.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Удар доски о мяч можно считать упругим. При ударе о камушек часть энергии движущейся доски расходуется на неупругую деформацию в месте их соприкосновения. Поэтому камушек получает меньшую скорость, чем мяч.

2. Пластилин, относящийся к пластичным материалам, при кратковременных (ударных) нагрузках проявляет упругие свойства, из-за чего выпуклый многогранник отскакивает от пола, почти не изменив своей формы.

3. а) Уменьшаться; б) увеличиваться. Напряженное состояние пружины при нагревании спадает (вплоть до потери способности восстанавливать прежнюю форму), а при охлаждении – растет.

4. Стержень станет испытывать сжатие, а из-за неравномерности прогрева стержня произойдет его изгиб.

5. Большая прочность железобетонных конструкций возможна только благодаря тому, что температурный коэффициент расширения бетона очень близок к температурному коэффициенту расширения железа.

6. Преимущество в том, что бетонное основание испытывает деформацию сжатия, даже если сама конструкция в целом испытывает растяжение, а прочность бетона при сжатии значительно больше, чем при растяжении.

7. При изменении температуры кирпич и цементный раствор, сделанные из материалов с разными коэффициентами температурного расширения, будут по-разному меняться в объеме, что приведет к большим внутренним напряжениям в местах их контактов, из-за чего печь растрескается.

8. Форма сохранится только у аморфного стеклянного кубика. Монокристалл кварца обладает анизотропией – его свойства, в том числе и тепловые, зависят от направления.

9. Древесина обладает анизотропией, что связано с наличием в ней волокон, между которыми находятся воздушные пузырьки. Это, в том числе, приводит к различным значениям теплопроводности по разным направлениям.

10. Металлы обладают высокой теплопроводностью, поэтому успевают прогреться или охладиться по всему объему и в них не возникает сильных напряжений. Камни же прогреваются или охлаждаются неравномерно, и в них нарастают большие внутренние напряжения, приводящие к растрескиванию.

11. При охлаждении заклепка, сокращаясь, сильнее стянет склепанные листы.

12. Высокая температура ускоряет диффузию, а сильные удары молота способствуют сближению кусков железа.

13. Олово не смачивает покрывающие алюминий его оксиды.

14. При увеличении давления вследствие деформации площадь контакта между свариваемыми деталями становится больше, электрическое сопротивление падает и через контактную зону проходит достаточный ток даже при низком напряжении. Кроме того, под давлением металлы становятся пластичнее, улучшается контакт между ними.

Микроопыт

При воздействии частых переменных нагрузок снижается прочность металла, в конце концов он «не выдерживает» и ломается в месте сгиба.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. 6.

Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$. Тогда условия задачи запишутся в виде

$$1 + a + b = 4 + 2c + d \text{ и } 4 + 2a + b = 1 + c + d.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $-3 - a = 3 + c$, т.е. $a + c = -6$. Но по теореме Виета $-a$ – это сумма корней первого трехчлена, а $-c$ – сумма корней второго трехчлена, откуда и следует требуемое.

2. 8 рыцарей.

Докажем, что ни один из рыцарей не мог сказать ни одной из фраз «Мое число больше 9» и «Мое число больше 10». В самом деле, если бы это было возможно, то задуманное рыцарем целое число было бы не меньше 10. Но тогда он не мог сказать ни одной из фраз «Мое число меньше 1», «Мое число меньше 2», …, «Мое число меньше 10». Значит, рыцарей было не больше восьми.

Покажем, что рыцарей могло быть 8. Пусть первый рыцарь загадал число 2, второй 3, … …, восьмой 9, а лжецы загадали числа 5 и 6. Тогда k-й рыцарь мог сказать фразы «Мое число больше k» и «Мое число меньше $k + 2$», а лжецы могли сказать фразы: один – «Мое число больше 9» и «Мое число меньше 1», а другой – «Мое число больше 10» и «Мое число меньше 2».

3. Пронумеруем числа по часовой стрелке: $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ так, чтобы число a_{100} было наименьшим. Тогда остаток от деления a_{100} на a_1 будет равен $a = a_{100}$ (ибо $a_1 > a_{100}$), а остаток b от деления a_{99} на a_{100} будет меньше, чем a_{100}. Значит, $a > b$ – единственные остатки, полученные Васей.

Предположим, что $a_i < a_{i+1}$ при некотором $i < 100$. Тогда остаток от деления a_i на a_{i+1} равен a_i, что больше, чем a (и тем более – чем b). Это невозможно. Значит, $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$. Итак, Петя при делении a_{i+1} на a_i (при любом $i = 1, 2, \ldots, 99$) будет получать в остатке a_{i+1}, поскольку $a_{i+1} < a_i$. При делении же a_1 на a_{100} он получит остаток c, меньший a_{100}. Значит, все его остатки $c < a_{100} < a_{99} < \ldots < a_2$ различны.

4. Обозначим через Γ' окружность, описанную около треугольника BHC (рис.5). На касательной к Γ' в точке H отметим точку X, лежащую внутри угла BCH. Тогда $\angle BHX = \angle BCH = \angle B_1C_1H$ (последнее равенство следует из того, что $BC \parallel B_1C_1$). Значит, окружность ω касается прямой HX и окружности Γ' в точке H.

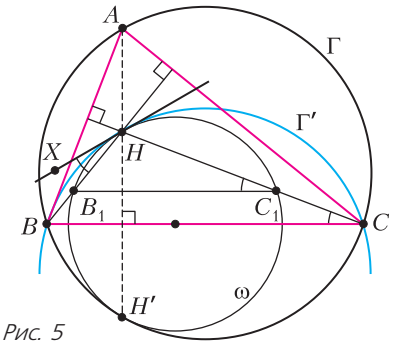


Рис. 5

Обозначим через H' точку, симметричную H относительно прямой BC (как известно, эта точка лежит на окружности Γ). Итак, при симметрии относительно BC окружность Γ' переходит в окружность Γ, а окружность ω – в себя, поскольку центр ω лежит на прямой BC. Поскольку ω касается Γ', она касается и Γ, что и требовалось доказать.

5. $3 \cdot 1000^2 - 2000 = 2998000$ клеток.

Рассмотрим произвольную закраску, удовлетворяющую условию. Разобьем все клетки поверхности на «каемки» так, как показано на рисунке 6, – по 500 каемок вокруг каждой из восьми

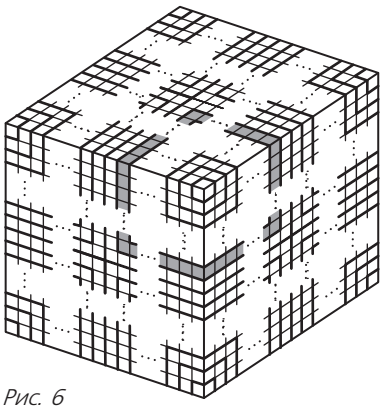


Рис. 6

вершин (одна из каемок отмечена серым). Тогда в k-й каемке, считая от вершины, будет $S_k = 6k - 3$ клеток. Так как никакие две закрашенных клетки не могут быть соседними, в этой каемке будет не более $\left[\frac{S_k}{2}\right] = 3k - 2 = \frac{S_k - 1}{2}$ закрашенных клеток. Просуммировав по всем 4000 каемкам и учтя, что их общая площадь равна $6 \cdot 1000^2$, получаем, что общее количество закрашенных клеток не превосходит $\frac{6 \cdot 1000^2 - 4000}{2} = 3 \cdot 10^6 - 2000$.

Осталось привести пример, показывающий, что столько клеток закрасить можно. Назовем две противоположные грани куба *верхней* и *нижней*, а остальные – *боковыми*. На каждой из боковых граней можно отметить половину клеток шахматным образом. После этого на верхней и нижней гранях можно будет также окрасить половину клеток во всех строках, кроме двух крайних, оставив их пустыми (на рисунке 7 видны две

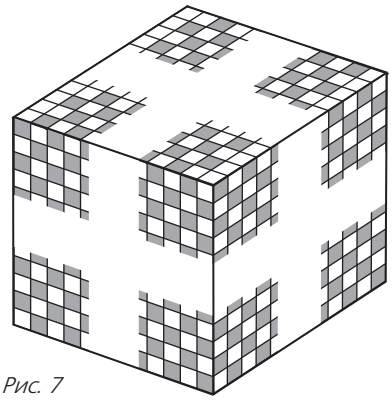


Рис. 7

боковые и верхняя грани). Нетрудно видеть, что при такой закраске в каждой каемке будет максимальное возможное количество закрашенных клеток. (Вместо проверки каждой каемки можно заметить, что вся поверхность разбивается на полоски 1×100, четыре из которых пустые, а в остальных закрашена ровно половина клеток.)

6. Пусть n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ – данные числа. Сумма трех наименьших из них равна $3n + 3 = 3(n+1)$, а сумма трех самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n + 1$ и $n + 2$ четно, т.е. равно произведению чисел 2 и k, где $k > 3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трех различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

7. Да, может.

На рисунке 8 показано, как можно положить три пары прямоугольников так, чтобы для каждой пары все точки A, B, C, D, E, F, G, H были

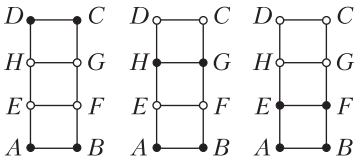


Рис. 8

вершинами ровно по разу. Одинаковыми точками отмечены вершины одного из прямоугольников пары.

8. Обозначим $\angle CBM = \alpha$. Поскольку BM – внешняя биссектриса угла ABC, то $\angle ABM = 180° - \alpha$ и $\alpha < 90°$ (рис.9). Опустим из точки D перпендикуляр DH на прямую BC. Так как в треугольнике BCD углы при вершинах B и C

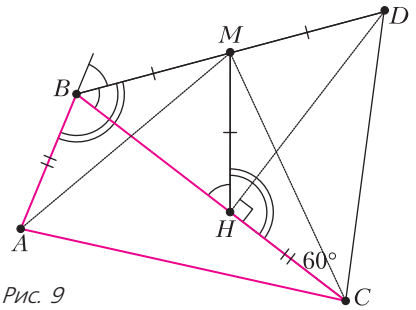


Рис. 9

острые, точка H лежит на отрезке BC. Поскольку DCH – прямоугольный треугольник с углом 60°, имеем $CH = \frac{CD}{2} = AB$.

Треугольник BHD – прямоугольный, HM – его медиана, проведенная к гипотенузе, поэтому $HM = \frac{BD}{2} = BM$. Следовательно, $\angle MHB = \angle HBM = \alpha$, откуда мы получаем, что $\angle MHC = 180° - \alpha = \angle ABM$. Поскольку также $AB = CH$ и $BM = MH$, треугольники ABM и CHM равны. Таким образом, $AM = MC$, что и требовалось.

10. $\frac{1}{396}$.

Если Петя выберет числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{198}, \frac{1}{198}, \ldots, \frac{1}{198}$, то, как бы ни разбивал эти числа Вася, в паре с числом $\frac{1}{2}$ будет число $\frac{1}{198}$. Их произведение будет равно $\frac{1}{396}$, а остальные будут не больше него. Тогда на доске окажется число $\frac{1}{396}$.

Оценку можно провести так же, как в решении задачи 10 для 11 класса.

10 класс

1. 9 рыцарей.

2. Обозначим через a, b, c и d длины сторон, положим $N = 10^{100}$.

Пусть d – наибольшая сторона. Согласно условию, $a + b + c$ делится на d, т.е. $a + b + c = kd$ для некоторого натурального k. Ясно, что $a + b + c > d$ (длина отрезка меньше длины ломаной с теми же концами), поэтому $k > 1$. Кроме того, так как $a \le d$, $b \le d$ и $c \le d$, имеем $a + b + c \le 3d$, т.е. $k \le 3$.

Случай $k = 3$ возможен только при $a = b = c = d$. В этом случае наш четырехугольник – ромб.

Иначе $1 < k < 3$, откуда $k = 2$. Но в этом случае имеем $N = a + b + c + d = 2d + d = 3d$. Таким образом, получаем противоречие, поскольку N не делится на 3.

3. 2016.

Оценка. Докажем, что в первой строке таблицы, в которой числа расставлены по правилам, не менее трех рациональных чисел (и, соответственно, не более 2016 иррациональных чисел). Каждое из чисел, встречающихся в таблице, записано ровно в двух клетках, одна из которых находится в верхней строке, а другая – в нижней. Рассмотрим некоторый столбец, пусть в его верхней клетке стоит число a_1, а в нижней a_2, далее коротко обозначаем такой столбец (a_1, a_2). Покрасим столбец (a_1, a_2). Найдем столбец, у которого число a_2 находится в верхней клетке, и покрасим его. Если этот столбец (a_2, a_1), то завершим процесс. Иначе, если этот столбец (a_2, a_3), где $a_3 \ne a_1$, продолжим: покрасим столбец, у которого число a_3 находится в верхней клетке, и т.д. – пока не дойдем до столбца, у которого в нижней клетке находится a_1 (это обязательно произойдет, поскольку числа, равные $a_2, a_3, \ldots$, красятся парами). По окончании процесса получим множество покрашенных столбцов (a_1, a_2), (a_2, a_3), …, (a_k, a_1), которое назовем *циклом* длины k. Если остались еще непокрашенные столбцы, выделим еще один цикл и т.д. В конечном итоге множество всех столбцов таблицы разобьется на непересекающиеся циклы. Так как сумма длин всех циклов равна 2019, найдется цикл нечетной длины.

Рассмотрим этот цикл: (a_1, a_2), (a_2, a_3), … …, (a_{2t+1}, a_1), где $t \ge 1$. По условию $a_1 + a_2 = b_1$, $a_2 + a_3 = b_2$, …, $a_{2t+1} + a_1 = b_{2t+1}$, где все b_i – рациональные числа. Тогда

$$2a_1 = (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - \ldots$$
$$\ldots - (a_{2t} + a_{2t+1}) + (a_{2t+1} + a_1) =$$
$$= b_1 - b_2 + b_3 - \ldots - b_{2t} + b_{2t+1}$$

– рациональное число, поэтому a_1 рационально. Аналогично, все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2t+1}$ рациональны, и их не менее $2t + 1 \ge 3$.

Пример. На рисунке 10 приведен пример таблицы, заполненной по правилам, в верхней строке которой 2016 иррациональных чисел.

1	2	3	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	…	$1008+\sqrt{2}$	$1008-\sqrt{2}$
2	3	1	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	…	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$

Рис. 10

4. Пусть $n \ge 2018$. Заметим, что $P_n(a) = P_n(-a)$ при всех a. Значит, поскольку $P_n(x)$ имеет ненулевой корень, он имеет и отрицательный корень, откуда $a_{n+1} < 0$. Далее, поскольку

$P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$, имеем

$$P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2 P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = 0 + a_{n+1} < 0. \quad (*)$$

Так как степень многочлена $P_{n+1}(x)$ четна, а старший коэффициент положителен, при достаточно больших по модулю отрицательных x он принимает положительные значения. Теперь из $(*)$ следует, что у этого многочлена есть корень на интервале $(-\infty; a_{n+1})$. Значит, и $a_{n+2} < a_{n+1}$. Итак, мы получили, что $a_{n+2} < a_{n+1}$ при всех $n \geq 2018$. Это означает, что последовательность $(a_{2019}, a_{2020}, a_{2021}, \ldots)$ – убывающая.

5. Пусть M – середина отрезка AC, S – вторая точка пересечения прямой BL с окружностью ω, N – середина дуги ABC (рис.11). Тогда S – середина меньшей дуги AC окружности ω, а точки M, S, N лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Прямая BN – внешняя биссектриса угла ABC, поэтому $BN \perp BL$. Тогда $\angle LBN + \angle LMN = 90° + 90° = 180°$, откуда мы получаем, что четырехугольник $BLMN$ – вписанный. Обозначим $\angle MBL = \alpha$. Тогда $\angle MNL = \alpha$. Также, так как четырехугольник $BNDS$ – вписанный, $\angle SND = \angle SBD = \alpha$.

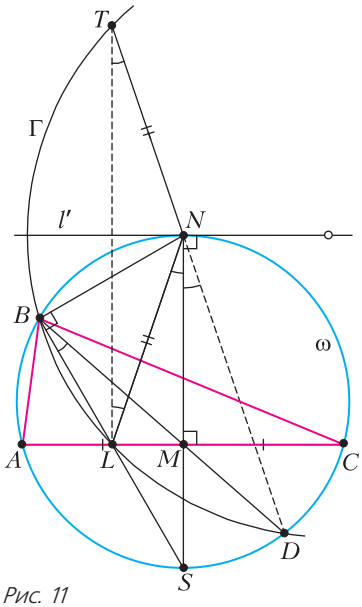


Рис. 11

На продолжении отрезка DN за точку N отметим точку T так, что $LN = NT$. Тогда $\angle LNT = 180° - \angle LNM - \angle SND = 180° - 2\alpha$, откуда следует, что $\angle LTN = \angle TLN = \alpha$. Значит, $\angle LTD = \alpha = \angle LBD$, поэтому точка T лежит на окружности Γ, описанной около треугольника BDL. Пусть l' – касательная в точке N к окружности ω. Поскольку SN – диаметр ω, то $l' \perp SN$ и $l' \parallel AC$. Как мы знаем, SN является внешней биссектрисой угла LNT, поэтому l' – биссектриса угла LNT. Так как $TL = TN$, получаем, что l' является серединным перпендикуляром к отрезку TL, а потому проходит через центр окружности Γ. Таким образом, прямые l и l' совпадают и прямая l касается ω.

7. Докажем, что $x_n > x_{n+1}$. Положим $A = \sqrt[2^{n+1}]{a}$ и $B = \sqrt[2^{n+1}]{b}$. Легко видеть, что $B > A > 1$, отсюда $\frac{A+B}{2} > 1$. Тогда имеем

$$x_{n+1} = 2^{n+1}(B - A) > 0,$$

$$x_n = 2^n\left(B^2 - A^2\right) = 2^{n+1}(B - A)\frac{A+B}{2} = x_{n+1} \cdot \frac{A+B}{2} > x_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

8. Пусть O – центр окружности Ω; иначе говоря, O – середина диаметра BB'. Обозначим через H' и P проекции точек B' и O соответственно на прямую AC (рис.12). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к MN, получаем, что P – середина MN. Поскольку O – середина BB', P является серединой HH'. Получаем, что H и H' симметричны относительно середины MN, откуда $HM = H'N$ и $H'M = HN$. Имеем

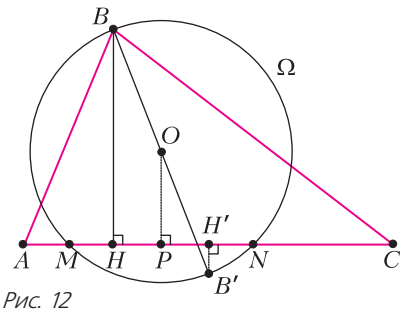


Рис. 12

$$AH' = AM + H'M = HM + H'M = H'N + HN = H'N + CN = CH'.$$

Таким образом, $B'H'$ – серединный перпендикуляр к отрезку AC, следовательно, $AB' = CB'$.

11 класс

2. Пусть D_1, D_2, D_3 – соответственно дискриминанты данных трехчленов. Первые два уравнения имеют только целые корни, поэтому $D_1 = m^2$, $D_2 = n^2$, где числа m и n можно считать целыми неотрицательными. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что $4 = m^2 - n^2$, т.е. $4 = (m-n)(m+n)$. Числа $m - n$ и $m + n$ – одной четности, поэтому это равенство может выполняться, только если $m - n = m + n = 2$. Но тогда

$n = 0$ и, значит, дискриминант третьего уравнения $D_3 = n^2 - 4 = -4$ отрицательный.

3. $55^2 = 3025$ клеток.

Разобьем доску на 9 квадратов 30×30, 6 прямоугольников 10×30 и один квадрат 10×10 (рис.13). В каждом квадрате 30×30 клетки разбиваются на 15^2 четверок так, что расстояние между любыми клетками в одной четверке равно 15 (каждая четверка состоит из клеток с координатами (a,b), $(a,b+15)$, $(a+15,b)$ и $(a+15, b+15)$). Тогда в любой четверке может быть отмечено не более одной клетки, т.е. общее число отмеченных клеток в таком квадрате не превосходит 15^2.

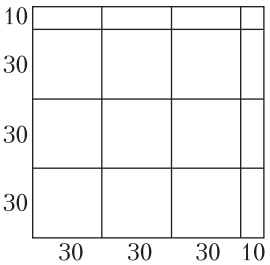


Рис. 13

Аналогично, каждый прямоугольник 10×30 (скажем, с длинной горизонтальной стороной) разбивается на пары клеток, отстоящих друг от друга на 15 (с координатами (a,b) и $(a+15,b)$) – поэтому в нем не более $15 \cdot 10$ отмеченных клеток. Наконец, в квадрате 10×10 всего 10^2 клеток. Итого, отмеченных клеток не больше чем $9 \cdot 15^2 + 6 \cdot 15 \cdot 10 + 10^2 = (3 \cdot 15 + 10)^2 = 55^2$.

Пример показан на рисунке 14.

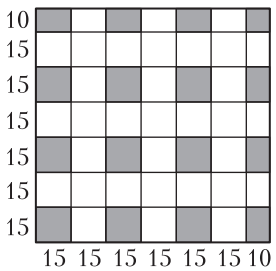


Рис. 14

5. Прямая CF перпендикулярна плоскости ABD, поэтому $CF \perp AD$. Аналогично, $BE \perp AD$. Поэтому прямые CF и BE параллельны плоскости α или лежат в ней. Точки B, C, E и F лежат на сфере ω, описанной около тетраэдра $ABCD$. Также, поскольку $\angle BEC = 90° = \angle BFC$, точки B, C, E и F лежат на сфере ω', построенной на отрезке BC как на диаметре.

Если сферы ω и ω' не совпадают, все их общие точки лежат в одной плоскости, обозначим ее через β. В плоскости β лежат прямые BE и CF, каждая из которых параллельна плоскости α или лежит в этой плоскости. Также прямые BE и CF не параллельны, поскольку они перпендикулярны пересекающимся плоскостям ACD и ABD. Таким образом, плоскость β параллельна плоскости α или совпадает с ней, а расстояния от точек E и F до α равны расстоянию между плоскостями α и β (рис.15).

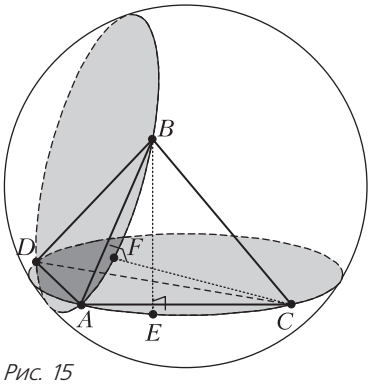


Рис. 15

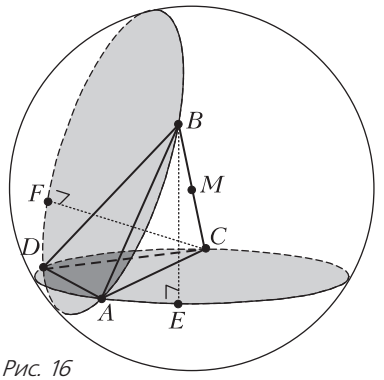


Рис. 16

Если же сферы ω и ω' совпадают, то их общий центр M является серединой отрезка BC и лежит в плоскости α. Следовательно, расстояния от точек B и C до α равны. Поскольку прямая BE параллельна α, расстояния от B и E до α равны. Аналогично, расстояния от C и F до α тоже равны, а тогда точки E и F равноудалены от α (рис.16).

7. Пусть $t = \sqrt[2^{n+1}]{a}$. Заметим, что $t \neq 1$. Тогда

$$x_{n+1} = 2^{n+1}(t-1) \text{ и } x_n = 2^n\left(t^2 - 1\right).$$

Следовательно,

$$x_n - x_{n+1} = 2^n\left(t^2-1\right) - 2^{n+1}(t-1) = \\ = 2^n\left(t^2 - 2t + 1\right) = 2^n(t-1)^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

8. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC, точка I является точкой пересечения биссектрис (рис. 17). Докажем, что точки B, D, P, I лежат на одной окружности. Аналогично покажем, что точки C, E, P, I лежат на одной окружности,

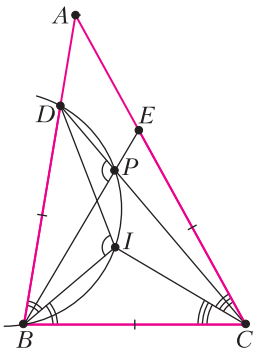


Рис. 17

и задача будет решена. Достаточно установить равенство $\angle BPD = \angle BID$. Биссектриса BI угла ABC является осью симметрии равнобедренного треугольника BDC, поэтому

$$\angle BID = \angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = \\ = 180° - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}.$$

Далее,

$$\angle BPD = \angle PBC + \angle PCB = \angle EBC + \angle DCB.$$

Из равнобедренности треугольника BCE получаем $\angle EBC = \frac{180° - \angle C}{2} = 90° - \frac{\angle C}{2}$ и, аналогично, $\angle DCB = 90° - \frac{\angle B}{2}$. Отсюда

$$\angle BPD = 180° - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = \angle BID,$$

что и требовалось доказать.

9. $m = 28$.

Для каждого натурального n обозначим $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждому ученику сопоставим множество всех дней, когда он ходил в бассейн (это будет подмножество в X_{30}). Итого, мы получили набор из m (согласно условию, непустых) подмножеств в X_{30}. Условие равносильно тому, что во всех подмножествах разные количества элементов и ни одно из них не содержится в другом; назовем такой набор подмножеств *хорошим*. Таким образом, нам нужно найти максимальное число множеств в хорошем семействе подмножеств в X_{30}.

Докажем сначала, что такой набор не может содержать больше 28 множеств. Это очевидно, если в наборе есть 30-элементное подмножество, так как оно содержит любое другое. Значит, можно считать, что множества в наборе могут состоять лишь из 1, 2, …, 29 элементов (и их не больше 29). Пусть в хорошем наборе есть 29-элементное множество A и 1-элементное множество B. Так как B не содержится в A, они не пересекаются. Тогда любое другое подмножество в X_{30} либо содержит B, либо содержится в A. Значит, в этом случае хороший набор состоит лишь из двух подмножеств. Наконец, если в наборе нет 1- или 29-элементного подмножества, то в нем уже не более 28 множеств, что и требовалось.

Осталось предъявить пример хорошего набора из 28 подмножеств в X_{30}. Для этого покажем индукцией по $k \geq 2$, что существует хороший набор $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ подмножеств в X_{2k}, причем A_i содержит $i + 1$ элемент. В базовом случае $k = 2$ годятся подмножества $A_1 = \{1, 2\}$ и $A_2 = \{1, 3, 4\}$.

Пусть для некоторого k уже построен требуемый хороший набор $B_1, \ldots, B_{2k-2}$ подмножеств в X_{2k}. Тогда требуемый хороший набор подмножеств в X_{2k+2} можно построить так. Положим $A_{i+1} = B_i \cup \{2k+2\}$ при $i = 1, 2, \ldots, 2k-2$; эти множества содержат $3, 4, \ldots, 2k$ элементов соответственно. Наконец, положим $A_1 = \{2k+1, 2k+2\}$ и $A_{2k} = \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Нетрудно проверить, что они образуют требуемый хороший набор. Тем самым, переход индукции доказан.

10. $\frac{1}{8(n-1)}$.

Если Петя выберет числа 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4(n-1)}$, $\frac{1}{4(n-1)}$, …, $\frac{1}{4(n-1)}$, то, как бы ни расставлял эти числа Вася, число $\frac{1}{2}$ будет в одной паре с числом $\frac{1}{4(n-1)}$. Значит, одно из произведений будет равно $\frac{1}{8(n-1)}$, а остальные будут не больше него. Тогда на доске окажется число $\frac{1}{8(n-1)}$.

Покажем, как Вася может для любых чисел получить на доске число, не большее $\frac{1}{8(n-1)}$.

Перенумеруем числа в порядке убывания: $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{2n}$. Поставим в какое-то место на круге число x_1, от него по часовой стрелке через пустые места – числа $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Теперь поставим число x_{2n} между x_1 и x_n; дальше по часовой стрелке от x_{2n} расставим на пустых местах по очереди числа $x_{2n-1}, x_{2n-2}, \ldots, x_{n+1}$. Тогда произведениями пар соседних чисел будут

$$x_n x_{2n}, x_1 x_{2n}, x_2 x_{2n-1}, x_3 x_{2n-2}, \ldots, x_k x_{2n-k+1}, \ldots, x_n x_{n+1}$$

и

$$x_1 x_{2n-1}, x_2 x_{2n-2}, x_3 x_{2n-3}, \ldots, x_k x_{2n-k}, \ldots, x_{n-1} x_{n+1}.$$

Поскольку $x_k x_{2n-k+1} \leq x_k x_{2n-k}$, наибольшее произведение может быть лишь во второй строке.

Покажем, что $a = x_k x_{2n-k} \leq \frac{1}{8(n-1)}$ при $k \leq n-1$.

Действительно, из неравенств $x_k \leq x_{k-1} \leq \ldots \leq x_1$ следует, что $k x_k \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, поэтому

$$ka = k x_k \cdot x_{2n-k} \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_k) x_{2n-k}.$$

Аналогично, из неравенств

$$x_{2n-k} \leq x_{2n-k-1} \leq x_{2n-k-2} \leq \ldots \leq x_{k+1}$$

следует, что

$$(2n - 2k) x_{2n-k} \leq x_{2n-k} + x_{2n-k-1} + \ldots + x_{k+1} \leq \\ \leq x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{2n} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k.$$

Поэтому

$$2k(n-k)a \leq \\ \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k) = x(1-x),$$

где $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. Поскольку по неравенству о средних для двух чисел

$x(1-x) \le \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, получаем неравенство $x_k x_{n-2k} = a \le \frac{1}{8k(n-k)}$. Осталось показать, что $k(n-k) \ge n-1$ при $k \le n-1$. Но последнее неравенство можно переписать в виде $(k-1)(n-k-1) \ge 0$, а здесь обе скобки неотрицательны.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП LIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

7 класс

1. См. рис.18. Скорость движения шкалы температур $v_т = 0,8$ см/мин, скорость движения шкалы плотностей $v_п = 2,4$ см/мин, их относительная скорость $v = v_т + v_п = 3,2$ см/мин.

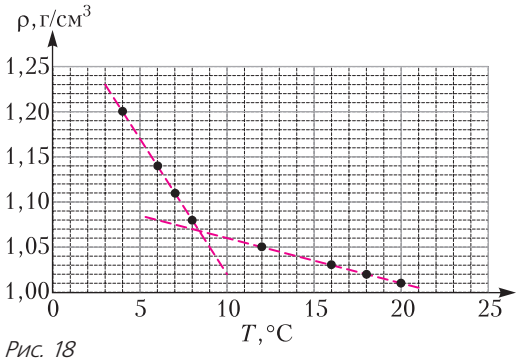


Рис. 18

2. $s_1 = s\frac{v_Ш + v_Ф}{2v_Ф} = 2,4$ км,

$s_2 = s\frac{v_Ш - v_Ф}{2v_Ф} = 1,2$ км.

3. На рисунке 19 слева приведен график зависимости пути от времени для второй машины относительно первой, а справа – для второй машины относительно дороги. Из графиков следует, что $v_{10} = 0,9$ км/мин (причем только один раз), $v_{2\max} = 1,5$ км/мин.

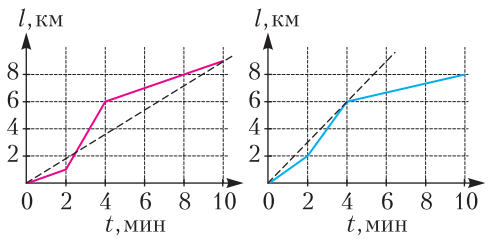


Рис. 19

4. $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2 - \rho = 1,8$ г/см^3.

8 класс

1. $s_1 = s\frac{v_{Ш1}}{v_Ф}\frac{v_{Ш2} + v_Ф}{v_{Ш1} + v_{Ш2}} = 2,16$ км,

$s_2 = s\frac{v_{Ш2}}{v_Ф}\frac{v_{Ш1} - v_Ф}{v_{Ш1} + v_{Ш2}} = 0,96$ км.

2. $F = \frac{3}{5}F_1 = 300$ Н; $F_2 = F_1 = 500$ Н.

3. Сила направлена вверх и равна $F = p_0 s$.

4. $C_{тв}/C_ж = 1/2$;

$\tau_п = \left(2,5 - \sqrt{2}\right)\tau_0 \approx$

$\approx 1,1\tau_0$; см. рис.20.

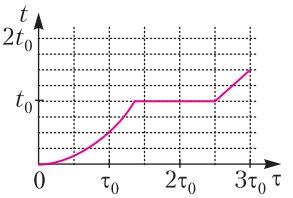


Рис. 20

9 класс

1. $s_1 = 1,36$ м, $s_2 = 1,2$ м, $\tau = 1,6$ с.

2. $m_л = \frac{m_2 - m_4}{\rho_в - \rho_л} = 90$ г;

$m_с = \frac{\rho_с}{\rho_в}\left(m_2 - m_1 - \frac{m_л\rho_в}{\rho_л}\right) \approx 10,1$ г;

$t = -\frac{\lambda\rho_л(m_3 - m_2)/(\rho_в - \rho_л)}{c_с m_с + c_л m_л} \approx -49,9$ °C.

3. $I_2 = I_1 = I = 1,0$ мА (оба амперметра стоят в верхнем ряду схемы); $R = 600$ Ом; $U_0 = 1,8$ В.

4. Один из возможных примеров расположения перегородок в сосуде приведен на рисунке 21, одна клетка соответствует 0,1 м. Объемы частей A, B и C составляют 0,1 м^3, 0,25 м^3 и 0,45 м^3 соответственно, часть D представляет собой полость, образованную горизонтальной и вертикальной перегородками.

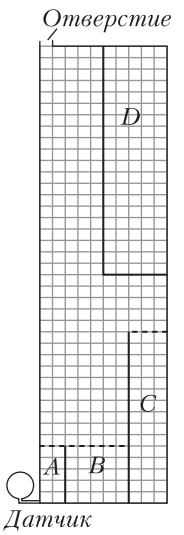


Рис. 21

5. $\beta = \alpha$.

10 класс

1. $u_0 = \sqrt{u^2 + (v \pm u\,\mathrm{tg}\,\alpha_0)^2}$, причем знак «+» соответствует случаю, когда спортсмен находится между катером и левым берегом, а знак «–» – между катером и правым берегом; $T = \frac{mu^2}{L\cos^2\alpha_0}$.

2. $\mu \approx 0,27$, если в течение всего времени столкновения шайба скользила по плите, и μ – любое, большее 0,27, если после столкновения проекция скорости шайбы на направление движения плиты сравняется со скоростью плиты.

3. 1) $R_x = 3$ кОм, $R_y = 2$ кОм, R_z – любое

(участок схемы BC можно преобразовать в сбалансированный мостик с не зависящим от R_z сопротивлением $R_{BC} = 2$ кОм);
2) $I_{AB} = 7$ мА, $I_{AC} = 5{,}8$ мА.

4. $\rho_1 = \rho_0 = \dfrac{p_0 \mathrm{M}}{RT_0} = 5{,}85$ кг/м^3 (плотность постоянна на высоте от 0 до 2 км), $p_1 = p_0 - \rho g h_1 =$ $= 442$ кПа.

5. 1) $F_{\text{тр}} = \mu m\sqrt{g^2 + \left(v_0^2/R\right)^2}$;

2) $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\mu g)^2 + \left(1+\mu^2\right)\left(v_0^2/R\right)^2}$;

3) $\Delta s = v_0 \Delta t$, $\Delta v = a_\tau \Delta t$, $\Delta s = \dfrac{v_0 \Delta v}{a_\tau} = \dfrac{v_0^2}{a_\tau} \cdot 10^{-2} =$

$$= \frac{v_0^2}{\mu\sqrt{g^2 + \left(v_0^2/R\right)^2}} \cdot 10^{-2}.$$

11 класс

1. Если участок длиной L проехать максимально быстро (с максимально возможным ускорением $a = \mu g$), то скорость на линии границы будет $v_1 = \sqrt{2\mu g L}$, а время разгона – $t_1 = \sqrt{\dfrac{2L}{\mu g}}$. При этом минимально возможное время торможения за линией границы составит $t_{\text{м}} - t_1 = \sqrt{\dfrac{L}{2\mu g}}$. Общее время испытания $t_{\text{м}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2L}{\mu g}} \approx 2{,}12\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}}$.

Если пересекать линию границы со скоростью $v_0 < v_1$, то увеличится время достижения этой линии, но сократится время торможения за ней. Вопрос о конкуренции между этими изменениями времен требует дополнительного изучения.

Пусть на границе скорость v_0 ($v_0 < v_1$), которая достигается за минимально возможное время t_0 при следующем характере движения: разгон с максимальным положительным ускорением $a = \mu g$ до такой скорости $v_2 > v_0$, при которой оставшегося пути хватит, чтобы сбросить эту скорость до заданной v_0 при максимально возможном отрицательном ускорении $a_{\text{т}} = -\mu g$.

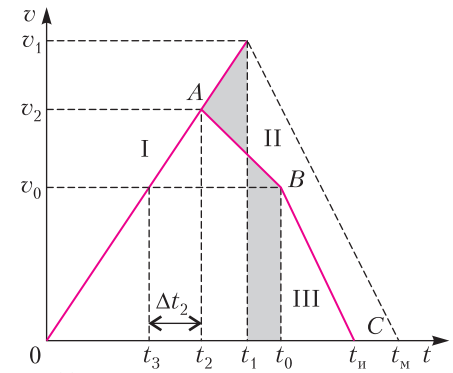


Рис. 22

На рисунке 22 участок I соответствует разгону с максимальным ускорением μg, участок II соответствует заблаговременному торможению (с максимальным ускорением $-\mu g$) от скорости v_2 до скорости v_0 на границе, участок III – торможению за линией границы с ускорением $-2\mu g$ до полной остановки в момент $t_{\text{и}}$. Отметим, что площади закрашенных фигур равны (так как пути в первом движении до t_1 и во втором движении до t_0 равны L).

С помощью рисунка найдем зависимость t_0 от v_0. Первый раз скорость v_0 достигается в момент $t_3 = \dfrac{v_0}{\mu g}$, к этому моменту пройден путь $s_1 = \dfrac{v_0^2}{2\mu g}$. Половина оставшегося до границы пути пройдена за время Δt_2, и

$$\frac{L - s_1}{2} = v_0 \Delta t_2 + \frac{\mu g \Delta t_2^2}{2} = \frac{L}{2} - \frac{v_0^2}{4\mu g}.$$

Отсюда

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{v_0^2}{2(\mu g)^2} + \frac{L}{\mu g}} - \frac{v_0}{\mu g},$$

а время движения до границы

$$t_0 = t_3 + 2\Delta t_2 = 2\sqrt{\frac{v_0^2}{2\mu^2 g^2} + \frac{L}{\mu g}} - \frac{v_0}{\mu g}.$$

Полное время испытания $t_{\text{и}}$, согласно условию задачи, равно

$$t_{\text{и}} = t_0 + t_{\text{т}} = t_0 + \frac{v_0}{2\mu g} = 2\sqrt{\frac{v_0^2}{2\mu^2 g^2} + \frac{L}{\mu g}} - \frac{v_0}{2\mu g}.$$

Необходимо найти минимум данного выражения, варьируя его по v_0. Для упрощения исследования производной сделаем замены:

$$x = \frac{v_0}{2\mu g}, \quad b = \frac{L}{\mu g}, \quad t_{\text{и}} = \sqrt{8x^2 + 4b} - x,$$

где x и b – по физическому смыслу положительны. Возьмем производную от $t_{\text{и}}$ по x и приравняем ее нулю:

$$0 = \frac{16x}{2\sqrt{8x^2 + 4b}} - 1, \quad \sqrt{8x^2 + 4b} = 8x,$$

$$8x^2 + 4b = 64x^2, \quad 56x^2 = 4b.$$

Возвращаемся к старым переменным и находим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{7}\mu g L}, \quad t_{\text{и}} = \sqrt{\frac{7L}{2\mu g}} \approx 1{,}87\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

2. Исходный куб можно составить из восьми кубиков с ребром вдвое меньшего размера. По аналогии с электростатикой введем гравитационный потенциал φ, который в вершине любого однородного куба будет прямо пропорционален

его массе и обратно пропорционален линейным размерам с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. Пусть длина ребра и масса малого кубика равны b и m, а гравитационный потенциал в его центре равен φ_0. Тогда

$$\varphi_0 = -k\frac{m}{b} = -k\frac{\rho b^3}{b} = -k\rho b^2,$$

где k – некоторый размерный коэффициент, а ρ – плотность планеты. Потенциалы в центре большого куба и в его вершине равны соответственно

$$\varphi_1 = 8\varphi_0 \text{ и } \varphi_2 = -k\frac{\rho(2b)^3}{2b} = -4k\rho b^2 = 4\varphi_0.$$

Из закона сохранения энергии следует

$$m\varphi_2 = m\varphi_1 + \frac{mv_1^2}{2}, \quad m\varphi_2 + \frac{mv_2^2}{2} = 0.$$

Окончательно получим $v_2 = v_1$.

3. $\Delta T_2 = \frac{\Delta T}{4}$, $Q = \frac{15}{8}R\Delta T$. **4.** $T = T_0$.

5. Выберем начало координат в точке A и направим оси x и y так, как показано на рисунке 23. Пусть b – коэффициент пропорциональности в зависимости силы сопротивления от скорости частицы: $\vec{F}_c = -b\vec{v}$. Запишем уравнение движения частицы в проекции на координатные оси:

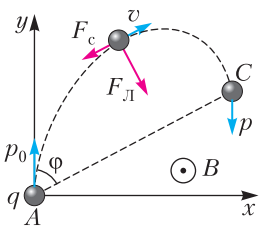


Рис. 23

$$ma_x = qBv_y - bv_x, \quad ma_y = -qBv_x - bv_y.$$

Сделаем замены $\frac{qB}{m} = k$, $\frac{b}{m} = \alpha$ и для малого интервала времени Δt запишем

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = kv_y - \alpha v_x, \quad \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -kv_x - \alpha v_y,$$

$$\Delta v_x = kv_y\Delta t - \alpha v_x\Delta t = k\Delta y - \alpha\Delta x,$$

$$\Delta v_y = -kv_x\Delta t - \alpha v_y\Delta t = -k\Delta x - \alpha\Delta y.$$

Суммируя изменения проекций скорости и координат частицы за произвольное время от начала движения, получим

$$v_x = ky - \alpha x, \quad v_y - v_0 = -kx - \alpha y.$$

В точке C вектор скорости частицы антипараллелен $\vec{v}_0$ и $v_x = 0$. Отсюда

$$ky = \alpha x, \quad \frac{x}{y} = \frac{k}{\alpha} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \alpha = k\operatorname{ctg}\varphi.$$

Сила Лоренца действует перпендикулярно скорости и изменение модуля скорости частицы определяется только силой сопротивления:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\alpha v, \quad \Delta v = -\alpha v\Delta t = -\alpha\Delta s,$$

где Δs – расстояние, пройденное за Δt. Суммируя обе части уравнения за произвольное время движения, находим путь S, пройденный частицей от начала движения до момента остановки:

$$v - v_0 = -\alpha S, \quad v_0 = \alpha S = kS\operatorname{ctg}\varphi, \quad S = \frac{mv_0\operatorname{tg}\varphi}{qB}.$$

Пусть координаты точки остановки x_0, y_0. Так как в этой точке $v_x = 0$, $y_0 = x_0\operatorname{ctg}\varphi$, то

$$v_y - v_0 = -v_0 = -kx_0 - \alpha y_0 =$$

$$= -kx_0\left(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi\right) = -\frac{kx_0}{\sin^2\varphi}, \quad x_0 = \frac{mv_0}{qB}\sin^2\varphi.$$

Расстояние от начальной точки до точки остановки, т.е. модуль перемещения частицы, есть

$$l = \frac{x_0}{\sin\varphi} = \frac{mv_0}{qB}\sin\varphi.$$

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: +7 495 363-48-86,
htpp: //capitalpress.ru

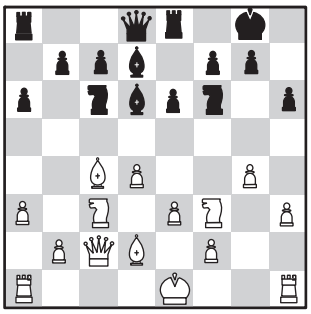
КрасотА ДИНАМИЧНОЙ ИГРЫ

Шахматные состязания самого высокого уровня в последние годы редко балуют любителей шахмат яркими партиями, так как их участники предпочитают выбирать проверенные и надежные варианты. В то же время на соревнованиях рангом пониже гроссмейстеры позволяют себе рисковать и показывают красивую игру. Сегодня мы разберем свежие партии признанных мастеров атакующей игры Т.Раджабова и А.Широва, в которых смелые жертвы в миттельшпиле привели их к победе.

Т.Раджабов – С.Видит

Вейк-ан-Зее, 2019

1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. ♘c3 ♝b4 5. ♕a4+ ♞c6 6. e3 0-0 7. ♕c2 ♜e8 8. ♗d2 ♝d6 9. h3 a6 10. a3 ♝d7 11. ♗e2 dc 12. ♗c4 h6 (черные хотят провести e5, не допуская ♘g5) **13. g4!** Энергичный ход – единственная возможность бороться за преимущество, поскольку у белых теперь есть «зацепка» на h6.



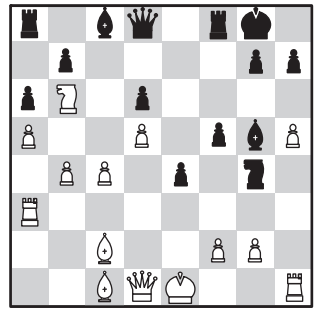
13...e5?! Слишком смело – черные недооценивают возможность вскрытия линии g. Следовало начать активные действия с ферзевого фланга: 13...b5! 14. ♗a2 b4 15. ♘e2 ♞a5. **14. g5! b5 15. ♗a2 ed 16. gh!** Логичное продолжение атаки. Взятие коня позволило бы черным перехватить инициативу: 16. gf? ♛f6 17. ♗d5 ♜ad8 18. 0-0-0 b4! **16...dc?!** Черные принимают вызов, однако Stockfish не согласен с их решением. Программа предпочитает выпад 16...♝f4! с контригрой после 17. 0-0-0 ♝h6 18. ed ♝d2 19. ♕d2 b4 и т.д. **17. ♗c3 ♝e6 18. ♗e6 ♜e6 19. ♖g1 ♞e8?** Решающая ошибка. Точное 19...♞h5! 20. ♗g7 ♝g3 позволяло осложнить задачу белых, теперь же их тяжелые фигуры проникают в лагерь черных. **20. ♗g7 ♞g7 21. ♖g7+ ♚f8 22. ♕h7 ♛f6 23. ♘g5 ♜e3+ 24. ♔f1!** Белые справедливо отказываются от жертвы ладьи, так как после 24. fe ♝g3+ 25. ♔e2 ♛f2 26. ♔d1 ♜d8 рискуют сами получить мат. **24...♞d8 25. ♕g8+ ♚e7 26. h7 ♝g3 27. ♘e4!** Изящный ход, на котором держится вся комбинация белых. **27...♜e4 28. ♖g3 ♜h4 29. ♖d1!** Технично окружая короля, белые вынуждают черных отдать качество: **29...♜h7 30. ♖e3+ ♞e6 31. ♕a8 ♜h8 32. ♕c6 ♚f8 33. ♖e6 ♛e6** (33...fe 34. ♕c7 с неотразимой угрозой ♖d8+) **34. ♖d8+ ♚g7 35. ♕c3+ f6 36. ♕c7+. Выигрыш белых.**

А.Родригес – А.Широв

Атика, 2018

1. e4 c5 2. ♘f3 ♞c6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♞f6 5. ♘c3 e5 6. ♘db5 d6 7. ♘d5 ♞d5 8. ed ♞e7 9. c4 ♞g6 10. h4 (редкое продолжение, обычно здесь играют ♗e2, ♗d3 или ♕a4) **10...a6 11. h5 ♞h4 12. ♘c3 ♝e7 13. a4 0-0 14. a5 ♞f5 15. ♗d3 ♝g5 16. ♖a3 ♞h6 17. b4 f5 18. ♘a4 e4 19. ♗c2 ♞g4 20. ♘b6.** Белые проводят типичный план атаки на ферзевом фланге, однако из-за оторвавшейся пешки h рокировка становится небезопасной, чем и пользуются черные.

20...e3!? Следуя принципу «на атаку по флангу отвечай ударом по центру». **21. ♗e3 ♜e8.** Жертвуя ладью, черные создают серьезные угрозы белому королю. **22. ♘a8 f4 23. ♕d3**

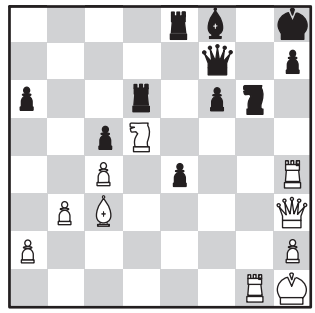


(точнее 23. ♕d4 с идеей избежать вилки после 23...fe 24. f3 ♞f2) **23...g6 24. hg fe 25. f3 ♞f2 26. ♕f1?** Следовало форсировать размен ферзей путем 26. gh+ ♚h8 27. ♕d4+ ♝f6 28. ♕b6. **26...♛f6.** Разница в активности ферзей усиливает атаку черных. **27. gh+ ♚h8 28. ♔e2 ♝f5 29. ♕a1.** Слишком поздно. После размена ферзей черные остаются с лишней фигурой. **29...♞h1 30. ♕f6+ ♝f6 31. ♘c7 ♞g3+ 32. ♔e1 ♝b2 33. ♖b3 ♝c2 34. ♖b2 ♜e5** с неизбежным матом после ♜h5 и ♜h1. **Выигрыш черных.**

Бонусом – свежая комбинация от чемпиона мира.

М.Карлсен – Б.Раппорт

Вейк-ан-Зее, 2019



Белые фигуры заняли оптимальные атакующие позиции, а исход партии решает симпатичное завлечение: **39. ♗f6 ♜f6 40. ♖h7! Черные сдались**, так как после 40...♛h7 41. ♕h7 ♚h7 42. ♘f6 они остаются без качества.

А.Русанов

Индекс 90964

ФИЗИКА И ... ТЕАТР

Прогулки с физикой

Как устроен театральный бинокль?
Можно ли рассчитать его увеличение?

ISSN 0130-2221 19003
9 770130 222191

(Подробнее – на с. 24 внутри журнала)