

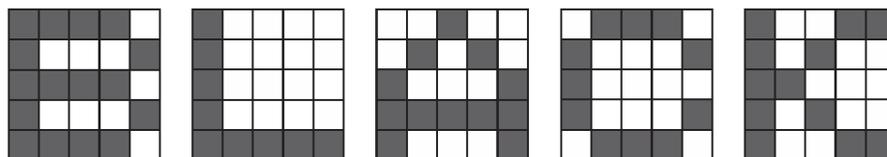
СЕНТЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

ISSN 0130-2221  
2016 · № 5-6

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



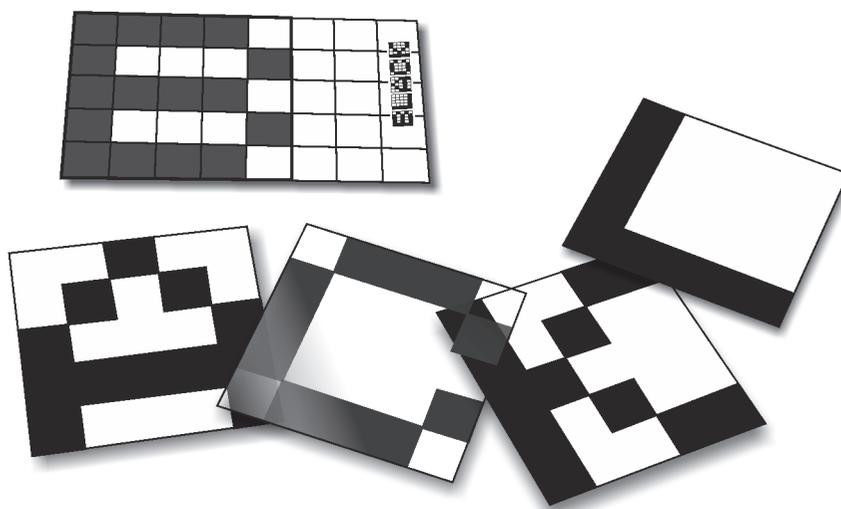


## ЧЕРНЫМ-ЧЕРНО

Эта головоломка японского изобретателя Яно Рьо (Yano Ryuoh) состоит из пяти карточек размером 5 на 5 с буквами В, L, А, С, К (которые складываются в слово *black* – черный). Карточки прозрачные, а буквы состоят из черных единичных квадратиков, как показано на схеме (вверху). Задание – расположить карточки на поле 5×8 так, чтобы каждая клетка поля была покрыта хотя бы одним черным квадратиком (карточки можно поворачивать и переворачивать). Если такое задание покажется вам слишком простым, его легко усложнить. Например, автор предлагает зафиксировать положение карточки с буквой В, как на фотографии (внизу).

Желаем успеха!

*Е.Етифанов*



# КВАНТ СЕНТЯБРЬ 2016 № 5-6 ДЕКАБРЬ 2016

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

<p>УЧРЕДИТЕЛИ</p> <p>Российская академия наук</p> <p>Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук</p> <p>Физический институт им. П.Н.Лебедева Российской академии наук</p> <hr/> <p>ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР</p> <p><b>А.Л.Семенов</b></p> <hr/> <p>РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ</p> <p>Н.Н.Андреев, А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.А.Заславский, П.А.Кожевников (<i>заместитель главного редактора</i>), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (<i>заместитель главного редактора</i>)</p> <hr/> <p>РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ</p> <p>А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев</p> <hr/> <p>РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА</p> <p>ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР</p> <p><b>И.К.Кикоин</b></p> <hr/> <p>ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА</p> <p><b>А.Н.Колмогоров</b></p> <hr/> <p>Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер</p>	2	Задачи о пересечениях множеств. <i>А.Райгородский</i>
	6	Активные материалы – адаптивные и защищающие. <i>Л.Ашкинази</i>
	ЗАДАЧНИК «КВАНТА»	
	12	Задачи М2436–М2445, Ф2443–Ф2452
	14	Решения задач М2421–М2428, Ф2428–Ф2434
	22	Алгебра, геометрия и комбинаторика расстояний. <i>С.Дворянинов, П.Кожевников</i>
	«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ	
	28	Задачи
	29	Конкурс имени А.П.Савина
	29	Куриная эпопея. <i>И.Акулич</i>
КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»		
32	Симметрия в физике	
ШКОЛА В «КВАНТЕ»		
34	Ньютон, яблоки и другие. <i>И.Алексеев, А.Стасенко</i>	
36	Одна теорема о пересечении прямых и окружностей. <i>Ф.Стонякин, В.Ефремова, О.Щербаков</i>	
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК		
40	Геометрия целочисленных расстояний. <i>А.Елизаров, П.Кожевников</i>	
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ		
43	Напряженность электрического поля на поверхности сферы. <i>В.Гребень</i>	
ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»		
45	О махолете электрически. <i>С.Герасимов</i>	
ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА		
47	В начале было слово... (окончание). <i>М.Бондаров</i>	
ОЛИМПИАДЫ		
54	LVII Международная математическая олимпиада	
55	XLVII Международная физическая олимпиада	
60	V Европейская математическая олимпиада для девушек	
61	XXIII Международная олимпиада «Туймаада». Физика	
ИНФОРМАЦИЯ		
62	Очередной набор в ВЗМШ	
67	Заочная физико-техническая школа при МФТИ	
71	Ответы, указания, решения	
79	Напечатано в 2016 году	
	Нам пишут (27)	
	Памяти Е.Я.Гика (31)	
НА ОБЛОЖКЕ		
I	Иллюстрация к «Калейдоскопу «Кванта»	
II	Кванты интернета	
III	Шахматная страничка	
IV	Прогулки с физикой	

# Задачи о пересечениях множеств

А.РАЙГОРОДСКИЙ

## Классическая задача Эрдеша

Пусть  $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество из  $n$  элементов. Предположим, что в этом множестве выбраны несколько разных подмножеств, каждое из которых состоит из  $k$  элементов, и допустим, что эти подмножества попарно пересекаются. Может ли таких подмножеств быть много? Насколько много?

Поставленная нами задача принадлежит замечательному венгерскому математику Полу Эрдешу (1913–1996). По словам автора, он и два его соавтора Чжао Ко и Ричард Радо придумали ее решение еще в 1938 году, но тогда им показалось, что публикация такого результата не вызовет большого интереса. Зато к 1961 году, когда статья Эрдеша, Ко и Радо была все же опубликована, ситуация кардинально изменилась: стало ясно, что такие результаты все более и более востребованы – например, специалистами по теории кодирования. И интуиция авторов не обманула – ни в 1938, ни в 1961 годах. Сейчас задачи, выросшие из первоначальной постановки, являются центральными задачами комбинаторики! В этой статье о некоторых таких задачах мы непременно поговорим. Но начнем, конечно, с вопроса Эрдеша.

Кое-что понятно с ходу. Например, пусть  $2k > n$ . Тогда любые два  $k$ -элементных подмножества множества  $\mathcal{R}_n$  пересекаются. Это ясно, но для пущей ясности это же показано и на рисунке 1. Получается, что в данном случае ответ на

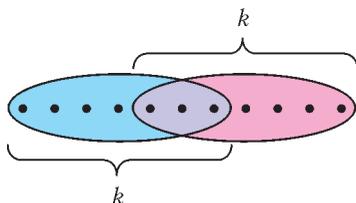


Рис. 1

вопрос Эрдеша тривиален: при условии, что  $2k > n$ , число попарно пересекающихся различных  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$  может быть любым – хоть  $C_n^k$ .

Значит, давайте считать, что  $2k \leq n$ . В этом

случае по некотором размышлении в голову приходит следующая простая конструкция. Рассмотрим все  $k$ -элементные подмножества множества  $\mathcal{R}_n$ , содержащие элемент 1. Их количество равно  $C_{n-1}^{k-1}$ . Очевидно, они попарно пересекаются. Прекрасно, ведь это то, что нам нужно, да и величина  $C_{n-1}^{k-1}$  довольно большая! Но вдруг бывает еще больше?

## «Круговой метод» Катоны

Замечательно то, что конструкция из предыдущего раздела оптимальна! Иными словами, если  $2k \leq n$ , то количество множеств в любой совокупности попарно пересекающихся различных  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$  не превосходит  $C_{n-1}^{k-1}$ . Это-то, в частности, и доказали Эрдеш, Ко и Радо в своей статье 1961 года.

При некоторых  $k$  утверждение доказать совсем легко. Ну, например, при  $k = 1$  любые два множества, состоящие из  $k$  элементов, не пересекаются. Поэтому оценка величиной  $1 = C_{n-1}^{1-1}$  очевидна. Наоборот, пусть  $2k = n$ , и пусть  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_s\}$  – любая совокупность подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ , в которой для каждого  $i$  выполнено  $|F_i| = k$  (модулем обозначена мощность множества, т.е. количество элементов в нем) и для каждой пары  $i, j$  ( $i \neq j$ ) выполнено  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ . Покажем, что и в самом деле  $s \leq C_{n-1}^{k-1} = C_{2k-1}^{k-1}$ . Заметим, что для любого  $k$ -элементного подмножества  $K$  в  $\mathcal{R}_{2k}$  однозначно определено его «дополнение»  $\bar{K} = \mathcal{R}_{2k} \setminus K$ . Таким образом, все  $m = C_{2k}^k$  подмножеств можно разбить на пары  $(K_1, \bar{K}_1), \dots, (K_{m/2}, \bar{K}_{m/2})$ . Понятно, что из каждой такой пары в нашей совокупности  $\mathcal{F}$  есть не более одного множества, откуда и получаем искомую оценку:

$$s \leq \frac{m}{2} = \frac{C_{2k}^k}{2} = \frac{(2k)!}{2(k!)^2} = \frac{(2k-1)!(2k)}{(2k)(k-1)!k!} = C_{2k-1}^{k-1}.$$

Все это лишь «крайние» случаи. Куда интереснее разобраться с остальными ситуациями. Ниже

мы приведем рассуждение, придуманное замечательным венгерским комбинаторщиком Дьюлой Катоной в 1972 году. В брошюре «Вероятность и алгебра в комбинаторике»<sup>1</sup> это рассуждение изложено на вероятностном языке. Здесь же мы увидим, что это очень остроумный двойной счет и вовсе не нужно знать теорию вероятностей для его понимания.

Итак, пусть опять  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_s\}$  – любая совокупность подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ , в которой для каждого  $i$  выполнено  $|F_i| = k$  и для каждой пары  $i, j$  ( $i \neq j$ ) выполнено  $F_i \cap F_j = \emptyset$ . Покажем, что  $s \leq C_{n-1}^{k-1}$ .

Рассмотрим вспомогательную конструкцию, состоящую из  $n$  штук  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ :

$$A_1 = \{1, 2, \dots, k\}, \quad A_2 = \{2, \dots, k+1\},$$

$$A_3 = \{3, \dots, k+2\}, \dots, \quad A_n = \{n, 1, \dots, k-1\}.$$

Эти множества расположены как бы по кругу (рис. 2), отсюда и название раздела. Положим  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  и покажем, что  $|\mathcal{A} \cap \mathcal{F}| \leq k$ . Если

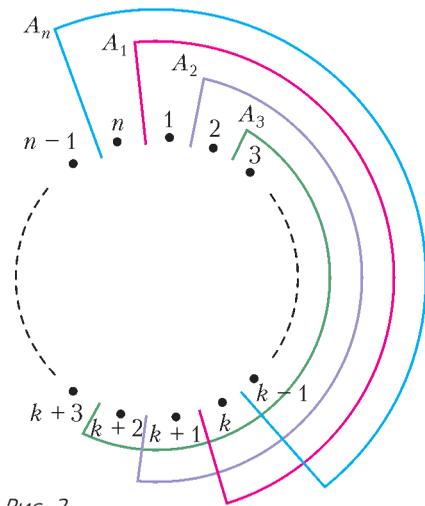


Рис. 2

$\mathcal{A} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ , то все готово. Иначе можно считать, что  $A_1 \in \mathcal{F}$ . Какие еще множества из совокупности  $\mathcal{A}$  могут принадлежать совокупности  $\mathcal{F}$ ? Разумеется, только те, которые пересекаются с  $A_1$ . Это множества  $A_2, A_3, \dots, A_k$  и множества  $A_{n-k+2}, A_{n-k+3}, \dots, A_n$ . Поскольку  $2k \leq n$ , множества в парах

$$\{A_2, A_{n-k+2}\}, \{A_3, A_{n-k+3}\}, \dots, \{A_k, A_{n-k+k}\}$$

не пересекаются. Это значит, что из каждой пары не более одного множества принадлежит совокупности  $\mathcal{F}$ .

ности  $\mathcal{F}$ . Всего у нас  $k-1$  пара и есть еще  $A_1$ , а значит,  $|\mathcal{A} \cap \mathcal{F}| \leq 1 + (k-1) = k$ , что и требовалось доказать. Правда, напоминает рассуждение для случая  $n = 2k$ ? Но там на этом все и заканчивалось, а здесь еще предстоит работа.

Чтобы лучше осознать дальнейшее, рассмотрим пример, когда  $n = 7, k = 3$ . У нас были расположены по кругу множества

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6, 7\}, \\ \{6, 7, 1\}, \{7, 1, 2\}.$$

А давайте возьмем и как-нибудь по-другому занумеруем элементы множества  $\mathcal{R}_n$ . Например, запишем  $\mathcal{R}_n = \{2, 5, 4, 7, 1, 3, 6\}$ . Это ведь то же самое множество, просто записанное в ином порядке. Тогда по кругу расположатся тройки

$$\{2, 5, 4\}, \{5, 4, 7\}, \{4, 7, 1\}, \{7, 1, 3\}, \\ \{1, 3, 6\}, \{3, 6, 2\}, \{6, 2, 5\}.$$

Ясно, что и среди этих троек не более трех ( $k = 3$ ) принадлежат совокупности  $\mathcal{F}$ . Рассуждение ничуть не меняется! Иными словами, верных утверждений, подобных ранее доказанному, столько, сколько есть способов перенумеровать элементы множества  $\mathcal{R}_n$ , т.е.  $n!$ .

Вернемся к общему случаю. Для каждой нумерации  $\sigma$  обозначим  $\mathcal{A}_\sigma$  соответствующую совокупность множеств, расположенных по кругу. В частности, если  $\sigma$  – первоначальная нумерация от 1 до  $n$ , то  $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}$ . Мы знаем, что всегда  $|\mathcal{A}_\sigma \cap \mathcal{F}| \leq k$ .

Вспоминая, что  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_s\}$ , введем обозначение  $I(\sigma, F_i)$  для величины, которая равна 1, если  $F_i \in \mathcal{A}_\sigma$ , и равна 0, если  $F_i \notin \mathcal{A}_\sigma$ . Если зафиксировать нумерацию  $\sigma$  и взять сумму по  $i$  от 1 до  $s$  величин  $I(\sigma, F_i)$ , то мы получим в аккурат величину  $|\mathcal{A}_\sigma \cap \mathcal{F}|$ , которая не больше  $k$ . Значит, в свою очередь,

$$\sum_{\sigma} \left( \sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) \right) \leq k \cdot n!.$$

Можно посчитать и по-другому: сперва зафиксировать  $i \in \{1, \dots, s\}$ , а затем найти сумму  $\sum_{\sigma} I(\sigma, F_i)$ . Естественно, получится то же самое. Но что именно? При фиксированном  $i$  величина  $\sum_{\sigma} I(\sigma, F_i)$  равна количеству нумераций, для которых конкретное множество  $F_i \in \mathcal{F}$  попадает в  $\mathcal{A}_\sigma$ .

Для пущей прозрачности изложения вернемся к примеру с  $n = 7, k = 3$ . И пусть  $F_i = \{3, 4, 7\}$  (взяли наугад). Есть нумерации, для которых первое

<sup>1</sup> А.М.Райгородский. Вероятность и алгебра в комбинаторике. – М., МЦНМО, 2015. – Третье изд.

множество из  $\mathcal{A}_\sigma$  – это  $\{3, 4, 7\}$ . Это в точности те нумерации, в которых сперва идут элементы 3, 4, 7 (в любом порядке), а затем идут элементы 1, 2, 5, 6 (также в любом порядке). Таких нумераций  $3! \cdot 4!$ . Есть нумерации, для которых второе множество из  $\mathcal{A}_\sigma$  – это  $\{3, 4, 7\}$ . Это в точности те нумерации, в которых на позициях от второй до четвертой стоят элементы 3, 4, 7 (в любом порядке), а на первой позиции и позициях от пятой до седьмой – элементы 1, 2, 5, 6 (снова в любом порядке). Таких нумераций тоже  $3! \cdot 4!$ . И ни одна из них не была учтена ранее! Аналогичное рассуждение годится в каждом из оставшихся пяти случаев. В итоге имеем ровно  $7 \cdot 3! \cdot 4!$  нумераций  $\sigma$ , для которых  $F_i = \{3, 4, 7\} \in \mathcal{A}_\sigma$ .

Понятно, что в случае произвольных  $n$  и  $k$  без каких-либо изменений проходит рассуждение, показывающее, что

$$\sum_{\sigma} I(\sigma, F_i) = n \cdot k! \cdot (n - k)!,$$

а стало быть,

$$\sum_{i=1}^s \left( \sum_{\sigma} I(\sigma, F_i) \right) = s \cdot n \cdot k! \cdot (n - k)!.$$

Окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} s \cdot n \cdot k! \cdot (n - k)! &= \sum_{i=1}^s \left( \sum_{\sigma} I(\sigma, F_i) \right) = \\ &= \sum_{\sigma} \left( \sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) \right) \leq k \cdot n!, \end{aligned}$$

откуда

$$s \leq \frac{k \cdot n!}{n \cdot k! \cdot (n - k)!} = \frac{(n - 1)!}{(k - 1)! (n - k)!} = C_{n-1}^{k-1}.$$

И это победа!

Не правда ли, красивое рассуждение?

### А что, если пересечения больше?

До сих пор мы предполагали, что множества в той или иной совокупности  $\mathcal{F}$  попарно пересекаются. Это можно записать и в виде  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ , и в виде  $|F_i \cap F_j| \geq 1$ . Естественным обобщением рассмотренной ранее задачи является следующая постановка. Пусть даны числа  $n, k, t$ , причем  $k < n, t < k$ . Насколько большой может быть мощность совокупности  $\mathcal{F}$ , состоящей из различных  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ , если для любых  $F, F' \in \mathcal{F}$  выполнено  $|F \cap F'| \geq t$ ?

Здесь, как и раньше, кое-что понятно сразу. Например, ясно, что аналогом рисунка 1 является рисунок 3, из которого видно, что при  $2k > n + t - 1$  любые два множества имеют не менее  $t$  общих элементов, а стало быть, самих

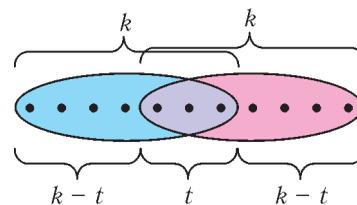


Рис. 3

этих множеств может быть сколько угодно, вплоть до  $C_n^k$ .

Давайте будем считать, что  $2k \leq n + t - 1$ . Тогда что? Разумеется, есть аналог конструкции из предыдущих разделов. А именно, фиксируем элементы  $1, \dots, t$  и берем все  $k$ -элементные подмножества множества  $\mathcal{R}_n$ , содержащие их. Таких подмножеств  $C_{n-t}^{k-t}$ , и любые два из них имеют не менее  $t$  общих элементов. При  $t = 1$  это, как мы знаем, оптимальная конструкция: жирнее не бывает.

Может, всегда  $|\mathcal{F}| \leq C_{n-t}^{k-t}$ ? Но не тут-то было! Пусть, например,  $n = 8, k = 4, t = 2$ . Конечно,  $C_{n-t}^{k-t} = C_6^2 = 15$ . Однако есть и несложная альтернативная конструкция! В самом деле, разобьем  $\mathcal{R}_8$  на две части:

$$\mathcal{R}_8 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7, 8\}.$$

Выберем в первой части все тройки элементов (их 4) и добавим к каждой такой тройке произвольный элемент из второй части. Получится 16 подмножеств множества  $\mathcal{R}_8$ , причем каждое из них имеет мощность 4 и любые два пересекаются уже внутри первой части по двум элементам. Но 16 больше, чем 15. Более того, можно добавить 17-е множество  $\{1, 2, 3, 4\}$ , которое также ничему не противоречит...

Так где же истина?

### Окончательный результат

На самом деле, оба примера из раздела 3 отражают часть истины. Сами Эрдеши, Ко и Радо в своем 1961 году доказали, что если числа  $k$  и  $t$  зафиксировать, то при всех  $n$ , начиная с некоторого  $n_0(k, t)$ , наиболее жирным все же является пример, состоящий из  $C_{n-t}^{k-t}$  подмножеств. Просто для  $k = 4, t = 2$  величина  $n_0(4, 2)$  больше восьми. А спустя примерно 20 лет П.Франкл и Р.М.Уилсон нашли  $n_0(k, t)$ . Оно оказалось равным величине  $(k - t + 1)(t + 1)$ . Иными словами, если  $n \geq (k - t + 1)(t + 1)$ , то «рекорд» в  $C_{n-t}^{k-t}$  побить нельзя, а если  $n < (k - t + 1)(t + 1)$ , то существуют совокупности, в которых каждые два множества имеют не менее  $t$  общих элементов и при этом мощности этих совокупностей строго больше, чем  $C_{n-t}^{k-t}$ . Что ж, при  $k = 4, t = 2$

имеем  $(4 - 2 + 1)(2 + 1) = 9 > 8$ , и это многое объясняет.

Но и на этом история не заканчивается! Оказывается, рассуждение с разбиением  $\mathcal{R}_n$  на две части в некотором смысле всегда дает максимальный результат. Это доказали уже в 1996 году Р.Алсведе и Л.Хачатрян. Попробуем описать их утверждение.

Итак, мы знаем, что если  $n \geq (k - t + 1)(t + 1)$ , то оптимальна простейшая конструкция. Пусть теперь

$$(k - 1 + 1) \left( 2 + \frac{t - 1}{2} \right) \leq n < (k - t + 1)(t + 1) = \\ = (k - t + 1) \left( 2 + \frac{t - 1}{1} \right).$$

Тогда Алсведе и Хачатрян утверждают (и, разумеется, аккуратно доказывают), что оптимальна буквально та же конструкция, что и альтернативная конструкция из предыдущего раздела. Вернее, так. Разбиваем  $\mathcal{R}_n$  на две части:

$$\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, t + 2\} \cup \{t + 3, t + 4, \dots, n\}.$$

Выбираем в первой части все подмножества мощности  $t + 1$  и добавляем к каждому из них произвольные  $k - t - 1$  элементов из второй части. Получается совокупность, состоящая из  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ , причем любые два из них уже внутри первой части имеют  $t$  общих элементов. Более того, к ней можно добавить множества вида  $\{1, 2, \dots, t + 2\} \cup B$ , где  $B$  — произвольное подмножество второй части, имеющее мощность  $k - t - 2$ . В итоге конструкция содержит

$$C_{t+2}^{t+1} C_{n-t-2}^{k-t-1} + C_{t+2}^{t+2} C_{n-t-2}^{k-t-2}$$

множеств. В частности, если  $n = 8$ ,  $k = 4$ ,  $t = 2$ , то имеем в аккурат

$$C_{2+2}^{2+1} C_{8-2-2}^{4-2-1} + C_{2+2}^{2+2} C_{8-2-2}^{4-2-2} = \\ = C_4^3 C_4^1 + C_4^4 C_4^0 = 16 + 1 = 17$$

множеств!

Дальше — еще любопытнее. Пусть

$$(k - t + 1) \left( 2 + \frac{t - 1}{3} \right) \leq n < (k - t + 1) \left( 2 + \frac{t - 1}{2} \right).$$

Это как бы следующий «влево» интервал значений  $n$  при данных  $k$  и  $t$  по отношению к двум рассмотренным ранее интервалам. Наверное, уже можно догадаться, оптимальность какой конструкции обосновали Алсведе и Хачатрян? Не факт. Ну, конечно, разбиваем  $\mathcal{R}_n$  на две части. Правда, на сей раз

$$\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, t + 4\} \cup \{t + 5, t + 6, \dots, n\}.$$

Выбираем в первой части все подмножества мощности  $t + 2$  и добавляем к каждому из них произвольные  $k - t - 2$  элементов из второй части. Снова получаем  $k$ -элементные подмножества множества  $\mathcal{R}_n$ , и снова они уже внутри первой части пересекаются по не менее  $t$  общим элементам. К этим подмножествам можно без вреда для наших условий добавить, во-первых, подмножества вида  $A \cup B$ , где  $A$  из первой части,  $B$  из второй части и  $|A| = t + 3$ ,  $|B| = k - t - 3$ , а во-вторых, подмножества вида  $\{1, 2, \dots, t + 4\} \cup B$ , где  $B$  из второй части и  $|B| = k - t - 4$ . Это и есть оптимум!

Общая конструкция такая. Пусть

$$(k - t + 1) \left( 2 + \frac{t - 1}{r + 1} \right) \leq n < (k - t + 1) \left( 2 + \frac{t - 1}{r} \right). \quad (1)$$

Полагаем

$$\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, t + 2r\} \cup \{t + 2r + 1, t + 2r + 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

Берем все возможные множества вида  $A \cup B$ , где  $A$  из первой части,  $B$  из второй части,  $|A| = i$ ,  $|B| = k - i$ ,  $i \geq t + r$ . Ясно, что все это  $k$ -элементные подмножества множества  $\mathcal{R}_n$ , и нетрудно видеть, что любые два из них уже в первой части имеют не менее  $t$  общих элементов. Число множеств в конструкции равно

$$\sum_{i=t+r}^{t+2r} C_{t+2r}^i C_{n-t-2r}^{k-i},$$

и это самое большое, что бывает при наших условиях.

Заметим, что в описанную конструкцию укладывается и простейшая конструкция, в которой  $C_{n-t}^{k-t}$  множеств. В самом деле, при  $r = 0$  формально  $\frac{t-1}{r} = +\infty$ , а значит, неравенство (1) равносильно неравенству  $n \geq (k - t + 1)(t + 1)$ . В то же время разбиение (2) превращается в разбиение

$$\{1, 2, \dots, t\} \cup \{t + 1, t + 2, \dots, n\},$$

а совокупность, которую мы строим, состоит в аккурат из всех подмножеств, содержащих первую часть разбиения.

Такие вот удивительные бывают задачи в комбинаторике!

# Активные материалы – адаптивные и защищающие

Л. АШКИНАЗИ

## Постановки задачи

Поводом для написания этой статьи послужила загадочная фраза в книге Германа Хубера «Альпинизм сегодня». Рассказывая о снаряжении, он пишет:

«Пух “дышит”, и ему необходимо дать дышать. Пуховики очень гигроскопичны, впитывают влагу (испарения тела) и выделяют ее при проветривании. Под действием тепла, выделяемого телом, пух разбухает и удерживает до 50% этого тепла – лучше любой другой теплой одежды из искусственного волокна».

С точки зрения физики, фраза не точна, но какова идея – материал, который сам реагирует на ситуацию и изменяется так, чтобы защитить человека от воздействия! Заметим, что книга это довольно старая (1980 г.), но гусиный пух по-прежнему стоит между человеком и минус 40 °С при 10 м/с. Последнее – это скорость ветра, которую аккуратно называют «неблагоприятной», потому что в горах бывает и в разы больше.

Человека приходится защищать от воздействия многих факторов окружающей среды – от жары и холода, от повышенной и пониженной влажности, от электромагнитного излучения (в том числе – от света), от радиации и механических воздействий. Сами по себе способы защиты от всех этих неприятностей известны и детально изучены.

Первое желание – создать материал, который по основному параметру, т.е. по степени защиты, лучше других. Например, мы хотим защитить человека от электромагнитного излучения, в частности от света. Скажем, космонавта – дабы он не перегрелся, подкрадываясь к Солнцу (хочется же проверить 6000 К). Полированные металлы отражают большую часть излучения, но не все. Можно попробовать оптимизировать интерференционное покрытие так, чтобы интегрированное по реальному спектру поглощение было меньше, а сброс тепла собственным излучением, происходящий в другом диапазоне, был бы больше. Белое по всему спектру не уменьшит нагрев – такое покрытие и излучать станет меньше. Покрытие должно быть еще и «черным» в той части

спектра, в которой надо излучать, а в далеком инфракрасном – чтобы побольше излучать. Конкретно границу «желательно белого» и «желательно черного» можно выбрать, если знать, какую температуру наружной поверхности скафандра мы собираемся поддерживать. Например, если мы хотим приблизиться к именно нашему Солнцу и нам нравится наша же комнатная температура, граница будет лежать в инфракрасной части спектра, в районе единиц микронов. Для других звезд и других биологий оценка может быть другой.

Еще эффективнее было бы иметь большой плоский черный радиатор, расположенный так, чтобы солнечное излучение падало на него под малыми углами, тогда перехватываемая мощность была бы мала, а излучаемая – велика. Правда, по мере приближения к Солнцу углы падения все равно будут расти, и в итоге может стать эффективнее бело-черное решение: белым к Солнцу, черным – от него.

Защиту от радиации, теплозащиту и вообще любую защиту также можно совершенствовать и совершенствовать – например, просто применяя ее многократно, последовательно, делая стенку толще, толще и толще. Улучшать основной параметр можно до бесконечности, но это сопряжено с ухудшением других параметров – веса, стоимости, надежности, срока службы, ремонтпригодности, красоты. Соответственно, решая задачу оптимизации, мы можем создать материал, который лучше не по основному параметру, а по весу, по стоимости или по чему-то еще либо по комбинации параметров. И, значит, в каких-то случаях он будет предпочтительнее.

Появляется интересная возможность: материал может реализовать свои замечательные свойства, за которые так дорого заплачено, не всегда и не везде, а только там и в тот момент, когда вредный фактор встал на его пороге. Для этого материал должен откуда-то узнать, что пришла пора браться за работу. Это может произойти двумя способами. Так, некий чувствительный элемент, датчик или сенсор может почуять угрозу и передать этот сигнал чему-то, что влияет на материал.

Например, датчик задымления подает сигнал системе, которая поливает помещение (где нет открытого электрооборудования) водой, одновременно и гася огонь, и делая материалы влажными, т.е. малогорючими. Или датчик температуры включает нагреватель, который подогревает материал сидений в автомобиле, защищая водителя и пассажира от холода – снизу и сзади.

Но в качестве и сенсора, и приемника сигнала может выступить, в принципе, сам материал. Можно представить себе материал, уменьшающий теплопроводность или увеличивающий толщину при увеличении перепада температур. Правда, провести границу между материалом и устройством не всегда возможно. Предположим, что мы сделали столь маленькие сенсоры и столь тщательно распределили их в материале, что потребитель об этом не знает – он будет воспринимать это мелкодисперсное нечто как материал. Хотя принцип управления будет все-таки иным, но не определения главное. Важнее принцип работы – каким параметром материала мы управляем и как это делаем.

### Управляемые материалы

Выражение «управляемый материал», такое естественное и простое, используется поразительно редко. Неудачное выражение «умные материалы» повторяют СМИ, близким по смыслу является выражение «активные материалы», но оно применяется в трех разных смыслах. Во-первых – вместо слов «материалы, определяющие основные параметры». Например, в формулировке «активные материалы трансформатора – это ферромагнитный материал, из которого изготовлен магнитопровод, и проводник, из которого изготовлены обмотки». Во-вторых – касательно материалов и веществ, сильно влияющих на конкретные процессы. Например, в выражениях «биологически активные вещества», «поверхностно-активные вещества», «сорбционно-активные материалы». Эти два смысла близки и определены нечетко. Так, при некоторых условиях параметры трансформатора сильно зависят не только от железа и меди, но и от изоляции – и в магнитопроводе, и в обмотке, и даже между выводами. Третий смысл выражения «активные материалы» может быть определен более строго и отчасти противоположен первым двум, хотя конкретный материал может быть активным во всех трех смыслах. Это материалы, изменяющие свои свойства под действием факторов окружающей среды. Вот это именно то, что стоило бы назвать «управляемые материалы».

Если вести измерения с достаточной точностью, то все зависит от всего, но степень зависимости –

с точки зрения физики и техники – может быть различной. Некоторые изменения не учитывает никто и никогда, например – изменения веса продукта на рынке в зависимости от погоды (как минимум по двум причинам, подумайте – по каким?). Заметим, что вес мешка развесного сахара в советское время мог существенно увеличиться, если продавец «чисто случайно» ставил рядом с мешком ведро воды. Некоторые изменения учитывают всегда, например – зависимость теплозащитных свойств одежды от ее влажности. Попробуй ее не учти... Некоторые зависимости не учитывали да не учитывали, а однажды пришлось – и теперь это делают, и будут делать всегда. Например – зависимость хода времени от гравитации и ускорения согласно теории относительности, без этого глобальное позиционирование, GPS, не будет работать.

Когда говорят об активных материалах, имеется в виду не хоть какая-то зависимость абы каких-то параметров, а достаточно сильная, причем таких параметров, что это можно эффективно использовать. Тут на минутку вернемся к определениям, поскольку под самым часто употребляемым выражением «оптически активные» подразумевается два типа веществ, сред и материалов. Во-первых, те, которые что-то делают с излучением, а во-вторых – те, которые изменяют свои свойства под действием внешних факторов. Хотя учтите – во многих случаях интересным «управляемым свойством» является именно свойство «делать что-то с излучением». Так, скипидар или раствор сахара в воде поворачивает плоскость поляризации света, и этот поворот зависит от самого раствора, точнее – от его концентрации. А есть вещества, которые тоже поворачивают плоскость поляризации, и это вращение зависит от внешних факторов, например от магнитного поля (эффект Фарадея).

Ситуацию дополнительно немного запутывает то, что не за всякое «делание чего-то» с излучением материал достаивается бирочки «активный». Например, любой оптический материал посредством коэффициента преломления влияет на скорость распространения и на поглощение излучения и поэтому может влиять на его распространение (линза, призма). Коэффициент преломления зависит от электрического поля (эффект Керра), но вещества, в которых он значителен и используется, оптически активными обычно не называют. Хотя на его основе делают и оптические затворы, и модуляторы, а предлагались и экзотические устройства – например, линзы с электрически управляемым фокусным расстоянием.

Посмотрим, можно ли все-таки воспользоваться для управления самим светом.

## Управление светом

Первый, причем общеизвестный, пример – фотохромные стекла, темнеющие под воздействием света. На фотографии на рисунке 1 показано стекло (диаметр 7 см, толщина 2 мм), на которое светили синей (405 нм, 10 мВт) лазерной

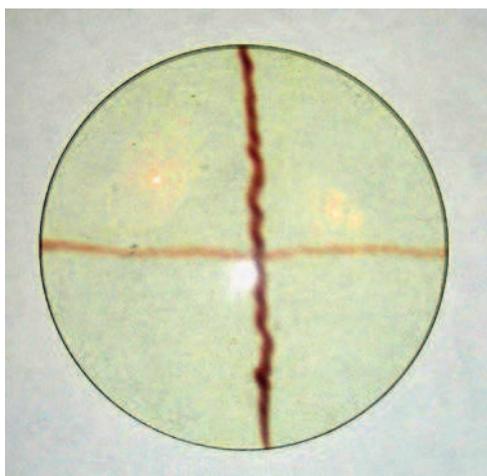


Рис. 1

указкой с расстояния 10 см, при этом пятно пересекло диаметр за 1 и 5 секунд. О фотохромных стеклах много разговоров в интернете, но прежде чем читать то, что пишут на сайтах фирм, полезно освежить в памяти школьный курс физики. Для создания фотохромных стекол используются вполне определенные и немногие фотохимические реакции. Но возможно, если не ограничиваться стеклами, что для управления оптическими свойствами могут быть использованы и другие фотохимические реакции. Многие сделали в этом направлении текстильщики. В частности, они создали ткани, которые обратимо меняют цвет на свету. Вот что пишет об этом Г.Е.Кричевский (<http://www.nanonewsnet.ru/articles/2011/umnye-krasiteli-pigmenty-ikh-primenenie-popolnomu-naznacheniyu-khromiya-sposobnost-obr>):

«В основном это спиропираны и их производные, спирооксазины, диарилэтаны, триарилметановые красители, стильбены, хиноны. Приведем пример фотоиницированных фотохромных превращений спиропирана, как наиболее изученного фотохрома. В основе фотохромизма спиропиранов и их производных лежат обратимые реакции: разрыв ковалентных связей в молекуле под действием ультрафиолета и восстановления их под действием лучей квантов видимой части спектра или за счет нагрева. На рисунке <2> показана схема фотохромных превращений спиропиранов и их производных. Как можно видеть, исходная форма спиропирана не имеет сопряженной систе-

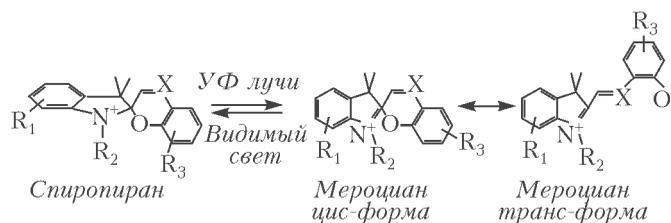


Рис. 2

мы двойных связей и, соответственно, эти соединения бесцветны. Фотовозбуждение инициирует разрыв слабой спиро- (С-О) связи, в результате новые две формы (цис- и транс-) производных цианина приобретают конъюгированную систему двойных связей и, соответственно, окраску».

Второй, гипотетический и фантастический, пример – электронная свету управляемая бумага. Что это такое, мы знаем по электронной книге. В ней есть белые и черные заряженные противоположными зарядами шарики, причем электрическое поле нужного направления перемещает к поверхности частички нужного цвета. Осталась «мелочь» – сделать соответствующим образом, чтобы при попадании света на покрытие его материал в результате фотоэмиссии электризовался так, чтобы возникало электрическое поле, достаточное для правильной ориентации шариков.

Третий, тоже гипотетический, но зато менее фантастический, вариант – через тепло. Существуют так называемые термохромные краски, изменяющие свой цвет при нагреве, обратимо или необратимо. Если это изменение, например, от черного к белому, то краска как раз и будет защищать. Минимальные управляющая мощность и время срабатывания зависят от толщины слоя краски, перехватывающего большую часть излучения. Для обычных красок это величина порядка 0,03 мм. Слой такой толщины потребует для нагрева на 10 °С, чтобы надежно сменить цвет, около 100 Дж/м<sup>2</sup>, т.е. обычный солнечный свет днем при безоблачном небе сработает за 0,1 с – величина, вполне представляющая практический интерес. Правда, при этом краска должна быть нанесена на теплоизолирующую основу, иначе поглощенное тепло частично утечет вглубь материала и время реакции окажется больше. Просто покрыть объект светоотражающей краской нельзя потому, что в некоторых случаях до момента роста мощности нам вовсе и не нужно ее отражать. Как при малой освещенности нам вовсе не нужно иметь потемневшие стекла в окнах и очках.

Но раз уж мы заговорили о нагреве...

## Противопожарное

Применение покрытий, изменяющих свои свойства при нагреве, – классика огнезащиты. Существуют краски и покрытия, выделяющие при

нагреве вещества, подавляющие горение. Но важнее то, что они вспучиваются, образуя в десятки и сотни раз более толстый (а значит, рыхлый и с пониженной теплопроводностью) слой. Такие слои способны защищать конструкции от обычного пожара в течение часа и более. Причем с самого начала покрыть таким слоем нельзя – он увеличивает габариты и портит внешний вид. Люди даже придумали прозрачные наполнители для офисных дверей, которые при пожаре вспениваются и становятся термостойкой теплоизоляцией. На фотографии на рисунке 3 вверху – прозрачный слой (видны кирпичи – стенка печи) с наклеенными датчиками температуры, ниже – этот же слой, но гель вспучился и стал термостойкой теплоизоляцией. Естественно, непрозрачной – но при пожаре делается не до икебаны.

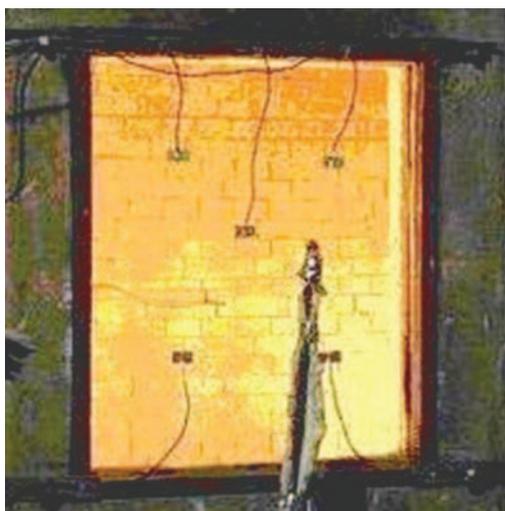


Рис. 3

Другой подозрительный по части тепловой активности материал – термомобель. Однако оно не является активным материалом, его преимущество в другом. Оно сохраняет теплоизолирующие свойства, даже если человек потеет, потому что, как утверждают изготовители, отводит влагу от тела, но само намокает мало. Заметим, впрочем, что если нет испарения с наружной поверхности, то все равно оно будет намокать и терять теплоизолирующие свойства. Так что «импортное термомобель от лучших производителей», конечно, греет душу, но чтобы оно реально работало, надо еще озаботиться тем, что надето поверх него.

Сам по себе нагрев вызывает, как правило (хотя и не всегда), расширение твердого или жидкого вещества. Однако это расширение с бытовой точки зрения ничтожно мало – оно и на глаз незаметно, и теплового сопротивления не увеличивает. Газы расширяются при нагреве сильнее, и нагрев на 30 °С вызывает увеличение объема на 10% – но это при постоянном давлении, количе-

стве и составе газа, т.е. при нагреве в мягкой и непроницаемой оболочке. Опять же маловато и, кроме того, пуховик не является непроницаемым – водяной пар, а значит, и газы проникают через оболочку. Это соображение попутно исключает еще один механизм – рост количества газа внутри пуховика в результате испарения влаги, так или иначе уже имеющейся в пухе. Тем не менее, один механизм заподозрить можно; причем для его действия как раз полезна влага, которую организм спортсмена поставляет в пуховик.

Пух состоит – с точки зрения механики и теплотехники – из отдельных упругих тонких элементов. Когда мы деформируем (сминаем) одежду, содержащую пух, элементы перемещаются друг относительно друга, скользят и остаются в новом положении благодаря трению и упругости – упругость прижимает их друг к другу, а трение не дает скользить. Это же происходит, когда мы мнем ткань или бумагу. Трение покоя больше трения движения при малых скоростях, поэтому если при последующем нагреве из-за теплового расширения элементы страгиваются с места, то они уж продолжают это делать. Пух распрямляется, и пуховик распушается. Возможно, что испарившаяся из человека вода, пробираясь через пуховик, частично конденсируется и заодно работает жидкой смазкой. Ну а ставший толстым пуховик, очевидно, становится и лучшим теплоизолятором. Впрочем, так ли это очевидно? Есть ведь оптимальное распухание – подумайте, от чего оно зависит?

### Немного о мрачном

Радиационные параметры материалов – это, как легко догадаться, описание взаимодействия материалов с радиацией. Радиация – в общепринятом понимании – это  $\alpha$ - и  $\beta$ -частицы, нейтроны ( $n$ ) и  $\gamma$ -кванты, т.е. то, что излучают реакторы, бомбы, рентгеновские аппараты, радиоактивные изотопы, ну и плюс естественный фон. Сюда можно добавить ионы и нейтралы того же происхождения, а еще так называемые «горячие частицы», которые не частицы, а пылинки с  $\alpha$ -активным изотопом (о них чуть позже). Кроме скорости, связанной с энергией, у частиц есть и другие параметры. Например,  $\gamma$ -кванты – это электромагнитные волны, значит, у них есть поляризация. Однако при взаимодействии с материалом она редко проявляется.

Механизмов взаимодействия всего того, что летит, с атомами и молекулами среды несколько. Но для внешнего наблюдателя важен итог: отражение, прохождение и поглощение, причем отражение и прохождение – с какой-то потерей энергии. Есть и четвертый вид взаимодействия –

возбуждение нового излучения. Собственно, такое есть и для электромагнитных волн – это люминесценция, но там происходит преобразование электромагнитного излучения в электромагнитное же. А теперь у нас несколько видов частиц и одни, поглощаясь веществом, могут вызвать генерацию других. Вдобавок это вторичное излучение может возникать и прекращаться не сразу, а длиться какое-то время – это означает появление «наведенной активности», т.е. первичное излучение создало в материале радиоактивные изотопы, которые теперь будут, сами понимаете, что делать. Кстати, а если поток частиц летит вообще в пустоте, может меняться их количество?

Теперь про «горячие частицы», которые вовсе не частицы, а пылинки с  $\alpha$ -активным изотопом. Пробег  $\alpha$ -частиц в воздухе – несколько сантиметров, в конденсированных средах – микроны или десятки микрон, они задерживаются рубашкой или поверхностным ороговевшим слоем клеток кожи. Поэтому они, казалось бы, не опасны. Но если они попадают с пылинками внутрь легких и оседают на стенках или если  $\alpha$ -активный изотоп, например  $^{210}\text{Po}$ , ввести в состав какого-либо растворимого в воде соединения и выпить, то можно отправиться на тот свет. Так что не пейте чай с чужими! Заметим, что случаи отравления этим способом обсуждаются в интернете, но никто не спрашивает, кто тот безвестный гений, который придумал решение.

Физиков, инженеров и вообще людей интересует взаимодействие излучений с веществом именно потому, что оно может быть опасно для человека. Возникает же оно при работе многих устройств и при проведении технологических процессов, необходимых для их работы. Устройств таких много: атомный реактор, ускоритель, бомба, рентгеновский аппарат, гамма-дефектоскоп и многие другие. Да и процессы многообразны – это и исследования, и разработка материалов и конструкций, и испытания, и утилизация отходов, и аварии, и устранение их последствий.

Разные виды излучения обладают различной проникающей способностью. Пробег  $\alpha$ -частицы в воздухе не превышает нескольких сантиметров;  $\beta$ -частицы могут пройти в воздухе несколько метров, в конденсированных средах – миллиметры и сантиметры;  $\gamma$ -кванты и нейтроны – десятки и сотни метров в воздухе (их может задержать лишь относительно толстый слой металла или, например, более толстый слой бетона). Процессов взаимодействия частиц с веществом много, для каждого вида излучения и в зависимости от энергии они комбинируются по-разному, и вдобавок они разнятся для разных изотопов. Поэтому если какой-то изотоп и рекордсмен, то на практи-

ке применить сие не удастся – в природном материале его может быть ничтожно мало, а выделение будет стоить слишком дорого. Поэтому можно привести только очень общие, очень приближенные данные.

Как уже сказано,  $\alpha$ -излучение поглощается микронными слоями вещества,  $\beta$ -излучение обладает большей проникающей способностью, а остальные – еще большей. Поэтому, если надо измерить именно  $\alpha$ -излучение, возникает дилемма – либо датчик прибора должен быть «открытый», ничем не отделенный от источника излучения, либо «стенка» должна быть микронной толщины и из материалов с малой удельной плотностью, которые лучше пропускают излучение. Первый вариант – это полупроводниковые датчики с «голым»  $p$ - $n$ -переходом. Обычно  $p$ - $n$ -переход упрятан в толщу транзистора, торчать открыто и ждать  $\alpha$ -частицу ему, наверное, очень непривычно. Второй вариант – это счетчик Гейгера, но вот тут нужно «окошко», ибо внутри вовсе не атмосфера. Нужен материал с малой плотностью, из которого можно сделать тонкую-тонкую пленку, причем выдерживающую атмосферное давление и вакуумно плотную. Самый легкий металл – литий – в конкурсе участия не принимает (почему?), и в итоге по сумме баллов побеждают слюда (фотография на рисунке 4; на окошко положена кнопка, чтобы было понятно, что там «что-то есть»), бериллий, алюминий, полимерные пленки.

Поскольку пропускание материалом  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучений, в общем, зависит сильнее всего от плотности материала, то наилучшую защиту от излучения должны были бы создавать металлы с самой большой плотностью. Но они гораздо дороже свинца  $\text{Pb}$ , а разница в эффективности невелика. Поэтому там, где важен объем, а количество невелико, он и применяется – помните, когда вам делали рентгеновский снимок... А там, где нужно «много» и проблем с объемом нет, например при защите реакторов, используют бетон – дешево и сердито, т.е. толстые метровые стены. Причем бетон используется не простой, а с добавками, увеличивающими защиту, например с железной рудой. Содержит он и связанную воду, о важности



Рис. 4

которой мы сейчас узнаем. Особый случай – уран U, он плотнее свинца Pb лишь в два раза, но пробег  $\gamma$ -излучения в нем меньше в десять раз, однако делать из него защиту было бы слишком дорого.

С нейтронами ситуация противоположная – их лучше тормозят элементы с самыми легкими ядрами, т.е. водород: легким ядрам они передают энергию при столкновениях. Правда, использовать жидкий или твердый водород трудно и дорого, но есть вода, парафин, полиэтилен, причем углерод тоже вносит свой вклад. Однако медленно движущиеся нейтроны хорошо захватываются ядрами, а лучше всего – кадмием Cd или менее дорогим бором B. И все бы хорошо, но при этом возникает вторичное  $\gamma$ -излучение («наведенная активность»), от которого тоже надо бы защититься. Поэтому защита бывает многослойной, и лучше из разных материалов.

Итак, защита зависит более всего от атомного состава, а покрытия не умеют его изменять. Так что материал, управляющий проходящей сквозь него радиацией, создать будет затруднительно – разве что сделать микроперемещающиеся жалюзи. Но у техники не возникло задачи управлять пропусканием излучения к человеку. Вот когда возникнет, сделаем жалюзи – и не микро-, а нано – и выложим их ядрами золота, которыми Резерфорд отражал альфа-частицы век с небольшим назад.

### Поговорим о механике

Нам осталось обсудить некоторые проблемы механики. Казалось бы, в чем проблема – бронезилет придает мужчине уверенность в том, что он настоящий мужчина. Но нам интересны материалы, которые разумно реагируют на нагрузку и деформацию. Иными словами, которые позволяют сделать мягкое и не мешающее грациозно двигаться до момента воздействия покрытие, становящееся жестким только тогда, когда надо.

Прежде всего заметим, что в технике есть примеры систем, которые при нарушении целостности оболочки сами заделывают повреждения. Это автомобильные шины, которые сами «залечиваются» при проколе покрышки, топливные баки самолетов (Сикорский, 1914 г.), в 2009 году сообщалось о разработке аналогичных покрытий для космических кораблей (сама идея содержалась в произведениях Стругацких на пятьдесят лет раньше). Все они основаны на том, что в прокол поступает изнутри нечто, что его заделывает. Поэтому все это не совсем материалы, это отчасти «устройства». Кроме того, разрабатываются «самозалечивающиеся» материалы и покрытия – восстанавливающие микрповреждения:

трещины, царапины. Это модное направление, но, похоже, что кроме обычных разговоров про нанотехнологии, инновации и «неповторимый вид вашего автомобиля» там есть и интересные идеи и направления. В том числе опирающиеся на идеи, реализованные в человеке, который, как известно, снабжен самозалечивающимся покрытием, да и внутри постоянно идет процесс обновления. Но самозалечивающиеся покрытия – это защита техники, а не человека. Хотя, если человек находится внутри этой техники, то защита и человека тоже. К сожалению, о самоштопающихся носках, непротирающихся штанах и нервущихся колготках пока не слышно. Но, может быть, вам удастся их создать.

А как насчет именно механических свойств, изменяющихся при ударе и в месте удара? Возможны ли материалы, способные поставить агрессору так называемый «жесткий блок»? Удар – с точки зрения физики – это большие и быстро нарастающие напряжения. Соответственно, возможно, будут эффективны два класса материалов – твердеющие под нагрузкой и твердеющие при попытке деформировать быстро. Что касается вторых, то хорошо известны тиксотропные среды, «разжижающиеся» при ударе. Именно таковы и этим-то и опасны болота. Однако известно и обратное явление, которое называется, естественно, антитиксотропией. Казалось бы, оно решает задачу, но наблюдается это явление весьма редко и пока только в жидкостях.

Примерно такова же ситуация с жидкостями, вязкость которых возрастает с ростом механических напряжений. Это явление получило название далагансии, и оно характерно для суспензий и расплавов некоторых полимеров. Возможно, что жидкость в таких материалах располагается между твердыми частицами, и – как смазка – уменьшает трение между ними. При значительных скоростях сдвига происходит нарушение структуры, как бы выдавливание смазки, и возрастание трения. Но опять же это пока только жидкости. Хотя бронезилет с ячейками, заполненными вязкой жидкостью, возможен, разработка таких материалов ведется.

Но главную задачу – создание непротирающихся штанов и защищающих от агрессора рубашек – материаловедение еще не решило. И до решения, похоже, далеко. Так что попробуйте получить хорошее образование – и вам всегда будет чем заняться.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5-6-2016» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2436» или «Ф2443». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2436, М2443 предлагались на Олимпиаде мегаполисов, задачи М2441, М2442 – на VIII Международной олимпиаде Romanian Masters in Mathematics, задачи М2444, М2445 – на LVII Международной математической олимпиаде. Задачи Ф2443–Ф2452 предлагались на Всесибирской олимпиаде по физике 2015 года.

## Задачи М2436–М2445, Ф2443–Ф2452

**М2436.** Найдите все натуральные  $n$  со следующим свойством: существуют  $n$  последовательных натуральных чисел, сумма которых является квадратом целого числа.

П. Кожевников

**М2437.** Точка  $L$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $AL$  является биссектрисой угла  $BAC$  тогда и только тогда, когда выполнено равенство  $(AB + BL)(AC - CL) = AL^2$ .

А. Плахов

**М2438.** Многочлен  $y_0$  степени  $n$  имеет  $n$  различных корней  $x_1, \dots, x_n$ . Вместе с  $y_0$  рассмотрим многочлены, получающиеся из него циклической перестановкой коэффициентов:

$$y_0 = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$y_1 = a_1x^n + \dots + a_{n-1}x^2 + a_nx + a_0,$$

...

$$y_n = a_nx^n + a_0x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Положим  $b_i = y_i(x_1)$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Докажите, что если  $b_1 \neq 0$ , то многочлен  $g = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n$  имеет корни  $x_2, \dots, x_n$ .

В. Каражаев

**М2439.** Даны две гиперболы  $xy = a$  и  $xy = b$ , где  $a < b$  – положительные числа. В каждой точке второй гиперболы проведем касательную, она отсечет от первой гиперболы «сегмент» (рис.1). Докажите, что площади всех таких «сегментов» равны.

Фольклор

**М2440.** Правильный  $p$ -угольник  $P$  и правильный  $q$ -угольник  $Q$ , не имеющие общих вершин, вписаны в

одну и ту же окружность. Окружность разбита  $p + q$  вершинами многоугольников  $P$  и  $Q$  на  $p + q$  дуг. Всегда ли можно вписать в окружность правильный  $(p + q)$ -угольник так, чтобы на каждой из дуг оказалась ровно одна из его вершин?

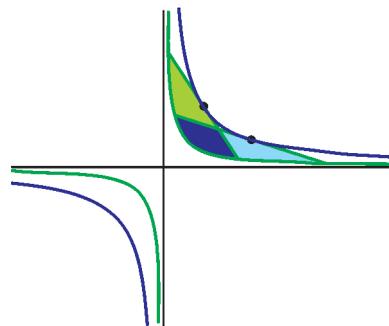


Рис. 1

Н. Белухов (Болгария)

**М2441.** Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что  $x + y^{2016} \geq 1$ . Докажите, что  $x^{2016} + y > 1 - 1/100$ .

И. Богданов

**М2442\*.** Выпуклый шестиугольник  $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$  вписан в окружность  $\Omega$  радиуса  $R$ . Диагонали  $A_1B_2$ ,  $A_2B_3$  и  $A_3B_1$  пересекаются в точке  $X$ . Для  $i = 1, 2, 3$  обозначим через  $\omega_i$  окружность, касающуюся отрезков  $XA_i$  и  $XB_i$  и дуги  $A_iB_i$  окружности  $\Omega$ , не содержащей других вершин шестиугольника (рис.2). Пусть радиус окружности  $\omega_i$  равен  $r_i$ .

а) Докажите, что  $R \geq r_1 + r_2 + r_3$ .

б) Пусть  $R = r_1 + r_2 + r_3$ . Докажите, что шесть точек касания окружностей  $\omega_i$  с диагоналями  $A_1B_2$ ,  $A_2B_3$ ,  $A_3B_1$  лежат на одной окружности.

И. Митрофанов

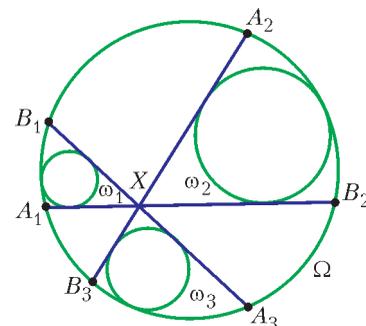


Рис. 2

**M2443\***. В стране  $n$  городов и две авиакомпании  $A$  и  $B$ . Некоторые пары городов соединены односторонними беспосадочными авиалиниями (каждая авиалиния принадлежит либо  $A$ , либо  $B$ , между двумя городами может быть более одной авиалинии). Назовем слово  $w$  из букв  $A$  и  $B$  реализуемым, если найдется маршрут из последовательных авиаперелетов, названия авиакомпаний в котором идут в том же порядке, как и буквы в слове  $w$ . Известно, что все слова длины  $2^n$  из букв  $A$  и  $B$  реализуемы. Докажите, что любое слово конечной длины из букв  $A$  и  $B$  реализуемо.

*И. Митрофанов*

**M2444.** На доске записано уравнение

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016).$$

Таким образом, в каждой его части записано по 2016 линейных сомножителей. Найдите наименьшее возможное значение  $k$ , при котором можно стереть ровно  $k$  из этих 4032 линейных сомножителей так, чтобы в каждой части осталось хотя бы по одному из сомножителей и получившееся уравнение не имело вещественных корней.

*Н. Агаханов, И. Богданов*

**M2445\***. Пусть  $P = A_1A_2\dots A_k$  – выпуклый многоугольник на плоскости. Вершины  $A_1, A_2, \dots, A_k$  имеют целые координаты и лежат на одной окружности. Обозначим через  $S$  площадь многоугольника  $P$ . Нечетное натуральное  $n$  таково, что квадраты длин всех сторон многоугольника  $P$  являются целыми числами, делящимися на  $n$ . Докажите, что  $2S$  – целое число, делящееся на  $n$ .

*А. Гайфуллин*

**Ф2443.** Вертикальные сообщающиеся сосуды с площадями сечения  $S$  и  $2S$  соединены горизонтальным каналом с площадью сечения  $S$  (рис.3). Сосуды перекрыты невесомыми подвижными поршнями, а весь объем под поршнями заполнен несжимаемой жидкостью. К поршням прикреплена крепкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок. Ось блока начинают перемещать вверх с постоянной скоростью  $v$ . С какой средней скоростью начинает двигаться жидкость в горизонтальном канале? Сами сосуды неподвижны, а поршни от жидкости не отрываются.

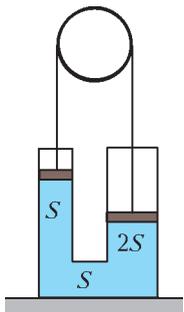


Рис. 3

*В. Боровков*

**Ф2444.** На идеально скользком льду лежат, соприкасаясь, две одинаковые доски (рис.4). На левый край первой доски поставлен шероховатый брусок. Когда его толкнули, он достиг правого края второй доски и остался на нем. Во сколько раз приобретенная второй доской скорость больше, чем у первой? Масса и размер бруска много меньше массы и длины досок.

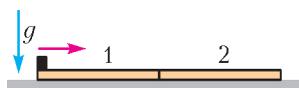


Рис. 4

*В. Баткин*

**Ф2445.** Масса платформы с ракетными двигателями равна  $m$  (рис.5). Сила тяги двигателей, равная  $F = 1,2mg$ , направлена вверх ( $g$  – ускорение свободного падения). Двигатели периодически включают на некоторое время  $T$  и выключают на время  $\tau = 0,2$  с. При этом платформа, поднимаясь и опускаясь, остается в среднем на неизменной высоте. Каково тогда  $T$ ? На какую высоту  $h$  поднимается платформа от низшего положения до высшего?

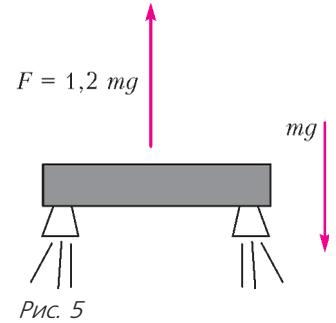


Рис. 5

*И. Воробьев*

**Ф2446.** Стол сопряжен цилиндрической поверхностью радиусом  $R$  с наклонной плоскостью с углом наклона  $\alpha$  (рис.6). Первоначально покоящаяся цепочка начинает соскальзывать со стола. При какой длине

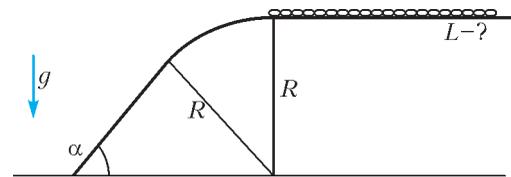


Рис. 6

цепочки  $L$  ее «хвост» не оторвется от поверхности? Трения нет.

*А. Киприянов*

**Ф2447.** С помощью С-образной скобы между двумя одинаковыми вертикальными пружинами зажат кубик с длиной ребра  $a = 10$  см (рис.7). Сохраняя вертикальность пружин, скобу опускают в широкий сосуд с водой. Оказалось, что, считая от момента касания кубиком воды до его полного погружения в воду, сама скоба переместилась на  $h = 15$  см по вертикали. Найдите жесткость  $k$  одной пружины. Считать вес 1 кг равным 10 Н, собственным объемом пружин пренебречь.

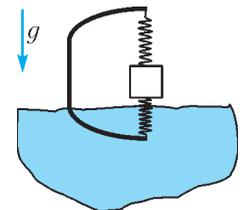


Рис. 7

*В. Боровков*

**Ф2448.** В летнем лагере в домике есть кран, к которому по трубам подают холодную и горячую воду. При нормальной работе холодная вода имеет температуру  $T_x = +20$  °С, а горячая –  $T_g = +70$  °С. За ночь из-за холодной погоды температура воды в обеих трубах опустилась до  $T_0 = +10$  °С. Утром одновременно открывают вентили и холодной, и горячей воды. После этого температура воды в каждой из труб, подходящих к крану, начинает повышаться с постоянной скоростью (количество градусов в единицу времени), причем эта скорость для обеих труб одинакова. Через 1 минуту после открывания вентилей температура вытекающей из крана воды достигла  $T_1 = 24$  °С, а еще через 1 минуту температура воды перестала изменяться. Како-

ва установившаяся температура вытекающей воды? Расход воды считайте постоянным.

*В.Боровков*

**Ф2449.** Стакан с малым отверстием сбоку погружен на глубину  $H$  в холодную воду (рис.8). Отверстие находится ниже уровня воды на  $h = H/3$ . Вес воды в стакане  $P$ , а сила натяжения нити, на которой подвешен стакан, равна  $F = P/75$ . Воду в стакане начинают нагревать. На какую долю уменьшилась плотность воды в нем в момент, когда стакан стал всплывать? Уровень и температура воды снаружи неизменны.

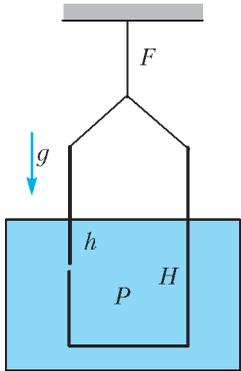


Рис. 8

*И.Воробьев*

**Ф2450.** Сосуд объемом  $V_0$  заполнен гелием с температурой  $T_0$ . Он соединен трубкой с цилиндром, на дне которого лежит массивный поршень, а выше – вакуум. Кран в трубке открывают, и поршень

начинает медленно подниматься (рис.9). Когда в цилиндре оказался объем гелия  $V$ , поршень остановился. Найдите конечную температуру гелия. Трения между поршнем и цилиндром нет. Теплообменом гелия с поршнем, цилиндром и сосудом пренебречь.

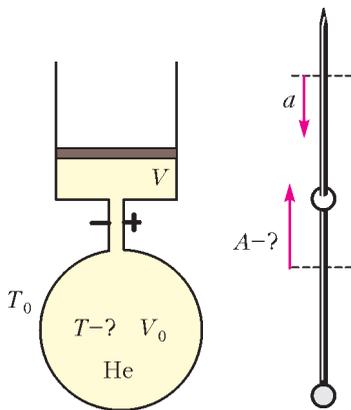


Рис. 9

Рис. 10

*И.Воробьев*

**Ф2451.** На вертикальной спице снизу закреплен точечный заряд, а вдоль спицы колеблется маленькая заряженная бусинка (рис.10). Найдите ее ускорение  $A$  в нижней точке, если в верхней точке ускорение равно  $a$ . Трения нет, ускорение свободного падения равно  $g$ .

Трения нет, ускорение свободного падения равно  $g$ .

*И.Воробьев*

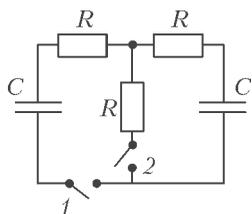


Рис. 11

**Ф2452.** Исходно на левом конденсаторе напряжение равно  $U_0$ , правый конденсатор не заряжен и оба ключа разомкнуты (рис.11). Сначала замыкают ключ 1, затем, дождавшись установления равновесия, замыкают ключ 2. Найдите количество теплоты, выделившееся на каждом из сопротивлений.

*Д.Медведев*

**Решения задач М2421–М2428, Ф2428–2434**

**М2421.** Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у

каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и находит приближенную сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он выбирает из списка любые два числа, складывает их, отбрасывает у суммы знаки после запятой (если они есть) и записывает результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он делает то же самое и так далее, пока в списке не останется одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

**Ответ.** 51 счетовод.

**Решение.** Оценка. Счетоводы каждый раз вычисляли целую часть суммы каких-то двух чисел, которая равна сумме их целых частей плюс, возможно, единица. Назовем это добавление единицы *оказией*. Она могла случаться лишь тогда, когда оба слагаемых были нецелыми. Каждый счетовод получил в итоге сумму целых частей исходных чисел плюс количество okazji, случившихся у него. Поскольку каждая оказия удаляла два нецелых числа, то у одного счетовода okazji было не более  $100/2 = 50$ . Итак, количество okazji одного счетовода принимает одно из 51 значений: 0, 1, 2, ..., 50. Тем самым, различных результатов у счетоводов могло быть не более 51.

**Пример.** Пусть было 50 чисел 0,3 и 50 чисел 0,7. Покажем, как счетоводу получить любой целый результат  $k$  от 0 до 50. Сначала он складывает  $k$  раз  $0,3 + 0,7$  и получает  $k$  единиц (при  $k = 0$  он складывает  $0,3 + 0,3$ ). Далее к имеющемуся уже целому числу он добавляет по очереди все остальные числа без okazji.

*Л.Медников, А.Семенов*

**М2422.** Прямоугольник  $p \times q$ , где  $p, q$  – натуральные взаимно простые числа,  $p < q$ , разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратиков. Найдите: а) суммарный периметр; б) суммарную площадь всех этих треугольников.

**Ответ.** а)  $\frac{(p+1)(p+q+\sqrt{p^2+q^2})}{q}$ ; б)  $\frac{(p+1)(2p+1)}{6q}$ .

а) Будем считать, что горизонтальная сторона прямоугольника равна  $p$ , а вертикальная –  $q$ . Все отсекаемые треугольники подобны (вертикальный и горизонтальный катеты относятся как  $q : p$ ), поэтому достаточно найти сумму  $s$  длин их вертикальных катетов. Тогда сумма горизонтальных катетов равна  $\frac{p}{q}s$ , сумма гипотенуз –

$$\sqrt{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2} s = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{q} s,$$

а значит, сумма периметров равна  $\frac{p+q+\sqrt{p^2+q^2}}{q} s$ . Так как  $q > p$ , легко видеть, что диагональ не может пересечь обе вертикальные стороны какого-либо квадрата. Кроме того, диагональ не проходит через

вершины квадратиков (кроме вершин прямоугольника  $p \times q$ ), иначе  $p$  и  $q$  не будут взаимно просты. Если диагональ пересекает две горизонтальные стороны квадратика, то она не отсекает от него треугольник. Значит, треугольники образуются в следующих случаях: в двух угловых квадратиках прямоугольника или когда диагональ пересекает вертикальную линию. При пересечении вертикальной линии образуются два треугольника, у которых вертикальные катеты составля-

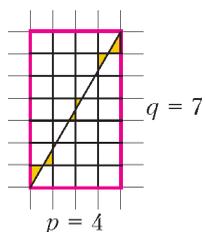


Рис. 1

ют вертикальную сторону квадратика, т.е. дают в сумме 1 (рис.1). Вертикальных линий сетки  $p - 1$ , с учетом двух угловых треугольников получаем  $s = (p + 1)$ , после чего приходим к ответу.

б) Для удобства растянем наш прямоугольник в  $q$  раз по горизонтали и в  $p$  раз по вертикали (при этом все площади умножились на  $pq$ ), получим квадрат  $(pq) \times (pq)$ , разбитый на прямоугольники  $q \times p$  (рис.2). Свяжем с картинкой систему координат

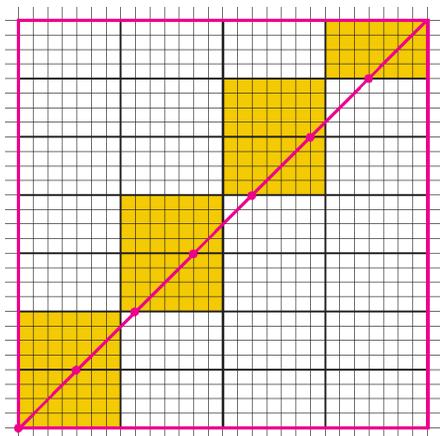


Рис. 2

так что, левый нижний угол – это начало координат. Отметим все точки пересечения диагонали с горизонтальными линиями разбиения, а также начало координат, иначе говоря, мы отметили точки  $(0, 0)$ ,  $(p, p)$ ,  $(2p, 2p)$ , ...,  $((q - 1)p, (q - 1)p)$ . Выделим желтым все прямоугольники, у которых на нижней стороне отмеченная точка. Числа  $0, p, 2p, \dots, (q - 1)p$  дают различные остатки при делении на  $q$  (действительно, если бы  $kp$  и  $lp$  при некоторых  $0 \leq k < l \leq q - 1$  давали один и тот же остаток, то разность  $lp - kp = p(l - k)$  делилась бы на  $q$ , что невозможно, так как  $0 < l - k < q$ ). Так как этих чисел ровно  $q$  штук, каждый остаток встретится ровно один раз. Это означает, что если мы наложим друг на друга желтые прямоугольники, то отмеченные точки попадут в разные узлы нижней стороны и заполнят все эти узлы (кроме правого крайнего; рис.3).

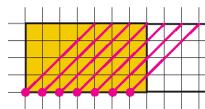


Рис. 3

Теперь мы видим все треугольники, которые диагональ отрезала от правого нижнего угла: это равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами  $1, 2, \dots, p$ , при этом треугольник каждого размера

встречается ровно один раз. Сумма площадей всех таких треугольников равна  $(1^2 + 2^2 + \dots + p^2)/2$ . Такая же ситуация с треугольниками второго типа. Итого общая площадь всех отсекаемых треугольников будет равна  $1^2 + 2^2 + \dots + p^2$ . По известной формуле эта сумма равна  $p(p + 1)(2p + 1)/6$ . Вспомним, что мы увеличивали площади в  $pq$  раз, значит, разделив это число на  $pq$ , получим ответ.

П.Кожевников, А.Толыго

**M2423.** Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одинакового радиуса пересекаются в точках  $X_1$  и  $X_2$  (рис.1). Окружность  $\omega$  касается окружности  $\omega_1$  внешним образом в точке  $T_1$  и окружности  $\omega_2$  внутренним образом в точке  $T_2$ . Докажите, что прямые  $X_1T_1$  и  $X_2T_2$  пересекаются на окружности  $\omega$ .

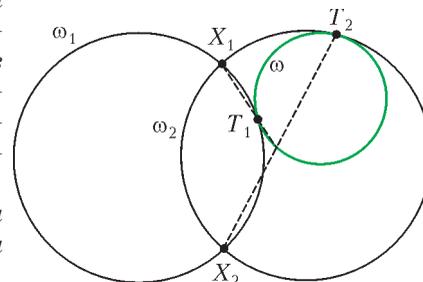


Рис. 1

Из симметрии окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  следует, что касательная  $t_1$  к  $\omega_1$ , проведенная к точке  $X_1$ , и касательная  $t_2$  к  $\omega_2$ , проведенная к точке  $X_2$ , параллельны (рис.2). Пусть прямая  $X_1T_1$  пересекает  $\omega$  вторично в точке  $Y$ . Касательная  $t$  к  $\omega$ , проведенная к точке  $Y$ , параллельна  $t_1$ , так как есть гомотетия с центром в точке  $T_1$ , переводящая окружность  $\omega_1$  в  $\omega$ , причем  $X_1$  и  $\omega$  располагаются по одну сторону от  $t$ , значит,  $X_2$  и  $\omega$

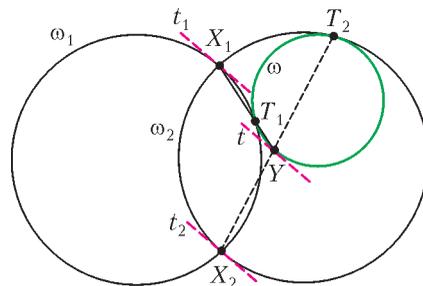


Рис. 2

располагаются по разные стороны относительно  $t$ . Аналогично, если прямая  $X_2T_2$  пересекает  $\omega$  вторично в точке  $Y'$ , то касательная  $t'$  к  $\omega$ , проведенная к точке  $Y'$ , параллельна  $t_2$ , при этом  $X_2$  и  $\omega$  располагаются по разные стороны относительно  $t'$ . Значит, касательные  $t \parallel t'$  к окружности  $\omega$  совпадают (поскольку  $X_2$  и  $\omega$  располагаются по разные стороны относительно каждой из прямых  $t$  и  $t'$ ). Тем самым,  $Y = Y'$ , откуда вытекает утверждение задачи.

Заметим, что в этой конструкции точка  $Z$  пересечения прямых  $X_2T_1$  и  $X_1T_2$  тоже лежит на окружности  $\omega$  (это следует из равноправия объектов); также можно доказать, что  $T_1T_2$  проходят через середину отрезка  $X_1X_2$ , а  $YZ \parallel X_1X_2$  (рис.3).

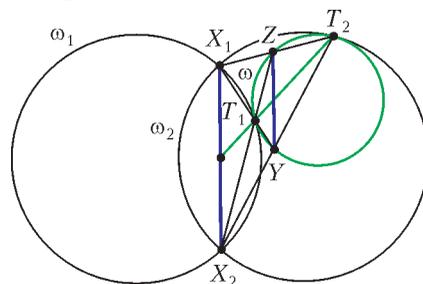


Рис. 3

Эта задача допус-

кает следующее обобщение. Пусть гомотетия с центром  $T_1$  переводит окружность  $\omega_1$  в окружность  $\omega$ , а гомотетия с центром  $T_2$  переводит окружность  $\omega$  в окружность  $\omega_2$ . Пусть композиция этих гомотетий переводит некоторую точку  $X_1 \in \omega_1$  в точку  $X_2 \in \omega_2$ . Тогда прямые  $X_1T_1$  и  $X_2T_2$  пересекаются на окружно-

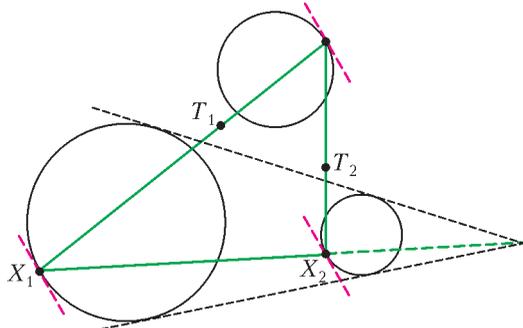


Рис. 4

сти  $\omega$ . Для этого общего факта существует много вариантов расположения точек и окружностей (см., например, рис.4).

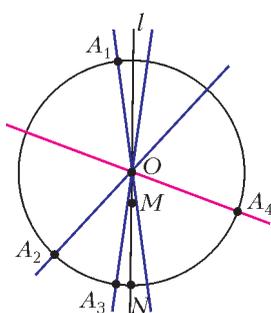
П.Кожевников

**M2424.** На плоскости дано несколько прямых, имеющих общую точку  $O$ . Докажите, что каждую из этих прямых можно раскрасить красным или синим так, чтобы на плоскости нашлась точка, отличная от  $O$ , сумма расстояний от которой до всех красных прямых была равна сумме расстояний от нее до всех синих прямых.

Для каждой прямой одну из двух полуплоскостей, на которые она разбивает плоскость, назовем положительной, а другую – отрицательной. Определим ориентированное расстояние от точки до прямой как расстояние, взятое со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, в положительной или отрицательной полуплоскости находится точка.

Для каждой точки  $X$  определим  $f(X)$  как сумму ориентированных расстояний от точки  $X$  до всех прямых. Если  $X$  и  $Y$  – две точки, симметричные относительно  $O$ , то очевидно,  $f(X) = -f(Y)$ . Пройдем от точки  $X$  до  $Y$  по полуокружности с центром  $O$ . В силу непрерывности функции  $f$  на полуокружности найдется точка  $Z$ , для которой  $f(Z) = 0$ . Точка  $Z$  будет искомой, если покрасить красным все прямые, относительно которых  $Z$  лежит в положительной полуплоскости, а синим – все оставшиеся прямые.

На самом деле,  $f(X)$  – линейная функция (это верно



и для данных прямых произвольного расположения). Поэтому если найдется хотя бы одна точка, в которой  $f$  обращается в 0, то существует целая прямая, все точки которой обладают этим свойством.

Приведем еще одно решение, в котором нужная точка указывается явно (см. рисунок). Проведем окружность с цент-

ром в точке  $O$ . Для каждой из данных прямых отметим одну из двух точек пересечения с окружностью. Эти точки обозначим  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Поместим в точки  $A_i$  единичные точечные массы, через  $M$  обозначим центр масс этой системы. Пусть прямая  $l$  проходит через точки  $O$  и  $M$  (если  $M$  совпадает с  $O$ , то  $l$  – произвольная прямая, проходящая через  $O$ ). Прямая  $l$  разделит множество точечных масс на два подмножества; пусть, скажем, по одну сторону от прямой  $l$  лежат точки  $A_1, \dots, A_k$ , а по другую – точки  $A_{k+1}, \dots, A_n$ . Момент системы масс относительно прямой  $l$  равен нулю, откуда (учитывая, что массы равны), сумма расстояний от точек  $A_1, \dots, A_k$  до прямой  $l$  равна сумме расстояний от точек  $A_{k+1}, \dots, A_n$  до той же прямой. Пусть  $N$  – точка пересечения прямой  $l$  с окружностью. Очевидно, расстояние от  $A_i$  до прямой  $l$  равно расстоянию от  $N$  до прямой  $OA_i$ . Тогда достаточно прямые  $OA_1, \dots, OA_k$  покрасить красным, а прямые  $OA_{k+1}, \dots, OA_n$  – синим: сумма расстояний от точки  $N$  до красных прямых будет равна сумме расстояний от  $N$  до синих прямых.

В заключение приведем еще такую механическую интерпретацию сюжета из второго решения. Представим, что наша окружность – это невесомое колесо с закрепленной осью ( $O$ ), которое может свободно вращаться в вертикальной плоскости. Отрезки  $OA_i$  – это невесомые спицы колеса, на концах которых находятся единичные массы. На массы действует сила тяжести, направленная вертикально вниз. Нетрудно заметить, что расстояние от точки  $A_i$  до вертикальной прямой, проходящей через  $O$ , пропорционально моменту силы относительно оси вращения. Тем самым, утверждение задачи связано с существованием положения статического равновесия.

И.Вайнштейн, П.Кожевников

**M2425.** Прямоугольный параллелепипед  $2 \times 2 \times 100$  нужно разбить на кирпичи  $1 \times 1 \times 2$ . Докажите, что количество способов сделать это является точным квадратом. (При подсчете параллелепипед не вращаем и не переворачиваем.)

Пусть в основании прямоугольного параллелепипеда  $2 \times 2 \times n$  лежит квадрат  $2 \times 2$ , а  $n$  – его высота. Пусть  $T_n$  – количество разбиений «дома»  $2 \times 2 \times n$  на кирпичи, состоящие из двух единичных кубиков (положим также  $T_0 = 1$ ). В решении мы найдем формулу для  $T_n$  и установим, что для четных  $n$  число  $T_n$  является точным квадратом.

Имеем  $T_1 = 2$  (рис.1),  $T_2 = 9$  (рис.2).

Разбиения на рисунке 2,б нельзя разделить горизонтальной плоскостью на две части, не разрезав ни одного кирпича, такие разбиения будем называть фундаментальными.

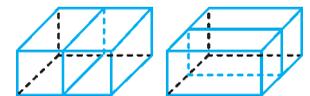


Рис. 1

На рисунке 2,а «слои» немного раздвинуты, здесь можно разделить параллелепипед горизонтальной плоскостью на две части, не разрезая ни одного кирпича. Количество фундаментальных разбиений дома  $2 \times 2 \times n$  обозначим через  $F_n$ . Таким образом,

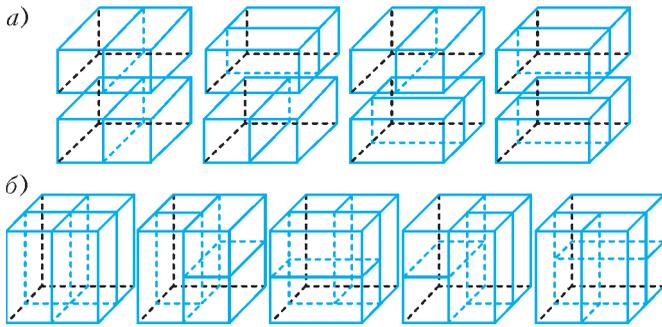


Рис. 2

$F_1 = T_1 = 2$ ,  $F_2 = 5$ . Покажем, что при  $n \geq 3$  выполнено  $F_n = 4$ . Начнем строить фундаментальное разбиение, укладывая кирпичи, начиная с нижнего этажа. При  $n > 2$  на нижнем этаже обязательно есть ровно один горизонтальный кирпич, поставить его можно четырьмя способами. Два оставшихся единичных кубика нижнего этажа должны заполнять вертикальные кирпичи. Эти кирпичи занимают на втором этаже два кубика, два других кубика снова должны занимать вертикальные кирпичи, и так до самого верхнего этажа. Фундаментальное разбиение продолжается единственным образом и завершается горизонтальным кирпичом на верхнем этаже.

Если разбиение дома  $2 \times 2 \times n$  нефундаментально, рассмотрим самую нижнюю «разделяющую» горизонтальную плоскость, пусть она находится между  $k$ -м и

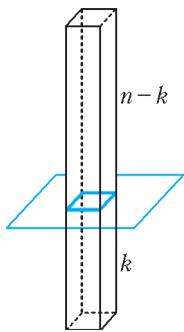


Рис. 3

( $k+1$ )-м этажами (рис.3). Тогда в нижних  $k$  этажах должно быть фундаментальное разбиение дома  $2 \times 2 \times k$  (таких  $F_k$  штук), а в верхних  $n-k$  этажах – произвольное разбиение дома  $2 \times 2 \times (n-k)$  (таких  $T_{n-k}$  штук). Итого  $F_k T_{n-k}$  разбиений, в которых самая нижняя разделяющая плоскость между  $k$ -м и ( $k+1$ )-м этажами. Тогда общее количество нефундаментальных разбиений равно  $F_1 T_{n-1} + F_2 T_{n-2} + \dots + F_{n-1} T_1$ . Добавляя фундаментальные разбиения и подставляя известные значения для  $F_k$ , имеем рекуррентную формулу

$$T_n = 2T_{n-1} + 5T_{n-2} + 4T_{n-3} + \dots + 4T_0. \quad (1)$$

(Эта формула выполнена для всех  $n \geq 2$ , для  $n = 2$  она имеет вид  $T_2 = 2T_1 + 5T_0$ .) Вычитая из формулы вида (1) для  $T_{n+1}$  формулу для  $T_n$ , получаем

$$T_{n+1} = 2T_n - 2T_{n-1} + 5T_{n-1} - 5T_{n-2} + 4T_{n-2},$$

откуда

$$T_n = 3T_{n-1} + 3T_{n-2} - T_{n-3}. \quad (2)$$

Эта формула (верная для всех  $n \geq 3$ ) задает линейную рекурренту третьего порядка.

Ищем формулу для  $T_n$  в виде  $T_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + c_3 \lambda_3^n$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – корни характеристического уравнения  $\lambda^3 = 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$  (о линейных рекуррентах можно прочитать, например, в статье А.Егорова «Числа Пизо» в «Кванте» №5 за 2005 г.). Получаем  $\lambda_1 = -1$ ,

$\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$ . Подставляя в формулу для  $T_n$  значения  $n = 0, 1, 2$ , находим

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{6}, \quad c_3 = \frac{2 - \sqrt{3}}{6}.$$

Для четного  $n = 2k$  имеем

$$T_{2k} = \frac{1}{3} + \frac{2 + \sqrt{3}}{6} (2 + \sqrt{3})^{2k} + \frac{2 - \sqrt{3}}{6} (2 - \sqrt{3})^{2k}.$$

Нетрудно убедиться, что  $T_{2k} = t_k^2$ , где

$$t_k = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} (2 + \sqrt{3})^k + \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} (2 - \sqrt{3})^k.$$

Величина  $t_k$  представляет собой сумму двух сопряженных выражений вида  $A + B\sqrt{3}$  и  $A - B\sqrt{3}$ , где  $A$  и  $B$  – рациональные числа. Тем самым,  $t_k$  рационально, значит,  $T_{2k}$  – квадрат рационального числа, а так как оно целое, то является квадратом целого числа, что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что числа  $t_1, t_2, \dots$  удовлетворяют рекуррентному соотношению  $t_k = 4t_{k-1} - t_{k-2}$ .

*В.Расторгуев*

**M2426.** В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос, есть ли дорога между ними. Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.

Переформулируем задачу на языке графов следующий образом.

Дан полный граф на 64 вершинах, у которого все 2016 ребер изначально красные. Играют двое. Петя указывает на некоторое красное ребро, а Вася удаляет его или делает черным. Происходит 2016 таких ходов, пока не останется красных ребер. Перед каждым Петиним ходом мы имеем граф, в котором некоторые ребра черные (этим зафиксировано, что между соответствующими городами точно есть дорога), а некоторые красные (про них еще не было вопроса, тем самым, каждое красное ребро может в итоге превратиться в черное ребро, а может просто исчезнуть). Петя хочет в какой-то момент игры (когда еще есть красные ребра) предсказать, какой в конечном итоге получится граф (из черных ребер) – связный или нет. Докажем, что Вася может играть так, чтобы даже за один ход до конца процесса (когда останется последнее красное ребро) опровергнуть любое предсказание Пети.

Вася вплоть до последнего хода будет действовать так, чтобы для нашего графа (с красными и черными ребрами) выполнялись условия: граф связный, но никакое черное ребро не входит ни в какой цикл. В начале игры эти условия выполнены. Пусть на очередном ходе Петя указал на красное ребро. Если это ребро содержится в каком-то цикле, то Вася удаляет его (связность графа при этом не нарушится), иначе – делает черным. Когда остается лишь одно красное ребро, то циклов не оста-

лось (иначе в цикле будет черное ребро, что невозможно), но так как граф связный, то он является деревом. Поэтому Вася может как удалить последнее красное ребро, нарушив связность, так и сделать его черным, сохранив связность.

К.Кноп, Л.Медников, А.Семенов

**M2427.** На доске написано  $N$  чисел, все они различны, и одно из них равно 0. Можно взять любой многочлен, каждый коэффициент которого равен одному из написанных чисел (среди коэффициентов могут быть равные), и дописать на доску все корни этого многочлена. За несколько таких операций на доске оказались все целые числа от  $-2016$  до  $2016$  (и, возможно, еще какие-то числа). Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .

**Ответ.**  $N = 2$ .

Из одного нуля ничего получить нельзя. Значит, хотя бы одно число дописать придется.

Покажем, как получить все целые числа от  $-2016$  до  $2016$  из чисел 0 и  $a = 2016!$ .

Получим  $-1$ . Это можно сделать с помощью многочлена  $ax + a$ . С помощью  $ax^2 - 1$  можно получить числа  $\pm \frac{1}{\sqrt{a}}$ , из которых с помощью многочлена  $\frac{1}{\sqrt{a}}x - \frac{1}{\sqrt{a}}$  уже можно получить 1.

Теперь, если на доске написано число  $b$ , с помощью многочлена  $x + b$  можно получить  $-b$ . Значит, мы можем сразу дописать на доску  $-a$ .

Предположим теперь, что на доске уже написаны числа от 0 до  $M - 1$ , где  $M \leq 2016!$ . Покажем, как получить число  $M$ . Числа  $0, 1, 2, \dots, M - 1$  — это цифры в системе счисления с основанием  $M$ . Представим число  $2016!$  в этой системе:

$$2016! = a_k M^k + a_{k-1} M^{k-1} + \dots + a_1 M + a_0,$$

где  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, M - 1\}$ . Так как  $2016!$  делится на  $M$ , то  $a_0$  делится на  $M$ , значит,  $a_0 = 0$ . Тогда  $M$  — корень многочлена  $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x - 2016!$ , все коэффициенты которого уже есть на доске.

Так мы последовательно сможем выписать на доску числа  $1, 2, \dots, 2016$ , а затем и противоположные им числа.

Г.Жуков

**M2428.** На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить  $N$  кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. (Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки.) Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов: а) при  $N = 3$ ; б) при  $N = 4$ ? в\*) Может ли при некотором  $N$  суммарная длина поездов быть больше 1000?

**Ответ.** а) 1,5; б) 2; в) может.

*Оценка.* Возьмем любые две дороги — большие окружности на сфере. Они пересекаются в некоторой точке-

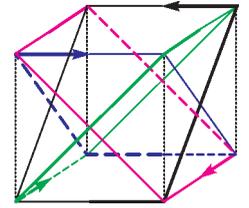
узле. Мысленно повернем одну из этих дорог относительно диаметра, содержащего узел, чтобы совпали дороги и направления движения на них. Если в этом эксперименте поезда-дуги пересекутся, то через некоторое время они на самом деле пересекутся в узле, что запрещено. Поэтому сумма длин поездов на этих дорогах не больше 1.

Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — суммы длин поездов на  $n$  дорогах. Складывая все неравенства вида  $a_i + a_j \leq 1$ , где  $1 \leq i < j \leq n$ , получим  $(n-1)(a_1 + \dots + a_n) \leq \frac{1}{2}n(n-1)$ ,

т.е.  $a_1 + \dots + a_n \leq \frac{n}{2}$ , что и анонсировалось.

*Пример* (см. рисунок).

Рассмотрим куб, вписанный в данную сферу. Каждая из четырех дорог — сечение сферы плоскостью, проходящей через одно из ребер основания куба и противоположное ребро другого основания. На рисунке разными цветами обозначены «дороги» (т.е. центральные проекции дорог со сферы на поверхность нашего куба). Поезда выделены жирными стрелками. Нетрудно видеть, что столкновения поездов не произойдет.



Существуют и другие примеры, в которых используется та же идея проектирования на поверхность многогранника. В качестве многогранника можно брать кубоктаэдр (его можно получить из куба, соединив середины пар соседних ребер и отрезав восемь «угловых» пирамид). А с помощью икосододекаэдра (его можно получить из додекаэдра или из икосаэдра, отрезав «угловые» пирамиды) можно получить пример с шестью поездами суммарной длины 3. Оказывается, для любого числа дорог  $n$  можно добиться суммарной длины поездов  $n/2$  (что, в частности, решает задачу в)). Однако описание примера в общем случае намного сложнее. (Редакция планирует рассказать об этом в одном из следующих номеров журнала.)

А.Бердников, Л.Медников, А.Семенов

**Ф2428.** Группа из трех туристов должна перебраться из пункта  $A$  в пункт  $B$  по дороге длиной  $s = 45$  км. Стартуют все одновременно. На всю группу туристов есть только два велосипеда, причем если на велосипеде едут двое, то их скорость равна  $3v$ , а если на велосипеде едет один человек, то его скорость равна  $4v$ . Если же турист идет пешком, то его скорость равна  $v = 5$  км/ч. За какое минимальное время все туристы могут оказаться в пункте назначения?

Понятно, что нужно так распределить время между движением пешком, вдвоем на велосипеде и в одиночку на велосипеде, чтобы время путешествия было минимальным.

Пусть один из туристов, первый, уходит на велосипеде «в отрыв», а двое других едут на втором велосипеде. Не доезжая расстояния  $L$  до пункта  $B$ , первый турист оставляет на дороге свой велосипед и идет дальше пешком. Когда едущие на одном велосипеде двое

туристов доезжают до лежащего велосипеда, то дальше, вплоть до пункта  $B$ , они едут каждый на своем велосипеде. Прибыть в пункт  $B$  все трое должны одновременно.

Условие равенства времен запишем так:

$$\frac{s-L}{3v} + \frac{L}{4v} = \frac{s-L}{4v} + \frac{L}{v}.$$

Из него следует, что  $10L = s$ . Отсюда находим искомое время движения:

$$T = 2,925 \text{ ч} = 2 \text{ ч } 55 \text{ мин } 30 \text{ с}.$$

Выигрыш во времени в сравнении с ситуацией, когда первый турист едет сразу до пункта  $B$ , а двое других все время едут на одном велосипеде, составляет 4,5 мин.

*В.Сергеев*

**Ф2429.** Ковбой привязал мячик для бейсбола,  $m_m = 150 \text{ г}$  и  $D = 7,3 \text{ см}$ , к суровой (нерастяжимой и легкой) нити длиной  $L = 1 \text{ м}$ , которая другим концом была закреплена на круглой горизонтальной перекладине диаметром  $d = 6 \text{ см}$ . Затем он отошел на 10 шагов в направлении, перпендикулярном перекладине, и выстрелил из кольца по мячу. Мяч стал быстро двигаться, накручивая нить на перекладину, а потом оторвался. При осмотре оказалось, что пуля застряла в мяче, а нитка обернулась вокруг перекладины  $n = 2$  раза. Оцените, какой была скорость пули перед столкновением с мячом, если масса пули  $m_{\text{п}} = 10 \text{ г}$ , а нитка выдерживает груз массой не больше  $m_{\text{гр}} = 10 \text{ кг}$ .

Ясно, что «10 шагов» даются в условии для того, чтобы можно было считать скорость пули за мгновение до столкновения с мячом горизонтальной. Сопротивлением воздуха и силой тяжести сначала пренебрежем. А потом сделаем соответствующие оценки.

За мгновение до разрыва нити выполняется условие

$$\frac{v_{\text{отр}}^2}{R} (m_{\text{п}} + m_m) = F_{\text{отр}},$$

где  $F_{\text{отр}} = m_{\text{гр}}g \approx 100 \text{ Н}$ ,  $R = L - n\pi d \approx 0,62 \text{ м}$ . Отсюда получаем

$$v_{\text{отр}} = \sqrt{\frac{F_{\text{отр}}R}{m_{\text{п}} + m_m}} \approx 20 \text{ м/с}.$$

Из закона сохранения импульса находим скорость пули перед столкновением с мячом:

$$v_{\text{п}} = \frac{v_{\text{отр}}(m_{\text{п}} + m_m)}{m_{\text{п}}} \approx 320 \text{ м/с}.$$

Теперь проверим, были ли наши предположения справедливыми. При скорости 20 м/с кинетическая энергия мяча с пулей внутри равна 32 Дж. При подъеме мяча на 2 м вверх его скорость уменьшится до 19 м/с, т.е. влиянием силы тяжести, поскольку эта сила консервативная, действительно можно пренебречь.

При движении в воздухе, плотность которого  $\rho \approx 1 \text{ кг/м}^3$ , со скоростью  $v = 20 \text{ м/с}$  мяч такого

размера испытывает силу сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = \mu S \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения шарика,  $S = \pi D^2/4$ ,  $\mu$  – безразмерный коэффициент, определяемый экспериментально и для шарика равный 0,4. Численно  $F_{\text{сопр}} \approx 0,3 \text{ Н}$ . Это в пять раз меньше, чем сила тяжести, действующая на мяч. Однако за 2 оборота вокруг перекладины мяч пролетел в воздухе расстояние  $l \approx 2\pi(L + R) \approx 10 \text{ м}$ . Если считать, что его скорость не менялась, т.е. сила сопротивления была постоянной, то шарик «растерял» на этом пути энергию

$$W = F_{\text{сопр}}l \approx 3 \text{ Дж} \ll 32 \text{ Дж}.$$

Следовательно, и предположение о том, что сопротивление воздуха особой роли не играет, тоже справедливо.

*Д.Бограчев*

**Ф2430.** Вася решил взвесить с помощью железных гири найденный им недалеко от озера Чебаркуль небольшой кусок челябинского метеорита. Для этого он использовал симметричные равноплечные весы, сделанные из железа. В воздухе взвешивание дало результат  $M = 2,1 \text{ кг}$ . Когда весы были полностью погружены в воду озера, результат был другим – для уравновешивания весов потребовалось положить на них гири, суммарная масса которых оказалась равной  $m = 1,8 \text{ кг}$ . При этом и взвешиваемое вещество, и гири также были полностью погружены в воду. Чему равна плотность материала метеорита? Плотность железа  $\rho_{\text{ж}} = 7,9 \text{ г/см}^3$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1,0 \text{ г/см}^3$ .

Поскольку весы равноплечные, симметричные и целиком сделаны из одного материала, то на их чаши после погружения в воду будут действовать одинаковые выталкивающие силы, которые будут создавать одинаковые моменты сил. Поэтому равновесие пустых весов в воде не нарушится, и их по-прежнему можно считать равноплечными.

Согласно условию задачи, масса найденного Васей куска метеорита равна  $M$ . При взвешивании в воде на этот кусок, помимо направленной вниз силы тяжести  $Mg$ , действует направленная вверх сила Архимеда  $\rho_{\text{в}}gV_m$ , где  $V_m = M/\rho_m$  – объем метеорита, а  $\rho_m$  – искомая плотность материала метеорита. На гири массой  $m$ , находящиеся в воде, действуют направленная вниз сила тяжести  $mg$  и направленная вверх сила Архимеда  $\rho_{\text{в}}gV_{\text{г}}$ , где  $V_{\text{г}} = m/\rho_{\text{ж}}$  – объем гири. Поскольку весы, погруженные в воду, при взвешивании куска метеорита находятся в равновесии, то можно записать такое равенство:

$$Mg - \rho_{\text{в}}gV_m = mg - \rho_{\text{в}}gV_{\text{г}},$$

или

$$M \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_m}\right) = m \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ж}}}\right).$$

Отсюда после простых преобразований получаем

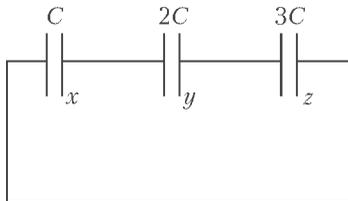
$$\rho_m = \frac{\rho_B \rho_{ж} M}{\rho_{ж} (M - m) + \rho_B m} \approx 4 \text{ г/см}^3.$$

В.Статиков

**Ф2431.** Три конденсатора с электрическими емкостями  $C$ ,  $2C$  и  $3C$  соединены в замкнутую цепочку последовательно друг за другом. С помощью специального прибора, подключенного к трем местам соединений конденсаторов, этим самым местам были сообщены (переданы) электрические заряды  $+Q$ ,  $+Q$  и  $-2Q$ . Прибор отключили. Какая максимальная (минимальная) энергия может быть запасена в системе заряженных конденсаторов?

Поскольку мест соединения выводов конденсаторов три, а разных зарядов два:  $+Q$ ,  $-2Q$ , то различных вариантов всего три: заряд  $-2Q$  может оказаться на одном из трех мест соединения, а два других (одинаковых) заряда – на других местах.

Обозначим через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  заряды правых пластин конденсаторов (см. рисунок). Энергия, запасенная системой конденсаторов, равна



$$E = \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{4C} + \frac{z^2}{6C}.$$

Алгебраическая сумма напряжений на конденсаторах равна нулю, поэтому

$$\frac{x}{C} + \frac{y}{2C} + \frac{z}{3C} = 0.$$

**Вариант 1.** Суммарные заряды в местах соединений равны

$$x - y = -2Q, y - z = Q, z - x = Q.$$

В этом случае  $x = -8Q/11$ ,  $y = +14Q/11$ ,  $z = +3Q/11$ , и

$$E = \frac{15 Q^2}{22 C} = \frac{Q^2}{C} \cdot 0,681(81).$$

**Вариант 2.** Суммарные заряды в местах соединений равны

$$x - y = Q, y - z = -2Q, z - x = Q.$$

В таком случае  $x = +Q/11$ ,  $y = -10Q/11$ ,  $z = +12Q/11$ , и

$$E = \frac{9 Q^2}{22 C} = \frac{Q^2}{C} \cdot 0,409(09).$$

**Вариант 3.** Суммарные заряды в местах соединений равны

$$x - y = Q, y - z = Q, z - x = -2Q.$$

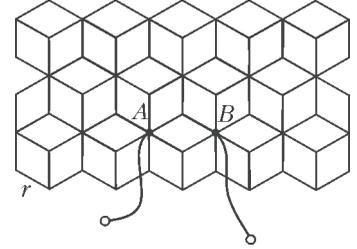
Тогда  $x = +15Q/11$ ,  $y = +4Q/11$ ,  $z = -7Q/11$ , и

$$E = \frac{281 Q^2}{242 C} \approx \frac{Q^2}{C} \cdot 1,16.$$

Понятно, что во втором случае системой конденсаторов запасена самая маленькая энергия, а в третьем случае – самая большая.

С.Варламов

**Ф2432.** Бесконечная сетка с ромбовидными ячейками, показанная на рисунке, состоит из одинаковых резисторов сопротивлением  $r$ . Найдите сопротивление между точками  $A$  и  $B$ .



Представим себе, что далеко-далеко от точек  $A$  и  $B$  на эту сетку наложили толстый медный провод, имеющий форму окружности большого радиуса с центром между точками  $A$  и  $B$ . Два одинаковых источника тока подключили к этому медному кольцу и к точкам  $A$  и  $B$  так, что в точку  $A$  входит ток  $I$ , а из точки  $B$  ток  $I$  выходит. Представим распределение токов по проволочкам бесконечной сетки в виде наложения двух распределений: симметричного относительно точки  $A$  для разбегающихся от точки  $A$  токов и тоже симметричного, только относительно точки  $B$ , сбегающихся к точке  $B$  токов. Обозначим через  $D$  узел сетки, который через один резистор соединен с точкой  $A$  и через один резистор соединен с точкой  $B$ . Для системы разбегающихся от точки  $A$  токов в резисторе  $AD$  течет ток  $I/6$ , а в резисторе  $DB$  течет ток  $I/12$ . Для системы сбегающихся к точке  $B$  токов в резисторе  $AD$  течет ток  $I/12$ , а в резисторе  $DB$  течет ток  $I/6$ . На этих двух резисторах, включенных последовательно между точками  $A$  и  $B$ , напряжение равно

$$U = r \cdot 2I \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right).$$

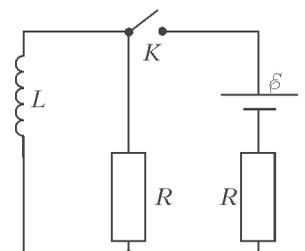
Значит, эквивалентное значение сопротивления между точками  $A$  и  $B$ , которое заменяет всю бесконечную двумерную сетку, равно

$$R_{AB} = \frac{r}{2}.$$

А.Бычков

**Ф2433.** В электрической схеме, изображенной на рисунке, все элементы идеальные, ток в катушке индуктивностью  $L$  равен нулю. Ключ замыкают, а размыкают его через промежуток времени  $t_0$ , когда скорость изменения энергии, запасаемой в катушке индуктивности, достигает максимума. Известно, что  $t_0 = 2 \ln 2 \cdot (L/R)$ . Найдите:

- 1) мощность  $P$ , которую развивал источник тока в момент размыкания ключа;
- 2) количество теплоты  $Q_1$ , которое выделилось в схеме после размыкания ключа;
- 3) количество теплоты  $Q_2$ , которое выделилось в схеме при замкнутом ключе.



Обозначим через  $i_L$  и  $i_R$  мгновенные значения токов,

текущих через катушку индуктивности и через резистор, включенный параллельно катушке (слева на рисунке). В соответствии с условием имеем

$$\mathcal{E} = Ri_R + R(i_L + i_R) = Ri_L + 2Ri_R, \quad (1)$$

откуда

$$i_R = \frac{\mathcal{E} - i_L R}{2R},$$

а также

$$L \frac{di_L}{dt} = Ri_R. \quad (2)$$

Скорость изменения энергии в катушке это

$$\omega_L = \frac{d(Li_L^2/2)}{dt} = Li_L \frac{di_L}{dt} = Ri_L i_R,$$

или

$$\omega_L = i_L \frac{\mathcal{E} - i_L R}{2R} R = i_L \frac{\mathcal{E} - i_L R}{2}.$$

График такой зависимости  $\omega_L$  от  $i_L$  – это парабола. Экстремум достигается при  $i_L = \mathcal{E}/(2R)$ . В этот момент ток, текущий через резистор, параллельный катушке индуктивности, равен  $i_R = \mathcal{E}/(4R)$ . Следовательно, мощность источника тока в момент размыкания цепи равна

$$P = \frac{3\mathcal{E}^2}{4R}.$$

Количество теплоты, выделившееся в цепи после размыкания ключа, равно запасенной в катушке энергии в момент размыкания ключа:

$$Q_1 = \frac{L \left( \frac{\mathcal{E}}{2R} \right)^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{8R^2}.$$

Для ответа на последний вопрос найдем заряд, прошедший через источник тока к моменту размыкания ключа. Для этого умножим выражения слева и справа уравнения (1) на  $\Delta t$  и найдем сумму за все время  $t_0$ :

$$\mathcal{E}\Delta t = R\Delta q_L + 2R\Delta q_R, \quad \mathcal{E}t_0 = Rq_L + 2Rq_R. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим заряд  $\Delta q_R$ :

$$L\Delta i_L = Ri_R\Delta t = R\Delta q_R,$$

а после суммирования за весь промежуток времени, пока ключ был замкнут, получим

$$q_R = \frac{L\mathcal{E}}{2R^2}.$$

Заряд, протекший за этот же промежуток времени через катушку индуктивности, можно найти из уравнения (3):

$$q_L = \frac{1}{R}(\mathcal{E}t_0 - 2Rq_R) = (2\ln 2 - 1) \frac{L\mathcal{E}}{R^2}.$$

Количество теплоты, выделившееся в электрической цепи при замыкании ключа, найдем из закона сохранения энергии:

$$Q_2 = \mathcal{E}(q_L + q_R) - Q_1 = \frac{(2\ln 2 - 5/8)L\mathcal{E}^2}{R^2}.$$

А.Шеронов

**Ф2434.** Над плоской горизонтальной поверхностью на высоте  $H = 10$  м находится точечный изотропный источник света интенсивностью  $W_0 = 1000$  К. (тысяча кандел). В ближайшей к источнику света точке поверхности установлен маленький плоский датчик освещенности, его плоскость перпендикулярна лучам света. Площадь чувствительного элемента датчика  $s = 0,1$  см<sup>2</sup>. Какую освещенность  $E_1$  (в люксах) регистрирует датчик? Затем прямо под источником света на поверхность поставили вертикальную цилиндрическую трубу с внутренним диаметром  $d = 10$  см. Высота трубы равна  $H$ . Источник света и датчик освещенности находятся на оси симметрии трубы. Внутренние стенки трубы гладкие, зеркальные и отражают 100% света. Какую теперь освещенность  $E_2$  регистрирует датчик? Что покажет датчик, если стенки при любом угле падения света отражают 99% падающего света? (Численные расчеты можно провести с помощью компьютера.)

Световой поток от этого источника света равен (в люменах)  $\Phi = 4\pi W_0 = 4\pi \cdot 10^3$  лм. По определению освещенности,

$$E_1 = \frac{\Phi}{S} = \frac{4\pi W_0}{4\pi H^2} = \frac{W_0}{H^2} = 10 \text{ лк.}$$

Световой поток, попадающий от источника света в трубу, составляет половину от всего светового потока, создаваемого источником света. Свет, отражаясь от стенок трубы (и частично поглощаясь, если стенки отражают не 100% света), попадает на участок поверхности, ограниченный стенками трубы. Площадь этого участка равна  $\pi d^2/4 \approx 78,5$  см<sup>2</sup>  $\gg s$ . Поток излучения распределен почти равномерно по этому участку. Для стенок с коэффициентом отражения 100% датчик будет фиксировать освещенность

$$E_2 = \frac{4\pi W_0/2}{\pi d^2/4} = 8 \cdot 10^5 \text{ лк.}$$

Если луч света от источника вышел под углом  $\varphi$  к оси симметрии трубы, то, прежде чем он попадет на поверхность с датчиком, он испытает  $N = \{(H/d) \operatorname{tg} \varphi\}$  отражений от стенок. Здесь фигурные скобки символизируют математическую операцию округления до ближайшего меньшего целого. С учетом отражений, в каждом из которых по условию задачи теряется 1% света, доля световой энергии, которая доберется до нижнего торца трубы, будет равна  $(0,99)^N$ . Это означает, что эквивалентный телесный угол  $\Omega_{\text{эКВ}}$  теперь не  $2\pi$ , а меньше. Для выбранных числовых значений параметров задачи

$$\Omega_{\text{эКВ}} = \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot (0,99)^{\{(H/d) \operatorname{tg} \varphi\}} \approx 1,54.$$

(Расчет этого эквивалентного угла можно провести, например, с использованием компьютерной программы Excel.) Следовательно, датчик освещенности зарегистрирует освещенность

$$E_3 = \frac{1,54 W_0}{\pi d^2/4} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ лк.}$$

М.Светлов

## Алгебра, геометрия и комбинаторика расстояний

С.Дворянинов, П.Кожевников

На координатной плоскости линейное уравнение  $y = x$  задает прямую, а неравенства  $y < x$  и  $y > x$  задают две полуплоскости, для которых эта прямая является общей границей (рис.1). Геометрический смысл пере-

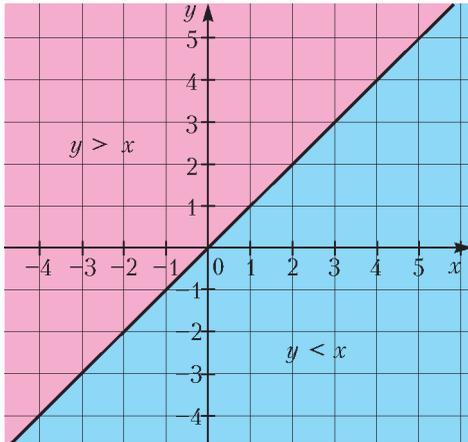


Рис. 1

менных  $x$  и  $y$  здесь связан с расстояниями от точки  $(x, y)$  до осей координат.<sup>1</sup>

А какие фигуры будут задавать линейные уравнения и неравенства, если переменные будут иметь другой геометрический смысл, например обозначать расстояния до точек, кругов или других фигур? Оказывается, занимаясь этим вопросом, можно прийти ко многим интересным геометрическим сюжетам.

### Расстояния до точек

Начнем с простого случая двух точек на плоскости. Для произвольной точки обозначим через  $x$  и  $y$  расстояния от нее до фиксированных точек  $X$  и  $Y$ . Если  $X$  и  $Y$  – данные точки, то уравнение  $x = y$  задает серединный перпендикуляр к отрезку  $XY$ . Этот серединный

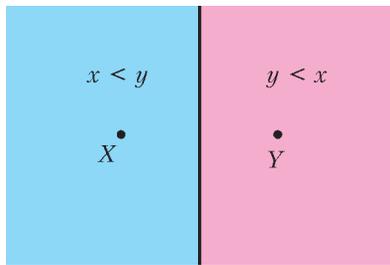


Рис. 2

перпендикуляр делит плоскость на две полуплоскости (рис.2); полуплоскость, содержащая точку  $X$ , задается неравенством  $x < y$ , а содержащая точку  $Y$  – неравенством  $x > y$ . Для точек  $X$  и  $Y$  в пространстве уравнение  $x = y$  задает плоскость, перпендикулярную отрезку  $XY$  и проходящую через его середину, неравенства  $x > y$ ,  $x < y$  задают полупространства.

<sup>1</sup> Можно сказать, что  $x$  – это *ориентированное расстояние* от точки  $(x, y)$  до оси ординат, т.е. расстояние, взятое со знаком «+» или «-» в зависимости от того, правее или левее оси ординат лежит точка. Аналогично,  $y$  – это ориентированное расстояние от точки до оси абсцисс.

Рассмотрим на плоскости треугольник с вершинами в точках  $X, Y, Z$ . Как известно, серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке. По-видимому, самое короткое доказательство этого факта основано на транзитивности отношения равенства: для точки  $O$  пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам  $XY$  и  $XZ$  выполнены равенства  $x = y$  и  $x = z$ , где  $x, y, z$  – расстояния от  $O$  до точек  $X, Y, Z$  соответственно. Отсюда  $x = z$ , что означает, что  $O$  лежит и на третьем серединном перпендикуляре (к отрезку  $XZ$ ).

Несмотря на то что есть такое простое доказательство, мы приведем еще одно изящное рассуждение, принадлежащее И.С.Рубанову, которое он по праву назвал комбинаторным доказательством пересечения серединных перпендикуляров.

Здесь мы будем иметь дело с неравенствами и областями, на которые разбивают плоскость серединные перпендикуляры; это соображение пригодится нам в дальнейшем. Итак, предположим противное – пусть серединные перпендикуляры не пересекаются в одной точке. Поскольку никакие два серединных перпендикуляра не параллельны, все они делят плоскость на 7 областей. В каждой из областей имеется свое уникальное упорядочение расстояний  $x, y, z$  от любой точки, принадлежащей этой области, до вершин треугольника – одно из шести возможных упорядочений  $x < y < z, x < z < y, y < x < z, y < z < x, z < x < y, z < y < x$  ( $6 = 3!$  – вот она, комбинаторика!). Действительно, если две точки лежат в разных областях, то эти точки лежат в разных полуплоскостях относительно одного из серединных перпендикуляров, а значит, эти точки отличаются порядком расстояний до двух вершин треугольника, задающих этот серединный перпендикуляр. Получилось противоречие: упорядочений 6, а областей 7.

Итак, для трех точек  $X, Y, Z$  картина получается такой, как показано на рисунке 3.

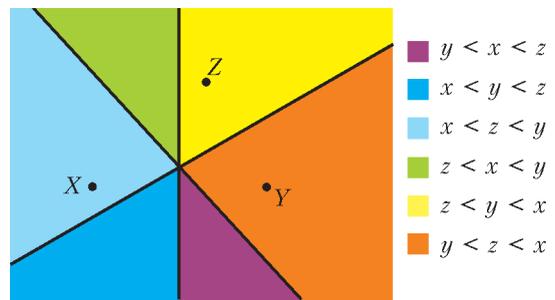


Рис. 3

Увеличим число точек. Пусть  $X, Y, Z, T$  – четыре точки на плоскости, а  $x, y, z, t$  – расстояния до каждой из них от рассматриваемой точки. Серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим всевозможные пары из точек  $X, Y, Z, T$ , делят плоскость на области, например

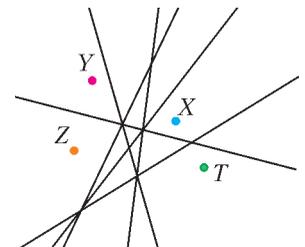


Рис. 4

как на рисунке 4, и каждая область будет задаваться своим упорядочением величин  $x, y, z, t$ . Интересно объединить области, в которых  $x$  минимально среди всех расстояний  $x, y, z, t$ ; в результате получим так называемую область Вороного узла  $X$ . (О разбиениях Вороного можно прочесть, например, в статье Н. Долбилина «Многогранный Делоне» в «Кванте» №1 и №2 за 2010 г.)

**Упражнения**

1. На сколько частей могут делить плоскость серединные перпендикуляры к сторонам и диагоналям параллелограмма?

Ответ: 16 или 8.

2. Существует ли на рисунке 4 область, отвечающая упорядочению  $y < t < x < z$ ? Пометьте на рисунке 4 каждую область своим упорядочением, выделите области Вороного.

3. а) Пусть на плоскости даны 4 точки, не являющиеся вершинами параллелограмма или трапеции и такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что шесть серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющим пары данных точек, делят плоскость на 18 областей.

б\*) Попробуйте найти формулу для количества областей в аналогичной задаче про  $n$  точек и серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим всевозможные пары данных точек.

Ответ в пункте б):  $C_n^2(C_n^2 + 1)/2 + 1 - C_n^3$ , где  $C_n^k$  – число сочетаний, т.е. количество способов выбрать  $k$  объектов из данных  $n$  объектов. Указание.  $N$  прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны) делят плоскость на  $N(N + 1)/2 + 1$  областей. Каждая «тройная» точка пересечения уменьшает количество областей на 1.

4. На плоскости даны  $n$  точек. Серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим пары данных точек, делят плоскость на области. Докажите, что у каждой из областей не более  $n - 1$  соседних областей (соседними здесь считаем области, имеющие общий отрезок границы).

Указание. Посмотрите, как изменится упорядочение переменных  $x, y, \dots$  при переходе в соседнюю область.

Вопрос, аналогичный упражнению 3 для четырех точек в пространстве, – это задача из «Задачника «Кванта»:

**Задача (M2420).** Дан тетраэдр. Для каждого его ребра возьмем плоскость, перпендикулярную этому ребру и проходящую через его середину. На сколько областей разобьют пространство шесть таких плоскостей?

Геометрическую картину происходящего представить себе не так просто, особенно если учесть, что бывают тетраэдры, для которых центр описанной сферы (через который проходят все указанные плоскости) лежит вне самого тетраэдра. Применим соображения из доказательства Рубанова.

Каждая из областей, на которые делят пространство шесть данных плоскостей, задает свое упорядочение расстояний  $x, y, z, t$  до вершин тетраэдра (вершины тетраэдра будем обозначать соответственно  $X, Y, Z, T$ ). Для точек, лежащих в разных областях, упорядочения разные, так как эти точки находятся по разные стороны от какого-то из серединных перпендикуляров. Это уже означает, что количество областей не превышает 24 –

это количество возможных упорядочений четырех расстояний  $x, y, z, t$ . Наоборот, для двух точек из одной области упорядочение расстояний  $x, y, z, t$  одно и то же, поскольку эти точки лежат в одном полупространстве относительно каждого из серединных перпендикуляров.

Докажем теперь, что областей ровно 24. Для этого достаточно показать, что для каждого конкретного упорядочения расстояний  $x, y, z, t$  найдется точка в пространстве именно с таким упорядочением. Рассмотрим для определенности упорядочение  $t < x < y < z$ . Возьмем в плоскости треугольника  $XYZ$  точку  $L$ , для которой  $x < y < z$ , и проведем через  $L$  перпендикуляр  $l$  к плоскости  $XYZ$ . Для точек прямой  $l$  выполнено  $x < y < z$ . Пусть  $K$  – проекция точки  $T$  на прямую  $l$  (рис.5). На продолжении отрезка  $LK$  за точку  $K$  и

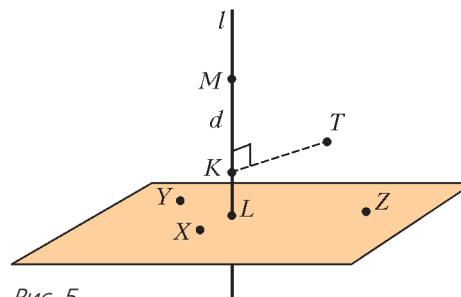


Рис. 5

будем искать нужную нам точку  $M$ , для которой  $t < x$ . Покажем, как подбирать нужное значение  $MK = d$ . Имеем

$$t^2 = d^2 + TK^2, \quad x^2 = (d + LK)^2 + XL^2,$$

$$x^2 - t^2 = 2dLK + (LK^2 + XL^2 - TK^2).$$

Как видим, при достаточно больших  $d$  разность  $x^2 - t^2$  положительна, что нам и нужно. Задача M2420 решена «комбинаторно-алгебраически»!

Отметим, что ответ в этой задаче (24) намного меньше, чем количество областей, на которые разбивают пространство шесть плоскостей общего положения (42).

Конечно, существуют и наглядно-геометрические решения задачи M2420. Рассуждать можно, например, так. Каждая из данных шести плоскостей проходит через центр описанной около тетраэдра сферы и высекает на этой сфере большую окружность. Достаточно посчитать количество областей, на которые делят сферу эти большие окружности.

**Упражнения**

5. На сколько частей делят сферу  $n$  больших окружностей, никакие три из которых не проходят через одну точку?

Ответ:  $n^2 - n + 2$ . Указание. Если проводить окружность одну за другой, то  $k$ -я проводимая окружность добавляет  $2(k - 1)$  к количеству областей.

6. Закончите наглядно-геометрическое решение задачи M2420.

7\*. Попробуйте решить аналоги задачи M2420 для правильной четырехугольной пирамиды, правильного октаэдра, куба и т.д.

Что будет получаться, если рассматривать в нашей интерпретации ( $x, y$  – расстояния до двух точек плоскости  $X$  и  $Y$ ) другие линейные уравнения? Рассмотрим, например, уравнение  $y = 2x$ . На прямой  $XU$  есть две точки, для которых выполнено  $y = 2x$ , назовем эти точки  $U$  и  $V$  так, что  $U$  лежит на отрезке  $XU$ , а  $V$  – на его продолжении. Пусть  $A$  – произвольная точка, для которой выполнено  $y = 2x$ , т.е.  $AU = 2AX$  (рис.6).

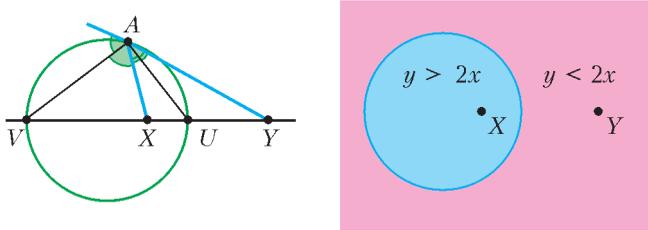


Рис. 6

Поскольку  $AU/AX = UV/UX = 2$ , получаем, что  $AU$  – биссектриса угла  $XAY$ . Аналогично, исходя из свойств внешней биссектрисы,  $AV$  – внешняя биссектриса угла  $XAY$ . Так как  $AU \perp AV$ , то  $A$  лежит на окружности с диаметром  $UV$ . Проведя рассуждения в обратную сторону, можно показать, что эта окружность и является множеством решений уравнения  $y = 2x$ . Аналогично, решением уравнения  $y = kx$ , где  $k > 0$  и  $k \neq 1$ , также является окружность. Она называется *окружностью Аполлония*.

**Упражнение 8\*.** На плоскости дан треугольник  $XYZ$ . Докажите, что центры окружностей Аполлония  $y = 2x, z = 2y$  и  $z = 4x$  лежат на одной прямой.

*Указание.* В общем случае окружности  $y = kx, z = ly$  и  $z = (kl)x$  имеют общую *радикальную ось*. Если первые две из них пересекаются в двух точках, то и третья проходит через эти точки.

Далее, уравнение  $x + y = c$ , где  $c$  – постоянная величина,  $c > XY$ , задает эллипс (рис.7,а), уравнение

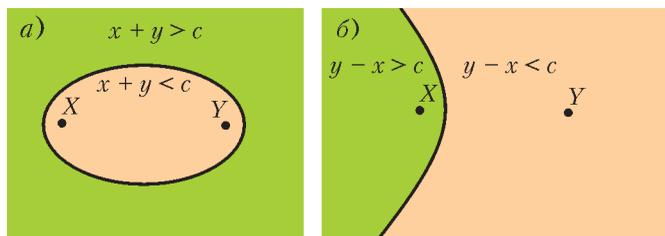


Рис. 7

$x - y = c$ , где  $c \neq 0, |c| < XY$ , задает ветвь гиперболы (рис.7,б). Линейное уравнение произвольного вида может задавать и более сложную кривую.

**Расстояния до прямых или плоскостей**

Давайте возьмем произвольный угол и через  $x$  и  $y$  будем обозначать расстояния от точки до прямых, содержащих стороны угла. Если ограничиться внутренностью угла, то равенство  $y = x$  задает множество точек, равноудаленных от сторон угла, т.е. биссектрису (рис.8). Теперь продлим стороны угла (т.е. рассмотрим две пересекающиеся прямые). Тогда уравнение  $y = x$  задает (на всей плоскости) объединение двух

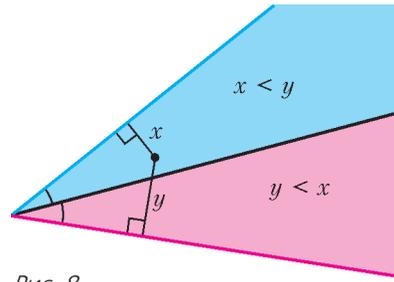


Рис. 8

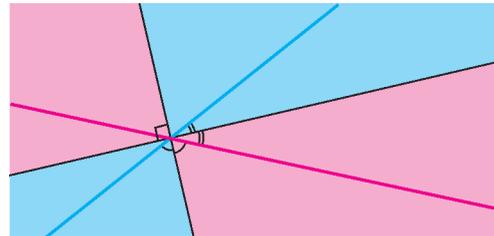


Рис. 9

перпендикулярных прямых – биссектрис двух пар вертикальных углов. Множества, задающие неравенства  $y < x$  и  $y > x$ , – пары вертикальных прямых углов (рис.9).

Биссектрисы треугольника делят его на области, каждая из которых задается своей системой неравенств от переменных  $x, y, z$ , обозначающих расстояния до прямых, содержащих стороны треугольника. Если раскрасить всю плоскость, расчерченную внутренними и внешними биссектрисами, в соответствии с упорядочениями переменных  $x, y, z$ , получается красивый «калейдоскоп» (рис.10).

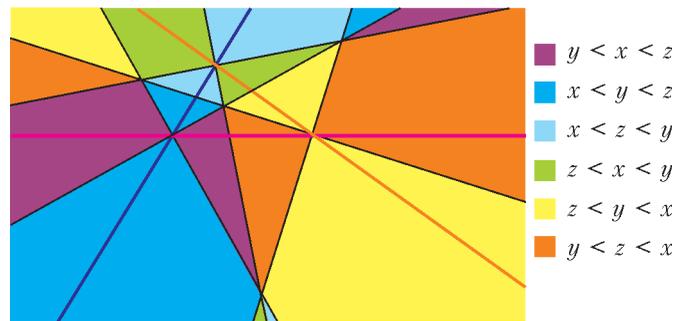
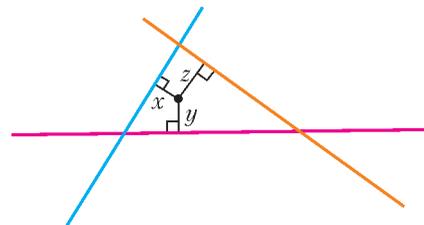


Рис. 10

**Упражнение 9.** Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, двумя способами: с помощью транзитивности равенства и «методом Рубанова».

Если вместо расстояний до прямых брать *ориентированные расстояния* (т.е. расстояния, взятые со знаком «+» или «-», в зависимости от того, в какой полуплоскости расположена точка относительно прямой), то все

будет почти так же, как в методе координат, с которого мы начали разговор: уравнение  $y = x$  будет задавать прямую, а неравенства  $y < x$  и  $y > x$  – полуплоскости.

**Упражнение 10.** Пусть  $x$  и  $y$  обозначают ориентированные расстояния до двух пересекающихся прямых. Докажите, что любое линейное уравнение задает прямую, а линейное неравенство задает полуплоскость.

Выйдем теперь снова в трехмерное пространство. Рассмотрим двугранный угол и для точки, лежащей внутри него, через  $x$  и  $y$  будем обозначать расстояния до плоскостей его граней. Тогда равенство  $y = x$  задает биссекторную плоскость. У трехгранного угла можно провести три биссекторные плоскости между парами граней, которые разделят его на шесть областей (трехгранных углов), каждая из которых задается своим упорядочением переменных  $x, y, z$ , где  $x, y, z$  – расстояния от точки, лежащей внутри трехгранного угла до плоскостей его граней.

**Упражнение 11.** Докажите, что биссекторные плоскости делят трехгранный угол ровно на шесть областей.

Возьмем трехгранный угол, все плоские углы которого равны  $90^\circ$ , и рассмотрим декартову систему координат, связанную с ним (так, что трехгранный угол совпадает с первым октантом). Тогда биссекторные плоскости двугранных углов задаются уравнениями  $x = y, y = z, z = x$ . Они разбивают наш трехгранный угол (первый октант) на шесть областей (трехгранных углов), которые задаются в координатах знакомыми неравенствами  $x < y < z, x < z < y, y < x < z, y < z < x, z < x < y, z < y < x$ . В силу равноправия переменных, эти области являются равными фигурами. Отрежем от первого октанта единичный куб (который в координатах задается неравенствами  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ). Плоскости  $x = y, y = z, z = x$  разбивают наш куб на шесть равных фигур (равных – опять-таки из-за равноправия переменных). Эти фигуры – равные тетраэдры. Итак, мы получили красивое разбиение куба на шесть равных тетраэдров. Если на куб посмотреть в направлении его большой диагонали, то он будет выглядеть как на рисунке 11, плоскости  $x = y, y = z, z = x$  показаны красным пунктиром.

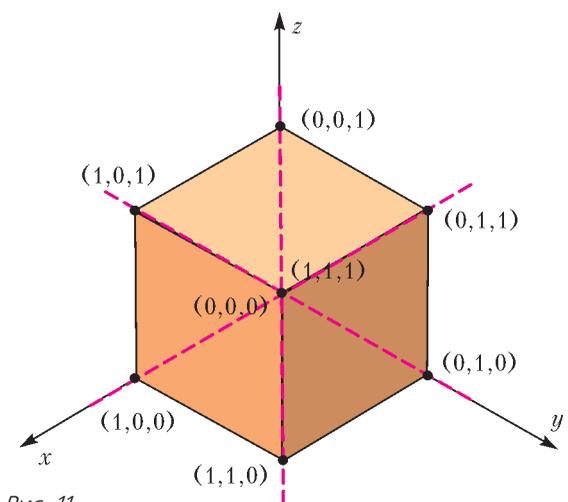


Рис. 11

**Упражнения**

**12.** Разбейте куб на три равные четырехугольные пирамиды.

**13.** На сколько частей разобьют тетраэдр биссекторные плоскости шести его граней?

Ответ: 24.

Отметим, что последнее упражнение и задача M2420 весьма близки. Действительно, пусть тетраэдр  $T$  вписан в сферу. Проведя в его вершинах касательные плоскости к сфере, получим новый тетраэдр  $T'$ , для которого данная сфера будет являться вписанной или невписанной. Тогда плоскости – срединные перпендикуляры к ребрам тетраэдра  $T$  – будут являться биссекторными плоскостями (внутренними или внешними) двугранных углов тетраэдра  $T'$ .

**Упражнения**

**14.** На сколько частей делят пространство биссекторные плоскости двугранных углов, образованных всеми парами смежных граней куба?

Ответ: 24.

**15.** Пусть  $x, y, z$  – расстояния от точки, лежащей внутри куба  $ABCA'B'C'D'$ , до ребер  $AB, AC, AA'$ . Что представляют собой области  $x < y < z, x < z < y$  и т.п.?

**Расстояние до произвольных множеств**

В первой части статьи мы занимались расстояниями до точек, во второй части – расстояниями до прямых и плоскостей. Более общая постановка: пусть  $X, Y, \dots$  – произвольные множества, а  $x, y, \dots$  – расстояния от произвольной точки до множеств  $X, Y, \dots$  соответственно. Здесь под расстоянием от точки  $M$  до множества  $X$  мы понимаем минимум<sup>2</sup> из расстояний  $MN$ , где  $N \in X$ .

Если  $X$  и  $Y$  – не слишком экзотические фигуры на плоскости, то в качестве множества решений уравнения  $y = x$  мы, как правило, будем получать некоторую кривую или несколько кривых, а решения неравенств  $y > x$  и  $y < x$  – это области, на которые кривые делят плоскость (рис.12). Множества  $y > x$  и  $y < x$  можно назвать обобщенными областями Вороного, или, следуя упомянутой выше статье Н.Долбилина, «областями влияния» множеств  $X$  и  $Y$ . Замечательная интерпретация дана А.Савиным (см. «Калейдоскоп «Кванта» №4 за 1994 г.): пусть  $X$  и  $Y$  – территории двух стран, между которыми распределена вся территория суши (таким образом, все, что не принадлежит ни  $X$ , ни  $Y$ , – это море), и требуется справедливым образом провести морскую границу между странами  $X$  и  $Y$ .

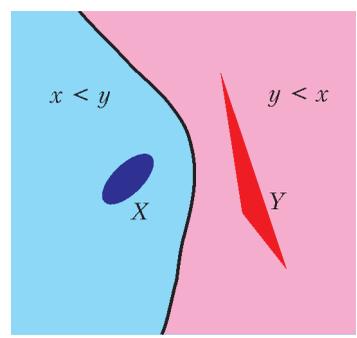


Рис. 12

<sup>2</sup> Лучше сказать не «минимум», а «точная нижняя грань», так как минимум не всегда достигается, например, если  $X$  представляет собой круг или многоугольник без границы.

Представим себе, что в некоторый момент времени от берегов страны  $X$  стартовала волна и эта волна распространяется по морю со скоростью 1. Через время  $t$  после старта волновой фронт представляет собой множество точек, находящихся на расстоянии  $t$  от множества  $X$ .<sup>3</sup> Множество точек, удаленных от множества  $X$  на расстояние, не превышающем  $t$ , называется  $t$ -окрестностью множества  $X$ . На рисунке 13,а

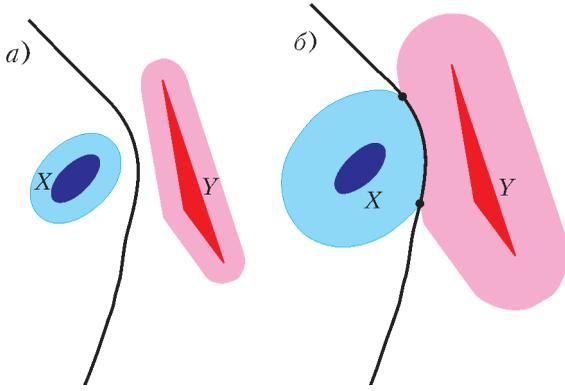


Рис. 13

$X_t$  – объединение синей и голубой областей, а волновой фронт в момент времени  $t$  после старта волны – граница голубой области. Теперь пустим волны (распространяющиеся с равными скоростями) одновременно от берегов стран  $X$  и  $Y$ . Наша морская граница  $x = y$  – это множество точек столкновения волновых фронтов (рис.13,б).

**Упражнение 16.** Пусть для некоторого  $t > 0$   $t$ -окрестности стран  $X$  и  $Y$  не пересекаются. Докажите, что тогда морская граница этих  $t$ -окрестностей совпадает с морской границей стран  $X$  и  $Y$ . (Скажем, на рисунке 13,а после того, как страны  $X$  и  $Y$  «раздули», добавив соответственно голубую и розовую зоны, морская граница не поменялась.)

*Указание.*  $x - t = y - t \Leftrightarrow x = y$ .

Можно, наоборот, пустить круговую волну с центром в точке  $M$ , находящейся в море, и посмотреть, до какого берега волна дойдет раньше. Одновременное касание берегов множеств  $X$  и  $Y$  означает, что для точки  $M$  выполнено  $y = x$  (рис.14).

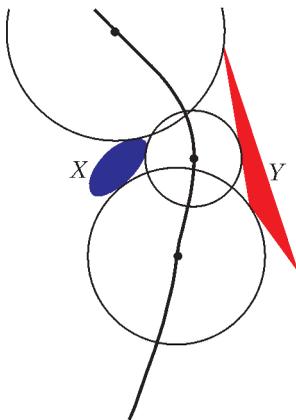


Рис. 14

Забавное название «буриданова кривая» для кривой  $x = y$  встретилось у В.Лукьянова (статья «Кривые второго порядка – буридановы кривые»). Название, очевидно, подразумевает такой сюжет: множества  $X$  и  $Y$  – это две копны сена, тогда уравнение  $x = y$  задает множество точек, находясь в которых буриданов осел из известной притчи пребывал бы в бесконечно долгой задумчи-

вости (ибо невозможно выбрать ближайшую копну).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть  $X$  – это точка, а  $Y$  – прямая. Тогда уравнение  $x = y$  задает параболу (рис.15), для которой точка  $X$  служит фокусом, а прямая  $Y$  – директрисой.

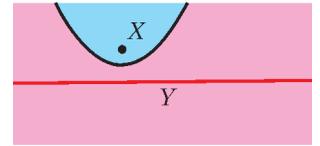


Рис. 15

**Упражнение 17.** Пусть  $X$  – это круг, а  $Y$  – прямая, не пересекающая этот круг. Докажите, что и в этом случае уравнение  $x = y$  задает параболу (рис.16).

*Указание.* Можно свести этот вопрос к предыдущей ситуации, «отодвинув» прямую на расстояние, равное радиусу круга.

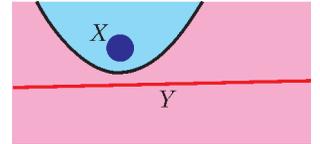


Рис. 16

Пусть теперь  $Y$  – круг радиуса  $r$ , а  $X$  – это точка, лежащая вне круга. Уравнение  $y = x$  задает множество точек, для которых разность между расстоянием до центра круга и расстоянием до точки  $X$  равна  $r$ . Эта ситуация уже обсуждалась (см. рис. 7,б).

**Упражнения**

**18.** Пусть  $X$  и  $Y$  – два не равных непересекающихся круга. Докажите, что уравнение  $y = x$  задает ветвь гиперболы.

*Указание.* С помощью упражнения 16 все сводится к ситуации «круг и точка».

**19.** Пусть  $X$  и  $Y$  – окружности или прямые. Какие множества задают уравнение  $y = x$  и неравенства  $y < x$ ,  $y > x$  при разных расположениях прямых и окружностей? (См., например, рис. 17.)

Другие ситуации зачастую сводятся к рассмотренным случаям. Пусть, например, множество  $X$  – это треугольник  $ABC$  (включая его внутренность). Тогда расстояние от произвольной точки  $M$  до множества  $X$  либо равно расстоянию от  $M$  до одной из вершин  $A, B, C$ , либо равно расстоянию от  $M$  до одной из прямых  $AB, BC, CA$  в зависимости от того, какой из «областей влияния» принадлежит  $M$  (рис.18). Значит, когда мы будем проводить морскую границу между треугольником  $X$  и каким-то другим множеством  $Y$ , в первой зоне можно считать, что  $X$  – это точка  $A$ , во второй зоне – что отрезок  $AB$  и т.д. Поэтому если  $X$  и  $Y$  – многоугольники, то морская граница склеена из кусков пря-

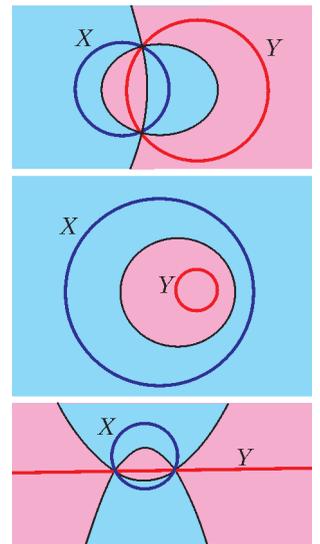


Рис. 17

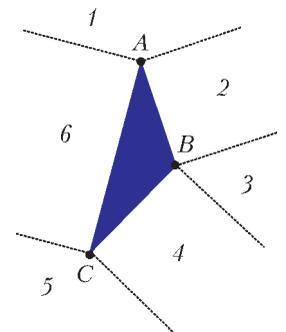


Рис. 18

<sup>3</sup> Волновой фронт можно назвать *эквилистантой* (лат. aequidistans – равноудаленный) множества  $X$ .

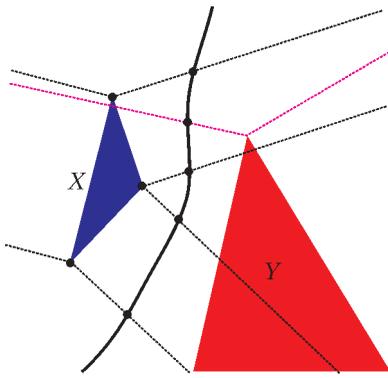


Рис. 19

мых и парабол (рис.19). (При этом линия получается гладкая, т.е. в точке стыка отрезка и параболы отрезок лежит на касательной к параболе.)

**Упражнение 20.** Определите «области влияния», если множество  $X$  – это круговой сегмент или сектор.

Если, скажем, страна  $X$  *несвязна*, например является объединением двух «островов»  $X_1$  и  $X_2$ , также возникает деление на области влияния (рис.20). (При этом граница между «областями влияния» сама по себе будет морской границей между островами  $X_1$  и  $X_2$ .)

**Упражнение 21.** Потренируйтесь в проведении морских

границ для разных примеров множеств  $X$  и  $Y$ .

В завершение отметим, что наши переменные  $x, y, \dots$  не обязательно должны означать расстояния. Много интересных геометрических мест точек можно получить из линейных уравнений и неравенств, наделяя их некоторым другим геометрическим смыслом.

**Упражнения**

**22.** Постройте «теорию линейных уравнений и неравенств» для переменных  $x, y, \dots$ , равных квадратам расстояний до фиксированных точек  $X, Y, \dots$

**23.** Пусть  $X, Y, \dots$  – непересекающиеся окружности на плоскости, а  $x, y, \dots$  – «касательные расстояния», т.е. длины отрезков касательных, проведенных из данной точки к кругам. Как будут в этом случае выглядеть решения линейных уравнений и неравенств, аналоги областей Вороного и т.д.?

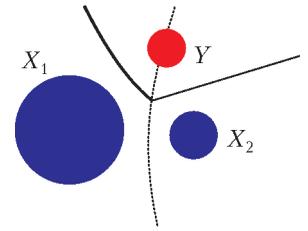


Рис. 20

НАМ ПИШУТ

**Геометрическое доказательство формулы тангенса суммы двух углов**

Тригонометрические функции интересны тем, что относятся одновременно и к алгебре, и к геометрии: с одной стороны, это функции от числа, с другой – характеристики углов. Эта двойственность иногда позволяет доказывать тригонометрические формулы геометрическим методом (хотя, конечно, не для всех значений аргумента).

Возможно, наиболее известным примером геометрического доказательства тригонометрических формул является доказательство формулы

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

синуса суммы для острых углов  $\alpha$  и  $\beta$  методом площадей.

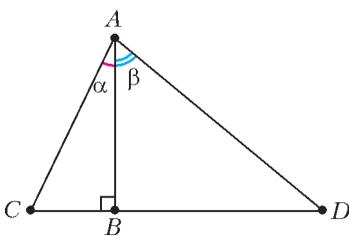


Рис. 1

Пусть два прямоугольных треугольника  $ABC$  и  $ABD$  с общим катетом  $AB$  длины 1 и острыми углами  $\alpha$  и  $\beta$  образуют треугольник  $ACD$  с углом  $\alpha + \beta$  (рис.1).

Запишем площадь треугольника  $ACD$  как

$$\frac{1}{2} AC \cdot AD \sin(\alpha + \beta).$$

С другой стороны, эта площадь равна сумме площадей треугольников  $ABC$  и  $ABD$ :

$$\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \alpha + \frac{1}{2} AD \cdot AB \sin \beta.$$

Приравниваем эти значения и после деления на  $AC \cdot AD$  получаем требуемое равенство.

Мне удалось найти геометрическое доказательство формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

тангенса суммы для острых углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

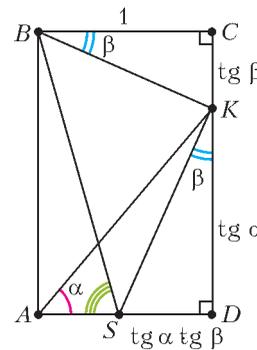


Рис. 2

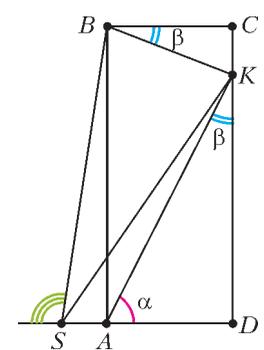


Рис. 3

Рассмотрим для начала случай  $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ . Нам понадобится геометрическая конструкция, изображенная на рисунке 2, где  $ABCD$  – прямоугольник,  $AD = 1$ , а точка  $K$  делит сторону  $CD$  на отрезки длин  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{tg} \beta$ . Пусть точка  $S$  на отрезке  $AD$  такова, что  $\angle DKS = \beta$ , тогда  $SD = KD \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ . Имеем  $AS = AD - SD = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ . Из прямоугольного треугольника  $ABS$   $\operatorname{tg} \angle ASB = \frac{AB}{AS} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ . Значит, если мы покажем, что  $\angle ASB = \alpha + \beta$ , формула будет доказана.

Поскольку  $\angle ABK = \angle DSK = \frac{\pi}{2} - \beta$ , а значит,  $\angle ASK = \pi - \angle DSK = \pi - \angle ABK$ , четырехугольник  $ABKS$  – вписанный, откуда  $\angle ASB = \angle AKB$ . Но

$$\angle AKB = \pi - \angle BKC - \angle AKD = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha + \beta.$$

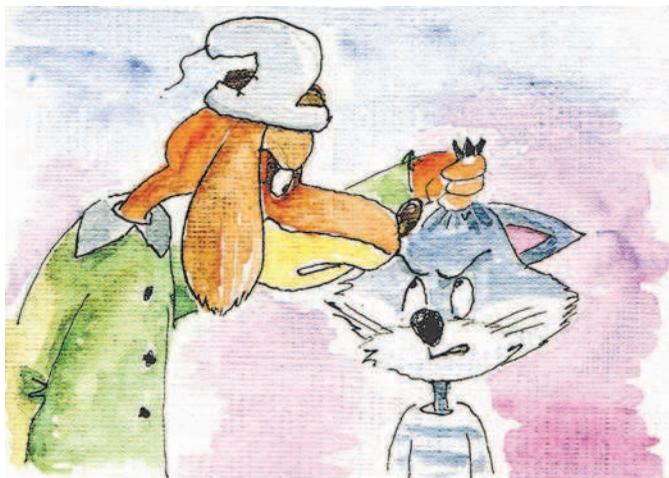
В случае  $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$  можно доказать формулу тангенса суммы геометрически, воспользовавшись рисунком 3.

*К. Сецкарь (Москва, школа 179, 10 класс)*

# Задачи

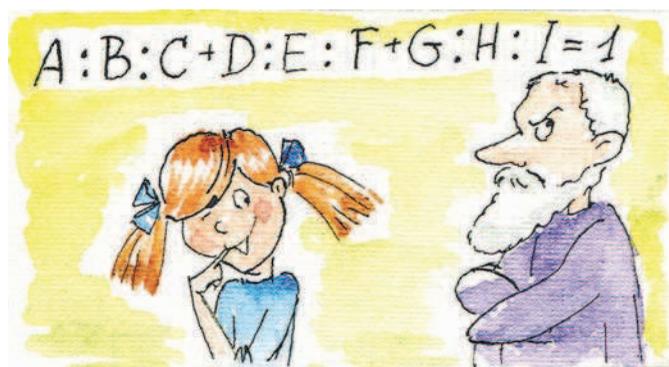
1. Шарик и Матроскин надоили 10 литров молока, разлили его по двум ведрам и понесли домой. Шарик устал и перелил часть молока из своего ведра в ведро Матроскина. От этого у Шарика молока стало вдвое меньше, а у Матроскина – вдвое больше. Сколько молока стало у Матроскина?

*Жюри Турнира Ломоносова*



2. Замените буквы на рисунке цифрами (все цифры должны быть различными) так, чтобы получилось верное равенство.

*А.Антропов, Т.Казицына*

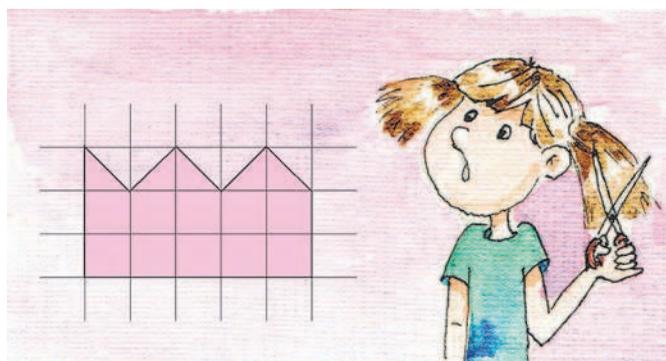


3. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части.

*Е.Бакаев*

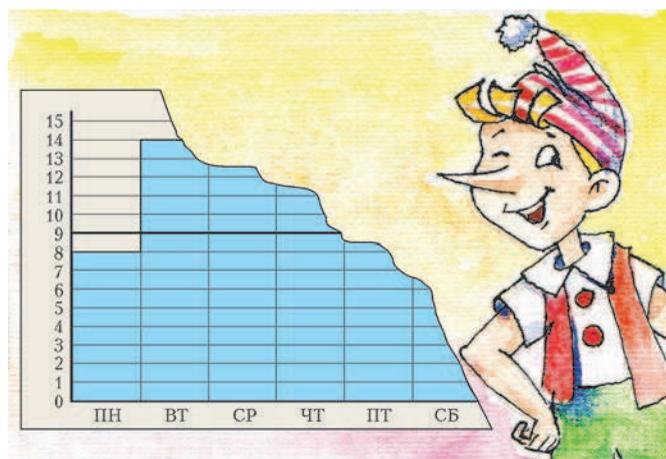
Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXXIX Турнире Ломоносова.



4. Мальвина всю неделю учила Буратино писать. Она изобразила на диаграмме, сколько букв написал Буратино за каждый из семи дней. Черта на диаграмме показывает среднее число букв (оно равно 9). Буратино оторвал кусок диаграммы, как показано на рисунке. Сколько букв он написал в воскресенье?

*И.Высоцкий, И.Раскина*



5. Легко оклеить поверхность куба шестью ромбами, а именно шестью квадратами. А можно ли оклеить поверхность куба (без щелей и наложений) менее чем шестью ромбами (не обязательно одинаковыми)?

*А.Шаповалов*



# Конкурс имени А.П.Савина

*Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Желаем успеха!*

**6.** Ради равноправия полов учитель, когда ставит пятерку девочке, ставит пятерку и какому-нибудь мальчику. А когда ставит пятерку мальчику, ставит пятерку еще какой-нибудь девочке. Также ради справедливости учитель хочет, чтобы к концу года у всех детей было поровну пятерок. Получится ли у него этого добиться, если в классе 23 ребенка и хотя бы одну пятерку за год он все-таки хочет поставить?

*Е.Бакаев*

**7.** На каждой из шести карточек написана цифра от 1 до 6 (каждая по одному разу). На листке написана «заготовка» арифметического выражения:

$$(* + *) \cdot (* + *) \cdot (* + *)$$

Петя выбирает одну из звездочек и кладет на нее одну из карточек, затем то же самое делает Вася, затем снова Петя и так далее по очереди. Вася хочет, чтобы, когда все карточки будут выложены, результат выражения был равен 240. Сможет ли Петя ему помешать?

*Е.Бакаев*

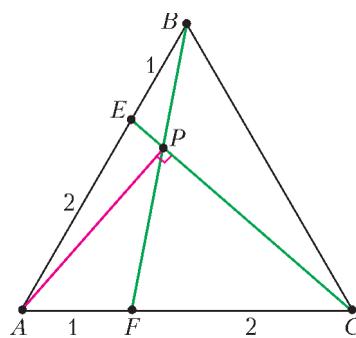
**8.** В лифте 16-этажного дома работают только две кнопки. При нажатии на одну кнопку к текущему номеру этажа прибавляется 5, а при нажатии на другую — вычитается 7, и если в этом доме такой этаж есть —

лифт едет на него (иначе — никуда не едет). Человек зашел в лифт на первом этаже. На каком этаже он может оказаться после 99 переездов лифта? (Требуется найти все варианты и доказать, что других нет.)

*С.Костин*

**9.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  правильного треугольника  $ABC$  взяты точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $AE : BE = CF : AF = 2$ . Пусть  $P$  — точка пересечения  $BF$  и  $CE$ . Докажите, что угол  $CPA$  — прямой.

*В.Расторгуев*



**10.** В ряд лежат карточки, занумерованные в некотором порядке числами 1, 2, ..., 15. За одну операцию можно поменять местами две карточки, лежащие рядом. За какое наименьшее число операций наверняка можно получить ряд из карточек, номера которых идут в порядке возрастания или в порядке убывания?

*П.Кожевников*

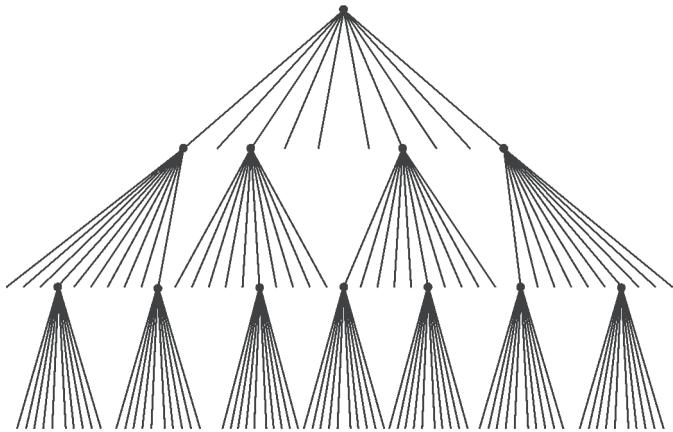
## Куриная эпопея

*И.АКУЛИЧ*

**С**ЛУЧИЛОСЬ ЭТО МНОГО ЛЕТ НАЗАД. ОДИН мой знакомый, хитро ухмыляясь, предложил неизвестную мне задачу, уже тогда имевшую солидный возраст. Он утверждал, что «с ходу» я ее не одолею, — и оказался прав. При всей простоте формулировки никак не удавалось нащупать идею решения, что и привело к закономерному фиаско. Задача была такова.

*На рынке купили курицу. Когда она снесла 10 яиц, ее съели, а из яиц вывели цыплят. Тех из*

*них, что оказались петухами, тоже съели, а каждой курице сначала позволили подрасти и снести по 10 яиц, после чего съели и этих кур. Из яиц вновь вывели цыплят и поступили с ними по тому же принципу: петухов съели, а курам перед съедением разрешили снести по 10 яиц. Из новых яиц опять вывели цыплят и так далее... Все это продолжалось некоторое время, а потом случилось так, что из очередных яиц вывелись только петухи. Когда их съели, процесс завершился.*



*Всего было съедено 1000 петухов. Сколько съели кур?*

Признав поражение, я попросил отсрочки до завтрашнего дня и вечером занялся задачей в спокойной обстановке. Сначала попробовал, хотя бы примерно, изобразить куриное «генеалогическое древо» — и ужаснулся обилию возможных вариантов уже в первых поколениях. В самом деле, из десятка яиц, снесенных «исходной» (т.е. купленной на рынке) курицей, могло вывестись от нуля до десяти кур (впрочем, ноль — это невозможно, ведь тогда на этом род куриный и оборвался бы, и откуда было бы взяться тысяче петухов?). Во втором поколении разброс вариантов еще шире... в общем, мрак! Тем не менее, для очистки совести я нарисовал некое «среднетипичное» начало описанного в задаче процесса, обозначив кур жирными точками, а переходы к следующим поколениям — отрезками, направленными веером вниз (при этом от каждой курицы проводится ровно 10 отрезков). Стало быть, отрезки, просто обрывающиеся, без продолжения — это те самые петухи, окончившие свой бранный путь в чужом желудке. Получилось примерно то, что нарисовано на схеме.

Неужели искомое число съеденных кур (при неизменной тысяче петухов) не зависит от вида древа? Ну-ка, возьмем какой-нибудь кусок древа, начиная от любой курицы (и далее вниз), и перецепим его к любому свободному концу (не важно, в каком поколении). При этом мы как бы поменяем местами одного из петухов с какой-то курицей. В результате суммарное число и петухов, и кур не изменится, а древо станет другим, но с соблюдением всех требований условия! Перецепим еще раз — получим новое древо с теми же числовыми характеристиками.

Может быть, такими перецепками удастся получить какое-нибудь древо попроще и подсчитать число кур в нем напрямую? Например, древо, где в каждом поколении, кроме последнего, ровно

одна курица. Для этого можно каждый раз выбирать произвольное поколение, где есть хотя бы две курицы, и любую из этих кур (вместе со всем идущим из нее куском) перецеплять... ну конечно — в самый низ древа (к любому свободному концу в самом нижнем поколении). Тогда число поколений после каждой перецепки будет увеличиваться. Но оно не может увеличиваться бесконечно — ведь мы просто переставляем куски в конечном древе. Значит, процесс перецепок завершится, а именно в тот момент, когда в каждом поколении, кроме начального и последнего, будет ровно одна курица и 9 петухов.

Что же получается? Даже ничего не рисуя, можно без особого труда определить, что суммарно во всех поколениях, кроме начального (исходной курицы) и последнего («десятипетухового»), вывелось  $1000 - 10 = 990$  петухов, и потому таких поколений было  $990 : 9 = 110$ , а вместе с последним поколением получается  $110 + 1 = 111$ . Но каждое такое поколение порождается одной курицей, так что и кур было именно столько же, т.е. 111 голов. Все!

На следующий день я с гордостью выдал этот ответ своему знакомому.

— Правильно, — сказал он. — А как ты решал?

Я объяснил, предвкушая похвалу за хитроумное решение трудной задачи.

— Это слишком сложно, — огорошил он меня. — Решать надо по-другому. Подсчитаем двумя способами *число снесенных яиц*. Пусть всего было  $x$  кур. С одной стороны, каждая курица снесла по 10 яиц, а так как кур было  $x$ , то яиц было  $10x$ . С другой стороны, все куры, кроме самой первой (купленной на рынке), вылупились из яиц, снесенных этими же курами. Поэтому для «производства» кур потребовалось  $x - 1$  яиц. Ну а все 1000 съеденных петухов тоже вылупились из яиц. Итого получается, что было снесено  $(x - 1) + 1000 = x + 999$  яиц. Вот мы и определили двумя способами количество снесенных яиц. Так как это одно и то же значение, то  $10x = x + 999$ . Отсюда  $x = 111$ , как и у тебя.

Мне пришлось признать, что так действительно получается наглядней и проще. Но кто же догадается до такого?

Через несколько дней я не удержался и предложил эту же задачу другому своему знакомому, заранее надеясь посмеяться над его неуклюжими потугами. И что же? Он ответил почти сразу, причем начал вроде бы точно так же:

— Пусть кур было  $x$ , — заявил он, но затем неожиданно сменил музыку. — Так как каждая курица породила 10 других птиц и 1000 из них были петухами, всего на свет появились из яиц

$10x - 1000$  кур. Да еще добавим первую курицу – ее-то принесли извне. Так что можно записать двумя способами количество кур, что дает уравнение  $x = 10x - 1000 + 1$ . Поэтому  $x = 111$ .

Ага, подумал я, значит, можно было и кур считать! Тогда, может быть, есть шанс найти решение и «через петухов», подсчитав их двумя способами? Убедитесь самостоятельно, что и этот путь приводит к успеху. Как говорится, что в лоб, что по лбу – задача допускает различные подходы к ее решению. Ну а читателям предлагается поискать ответ на такие два вопроса:

1. Каков будет ответ в общем случае – если каждая курица снесла  $m$  яиц и всего было съедено  $n$  петухов?

2. А если в условии дано, сколько съели кур – можно ли однозначно определить, сколько съели петухов?

### Задачи для самостоятельного решения

1. В пруду 30 щук. Щука сыта, если она съела трех других щук. Какое наибольшее число щук может насытиться?

2. В шкатулке 10 меньших шкатулок. Любая из них либо пуста, либо в ней 10 еще меньших шкатулок и т.д. Сколько всего шкатулок, если известно, что пустых из них 100?

3. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырех друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?



**Евгений Яковлевич Гик**  
(10.05.1943–24.10.2016 )

24 октября 2016 года ушел из жизни Евгений Яковлевич Гик – математик, шахматист и шахматный литератор, многолетний автор и ведущий «Шахматной странички» нашего журнала.

К моменту окончания механико-математического факультета МГУ Евгений Яковлевич был уже известным шахматистом, участником чемпионата СССР. Пересечение в одном человеке двух замечательных миров, в которых он был профессионалом, дополненное литературными способностями, сделало его одним из самых известных шахматных литераторов и журналистов. До сих пор многие помнят написанный Евгением Яковлевичем совместно с драматургом Леонидом Зориным захватывающий рассказ о партии Лутиков–Тайманов из последнего тура чемпионата СССР 1969 года. Партии, не только решавшей судьбу одной из путевок в межзональный турнир, но и феерической, как называл ее сам Евгений Яковлевич.

«Шахматная страничка» появилась как постоянный раздел журнала «Квант» в 1980 году. На протяжении 36 лет Евгений Яковлевич в каждом номере журнала рассказывал об интересных событиях на «шахматно-математической доске» и делился с читателями чисто спортивными шахматными новостями. Причем это были новости «из первых рук», поскольку он был лично знаком со большинством выдающихся современных игроков, а как журналист присутствовал на всех исторических матчах и турнирах. В 2015 это творческое долголетие в постоянном и непрерывном сотрудничестве Евгения Яковлевича с журналом «Квант» было отмечено специальным сертификатом Международного агентства регистрации рекордов Interrecord. Всего «Шахматная страничка» вышла 291 раз.

Евгений Яковлевич Гик был человеком деятельным и увлеченным, общее число выпущенных им книг приблизилось к 200. Для читателей и сотрудников журнала «Кванта» он был неутомимым, ярким и авторитетным гидом в том мире, про который Михаил Таль когда-то сказал: «Шахматный вирус заразителен!»

Если два тела сталкиваются, то их относительная скорость удаления после удара та же, что и относительная скорость сближения до удара.

Христиан Гюйгенс

Кристаллы блещут симметрией.

Евграф Федоров

Симметрия... охватывает свойства всех физических полей, с которыми имеют дело физик и химик.

Владимир Вернадский

Когда определенные причины порождают известные

следствия, элементы симметрии причин должны вновь появиться в порожденных следствиях.

Пьер Кюри

Электродинамика Максвелла в применении к движущимся телам приводит к асимметрии, несвойственной самим явлениям.

Альберт Эйнштейн

... предмет симметричен, если его можно подвергнуть какой-либо операции, после которой он будет выглядеть как и вначале.

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакома вам симметрия в физике?

Примеров бытовой симметрии, или симметрии предметов, много. Однако даже беглый взгляд на приведенные эпиграфы наводит на мысль, что в науке понятие симметрии намного глубже. И касается оно не только ее применимости в самых разных отраслях знания, например в генетике – определение структуры ДНК, или в небесной механике – нахождение планетных орбит, или в химии – где труднее обнаружить несимметричную молекулу, чем симметричную. Симметрия стала универсальным организующим принципом, мощным средством познания, гибким и удобным инструментом исследования природы.

Вероятно, в дальнейшем вам предстоит узнать и о симметриях физических законов, и о необычных, скрытых видах симметрий на микроскопических уровнях строения материи. А еще более интригующим и не менее содержательным станет знакомство с нарушениями симметрии в микромире. Важность этих открытий подчеркивает неоднократное получение за них Нобелевских премий.

Но вернемся к тем видам симметрии, с которыми нам приходится сталкиваться в школьном курсе физики, – и здесь вы сможете достойно оценить разнообразие ее проявлений и плодотворность использования.

### Вопросы и задачи

1. Мяч, брошенный с поверхности земли под углом к горизонту, пролетает расстояние  $L$ . Как далеко от точки броска приземлится мяч, если на расстоянии  $l$  от этой точки будет стоять вертикальная стена, о которую мяч упруго ударяется? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Почему двигатели самолета располагают симметрично относительно фюзеляжа?

3. К неподвижному кольцу приложены три равные по величине силы, направленные по радиусам под углом  $120^\circ$  друг к другу. Будет ли двигаться кольцо под действием этих сил?

4. Создает ли тонкий сферический однородный по плотности слой поле тяготения внутри сферы, окруженной этим слоем?

5. Шарик, двигаясь без трения, перекатился из точки  $A$  в точку  $B$ , находящуюся на одной высоте с точкой  $A$  (рис.1). На весь путь от  $A$  до  $B$  он затратил время  $t$ , а в точке  $C$  его скорость была равна  $v$ . Затем шарик стал скатываться назад, от  $B$  к  $A$ . Чему теперь равна его скорость в точке  $C$ ? Больше или меньше времени потратит он на обратный путь?

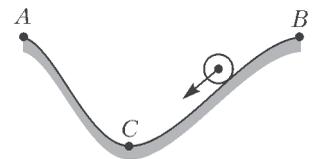


Рис. 1

6. Два рычага находятся в равновесии. На первом уравновешены два разных груза из одного материала, на втором – два разных по массе, но одинаковых по объему груза. Нарушится ли равновесие рычагов, если грузы поместить в воду?

7. Одна из стеклянных колб наполовину заполнена водой, другая – ртутью. Какой будет форма этих жидкостей в состоянии невесомости?

8. Шар, выточенный из монокристалла, при нагревании может изменить не только свой объем, но и форму. Почему?

9. На рисунке 2 представлена зависимость от времени температуры льда при его нагревании. Как будет выглядеть продолжение графика, если нагревание сменится охлаждением?

10. Устанавливая закон взаимодействия электрических зарядов, Кулон сумел изменить заряд проводящих шариков в известное число раз. Каким образом?

11. Изобразите картину силовых линий электрического поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити.

12. Два одинаковых по величине заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. В каком случае напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между ними, больше: если эти заряды одноименные или разноименные?

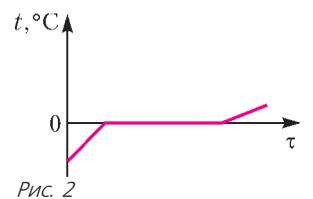


Рис. 2

13. На одинаковом расстоянии от двух взаимно перпендикулярных проводящих полуплоскостей помещен положительный заряд. Как направлена действующая на него сила?

14. По полусфере равномерно распределен электрический заряд. Как направлена напряженность созданного им поля в любой точке воображаемого круга, «стягивающего» полусферу?

15. Электрическая цепь составлена из двух равносторонних проводящих треугольников, причем внутренний треугольник вдвое меньше внешнего (рис.3). Найдите сопротивление цепи между точками  $A$  и  $B$ , если сопротивление стороны большого треугольника равно  $R$  и сопротивление каждого проводника пропорционально его длине.

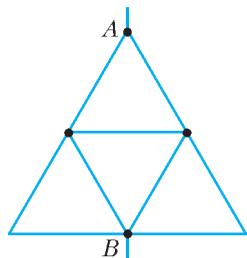


Рис. 3

16. Между каждой парой из  $N$  данных точек включен конденсатор емкостью  $C$ . Чему будет равна емкость между двумя произвольными точками?

17. В цепи постоянного тока имеется кольцеобразное разветвление из однородного проводника (рис.4). Какая сила будет действовать на небольшую магнитную стрелку, помещенную в центре разветвления?

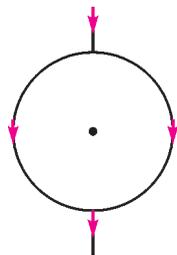


Рис. 4

20. В чем состоит одно из основных различий между спектрами, полученными с помощью дифракционной решетки и с помощью призмы?

21. В камере регистрационного прибора создано магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости рисунка 5. В прибор влетают с одинаковыми скоростями разные частицы – электроны, позитроны, протоны, нейтроны и  $\alpha$ -частицы. Определите, не проводя расчета, какая вспышка на экране соответствует позитрону.

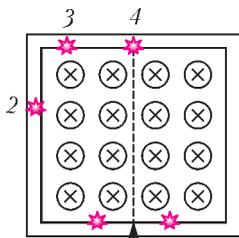


Рис. 5

### Микроопыт

Если вы подходите к вертикальному плоскому зеркалу, ваше изображение приближается к вам. Какова скорость изображения относительно вас?

### Любопытно, что...

...идеи симметрии руководили Иоганном Кеплером при написании трактата «О шестиугольном снеге», в котором им было высказано, видимо, первое разумное суждение о том, в чем загадка правильной формы кристалла.

...рассуждения Христиана Гюйгенса в мемуаре «О движении тел под воздействием удара» показали, что закон сохранения импульса следует всего лишь из симметричности законов механики относительно преобразований Галилея, не требуя привлечения основных принципов динамики, созданной Ньютоном. В дальнейшем выяснилось, что каждому виду симметрии соответствует свой закон сохранения.

...чрезвычайно плодотворным оказался принцип симметрии при решении задач электростатики. Так, французскому физiku и математику Симеону Дени Пуассону удалось, применяя этот принцип, решить задачи о распределении электрического заряда на поверхности проводников различной формы.

...французский физик Пьер Кюри в 1884-85 годах разработал теорию образования кристаллов и исследовал законы симметрии в них, что позволило ему сформулировать общий принцип роста кристаллов.

...в 1890 году отечественный кристаллограф Евграф Федоров закончил классический труд «Симметрия правильных систем фигур». В нем содержался вывод 230 пространственных групп, в соответствии с которыми должны располагаться частицы внутри кристаллических структур.

...в начале XX века основное положение кристаллографии о решетчатой структуре кристаллов было блестяще подтверждено при обнаружении дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке, когда для интерпретации результатов опытов была привлечена геометрическая теория симметрии. А за открытие того, что «вещество состоит из шариков с дырками между ними», немецкий ученый Макс фон Лауэ был удостоен Нобелевской премии.

...в конце 1920-х годов английский физик-теоретик Поль Дирак предположил существование симметричного «собрата» электрона, имеющего положительный заряд, – позитрона. Частица вскоре была обнаружена в космических лучах. А вот восстановить симметрию между электрическим и магнитным зарядами Дираку не удалось – никому еще не посчастливилось наблюдать отдельный магнитный заряд монополю.

...до сих пор учеными не получены ответы на вопросы, почему в окружающем нас мире практически не встречается антивещество и состоит ли Вселенная целиком из обычной известной нам материи лишь с небольшой добавкой антиматерии. Возможная разгадка космической асимметрии может крыться в первых моментах эволюции Вселенной после Большого взрыва, происшедшего примерно 13,7 миллиарда лет назад.

### Что читать в «Кванте» о симметрии в физике (публикации последних лет)

1. «Премия за нарушения» – 2009, №1, с.19;
2. «Электрические узоры» – 2009, №2, с.2;
3. «Что мы видим в зеркале?» – 2009, №2, с.30;
4. «К открытию бозона Хиггса» – 2012, №5/6, с.2;
5. «Почему радуги бывают разными» – 2013, №1, с.46;
6. «Геометрия световых лучей» – 2013, №1, с.55.

Материал подготовил А.Леонович

# НЬЮТОН, ЯБЛОКИ И ДРУГИЕ

И.АЛЕКСЕЕВ, А.СТАСЕНКО

*Рождаются великие творенья  
Не потому ли, что порою где-то  
Обычным удивляются явлениям  
Ученые, художники, поэты.*

К.Кулиев

*История с яблоком слишком проста: однажды к Ньютону пришел глупый и нахальный человек и спрашивал его, каким образом он мог прийти до такого великого открытия. Ньютон ... желая от него отвязаться, отвечал, что ему упало на нос яблоко, и это совершенно удовлетворило того господина.*

К.Гаусс

**А**ВТОРЫ РАЗЛИЧНЫХ СОЧИНЕНИЙ МНОГО РАЗ ЭКСПЛУАТИРОВАЛИ легенду о яблоке, якобы упавшем в конце XVII века на голову Ньютона, что ускорило открытие закона всемирного тяготения. Большинство читателей эта история забавляла, но некоторых (например, великого математика Гаусса) возмущала слишком фривольным обращением с именем великого физика. Поэтому в дальнейшем будем говорить о голове Джентльмена.



Скульптура «Ньютон под яблоней», которую один из авторов статьи лично сфотографировал в Южной Корее

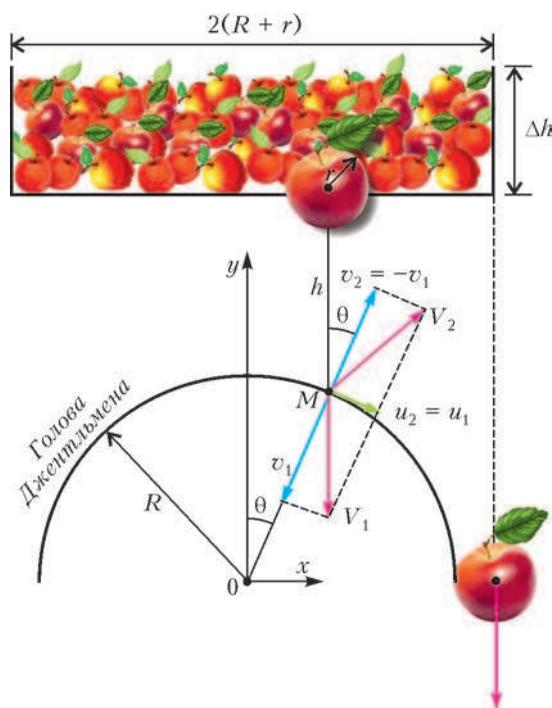


Рис. 1. При абсолютно упругом соударении яблока с головой Джентльмена касательная компонента скорости сохраняется, а нормальная изменяет знак, не меняя своей величины

Пусть на обнаженную голову, которую представим в виде шара радиусом  $R$  (едва ли джентльмены сидят в саду в парламентских париках), падают яблоки радиусом  $r$  с высоты  $h$  (почти над самой макушкой) (рис.1).

Предположим, что голова и яблоки настолько гладки и упруги, что соударение происходит с сохранением механической энергии (абсолютно упругий удар). Конечно, это взаимодействие происходит не мгновенно. Волна сжатия от места соприкосновения двух тел должна пробежать диаметр яблока  $r$  и, отразившись в виде волны разрежения, пробежать назад тот же диаметр, после чего произойдет отскок яблока. Это похоже на падение на стол пружинки с вертикально ориентированной осью. Можно оценить время  $\tau$  такого процесса. Принимая диаметр яблока  $2r = 10$  см, а скорость звука в его материале  $v_{зв} = 1000$  м/с, получим

$$\tau = \frac{4r}{v_{зв}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Так что при касательной скорости соударения  $u \approx 5$  м/с яблоко проскользнет по «голове» не более чем на  $u\tau \approx 1$  мм. С этой погрешностью можно считать, что оно отскочило от «головы» почти в точке соударения.

В этих предположениях касательная компонента скорости яблока не изменится:

$u_2 = u_1$ , а нормальная компонента изменит направление, сохранив модуль:  $v_2 = -v_1 = -V_1 \cos \theta$ . Так что после соударения в точке  $M$  с полярным углом  $\theta$  яблоко отскочит с прежним по модулю вектором скорости  $V_2 = V_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ , повернутым на угол  $2\theta$  по отношению к первоначальному (зеркальное отражение).

А в каком месте яблоко упадет на землю? Если задан рост Джентльмена  $H$ , то проблема сводится к простой школьной задаче о траектории тела, брошенного под углом к горизонту, равным  $\pi/2 - 2\theta$ .

Те яблоки, которые имеют прицельное расстояние  $x = r + R$ , слегка скользнув по бомбардируемому шару, продолжают падать вертикально. А что будет с теми, которые летят строго вдоль вертикали  $x = 0$ ? Очевидно, они также строго отразятся вертикально вверх и (ведь потерь энергии нет) повторят падение в точку  $x = 0$ . И это будет продолжаться вечно. Но, как сказал бы математик, «мощность» множества таких яблок равно нулю, ибо им соответствует только одно значение угла  $\theta$ :  $\theta = 0$  из промежутка  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ .

Понятно, что если яблоко не вращалось до столкновения, то оно в принятых предположениях не приобретет угловой скорости и после столкновения.

На рисунке 2 приведены результаты падения яблок с высоты  $h = 0,5$  м. Сопротивлением воздуха пренебрегаюсь.

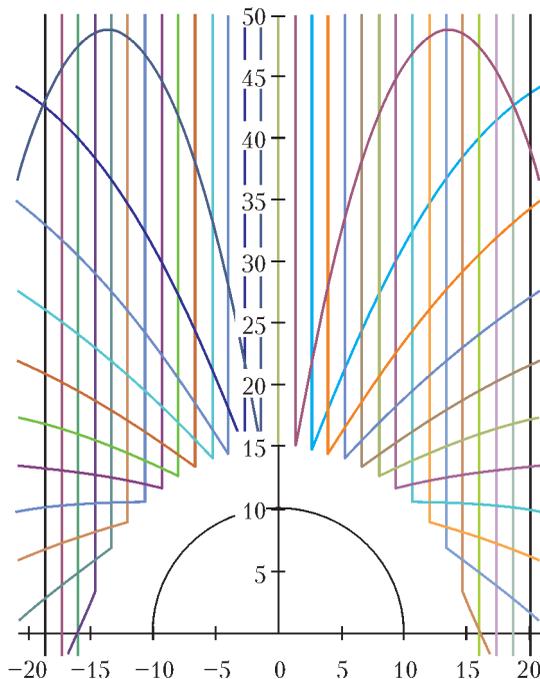


Рис. 2. Траектории яблок, падающих на голову Джентльмена и отразившихся от нее

Да простит нас уважаемый Читатель, если проблему со сферическими яблоками он найдет слишком тривиальной. Поэтому сделаем шаг вперед в усложнении формы падающих тел. Возьмем, например, огурцы или патиссоны.

Но огурцы — это вам не яблоки. Тут дело сложнее. Их форма характеризуется уже двумя размерами — про-

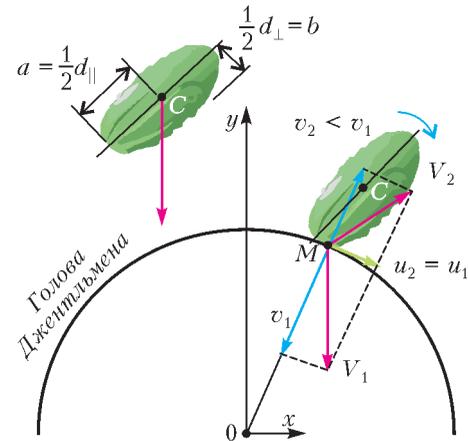


Рис. 3. При абсолютно упругом соударении сфероида с массивным телом нормальная компонента скорости уменьшается по величине вследствие потерь энергии на вращательное движение

дольным  $d_{\parallel}$  и поперечным  $d_{\perp}$  (рис.3; в математике привычнее употреблять не эти габариты, а полуоси  $a$  и  $b$ ). И то — если их считать эллипсоидами вращения (вытянутыми или удлинненными сфероидами). Но при описании вращения придется ввести новое понятие — момент инерции, аналогичное массе при описании поступательного движения. Тут обычно вспоминают фигуристку на льду: когда она прижимает руки к телу — скорость вращения растет, когда разбрасывает руки в стороны — скорость уменьшается. Напрашивается аналогия с яблоком и огурцом: при одинаковой массе огурец должен вращаться медленнее.

Можно, глядя на рисунок 3, написать систему уравнений для нормального и тангенциального импульсов сфероида, а также для его вращательного импульса (момента импульса) и решить эту систему относительно компонент линейной и угловой скоростей.

Но достаточно будет, если мы поймем, что в случае огурца даже после абсолютно упругого удара нормальная компонента скорости уменьшится, в отличие от случая с яблоком, поскольку вектор  $\vec{V}_2$  уже не проходит через центр масс. Таким образом, огурец, изображенный на рисунке 3 справа, приобретет вращательный импульс, заставляющий его вращаться по часовой стрелке.

А если огурец заменить патиссоном (сплюснутым сфероидом), малая ось которого теперь является осью симметрии? Коснувшись головы Джентльмена в той же точке  $M$ , патиссон приобретет вращательный импульс противоположного знака.

Однако не будем утомлять читателя сложными математическими выкладками. Чтобы узнать, как все это сделать, нужно поступить в Московский физико-технический институт или в Московский государственный университет.

# Одна теорема о пересечении прямых и окружностей

Ф. СТОНЯКИН, В. ЕФРЕМОВА,  
О. ЩЕРБАКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ИЗЛОЖИМ НЕСКОЛЬКО ИЗВЕСТНЫХ сюжетов о замечательных точках треугольника, которые оказываются связанными со следующей задачей.

**Задача** (Всесоюзная математическая олимпиада, 1973 г.). На сторонах остроугольного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены три подобных между собой остроугольных треугольника  $ABC'$ ,  $AB'C$ ,  $A'BC$  (рис. 1);

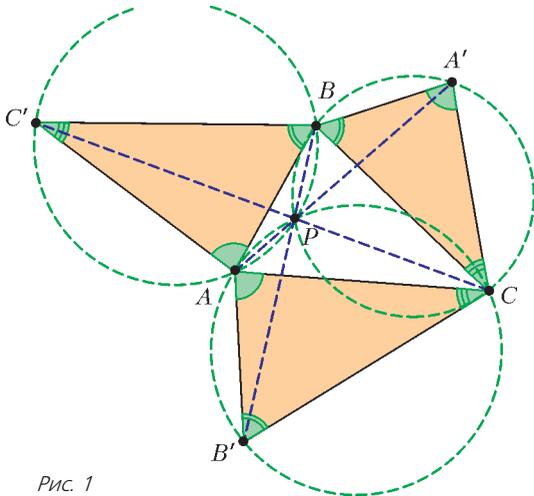


Рис. 1

здесь и далее в подобных треугольниках соответствующие вершины перечисляются в одном и том же порядке, так что в нашем случае  $\angle ABC' = \angle AB'C = \angle A'BC$  и т.д.).

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABC'$ ,  $AB'C$ ,  $A'BC$ , пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что в этой же точке пересекаются также и прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ .

Утверждение задачи верно для более общей ситуации:  $\triangle ABC$  может быть произвольным, а подобные треугольники также не обязательно остроугольные и могут быть построены во внешнюю или внутреннюю сторону исходного треугольника. Этот результат зафиксируем в виде теоремы.

**Теорема.** Пусть  $ABC$  – произвольный треугольник. Точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  таковы, что треугольники  $A'BC$ ,  $AB'C$  и  $ABC'$  подобны и одинаково ориентированы. Тогда окружности  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$ , описанные около этих треугольников, а также прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.

**Доказательство 1.** Предположим вначале, что треугольники  $ABC'$ ,  $AB'C$ ,  $A'BC$  построены вне треугольника  $ABC$ , а окружности  $\omega_A$  и  $\omega_B$  помимо вершины  $C$  пересекаются в точке  $P$ , причем точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$  (рис. 2). Тогда

$$\begin{aligned} \angle APB &= 360^\circ - \angle APC - \angle BPC = \\ &= (180^\circ - \angle APC) + (180^\circ - \angle BPC) = \\ &= \angle AB'C + \angle BA'C = \angle ABC' + \angle BAC' = 180^\circ - \angle AC'B. \end{aligned}$$

Доказанное равенство  $\angle APB = 180^\circ - \angle AC'B$  означает,

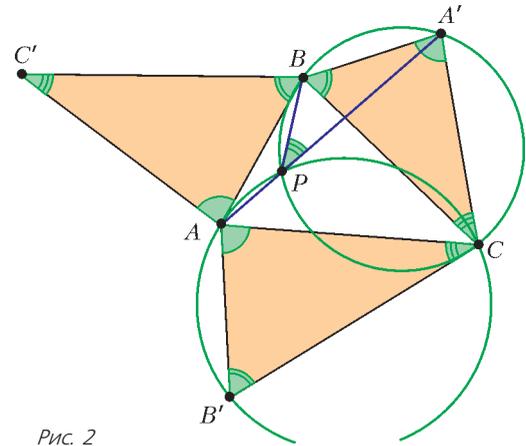


Рис. 2

что  $P$  лежит также на окружности  $\omega_C$ . Как видим, для доказательства пересечения окружностей в одной точке было достаточно лишь условия

$$\angle AC'B + \angle CB'A + \angle BA'C = 180^\circ.$$

Займемся теперь прямыми. Докажем, например, что точки  $A$ ,  $P$  и  $A'$  лежат на одной прямой (для троек  $B, P, B'$  и  $C, P, C'$  доказательство будет аналогичным). Из окружностей  $\omega_A$  и  $\omega_B$  имеем  $\angle A'PB = \angle A'SB$  и  $\angle APB = 180^\circ - \angle AC'B$ . Так как  $\angle AC'B = \angle A'SB$ , получаем  $\angle A'PB + \angle APB = 180^\circ$ , что и требовалось.

В рассматриваемом случае теорема доказана. Аналогично можно рассмотреть другие случаи расположения треугольников  $ABC'$ ,  $AB'C$ ,  $A'BC$  и точки  $P$  или привести общее доказательство, используя направленные углы.

## Упражнения

1. Завершите доказательство в других случаях.
2. Что происходит, если окружности  $\omega_A$  и  $\omega_B$  касаются?

Приведем также еще одно доказательство теоремы, в котором увидим некоторые пары подобных треугольников.

**Доказательство 2.** В этом доказательстве через  $P$  обозначим точку пересечения прямых  $AA'$  и  $BB'$ . Снова ограничимся рассмотрением случая, когда  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$  (рис. 3). Имеем

$$\angle ACA' = \angle ACB + \angle A'SB = \angle ACB + \angle B'SA = \angle BCB'.$$

Кроме того, из подобия треугольников  $A'BC$  и  $AB'C$  следует  $A'C/AC = BC/B'C$ . Значит, треугольники  $ACA'$  и  $B'CB$  подобны. (Можно сказать так: есть поворотная гомотетия с центром  $C$ , переводящая треугольник  $A'BC$  в  $AB'C$ , и это сразу влечет существование другой пово-

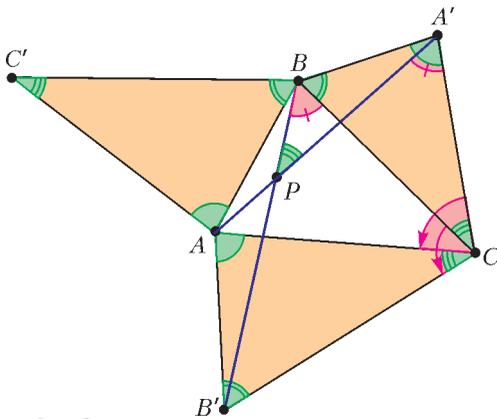


Рис. 3

ротной гомотетии с центром  $C$ , переводящей треугольник  $ACA'$  в  $B'CB$ .)

Из доказанного подобия имеем равенство  $\angle PBC = \angle PA'C$ , значит, точки  $P, B, C, A'$  лежат на одной окружности, т.е.  $P$  лежит на  $\omega_A$ . Аналогично,  $P$  лежит на  $\omega_B$ . Итак, мы показали, что прямые  $AA', BB'$  и окружности  $\omega_A$  и  $\omega_B$  пересекаются в одной точке. Аналогично, прямые  $AA', CC'$  и окружности  $\omega_A$  и  $\omega_C$  пересекаются в одной точке. Теперь завершить доказательство 2 можно с использованием рассуждения из доказательства 1 о том, что три окружности  $\omega_A, \omega_B$  и  $\omega_C$  пересекаются в одной точке.

**Упражнение 3.** Выразите отношения  $AA' : BB' : CC'$  через стороны треугольника  $ABC'$ .

*Указание.* Воспользуйтесь подобием, найденным в доказательстве 2.

Желающим разобраться в расположении точек в конструкции из теоремы адресуем следующее упражнение.

**Упражнение 4.** Докажите, что если подобные треугольники построены во внешнюю сторону треугольника  $ABC$  (т.е.  $A$  и  $A'$  лежат по разные стороны от прямой  $BC$  и т.д.), то точка  $P$  будет лежать в одной из голубых областей, показанных на рисунке 4, а иначе – в одной из розовых областей.

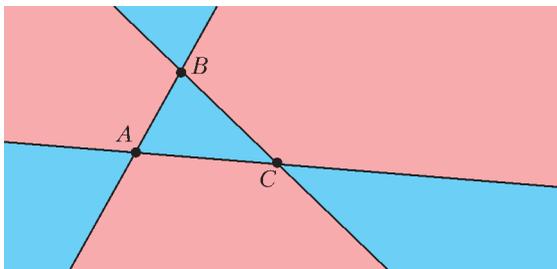


Рис. 4

**Обратная задача.** Для данного треугольника  $ABC$  по точке  $P$  (не лежащей на прямых  $AB, BC, CA$ ) нетрудно восстановить всю конструкцию из теоремы. Действительно, точку  $A'$  можно получить как вторую точку пересечения прямой  $AP$  с окружностью, описанной около треугольника  $BPC$ . Аналогично можно восстановить  $B'$  и  $C'$ .

#### Упражнения

**5.** Докажите, что при этом действительно треугольники  $ABC', AB'C$  и  $A'BC$  будут подобны.

**6.** Что произойдет, если точка  $P$  будет лежать на описанной окружности треугольника  $ABC$ ?

Перейдем к замечательным точкам.

### 1. Точка Ферма–Торричелли

Начнем с хорошо известного частного случая теоремы, когда треугольники  $ABC', AB'C$  и  $A'BC$  построены вне треугольника  $ABC$  и являются равносторонними (рис.5).

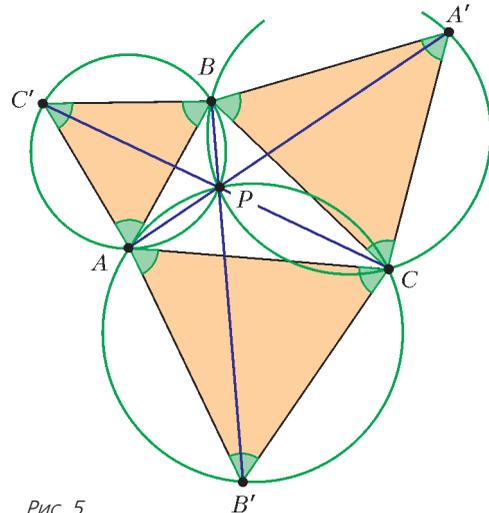


Рис. 5

Тогда точка  $P$  пересечения прямых  $AA', BB', CC'$  и окружностей  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  называется точкой Ферма–Торричелли. Если все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ , то  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Тогда из окружности  $\omega_A$  получаем, что  $\angle BPC = 180^\circ - \angle BA'C = 120^\circ$ . Аналогично,  $\angle APC = \angle APB = \angle BPC = 120^\circ$ . Последние равенства и принимают за определение точки Торричелли. Об интересных свойствах точки Торричелли было много написано на страницах «Кванта» (см. например, статью Л.Радзивиловского «Еще раз о точке Торричелли» в «Кванте» №3 за 2014 г.).

Вторая точка Торричелли получится, если изначально строить равносторонние треугольники внутри треугольника  $ABC$ .

**Упражнение 7.** Докажите (для конструкции с точкой Торричелли), что  $AA' = BB' = CC' = AP + BP + CP$ .

### 2. Центр вписанной окружности

Если провести внешние биссектрисы и обозначить через  $A', B', C'$  их попарные точки пересечения (центры невписанных окружностей), получим конструкцию, удовлетворяющую теореме (докажите это). При этом  $AA', BB', CC'$  – биссектрисы углов треугольника  $ABC$ . Они пересекаются в точке  $I$  – центре вписанной окружности треугольника  $ABC$  (рис.6,а). Согласно теореме, через ту же точку  $I$  проходят и окружности  $\omega_A, \omega_B$  и  $\omega_C$ , описанные около треугольников  $A'BC, AB'C, ABC'$ .

**Упражнение 8.** Докажите (для конструкции с центром вписанной окружности), что центры окружностей  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  лежат:

- на прямых  $AA', BB', CC'$ ;
- на окружности, описанной около треугольника  $ABC$  (рис.6,б).

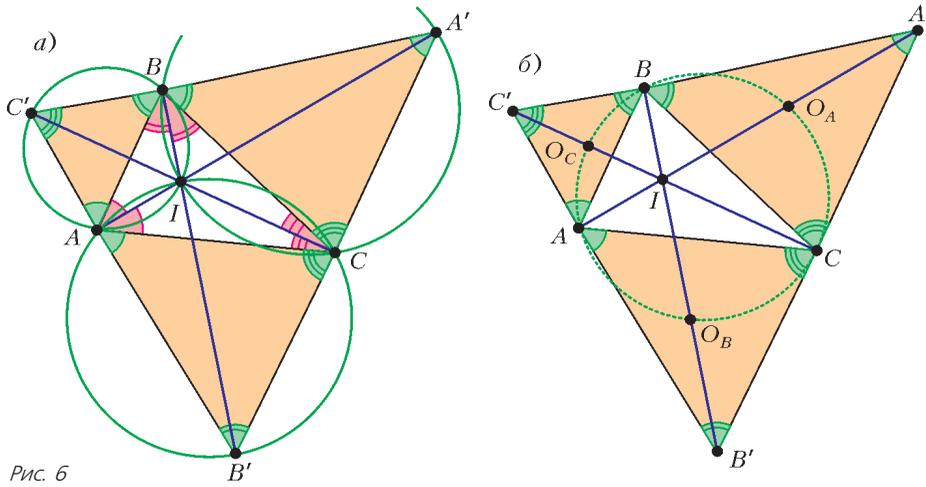


Рис. 6

*Указание.* а) Докажите, что  $IA', IB', IC'$  – диаметры окружностей  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  (видны под прямым углом из точек окружностей). б) Можно использовать равенство  $\angle BO_A C = 2\angle BA'C$ , где  $O_A$  – центр окружности  $\omega_A$ .

Последнее упражнение влечет известную теорему о трезубце:

*Середина дуги BC, не содержащей точки A, описанной окружности треугольника ABC равноудалена от вершин B, C и центра вписанной окружности.*

### 3. Ортоцентр

Рассмотрим случай, когда в теореме треугольники  $ABC', AB'S, A'BC$  строятся во внешнюю сторону треугольника  $ABC$  и подобны ему самому. Треугольники  $ABC$  и  $ABC'$  подобны и имеют общую сторону  $AB$ . Это означает, что эти треугольники симметричны относительно  $AB$ . Отсюда следует, что прямая  $CC'$  перпендикулярна  $AB$ , а значит, является высотой треугольника. Аналогично,  $AA'$  и  $BB'$  – высоты треугольника, значит, в этом случае точка  $P$  совпадает с ортоцентром  $H$  (рис.7,а). Тогда окружности  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  симметричны описанной окружности треугольника  $ABC$  относительно его сторон. В согласии с теоремой,  $H$  лежит на каждой из окружностей  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ . Получается известное свойство ортоцентра: описанные окружности треугольников  $BCH, CAH, ABH$  и  $ABC$  равны.

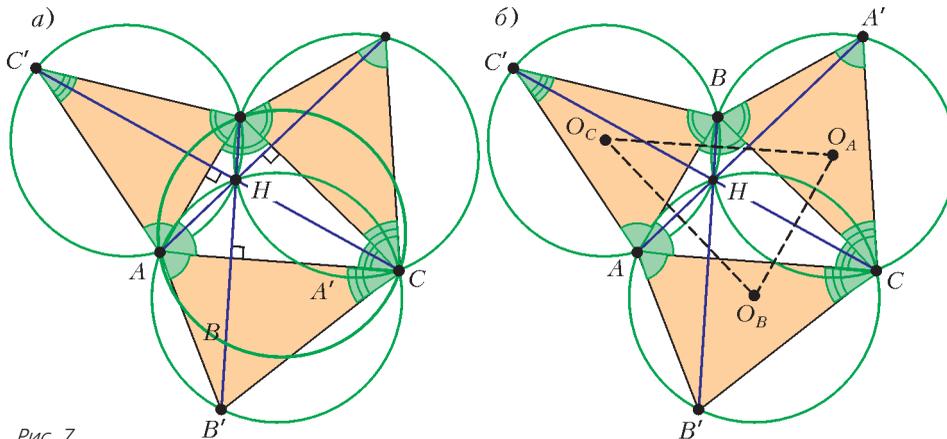


Рис. 7

### Упражнения

**9.** Пусть  $O_A, O_B, O_C$  – центры окружностей  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ . Докажите (для конструкции с ортоцентром), что:

а)  $H$  является центром описанной окружности  $O_A O_B O_C$ ;

б) треугольник  $O_A O_B O_C$  равен треугольнику  $ABC$  (рис.7,б).

**10** (Всеукраинская олимпиада по математике, 2010 г.). Дан треугольник  $ABC$ , внутри которого выбрана точка  $P$ . Около треугольников  $PBC, PAC, PAB$  описаны окружности  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  с центрами  $O_A, O_B, O_C$  соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника  $O_A O_B O_C$ , совпадает с точкой  $P$  тогда и только тогда, когда эти две точки совпадают с точкой пересечения высот треугольника  $ABC$ .

*Указание.* По точке  $P$  можно восстановить точки  $A', B', C'$ . Если окружности  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  равны, то и сами эти треугольники, будучи подобными, равны. После этого нетрудно понять, что они равны (по трем сторонам) исходному треугольнику  $ABC$ .

### 4. Точки Брокера

Рассмотрим еще один частный случай теоремы, когда на сторонах треугольника  $ABC$  построены треугольники  $ABC', AB'S, A'BC$ , каждый из которых подобен треугольнику  $BCA$  (рис.8,а). Из равенства  $\angle AC'B = \angle BAC$  следует, что окружность  $\omega_C$  касается прямой  $AC$ . По из этого касания следует другое равенство углов:  $\angle ABP = \angle PAC$ . Аналогично можно получить, что  $\angle ABP = \angle BCP$ . Итак,  $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP = \varphi$  – это равенство углов и берется за определение *точки Брокера*; угол  $\varphi$  называют *углом Брокера*. Аналогично можно получить вторую точку Брокера – для надстроенных треугольников  $ABC'', AB''S, A'BC$ , подобных треугольнику  $CAB$  (рис.8,б). На рисунке 8,б надстроены треугольники «закручены» в другую сторону по сравнению с рисунком 8,а. Точка  $Q$ , в которой пересекаются прямые  $AA'', BB'', CC''$ , обладает таким свойством:  $\angle BAQ = \angle ACQ = \angle CBQ$ .

Приведем несколько фактов о точках Брокера, для доказательства которых удобно использовать конструкцию рисунка 8. Докажем равенство углов Брокера для первой и второй точек Брокера. Из подобия «внешних» треугольников исходному следует, что

$$BC'/AC = AB/BC,$$

откуда  $BC' = bc/a$ , где  $a = BC, b = CA, c = AB$ . Аналогично,  $CB'' = bc/a$ , поэтому треугольники  $BCB''$  и  $BVC'$  равны по первому признаку. Из этого следует, что  $\angle QBC = \angle PCB = \varphi$ , что и требовалось.

Пойдем дальше и выведем формулу угла Брокера:

$$\sin \varphi = 2S / \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2},$$

где  $S$  – площадь треугольника  $ABC$ .

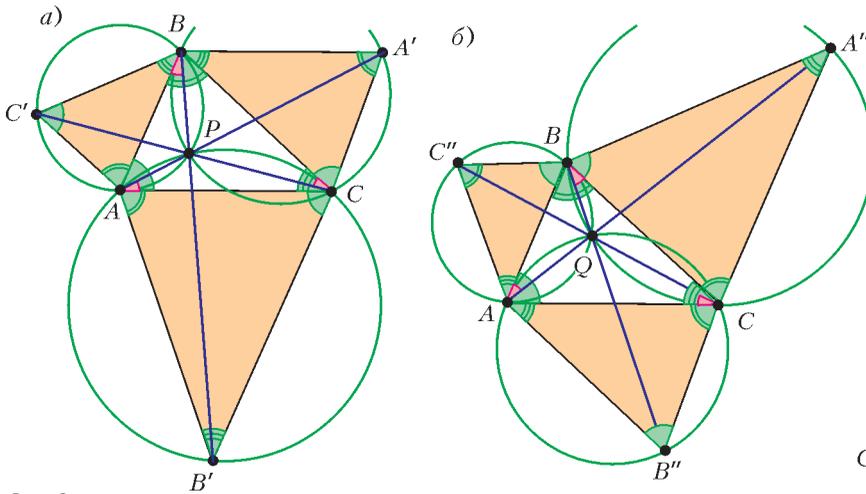


Рис. 8

Для доказательства рассмотрим треугольник  $CAA'$ , в котором  $CA = b$ ,  $CA' = ac/b$ ,  $\angle CAA' = \varphi$ ,  $\angle ABA' = 180^\circ - \angle ABC$ . Кроме того, ввиду равенства  $\angle A'BC = \angle ACB$ , имеем  $A'B \parallel AC$ , поэтому площадь треугольника  $CAA'$  равна площади треугольника  $ABC$ . По теореме косинусов из треугольника  $BCB'$  можно выразить

$$BB' = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{b},$$

и, вычислив площадь треугольника  $CAA'$  как  $\frac{BB' \cdot b \cdot \sin \varphi}{2}$ , находим

$$\sin \varphi = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Можно доказать теперь, что угол Брокера не превосходит  $30^\circ$ . Для этого остается лишь доказать неравенство

$$4S \leq \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

### Упражнения

**11.** Докажите последнее неравенство.

*Указание.* Можно применить формулу Герона для площади. После выкладок получится  $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ .

**12** (Международная математическая олимпиада, 1991 г., задача M1319 «Задачника «Кванта»). Дан треугольник  $ABC$  и точка  $M$  внутри него. Докажите, что хотя бы один из углов  $MAB$ ,  $MBC$ ,  $MCA$  не превосходит  $30^\circ$ .

**13** (Всеукраинская математическая олимпиада, 2009 г.). В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Внутри треугольника взята точка  $P$  такая, что  $\angle BAP = \angle CBP = \angle ACP$ . Известно, что  $\angle PNA = \angle AMB$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

*Указание.*  $P$  – точка Брокера треугольника  $ABC$ . Смысл не вполне естественного равенства из условия задачи проявляется после дополнительного построения из нашей конструкции. Если внешним образом на стороне  $AC$  построить треугольник  $AB'C$ , подобный треугольнику  $CAB$ , то  $AM$  и  $B'N$  – будут являться соответственными медианами. Поэтому углы  $PNA$ ,  $CNB'$  равны, значит,  $PB'$  (а следовательно и  $BB'$ ) содержит середину  $N$  стороны  $AC$ . Получаем, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной окружности. Далее уже нетрудно завершить решение.

### 5. Точка Аполлония

Пусть углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ . Построим вне треугольника  $ABC$  треугольники  $ABC^*$ ,  $AB^*C$ ,  $A^*BC$  так, что углы каждого из них равнялись  $120^\circ - \angle A$ ,  $120^\circ - \angle B$ ,  $120^\circ - \angle C$  (рис.9). Тогда по теореме прямые  $AA^*$ ,  $BB^*$ ,  $CC^*$  пересекаются в одной точке, назовем ее  $P^*$ . Через эту же точку  $P^*$  проходят окружности, описанные около треугольников  $ABC^*$ ,

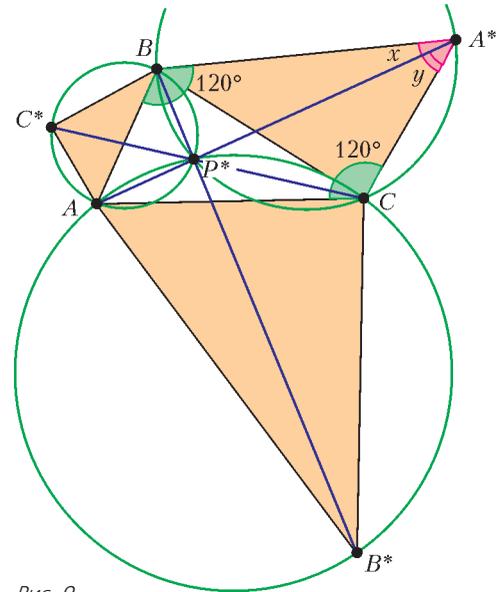


Рис. 9

$AB^*C$ ,  $A^*BC$ . Точка  $P^*$  известна как точка Аполлония, для которой расстояния до вершин обратно пропорциональны длинам противоположных сторон, т.е. выполняются равенства  $aAP^* = bBP^* = cCA^*$ . Докажем это.

Пусть  $\angle BA^*A = x$ ,  $\angle CA^*A = y$ . Тогда из вписанного четырехугольника  $A^*BP^*C$  получаем, что  $BP^*/\sin x = CP^*/\sin y$ . Заметим, что  $\angle ABA^* = \angle ACA^* = 120^\circ$ . Применяя теорему синусов к треугольникам  $ABA^*$  и  $ACA^*$ , имеем  $AB/\sin x = AA^*/\sin 120^\circ = AC/\sin y$ . Из полученных пропорций легко следует, что  $BP^* \cdot CA = CP^* \cdot AB$ . Аналогично можно показать, что любое из этих произведений равно  $AP^* \cdot BC$ .

**Упражнение 14** (Окружной этап Всероссийской математической олимпиады 1996 г.). Внутри треугольника выбрана точка  $R$  такая, что  $\angle ARB = \angle C + 60^\circ$ ,  $\angle BRC = \angle A + 60^\circ$  и  $\angle CRA = \angle B + 60^\circ$ . Докажите, что отрезки  $AR$ ,  $BR$  и  $CR$  образуют треугольник тогда и только тогда, когда высоты треугольника  $ABC$  образуют треугольник.

*Указание.* По точке  $R$  восстановите конструкцию из теоремы и докажите, что  $R$  – точка Аполлония. Отсюда будет следовать решение, так как длины высот треугольника обратно пропорциональны длинам противоположных сторон.

Отметим связь между конструкциями из первого и последнего сюжетов (точка Торричелли и точка Аполлония). Пусть для некоторого треугольника выполнены построения из сюжетов 1 и 5, т.е. на его сторонах вне его построены правильные треугольники  $ABC'$ ,  $AB'C$ ,

$A'BC$ , а также треугольники  $ABC^*$ ,  $AB^*C$ ,  $A^*BC$  с углами  $120^\circ - \angle A$ ,  $120^\circ - \angle B$ ,  $120^\circ - \angle C$  (рис.10) (в сюжете 5 мы специально изменили штрих на звездочку). Тогда легко видеть, что точка  $A^*$  лежит на прямой  $BC'$ , или, эквивалентно, прямые  $BA'$  и  $BA^*$  симметричны

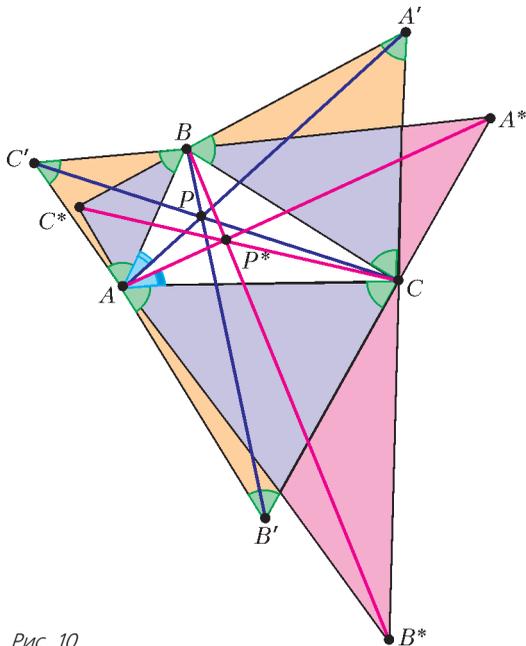


Рис. 10

относительно биссектрисы угла  $ABC$ . Аналогично, прямые  $CA'$  и  $CA^*$  симметричны относительно биссектрисы угла  $ACB$ . Это означает, что точки  $A'$  и  $A^*$  изогонально сопряжены (см. например, статью П.Кожевникова «Изо-

гонально сопряженные точки» в «Кванте» №1 за 2016 г.). Отсюда  $\angle BAA' = \angle CAA^*$ , или  $\angle BAP = \angle CAP^*$ . Доказав аналогичное равенство  $\angle ABP = \angle CBP^*$ , делаем вывод о том, что  $P$  и  $P^*$  изогонально сопряжены. Картина, аналогичная рисунку 10, будет наблюдаться для любой пары изогонально сопряженных точек  $P$  и  $P^*$ .

В заключение отметим, что конструкция с надстроенными подобными треугольниками так или иначе встречается во многих задачах. Одну из таких задач предлагаем в качестве упражнения.

**Упражнение 15.** Дан треугольник  $ABC$ , на сторонах  $AB$  и  $BC$  которого построены внешним образом квадраты  $ABLK$  и  $CBMN$ . (рис.11) Докажите, что прямые  $AM$ ,  $CL$  и  $KN$  пересекаются в одной точке.

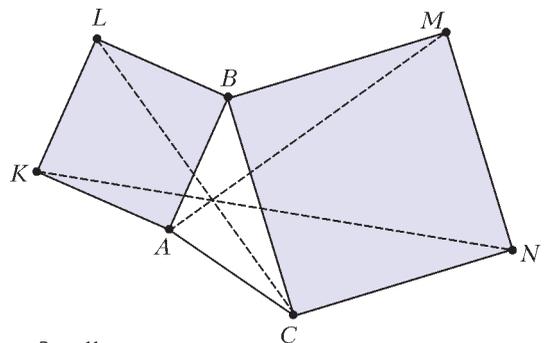


Рис. 11

*Указание.* Равнобедренные прямоугольные треугольники  $ABL$  и  $CBM$  построены на сторонах  $AB$  и  $CB$ , значит, прямые  $CL$  и  $AM$  проходят через точку пересечения окружностей, описанных вокруг квадратов.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Геометрия целочисленных расстояний

**А.ЕЛИЗАРОВ, П.КОЖЕВНИКОВ**

**В** ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОГОВОРИМ О НЕКОТОРЫХ конфигурациях точек, в которых расстояния между парами точек равны целым или рациональным числам. (Такие конфигурации здесь будем называть, соответственно, *целыми* или *рациональными*.) Вопросы о таких конфигурациях связаны с решением определенных диофантовых уравнений в целых числах. Как правило, эти вопросы далеко не просты, многие из них не решены до сих пор.

Изучать целые конфигурации – почти то же самое, что изучать рациональные конфигурации. Действительно,

пусть у нас есть рациональная конфигурация  $N$  точек, т.е.  $N$  точек, все попарные расстояния между которыми рациональны. Тогда можно подобрать натуральное  $Q$  (например, наименьшее общее кратное знаменателей всех расстояний) и рассмотреть конфигурацию, подобную данной с коэффициентом  $Q$ , иначе говоря, увеличить все линейные размеры в  $Q$  раз, тем самым, в новой конфигурации расстояния станут уже целыми (рис.1).

Первая серия экспонатов – пифагоровы треугольники. Поиск всех прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон сводится к решению в натуральных числах диофантова уравнения  $x^2 + y^2 = z^2$ . Тройка натуральных чисел  $(x, y, z)$ , удовлетворяющая этому уравнению, называется *пифагоровой* тройкой. Замена  $u = x/z$ ,  $v = y/z$  показывает, что задача поиска пифагоровых троек

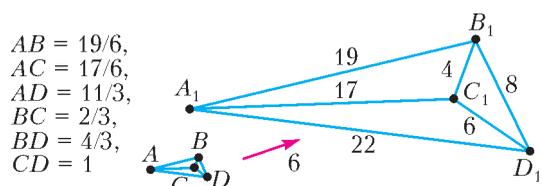


Рис. 1

эквивалентна отысканию точек  $(u, v)$  с рациональными координатами на окружности  $u^2 + v^2 = 1$ . Для пифагоровых троек известно следующее полное описание: катеты равны  $t(m^2 - n^2)$  и  $2tmn$ , а гипотенуза равна  $t(m^2 + n^2)$ , где  $t, m, n$  – натуральные числа,  $m > n$  (рис.2). Отметим, что оба катета пифагорова треугольника не могут быть нечетными. Это нетрудно вывести из уравнения  $x^2 + y^2 = z^2$  и без использования формул пифагоровых троек: если  $x = 2k + 1, y = 2l + 1$ , то  $x^2 + y^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$  – делится на 2, но не делится на 4.

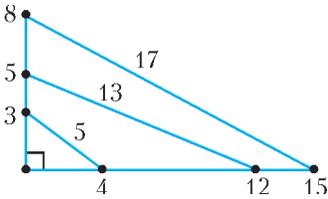


Рис. 2

От пифагоровых треугольников перейдем к более общему вопросу: поиск целых треугольников с фиксированным углом. Если  $\gamma$  – угол напротив стороны  $z$ , то по теореме косинусов  $\cos \gamma = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}$ . Мы видим, что  $\cos \gamma$  должен быть рациональным числом. Наоборот, пусть  $\cos \gamma = p/q$ , где  $p$  – целое, а  $q$  – натуральное, тогда получаем уравнение  $x^2 + y^2 - 2\frac{p}{q}xy = z^2$ , которое нужно решить в натуральных  $x, y, z$ . Есть методы, позволяющие находить бесконечные семейства решений уравнений такого типа и даже описывать все их целочисленные решения, подбирая нужную параметризацию.<sup>1</sup> Бесконечное семейство треугольников с целыми сторонами и углом  $\gamma$  таким, что  $\cos \gamma = p/q$ , можно получить по формулам  $x = 2qmn, y = q(m^2 - n^2) - p(m - n)^2, z = q(m^2 + n^2) - p(m^2 - n^2)$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа. На рисунке

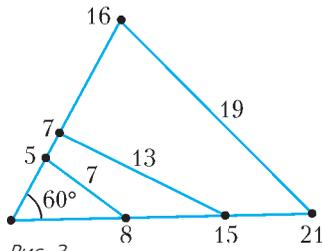


Рис. 3

3 представлены несколько треугольников с углом  $60^\circ$ , полученных по этим формулам.

Описать целые (или рациональные) четверки точек плоскости без всяких дополнительных условий – непростая и содержательная задача. Алгебраический подход сводится к отысканию рациональных решений уравнения  $f = 0$  с шестью неизвестными – попарными расстояниями между точками, где  $f$  – весьма громоздкое выражение.<sup>2</sup> Можно пытаться строить целые четверки геометрически. Если отбросить случай, когда все точки лежат на одной прямой, проще всего получить конструкцию «треугольник и чевиана» (рис.4), склеив по равным сторонам два рациональных треугольника с равными углами (треугольники  $ABC$  и  $DBC$ ) или склеив по равным сторонам два рациональных треугольника с углами, дающими в сумме  $180^\circ$  (треуголь-

ники  $ACD$  и  $BCD$ ; добиться равенства сторон можно «умножением» линейных размеров, о котором говорилось в начале). Длины отрезков  $x, y, z, x', y'$  на рисунке 4 связаны формулой из теоремы Стюарта:  $(x' + y')(z^2 + x'x' + y'y') = x'x^2 + y'y^2$ . Соображения выше дают возможность предъявлять бесконечные семейства целочисленных решений «уравнения Стюарта», например:  $z = 2qmn, x' = q(m^2 - n^2) - p(m - n)^2, y = q(m^2 + n^2) - p(m^2 - n^2), y' = q(m^2 - n^2) + p(m - n)^2, x = q(m^2 + n^2) + p(m^2 - n^2)$  (где  $m, n, p, q$  – целые).

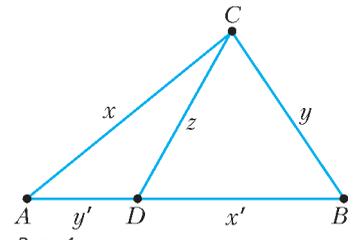


Рис. 4

Приложим друг к другу два пифагоровых треугольника, у которых есть пара равных катетов (рис.5; вначале можно взять два произвольных пифагоровых треугольника и подобрать подобные им треугольники, увеличив размер каждого из них в подходящее количество раз).

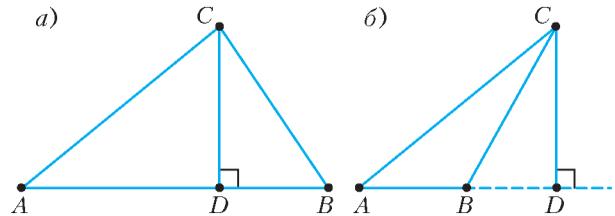


Рис. 5

Получим частный случай конструкции «треугольник и чевиана». Здесь у треугольника  $ABC$  длины всех сторон и площадь выражаются целыми числами – такие треугольники называются *героновыми*. Действительно, длины сторон треугольника  $ABC$  – очевидно, целые, а его площадь равна  $S = |AD \pm BD| \cdot CD/2$ . Ясно, что  $S$  целое, если  $CD$  четно. Если же  $CD$  нечетно, то из пифагоровых треугольников  $ACD$  и  $BCD$  получаем, что катеты  $AD$  и  $BD$  четны, значит, и в этом случае  $S$  целое. Наоборот, для каждого геронова треугольника есть подобный ему треугольник, составленный из двух пифагоровых треугольников. Чтобы доказать это, достаточно понять, что в героновом треугольнике  $ABC$  длина высоты  $CD$  рациональна и длины отрезков  $AD$  и  $BD$  тоже рациональны. Различных попарно не подобных героновых треугольников бесконечно много. Бесконечно много даже таких героновых треугольников, у которых длины сторон равны последовательным натуральным числам (при поиске таких треугольников возникает уравнение Пелля  $x^2 - 3y^2 = 1$ ).

Кажется, труднее искать рациональные четверки точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Можно на данном рациональном треугольнике  $ABC$  построить внутри или вне его другой рациональный треугольник  $BCD$  (рис.6). Но чтобы длина «замыкающего» отрезка  $AD$  оказалась целой, необходимо выполнение весьма жестких условий. Во-первых, рациональным должен быть  $\cos \angle ACD = \cos(\gamma \pm \gamma_1)$ , где  $\gamma = \angle ACB, \gamma_1 = \angle DCB$ . Это условие эквивалентно тому, что

<sup>1</sup> См., например, книгу В.Острика и М.Цфасмана «Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые».

<sup>2</sup>  $f$  – это определитель Кэли–Менгера, в пространственном случае он пропорционален объему тетраэдра с длинами ребер, равными переменным.

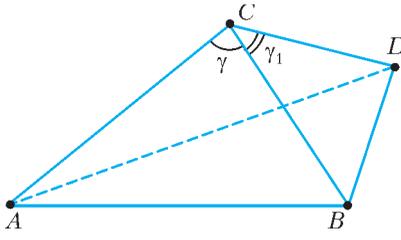


Рис. 6

$\sin \gamma \sin \gamma_1$  рационально. Для данного значения  $\cos \gamma = p/q$  имеется бесконечно много «подходящих» значений  $\cos \gamma_1 = p_1/q_1$ . Например, при  $p_1 = m^2 - kn^2$ ,  $q_1 = m^2 +$

$+ kn^2$ , где  $k = q^2 - p^2$ , а  $m$  и  $n$  – произвольные целые числа, имеем

$$\sin^2 \gamma \sin^2 \gamma_1 = \frac{q^2 - p^2}{q^2} \cdot \frac{q_1^2 - p_1^2}{q_1^2} = \frac{k}{q^2} \cdot \frac{4km^2n^2}{q_1^2}$$

– квадрат рационального числа. И все равно рациональности  $\cos \angle ACD$  недостаточно для рациональности длины  $AD$ .

Однако трудности, с которыми мы столкнулись выше, исчезают для четверки точек, лежащих на одной окружности: здесь рациональность пяти из шести попарных расстояний сразу влечет рациональность шестого. Чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить теорему Птолемея, связывающую длины сторон и диагоналей вписанного четырехугольника  $ABCD$ :  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ . Строить вписанные четверки можно, откладывая от фиксированного отрезка в одну полуплоскость

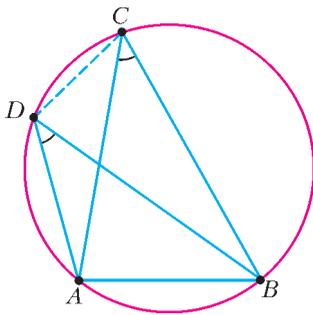


Рис. 7

треугольники с равными углами напротив этого отрезка (рис.7). Например, можно строить на одном отрезке как на гипотенузе рациональные прямоугольные треугольники. Этим методом можно построить сколько угодно точек, все попарные расстояния между которыми рациональны (поскольку есть бесконечно много попарно не подобных пифагоровых треугольников). Итак, мы получили, что на плоскости существует бесконечное рациональное множество точек и, сверх того, все эти точки лежат на одной окружности.

Кстати, построения рациональных множеств, для которых никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности, – очень трудная задача. Совсем недавно было построено такое множество из 7 точек (Kreisel, Kurz, 2008 г.), а существует ли такое рациональное множество из 8 точек – неизвестно.

Для бесконечных множеств между рациональными и целыми множествами нет непосредственной связи (поймите, почему трюк с подобием из начала статьи здесь не проходит!). С нашим обсуждением бесконечных рациональных множеств контрастирует теорема Эрдеша–Эннинга (1945 г.): бесконечное целое множество точек на плоскости – это обязательно множество точек, принадлежащих одной прямой.

Но вернемся к целым и рациональным четверкам. Таких четверок, в том числе не лежащих на одной окружности, великое множество (одна из таких четверок с достаточно малыми различными целыми расстояниями

представлена на рисунке 1). О том, насколько их много, можно судить по такому результату (Almering, 1963 г.): для любого треугольника  $ABC$  с рациональными длинами сторон множество точек  $X$  плоскости, для которых каждое из расстояний  $AX, BX, CX$  рационально, *всюду плотно*. Это значит, что внутри любого круга на плоскости найдется подходящая точка  $X$ . Однако до сих пор неизвестно, существует ли на плоскости точка, удаленная на рациональные расстояния от четырех вершин единичного квадрата.

Упомянем еще такой интересный факт: не существует четверки точек на плоскости, для которых все попарные расстояния нечетны.

В завершение – немного о пространственных задачах.

Пространственный аналог целочисленного прямоугольного треугольника – *пифагоров тетраэдр*, у которого все плоские углы при одной из вершин прямые, а длины всех ребер целые.<sup>3</sup> Пифагоров тетраэдр с наименьшей возможной длиной максимального ребра изображен на рисунке 8. Описание пифагоровых тетраэдров сводится к описанию троек натуральных чисел

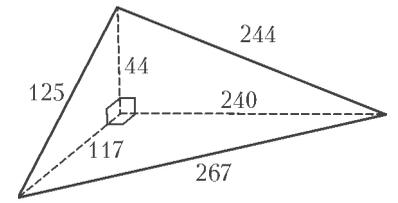


Рис. 8

$(x, y, z)$  таких, что  $x^2 + y^2$ ,  $y^2 + z^2$  и  $z^2 + x^2$  являются точными квадратами. Со времен Эйлера известны бесконечные семейства таких троек, например:  $x = u|4u^2 - v^2|$ ,  $y = v|4u^2 - v^2|$ ,  $z = 4uvw$ , где  $u, v, w$  – натуральные числа такие, что  $u^2 + v^2 = w^2$ . Впрочем, эти тройки описывают не все пифагоровы тетраэдры.

Пифагоров тетраэдр можно достроить до так называемого *эйлерова кирпича* (Euler Brick) – прямоугольного параллелепипеда с целыми длинами ребер и диагоналей граней. Возникает естественный вопрос: может ли в эйлеровом кирпиче быть целой и длина большой диагонали (т.е. может ли дополнительно и величина  $x^2 + y^2 + z^2$  быть точным квадратом; такой прямоугольный параллелепипед называют *совершенным*)? Помимо эйлеровых кирпичей, известны серии примеров троек натуральных чисел  $(x, y, z)$  таких, что  $x^2 + y^2$ ,  $y^2 + z^2$  и  $x^2 + y^2 + z^2$  являются точными квадратами (см., например, задачу M2275 «Задачника «Кванта»»), но вопрос о существовании совершенного прямоугольного параллелепипеда пока остается открытым.

Интересен класс *героновых тетраэдров* – это тетраэдры, у которых длины ребер, площади граней и объем выражаются целыми числами. Геронов тетраэдр с наименьшей возможной длиной максимального ребра изображен на рисунке 9.

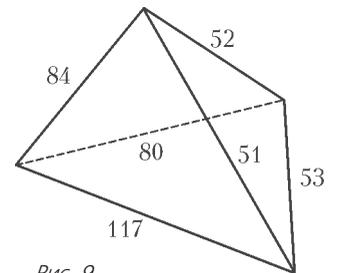


Рис. 9

<sup>3</sup> О пифагоровых тетраэдрах см. также статью В.Г.Болтянского в «Кванте» №8 за 1986 год.

# Напряженность электрического поля на поверхности сферы

В. ГРЕБЕНЬ

КАК ИЗВЕСТНО, В ОСНОВЕ ФИЗИЧЕСКОГО МЕТОДА исследования лежит следующее: опираясь на опыт, отыскивают количественно (математически) формулируемые законы природы, которые затем проверяются практикой. Задачей науки стал поиск математически выражаемых общих законов природы, которые охватывали бы громадную совокупность фактов. В связи с этим в физике, как и в математике, появились свои идеализации. Так, основные законы механики относятся не к произвольным телам, а к *материальной точке*: к телу, обладающему массой, но лишенному геометрических размеров. Хотя Кулон экспериментировал с заряженными шариками, закон, носящий его имя, сформулирован для *точечных неподвижных тел*. Можно вспомнить и об *идеальной газе* и о *тонкой линзе*. Таким образом, следует признать, что в физике идеализаций много. И с их помощью можно найти ответ на многие интересующие нас вопросы. В этом числе и на те, которые связаны с электрическим полем на поверхности сферы.

Сфера является абстрактным математическим понятием – это поверхность, не имеющая толщины. Если проводящему телу сообщить некоторый электрический заряд, то, как известно, этот заряд распределяется по его поверхности. Поэтому заряженный проводящий шар можно рассматривать как равномерно заряженную сферу, хотя реальность сложнее, так как избыточный заряд распределяется в пределах поверхностного слоя, имеющего конечную толщину. Таким образом, равномерно заряженная поверхность проводящего шара тоже является упрощающей моделью. В реальности переход от нулевого поля внутри шара к ненулевому значению снаружи осуществляется не скачком, а более сложным, но обязательно плавным образом.

Однако заметим, что далее речь в статье пойдет все-таки не о реальном объекте, а о математической сфере, которая равномерно и непрерывно заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Как известно, напряженность поля равна отношению силы, с которой электрическое поле действует на точечный пробный заряд, к величине этого заряда. Под пробным зарядом понимают заряд, величина которого достаточно мала, так что его собственное поле существенно не меняет распределения остальных заря-

дов, создающих исследуемое поле. Пробный заряд должен быть точечным, чтобы можно было исследовать поле в малых областях пространства. Судить о напряженности электростатического поля на поверхности сферы мы можем по силе, которая действует на заряды, находящиеся на самой сфере, не привнося дополнительно никаких зарядов извне. Иными словами, в роли пробного заряда может выступать точечный малый заряд, находящийся на поверхности сферы.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

**Задача 1.** Мыльному пузырю радиусом  $R$  сообщен заряд  $Q$ . Найдите давление электростатического поля на поверхности пузыря. Мыльную пленку считайте проводящей.

**Решение 1.** Заряды на поверхности мыльного пузыря, который мы будем представлять в виде сферы, находятся в электростатическом поле напряженностью  $E$ . Выделим маленький участок сферы площадью  $\Delta S$ . Он несет на себе заряд  $\Delta q = \sigma \Delta S$ , где  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$  – поверхностная плотность заряда сферы. Если напряженность электрического поля сферы  $E$ , то на выделенный участок действует сила

$$\Delta F = E \Delta q = E \sigma \Delta S.$$

Тогда давление электрического поля на поверхности мыльного пузыря будет равно

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = E \sigma = \frac{EQ}{4\pi R^2}.$$

Таким образом, давление зависит от напряженности электрического поля сферы. Найдем ее.

Если мы возьмем бесконечную плоскость с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , то напряженность электрического поля на самой поверхности равна нулю, вследствие равноправности всех направлений. А вне поверхности напряженность поля равна  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , в чем нетрудно убедиться, например воспользовавшись теоремой Гаусса.

Рассмотрим теперь замкнутую сферическую поверхность. Очень малый участок этой поверхности площадью  $\Delta S$  можно считать плоским (рис.1). По обе стороны от себя он создает поле, причем  $\vec{E}_1 = -\vec{E}'_1$ . Кроме того, вблизи данного элемента поверхности зарядами, расположенными на всей остальной поверхности проводника, создается свое поле, причем оно одно и то же внутри сферы и снаружи, т.е.  $\vec{E}_2 = \vec{E}'_2$ . Напряженность электрического поля внутри сферы равна нулю, откуда следует, что  $\vec{E}_2 = -\vec{E}'_1$ , или  $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$ . Так как  $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , то и  $E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , т.е. электрические заряды выделенного элемента поверхности сферы находятся в электрическом поле, напряженность которого

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

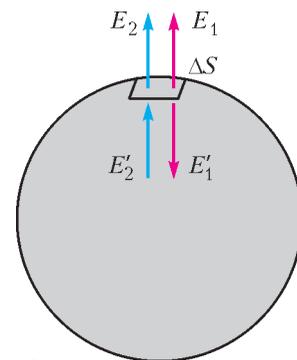


Рис. 1

Это значение мы и должны принять за напряженность электрического поля равномерно заряженной сферы с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  (так как напряженность электрического поля зарядов, находящихся на поверхности выделенного участка, как было указано ранее, равна нулю).

Однако большинство авторов книг и статей в журналах утверждают, что значение напряженности поля в точках, принадлежащих поверхности сферы, будет таким же, как и в точках, находящихся на бесконечно близком расстоянии от внешней поверхности сферы, т.е.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Кто же прав? Возникает необходимость решения нашей задачи с использованием другого подхода – энергетического.

**Решение 2.** Первоначальная потенциальная энергия заряженной сферы равна  $W_1 = \frac{kQ^2}{2R}$ . Дадим возможность нашей сфере расшириться до радиуса  $R + \Delta R$ , где  $\Delta R$  – очень малое изменение радиуса. Тогда потенциальная энергия сферы станет  $W_2 = \frac{kQ^2}{2(R + \Delta R)}$ . Изменение энергии сферы составит

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{kQ^2}{2(R + \Delta R)} - \frac{kQ^2}{2R} \approx -\frac{kQ^2 \Delta R}{2R^2}$$

(в знаменателе мы пренебрегли малым  $\Delta R$  по сравнению с  $R$ ).

Работа электрического поля равна изменению потенциальной энергии системы, взятому с противоположным знаком. В нашем случае

$$A = F \Delta R = QE \Delta R = \frac{kQ^2 \Delta R}{2R^2},$$

откуда

$$E = \frac{kQ}{2R^2} = \frac{Q}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Получается, что в ходе расширения сферы электрические заряды поверхности сферы двигались в поле, напряженность которого равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Возвращаясь к нашей задаче определения давления электрического поля на поверхность сферы, получим

$$p = E\sigma = \frac{Q^2}{32\epsilon_0\pi^2 R^4}.$$

**Задача 2.** Металлическая сфера радиусом  $R$  равномерно заряжена электрическим зарядом  $Q$ . Сферу разрезают на две части по плоскости, проходящей на расстоянии  $h$  от центра сферы. Какова сила, необходимая для удержания обеих частей сферы вместе?

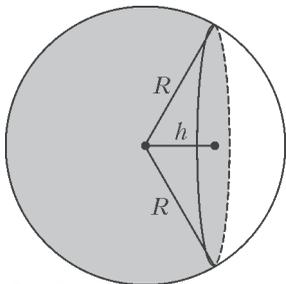


Рис. 2

**Решение.** В предыдущей задаче мы выяснили, что электрическое поле заряженной сфе-

ры создает давление  $p = \frac{Q^2}{32\epsilon_0\pi^2 R^4}$ . Представим себе тонкую оболочку (рис.2), состоящую из части сферы и части секущей плоскости, проходящей на расстоянии  $h$  от центра, и заполненную газом, создающим давление  $p$ . Так как это тело с газом будет покоиться, то силы давления на часть сферической оболочки и на плоскую поверхность равны. Но силу, действующую на плоскую поверхность, легко посчитать:  $F = p \cdot \pi(R^2 - h^2)$ , где  $r = \sqrt{R^2 - h^2}$  – радиус сечения. Значит,

$$F = \frac{Q^2}{32\epsilon_0\pi^2 R^4} \cdot \pi(R^2 - h^2) = \frac{Q^2(R^2 - h^2)}{32\epsilon_0\pi R^4}.$$

**Задача 3.** Пластилинный шарик радиусом  $R$  равномерно в один слой покрыт соприкасающимися маленькими металлическими пылинками. Поверхности шарика сообщают электрический заряд  $Q$ . При этом одна из пылинок отрывается от шарика. Найдите ее ускорение в момент отрыва. Масса пылинки  $m$ , ее площадь  $S$ .

**Решение.** По нынешним временам задача несложная, если знать значение напряженности электрического поля на поверхности сферы. Решение будет состоять из трех шагов.

1) Определим заряд пылинки:

$$q = \sigma S = \frac{QS}{4\pi R^2}.$$

2) Определим силу, действующую на пылинку со стороны электрического поля шарика, если напряженность на его поверхности  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{kQ}{2R^2}$ :

$$F = qE = \frac{kQ^2 S}{8\pi R^4}.$$

3) Осталось найти ускорение пылинки. По второму закону Ньютона,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{kQ^2 S}{8\pi m R^4}.$$

\* \* \*

С учетом полученных результатов напряженность поля сферы на расстоянии  $r$  от ее центра должна быть такой:

$E = 0$  для  $r < R$  (для точек внутри сферы);

$E = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{kQ}{2R^2}$  для  $r = R$  (для точек на сферической поверхности);

$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{r^2}$  для  $r > R$  (для точек вне сферы).

График напряженности поля сферы представлен на рисунке 3. Отличительной особенностью графика является появившаяся в месте разрыва обособленная точка.

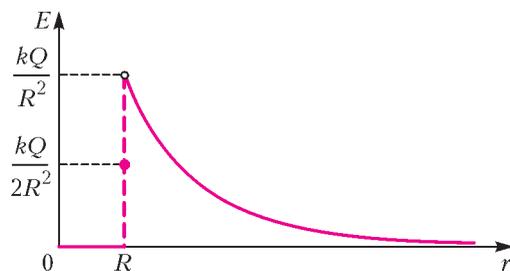


Рис. 3

# О махолете электрически

С.ГЕРАСИМОВ

**Д**АВНЫМ-ДАВНО, В САМОМ НАЧАЛЕ XX ВЕКА ВРАЧ Николай Федорович Аренд продувал замороженных птиц в аэродинамической трубе. Его заключение было неожиданным: аппараты с птичьими крыльями летать не должны. После этого продували макеты, чучела и даже живых птиц, и получалось, что и они летать не должны. А они, наперекор всем таким утверждениям, летали и летают.

В 1960 году издательство ДОСААФ выпустило книгу «Модели с машущими крыльями» известного энтузиаста машущего полета Г.Васильева, а в 1986 году механическая модель птерозавра стоимостью 700 тысяч долларов, построенная известным авиаконструктором П.Маккриди, была запущена при помощи лебедки, но разбилась о бетон взлетно-посадочной полосы. Тем временем, махолеты еще одного энтузиаста В.Торопова летали, причем достаточно успешно. Впрочем, взлетать они могли только в двух случаях: при вертикальном положении корпуса и горизонтальном махании крыльев или при почти горизонтальном расположении корпуса с почти вертикальным маханием крыльев, т.е. после продолжительного разгона. Что-то подобное совершает конвертоплан, у которого для вертикального взлета осуществляется поворот воздушных винтов. Построенный в 1998 году в канадском университете Торонто, орнитоптер C-GPTR с пилотом на борту после разгона продержался в воздухе несколько секунд и уткнулся носом в бетонное покрытие...

Несмотря на бесчисленные неудачи, машущий полет и сегодня привлекает большое число любителей. Его кажущаяся легкость побуждает энтузиастов строить модели и подавать проекты веря, что именно им известен секрет, который позволит, наконец, человеку совершить машущий полет. Потом наступает разочарование: шагнуть дальше летающих моделей и осуществить вертикальный взлет пока не удалось никому. Между тем, насекомые могут не только взмывать с места без разгона, но и надолго зависать в воздухе.

К идее махолета почти все, увы, относятся с иронией. Можно быть уверенным, в настоящее время ни один солидный авиационный институт, ни одна аэрокосмическая организация, ни одно авиационное предприятие не интересуется идеей машущего полета; ни один научный фонд не готов поддержать грант на создание действующей модели орнитоптера, осуществляющей не только горизонтальный полет, но и вертикальный взлет. Наверное, это правильно и вполне объяснимо. Значит, это – дело любителей, энтузиастов и дилетантов. Заметим, что в последнем слове нет ничего оскорбительного. Хотя в последнее время понятие «дилетант» обросло разными значениями, чаще всего пренебрежительными, такими

как «невежда» и «верхогляд», но на самом деле это слово происходит от итальянского «дилетто», означающее удовольствие. И в большей степени оно относится к человеку, которому работа в смежной области доставляет радость и который занимается ею не ради престижа и денег, а просто так, ради интереса, в свое удовольствие.

Разве это плохо, если начинающий специалист, студент или учащийся попытается самостоятельно разобраться с загадкой машущего полета и при этом не только приобретет опыт и знания, но и получит настоящее, а не сомнительное удовольствие? А кто еще может позволить себе ненадолго отрешиться от рабочих проблем и погрузиться в решение задачи, совершенно зря объявленной не актуальной? Маловероятно, что это экспериментальное исследование будет завершено, но попробовать стоит.

Для эксперимента нужна действующая модель махолета. Ее можно изготовить, воспользовавшись рекомендациями, изложенными в книге Г.Васильева, вот только резиновый или бензиново-моторный привод в схеме Д.Ильина лучше заменить электрическим. Придется менять частоту маханий крыльев, а это проще всего сделать, изменяя напряжение питания электродвигателя. Конечно, для начала надо убедиться, что махолет действительно летает, а не просто машет крыльями. Закрепите его к потолку лаборатории или комнаты при помощи длинной нити, включите двигатель и получите истинное удовольствие, глядя на такой конический маятник (рис.1).

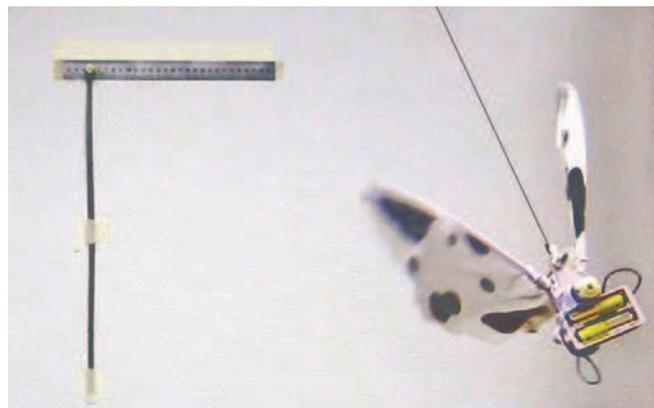


Рис. 1. Махолет на привязи, но в полете

Но конический маятник совершает круговые движения за счет горизонтальной силы, нас же интересует вертикальный взлет, т.е. вертикальная составляющая силы. То, что она имеет право на существование, сомнений не вызывает. При движении несимметричного крыла птицы или деформируемого крыла махолета вверх сила аэродинамического сопротивления меньше, чем при опускании крыла. Значит, должно иметь место так называемое вибрационное перемещение, которое, формально говоря, происходит под действием силы сопротивления среды. А если учесть, что крыло не невесомо, то такое перемещение может стать достаточно эффективным, поскольку при прочих равных условиях опускать тело легче, чем поднимать.

Чем-то эта проблема напоминает желание взвесить постоянно прыгающую лягушку, ну не убивать же ее! Обычные весы не помогут – лягушка ускачет, а чашки весов – помеха махолету. И потом, что покажут такие весы – непонятно. Но есть же другие весы – пружинные,

а простейшая электроника в наше время позволяет сделать такое, что первым разработчикам махолетов и не снилось. По существу, это простейший трансформатор, первичной обмоткой которого служит катушка  $K$ , а вторичной обмоткой – пружина  $\Pi$  с махолетом  $M$ , частично находящаяся внутри первичной обмотки (рис.2). Пружина растянулась – индуктивность уменьшилась, уменьшилось и выходное напряжение, и наоборот. Входное

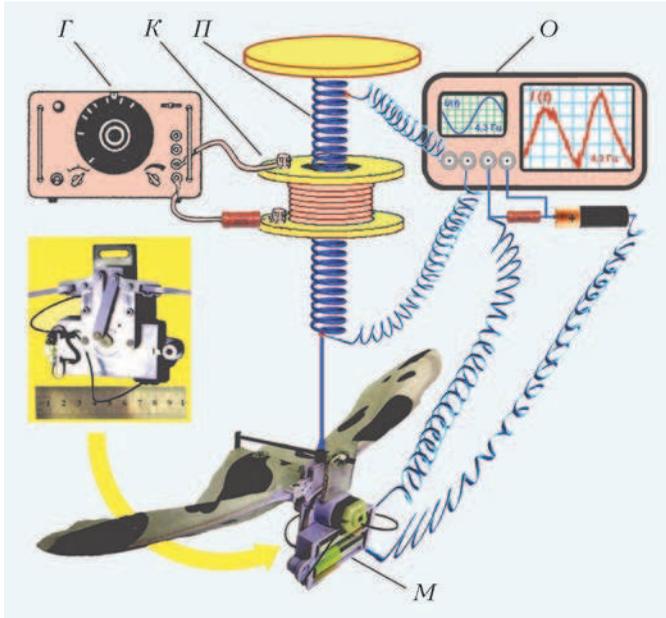


Рис. 2. Махолет  $M$ , пружина  $\Pi$ , катушка  $K$ , генератор  $G$  и осциллограф  $O$

переменное напряжение лучше всего получать от генератора низкой частоты  $G$ . Конечно, можно его взять и из бытовой электросети, но предупреждаем – это небезопасно. Если все же кто-то отважится, то электрический ток следует подавать в катушку, например, через лампу накаливания. Измерять выходное напряжение лучше всего при помощи двухканального электронного осциллографа  $O$ . В этом нынче нет проблемы: например, электронный осциллограф МастерКит VM8020 вполне доступен не только учебной лаборатории вуза, но и радиолюбительскому бюджету.

Современные научные исследования объединяют, как правило, несколько областей. И здесь дилетант перестает быть самоучкой: занимаясь вроде как альтернативной авиацией, он знакомится не только с устройством простейшего трансформатора с переменным коэффициентом усиления, но и с основами обработки слабых электрических сигналов. Электронный осциллограф очень просто подключается к компьютеру, а процедура обнаружения слабых периодических сигналов – не та задача, которой стоит бояться. Второй канал осциллографа нужен, если интерес представляет не только подъемная сила, но и потери энергии, затрачиваемые на ее создание.

Первое, что обязательно надо сделать, это произвести калибровку, т.е. установить связь между средним весом колеблющегося и покоящегося тела (не махолета, конечно же) и падением напряжения на пружине. То, что она не линейна – не страшно; при необходимости ее можно даже откалибровать (аппроксимировать) (рис.3). Она

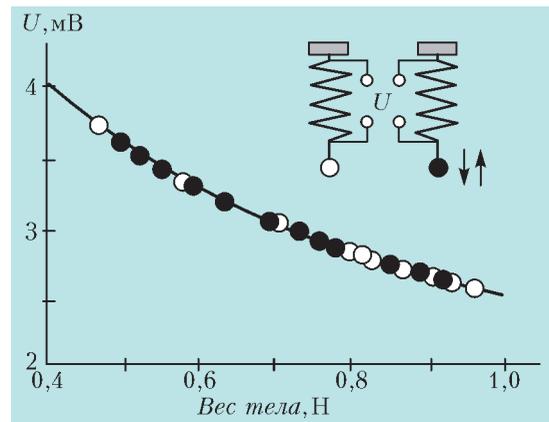


Рис. 3. Калибровка

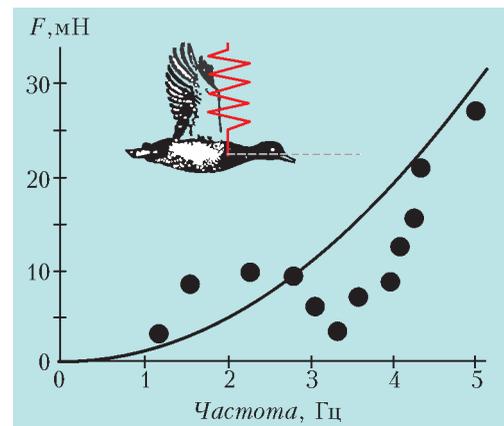


Рис. 4. Подъемная сила при нулевом угле атаки

важна, но в общем-то в ней нет ничего необычного или неожиданного. Другое дело – зависимость подъемной силы от частоты маханий крыльев (рис.4). Здесь нового – хоть отбавляй, а значит, есть, над чем поразмышлять. Да, подъемная сила мала, но мала и частота, а с возрастанием частоты сила все-таки возрастает. Эта экспериментальная зависимость чем-то напоминает квадратичную (сплошная линия на рисунке 4), характерную, например, для того же вертолета, если под частотой понимать частоту вращения винта. Но почему при трех с половиной герцах подъемная сила почти обнуляется – повод для дальнейшей деятельности. Сразу же хочется не только просто повторить измерения, но при этом и изменить какой-нибудь параметр такого далеко не примитивного летательного аппарата.

Подъемная сила практически любого летательного аппарата тяжелее воздуха характеризуется так называемым углом атаки. Эта конструкция махолета тоже позволяет его изменить. Достаточно обратить внимание на то, что над креплением середины деформируемого крыла (см. рис.2) установлен лонжерон, позволяющий изменить положение центра тяжести по отношению к пружине. При пяти градусах угла атаки ситуация почти повторяется (рис.5), но смысл такого повторения вполне понятен. Теперь никак невозможно провал в подъемной силе, происходящий при трех с половиной герцах частоты, списать на ошибки измерений. Скорее всего, виной такого провала является резонанс. Когда частота деформаций

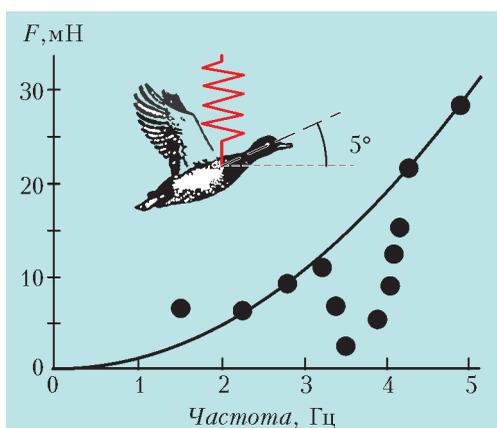


Рис. 5. Подъемная сила при ненулевом угле атаки

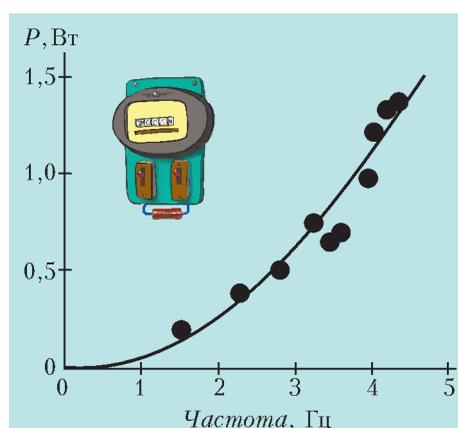


Рис. 6. Потери энергии и частота

крыла близка к частоте взмахов, крыло перестает быть крылом, имея в виду его асимметрию. Пока это, впрочем, всего лишь гипотеза.

А вот интересно, что происходит с потерями энергии, затрачиваемой источником питания электродвигателя на создание подъемной силы и на колебания крыльев? Для традиционных летательных аппаратов потери энергии должны быть пропорциональны кубу частоты, правда не для всех аппаратов. Например, для модного нынче ротора зависимость мощности  $P$  от частоты вращения ротора более слабая. Похоже, что-то подобное имеет место для махолета (рис.6).

В этом нет ничего странного: частота, а значит, и скорость крыла относительно воздуха достаточно малы. При малых скоростях сила сопротивления среды не может быть пропорциональна квадрату скорости. Будь такое, лодка, единожды оттолкнувшись от берега, плыла бы в спокойной воде не только бесконечно долго, но и бесконечно далеко. А это, простите, уже противоречит

здравому смыслу, часто называемому законом сохранения энергии. Конечно же, обязательно надо обратить внимание на то, что в области от трех до четырех герц потери энергии заметно ниже того, что предлагает квадратичная зависимость. Наверное, это правильно, поскольку в этом диапазоне частот подъемная сила мала.

Измеряется мощность  $P$ , затрачиваемая на махание крыльев, сравнительно просто. При заданном напряжении источника питания электродвигателя махолета один из каналов электронного осциллографа измеряет силу тока в цепи. Из полной мощности остается вычесть мощность, рассеиваемую в резисторе, через который электрически подпитывается махолет.

Устройств и конструкций, предназначенных для изучения машущего полета, предложено очень много. Задача стара, как весь живой мир, а время – новое. Не дальновидно это – упустить возможности электроники для решения такой интересной задачи. Двадцать первый век, знаете ли ...

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

В начале было слово...

М.БОНДАРОВ

ОБСУДИМ ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ НА СОУДАРЕНИЯ ТЕЛ.

**Задача 11** (МФТИ, 1978). Тонкая пластинка, двигавшаяся по направлению, составляющему угол  $\varphi$  с ее плоскостью, ударяется о точно такую же покоящуюся пластинку, параллельную первой (рис.9). Пластинки сделаны из упругого материала, но поверхности у них шероховатые. При каком значении коэффициента трения  $\mu$  между пластинками скорость, приобретенная

второй пластинкой, будет максимальной?

**Решение.** Используя подходы к решению предыдущей задачи, попробуем рассмотреть сначала изменение импульсов тел вдоль оси  $x$  (рис.10). Обозначим скорость верхней (первой) пластинки до удара через  $\vec{v}_1$ , после удара – через  $\vec{u}_1$ , а скорость второй (нижней) пластины после удара – через  $\vec{u}_2$ . Поскольку в направлении оси  $x$  действуют только упругие силы, столкновение пластинок в этом направлении можно уподобить, например, упругому лобовому столкновению бильярдных шаров, один из которых в момент удара покоится. Известно, что в этом случае шары обмениваются скоростями, т.е. налетающий шар останавливается, передав свой импульс неподвижному. По аналогии то же произойдет с пластинками, если коэффициент трения достаточно велик. Если же трения нет, то пластины будут скользить друг по другу, и обмен скоростями не произойдет. В промежуточных случаях обмен скоростями будет частичным. Если коэффициент трения равен нулю, то пластины будут скользить друг по другу, и обмен скоростями не произойдет. Если же трения достаточно велик, то пластины будут останавливаться друг относительно друга, и обмен скоростями будет полным. В промежуточных случаях обмен скоростями будет частичным.

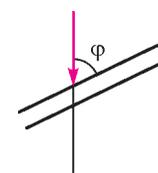


Рис. 9

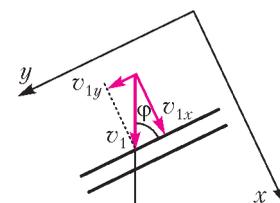


Рис. 10

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

тинками: в направлении оси  $x$  проекция скорости  $u_{1x}$  первой пластинки после удара обратится в ноль, в то время как

$$u_{2x} = v_{1x}.$$

Любящий строгие доказательства читатель легко убедится в этом, используя совместно законы сохранения импульса и механической энергии:

$$\begin{aligned} mv_{1x} &= mu_{1x} + mu_{2x}, \\ \frac{mv_{1x}^2}{2} &= \frac{mu_{1x}^2}{2} + \frac{mu_{2x}^2}{2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь процессы, происходящие в направлении оси  $y$ . Скорость  $u_{2y}$  приобретает вторую пластинку под действием силы трения скольжения  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , где  $N$  – модуль силы реакции. Пользуясь законом изменения проекции импульса второй пластинки на ось  $y$ , запишем

$$mu_{2y} = \mu N \Delta t,$$

где  $\Delta t$  – время, за которое сравниваются скорости пластинок вдоль оси  $y$ . Аналогично записываем тот же закон для второй пластинки вдоль оси  $x$ :

$$mu_{2x} = N \Delta t.$$

Из последних двух равенств получим

$$\frac{u_{2y}}{u_{2x}} = \mu.$$

Запишем далее закон сохранения импульса для системы из двух пластин в направлении оси  $y$ :

$$mv_{1y} = mu_{1y} + mu_{2y}.$$

Скорость нижней пластинки будет *максимальной* в том случае, если за время, пока происходит упругая деформация, прекратится проскальзывание одной пластинки относительно другой. Или, другими словами, составляющие скоростей вдоль плоскости пластинок за время соударения сравняются. В противном случае сила трения при проскальзывании будет продолжать ускорять нижнюю пластинку, что приведет к дальнейшему возрастанию ее скорости. Выразим *условие прекращения проскальзывания* математически:

$$u_{1y} = u_{2y}.$$

Тогда

$$u_{2y} = \frac{v_{1y}}{2}.$$

Окончательно получим

$$\mu = \frac{u_{2y}}{u_{2x}} = \frac{v_{1y}}{2v_{1x}} = \frac{v_1 \cos \varphi}{2v_1 \sin \varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

**Задача 12.** По гладкой наклонной плоскости с углом  $\alpha = 30^\circ$  при основании скользит ящик с песком массой  $M = 10$  кг. Когда в ящик попадает пуля массой  $m = 10$  г, летевшая горизонтально, он останавливается. Определите скорость пули, если непосредственно перед попаданием скорость ящика была  $v = 0,2$  м/с.

**Решение.** Поскольку столкновение пули и ящика является абсолютно неупругим, будем использовать закон сохранения импульса. Направим ось  $x$  вдоль наклонной плоскости (рис. 11) и запишем этот закон в проекциях на

эту ось:

$$Mv - mu \cos \alpha = 0, \text{ откуда}$$

$$u = \frac{Mv}{m \cos \alpha} \approx 230 \text{ м/с}.$$

Осторожный и внимательный школьник может подумать: «Как-то уж слишком просто все получилось. Предыдущие задачи решались не так легко». И, действительно, присмотримся повнимательнее к рисунку 11: а почему бы не направить ось  $x$  горизонтально? Вот тут-то нас ожидает очередной неприятный сюрприз – ответ получится иной:

$$Mv \cos \alpha - mu = 0, \text{ откуда } u = \frac{Mv \cos \alpha}{m} \approx 174 \text{ м/с}.$$

Какое же решение верное?

Давайте соберем воедино то главное, что нам известно о применимости закона сохранения импульса. 1) Его можно использовать, когда система замкнута. 2) Если равнодействующая внешних сил перпендикулярна некоторой оси, то проекция импульса системы на это направление сохраняется. А ведь мы использовали этот закон в векторном виде и в незамкнутой системе. Например, при решении задачи 7 о разрыве снаряда в верхней точке. При этом сила тяжести была единственной внешней силой и, естественно, ничем не была скомпенсирована. Почему же в таком случае закон выполнялся? Все дело в том, что изменяет импульс системы не сама внешняя сила, а импульс этой силы, т.е. ее произведение на время действия силы. Если же это время очень мало, а сила остается конечной величиной, то импульс системы сохраняется. И только в редких случаях, когда даже при малом времени действия внешней силы ее величина резко возрастает, пренебрегать импульсом внешней силы нельзя.

Вернемся к нашей задаче. При попадании пули в ящик резко возрастает величина силы реакции  $\vec{N}$ , действующей на ящик со стороны наклонной плоскости, поэтому импульсом этой силы *даже при кратковременном воздействии пренебрегать нельзя*. Зато можно выбрать ось, перпендикулярную силе реакции, в нашем случае – вдоль наклонной плоскости. В этом направлении проекция силы тяжести имеет фиксированное значение, значит, за очень малое время попадания пули в ящик проекция импульса системы остается неизменной. Так что верно наше первое решение.

### Массивное тело

Задачу об абсолютно упругом столкновении тел, масса одного из которых гораздо больше массы другого, можно решать тем же способом, что и другие подобные задачи, т.е. используя законы сохранения импульса и механической энергии. Однако введение в условие *массивного тела* во многих случаях позволяет значительно упростить решение.

**Задача 13** (МФТИ, 1994). По направлению к неподвижному шару движется массивная плита с постоянной скоростью  $v = 4$  м/с, направленной вертикально вверх и перпендикулярно поверхности плиты. В мо-

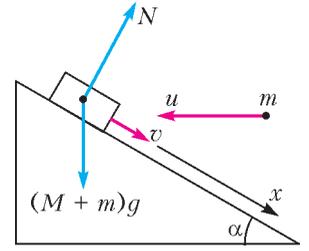


Рис. 11

мент когда плита находится на расстоянии  $H = 1$  м от шарика, шарик отпускают. На какое максимальное расстояние от плиты удалится шарик после упругого удара о плиту? Масса шарика много меньше массы плиты.

**Решение.** Поскольку плита массивная, т.е. ее масса во много раз больше массы шарика, воздействие на нее шарика при столкновении не окажет влияния и она продолжит свое равномерное движение вверх с прежней скоростью. Таким образом, можно связать инерциальную систему отсчета с плитой. В этой системе в начальный момент времени шарик находится на высоте  $H$  над плитой и начинает двигаться вниз со скоростью  $v$ . При упругом ударе механическая энергия сохраняется (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Шарик удалится от плиты на максимальное расстояние в тот момент, когда его скорость в выбранной системе отсчета станет равной нулю. Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии

$$mgH + \frac{mv^2}{2} = mgH_{\max},$$

получим

$$H_{\max} = H + \frac{v^2}{2g} = 1,8 \text{ м.}$$

### Коварство силы трения

Обратимся теперь к некоторым особенностям проявления сил в механике. И начнем с силы трения, судя по всему, самой коварной из основных механических сил.

**Задача 14.** На горизонтальном столе лежит деревянный брусок массой  $M = 400$  г, к которому привязана невесомая и нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, укрепленный на краю стола. К свободному концу нити подвешивают груз массой  $m = 100$  г. С каким ускорением станут двигаться после этого тела, если коэффициент трения между бруском и столом  $\mu = 0,3$ ? Трением в оси блока пренебречь.

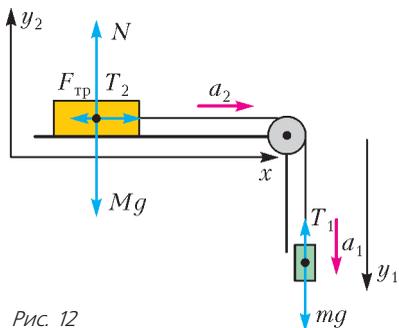


Рис. 12

Изобразим все силы, действующие на каждое тело системы (рис.12). Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную ось  $x$  и вертикальную ось  $y_2$  для бруска массой  $M$  и на вертикальную ось  $y_1$  для груза массой  $m$ :

$$\begin{aligned} T_2 - F_{\text{тр}} &= Ma_2, \\ N - Mg &= 0, \\ mg - T_1 &= ma_1. \end{aligned}$$

Так как нить нерастяжима, модули ускорений тел одинаковы:

$$a_1 = a_2 = a.$$

Модули сил натяжения нити равны, так как нить невесома и блок идеален (для раскручивания невесомого блока

без трения не нужен вращательный момент):

$$T_1 = T_2 = T.$$

Сила трения скольжения связана с силой реакции опоры соотношением

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Тогда из записанного выше получим систему уравнений

$$\begin{aligned} mg - T &= ma, \\ T - \mu Mg &= Ma, \end{aligned}$$

откуда легко найдем искомое ускорение:

$$a = g \frac{m - \mu M}{M + m}.$$

Однако после подстановки числовых значений получается весьма странный ответ:  $a = -2 \text{ м/с}^2$ , противоречащий физическому смыслу. Как интерпретировать такой ответ и каковы причины его возникновения?

Очевидно, что после начала движения брусок не может двигаться влево. Мы получили абсурдный ответ на основании предположения, что брусок начнет скользить вправо и на него при этом станет действовать сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Анализ ответа показывает: для того чтобы брусок начал двигаться, к нити необходимо подвесить груз массой  $m > \mu M$ . В противном случае (как в данной задаче) сила натяжения нити не превысит максимальную силу трения покоя. Таким образом, брусок останется в покое, и его ускорение будет равно нулю.

**Задача 15.** На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , находится груз массой  $M = 4$  кг (рис.13). К грузу привязан легкий шнур, перекинутый через невесомый блок, укрепленный на вершине

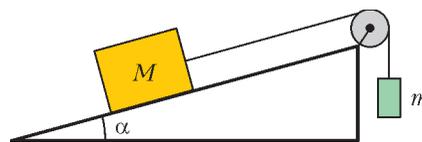


Рис. 13

наклонной плоскости. К другому концу шнура подвешена гиря массой  $m = 1$  кг. Определите ускорение тел после того, как система будет предоставлена сама себе, если коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью  $\mu = 0,4$ . Трением в оси блока пренебречь.

**Решение.** Изобразим все силы, действующие на каждое тело системы (рис.14). Мы не знаем заранее, куда движутся тела, поэтому предположим, что гиря опускается. Проведем общий ход решения аналогично предыдущей задаче – запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси  $x$  и  $y_2$  для тела массой  $M$  и на ось  $y_1$  для тела массой  $m$ :

$$\begin{aligned} T_2 - F_{\text{тр}} - Mg \sin \alpha &= Ma_2, \\ N - Mg \cos \alpha &= 0, \\ mg - T_1 &= ma_1, \end{aligned}$$

где

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Из записанного, с учетом идеальности нити и блока,

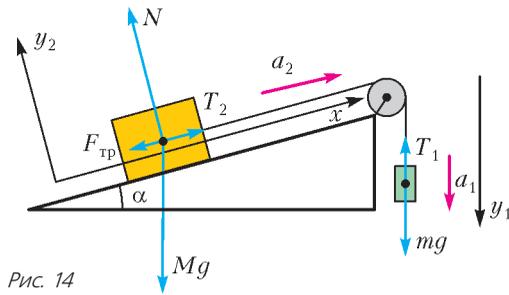


Рис. 14

получим систему уравнений

$$mg - T = ma,$$

$$T - \mu Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha = Ma,$$

откуда выразим искомое ускорение:

$$a = g \frac{m - M(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{M + m}.$$

Подставив числовые значения, находим  $a = -4,8 \text{ м/с}^2$ . Следовательно, наше предположение, что гиря опускается, неверно.

Заметим, что в отсутствие трения знак «минус» указывал бы на то, что гиря поднимается вверх с тем же по модулю ускорением. При наличии трения нужно рассмотреть второй случай, проделав аналогичные выкладки.

Изменим на противоположные направления силы трения и ускорений тел. Записав уравнения, подобные предыдущим, получим

$$T - mg = ma,$$

$$Mg \sin \alpha - T - \mu Mg \cos \alpha = Ma.$$

Отсюда можно найти искомое ускорение, но оно оказывается снова отрицательным:

$$a = g \frac{M(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m}{M + m} \approx -0,8 \text{ м/с}^2.$$

Теперь можно сделать окончательный вывод: тела находятся в покое, их ускорение равно нулю.

**Замечание.** Решение задачи можно было бы значительно упростить, предварительно выяснив, куда движутся тела при отсутствии трения. Тогда при наличии трения тела либо не движутся вообще, либо будут двигаться в ту же сторону, что и в отсутствие трения.

**Задача 16 (ЕГЭ).** Грузовой автомобиль массой  $M = 4 \text{ т}$  тянет за нерастяжимый трос вверх по уклону легковой автомобиль, масса которого  $m = 1 \text{ т}$ . Двигатель легкового автомобиля выключен. С каким максимальным ускорением могут двигаться автомобили, если угол уклона  $\alpha = \arcsin 0,1$ , а коэффициент трения между шинами грузового автомобиля и дорогой  $\mu = 0,2$ ? Силой трения качения, действующей на легковой автомобиль, пренебречь.

**Решение.** Итак, мы снова имеем дело с экстремальной задачей. Как правило, в подобных задачах (на движение по наклонной плоскости) требуется просто определить ускорение, здесь же речь идет о максимальном ускорении. Тогда, по второму закону Ньютона, равнодействующая сила должна тоже достигнуть максимального значения.

Единственной переменной силой, действующей на систему из двух автомобилей, является сила тяги двигателя. Она нарастает до тех пор, пока не начнется проскальзы-

вание ведущих колес грузового автомобиля. Другими словами, роль силы тяги выполняет сила трения покоя, направленная вперед и приводящая в движение автомобиля. Ее максимальное значение равно  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , где  $N = Mg \cos \alpha$ . Поскольку трос *нерастяжимый*, ускорение автомобилей будет одинаковым, и их можно рассматривать как систему с общей массой  $M + m$ , движущуюся с ускорением  $a$ . Разгоняющая систему *максимальная сила трения покоя*, действующая на ведущие колеса грузового автомобиля, равна  $\mu Mg \cos \alpha$ . Тормозят же систему автомобилей проекции сил тяжести  $Mg \sin \alpha$  и  $mg \sin \alpha$  на направление уклона. Таким образом, равнодействующая сил, приложенных к системе автомобилей, равна

$$F = g(\mu M \cos \alpha - (M + m) \sin \alpha).$$

По второму закону Ньютона искомое максимальное ускорение будет равно

$$a = \frac{F}{M + m} = g \left( \frac{M}{M + m} \mu \cos \alpha - \sin \alpha \right) = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

### Пружина и упругий шнур

Скрытая информация в условии задачи может быть спрятана иначе: кое-что авторы как бы подразумевают очевидным. Такую информацию мы будем выделять в решении не только курсивом, но и дополнительным подчеркиванием.

**Задача 17.** Пластинки массами  $m$  и  $2m$  соединены легкой пружиной жесткостью  $k$  (рис. 15). С какой минимальной высоты  $h$  должен упасть на верхнюю пластинку грузик массой  $m$ , чтобы при растяжении пружины после удара нижняя пластинка оторвалась от стола? Удар считать неупругим.

**Решение.** В начальный момент верхняя пластинка находится *в равновесии*, поэтому сила тяжести  $mg$  компенсируется силой упругости  $kx_0$  сжатой пружины:

$$mg = kx_0,$$

где  $x_0$  – начальная деформация сжатия пружины. В момент *отрыва* исчезает сила реакции опоры, а нижняя пластинка *останавливается* (по условию грузик падает с минимальной высоты), поэтому

$$2mg = kx,$$

где  $x$  – растяжение пружинки в этот момент.

Спротивление воздуха отсутствует, поэтому, по закону сохранения механической энергии,

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

где  $v$  – скорость грузика перед ударом о верхнюю пластинку. Удар можно считать неупругим, а грузик прилипает к пластинке мгновенно, следовательно, при ударе будет справедлив закон сохранения импульса

$$mv = 2mu,$$

где  $u$  – скорость грузика вместе с верхней пластинкой сразу после удара.

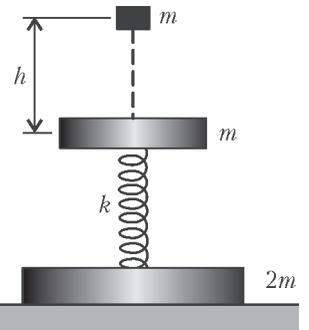


Рис. 15

Если учесть не только энергию растянутой пружины в конце, но и *энергию сжатой пружины в момент удара*, то закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{2mv^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = 2mg(x + x_0) + \frac{kx^2}{2}.$$

Окончательно получим

$$h = 15 \frac{mg}{k}.$$

**Задача 18.** Груз массой  $m = 5$  кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью  $k = 500$  Н/м. Грузу дважды сообщают начальную скорость, направленную вертикально вверх. В первом случае эта скорость равна  $v_1 = 0,5$  м/с, во втором –  $v_2 = 2$  м/с. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) во втором случае больше, чем в первом?

**Решение.** Мы уже видели (в задаче 5), что замена невесомого стержня на невесомую нить приводит к изменению хода решения задачи. Аналогичная картина наблюдается, если вместо пружины груз подвесить на упругом шнуре.

Итак, в данной задаче привычная пружина заменена на упругий шнур. Шнур ведет себя подобно пружине *только при растяжении*. При попытке сжатия в шнуре не возникают деформации, и груз перестает его «замечать». Можно предположить, что и величины скоростей заданы не случайно: при малой скорости шнур ведет себя как растянутая пружина, а при большой скорости в некоторый момент он перестает быть растянутым. Для подтверждения этой гипотезы рассчитаем, при какой начальной скорости  $v_0$  груз достигнет той точки, где исчезнет деформация шнура.

По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = mgx_0,$$

где  $x_0$  – величина деформации шнура, вызванная подвешиванием груза. Определим ее из условия равновесия:

$$mg = kx_0, \text{ и } x_0 = \frac{mg}{k} = 0,1 \text{ м.}$$

Отсюда, с учетом предыдущего равенства, получим

$$v_0 = g\sqrt{\frac{m}{k}} = 1 \text{ м/с.}$$

Как видим, наше предположение подтвердилось:

$$v_1 < v_0 < v_2.$$

Рассмотрим теперь оба случая по отдельности.

1) При  $v_1 < v_0$  шнур ведет себя как пружина. По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + mg(x_0 - x),$$

где  $x$  – конечная деформация растяжения шнура в тот момент, когда груз остановится. Подставив сюда выражение для  $x_0$ , получим квадратное уравнение. Его корни равны  $x_1 = 0,05$  м и  $x_2 = 0,15$  м. Сравнивая их с числовым значением  $x_0$ , заключаем, что деформации растяжения шнура удовлетворяет только первый корень.

Значит, высота подъема груза в первом случае равна

$$h_1 = x_0 - x_1 = 0,05 \text{ м.}$$

2) При  $v_2 > v_0$  после подъема груза на высоту  $h_0 = x_0$  шнур перестает деформироваться, а груз продолжает движение только под действием силы тяжести. Запишем снова закон сохранения энергии:

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = mgh_2,$$

откуда

$$h_2 = \frac{mg}{2k} + \frac{v_2^2}{2g} = 0,25 \text{ м.}$$

В итоге получаем

$$\frac{h_2}{h_1} = 5.$$

### Медленное движение

**Задача 19.** Небольшое тело массой  $m$  медленно втащили на горку, действуя силой  $F$ , которая в каждой точке направлена по касательной к траектории. Найдите работу этой силы, если высота горки  $h$ , длина ее основания  $l$  и коэффициент трения  $\mu$ .

**Решение.** Тело втаскивают *медленно*, поэтому модуль его скорости остается неизменным и малым. Неизменность модуля скорости приводит к тому, что действующая на тело по *касательной к траектории* сила равна сумме силы трения скольжения и проекции силы тяжести на направление касательной к траектории. Для расчета искомой работы разобьем траекторию на маленькие участки длиной  $\Delta s$ , каждый из которых можно считать прямолинейным. Работа силы  $F$  на таком участке равна

$$\Delta A = \mu mg \Delta s \cos \alpha + mg \Delta s \sin \alpha.$$

Таким образом, работа силы  $F$  идет на работу против силы трения и на увеличение потенциальной энергии тела. Заметим, что  $\Delta s \cos \alpha = \Delta l$  – проекция участка пути  $\Delta s$  на горизонтальное направление и  $\Delta s \sin \alpha = \Delta h$  – проекция на вертикальное направление. Тогда, просуммировав выражения для величин работ на малых участках, получим искомую работу:

$$A = \mu mgl + mgh = mg(\mu l + h).$$

### Некоторые особенности заданий ЕГЭ базового и повышенного уровней сложности

Начнем с задач, в которых можно получить верный ответ, даже не заметив тонкости их условий.

**Задача 20 (ЕГЭ).** Ящик тянут по земле за веревку по горизонтальной окружности длиной  $L = 40$  м так, что он движется с постоянной по модулю скоростью. Модуль силы трения, действующей на ящик со стороны земли, равен  $F_{\text{тр}} = 80$  Н. Чему равна работа силы тяги за один оборот?

**Решение.** В этой задаче можно получить правильный ответ, допустив ошибку в решении. Приведем его.

Окружность *горизонтальная*, поэтому сила тяжести компенсируется силой реакции опоры. Модуль скорости *постоянный* – сила тяги равна по модулю и противоположна по направлению силе трения. Тогда искомая работа силы тяги равна по модулю работе силы трения:

$$A = F_{\text{тр}} L = 3200 \text{ Дж.}$$

В отличие от задачи 19, в данном случае не говорится о движении с *малой* скоростью. Поэтому обязательно возникает центростремительное ускорение. А вот какая сила его вызывает? Эта сила должна быть направлена к центру окружности. Но помимо силы тяги и силы трения других сил в горизонтальной плоскости нет. Приходим к выводу, что сила тяги направлена под некоторым углом  $\alpha$  к касательной к окружности так, чтобы ее параллельная составляющая  $F_{\parallel} = F \cos \alpha$  была по модулю равна силе трения, а перпендикулярная составляющая  $F_{\perp} = F \sin \alpha$  создавала центростремительное ускорение.

Как видим, непосредственно на ответ приведенное уточнение не влияет, но глубина понимания условия задачи становится иной.

**Задача 21** (ЕГЭ). *Период колебаний потенциальной энергии пружинного маятника 0,5 с. Каким будет период колебаний другого маятника, если и масса груза маятника, и жесткость его пружины в 4 раза больше, чем у первого?*

**Решение.** При беглом прочтении условия можно не заметить, что задан не привычный период колебаний пружинного маятника, а *период колебаний его потенциальной энергии*. Зато требуется определить просто период колебаний другого пружинного маятника. Напомним, что и потенциальная и кинетическая энергии пружинного (и математического тоже!) маятника изменяются вдвое чаще, чем меняются его координата, скорость и ускорение.

Итак, если мы заметили хитрости составителей задачи, то дальнейшее решение не вызовет затруднений. Поскольку период колебаний потенциальной энергии первого маятника равен  $T_{\text{пэ1}} = 0,5$  с, то период его колебаний будет вдвое больше:  $T_1 = T_{\text{пэ1}} = 1$  с. Из формулы периода колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

следует, что при одновременном увеличении массы  $m$  груза маятника и жесткости  $k$  его пружины в 4 раза период колебаний не изменится. Таким образом,

$$T_2 = T_1 = 1 \text{ с.}$$

**Задача 22** (ЕГЭ). *С аэростата, зависшего над землей, упал груз. Через 10 с он достиг поверхности земли. На какой высоте находился аэростат? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.*

**Решение.** Это совсем простая, но не случайная для данной статьи задача. В условии задачи оговорены все детали: аэростат *завис* – начальная скорость груза равна нулю, *сопротивление воздуха пренебрежимо мало* – ускорение груза равно  $g$ . Тогда искомая высота равна

$$h = \frac{gt^2}{2} = 500 \text{ м.}$$

**Задача 23.** *Теннисный мяч падает с большой высоты на землю. Определите его ускорение сразу после абсолютно упругого отскока.*

**Решение.** Обратите внимание, что обязательная в подобных задачах присказка «*сопротивлением воздуха пренебречь*» в условии отсутствует. Что это – небрежность составителей, забывших указать очевидную поправку, или сознательное ее исключение?

Если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то ответ в задаче очевиден: ускорение мяча как до, так и после отскока равно  $g$ . Однако, поскольку мяч падает с *большой высоты*, сопротивление воздуха должно оказывать существенное влияние на его движение. Не слишком тяжелый теннисный мяч через некоторое время с начала полета перестанет ускоряться – сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости мяча. Тогда за мгновение до удара сила сопротивления будет равна по модулю силе тяжести и противоположна ей по направлению. Сразу после *абсолютно упругого отскока* модуль скорости мяча останется тем же, значит, сила сопротивления сохранит свою величину, изменив только направление на противоположное. Таким образом, в этот момент равнодействующая сил, приложенных к мячу, равна  $2mg$ , а его ускорение равно

$$a = 2g.$$

Неожиданный ответ, не правда ли?

Иногда случается так, что условие старается как бы увести решающего с верного пути. Например, с помощью избыточных данных. Рассмотрим показательный в этом смысле пример.

**Задача 24** (ЕГЭ). *На фотографии (рис. 16) представлена установка для изучения равномерного движения бруска (1) массой 0,1 кг, на котором находится груз (2)*

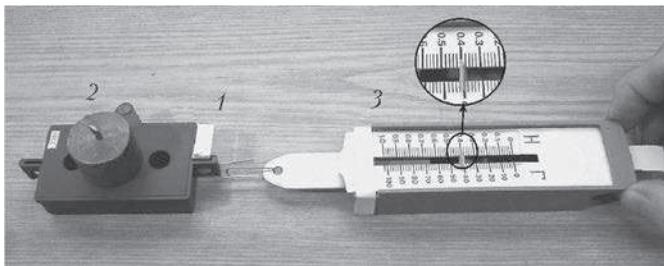


Рис. 16

*массой 0,1 кг. Чему равна работа равнодействующей всех сил, действующих на брусок с грузом, при перемещении на 20 см?*

**Решение.** В этой задаче все числовые данные не играют никакой роли. Для решения достаточно обратить внимание на две вещи: во-первых, движение бруска *равномерное*; во-вторых, нужно найти работу *равнодействующей всех сил*, действующих на брусок с грузом. Теперь все предельно ясно: при равномерном движении ускорение равно нулю, значит, равнодействующая всех сил (которую показывает диаметр 3) тоже равна нулю. Тогда равна нулю и ее работа.

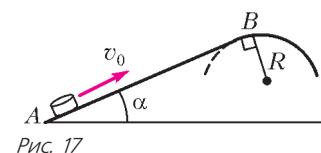
В заключение – обещанная таблица «скрытого смысла». В ней дается возможное толкование отдельных фраз, встречающихся в задачах механики. Эта таблица далеко не полная. На наш взгляд, было бы полезно продолжить ее. При желании читатель может справиться с этим самостоятельно.

#### Упражнения

**1** (ЕГЭ). Небольшая шайба после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки А (рис. 17). В точке В наклонная плоскость без излома переходит в наружную поверхность гори-

Таблица «скрытого смысла»

	Слова в условии задачи	Как их можно использовать в решении
1.	Тормозной путь	Конечная скорость равна нулю
2.	Трогается с места	Начальная скорость равна нулю
3.	Нерастяжимая нить, недеформируемый стержень	Модуль проекции скорости любой точки нити (стержня) на направление нити (стержня) остается неизменным в любой точке нити (стержня)
4.	Невесомая нить, невесомый стержень	Сила натяжения нити (стержня) одинакова в любой ее (его) точке
5.	Математический маятник в крайней точке	Центростремительное ускорение равно нулю, равнодействующая сила направлена по касательной к окружности
6.	Отрывается от опоры	Сила реакции опоры равна нулю
7.	Гладкая поверхность	Сила трения равна нулю, при отсутствии работы внешних сил выполняется закон сохранения механической энергии
8.	Небольшое (маленькое) тело	Размеры тела несущественны, его можно считать материальной точкой
9.	Установившаяся скорость движения, максимальная скорость движения тела	Ускорение тела равно нулю, равнодействующая приложенных к телу сил равна нулю
10.	Абсолютно неупругий удар	Часть механической энергии (или вся энергия) переходит во внутреннюю; можно применять закон сохранения импульса
11.	Абсолютно упругий удар	Выполняются законы сохранения механической энергии и импульса
12.	Длительность столкновения считать очень малой; шарик мгновенно прилипает к другому телу	Даже при наличии внешних нескомпенсированных сил можно применять закон сохранения импульса
13.	Спротивлением воздуха пренебречь	В отсутствие других сил тело движется под действием только силы тяжести с ускорением свободного падения
14.	Тело падает с достаточно большой высоты	В этом случае сопротивлением воздуха нельзя пренебрегать, и через некоторое время тело будет двигаться равномерно
15.	Тело движется медленно	Можно не учитывать изменение кинетической энергии тела; при движении тела по окружности центростремительное ускорение пренебрежимо мало
16.	Пружина сжата или растянута	Пружина обладает потенциальной энергией, которую нужно учитывать в законе сохранения механической энергии
17.	Груз подвешен к упругому резинового шнуру	В отличие от пружины, сила упругости в шнуре возникает только при растяжении
18.	Период колебаний потенциальной (кинетической) энергии	Период колебаний потенциальной (кинетической) энергии тела вдвое меньше периода колебаний самого тела
19.	Тяжелая плита сталкивается	Скорость плиты при столкновении не меняется
20.	Если в условии говорится о трении...	Формулу $F_{тр} = \mu N$ можно использовать только в двух случаях: 1) при скольжении тела; 2) когда тело находится в покое на грани скольжения



зонтальной трубы радиусом  $R$ . Если в точке  $A$  скорость шайбы превосходит  $v_0 = 4$  м/с, то в точке  $B$  шайба отрывается от опоры. Длина наклонной плоскости  $AB = L = 1$  м, угол  $\alpha = 30^\circ$ . Коэффициент трения между наклонной плоскостью и шайбой  $\mu = 0,2$ . Найдите внешний радиус трубы  $R$ .

2 (ЕГЭ). Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 500 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда, а второй оказался в этом же месте через 100 с после разрыва. Чему равно отношение массы первого осколка к массе второго осколка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3 (МФТИ, 1978). Тонкая пластинка массой  $m_1$ , движущаяся со скоростью  $v_0$ , ударяется о неподвижную тонкую пластинку массой  $m_2$ , расположенную параллельно первой (см. рис.9). Скорость  $v_0$  составляет угол  $\varphi$  с плоскостью пластинок. Удар абсолютно упругий, трения между пластинками нет. С какими скоростями будут двигаться пластинки после удара?

4. Шарик, висящему на легкой нерастяжимой нити длиной 1,6 м, сообщают горизонтальную скорость 8 м/с. На какую максимальную высоту поднимется шарик?

5. На тележке массой  $M = 400$  г, которая может катиться без трения по горизонтальной плоскости, имеется легкий кронштейн, на котором подвешен на нити маленький шарик массой  $m = 200$  г. На тележку по горизонтали налетает и абсолютно неупруго сталкивается с ней шар массой  $M$  (рис.18).

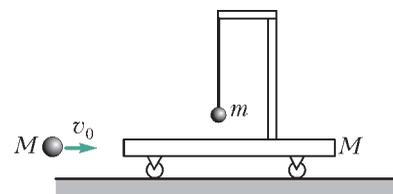


Рис. 18

После столкновения, в тот момент когда нить, на которой подвешен шарик, отклонилась на максимальный угол от вертикали, скорость тележки была  $v = 4$  м/с. Какова была скорость шара  $v_0$  до столкновения? Длительность столкновения шара с тележкой считать очень малой.

6 (Олимпиада «Ломоносов», 2015). Достаточно длинная доска массой  $M$  движется поступательно вдоль своей длинной стороны со скоростью  $v_0$ . В центр доски аккратно кладут груз массой  $m$ . Коэффициент трения между грузом и доской  $\mu$ . Определите максимальное смещение груза относительно доски.

## ОЛИМПИАДЫ

# LVII Международная математическая олимпиада

С 6 по 16 июля 2016 года в Гонконге (КНР) проводилась LVII Международная математическая олимпиада (ММО). Гонконг — один из немногих городов мира, которому выпала честь дважды принимать ММО (первый раз — в 1994 году). Участники олимпиады проживали в студенческом городке, расположенном ярусами на горе, с которой открывался красивый вид на один из многочисленных заливов Южно-Китайского моря.

ММО является одним из самых крупных интеллектуальных соревнований школьников. В 2016 году в олимпиаде приняли участие 602 победителя национальных олимпиад из 109 стран мира.

В этом году команду России составили выпускники школы *Павел Губкин* (Санкт-Петербург), москвичи *Руслан Салимов*, *Иван Фролов* и *Григорий Юргин*, а также десятиклассники *Георгий Вепрев* (Рыбинск, Ярославская обл.) и *Никита Карагодин* (Санкт-Петербург).

Ведущие позиции российской олимпиадной математической школы были подтверждены включением в варианты ММО сразу двух задач из числа предложенных нашей страной. При этом задача 5 (авторы Н.Агаханов, И.Богданов) была признана международным жюри лучшей задачей по алгебре в шорт-листе (списке из 30 задач, отобранных задачей комитетом для олимпиады), а задача 3 (автор А.Гайфуллин, абсолютный победитель ММО в 2000 году) — и самой сложной, и самой красивой задачей олимпиады.

Российская сборная выступила на олимпиаде достаточно успешно, уступив по числу завоеванных золотых медалей только команде США. А Григорий Юргин оказался в числе 14 участников олимпиады, сумевших решить задачу 3.

Завершающий этап подготовки команды к ММО — летние учебно-тренировочные сборы — как и в прошлом году, проходил в Образовательном центре «Сириус» (Сочи).

Занятия с командой проводили преподаватели сборов: доцент МФТИ, к.ф.-м.н. *И.И.Богданов*, педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга, к.ф.-м.н. *С.Л.Берлов*, преподаватель мехмата МГУ им. М.В.Ломоносова, к.ф.-м.н. *А.А.Глазырин*, педагог дополнительного образования Санкт-Петербурга *А.С.Голованов*, профессор МФТИ, д.ф.-м.н. *В.Л.Дольников*, доцент МФТИ, к.ф.-м.н. *П.А.Кожевников*, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. Стеклова РАН *Ф.В.Петров*, директор и педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга, к.ф.-м.н. *М.Я.Пратусевич*, педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга *К.А.Сухов*, доцент МФТИ, к.п.н. *Д.А.Терешин*, программист *Г.Р.Челноков*.

Руководители команды благодарят *Дмитрия Юрьевича Дойхена*, который много лет поддерживает команду России в международных математических соревнованиях.

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Григорий Юргин	7	2	7	7	7	3	33	Золотая
Руслан Салимов	7	7	1	7	7	2	31	Золотая
Иван Фролов	7	7	1	7	7	1	30	Золотая
Павел Губкин	7	7	1	7	7	0	29	Золотая
Никита Карагодин	7	2	0	6	7	1	23	Серебряная
Георгий Вепрев	7	3	0	7	2	0	19	Бронзовая

Здесь приведена таблица с результатами выступления нашей сборной (каждая задача оценивалась из 7 баллов) и командные результаты лучших 20 команд. Полная информация о результатах на международных математических олимпиадах имеется на официальном сайте олимпиады: [www.imo-official.org](http://www.imo-official.org)

Рейтинг	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			Золото	Серебро	Бронза
1	США	214	6	0	0
2	Южная Корея	207	4	2	0
3	КНР	204	4	2	0
4	Сингапур	196	4	2	0
5	Тайвань	175	3	3	0
6	КНДР	168	2	4	0
7	Россия	165	4	1	1
7	Великобритания	165	2	4	0
9	Гонконг	161	3	2	1
10	Япония	156	1	4	1
11	Вьетнам	151	1	4	1
12	Канада	148	2	2	1
12	Таиланд	148	2	2	1
14	Венгрия	145	1	3	2
15	Италия	138	1	3	0
15	Бразилия	138	0	5	1
17	Филиппины	133	2	2	0
18	Болгария	132	0	3	3
19	Германия	131	0	3	3
20	Индонезия	130	0	3	3
20	Румыния	130	0	5	1

### Задачи олимпиады

**1.** Дан треугольник  $BCF$  с прямым углом при вершине  $B$ . Точка  $A$  на прямой  $CF$  такова, что  $FA = FB$  и  $F$  лежит между  $A$  и  $C$ . Точка  $D$  выбрана так, что  $DA = DC$  и  $AC$  — биссектриса угла  $DAB$ . Точка  $E$  выбрана так, что  $EA = ED$  и  $AD$  — биссектриса угла  $EAC$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $CF$ . Пусть точка  $X$  такова, что  $AMXE$  — параллелограмм (в котором  $AM \parallel EX$  и  $AE \parallel MX$ ). Докажите, что прямые  $BD$ ,  $FX$  и  $ME$  пересекаются в одной точке.

*Бельгия*

**2.** Найдите все положительные целые  $n$ , для которых в каждую клетку таблицы  $n \times n$  можно записать ровно одну из букв  $I$ ,  $M$  или  $O$  так, что:

- в каждой строке и в каждом столбце ровно треть составляют буквы  $I$ , ровно треть составляют буквы  $M$  и ровно треть составляют буквы  $O$ ; а также

- на каждой из диагоналей, количество клеток которой кратно трем, ровно треть составляют буквы  $I$ , ровно треть составляют буквы  $M$  и ровно треть составляют буквы  $O$ .

*Примечание.* Если строки и столбцы таблицы  $n \times n$  пронумерованы числами от 1 до  $n$  в обычном порядке, то каждой



Слева направо: Г.Вепрев, Н.Карагодин, П.Губкин, Г.Юргин, И.Фролов, Р.Салимов

клетке соответствует пара положительных целых чисел  $(i, j)$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ . Для  $n > 1$  в таблице суммарно есть  $4n - 2$  диагоналей двух типов. Любая диагональ первого типа состоит из клеток  $(i, j)$ , для которых сумма  $i + j$  постоянна, а любая диагональ второго типа состоит из клеток  $(i, j)$ , для которых разность  $i - j$  постоянна.

Австралия

3. См. задачу M2445 «Задачника «Кванта».

4. Назовем множество, состоящее из положительных це-

лых чисел, *хрупким*, если оно состоит не менее чем из двух элементов и каждый его элемент имеет общий простой делитель хотя бы с одним из остальных элементов этого множества. Пусть  $P(n) = n^2 + n + 1$ . Найдите наименьшее положительное целое  $b$ , для которого найдется неотрицательное целое  $a$  такое, что множество

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

является хрупким.

Люксембург

5. См. задачу M2444 «Задачника «Кванта».

6. На плоскости расположено  $n \geq 2$  отрезков так, что любые два из них пересекаются по внутренней точке, а никакие три из них не имеют общей точки.

Иван выбирает один из концов каждого отрезка и сажает в него лягушку лицом к другому концу этого отрезка. Затем он  $n - 1$  раз хлопает в ладоши. При каждом хлопке каждая из лягушек немедленно прыгает вперед в следующую точку пересечения на ее отрезке. Лягушки никогда не меняют направления своих прыжков. Иван хочет изначально расставить лягушек так, чтобы никакие две из них никогда не оказались в одной точке пересечения одновременно.

а) Докажите, что Иван всегда может добиться желаемого, если  $n$  нечетно.

б) Докажите, что Иван никогда не сможет достичь желаемого, если  $n$  четно.

Чехия

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, М.Пратусевич, К.Сухов, Д.Терёшин

## XLVII Международная физическая олимпиада

Международная олимпиада школьников по физике в 2016 году проходила в Швейцарии, в городе Цюрихе. На олимпиаду приехали 450 школьников из 90 стран мира. Вместе с ними в работе олимпиады приняли участие 250 взрослых членов делегаций.

Участникам олимпиады предлагались три теоретические задачи (теоретический тур) и две экспериментальные задачи (экспериментальный тур). Все задачи оценивались по 10 баллов. Таким образом, каждый участник мог набрать максимум 50 баллов.

В сборную России вошли:

*Александр Артемьев* (Киров, Кировский физико-математический лицей),

*Максим Елисеев* (Мордовия, Республиканский лицей для одаренных детей),

*Илья Кочергин* (Москва, лицей «Вторая школа»),

*Иван Утешев* (Мордовия, Республиканский лицей для одаренных детей),

*Василий Югов* (Пермь, школа 146 с углубленным изучением математики, физики, информатики).

В неофициальном командном зачете наша команда, набрав 207,8 баллов, заняла четвертое место, уступив Китаю (231,3 б.), Южной Корее (225,8 б.) и Тайваню (211,6 б.).

Вот результаты наших участников:

А.Артемьев (46,9 б.) — золотая медаль и лучший в мире результат по решению теоретических задач,

И.Кочергин (41,4 б.) — золотая медаль,

В.Югов (41 б.) — золотая медаль,



Слева направо: А.А.Воронов (руководитель команды), В.Югов, А.Артемьев, М.Елисеев, И.Кочергин, И.Утешев, М.Н.Осин (руководитель команды)

И.Утешев (40 б.) — золотая медаль,

М.Елисеев (38,5 б.) — серебряная медаль.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

### Теоретический тур

**Задача 1. Две задачи по механике** (10 баллов)

**Часть А. Спрятанный диск** (3,5 балла)

Рассмотрим твердый деревянный цилиндр радиусом  $r_1$  и толщиной  $h_1$  (рис.1). Где-то внутри деревянного цилиндра

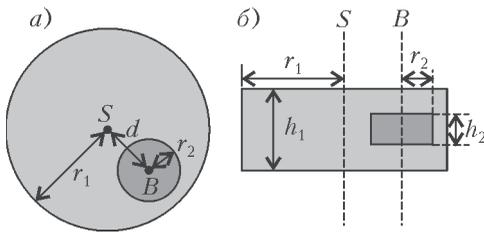


Рис. 1. а) Вид с торца цилиндра; б) вид сверху

древесина заменена на металлический диск радиусом  $r_2$  и толщиной  $h_2$ . Металлический диск установлен так, что его ось симметрии  $B$  параллельна оси симметрии  $S$  деревянного цилиндра. Диск находится на одинаковых расстояниях от верхнего и нижнего оснований деревянного цилиндра. Обозначим расстояние между осями  $S$  и  $B$  через  $d$ . Плотность древесины  $\rho_1$ , плотность металла  $\rho_2 > \rho_1$ . Суммарная масса деревянного цилиндра с металлическим диском равна  $M$ .

В этом задании поместим деревянный цилиндр на плоскость так, что он может свободно вращаться направо-налево. Нужно определить размеры и место расположения металлического диска. Считайте, что заданы следующие величины:  $r_1$ ,  $h_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $M$ . Цель задания – определить  $r_2$ ,  $h_2$  и  $d$  путем косвенных измерений.

Пусть расстояние между центром масс всей системы  $C$  и осью симметрии деревянного цилиндра  $S$  равно  $b$ . Для того чтобы определить это расстояние, рассмотрим следующий эксперимент. Деревянный цилиндр установлен на горизонтальной плоскости так, что он находится в устойчивом равновесии. Медленно наклоним плоскость на угол  $\Theta$  (рис.2). Из-за наличия трения деревянный цилиндр может свободно вращаться без проскальзывания. Он чуть-чуть скатится вниз, а затем придет в состояние устойчивого равновесия после поворота на угол  $\alpha$ , который можно измерить.

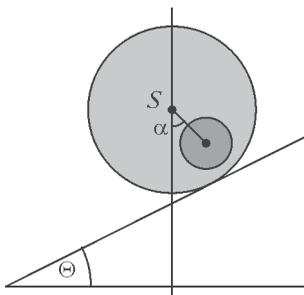


Рис. 2. Цилиндр на наклонной плоскости

**A1.** Получите выражение для  $b$  как функцию заданных величин, угла  $\alpha$  и угла наклона плоскости  $\Theta$ . (0,8 б.)

С этого момента считаем, что величина  $b$  известна. Теперь мы хотим измерить момент инерции  $I_S$  системы относительно оси симметрии  $S$ . Для этого закрепим деревянный цилиндр за его ось симметрии  $S$  с помощью жесткого стержня (рис.3). Затем повернем его относительно положения равновесия на небольшой угол  $\varphi$  и отпустим. Окажется, что  $\varphi$  меняется периодически с периодом  $T$ .

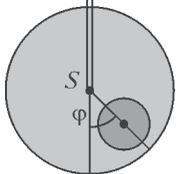


Рис. 3. Подвешенная система

**A2.** Получите уравнение движения, используя  $b$  в качестве переменной. Выразите момент инерции цилиндра  $I_S$  относительно его оси симметрии  $S$  через  $T$ ,  $b$  и заданные величины. Считайте, что отклонение от положения равновесия невелико, так что угол  $\varphi$  можно считать малым. (0,5 б.)

Используя результаты измерений из пунктов A1 и A2, определим геометрические размеры металлического диска и его положение внутри деревянного цилиндра.

**A3.** Получите выражение для расстояния  $d$  как функцию  $b$  и заданных величин. Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных  $r_2$  и  $h_2$ , так как они будут вычислены в пункте A5. (0,4 б.)

**A4.** Получите выражение для момента инерции  $I_S$  как функцию  $b$  и заданных величин. Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных  $r_2$  и  $h_2$ , т.к. они будут вычислены в пункте A5. (0,7 б.)

**A5.** Используя полученные выше результаты, запишите выражения для  $r_2$  и  $h_2$  через  $b$ ,  $T$  и заданные величины. Вы можете выразить  $h_2$  как функцию  $r_2$ . (1,1 б.)

**Часть В. Вращающаяся космическая станция** (6,5 баллов)

Алиса – космонавт, она живет на космической станции. Космическая станция представляет собой гигантское колесо радиусом  $R$  (рис.4), которое вращается вокруг своей оси, тем самым создавая для космонавтов искусственную гравитацию. Космонавты живут на внутренней стороне обода колеса. Силой гравитационного притяжения космической станции и кривизной пола можно пренебречь.

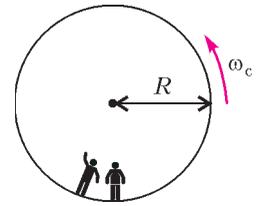


Рис. 4. Космическая станция

**B1.** С какой циклической частотой  $\omega_c$  должна вращаться станция, чтобы космонавты испытывали такое же ускорение свободного падения  $g$ , как на поверхности Земли? (0,5 б.)

Алиса поспорила со своим другом – космонавтом Бобом. Боб не верит в то, что они действительно живут на космической станции, и утверждает, что они находятся на Земле. Алиса хочет с помощью физики доказать Бобу, что они живут на вращающейся космической станции. Для этого она прикрепила груз массой  $m$  к пружине жесткостью  $k$  и заставила их колебаться. Груз колеблется только в вертикальном направлении и не может перемещаться в горизонтальном направлении.

**B2.** Полагая, что ускорение свободного падения на Земле постоянно и равно  $g$ , чему будет равна циклическая частота колебаний  $\omega_3$ , измеренная человеком на Земле? (0,2 б.)

**B3.** Какую циклическую частоту  $\omega$  измерит Алиса на космической станции? (0,6 б.)

Алиса считает, что ее опыт доказывает, что они находятся на вращающейся космической станции. Боб по-прежнему сомневается. Он утверждает, что если принять во внимание изменение силы притяжения по мере поднятия над поверхностью Земли, то получится то же самое. В дальнейших заданиях мы изучим вопрос, прав ли Боб.

**B4.** Получите выражение для ускорения свободного падения  $g(h)$  для небольших высот  $h$  над поверхностью Земли и вычислите циклическую частоту колебаний  $\omega_3$  колеблющегося груза (достаточно использовать линейное приближение). Обозначьте радиус Земли  $R_3$ . Вращением Земли можно пренебречь. (0,8 б.)

Разумеется, для данной космической станции Алиса обнаружила, что пружинный маятник колеблется с той частотой, которую предсказал Боб.

**B5.** Для какого радиуса космической станции  $R$  частота колебаний  $\omega$  совпадает с частотой колебаний  $\tilde{\omega}_3$  на поверхности Земли? Выразите свой ответ через  $R_3$ . (0,3 б.)

Раздраженная упрямством Боба, Алиса решила провести эксперимент, чтобы доказать свою точку зрения. Для этого она залезла на башню высотой  $H$  от пола и уронила груз. Этот

эксперимент можно рассматривать во вращающейся системе координат, а также в инерциальной системе координат.

В равномерно вращающейся системе координат на космонавтов действует фиктивная сила  $\vec{F}_K$ , называемая силой Кориолиса. Эта сила, действующая на объект массой  $m$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в системе координат, вращающейся с постоянной циклической частотой  $\vec{\omega}_c$ , определяется выражением

$$\vec{F}_K = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_c.$$

Вы можете использовать это выражение в скалярном виде:

$$F_K = 2m v \omega_c \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между скоростью и осью вращения. Сила перпендикулярна как скорости, так и оси вращения. Знак силы определяется правилом правой руки, но в дальнейшем вы можете свободно выбрать его по своему усмотрению.

**В6.** Вычислите горизонтальную скорость  $v_x$  и горизонтальное смещение  $d_x$  (относительно пола башни в направлении, перпендикулярном башне) груза в момент времени, когда он ударится о пол. Можете считать, что высота  $H$  башни мала, так что ускорение, измеряемое космонавтами, постоянно во время падения. Также вы можете считать, что  $d_x \ll H$ . (1,1 б.)

Для получения хороших результатов Алиса решила провести этот опыт, используя гораздо более высокую башню, чем раньше. К ее удивлению, груз упал на пол около основания башни, т.е.  $d_x = 0$ .

**В7.** Найдите минимальную высоту башни, для которой может произойти, что  $d_x = 0$ . (1,3 б.)

Алиса хочет предпринять последнюю попытку убедить Боба. Она хочет использовать свой пружинный маятник, чтобы показать влияние силы Кориолиса. Для этого она переделала установку: прикрепила пружину к кольцу, которое может свободно скользить по горизонтальному стержню вдоль оси  $x$  без трения. Сама пружина колеблется в направлении  $y$ . Стержень параллелен полу и перпендикулярен оси вращения космической станции. Плоскость  $xy$ , таким образом, перпендикулярна оси вращения, а ось  $y$  направлена к центру вращения станции.

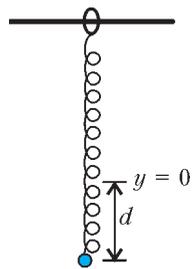


Рис. 5. Установка

**В8.** Алиса оттянула груз на расстояние  $d$  вниз от положения равновесия  $x = 0$ ,  $y = 0$ , а затем отпустила (рис.5). Приведите алгебраические выражения для  $x(t)$  и  $y(t)$ . Величину  $\omega_c d$  можно считать малой. Можно пренебречь силой Кориолиса для движения вдоль оси  $y$ . Нарисуйте схематично траекторию  $(x(t), y(t))$ , отметив все характерные особенности, в частности амплитуду. (1,7 б.)

Алиса и Боб продолжают спорить...

**Задача 2. Нелинейная динамика в электрических цепях** (10 баллов)

**Введение**

Бистабильные нелинейные полупроводниковые элементы (например, тиристоры) широко используются в электронике в качестве переключателей и генераторов электромагнитных колебаний. С помощью тиристоров обычно управляют переменными токами в силовой электронике, например преобразуют мегаваттные переменные токи в постоянные. Бистабильные элементы также могут быть модельными системами для изучения самоорганизации в физике (это рассматривается в части В этой задачи), в биологии

(часть С) и в других областях современной нелинейной динамики.

В этой задаче мы изучим неустойчивости и нетривиальные динамические свойства электрических цепей, содержащих элементы с нелинейными вольт-амперными характеристиками. Мы также рассмотрим возможные применения подобных схем в электронике и в моделировании биологических систем.

**Часть А. Стационарные состояния и неустойчивости** (3 балла)

На рисунке 6 показана так называемая S-образная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента  $X$ . В диапазоне напряжений между  $U_y = 4,00$  В (удерживаемое напряжение) и  $U_n = 10,0$  В (пороговое напряжение) эта вольт-амперная характеристика многозначна. График является ломанной (каждая ветвь представляет собой отрезок). Если верхнюю ветвь графика продлить, то она пройдет через начало координат. Это приближение хорошо описывает реальные тиристоры.

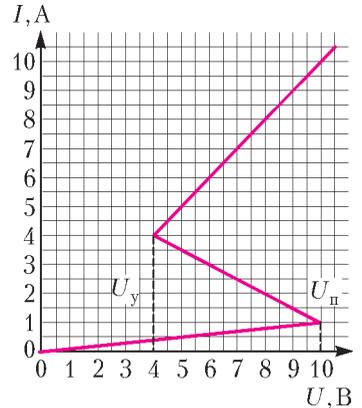


Рис. 6. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента  $X$

Если верхнюю ветвь графика продлить, то она пройдет через начало координат. Это приближение хорошо описывает реальные тиристоры.

**А1.** С помощью графика определите сопротивление  $R_v$  элемента  $X$  на верхней ветви вольт-амперной характеристики и сопротивление  $R_n$  на нижней ветви соответственно.

Средняя ветвь описывается уравнением  $I = I_0 - \frac{U}{R_{cp}}$ . Найдите значения параметров  $I_0$  и  $R_{cp}$ . (0,4 б.)

Элемент  $X$  соединен последовательно с резистором сопротивлением  $R$ , катушкой индуктивностью  $L$  и идеальным источником напряжения  $\mathcal{E}$  (рис.7). Если электрическая цепь находится в стационарном состоянии, то сила тока постоянна во времени,  $I(t) = \text{const}$ .

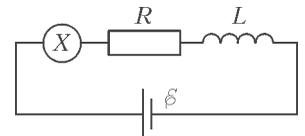


Рис. 7. Электрическая цепь с элементом  $X$ , резистором, катушкой индуктивности и источником напряжения

**А2.** Сколько возможных стационарных состояний может иметь электрическая цепь при некотором заданном значении  $\mathcal{E}$  и при  $R = 3,00$  Ом? Каким будет ответ при  $R = 1,00$  Ом? (1 б.)

**А3.** Пусть в электрической цепи  $R = 3,00$  Ом,  $L = 1,00$  мГн и  $\mathcal{E} = 15,0$  В. Определите значения силы тока  $I_{ст}$  и напряжения  $U_{ст}$  на нелинейном элементе  $X$  в стационарном состоянии. (0,6 б.)

Пусть наша электрическая цепь находится в стационарном состоянии с током  $I(t) = I_{ст}$ . Стационарное состояние называется устойчивым, если после небольшого изменения тока (увеличения или уменьшения) значение тока возвращается к стационарному состоянию. Однако если система продолжает уходить от стационарного состояния, то оно называется неустойчивым.

**А4.** Используйте численные значения, заданные в А3, и изучите стабильность стационарного состояния с током  $I(t) = I_{ст}$ . Является ли стационарное состояние устойчивым или неустойчивым? (1 б.)

**Часть В. Бистабильные нелинейные элементы в физике: радиопередатчик** (5 баллов)

В этой части мы исследуем новую схему электрической

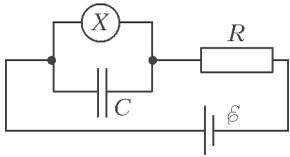


Рис. 8. Электрическая цепь, состоящая из элемента  $X$ , конденсатора, резистора и источника напряжения

цепи (рис.8). Нелинейный элемент  $X$  соединен с конденсатором емкостью  $C = 1,00$  мкФ параллельно. Этот блок включен последовательно с резистором сопротивлением  $R = 3,00$  Ом и идеальным источником постоянного напряжения  $\varepsilon = 15,0$  В. Оказывается, что в этой цепи возникают колебания. За время одного периода колебаний свойства элемента  $X$  «перескакивают» по вольт-амперной характеристике с одной ветви на другую.

**В1.** Нарисуйте цикл одного колебания на вольт-амперной характеристике, в том числе укажите направление колебаний (по часовой или против часовой стрелки). Обоснуйте свой ответ с помощью уравнений и схем. (1,8 б.)

**В2.** Найдите формулы для времен  $t_1$  и  $t_2$ , в течение которых система находится на каждой из ветвей вольт-амперной характеристики во время периода колебаний. Определите их численные значения. Найдите численное значение периода колебаний  $T$ , полагая, что временем, необходимым для скачкообразного перехода между ветвями вольт-амперной характеристики, можно пренебречь. (1,9 б.)

**В3.** Оцените среднюю мощность  $P$ , рассеянную нелинейным элементом в течение одного колебания. Достаточно привести порядок величины. (0,7 б.)

Электрическая цепь, показанная на рисунке 8, может использоваться для создания радиопередатчика. Для этого элемент  $X$  подключается к одному из концов антенны длиной  $l$ . Антенна – это длинный прямой провод. Противоположный конец провода – свободный. В антенне образуется стоячая электромагнитная волна. Скорость электромагнитной волны в антенне такая же, как и в вакууме. Передатчик настроен на основную гармонику системы с периодом  $T$  (из пункта В2).

**В4.** Каково оптимальное значение  $l$ , если считать, что оно не может быть больше 1 км? (0,6 б.)

### Часть С. Бистабильные нелинейные элементы в биологии: нейристор (2 балла)

В этой части задачи мы рассмотрим применение бистабильных нелинейных элементов к моделированию биологических процессов. Нейрон в человеческом мозге обладает следующим свойством: при возбуждении внешним сигналом он совершает одно колебание, а затем возвращается в исходное состояние. Эта свойство называется возбудимостью. Благодаря этому свойству импульсы могут распространяться в сети связанных нейронов, которые образуют нервные системы. Полупроводниковый чип, предназначенный для имитации возбудимости и распространения импульса, называется нейристором.

Попробуем смоделировать простой нейристор, используя электрическую схему с исследованным ранее нелинейным элементом  $X$ . Для этого напряжение  $\varepsilon$  в схеме на рисунке

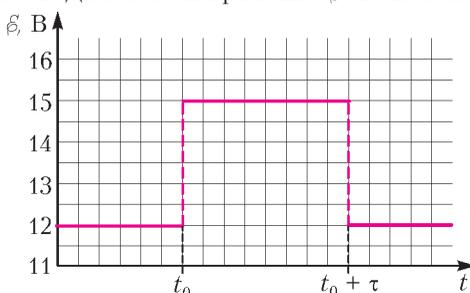


Рис. 9. Напряжение источника как функция времени

цепи (рис.8). Нелинейный элемент  $X$  соединен с конденсатором емкостью  $C = 1,00$  мкФ параллельно. Этот блок включен последовательно с резистором сопротивлением  $R = 3,00$  Ом и идеальным источником постоянного напряжения  $\varepsilon = 15,0$  В. Оказывается, что в этой цепи возникают колебания.

За время одного периода колебаний свойства элемента  $X$  «перескакивают» по вольт-амперной характеристике с одной ветви на другую.

**В1.** Нарисуйте цикл одного колебания на вольт-амперной характеристике, в том числе укажите направление колебаний (по часовой или против часовой стрелки). Обоснуйте свой ответ с помощью уравнений и схем. (1,8 б.)

**В2.** Найдите формулы для времен  $t_1$  и  $t_2$ , в течение которых система находится на каждой из ветвей вольт-амперной характеристики во время периода колебаний. Определите их численные значения. Найдите численное значение периода колебаний  $T$ , полагая, что временем, необходимым для скачкообразного перехода между ветвями вольт-амперной характеристики, можно пренебречь. (1,9 б.)

**В3.** Оцените среднюю мощность  $P$ , рассеянную нелинейным элементом в течение одного колебания. Достаточно привести порядок величины. (0,7 б.)

Электрическая цепь, показанная на рисунке 8, может использоваться для создания радиопередатчика. Для этого элемент  $X$  подключается к одному из концов антенны длиной  $l$ . Антенна – это длинный прямой провод. Противоположный конец провода – свободный. В антенне образуется стоячая электромагнитная волна. Скорость электромагнитной волны в антенне такая же, как и в вакууме. Передатчик настроен на основную гармонику системы с периодом  $T$  (из пункта В2).

**В4.** Каково оптимальное значение  $l$ , если считать, что оно не может быть больше 1 км? (0,6 б.)

### Часть С. Бистабильные нелинейные элементы в биологии: нейристор (2 балла)

В этой части задачи мы рассмотрим применение бистабильных нелинейных элементов к моделированию биологических процессов. Нейрон в человеческом мозге обладает следующим свойством: при возбуждении внешним сигналом он совершает одно колебание, а затем возвращается в исходное состояние. Эта свойство называется возбудимостью. Благодаря этому свойству импульсы могут распространяться в сети связанных нейронов, которые образуют нервные системы. Полупроводниковый чип, предназначенный для имитации возбудимости и распространения импульса, называется нейристором.

Попробуем смоделировать простой нейристор, используя электрическую схему с исследованным ранее нелинейным элементом  $X$ . Для этого напряжение  $\varepsilon$  в схеме на рисунке

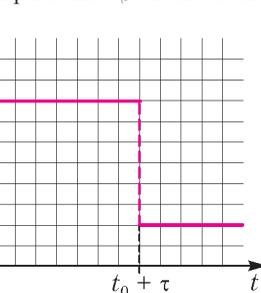


Рис. 9. Напряжение источника как функция времени

8 уменьшается до  $\varepsilon' = 12,0$  В. Колебания прекращаются, и система переходит в свое стационарное состояние. Затем напряжение быстро увеличивается до  $\varepsilon = 15,0$  В и спустя некоторое время  $\tau$  ( $\tau < T$ ) возвращается обратно к  $\varepsilon'$  (рис.9). Оказывается, что есть некоторое критическое значение  $\tau_{кр}$  такое, что поведение системы качественно отличается при  $\tau < \tau_{кр}$  и при  $\tau > \tau_{кр}$ .

**С1.** Схематически нарисуйте графики временной зависимости тока  $I_X(t)$  через нелинейный элемент  $X$  для  $\tau < \tau_{кр}$  и для  $\tau > \tau_{кр}$ . (1,2 б.)

**С2.** Найдите выражение для критического времени  $\tau_{кр}$  и его численное значение, при котором происходит изменение поведения системы. (0,6 б.)

**С3.** Является ли схема нейристором при  $\tau = 1,00 \cdot 10^{-6}$  с? (0,2 б.)

### Задача 3. Большой адронный коллайдер (10 баллов)

В этой задаче рассматривается ускоритель элементарных частиц БАК – Большой адронный коллайдер (в ЦЕРНе). В коллайдере два пучка частиц ускоряются до высоких энергий. Они удерживаются на круговой траектории ускорителя сильным магнитным полем, а затем сталкиваются друг с другом. Протоны не распределены равномерно по кольцу коллайдера, а собраны в так называемые сгустки. Образовавшиеся в результате столкновений частицы наблюдаются с помощью больших детекторов. Некоторые параметры коллайдера приведены в таблице 1.

Таблица 1

Кольцо БАК	
Длина окружности кольца	26659 м
Количество сгустков в протонном пучке	2808
Число протонов в сгустке	$1,15 \cdot 10^{11}$
Протонные пучки	
Энергия протонов	7,00 ТэВ
Энергия в системе центра масс	14,0 ТэВ

В физике элементарных частиц используются следующие единицы измерения для энергии, импульса и массы. Энергия измеряется в электрон-вольтах (эВ):  $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Дж. Импульс измеряется в эВ/с, а масса – в эВ/с<sup>2</sup>, где  $c$  – скорость света в вакууме. Так как 1 эВ – очень малая величина, то наряду с ним используют МэВ (1 МэВ =  $10^6$  эВ), ГэВ (1 ГэВ =  $10^9$  эВ) или ТэВ (1 ТэВ =  $10^{12}$  эВ).

В части А обсуждаются вопросы, связанные с ускорением протонов и электронов. Часть В посвящена идентификации частиц, образующихся в результате столкновений.

### Часть А. Ускоритель БАК (6 баллов)

**Ускорение.** Рассмотрим ускорение протонов напряжением  $U$  до скоростей, очень близких к скорости света, пренебрегая потерями энергии на излучение или на столкновения с другими частицами.

**А1.** Получите точную формулу для конечной скорости  $v$  протонов через ускоряющее напряжение  $U$  и физические постоянные. (0,7 б.)

В будущем планируется использовать протоны из БАК для столкновения с электронами с энергией 60,0 ГэВ.

**А2.** Для частиц с высокой энергией и малой массой относительное отклонение  $\Delta = (c - v)/c$  конечной скорости  $v$  от скорости света  $c$  очень мало. Найдите первое приближение для  $\Delta$  и вычислите его для электронов с энергией 60,0 ГэВ.

Выразите ответ через ускоряющее напряжение  $U$  и физические константы. (0,8 б.)

Снова рассмотрим протоны в БАК. Считайте, что туннель, в котором движутся пучки, имеет форму окружности.

**A3.** Найдите индукцию однородного магнитного поля  $B$ , необходимого для поддержания протонного пучка на круговой траектории. Выражение должно содержать только энергию протонов  $E$ , длину окружности  $L$ , физические постоянные и числа. Используйте только такие приближения, которые не изменяют результат с точностью до последней значащей цифры. Вычислите магнитную индукцию  $B$  для энергии протонов  $E = 7,00$  ТэВ, пренебрегая взаимодействием протонов. (1 б.)

**Мощность излучения.** Заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает энергию в виде электромагнитных волн. Мощность излучения  $P$  заряженной частицы, движущейся по окружности с постоянной угловой скоростью, зависит только от ее ускорения  $a$ , заряда  $q$ , скорости света  $c$  и электрической постоянной  $\epsilon_0$ .

**A4.** Найдите выражение для мощности излучения  $P$  методом размерностей. (1 б.)

В настоящей формуле для мощности излучения содержится множитель  $1/(6\pi)$ , еще один дополнительный множитель  $\gamma^4$  дает теория относительности, где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

**A5.** Для энергии протонов  $E = 7,00$  ТэВ вычислите полную излучаемую мощность  $P_n$  большого адронного коллайдера. Пользуйтесь целесообразными приближениями. (1 б.)

**Линейное ускорение.** В ЦЕРНе изначально покоящиеся протоны ускоряются с помощью разности потенциалов  $U = 500$  МэВ в линейном ускорителе длиной  $d = 30,0$  м.

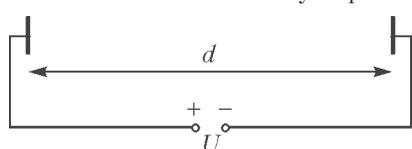


Рис. 10. Схема ускорительного блока

Считайте, что электрическое поле однородно. Линейный ускоритель можно представить в виде двух пластин (рис. 10).

**A6.** Определите время  $T$  движения протонов в электрическом поле. (1,5 б.)

**Часть В. Идентификация частиц (4 балла)**

Чтобы правильно интерпретировать процессы взаимодействия при столкновениях, нужно уметь определять, какие высокоэнергетические частицы при этом образуются. Один из простых методов – измерить время  $t$ , которое требуется частице с известным импульсом для прохождения расстояния  $l$  в так называемом время-пролетном (ВП) детекторе. В таблице 2 приводится список частиц, которые обычно идентифицируются в детекторе, и их массы.

**В1.** Выразите массу частицы  $m$  через импульс  $p$ , расстояние  $l$  и время пролета  $t$ , считая, что частицы имеют элементарный заряд  $e$  и движутся прямолинейно со скоростью, близкой к  $c$ , перпендикулярно обеим плоскостям детектирования (рис.11). (0,8 б.)

Таблица 2

Частица	Масса, МэВ/ $c^2$
Дейтрон	1876
Протон	938
Заряженный К-мезон	494
Заряженный $\pi$ -мезон	140
Электрон	0,511

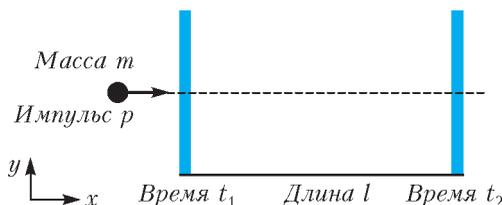


Рис. 11. Схема время-пролетного детектора

**В2.** Вычислите минимальную длину ВП-детектора  $l$ , которая позволяет надежно отличить заряженный К-мезон от заряженного  $\pi$ -мезона, если импульс каждой частицы  $1,00$  ГэВ/ $c$ . Для надежного различения частиц необходимо, чтобы разница во временах пролета превышала временное разрешение детектора более чем в три раза. Типичное разрешение составляет  $150$  пс ( $1$  пс =  $10^{-12}$  с). (0,7 б.)

Ниже рассматривается идентификация частиц в двухступенчатом детекторе, состоящем из трекового детектора и ВП-детектора (рис. 12). Трековый детектор регистрирует траек-

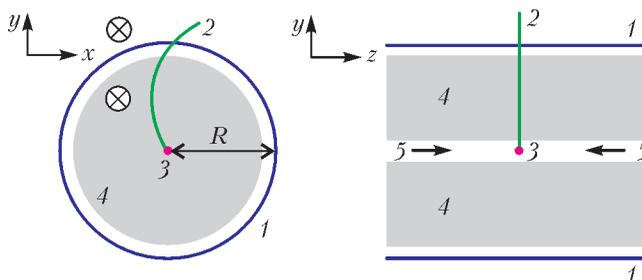


Рис. 12. Экспериментальная установка: 1 – трубка ВП-детектора, 2 – траектория, 3 – точка столкновения, 4 – трековый детектор, 5 – протонные пучки,  $\otimes$  – магнитное поле

торию (трек) заряженной частицы, пролетающей через магнитное поле, параллельное пучку протонов. Радиус траектории  $r$  позволяет определить поперечный импульс  $p_{\text{поп}}$  частицы. ВП-детектор измеряет время пролета от точки столкновения до детектора. Считайте, что все частицы, возникшие в результате столкновения, движутся перпендикулярно протонным пучкам.

**В3.** Выразите массу частицы через магнитную индукцию  $B$ , радиус время-пролетной трубки  $R$ , физические постоянные и измеренные величины: радиус траектории  $r$  и время пролета  $t$ . (1,7 б.)

В следующем пункте вам предлагается идентифицировать четыре зарегистрированные частицы. Магнитная индукция в трековом детекторе  $B = 0,500$  Тл, радиус трубки ВП-детектора  $R = 3,70$  м. Результаты измерений – в таблице 3.

Таблица 3

Частица	Радиус траектории $r$ , м	Время пролета $t$ , нс
A	5,10	20
B	2,94	14
C	6,06	18
D	2,31	25

**В4.** Вычислите массы четырех частиц и определите их тип. (0,8 б.)

Публикацию подготовили  
А.Воронов, М.Осин, В.Слободянин

# V Европейская математическая олимпиада для девушек

С 10 по 16 апреля 2016 года в Румынии проходила пятая по счету Европейская математическая олимпиада для девушек (European Girls Mathematical Olympiad – EGMO). Олимпиада проводилась в живописном городке Буштени, расположенном в горном районе на севере страны. Всего в олимпиаде приняли участие 147 школьниц из 38 стран. Помимо команд европейских стран в олимпиаде вне официального конкурса приняли участие сборные США, Мексики, Эквадора, Японии, Саудовской Аравии, Индии, Израиля.

Уровень сложности задач олимпиады был весьма высок. У большинства участников трудности вызвали даже наиболее простые задания (задачи 1 и 4), а самые трудные задачи олимпиады (задачи 3 и 6) вполне сопоставимы с задачами средней сложности на Международных математических олимпиадах.

Россию на олимпиаде EGMO представляли:

*Лялина Альбина* (Ижевск, лицей 29, 11 класс),

*Сонина Александра* (Ярославль, школа 33, 11 класс),

*Дмитриева Мария* (Москва, лицей «Вторая школа», 10 класс),

*Толокно Изабелла* (Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 10 класс).

Наши девушки показали отличный результат. Они завоевали 3 золотые и 1 серебряную медаль, заняв первое место в официальном командном зачете (набрав суммарно 122 балла). Вторыми финишировали американки (111 баллов), третье место – за девушками из Болгарии (99 баллов). Лучшей в индивидуальном рейтинге среди всех участников олимпиады стала наша Мария Дмитриева, она решила все задачи и набрала максимально возможное количество баллов.

Подробная информация об олимпиаде – на официальном сайте: [www.egmo.org](http://www.egmo.org)

## Задачи олимпиады

**1.** Пусть  $n$  – нечетное целое положительное число, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – неотрицательные действительные числа. Докажите, что

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

где  $x_{n+1} = x_1$ .

*Нидерланды*

**2.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $X$ . Точки  $C_1$ ,  $D_1$  и  $M$  – середины отрезков  $CX$ ,  $DX$  и  $CD$  соответственно. Прямые  $AD_1$  и  $BC_1$  пересекаются в точке  $Y$ , а прямая  $MY$  пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$  в различных точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что прямая  $XU$  касается окружности, описанной около треугольника  $EFX$ .

*Белоруссия*

**3.** Пусть  $m$  – целое положительное число. Дана таблица  $4m \times 4m$ , состоящая из единичных клеток. Две различные клетки назовем *родственными*, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Никакая клетка не является родственной для самой себя. Некоторые клетки



Слева направо: А.Лялина, М.Дмитриева, А.Сонина, И.Толокно,

были окрашены в синий цвет, при этом оказалось, что у каждой клетки таблицы не менее двух родственных ей синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество синих клеток.

*Мексика*

**4.** См. задачу M2423 «Задачника «Кванта».

**5.** Пусть даны целые числа  $k$  и  $n$  такие, что  $k \geq 2$  и  $k \leq n \leq 2k - 1$ . На клетчатую доску размером  $n \times n$  последовательно выкладывают плитки любого из двух видов  $1 \times k$  и  $k \times 1$  так, что каждая плитка покрывает ровно  $k$  клеток и никакие две плитки не перекрываются. Этот процесс заканчивается, когда невозможно добавить ни одной плитки. Найдите наименьшее возможное количество выложенных плиток.

*Нидерланды*

**6.** Пусть  $S$  – множество всех положительных целых чисел  $n$  таких, что число  $n^4$  делится хотя бы на одно из чисел  $n^2 + 1$ ,  $n^2 + 2$ , ...,  $n^2 + 2n$ . Докажите, что среди элементов множества  $S$  бесконечно много чисел каждого из видов  $7m$ ,  $7m + 1$ ,  $7m + 2$ ,  $7m + 5$ ,  $7m + 6$  и нет ни одного числа вида  $7m + 3$  и вида  $7m + 4$ , где  $m$  – целое.

*Нидерланды*

Публикацию подготовили  
Н.Агаханов, И.Васильева, П.Кожевников

# XXIII Международная олимпиада «Туймаада». Физика

В июле 2016 года в Якутске прошла XXIII Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Участники олимпиады по физике соревновались, как обычно, в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров: теоретического и экспериментального. Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к выпускному классу).

Российские и зарубежные школьники, желающие испытать свои силы на задачах такого уровня в следующем году, и их преподаватели могут согласовать организационные вопросы, связанные с участием в олимпиаде, с жюри по физике (fiztuy@mail.ru). Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут прислать их методической комиссии (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и после олимпиады будут опубликованы в образовательных журналах.

Статья подготовлена на основании методического пособия: А.В.Чудновский, Р.Е.Аванесян, А.Б.Акимов, А.И.Бычков, С.Д.Варламов, В.В.Ефимов, Г.М.Тарнопольский, О.Ю.Шведов. XXIII Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур. Методическое пособие/под ред. А.В.Чудновского – М.-Якутск, 2016.

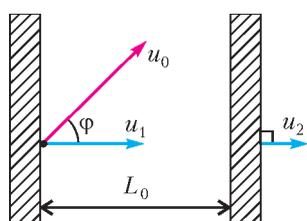
Ниже приводятся теоретические задачи для старшей лиги и список дипломантов олимпиады.

## Теоретический тур

### СТАРШАЯ ЛИГА

#### Задача 1. Неопределившийся шарик

Две большие гладкие плиты движутся сонаправленно и перпендикулярно своим плоскостям с постоянными скоростями  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  (см. рисунок).



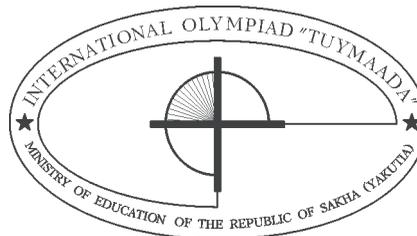
Маленький легкий шарик движется между плитами, упруго отражаясь от них. В начальный момент времени расстояние между плитами равно  $L_0$ , а шарик касается догоняющей плиты и имеет скорость  $\vec{u}_0$ , направленную под углом  $\varphi$  к скорости  $\vec{u}_1$  этой плиты. Известно соотношение между скоростями:  $u_0 \cos \varphi > u_1 > u_2 > 0$ .

1) Найдите модуль перемещения  $s_\infty$  шарика к моменту, когда он сделает очень много соударений с плитами.

2) Найдите модуль перемещения  $s_n$  шарика сразу после  $n$ -го соударения с плитой для любого заданного  $n$ .

#### Задача 2. Частица в поле

В результате взаимодействия только с однородным магнитным полем с индукцией  $B$  частица массой  $m$  с зарядом  $q$  летит с постоянной по модулю скоростью  $v$  вдоль траектории, имеющей радиус кривизны  $R$ .



1) Укажите условие, при котором исходные данные непротиворечивы.

2) Оцените расстояние  $l$ , на которое сместится частица за большое время  $t$ .

3) Найдите критерий применимости использованного приближения.

4) Определите точное расстояние  $L$ , на которое сместится частица за произвольное время  $t$ .

#### Задача 3. Перестановка слов

Под каким положительным углом  $\varphi$  к горизонту нужно бросить тело, чтобы за время его полета до возвращения на исходную высоту среднее значение модуля вектора тангенциального ускорения совпало с модулем среднего значения вектора нормального ускорения? Сопротивление воздуха не учитывайте. В этой задаче не требуется давать ответ в общем виде, а необходимо и достаточно получить искомое значение с точностью до десятых долей углового градуса.

#### Задача 4. Треугольная пластина

Пластина в форме правильного треугольника со стороной  $l\sqrt{2}$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найдите напряженность  $E$  электрического поля в точке  $O$ , расположенной на одинаковом расстоянии  $l$  от каждой вершины пластины.

#### Задача 5. Комнатная термодинамика

**A.** В окне закрытой комнаты установлено бронированное стекло толщиной  $h_1 = 8$  см, имеющее коэффициент теплопроводности  $\kappa_1 = 0,3$  Вт/(м·К). Температура на улице  $T_1 = -20$  °С, а в комнате поддерживают температуру  $T_2 = 20$  °С. Считайте, что около окна образуется переходный слой воздуха толщиной  $h_2 = 2$  см, температура которого меняется от температуры комнаты до температуры внутренней стороны окна. Какая относительная влажность  $\varphi$  установится в комнате, если изначально воздух был достаточно влажный? Коэффициент теплопроводности воздуха примите равным  $\kappa_2 = 0,025$  Вт/(м·К).

**B.** Найдите отношение  $x$  скоростей падения температуры от начального значения  $T = 15$  °С сразу после отключения отопления в закрытой комнате с сухим воздухом и в точно такой же комнате с максимально влажным воздухом, если не учитывать теплоемкость стен и предметов в комнате. Атмосферное давление  $p_0 = 100$  кПа. Удельная теплота парообразования воды при низких температурах составляет  $L = 2,5$  МДж/кг.

*Примечание.* В задачах **A** и **B** речь идет о разных комнатах. Давление насыщенного пара при некоторых температурах приведено в таблице.

$T, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$						
0	611,0	11	1313	0	611,0	-11	264,9
1	657,3	12	1402	-1	568,6	-12	244,6
2	705,8	13	1498	-2	528,3	-13	225,6
3	758,4	14	1598	-3	490,6	-14	208,0
4	813,4	15	1706	-4	455,2	-15	191,6
5	872,5	16	1818	-5	422,2	-16	176,4
6	935,1	17	1938	-6	391,3	-17	162,2
7	1002	18	2064	-7	362,4	-18	149,1
8	1073	19	2198	-8	335,4	-19	137,0
9	1148	20	2338	-9	310,3	-20	125,7
10	1228			-10	286,8		

### Дипломанты олимпиады

#### по младшей лиге

участник

*Алина Гаухартас* (Казахстан)

*Андрей Николаев* (Республика Мордовия)

*Андрей Целин* (Республика Мордовия)

*Вадим Сорокин* (Пензенская область)

*Дияр Туленов* (Казахстан)

*Константин Дьяконов* (Республика Татарстан)

*Станислав Цанаев* (Республика Мордовия)

диплом

абсолютный победитель

I

II

II

III

III

III

#### по старшей лиге

участник

*Алексей Лужнов* (Самарская область)

*Азамат Калоев* (Республика Северная Осетия-Алания)

*Петру Котруц* (Румыния)

*Шынгыс Айтказинов* (Казахстан)

*Анка Драгулеску* (Румыния)

*Игорь Сивцев* (Республика Саха (Якутия))

*Андрей Хрестин* (Республика Мордовия)

диплом

абсолютный победитель

I

II

II

III

III

публикацию подготовили А.Чудновский, Ю.Григорьев

## ИНФОРМАЦИЯ

### Очередной набор в ВЗМШ



Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ), входящая в структуру московского лицея «Вторая школа» и работающая при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, в пятьдесят третий раз проводит набор учащихся.

Эта школа была создана по инициативе академика И.М.Гельфанда в 1964 году. Многие годы И.М.Гельфанд возглавлял Научный совет школы.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, доступное для всех желающих, причем не только для школьников, пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окон-

чании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2017 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике,

физике и химии, но и в биологии, филологии и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Вы сможете получать наши задания как обычной, так и электронной почтой, а также принимать участие в апробации новых интерактивных учебных программ.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2017 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали о ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить*.

*Адрес ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ, на прием (укажите отделение)*

*Телефон: (495) 939-39-30*

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на обще-школьном сайте ВЗМШ:

[www.vzms.ru](http://www.vzms.ru)

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

[vzms@yandex.ru](mailto:vzms@yandex.ru)

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ готова обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая

под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2017 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2017 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д.21/7, Северо-западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адреса филиалов математического отделения ВЗМШ:  
241035 г. Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: [brotek@mail.ru](mailto:brotek@mail.ru)

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ, тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: [sms@extedu.kirov.ru](mailto:sms@extedu.kirov.ru), сайт: <http://cdoosh.kirov.ru>

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: [olimp@olimp.edu.yar.ru](mailto:olimp@olimp.edu.yar.ru)

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ВЗМШ и условия вступительных контрольных работ.

### Отделение математики

Мы заочно обучаем математике школьников 6–11 классов.

На индивидуальное обучение принимаем по результатам вступительной работы и высылаем пособия. Куратор руководит обучением: составляет программу, проверяет задания и отвечает на вопросы.

На обучение в группе («Коллективный ученик») принимаем по заявлению руководителя группы. Высылаем пособия на всю группу. Ученики присылают на проверку в ВЗМШ одну коллективную работу по каждой теме.

Принимаем учащихся на все курсы с 0 по 5 (т.е. учеников 6–11 классов). Заявление и вступительную работу присылайте по электронному адресу приема: [priem@math-vzms.org](mailto:priem@math-vzms.org) или на почтовый адрес школы: 119234 Москва В-234, Воробьевы горы, МГУ, математическое отделение ВЗМШ.

Наш сайт: <http://www.math-vzms.org/>

Наш телефон: +7 495-939-39-30

Если вы хотите учиться индивидуально, выполните вступительную работу, условия задач которой расположены ниже. Решения задач, с которыми удалось справиться, нужно записать в обычной ученической тетради в клетку и выслать простой бандеролью (пожалуйста, не сворачивайте тетрадь в трубку!) вместе с заявлением о приеме в адрес школы. Вступительные работы и заявления принимаются также по электронной почте. В этом случае работа должна быть оформлена в виде файла формата .doc или .pdf, можно также отсканировать текст работы и прикрепить его к заявлению о приеме.

Заявление о приеме пишется в свободной форме. Сообщите фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование (нам было бы удобно прочесть: «С 1 сентября 2017 года я буду учиться в ... классе»), полный почтовый адрес с индексом, откуда узнали о ВЗМШ (из интернета, из журналов «Квант», «Наука и жизнь», от учителя, родителей, друзей или из других источников). Сообщите, пожалуйста, адрес своей электронной почты, если она имеется. Не забудьте указать, что вы поступаете на отделение математики.

*Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2017 года.*

Во вступительной работе рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса (имеется в виду тот класс, в котором вы предполагаете учиться с 1 сентября 2017 года) эта задача предназначается. Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные более старшим классам. Не торопитесь, а если задачи не получаются, возвращайтесь к ним несколько раз. До 15 июня времени еще достаточно. Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, тогда присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

#### Задачи

**1 (6–7).** В соревновании участвовали 40 стрелков. Первый выбил 50 очков, второй – 70, третий – среднее арифметическое очков первых двух, четвертый – среднее арифметическое первых трех и т.д.: каждый следующий выбил среднее арифметическое очков всех предыдущих. Сколько очков выбил 37-й стрелок?

**2 (6–7).** Два спортсмена при подготовке к мировому чемпионату должны ежедневно одинаковое целое число часов бегать по дорожкам стадиона. Тренировку спортсмены начинают одновременно, но придерживаются разных графиков ее проведения. Первый спортсмен после каждой двадцатиминутной пробежки две минуты восстанавливает дыхание, второй отдыхает одну минуту после каждых десяти минут непрерывного бега. Кто из спортсменов раньше закончит свой бег?

**3 (6–8).** В 18 веке в России установилось регулярное движение почтовых карет по маршруту Петербург – Москва. Каждый день в полдень из Петербурга выезжала карета с почтой и приезжала в Москву ровно через 6 дней и тоже в полдень. Точно по такому же расписанию выезжали кареты из Москвы. Кареты в обоих направлениях следуют одной и той же дорогой. Сколько почтовых карет встретит выезжающая на дистанцию карета?

**4 (6–8).** Дорога из дома до школы занимает у Ларисы ровно 16 мин. Однажды по дороге в школу она вспомнила, что забыла дома учебник. Если она продолжит путь в школу, она придет за 2 мин до звонка, а если вернется за учебником, то придет через 6 мин после звонка (ходит она всегда с одной и той же скоростью). Какую часть пути от дома до школы прошла Лариса, когда вспомнила об учебнике?

**5 (6–8).** Учитель физики положил на две чашки весов 10 гирь массами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г, 6 г, 7 г, 8 г, 9 г, 10 г так, что одна чашка перевесила. Затем он стал убирать по одной гире, причем каждый раз перевешивала другая чашка. Какая гиря могла остаться последней?

**6 (7–9).** Сколько существует трехзначных чисел с суммой цифр 8?

**7 (8–9).** Дан правильный пятиугольник  $ABCDE$ . Точка  $F$  симметрична точке  $E$  относительно диагонали  $AD$ . Можно ли выложить всю плоскость пятиугольниками, равными  $ABCDF$ ?

**8 (8–11).** Собранный мед заполняет несколько 50-литро-

вых бидонов. Если его разлить в 40-литровые бидоны, то понадобится на 5 бидонов больше, но один из них останется неполным. Если собранный мед разлить в 70-литровые бидоны, то понадобится на 4 бидона меньше, но снова один из них окажется неполным. Сколько 50-литровых бидонов заполняет собранный мед?

**9 (9–11).** Ленивый сочинитель задач для математических олимпиад каждый год предлагает задачу одного и того же содержания. В 2016 году задача звучит так:

Прямоугольник разбит на клетки со стороной в 1 см. В каждой клетке стоит число. Сумма всех чисел в каждой строке равна 1, сумма всех чисел в каждом столбце равна 2. Может ли площадь прямоугольника равняться 2016 см<sup>2</sup>?

Решите эту задачу. В каком году ответ к задаче станет другим?

**10 (9–11).** На прямой последовательно отложены отрезки  $AB = 2$ ,  $BC = CD = 1$ ,  $DE = 2$ . Из точки  $M$  вне этой прямой все указанные отрезки видны под равными углами. Найдите эти углы.

**11 (9–11).** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

**12 (9–11).** Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  симметричны центру  $I$  вписанной в треугольник  $ABC$  окружности относительно его сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно. Окружность, описанная около треугольника  $A_1B_1C_1$ , проходит через точку  $A$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $BC = a$ .

#### Отделение биологии

Зачисление на отделение проводится на конкурсной основе по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания.

ВЗМШ высылает учащимся пособия и задания по разным разделам биологии и проверяет их работы. Обучение для 8-классников длится 3 года, для 9-классников – 2 года.

Учащимся 8 классов необходимо решить приведенные ниже задачи 1–3 и одну из задач 4, 5, а 9-классникам – задачи 2, 3 и две из задач 4–6.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники (для седеий, взятых из интернета, – точный адрес соответствующей страницы).

Работу следует выполнить на русском языке в тетради; на обложке укажите свою фамилию, имя, отчество, полный домашний адрес с индексом, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения Приемной комиссии).

Кроме этого, работу можно выполнять в электронном виде и выслать в файле формата .doc, .docx, .rtf или .txt на наш электронный адрес: uchenikivzmsb@gmail.com

*Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2017 года.*

#### Задачи

**1.** На приусадебных участках выращивают множество растений, завезенных из дальних стран. И большинство из них благополучно выживает в наших условиях. Ясно, что эти растения имеют все шансы распространиться и жить уже независимо от человека. Но лишь незначительная часть из них в достоверно приличном количестве представлена в

«дикой» природе. Какие причины могут ограничивать распространение таких инородных растений? Если можете, для подтверждения ваших соображений используйте конкретные примеры.

2. Объясните, являются ли генетическими клонами: а) все яблоки с одной яблони; б) все картофелины с одного куста; в) все семечки из одного арбуза. В подтверждение своей точки зрения опишите биологические процессы, обеспечивающие генетическое разнообразие (или единообразие) в каждом случае.

3. Опишите возможные механизмы действия противоядий (веществ, которые вводятся в организм, чтобы свести к минимуму негативные последствия отравления тем или иным ядом).

4. Обычный анализ крови, который вам делают при периодических обследованиях в поликлинике, включает определение стандартного набора параметров. Какие болезни и физиологические расстройства могут быть выявлены на основании этого анализа? Перечислите, для каких диагностических целей необходимо определение дополнительных характеристик состава крови. Какие параметры следует измерять в каждом из этих случаев?

5. Как вы понимаете – за что присудили Нобелевскую премию по физиологии и медицине осенью 2016 года? Изложите своими словами суть открытия и его значение для дальнейшего развития медицины.

6. От чего зависит время жизни тех или иных клеток человека или другого многоклеточного организма? Объясните, что может вызывать необходимость их гибели и когда она происходит. Постарайтесь предложить как можно больше вариантов ответа.

**Отделение физики**

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2017 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0).

Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10.

На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2017 года, полный почтовый адрес (с индексом), адрес e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2017 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

E-mail отделения физики: [olphys@phys.problems.ru](mailto:olphys@phys.problems.ru)  
Интернет-сайт: <http://phys.problems.ru>

*Задачи*

1. Экспресс, двигаясь с постоянной скоростью, проезжает мимо светофора за время  $t_0 = 8$  с, а затем последовательно обгоняет две попутные электрички одинаковой длины, затрачивая на это время  $t_1 = 20$  с и  $t_2 = 15$  с. Сколько времени первая электричка будет обгонять вторую, если ее скорость в полтора раза больше, чем у второй?

2. В калориметр, содержащий воду массой  $m = 150$  г, добавляют лед. Чтобы не весь лед растаял, его нужно положить не менее  $m_1 = 50$  г, а чтобы замерзла вся вода –

не менее  $m_2 = 150$  г. Сколько нужно положить льда той же температуры, чтобы после наступления теплового равновесия его масса не изменилась?

3. Два одинаковых тела двигаются по круглому гладкому желобу. В начальный момент они находятся на одном диаметре, при этом скорость одного тела в 2 раза больше скорости другого (рис.1). Найдите, в какой точке тела столкнутся в десятый раз, если все соударения абсолютно упругие.

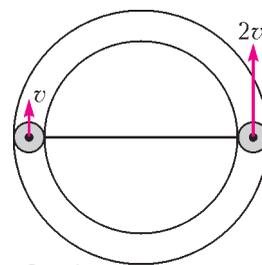


Рис. 1

4. Мячик отпускают без начальной скорости с высоты  $H = 2$  м над длинной наклонной плоскостью, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Какой будет минимальная скорость мячика в промежутке между вторым и третьим соударениями с плоскостью, если считать все соударения абсолютно упругими?

5. Стеклянная фигура в виде куба с вырезом установлена на горизонтальном столе (рис.2). Сечение фигуры представляет собой квадрат со стороной  $a$  с вырезом в форме квадрата со стороной  $a/2$ . Сверху стол освещен пучком параллельных лучей. Найдите ширину самой яркой и самой темной полосы на столе под фигурой. Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

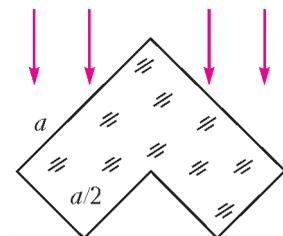


Рис. 2

6. Тело скользит по столу вдоль прямой  $AB$  под действием постоянной силы. Время прохождения гладкого участка  $AC$  вдвое меньше, чем шероховатого участка  $CB$ . Найдите среднюю скорость тела за вторую половину пути, если известно, что в точке  $C$  скорость тела составляет  $v_C = 15$  м/с, а в точках  $A$  и  $B$  она равна нулю.

7. Куб, нижняя половина которого сделана из одного материала, а верхняя – из другого, стоит на наклонной плоскости с углом  $\alpha$  при основании. При медленном увеличении  $\alpha$  до определенного значения куб переворачивается через ребро. Будет ли новое положение куба устойчивым? Считайте, что вдоль плоскости куб не проскальзывает.

8. В комнате с высотой потолка  $H = 2,2$  м бросают сверху вниз маленький мячик со скоростью  $v = 9$  м/с с расстояния  $h = 1$  м от пола. Сколько произойдет ударов мячика о потолок, если при каждом ударе о пол или потолок доля  $\alpha = 25\%$  кинетической энергии мячика переходит в тепло?

9. Какой максимальный заряд можно сообщить алюминиевому шарикку массой  $m = 10$  г при облучении его пучком электронов, если электрический пробой наступает при напряженности поля  $E = 30$  кВ/см? На сколько процентов при этом увеличится количество электронов в шарике?

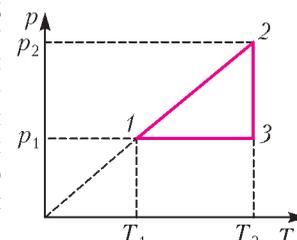


Рис. 3

10. Найдите КПД тепловой машины, работающей по циклу  $1-2-3-1$ , изображенному на  $p$ - $T$ -диаграмме (рис.3), если известно, что  $T_2 = 1,5 T_1$ .

**Отделение филологии**

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Сведения о

программах и порядке обучения высылаются также вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

**Внимание!** На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

*Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2017 года.*

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: [filologiyvzms@mail.ru](mailto:filologiyvzms@mail.ru)

#### *Вопросы*

1. О каких явлениях русского языка свидетельствуют следующие закономерности использования предлога *О/ОБ*: *об арбузе – о горохе, об укрепе – о дыне, об изюме – о лимоне, об узоре – о юге, об экране – о ёлке?*

2. Прочитайте отрывки из пушкинского «Евгения Онегина»:

Но дней минувших анекдоты  
От Ромула до наших дней  
Хранил он в памяти своей.

Евгений тотчас на свиданье  
Стремглав по почте поскакал...

Так точно старый инвалид  
Охотно клонит слух прилежный  
Рассказам юных усачей.

Найдите слова, которые во времена Пушкина имели не такое значение, как в современном русском языке. Укажите современное и устаревшее значения этих слов.

3. Найдите басню Крылова «Стрекоза и Муравей», написанную в 1808 году, и сравните ее с переводом той же басни Лафонтена, выполненным Ю.А.Нелединским-Мелецким в том же году:

#### **Стрекоза**

Лето целое жужжала  
Стрекоза, не зная забот;  
А зима когда настала,  
Так и нечего взять в рот.  
Нет в запасе, нет ни крошки,  
Нет ни червячка, ни мошки.  
Что ж? К соседу муравью  
Вздумала идти с прошеньем.  
Рассказав напасть свою,  
Так, как должно, с умилением

Просит, чтоб займы ей дал  
Чем до лета прокормиться.  
Совестью притом божится,  
Что и рост, и капитал  
Возвратит она не дале,  
Как лишь августа в начале.  
Туго муравей ссужал:  
Скупость в нем порок природный.  
«А как в поле хлеб стоял,  
Что ж ты делала?» – сказал  
Он заемщице голодной.  
«Днем и ночью, без души,  
Пела все я цело лето».  
– «Пела! весело и это.  
Ну поди ж теперь пляши».

Расскажите об общем и о различиях, проанализировав сюжет, композицию, образы, авторскую оценку и вытекающую из нее мораль, а также стихотворную форму двух басен.

4 (10–11 классы). Вспомните любимую вами картину, на которой изображена так называемая «массовая сцена». Это может быть одна из картин Сурикова или Репина, «Масленица» Кустодиева или, например, «Танцовщицы» Дега... Представьте себя свидетелем изображенного на полотне и напишите репортаж с места события или очерк. Старайтесь не нарушать законы выбранного жанра.

### **Отделение истории**

Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одним из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в гряде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Приведенные ниже задания вступительной работы нужно выполнить на двойном листе бумаги.

*Срок отправки вступительной работы – до 15 июля 2017 года.*

#### *Задание*

#### **1. Отгадайте, кто это**

- С легкой руки Фридриха II в Европе его прозвали «русский Гамлет».
- О нем сплетничали, что он внебрачный сын.
- Его отец – внук Петра I по матери и внучатый племянник Карла XII по отцу.

- Его мать – приехала в Россию 15-летней девочкой, пришла к власти в 33 года, свергнув мужа, и правила 34 года, не имея на трон законных прав.

- Главная черта его правления – мелочный деспотизм.

- Указом о трехдневной барщине он снизил себе ореол крестьянского царя.

- Во время военных смотров мог, осерчав, отправить в Сибирь прямо с плаца за нечеткий шаг, оторвавшуюся пуговицу или плохо напудренные бугли.

- Отправил 22 тысячи казаков завоевывать Индию, чтобы ослабить Англию, и только его смерть вернула солдат с дороги.

- Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит.

- Его старший сын мечтал о конституции для России, а дал ее Польше.

**2. Опишите**, не более чем в 7-ми предложениях, исторический портрет главнокомандующего русской армией в Полтавской битве.

### **Для старшеклассников, готовящихся сдавать ЕГЭ по обществознанию**

В 2017 году на отделении «История» открылся курс «Обществознание». Обществознание – это свод общественных дисциплин, изучающих все стороны деятельности чело-

века. Некоторые преподаватели называют его винегретом. Вполне удачное сравнение. Как винегрет – составное блюдо, так и обществознание состоит из разных дисциплин. Перемешиваясь, дополняя друг друга, они создают цельную картину общества.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ. В курс включены следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям будут направляться оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 15 июля 2017 года*.

В заявлении укажите: фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), e-mail, класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2017 года.

Заявление отправьте на почтовый адрес: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (отделение истории, обществознание) или на адрес электронной почты: [vzms@yandex.ru](mailto:vzms@yandex.ru)

## **Заочная физико-техническая школа при МФТИ**

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (государственного университета) (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 95 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое руководство школой осуществляют советы из преподавателей профильных кафедр МФТИ.

Обучение в школе ведется по четырем предметам научно-технической направленности – физике, математике, информатике и химии. В 8 классе изучаются только физика и математика. В 9–11 классах к этим предметам добавляются предмет «Математические основы информатики и ИКТ» (информатика) и химия. Учащиеся могут по своему выбору изучать один, два, три или четыре (в 9, 10 и 11 классах) предмета.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2017/18 учебный год проводится на заочное, очное и очно-заочное отделения.

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

**Заочное отделение (индивидуальное заочное обучение)**  
Тел./факс: (495) 408-51-45, e-mail: [zftsh@mail.mipt.ru](mailto:zftsh@mail.mipt.ru)

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по выбранным для изучения предметам. Полная программа обучения рассчитана на 4 года с 8-го по 11-й классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В течение учебного года в соответствии с программой ЗФТШ ученик будет получать по каждой теме задания по физике, математике, информатике и химии, а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для *самостоятельного решения*. Это и простые задачи, и более сложные. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ: <http://www.school.mipt.ru>

Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Срок отправки решения вступительного задания – *не позднее 1 марта 2017 года*.

Проверенные вступительные работы обратно поступающему не высылаются. Решение приемной комиссии будет выслано в июле 2017 года.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте на адрес ЗФТШ: 141700 Московская обл., г.Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ.

Вступительные задания по выбранным предметам ученик выполняет самостоятельно в *одной* школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте *простой бандеролью* или простым письмом. *На внутреннюю* сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. *На титульную* сторону тетради наклейте заполненный бланк:

Л. №															
№ задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Σ
Ф															
М															
И															
Х															

(таблица заполняется методистом ЗФТШ)

- Республика, край, область \_\_\_\_\_
- Фамилия, имя, отчество \_\_\_\_\_
- Класс, в котором учитесь \_\_\_\_\_
- Если вы уже учитесь в ЗФТШ, напишите свой личный номер \_\_\_\_\_
- Предметы, по которым выполнены задания (отметьте галочками)
 

<input type="checkbox"/>	физика
<input type="checkbox"/>	мат-ка
<input type="checkbox"/>	инф-ка
<input type="checkbox"/>	химия
- Номер школы \_\_\_\_\_
- Вид школы (обычная, лицей, гимназия, центр образования) \_\_\_\_\_
- Ф. И. О. учителей по физике \_\_\_\_\_  
по математике \_\_\_\_\_  
по информатике \_\_\_\_\_  
по химии \_\_\_\_\_
- Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail \_\_\_\_\_
- Адрес школы и телефон, e-mail \_\_\_\_\_
- Как вы узнали о ЗФТШ?  
 от учителя    от друзей    из интернета  
 из журнала «Потенциал»    из журнала «Квант»  
 другие источники \_\_\_\_\_

На конкурс ежегодно приходит более 4 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения бланка! Пишите аккуратно, лучше *наберите на компьютере и распечатайте*.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий **обязательно** вложите в тетрадь два одинаковых конверта размером 160×230 мм. Марки наклеивать не надо. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

**Очно-заочное отделение** (обучение в факультативных группах)

Тел.: (498) 744-63-51, e-mail: fakultativ@mipt.ru, zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя, тремя или четырьмя преподавателями* – физики, математики, информатики и химии, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора на бланке общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть в разделе «Очно-заочное отделение» сайта ЗФТШ), в котором должны быть указаны фамилии, имена, отчества руководителей факультативной группы по предметам и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. в алфавитном порядке полностью, с указанием класса *текущего учебного года* и итоговых оценок за вступительное задание по выбранным

предметам), *адрес, телефон, факс и e-mail школы*. Заявление и обычный конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать *до 25 мая 2017 года* на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»). Адрес ЗФТШ: *141700 Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ*. Тетради с работами учащихся проверяются учителями физики, математики, информатики и химии и в ЗФТШ *не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлению ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут в течение учебного года получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике, информатике и химии, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость (11 класс) за год.

**Очное отделение** (заочное обучение с посещением очных консультаций).

Тел.: (499) 755-55-80, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят в сентябре. Обучение ведется по трем предметам (информатика – по желанию учащегося).

Ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2017», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в феврале или начале марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также физтехшкол.

Для учащихся 8–11 классов работает субботний online-лекторий по физике и математике по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ: <http://www.school.mipt.ru>

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одинадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11 классе предметам

*Свидетельство об окончании ЗФТШ* учитывается при поступлении в МФТИ, в соответствии с правилами приема в МФТИ, как индивидуальные достижения обучающихся.

Обучение в ЗФТШ бесплатное. С 2015/16 учебного года деятельность ЗФТШ финансово поддерживается Фондом развития МФТИ. Этот фонд основан выпускниками МФТИ для поддержки приоритетных проектов родного института и является фондом целевого капитала. Подробную информацию о деятельности Фонда вы можете узнать на сайте: <http://mipt.ru/alumni/fund/>

Для учащихся Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желающим поступить туда следует выслать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д.36, ГСП, УЗФТШ. Тел.: 8-(10-38-044) 424-30-25, 8-(10-38-044) 422-95-64. Сайт УЗФТШ: [www.mfti.in.ua](http://www.mfti.in.ua), e-mail: [ftsch@imp.kiev.ua](mailto:ftsch@imp.kiev.ua)

Для учащихся из зарубежных стран возможно только

платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях. Для справок – e-mail: zftsh@mail.mipt.ru, тел./факс: (495) 408-51-45, (498) 744-63-51.

Ниже приводятся задачи вступительных заданий по физике, математике и информатике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), и максимальные баллы приводятся в таблице (номера классов указаны на текущий 2016/17 учебный год):

Номера задач

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1–5	6–10	9–13	10–14
Математика	1–5	3–8	6–11	8–14
Информатика		1–5	3–7	5–9
Химия		1,2,4,6–8	1,3–8	1,4,9–13

Максимальные баллы

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	25	25	25	25
Математика	25	33	37	37
Информатика		7	10	14
Химия		30	35	35

### Вступительные задания

#### ФИЗИКА

1. Улитка начала свою ежедневную прогулку вокруг круглого циферблата стрелочных часов ровно в полдень (12-00), а закончила в 13-00. Она начала свое движение, находясь напротив кончика часовой стрелки, и закончила движение, как только снова оказалась напротив часовой стрелки. Определите скорость  $v$  улитки, если радиус циферблата  $R = 10$  см.

2. Группа туристов совершала сплав на плоту. Первый участок длиной  $L$  проходил по широкому руслу реки, где скорость течения  $v_1 = 4$  км/ч. Второй участок такой же протяженности проходил по узкому руслу реки, где скорость течения возросла до  $v_2 = 12$  км/ч. Определите расстояние, пройденное туристами за все время сплава, если он продолжался  $T = 4$  ч.

3. При замораживании некоторой массы  $m$  воды объем получившегося льда оказался на  $V = 1$  см<sup>3</sup> больше объема воды. Определите  $m$ . Плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

4. В мерном сосуде находится 1 л неизвестной жидкости. При подвешивании его к динамометру с пределом измерения 10 Н выяснилось, что указатель сместился за границы шкалы. Ученик отлил 0,5 л жидкости и вновь подвесил сосуд к динамометру. В этот раз указатель остановился у значения 5,8 Н. Отлив еще 0,3 л и проведя измерения, ученик получил показание динамометра 3,2 Н. Определите: 1) массу мерного сосуда; 2) первоначальную массу жидкости; 3) плотность жидкости. Считайте  $g = 9,8$  Н/кг.

5. В тонкостенный сосуд с вертикальными стенками и площадью основания  $S_1 = 30$  см<sup>2</sup> налита вода до некоторого уровня  $h_1$ . На внутренней стороне стенки на расстоянии  $h_1/2$  от дна сосуда установлен небольшой датчик давления. В сосуд начинают опускать цилиндр с площадью основания  $S_2 = 12$  см<sup>2</sup>. Ось цилиндра расположена вертикально. К

моменту полного погружения цилиндра в воду показания датчика давления увеличились на  $\Delta p = 700$  Па по сравнению с начальным. Какова высота цилиндра? Цилиндр не касается стенок и дна сосуда, вода из сосуда не выливается. Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 9,8$  Н/кг.

6. Однородный горизонтально расположенный стержень массой  $M$  и длиной  $L = 1,2$  м с закрепленным на его конце точечным грузом массой  $m = 0,5M$  находится в равновесии, опираясь на опору. Определите расстояние от точки опоры до груза.

7. Кусок льда массой  $M$  плавает в воде. После того как к нему снизу прикрепили кусочек алюминия массой  $m = 10$  г, он остался на плаву, полностью погрузившись в воду. Определите массу льда. Плотности воды, льда и алюминия считать равными  $\rho_{\text{в}} = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{л}} = 0,9$  г/см<sup>3</sup> и  $\rho_{\text{ал}} = 2,7$  г/см<sup>3</sup> соответственно.

8. Двигатель скутера развивает полезную мощность  $P = 3$  кВт при скорости  $v = 36$  км/ч. Сколько километров проедет скутер со скоростью  $v$ , израсходовав  $V = 3$  л бензина, если КПД двигателя  $\eta = 20\%$ ? Удельная теплота сгорания бензина  $q = 46$  МДж/кг.

9. В чашке вместимостью  $V = 200$  мл находится теплая вода при температуре  $t_1 = 40$  °С. Кусочек льда, температура и масса которого  $t_2 = 0$  °С и  $m_{\text{л}} = 20$  г, опускают в чашку таким образом, что уровень воды поднимается до краев чашки, а лед плавает, не касаясь ее дна. Определите температуру воды в чашке после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость воды  $c_{\text{в}} = 4200$  Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда  $\lambda_{\text{л}} = 3,35 \cdot 10^5$  Дж/кг. Теплоемкостью чашки и потерями тепла пренебречь.

10. В электрическом чайнике с сопротивлением нагревателя  $R_{\text{н}} = 24$  Ом, подключенном непосредственно к электрической сети, вода закипает через время  $t_1 = 3$  мин 45 с. Когда чайник подключили к сети через удлинитель, такая же порция воды закипела через время  $t_2 = 3$  мин 49 с. Определите сопротивление  $R_{\text{уд}}$  проводов удлинителя. Потерями тепла чайником в окружающую среду пренебречь. В обоих случаях начальные температуры воды одинаковы.

11. Из некоторой точки  $A$  вертикально вверх бросают мячик. Мимо точки  $B$ , расположенной над точкой  $A$  на одной с ней вертикали, мячик пролетает первый раз спустя  $t_1 = 1$  с после начала движения, второй раз – спустя  $t_2 = 2$  с после начала движения. Определите: 1) полное время полета мячика (от момента начала движения из точки  $A$  до момента возвращения в точку  $A$ ); 2) начальную скорость мячика; 3) максимальную высоту полета над точкой  $A$ ; 4) расстояние по вертикали от точки  $A$  до точки  $B$ . Сопротивление воздуха не учитывать, считать  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

12. Через легкий блок с неподвижной осью перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены небольшие грузы массами  $m_1 = 210$  г и неизвестной массы  $m_2$ . В начальный момент грузы удерживают на одной высоте, затем отпускают. Через время  $t_1 = 1$  с груз массой  $m_2$  оказался на  $h = 50$  см выше груза массой  $m_1$ . Определите  $m_2$ . Сопротивление воздуха не учитывать, считать  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

13. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра длиной  $L = 10$  см и площадью поперечного сечения  $S = 50$  см<sup>2</sup> имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. Поршень делит объем цилиндра на два равных объема, в которых находится воздух при давлении  $p_0$ . К одному из объемов подключают насос, рабочий объем которого  $V_0 = 0,5$  л. Сколько качаний нужно сделать насосом, чтобы поршень сместился на  $l = 10$  см?

Атмосферное давление равно  $p_0$ . Воздух считать идеальным газом, процесс происходит при постоянной температуре.

**14.** В сосуде находится  $m = 8$  г гелия при температуре  $T = 300$  К. После работы в течение  $t = 3$  мин находящегося в сосуде небольшого нагревателя давление гелия увеличилось на 10%. Определите мощность нагревателя. Потерями тепла пренебречь, объем сосуда считать постоянным.

### МАТЕМАТИКА

**1** (3 балла). В олимпиаде по математической лингвистике приняли участие школьники – математики и гуманитарии. Мальчиков было 18, математиков было 24. Сколько всего человек приняли участие в олимпиаде, если мальчиков-математиков было столько же, сколько девочек-гуманитариев?

**2** (3 б.). Известно, что 11 одинаковых книг стоят дороже 2050 рублей, а 13 таких же книг стоят дешевле 2440 рублей. Сколько стоит одна книга, если известно, что цена выражается целым числом рублей?

**3** (4 б.). Есть два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 10 кг больше массы первого. Процентное содержание меди в первом слитке 60%, во втором слитке 30%. Если эти два слитка сплавить друг с другом, то получится слиток с содержанием меди 37,5%. Найдите массу полученного сплава.

**4** (4 б.). Чиполлино шел от дома до троллейбусной остановки пешком со скоростью 6 км/ч, затем ехал на троллейбусе до школы со скоростью 30 км/ч и затратил на весь путь 54 мин. Обрато из школы он ехал на троллейбусе со скоростью 36 км/ч и шел от остановки до дома со скоростью 5 км/ч. На обратную дорогу он потратил 56 мин. Найдите расстояние от дома до остановки.

**5** (4 б.). Точка  $A$  лежит на стороне  $PR$  остроугольного треугольника  $PQR$ ,  $AL$  – биссектриса треугольника  $APQ$ ,  $AH$  – высота треугольника  $AQR$ . Найдите  $HR$ , если  $QR = 15$ , а  $\angle LAH = 90^\circ$ .

**6** (4 б.). График функции  $y = |2x + a| + b$  проходит через точки  $(0; 0)$  и  $(1; \frac{1}{4})$ . Найдите  $a$  и  $b$ .

**7** (4 б.). В окружности радиуса  $\sqrt{65}$  проведены две параллельные хорды, длины которых равны 16 и 8. Найдите расстояние между этими хордами.

**8** (4 б.). Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $3x^2 + x - 3 = 0$ . Составьте *квадратное* уравнение, корнями которого являются числа  $x_1 + 2$  и  $x_2 + 2$ .

**9** (5 б.). Составьте уравнения касательных к окружности  $x^2 + y^2 = 2x + 6y + 19$ , проходящих через точку  $(0; -14)$ .

**10** (5 б.). В трапеции одна из диагоналей равна 16, а угол между диагоналями равен  $120^\circ$ . Найдите вторую диагональ, если высота трапеции равна 8.

**11** (5 б.). Два туриста вышли из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Первый турист половину затраченного от начала движения времени шел со скоростью  $v_1$  км/ч, а затем – со скоростью  $v_2$  км/ч. Второй же турист первую половину пути шел со скоростью  $v_1$  км/ч, а вторую половину – со скоростью  $v_2$  км/ч.

а) Кто из них затратил больше времени на путь от  $A$  до  $B$ , если  $v_1 \neq v_2$ ?

б) Найдите отношение времени, затраченного первым туристом на путь от  $A$  до  $B$ , к времени, затраченному вторым туристом, если  $v_1 = 1,25v_2$ .

**12** (4 б.). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$h(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x}.$$

**13** (4 б.). В геометрической прогрессии с четным числом членов сумма всех ее членов в пять раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

**14** (5 б.). В угол, равный  $60^\circ$ , вписаны две окружности, причем эти окружности касаются друг друга. Найдите радиус большей окружности, если радиус меньшей равен 3.

### ИНФОРМАТИКА

**1** (1 балл). Витя пригласил своего друга Сергея в гости, но не сказал ему код цифрового замка своего подъезда, а послал следующее SMS-сообщение: «В последовательности чисел 4, 3, 8, 2, 6, 9, 5 все числа, большие 5, разделить на 2 нацело, а затем удалить из полученной последовательности все четные числа». Вычислите код цифрового замка подъезда Вити.

**2** (1 б.). Почтовый индекс в некоторой стране состоит из одной первой буквы (используется 26-символьный алфавит) и двух десятичных цифр, одновременно не равных пяти. Сколько различных индексов можно построить?

**3** (2 б.). У исполнителя Множик две команды, которым присвоены номера:

1. Умножь на 2,
2. Раздели на 7.

Первая из них увеличивает число на экране в 2 раза, вторая – уменьшает его в 7 раз. Программа для Множика – это последовательность команд. Сколько различных чисел можно получить из числа  $7^5$  при помощи программы, содержащей ровно 5 команд? Ответ обоснуйте.

**4** (2 б.). Исполнитель Черепашка перемещается на экране компьютера, оставляя след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существуют две команды:

Вперед  $n$  ( $n$  – целое число) – вызывает передвижение Черепашки на  $n$  шагов в направлении движения.

Направо  $m$  ( $m$  – целое число) – вызывает изменение направления движения на  $m$  градусов по часовой стрелке.

Запись Повтори  $k$  [Команда1 Команда2] означает, что последовательность команд в скобках повторится  $k$  раз.

Напишите программу для данного исполнителя, которая приведет к появлению на экране правильного пятиугольника (у которого все стороны равны).

**5** (1 б.). Для *каких* из приведенных имен верно высказывание

НЕ первая буква гласная И последняя буква гласная?

- 1) Иван; 2) Петр; 3) Светлана; 4) Елена.

**6** (2 б.). Сколько значащих нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа  $18DC, C8_{16}$ ? Ноль называется значащим, если удаление его из записи числа ведет к изменению значения числа. Приведите решение задачи.

**7** (3 б.). Для кодирования файлов используются маски, в которых есть два служебных символа:

Символ ? обозначает ровно один произвольный символ.

Символ \* обозначает любую последовательность символов (в том числе \* может задавать и пустую последовательность).

В каталоге находятся 6 файлов:

primera.dat primera.doc merchant.doc k-mer.doc omerta.doc Tamerlan.docx

Определите, по какой из масок из каталога будет отобрано ровно 3 файла. Укажите какие.

- 1) \*mer ?.d\* 2) ?\*mer ?.doc 3) \*mer\* ?.doc\*
- 4) \* ?mer\* ?.doc\*

**8** (4 б.). Напишите на языке программирования Паскаль или Си либо в виде блок-схемы алгоритм, определяющий

количество различных корней в обобщенном квадратном уравнении. На вход алгоритму подаются коэффициенты  $a, b, c$ , на выходе нужно вывести количество различных корней.

9 (4 б.). Напишите на языке программирования Паскаль или Си либо в виде блок-схемы алгоритм, определяющий, являются ли два числа, поданных на вход, взаимно простыми. В качестве ответа должно быть слово ДА или НЕТ.

### ХИМИЯ

1. а) Напишите электронную конфигурацию элемента №16 в Периодической системе Д.И. Менделеева. Укажите состав ядра элемента. Какие степени окисления проявляет этот элемент? Приведите примеры соединений, в которых он проявляет все свои возможные степени окисления.

б) Напишите формулы оксидов, которые образует данный элемент. Каков их характер? Какие гидроксиды им соответствуют?

в) Напишите формулу водородного соединения данного элемента. Какой будет реакция среды в водном растворе данного водородного соединения? Приведите для него примеры реакций обмена, замещения, соединения, конпропорционирования.

г) Возможно ли взаимодействие между высшим гидроксидом данного элемента и его водородным соединением? Ответ мотивируйте.

2. Навеску смеси сульфатов натрия и калия массой 158 г растворили в воде и обработали избытком хлорида бария. В результате образовался осадок массой 233 г. Вычислите массовые доли сульфатов в исходной смеси.

3. Определите массу осадка, который выпал при сливании 50 мл 0,2 М раствора нитрата алюминия и 100 мл 0,15 М раствора сульфида натрия?

4. Пластинку из неизвестного двухвалентного металла массой 100 г опустили в 515,2 г раствора нитрата серебра. Через некоторое время пластинку вынули, высушили и взвесили. Ее масса оказалась равной 115,2 г. В растворе же появился нитрат двухвалентного металла, его массовая доля оказалась равной 3,76%. Из какого металла сделана пластинка?

5. Смешали 20%-й раствор гидроксида натрия массой 140 г и 10%-й раствор ортофосфорной кислоты массой 294 г. Вычислите массовые доли солей в растворе после реакции.

6. Осуществите цепочку превращений:

(9 класс) углерод  $\rightarrow$  углекислый газ  $\rightarrow$  карбонат натрия  $\rightarrow$  гидрокарбонат натрия  $\rightarrow$  раствор  $\text{AlCl}_3$  карбонат натрия  $\rightarrow$  осадок А

(10 класс) азот  $\rightarrow$  А  $\rightarrow$  аммиак  $\rightarrow$  нитрат аммония  $\rightarrow$  нитрат натрия  $\rightarrow$  хлорид натрия  $\rightarrow$  гидроксид натрия

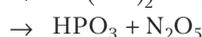
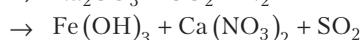
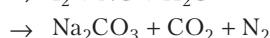
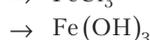
Каким может быть вещество А? Все переходы осуществляются в ОДНУ стадию.

7. Растворимость сульфата натрия в 100 г воды при 20 °С составляет 19,2 г, а при 30 °С – 40,8 г. Вычислите массу глауберовой соли, которая выпадет в осадок, если 500 г насыщенного раствора при 30 °С охладить до 20 °С.

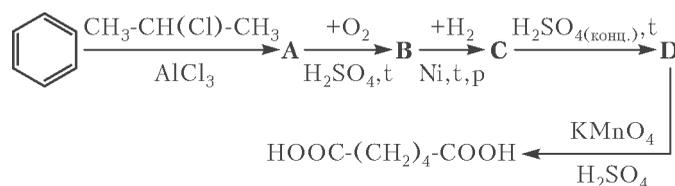
8. Какие газообразные вещества, молекулы которых состоят из трех атомов, должны быть пропущены через водный раствор  $\text{Na}[\text{Al}(\text{OH})_4]$  до выпадения осадка? Ответ подтвердите уравнениями реакций.

9. К 250 граммам раствора, содержащего NaOH и KOH в массовом соотношении 3:1, добавили избыток раствора сульфата меди. Осадок отфильтровали, прокалили и получили 24 г вещества черного цвета. Определите концентрации веществ в исходном растворе.

10. Допишите левую часть уравнений, расставьте коэффициенты:



11. Осуществите цепочку превращений:



12. При взаимодействии кальция с неизвестным веществом X массой 32 г образовалось соединение формулы  $\text{CaX}$  массой 72 г. При обработке этого соединения избытком соляной кислоты выделилось газообразное вещество, которое сожгли, а продукты сгорания пропустили через 200 г 25%-го раствора гидроксида натрия. Найдите массовую долю образовавшегося продукта в полученном растворе и определите исходное простое вещество.

13. Приведите четыре уравнения реакций, не заканчивающихся образованием осадка, которые могут протекать в водном растворе между следующими веществами: гидрокарбонатом натрия, хлоридом бария, нитратом аммония, соляной кислотой, гидроксидом натрия, сульфатом калия.

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 4)

1. Белая деталь имеет ту же форму, что и зеленая. Докажем это. Нам не видны три кубика. Чтобы увидеть их, разделим кирпич пополам (рис.1; невидимые кубики отмечены цифрами 1, 2, 3). Мы видим три черных кубика и два белых, значит, один из невидимых кубиков черный, а два остальных – белые. Единственный кубик, который примыкает к черной

детали, – это кубик 1, значит, именно он черный, а кубики 2 и 3 – белые.

2. 8 конфет.

В условии указано, сколько конфет находится справа от каждой из перечисленных там шести девочек. Поскольку все эти числа положительные, пропущена девочка, стоящая правее всех (так как справа от нее, очевидно, 0 конфет). Это и есть Катя. Если идти вдоль ряда слева направо, то



Рис. 1

чем правее – тем меньше конфет должно оставаться справа от текущего положения. Поэтому Ира стоит предпоследней, а справа от нее – Катя с восемью конфетами.

3. Да, могло.

Например, если зеленая машина едет всегда с одинаковой скоростью 100 км/ч, а красная первые 10% времени едет со скоростью 190 км/ч, а остальное время – со скоростью 90 км/ч.

4. Выполнимо.

Два возможных примера показаны на рисунке 2.

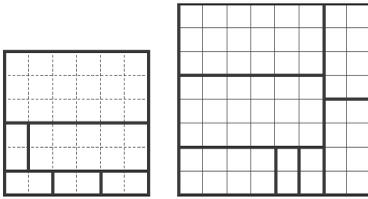


Рис. 2

дорогих, лежащих на верхней полке.

Если Вася купил по одной коробке с двух нижних полок, то Петя вынужден купить такие же коробки, значит, на каждой из этих полок должно быть как минимум по две коробки.

Если же Вася купил две коробки с нижней полки, то Петя должен будет купить такие же, т.е. на нижней полке должно быть, по крайней мере, четыре коробки.

Аналогично, на верхней полке должно быть не менее четырех коробок, а на второй полке сверху – не менее двух. Так как полок не менее пяти, то в продаже должно быть не менее чем  $4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$  коробок.

Пример. Пусть в магазине есть четыре коробки по 10 рублей за каждую, две коробки – по 20 рублей, одна – за 30, две – за 40 и четыре – за 50. Некоторые возможные покупки Васи и ответные покупки Пети соответствуют строкам таблицы:

Вася	Петя
10 + 30	20 + 20
20 + 20	10 + 30
20 + 30	10 + 40
30 + 40	20 + 50
40 + 40	30 + 50
30 + 50	40 + 40

Если же Вася купил набор, не указанный в таблице, то Петя может купить точно такой же.

ЗАДАЧИ

(см. с. 28)

1. 7,5 литров.

Пусть Шарик, прежде чем перелить молоко Матроскину, перельет его в отдельный бидон. По условию, если добавить это молоко Шарiku или Матроскину, то у того станет вдвое больше молока. Значит, сейчас у Шарика и Матроскина молока поровну, а в бидоне молока вдвое больше, чем у каждого из них.

Таким образом, в бидоне сейчас половина всего имеющегося молока:  $10/2 = 5$  литров, а у Шарика и Матроскина – по  $5/2 = 2,5$  литров. Поэтому в конце у Матроскина стало  $2,5 + 5 = 7,5$  литров.

2. Например,  $2 : 1 : 4 + 9 : 3 : 6 + 0 : 5 : 7 = 1$  или  $5 : 4 : 3 + 7 : 6 : 2 + 0 : 8 : 9 = 1$ . Есть и много других примеров, в которых одно из слагаемых равно нулю, а также единственный пример, в котором все слагаемые ненулевые:  $1 : 3 : 6 + 5 : 8 : 9 + 7 : 2 : 4 = 1$ .

3. См. рис. 3.

4. 0.

Заметим, что всего за неделю Буратино написал  $7 \times 9 = 63$  буквы. Из диаграммы видно, что в среду написано не менее 13 букв, в четверг – не менее 12, в пятницу – не менее 9, а в субботу – не менее 7. Тогда суммарно выходит не менее  $8 + 14 + 13 + 12 + 9 + 7 = 63$  букв. Значит, других букв нет, т.е. в эти дни Буратино написал ровно 13, 12, 9 и 7 букв соответственно, а в воскресенье он написал 0 букв.

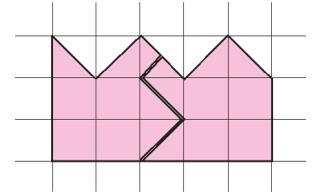


Рис. 3

5. Можно.

Заметим сначала, что поверхность единичного куба можно разбить на два квадрата  $1 \times 1$  (верхняя и нижняя грани) и колечко высоты 1 и длины 4 (боковые грани). Разрежем это колечко по отрезку, соединяющему его верхнюю и нижнюю окружности и имеющему длину 4. Получится ромб со стороной 4 (рис.4).

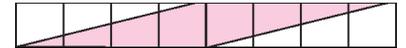


Рис. 4

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Участок траектории мяча после удара симметричен участку в отсутствие стенки, поэтому  $x = 2l - L$  (рис.5). Если  $x < 0$ , это значит, что мяч падает за спиной бросающего.

2. Такое расположение необходимо, чтобы не возник момент сил, отклоняющий фюзеляж от курса (конечно, в предположении, что двигатели развивают одинаковую тягу).

3. Нет. Силы расположены осесимметрично – их векторная сумма равна нулю.

4. Силовые линии поля тяготения внутри слоя, если они существуют, должны располагаться сферически симметрично. Такими могут быть только линии, выходящие из центра сферы в виде лучей по всевозможным направлениям. Однако силовые линии не могут пересекаться в точке, в которой отсутствует вещество. Значит, этих линий внутри сферы вообще нет, т.е. поле тяготения там отсутствует.

5. Изменив знак времени в уравнении, описывающем движение шарика от A к B, получим описание обратного процесса – движения от B к A. Уравнение при этом не изменится. Следовательно, скорость шарика в точке C останется прежней по абсолютной величине. Прежним будет и время, затраченное на обратный путь.

6. При опускании в воду грузов первого рычага моменты архимедовой силы, действующие на рычаг справа и слева, одинаковы, поэтому равновесие не нарушится. На втором рычаге моменты архимедовой силы будут различны, равновесие нарушится – перетянет более тяжелый груз.

7. Ртуть примет форму шара, «плавающего» внутри колбы; вода будет прилегать к стенкам колбы, образуя внутри нее полость шаровой формы.

8. Вследствие анизотропии – зависимости свойств кристаллов от направления – кристаллы при нагревании расширяются в различные стороны неодинаково.

9. Если отвод тепла при охлаждении будет происходить с той же интенсивностью, что и подвод при нагревании, то продолжение графика будет симметричным его первой половине (рис.6).

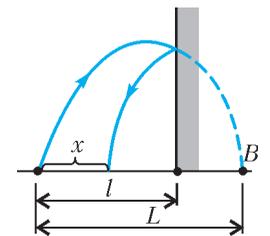


Рис. 5

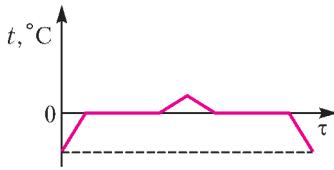


Рис. 6

ровну – ведь ни один из шариков не имел преимущества перед другим. Процесс деления подобным образом мог быть неоднократно продолжен.

11. Исходя из симметрии, напряженность поля должна быть направлена перпендикулярно нити по всем направлениям и быть одинаковой для равноудаленных от нити точек (рис.7; заряд нити принят положительным).

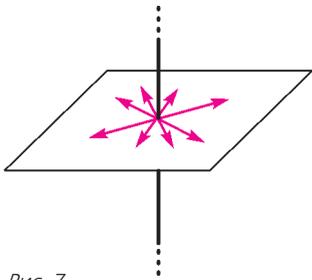


Рис. 7

10. Кулон приводил в соприкосновение два совершенно одинаковых шарика, один из которых был заряжен, а другой – нет. Перебекая с одного шарика на другой, заряды распределялись симметрично, т.е. по-

ровну – ведь ни один из шариков не имел преимущества перед другим. Процесс деления подобным образом мог быть неоднократно продолжен.

11. Исходя из симметрии, напряженность поля должна быть направлена перпендикулярно нити по всем направлениям и быть одинаковой для равноудаленных от нити точек (рис.7; заряд нити принят положительным).

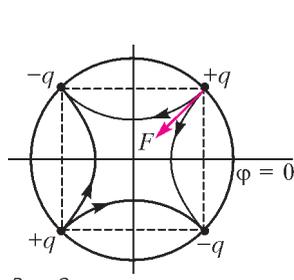


Рис. 8

12. Напряженность больше при разноименных зарядах. При одноименных зарядах, в силу симметрии их расположения, напряженность поля в данной точке равна нулю.

13. Поле положительного заряда, помещенного в двугранный угол, частично совпадает с полем четырех зарядов, размещенных в вершинах квадрата (рис.8; рисунок построен с помощью метода электростатических изображений). Симметрия картины поля позволяет найти направление искомой силы.

14. Если составить из двух таких полусфер целую сферу, то поле внутри нее будет равно нулю. Значит, поле одной из полусфер в плоскости круга, который их друг от друга отделяет, должно компенсировать поле другой. Поскольку поля полусфер симметричны относительно этого круга, напряженность поля каждой из них перпендикулярна его плоскости.

15. Из симметрии схемы следует равенство потенциалов точек C и D (рис.9), в силу чего ток по этой перемычке идти не будет. Дальнейший расчет не представляет труда:

$$R_{AB} = \frac{5}{12} R.$$

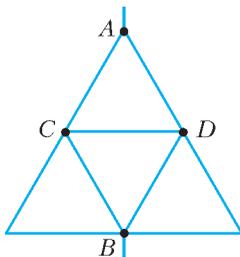


Рис. 9

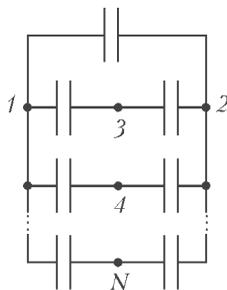


Рис. 10

16. Из симметрии очевидно, что при измерении емкости цепочки между точками 1 и 2 (рис.10) разность потенциалов между двумя любыми из других точек равна нулю. Значит, включенные между этими точками конденсаторы не заряжены и поэтому не дают вклада в общую емкость. Тогда емкость цепочки равна  $NC/2$ .

17. Создаваемые симметрично расположенными полукольцевыми токами магнитные поля в центре кольца равны по величине и противоположны по направлению, поэтому компенси-

руют друг друга и на стрелку не действуют.

18. Изображение лица будет перевернутым. В таком зеркале происходит двойное отражение (рис.11). Стрелки AB и A'B'' расположены симметрично относительно центра O, такая же симметрия будет между любым предметом и его изображением.

19. В этом случае предмет и его изображение расположены симметрично относительно линзы на расстоянии 2F от нее, поэтому расстояние между ними равно 4F.

20. Дифракционный спектр, в отличие от призматического, обладает симметрией.

21. В магнитном поле положительно заряженные частицы отклоняются влево. Электрон и позитрон, отличающиеся знаком заряда, пройдут по симметричным траекториям. Следовательно, позитрону соответствует вспышка 1.

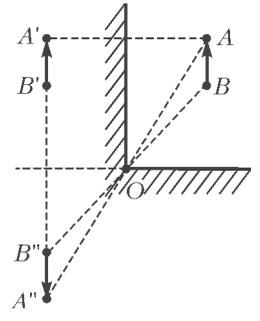


Рис. 11

**Микроопыт**

Если вы идете перпендикулярно зеркалу, то скорость вашего симметричного изображения относительно вас равна удвоенной вашей скорости. Если вы двигаетесь под углом  $\alpha$  к зеркалу, то этот результат следует умножить на  $\sin \alpha$ .

**В НАЧАЛЕ БЫЛО СЛОВО...**

- $R = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} - 2L(\mu + \operatorname{tg} \alpha) \approx 0,3 \text{ м}.$
- $\frac{m_1}{m_2} \approx 0,43.$
- $v_1 = v_0 \frac{\sqrt{m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos 2\varphi + m_2^2}}{m_1 + m_2}, v_2 = v_0 \frac{2m_1 \sin \varphi}{m_1 + m_2}.$
- $h_{\max} \approx 3 \text{ м}.$
- $v_0 = v \frac{2M + m}{M} = 10 \text{ м/с}.$
- $\Delta L_{\max} = \frac{M v_0^2}{2\mu g (M + m)}.$

**LVII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА**

1 (решение Г.Вепрева). Пусть  $\angle CAB = \alpha$  (рис.12). Тогда из  $BF = FA$  следует  $\angle FBA = \angle FAB = \alpha$ , а из того, что AC – биссектриса угла DAB, и из равенства  $CD = DA$  следует

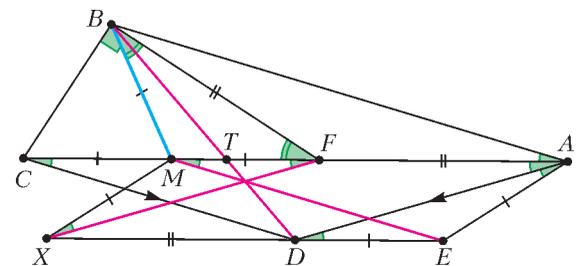


Рис. 12

$\angle CAD = \angle DCA = \alpha$ . Далее, AD – биссектриса угла CAE и  $DE = EA$ , поэтому  $\angle DAE = \angle DAC = \angle EDA = \alpha$ . Тогда из  $\angle EDA = \alpha = \angle DAC$  следует  $DE \parallel AC$ , и тогда из  $EX \parallel AC$  следует, что точки X, D, E лежат на одной прямой. По условию  $\angle CBF = 90^\circ$  и BM – медиана, поэтому  $BM = MC = MF$ . Отсюда  $\angle MBF = \angle BFM = \angle FAB + \angle FBA = 2\alpha$ , поэтому если положить  $BM = MC = MF = 1$ , то  $BF = 2 \cos 2\alpha$ ,  $AC = AF + FC = BF + 2BM = 2 \cos 2\alpha + 2 = 4 \cos^2 \alpha$ . Тогда  $AD = \frac{AC}{2 \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$ ,  $AE = \frac{AD}{2 \cos \alpha} =$

$= 1 = MF$ , т.е.  $AE = DE = MB = MF$ . Так как  $AM = XE$  ( $AMXE$  – параллелограмм) и  $MF = DE$ , то  $XD = AF$ , т.е.  $AFXD$  – параллелограмм, поэтому  $XF \parallel AD$  и  $\angle XFM = \angle DAF = \alpha$ .

Пусть  $XF \cap ME = R$ ,  $BR \cap MF = T$ . Из  $CM = DE$  и  $CM \parallel DE$  следует, что  $ME \parallel CD$ , тогда  $\angle RMF = \angle DCM = \alpha$ , поэтому  $\angle MRF = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle MBF$ , т.е. четырехугольник  $MBFR$  – вписанный. Отсюда следует, что точка  $T$  лежит на отрезке  $MF$  и, кроме того,  $BR$  – биссектриса угла  $MBF$  ( $MR = RF$ ), следовательно,  $MT : TF = MB : BF$ .

Пусть  $BT \cap XE = D_1$ , тогда из трапеции  $XMFE$  получаем  $XD_1 : D_1E = FT : TM = BF : BM = AF : CM = XD : DE$ .

Отсюда следует, что  $D_1 = D$ , тогда  $BD$ ,  $XF$  и  $ME$  пересекаются в точке  $R$ , что требовалось доказать.

**2** (решение И.Фролова). Так как количество букв  $I$  в каждом

столбце равно  $\frac{n}{3}$ , то  $n$  обязательно кратно трем, пусть  $n = 3k$ . Занумеруем строки и столбцы квадрата числами от 1 до  $3k$  в естественном порядке. Диагонали, в которых количество клеток кратно трем, имеют вид  $i - j = C$ , где  $C \equiv 0 \pmod{3}$ , или  $i + j = C$ , где  $C \equiv 1 \pmod{3}$ .

Вычислим количество букв  $I$  на клетках с координатами вида  $(2, 2)$  по модулю три, т.е. те, которые находятся на пересечениях диагоналей обоих типов.

На диагоналях одного направления будет  $2 \cdot (1 + 2 + \dots + (k-1)) + k = k^2$  клеток, в которых есть буква  $I$ .

Рассмотрим диагонали обоих направлений и строки, номера которых дают остаток 2 при делении на 3. В них в сумме будет  $2k^2 + k^2 = 3k^2$  букв  $I$ . В этой сумме клетки, лежащие в столбцах, номера которых не кратны трем, посчитаны один раз, а клетки с координатами  $(2, 2)$  посчитаны трижды. Вычитая не кратные трем столбцы, получим, что утроенное количество букв  $I$  на клетках с координатами  $(2, 2)$  равно  $3k^2 - 2k^2 = k^2$ , откуда  $k$  делится на 3. Таким образом  $n$  обязано делиться на 9.

Если  $n$  кратно девяти, то построим квадрат  $n \times n$  из квадратов  $9 \times 9$  вида

I	M	M	I	O	O	O	M	I
M	I	O	O	M	I	M	I	O
O	I	I	O	O	M	I	M	M
O	O	I	M	I	M	I	O	M
I	M	O	I	M	O	I	O	M
I	I	M	M	O	M	O	I	O
M	M	O	O	I	I	O	M	I
M	O	M	I	I	O	M	O	I
O	O	I	M	M	I	M	I	O

Любая вертикаль, горизонталь и диагональ из условия пересекает каждый малый квадрат  $9 \times 9$  по кратному трем числу клеток. Легко убедиться, что любая линия, пересекающая малый квадрат по числу клеток, кратному трем, содержит букв  $I, M, O$  поровну.

**4** (решение П.Губкина). Из равенств  $P(x) = x^2 + x + 1$  и  $P(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3$  следует

$$(P(x), P(x+1)) = (x^2 + x + 1, x^2 + 3x + 3) = (x^2 + x + 1, 2x + 2) = (x^2 + x + 1, x + 1) = (1, x + 1) = 1$$

(воспользовались тем, что число  $x^2 + x + 1$  – нечетно). Мы доказали, что «соседние» значения многочлена взаимно просты. Далее:

$$P(x+2) = (x+2)^2 + (x+2) + 1 = x^2 + 5x + 7,$$

$$P(x+3) = (x+3)^2 + (x+3) + 1 = x^2 + 7x + 13,$$

поэтому

$$(P(x), P(x+2)) = (x^2 + x + 1, x^2 + 5x + 7) = (x^2 + x + 1, 4x + 6) = (x^2 + x + 1, 2x + 3) = (2x^2 + 2x + 2, 2x + 3) = (2 - x, 2x + 3) = (2 - x, 7).$$

Это число – делитель 7, который равен 7, только если  $x \equiv 2 \pmod{7}$ . Аналогично,

$$(P(x), P(x+3)) = (x^2 + x + 1, x^2 + 7x + 13) = (x^2 + x + 1, 6x + 12).$$

Это число делится на простое  $p$  либо если  $p = 3$ , либо если  $p$  – делитель числа

$$(x^2 + x + 1, 2x + 4) = (x^2 + x + 1, x + 2) = (1 - x, x + 2) = (3, x + 2).$$

Значит,  $p$  может равняться только 3, при этом

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{3}.$$

Рассмотрим разные случаи.

1)  $b = 1$ , тогда множество состоит всего из одного элемента и не является хрупким.

2)  $b = 2$ , тогда  $(P(a), P(a+1)) = 1$  – по доказанному выше.

3)  $b = 3$ , тогда

$$\begin{cases} (P(a+1), P(a+2)) = 1, \\ (P(a+2), P(a+3)) = 1, \end{cases}$$

поэтому для  $P(a+2)$  нет пары.

4)  $b = 4$ , тогда  $P(a+2)$  может иметь общий делитель только с  $P(a+4)$ . Как было показано, этот НОД может быть равен только 7, и это возможно, если  $a+2 \equiv 2 \pmod{7}$ , т.е.  $a \equiv 7$ .

Аналогично можно утверждать, что  $P(a+3)$  может иметь общий делитель только с  $P(a+1)$ , и это возможно, если  $a+1 \equiv 7$ . Противоречие.

5)  $b = 5$ . Среди чисел  $P(a+1)$ ,  $P(a+2)$ ,  $P(a+4)$ ,  $P(a+5)$

число  $P(a+3)$  может иметь общий делитель  $p$  только с  $P(a+1)$  или с  $P(a+5)$ . Если с  $P(a+1)$ , то  $p = 7$ , и

$a+1 \equiv 2 \pmod{7}$ , т.е.  $a \equiv 1 \pmod{7}$ . Но тогда

$(P(a+2), (a+4)) = 1$ , так как  $a+2$  не делится на 7. Значит,  $P(a+2)$  может иметь общий делитель только с  $P(a+5)$ . Это

возможно, только если  $a+2 \equiv 1 \pmod{3}$ . Но тогда число  $P(a+4)$ , не имеющее общих делителей с  $P(a+3)$  и

$P(a+5)$ , а также с  $P(a+2)$ , не будет иметь общих делителей и с  $P(a+1)$ , так как не выполнено условие

$$a+1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Если же число  $P(a+3)$  имеет общий делитель  $p$  только с  $P(a+5)$ , то  $p = 7$ , и  $a+3 \equiv 2 \pmod{7}$ . Тогда, аналогично

приведенному выше рассуждению, не может иметь общих делителей с другими числами число  $P(a+2)$ .

Значит,  $b \geq 6$ . Покажем, что для  $b = 6$  требуемый пример существует. Возьмем  $a$  такое, что  $a+3 \equiv 2 \pmod{7}$ , т.е.

$a \equiv 6 \pmod{7}$ ,  $a \equiv 0 \pmod{3}$  и  $a \equiv 5 \pmod{19}$ . Тогда

$$P(a+1) \equiv P(1) \equiv 0 \pmod{3} \text{ и } P(a+4) \equiv P(1) \equiv 0 \pmod{3};$$

$$P(a+2) \equiv P(5+2) \equiv P(7) = 57 \equiv 0 \pmod{19} \text{ и}$$

$$P(a+6) \equiv P(5+6) \equiv P(11) = 133 \equiv 0 \pmod{19};$$

$$P(a+3) \equiv P(6+3) \equiv P(2) = 7 \equiv 0 \pmod{7} \text{ и}$$

$$P(a+5) \equiv P(6+5) \equiv P(4) = 21 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Мы проверили, что построенное множество – хрупкое.

**6.** Вместо отрезков будем рассматривать прямые, их содержащие. Возьмем некоторую большую окружность, внутри которой находятся все указанные в условии отрезки. Продлим каждый отрезок до пересечения с окружностью. Таким образом, можно считать, что наши отрезки являются хордами некоторой окружности и любые два из них пересекаются.

Занумеруем концы хорд на окружности  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ . Пусть из точки  $A_i$  хорда идет в точку  $A_j$ , любая другая хорда пересекает эту, следовательно, на дугах  $A_i A_j$  поровну концов

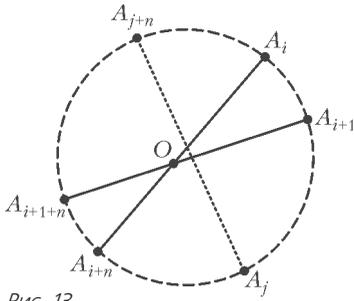


Рис. 13

хорд, откуда следует, что  $i - j$  делится на  $n$ . Значит, наши хорды – это  $A_1 A_{n+1}, A_2 A_{n+2}, \dots, A_n A_{2n}$ . Рассмотрим два соседних конца отрезков  $A_i$  и  $A_{i+1}$ . Пусть отрезки  $A_i A_{i+1}$  и  $A_{i+n} A_{i+1+n}$  пересекаются в точке  $O$ . Легко видеть, что любая другая хорда  $A_j A_{j+n}$  либо одновременно пересекает отрезки  $A_i O$  и  $A_{i+1} O$ , как показано на рисунке 13, либо пересекает  $A_{i+n} O$  и  $A_{i+1+n} O$ .

Таким образом, на отрезках  $A_i O$  и  $A_{i+1} O$  поворну точек пересечения с другими отрезками. Откуда следует, что нельзя выпускать одновременно лягушек в направлении из соседних точек  $A_i$  и  $A_{i+1}$ .

Мы получили, что направления лягушек должны чередоваться, но при четном  $n$  получается, что по отрезку  $A_1 A_{n+1}$  лягушка должна прыгать одновременно в двух направлениях, что невозможно, откуда следует пункт б).

Теперь обсудим пункт а). Ранее мы показали, что существует единственное возможное направление лягушек (с точностью до смены направлений всех лягушек). Покажем, что если направить лягушек из нечетных концов отрезков  $A_1, A_3, \dots, A_n, A_{n+2}$ , то они никогда не встретятся. Рассмотрим лягушек из точек  $A_{2i+1}$  и  $A_{2j+1}$ , пусть точка пересечения соответствующих хорд называется  $Q$ . Любая хорда, никакой конец которой не лежит на дуге  $A_{2i+1} A_{2j+1}$ , пересекает или не пересекает оба отрезка  $A_{2i+1} Q$  и  $A_{2j+1} Q$ , а хорда, у которой один из концов лежит на  $A_{2i+1} A_{2j+1}$ , пересекает ровно один из указанных отрезков. Так как хорд второго типа нечетное количество, то на отрезках  $A_{2i+1} Q$  и  $A_{2j+1} Q$  количества точек пересечения разной четности, а значит, лягушки не смогут встретиться.

**XLVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА**

**ЗАДАЧА 1**

**Часть А**

**A1.**  $b = \frac{r_1 \sin \theta}{\sin \alpha}$ . **A2.**  $I_S \varphi' = -Mgb \sin \varphi$ ,  $\omega^2 = \frac{bgM}{I_S}$ .

**A3.**  $d = \frac{bM}{\pi h_2 r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}$ .

**A4.**  $I_S = \frac{1}{2} \pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2} \pi h_2 (\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + d^2 \pi h_2 r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)$ .

**A5.**  $r_2 = \sqrt{\frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \left( M \frac{bgT^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2} \pi h_1 \rho_1 r_1^4 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \right)}$ ,

$h_2 = \frac{M - \pi r_1^2 \rho_1 h_1}{\pi r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}$ .

**Часть В**

**B1.**  $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$ . **B2.**  $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . **B3.**  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_c^2}$ .

**B4.**  $g(h) = -\frac{GM}{(R_3 + h)^2}$ ,  $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g}{R_3}}$ .

**B5.**  $R = \frac{R_3}{2}$ . **B6.**  $v_x = 2H\omega_c$ ,  $d_x = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8H^3}{R}}$ .

**B7.**  $H_{\min} = R \cdot 0,871\dots$

**B8.**  $x(t) = \frac{2\omega_c d}{\omega} \sin \omega t - 2\omega_c d t$ ,  
 $y(t) = -d \cos \omega t$ ; см. рис.14.

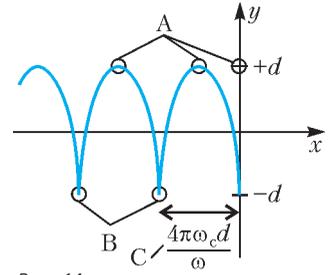


Рис. 14

**ЗАДАЧА 2**

**Часть А**

**A1.**  $R_B = 10,0$  Ом,  $R_H = 1,00$  Ом,  $R_{CP} = 2,00$  Ом,  $I_0 = 6,00$  А.

**A2.** Для  $R = 3$  Ом пересечение всегда одно, для  $R = 1$  Ом число пересечений равно 1, 2 или 3 в зависимости от  $\epsilon$ .

**A3.**  $I_{CT} = \frac{\epsilon - R_{CP} I_0}{R - R_{CP}} = 3,00$  А,  $U_{CT} = R_{CP} (I_0 - I) = 6,00$  В.

**A4.** Стационарное состояние устойчиво.

**Часть В**

**B1.** См. рис. 15.

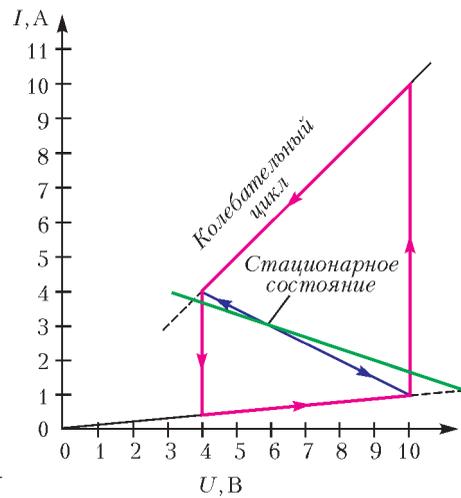


Рис. 15

**B2.**  $t_1 = 2,41 \cdot 10^{-6}$  с,  $t_2 = 3,71 \cdot 10^{-6}$  с,

$T = t_1 + t_2 = 6,12 \cdot 10^{-6}$  с.

**B3.**  $P \sim 19,3$  Вт.

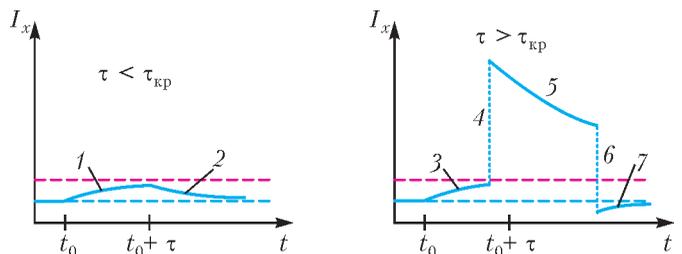
**B4.**  $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{cT}{4} = 459$  м.

**Часть С**

**C1.** См. рис. 16.

**C2.**  $\tau_{кр} = 9,36 \cdot 10^{-7}$  с.

**C3.** Схема является нейристором.



- 1 – приближение к новому стационарному состоянию
- 2 – возвращение к старому стационарному состоянию
- 3 – приближение к новому состоянию
- 4 – прыжок на верхнюю ветвь
- 5 – эволюция верхней ветви
- 6 – прыжок на нижнюю ветвь
- 7 – возвращение к стационарному состоянию

Рис. 16

**ЗАДАЧА 3**

**Часть А**

**A1.**  $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_p c^2}{Ue}\right)^2}$ .

**A2.**  $\Delta \approx \frac{1}{2} \left(\frac{m_e c^2}{m_e c^2 + Ue}\right)^2$ ,  $\Delta_{эл} = 3,63 \cdot 10^{-11}$ .

**A3.**  $B = \frac{2\pi m_p c}{eL} \sqrt{\left(\frac{E}{m_p c^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{mc^2}{E}\right)^2}$ ,  $B_{пр} = 5,50$  Тл.

**A4.**  $P \sim \frac{a^2 q^2}{c^3 \epsilon_0}$ . **A5.**  $P_{II} = 5,13$  кВт.

**A6.**  $T = \frac{d}{Ue} \sqrt{2em_p U + \left(\frac{eU}{c}\right)^2} = 218$  нс.

**Часть В**

**B1.**  $m = \frac{p}{lc} \sqrt{t^2 c^2 - l^2}$ . **B2.**  $l = 1,28$  м.

**B3.**  $m = erB \sqrt{\left(\frac{t}{2r \sin \frac{R}{2r}}\right)^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2}$ .

**B4.**  $m_A = 1,673 \cdot 10^{-27}$  кг,  $m_B = 0,248 \cdot 10^{-27}$  кг,  
 $m_C = 1,667 \cdot 10^{-27}$  кг,  $m_D = 0,890 \cdot 10^{-27}$  кг; частицы А и С – протоны, В –  $\pi$ -мезон, D – K-мезон.

**V ЕВРОПЕЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
 ДЛЯ ДЕВУШЕК**

1. Ниже полагаем  $x_{n+1} = x_1$ ,  $x_{n+2} = x_2$ . Расставим данные числа по окружности, а на дуге между числами  $x_{k+1}$  и  $x_k$  напомним разность  $x_{k+1} - x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Так как  $n$  нечетно, найдутся две соседние разности одного знака или хотя бы одна из разностей равна 0. Без ограничения общности положим  $x_1 - x_2 \leq 0$ ,  $x_2 - x_3 \leq 0$ , таким образом,  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . Отсюда

$$\min_{k=1, \dots, n} (x_k^2 + x_{k+1}^2) \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_2^2 \leq 2x_2 x_3 \leq \max_{k=1, \dots, n} (2x_k x_{k+1}).$$

2. Пусть  $Y$  – точка пересечения лучей  $AD_1$  и  $BC_1$  (рис.17). (Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично.) Достаточно доказать равенство  $\angle EXY = \angle EFX$ , или, эквивалентно,  $\angle AYX + \angle XAY = \angle BYF + \angle XBY$ .

Так как четырехугольник  $ABCD$  вписанный, треугольники  $XAD$  и  $XBC$  подобны, а поскольку  $AD_1$  и  $BC_1$  – соответ-

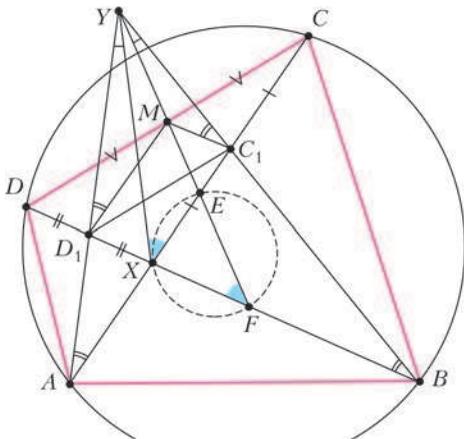


Рис. 17

ствующие медианы в этих подобных треугольниках, получаем  $\angle XAY = \angle XAD_1 = \angle XBC_1 = \angle XBY$ . Остается показать, что  $\angle AYX = \angle BYF$ .

Из доказанного равенства  $\angle XAD_1 = \angle XBC_1$  следует, что четырехугольник  $ABC_1D_1$  вписанный, значит, треугольники  $ABY$  и  $C_1D_1Y$  подобны. Поскольку  $D_1M \parallel AC$  и  $C_1M \parallel BD$ , имеем  $\angle YD_1M = \angle YAX = \angle YBX = \angle YC_1M$ . Это означает, что  $X$  и  $M$  – соответствующие точки в подобных треугольниках  $ABY$  и  $C_1D_1Y$ , откуда и следует требуемое равенство  $\angle AYX = \angle BYF$ .

**3 (Дана Кармона, Израиль).** Ответ:  $6m$ .

Пример: по диагонали поставим  $m$  блоков  $4 \times 4$ , показанных на рисунке 18. Остальные клетки остаются неокрашенными.

Теперь докажем, что при любой покраске, удовлетворяющей условию задачи, синих клеток будет не менее  $6m$ .

Пусть  $m_1^r$  – общее количество синих клеток в строках, каждая из которых содержит ровно одну синюю клетку,  $m_2^r$  – общее количество синих клеток в строках, каждая из которых содержит ровно две синие клетки, и  $m_3^r$  – общее количество синих клеток в строках, каждая из которых содержит не менее трех синих клеток. Определим аналогичные количества  $m_1^c$ ,  $m_2^c$ ,  $m_3^c$  для столбцов.

Заметим, что  $m_3^c \geq m_1^r$  и, аналогично,  $m_3^r \geq m_1^c$ . Действительно, если синяя клетка – единственная синяя клетка в своей строке, то есть хотя бы две другие синие клетки в ее столбце. Предположим противное – пусть общее число синих клеток меньше чем  $6m$ . Мы покажем, что  $m_1^r > m_3^c$  и  $m_1^c > m_3^r$ , и получим противоречие:  $m_1^r > m_3^c \geq m_1^c > m_3^r \geq m_1^r$ .

Итак, докажем, что  $m_1^r > m_3^c$  (второе неравенство является аналогично). Заметим, что нет строк без синих клеток, иначе каждый столбец должен содержать хотя бы две синие клетки, что дает общее количество не менее  $8m > 6m$  синих клеток – противоречие. Тогда подсчет числа строк дает  $m_1^r + m_2^r/2 + m_3^r/3 \geq 4m$ , а из подсчета синих клеток получаем  $m_1^r + m_2^r + m_3^r < 6m$ . Из последних двух неравенств легко следует  $m_1^r - m_3^r > m_2^r/2 \geq 0$ , и мы получили то, что требовалось.

**5.** Ответ:  $n$  при  $n = k$  и  $n = 2k - 1$ ;  $2n - 2k + 2$  при  $k < n < 2k - 1$ .

Случай  $n = k$  ясен, ниже предполагаем, что  $k < n < 2k$ .

Приведем примеры максимальных конфигураций. Пусть  $k < n < 2k - 1$ . Положим в левом нижнем углу  $(k + 1) \times (k + 1)$  четыре плитки, образующие «окно» (рис. 19). Положим сверху на «окно»  $n - k - 1$  горизонтальных плиток и добавим справа от «окна»  $n - k - 1$  вертикальных плиток. Если  $n = 2k - 1$ , то все плитки положим горизонтально (рис. 20). Все кроме средней – в первых  $k$  вертикальных рядах, а среднюю – в последних  $k$  вертикальных рядах. Примеры приведены, теперь нужно доказать оценку.

Пусть  $r$  и  $s$  – количества го-

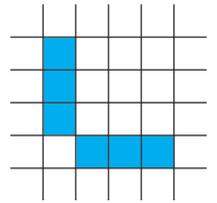


Рис. 18

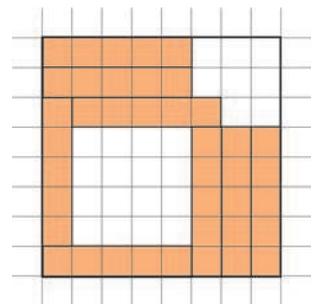


Рис. 19  $k = 5, n = 8$

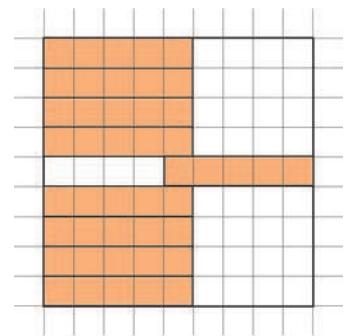


Рис. 20  $k = 5, n = 9$

горизонтальных и вертикальных рядов, не содержащих плитку. Если  $r = 0$  или  $c = 0$ , то у нас уже хотя бы  $n$  плиток.

В случае, когда  $r$  и  $c$  оба положительны, покажем, что общее количество плиток не менее  $2n - 2k + 2$ . Покажем, что горизонтальные (и, аналогично, вертикальные) ряды, не содержащие плиток, идут подряд. Если мы это докажем, то наши  $r$  горизонтальных и  $c$  вертикальных рядов в пересечении дают прямоугольник  $r \times c$ , в котором ни одна клетка не покрыта плиткой. Значит,  $r < k$  и  $c < k$ . Следовательно, имеется хотя бы  $n - r \geq n - k + 1$  горизонтальных и  $n - c \geq n - k + 1$  вертикальных рядов, содержащих хотя бы одну горизонтальную плитку, т.е. всего не меньше чем  $2n - 2k + 2$  плиток.

Итак, покажем, что горизонтальные ряды, не содержащие плиток, идут подряд (с вертикальными рядами все аналогично). Рассмотрим произвольный горизонтальный ряд  $R$ , содержащий горизонтальную плитку  $T$ . Достаточно показать, что во всех горизонтальных рядах по одну сторону от  $R$  находится по горизонтальной плитке.

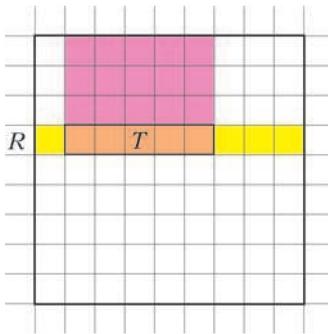


Рис. 21

Значит, каждый из рассматриваемых горизонтальных рядов содержит хотя бы одну горизонтальную плитку.

6. Пусть  $n^4 = (n^2 + k)t$ , где  $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ , а  $t$  – натуральное. Положим  $t = n^2 - l$ , где  $l$  – целое. Тогда

$n^4 = (n^2 + k)(n^2 - l)$  или  $n^2(k - l) = kl$ . Как видим,  $0 < l < k$ , но  $k \leq 2n$ , значит,  $kl < 4n^2$ . Тем самым, для множителя  $k - l$  имеется только три возможности:  $k - l = 1$ ,  $k - l = 2$ ,  $k - l = 3$ .

В первом случае  $n^2 = l(l + 1)$ , что невозможно, так как  $l$  и  $l + 1$  взаимно просты и оба должны быть точными квадратами.

Во втором случае  $2n^2 = l(l + 2)$ . Полагая  $m = l + 1$ , имеем

$$m^2 - 2n^2 = 1. \quad (1)$$

В третьем случае  $3n^2 = l(l + 3)$ . Здесь  $l$  делится на 3. Подставляя  $l = 3s$ , имеем  $n^2 = 3s(s + 1)$ , откуда  $n$  тоже делится на 3:  $n = 3n'$ . Тогда  $3n'^2 = s(s + 1)$ ,  $12n'^2 = 4s(s + 1)$ ,

$12n'^2 + 1 = (2s + 1)^2$ . Полагая  $m = 2s + 1$ , имеем

$$m^2 - 12n'^2 = 1. \quad (2)$$

Наоборот, по каждому решению уравнения (1) или уравнения (2) легко восстановить  $n$  из множества  $S$ .

Поскольку  $m^2$  может давать остатки только 0, 1, 2, 4 при делении на 7, из (1) и (2) легко видеть, что  $n$  не может давать остатки 3 и 4 по модулю 7.

Уравнения (1) и (2) – это уравнения Пелля (см., например, статью В. Сендерова и А. Спивака в «Кванте» №3 за 2002 г.). Решения уравнения (1) – все пары последовательности

$$(m_1, n_1) = (3, 2),$$

$$(m_{k+1}, n_{k+1}) = (3m_k + 4n_k, 2m_k + 3n_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Нетрудно показать, что  $m_{k+3} \equiv m_k \pmod{7}$ ,  $n_{k+3} \equiv n_k \pmod{7}$  (для краткости в такой ситуации пишем  $(m_{k+3}, n_{k+3}) \equiv (m_k, n_k)$ ). Так как  $(m_1, n_1) \equiv (3, 2)$ ,  $(m_2, n_2) \equiv (3, -2)$  и

$(m_3, n_3) \equiv (1, 0)$ , получаем, что  $S$  содержит бесконечно много целых чисел вида  $7t$  и  $7t \pm 2$ .

Для уравнения (2) имеем последовательность решений

$$(m_1, n'_1) = (7, 2),$$

$$(m_{k+1}, n'_{k+1}) = (7m_k + 24n'_k, 2m_k + 7n'_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Нетрудно проверить, что  $(m_{k+4}, n'_{k+4}) \equiv (m_k, n'_k)$ . Так как

$(m_1, n'_1) \equiv (0, 2)$ ,  $(m_2, n'_2) \equiv (-1, 0)$ ,  $(m_3, n'_3) \equiv (0, -2)$  и

$(m_4, n'_4) \equiv (1, 0)$ , с учетом равенства  $n = 3n'$  получаем, что  $S$  содержит бесконечно много целых чисел вида  $7t$  (про это мы уже знаем из уравнения (1)) и  $7t \pm 1$ .

### XXIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА». ФИЗИКА

1. 1) Поскольку при соударениях шарика с плитами трения нет, составляющая скорости шарика, перпендикулярная направлению движения плит, будет оставаться постоянной и равной  $v_{\perp} = u_0 \sin \varphi$ . Смещение  $x_{\infty}$  догоняющей плиты к моменту их встречи  $t_{\infty} = \frac{L_0}{u_1 - u_2}$  равно

$$x_{\infty} = u_1 t_{\infty} = \frac{L_0 u_1}{u_1 - u_2}.$$

Смещение шарика в поперечном направлении имеет вид

$$y_{\infty} = v_{\perp} t_{\infty} = \frac{L_0 u_0 \sin \varphi}{u_1 - u_2}.$$

В ответ на первый вопрос получаем

$$s_{\infty} = \sqrt{x_{\infty}^2 + y_{\infty}^2} = \frac{L_0}{u_1 - u_2} \sqrt{u_1^2 + u_0^2 \sin^2 \varphi}.$$

2) Для упрощения расчетов перейдем в систему отсчета, движущуюся в направлении движения плит со скоростью  $v_c = (u_1 + u_2)/2$ , и будем рассматривать пока только продольное движение шарика. В новой системе отсчета плиты сближаются с одинаковыми по модулю скоростями  $u = (u_1 - u_2)/2$ , а шарик имеет начальную скорость  $v_0 = u_0 \cos \varphi - v_c$ .

Пусть  $v_n$  – модуль скорости шарика сразу после  $n$ -го соударения. Тогда из условия упругости удара можно записать рекуррентное соотношение  $v_n = v_{n-1} + 2u$ , из которого следует общая формула  $v_n = v_0 + 2un$ .

Если  $L_n$  – расстояние между плитами сразу после  $n$ -го соударения,  $\tau_n$  – длительность движения шарика со скоростью  $v_n$ , то из формул для равномерного движения следует

$$\tau_n = \frac{L_n}{v_n + u} = \frac{L_n}{v_0 + 2un + u},$$

$$L_n = L_{n-1} - 2u\tau_{n-1} = L_{n-1} \frac{v_0 + 2un - 3u}{v_0 + 2un - u}.$$

Последовательно выражая  $L_n$  через  $L_{n-1}$ , потом выражая  $L_{n-1}$  через  $L_{n-2}$  и так далее до  $L_1 = L_0 (v_0 - u)/(v_0 + u)$ , получаем

$$L_n = \frac{(v_0 - u)L_0}{v_0 + 2un - u},$$

и

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{(v_0 - u)L_0}{(v_0 + 2un - u)(v_0 + 2un + u)} = \\ &= \frac{(v_0 - u)L_0}{2u} \left( \frac{1}{v_0 + 2un - u} - \frac{1}{v_0 + 2un + u} \right). \end{aligned}$$

Теперь находим момент времени  $n$ -го соударения:

$$t_n = \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} = \frac{nL_0}{v_0 + 2un - u}.$$

Вернемся теперь в исходную систему отсчета. Сразу после четного соударения шарик находится около догоняющей плиты, имеющей в этот момент смещение  $u_1 t_n$ , а сразу после не-

четного – около другой плиты, отстоящей на  $L_n$  дальше догоняющей. С использованием операции остатка от деления смещение шарика вдоль направления движения плит записывается одной формулой:

$$x_n = u_1 t_n + L_n (n \bmod 2) = L_0 \frac{u_1 n + (u_0 \cos \varphi - u_1)(n \bmod 2)}{u_0 \cos \varphi - u_1 + (u_1 - u_2)n}.$$

Смещение шарика в поперечном направлении имеет вид

$$y_n = v_{\perp} t_n = \frac{L_0 n u_0 \sin \varphi}{u_0 \cos \varphi - u_1 + (u_1 - u_2)n}.$$

Окончательно получаем

$$s_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \frac{L_0 \sqrt{(u_1 n + (u_0 \cos \varphi - u_1)(n \bmod 2))^2 + n^2 u_0^2 \sin^2 \varphi}}{u_0 \cos \varphi - u_1 + (u_1 - u_2)n}.$$

**2.** Заряженная частица в однородном магнитном поле движется по винтовой линии в результате сложения двух движений: движения вдоль поля с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$  и движения в перпендикулярной полю плоскости по окружности радиусом  $r$  с постоянной скоростью  $v_{\perp}$ .

1) Частица движется под действием силы Лоренца  $F = qv_{\perp}B$ , поэтому ее ускорение

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{qv_{\perp}B}{m}, \text{ откуда } v_{\perp} = \frac{mv^2}{qBR}.$$

По теореме Пифагора  $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$  находим

$$v_{\parallel} = v \sqrt{1 - \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2 R^2}}.$$

Исходные данные непротиворечивы, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. если выполняется условие  $mv \leq qBR$ .

2) Движение по окружности ограничено, поэтому его вкладом в общее перемещение можно пренебречь, тогда

$$l \approx v_{\parallel} t = vt \sqrt{1 - \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2 R^2}}.$$

3) В инерциальной системе отсчета, движущейся со скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль поля, частица движется по окружности радиусом  $r$  с постоянной скоростью  $v_{\perp}$  и ускорением  $a$ , поэтому

$$r = \frac{v_{\perp}^2}{a} = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2 R}.$$

Использованное при поиске  $l$  приближение корректно, когда  $l \gg r$ , откуда находим критерий применимости:

$$t \gg \frac{m^2 v}{q^2 B^2 R} \left(1 - \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2 R^2}\right)^{-1/2}.$$

4) Для нахождения  $L$  нужно учесть поперечное смещение частицы. За время  $t$  она сместится вдоль окружности на угол  $\varphi = v_{\perp} t / r$ . Хорда, стягивающая эту дугу, имеет длину

$$l_{\perp} = 2r \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \frac{2m^2 v^2}{q^2 B^2 R} \left| \sin \left( \frac{qB}{2m} t \right) \right|.$$

По теореме Пифагора находим общее смещение:

$$L = \sqrt{l^2 + l_{\perp}^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2 R^2}\right) v^2 t^2 + \frac{4m^4 v^4}{q^4 B^4 R^2} \sin^2 \left( \frac{qB}{2m} t \right)}.$$

**3.** Модуль вектора тангенциального ускорения отвечает за изменение модуля скорости, поэтому для нахождения его среднего значения достаточно поделить общее изменение модуля скорости в ходе подъема тела до наивысшей точки на время подъема, так как среднее значение за время спуска будет таким же в силу симметрии движения.

Пусть  $v_0$  – начальная скорость тела,  $g$  – ускорение свободного падения, тогда время подъема  $T = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$ , а среднее зна-

чение модуля вектора тангенциального ускорения

$$\langle |a_t| \rangle = \frac{v_0 - v_0 \cos \varphi}{T} = g \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Расчет модуля среднего значения вектора нормального ускорения принципиально иной – сначала выполняется усреднение, а потом уже берется модуль. В силу симметрии движения относительно вертикальной прямой, проходящей через наивысшую точку траектории, среднее значение вектора нормального ускорения будет направлено вертикально вниз, поэтому можно сразу усреднять только его вертикальную проекцию  $a_{ny}$ , причем только за время подъема, так как за время спуска среднее значение проекции будет таким же. Пусть  $\alpha$  – угол наклона скорости к горизонту в момент времени  $t$  от начала полета. Тогда искомое среднее значение имеет вид

$$\begin{aligned} \langle a_n \rangle &= \langle a_{ny} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g \cos^2 \alpha \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{g dt}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{g dt}{\left( \frac{v_0 \sin \varphi - gt}{v_0 \cos \varphi} \right)^2 + 1} = \frac{v_0 \cos \varphi}{T} \left( \frac{gt - v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi} \right)_0^T = \frac{g \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

Приравняв финальные выражения для ускорений, получаем уравнение

$$\frac{1}{\cos \varphi} - 1 = \varphi.$$

Это трансцендентное уравнение, поэтому решить мы его можем только численными методами. Чтобы определить число его решений в интересующем нас промежутке  $0 < \varphi < \pi/2$ , построим графики левой ( $L$ ) и правой ( $\Pi$ ) частей этого уравнения (рис.22).

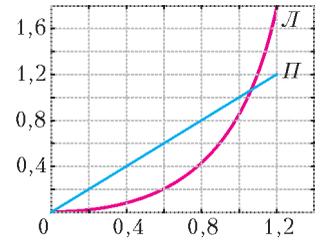


Рис. 22

Из графиков можно видеть, что в интервале  $0 < \varphi < \pi/2$  уравнение имеет единственный корень вблизи точки  $\varphi \approx 1$ . Чтобы улучшить точность полученной оценки, воспользуемся методом последовательных приближений, записав наше уравнение в виде функции

$$\varphi_n = f(\varphi_{n-1}) = \frac{1}{\cos \varphi_{n-1}} - 1.$$

Взяв в качестве нулевого приближения  $\varphi_0 = 1$ , найдем  $\varphi_1 = f(\varphi_0) \approx 0,851$ ,  $\varphi_2 = f(\varphi_1) \approx 0,517$ ,  $\varphi_3 = f(\varphi_2) \approx 0,150$ ,  $\varphi_4 = f(\varphi_3) \approx 0,011$ . Видно, что последовательность все больше удаляется от предполагаемого положения корня, значит, функция была выбрана неудачно, поэтому перепишем ее по-другому:

$$\varphi_n = F(\varphi_{n-1}) = \arccos \left( \frac{1}{\varphi_{n-1} + 1} \right).$$

Взяв в качестве нулевого приближения  $\varphi_0 = 1$ , найдем  $\varphi_1 = F(\varphi_0) \approx 1,047$ ,  $\varphi_2 = F(\varphi_1) \approx 1,060$ ,  $\varphi_3 = F(\varphi_2) \approx 1,064$ ,  $\varphi_4 = F(\varphi_3) \approx 1,065$ ,  $\varphi_5 = F(\varphi_4) \approx 1,065$ . Поскольку равенство  $\varphi_5 = \varphi_4$  выполнено с достаточной точностью, можно записать окончательный ответ:

$$\varphi \approx 1,065 \approx 61,0^\circ.$$

**4.** См. решение задачи Ф2440 «Задачника «Кванта»».

**5. А.** Пусть  $T_3$  – температура внутренней стороны окна,  $S$  – площадь окна, тогда равенство потоков тепла через стекло и через пограничный слой воздуха имеет вид

$$\kappa_1 S \frac{T_3 - T_1}{h_1} = \kappa_2 S \frac{T_2 - T_3}{h_2}, \text{ откуда } T_3 = \frac{\frac{\kappa_1}{h_1} T_1 + \frac{\kappa_2}{h_2} T_2}{\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2}} \approx -10^\circ \text{C}.$$

Пар будет конденсироваться на стекле, пока его давление не станет равным давлению насыщенного пара при температуре

стекла. Отсюда находим

$$\varphi = \frac{p_{\text{нас}}(T_3)}{p_{\text{нас}}(T_2)} = \frac{286,8 \text{ Па}}{2338 \text{ Па}} \approx 0,123 = 12,3\% .$$

**В.** Искомое отношение равно  $x = \Delta Q_2 / \Delta Q_1$ , где  $\Delta Q_1$  и  $\Delta Q_2$  – количества теплоты, которые нужно подвести к сухому и максимально влажному воздуху соответственно для нагревания на небольшую температуру  $\Delta T$ . Пусть  $V$  – объем комнаты,  $v$  – количество воздуха в комнате,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Тогда с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона можно записать первое начало термодинамики для  $\Delta Q_1$  в виде

$$\Delta Q_1 = \frac{5}{2} v R \Delta T = \frac{5}{2} \frac{p_0 V}{T} \Delta T .$$

Поскольку воздух максимально влажный, давление  $p$  пара находим по таблице из условия, а давление  $p_a$  воздуха выражаем как парциальное давление:

$$p = p_{\text{нас}}(T) = 1706 \text{ Па} , \quad p_a = p_0 - p = 98,3 \text{ кПа} .$$

Аналогичное выражение для первого начала термодинамики в случае влажного воздуха имеет вид

$$\Delta Q_{21} = \frac{5}{2} \frac{p_a V}{T} \Delta T + 3 \frac{p V}{T} \Delta T ,$$

где учтено, что водяной пар является трехатомным газом, но

еще не учтено испарение воды. Из уравнения Менделеева–Клапейрона выразим массу пара и ее изменение:

$$m = \frac{M p_{\text{нас}} V}{R T} , \quad \Delta m = m'(T) \Delta T = \frac{M V}{R T^2} (T p'_{\text{нас}}(T) - p_{\text{нас}}) \Delta T ,$$

а производную давления найдем численно по таблице:

$$a = p'_{\text{нас}}(T) = \frac{p_{\text{нас}}(T + 1 \text{ К}) - p_{\text{нас}}(T - 1 \text{ К})}{2 \text{ К}} = 110 \text{ Па/К} .$$

Количество теплоты, необходимое для испарения, имеет вид

$$\Delta Q_{22} = L \Delta m = \frac{M V}{R T^2} (a T - p) \Delta T .$$

Используя выражение  $\Delta Q_2 = \Delta Q_{21} + \Delta Q_{22}$ , получим

$$x = \frac{p_a}{p_0} + \frac{6p}{5p_0} + \frac{2ML}{5RTp_0} (aT - p) .$$

Каждое слагаемое в этой формуле связано с отдельным эффектом, поэтому для их количественного сравнения вычислим  $x$  поэтапно:

$$x = 0,983 + 0,0205 + 2,254 \approx 3,26 .$$

Таким образом, сухой воздух остывает существенно быстрее влажного.

## НАПЕЧАТАНО В 2016 ГОДУ

	№ журнала	с.
<b>Памяти Е.Я.Гика</b>	<b>5-6</b>	<b>31</b>
<b>Статьи по математике</b>		
Задачи о пересечениях множеств. <i>А.Райгородский</i>	<b>5-6</b>	<b>2</b>
Математика и компьютеры: проблемы и перспективы. <i>Р.Грэхем</i>	<b>3</b>	<b>2</b>
– « –	<b>4</b>	<b>2</b>
О различных расстояниях между точками на плоскости. <i>Р.Просанов</i>	<b>2</b>	<b>2</b>
Пятнадцать человек на сундук мертвеца. <i>С.Грибок,</i> <i>К.Кноп</i>	<b>1</b>	<b>9</b>
<b>Статьи по физике</b>		
Активные материалы – адаптивные и защищающие. <i>Л.Ашкинази</i>	<b>5-6</b>	<b>6</b>
Планер Жуковского и движение в скрещенных полях. <i>П.Панов</i>	<b>1</b>	<b>2</b>
Радуга Декарта–Ньютона–Юнга. <i>А.Панов</i>	<b>3</b>	<b>10</b>
– « –	<b>4</b>	<b>8</b>
Эффекты размера и формы в молекулярной физике. <i>С.Варламов, А.Гуденко</i>	<b>2</b>	<b>10</b>
<b>Новости науки</b>		
Свободная частица. <i>Л.Белопухов</i>	<b>1</b>	<b>16</b>
<b>Задачник «Кванта»</b>		
Задачи М2406 – М2445, Ф2413 – Ф2452	<b>1 – 5-6</b>	
Решения задач М2389 – М2428, Ф2395 – Ф2434	<b>1 – 5-6</b>	
Алгебра, геометрия и комбинаторика расстояний. <i>С.Дворянинов, П.Кожевников</i>	<b>5-6</b>	<b>22</b>
Висячие мосты. <i>С.Муравьев</i>	<b>1</b>	<b>29</b>
От подстановки корня до трансцендентного числа. <i>С.Дориченко, П.Кожевников</i>	<b>3</b>	<b>21</b>
Футбольные турниры и арифметические прогрессии. <i>А.Заславский</i>	<b>4</b>	<b>20</b>

	№ журнала	с.
<b>«Квант» для младших школьников</b>		
Задачи		<b>1-5-6</b>
Конкурс имени А.П.Савина		<b>1, 4, 5-6</b>
XXII Турнир математических боев имени А.П.Савина	<b>4</b>	<b>23</b>
<b>Статьи по математике</b>		
Коровы Исаака Ньютона. <i>И.Акулич</i>	<b>3</b>	<b>25</b>
Куриная эпопея. <i>И.Акулич</i>	<b>5-6</b>	<b>29</b>
Сплошные неприятности. <i>И.Акулич</i>	<b>1</b>	<b>35</b>
Чья площадь больше. <i>К.Кохась</i>	<b>2</b>	<b>26</b>
<b>Статьи по физике</b>		
Большой рот в полете. <i>А.Летов</i>	<b>2</b>	<b>29</b>
Брелок для ключей и ... физика. <i>С.Дворянинов</i>	<b>1</b>	<b>37</b>
Буратино и его качели. <i>С.Дворянинов</i>	<b>3</b>	<b>27</b>
<b>Калейдоскоп «Кванта»</b>		
<b>Математика</b>		
Как доказать неравенство?	<b>4</b>	<b>32</b>
Равновеликость и равноставленность	<b>2</b>	<b>«</b>
<b>Физика</b>		
Движение со связями	<b>1</b>	<b>32</b>
Конденсатор	<b>3</b>	<b>«</b>
Симметрия в физике	<b>5-6</b>	<b>«</b>
<b>Школа в «Кванте»</b>		
<b>Математика</b>		
Вспомогательные квадраты. <i>Е.Бакаев, А.Блинков</i>	<b>4</b>	<b>25</b>
Одна теорема о пересечении прямых и окружностей. <i>Ф.Столякин, В.Ефремова, О.Щербаков</i>	<b>5-6</b>	<b>36</b>
<b>Физика</b>		
Аналогии – всюду. <i>А.Стасенко</i>	<b>3</b>	<b>29</b>
А что изменится, если...?. <i>Е.Соколов</i>	<b>1</b>	<b>39</b>
Ньютон, яблоки и другие. <i>И.Алексеев, А.Стасенко</i>	<b>5-6</b>	<b>34</b>

Свет из-за угла, или Как школьник в класс торопился.  
А.Стасенко 1 42

### Физический факультатив

В тире и рядом. С.Варламов 4 30  
Закон Гука и коэффициент Пуассона, или Чем резина  
отличается от воды. П.Суровин 3 30  
Напряженность электрического поля на поверхности  
сферы. В.Гребень 5-6 43  
О моментах инерции. А.Буров 2 30  
Форма кривой вращающегося троса. А.Князев 1 43

### Математический кружок

Аплдисменты здесь тихие. В.Ильичев, А.Маринин 3 34  
Геометрия целочисленных расстояний. А.Елизаров,  
П.Кожевников 5-6 40  
Евклид и неприводимые многочлены. В.Ильичев 1 50  
Еще одно доказательство теоремы об изогональном  
сопряжении. В.Дубровский 3 39  
Задача Анджанса о 32 клетках. Д.Кузнецов 2 39  
Изогонально сопряженные точки. П.Кожевников 1 46  
Камень в п-огород. И.Акулич, В.Дубровский 4 35  
Лемма биссектрального треугольника. А.Карлюченко,  
Г.Филипповский 2 36  
О двух классах треугольников, или Откуда берутся  
задачи. А.Заславский 3 35

### Лаборатория «Кванта»

О махолете электрически. С.Герасимов 5-6 45  
Спасем водолаза. А.Панов 2 41

### Практикум абитуриента

#### Физика

В начале было слово, или Что делать, когда задача не  
решается. М.Бондаров 4 40  
– « – 5-6 47  
Задачи на силу трения. А.Черноуцан 1 51  
Уравнения связей в механике. К.Рыб 3 40  
Электростатика для умных школьников.  
А.Зильберман 2 44

### Олимпиады

Заключительный этап XLII Всероссийской олимпиады  
школьников по математике 4 45  
Заключительный этап L Всероссийской олимпиады  
школьников по физике 4 47  
Заключительный этап I Всероссийской олимпиады по  
физике имени Дж.К.Максвелла 4 50  
V Европейская математическая олимпиада для  
девушек 5-6 60  
XXIV Международная олимпиада «Интеллектуаль-  
ный марафон» 3 53  
XXIII Международная олимпиада «Туймаада».  
Физика 5-6 61  
LVII Международная математическая олимпиада 5-6 54  
XLVII Международная физическая олимпиада 5-6 55  
LXXIX Московская математическая олимпиада 3 45  
Московская физическая олимпиада 2016 года 3 47  
Региональный этап XLII Всероссийской олимпиады  
школьников по математике 2 52  
Региональный этап L Всероссийской олимпиады  
школьников по физике 2 53  
XXXVII Турнир городов. Задачи весеннего тура 3 44  
XXXVII Турнир городов. Задачи осеннего тура 1 56

### Информация

Дни физики в Дубне 4 39  
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 5-6 67  
Заочная школа СУНЦ НГУ 3 57  
Очередной набор в ВЗМПШ 5-6 62

### Нам пишут

Геометрическое доказательство формулы тангенса  
суммы двух углов. К.Сечкаръ 5-6 27

### Коллекция головоломок

Возвести в куб 3 2-я с. обл.  
Непростая упаковка 2 «  
Пентасекция правильного треугольника 1 «  
Черным-черно 5-6 «

### Кванты интернета

Сложите это! 4 2-я с. обл.

### Шахматная страничка

Вертикальная симметрия в задачах 1 3-я с. обл.  
Впереди матч Карякин–Карлсен 2 «  
Задачи-шутки 4 «  
Мат в ноль ходов 5-6 «  
Мельница Карпова 3 «

### Прогулки с физикой

Висячие мосты 1 4-я с. обл.  
Две радуги 3 «  
О махолете 5-6 «  
Радуга из компьютера 4 «  
Спасем водолаза 2 «

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В. Бакаев, С.А.Дориченко, А.А.Егоров,  
Е.М.Епифанов, С.Л.Кузнецов, А.Ю.Котова,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина  
ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

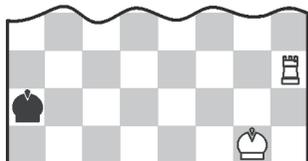
**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

## Отпечатано

**в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

## МАТ В НОЛЬ ХОДОВ

Продолжаем рассказ о задачах-шутках. В следующей позиции нелегко догадаться, что последним ходом белых была... короткая рокировка. Самое странное, что в ней участвовал один король, переместившийся, как и положено, с e1 на g1. Дело в том, что белые давали фору две ладьи, а ладья на h3 превращенная! Так что все по правилам.



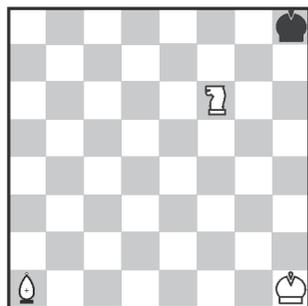
К.Фабель, 1949

### Белые берут ход назад и дают мат в 1 ход

Теперь вместо короткой рокировки следует длинная, и белый король неожиданно попадает с e1 не на g1, а на c1 (белая ладья a1, тоже данная в фору, участвует в рокировке лишь символически). После 0-0-0 (вместо 0-0) черный король вынужден удалиться в угол – 0... ♖a1, где и получает законный мат – 1. ♜a3×. Да, шутки шутками, а решение очень непростое.

### Полуходовки и «дробные» маты

Известны задачи-шутки, в которых заканчивается рокировка или взятие на проходе. Но, пожалуй, этим можно удивить только начинающих шахматных юмористов. На эту тему желательнее придумать что-нибудь посмешнее.

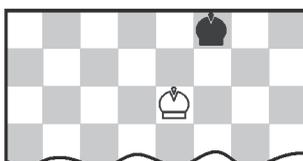


А.Воронов, 1990

### Мат в полхода

Слон с конем матают одинокого короля, но чтобы сделать это так быстро, требуется что-нибудь очень хитрое, как в данном случае. Белый конь становится... на дыбы! Не знаю толком – это ход или полхода. После такого «маневра» поля g8 и h7 по-прежнему под присмотром коня (ведь он не покинул поле f6, а только приподнялся над ним), а мат объявляет слон a1!

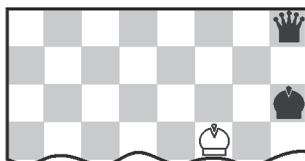
Вообще, это старинная задача-шутка, но есть в ней один нюанс. Когда ее показали Эмануилу Ласкеру, он тоже сделал полхода: приподнял черного короля, который «скрылся» за поднятым конем. Но выход из положения спустя много лет нашел А.Воронов: в исходном положении он приподнял не коня, а слона, и уже тот благополучно заматовал неприятельского короля! Да, теперь ему никуда не деться...



Э.Погосьян, 1963

### Мат в полхода

Здесь полхода белые уже сделали – сняли с доски свою пешку h7 – и теперь завершают ход, неожиданно водружая в углу своего ферзя – 1/2. ♗h8×.

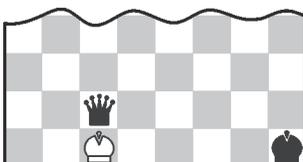


Э.Погосьян, 1980

### Мат в 2/3 хода

Ход – превращение пешки со взятием – можно разбить на три части: 1) снятие с доски собственной пешки, 2) снятие с доски неприятельской фигуры, 3) на место взятой фигуры ставится превращенная. В данной позиции треть хода уже сделана – белые удалили свою пешку g7. Осталось снять черного ферзя h8 (вторая треть хода) и на его место поставить белого ферзя (еще треть хода). Итак, полный ход 1. ♗g7:h8×!

Но можно еще чуть-чуть уменьшить дробь...



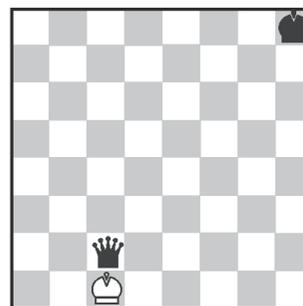
Л.Кацнельсон, 1984

### Мат в 1/4 хода

Чтобы справиться с заданием, вспомним, что рокировка состоит из четырех частей: 1) приподнимается король, 2) король опускается на новое место, 3) приподнимается ладья, 4) ладья опускается на новое место.

Здесь три части хода уже сделаны, осталось опустить ладью на поле d1. Итак, 1. 0-0-0×, или, точнее, 1/4. ♖d1×. Но нельзя поставить на d1

ладью, поднятую с другого поля, так как тогда получится мат в полхода или (при взятии черной фигуры) в треть хода, что нас не устраивает.



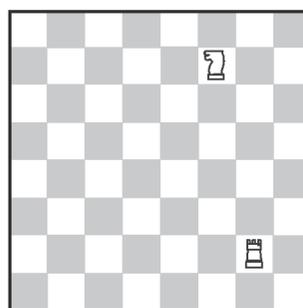
Л. Кацнельсон, 1984

### Мат в 1/5 хода

В этой шутке-близнеце решает 1. e7:f8 ♗×. «Химический анализ» показывает, что данный ход состоит из пяти элементов: 1) приподнимается пешка e7, 2) приподнимается черная фигура f8 (и покидает доску), 3) с возгласом «ферзь!» опускается на f8 белая пешка, 4) эта пешка приподнимается над полем f8 и убирается в коробку, 5) на ее место водружается ферзь. Итак, нам осталось сделать всего одну пятую часть хода: 1/5. ♗f8×.

Идея дробления хода на мелкие кусочки, пожалуй, полностью исчерпана. Но рекорд принадлежит малюткам со сверхкоротким решением – мат в 0 ходов. Коряче не бывает!

### Без единого хода



Л.Кацнельсон, 1984

### Мат в 0 ходов

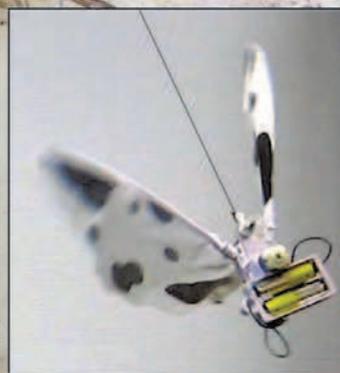
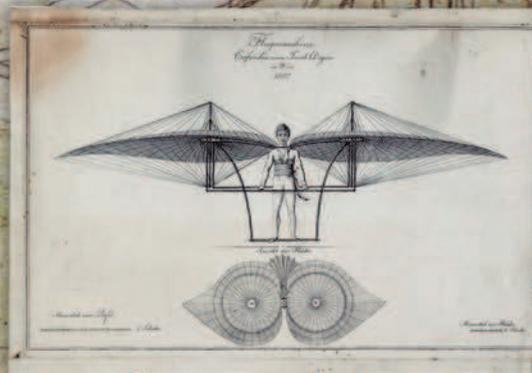
Игравший белыми объявил своему сопернику мат конем и на радостях с такой силой стукнул по доске, что оба короля, расположенные по соседству – белый на h6 и черный на h8, – подпрыгнули в воздух и в данный момент еще не успели вернуться на землю, т.е. на доску. Приземлившись, черный король обнаружит, что он заматован. Вот вам и мат в 0 ходов!

Е.Гук

Индекс 90964

# О МАХОЛЕТЕ

Можно ли построить летательный аппарат с машущими крыльями, имитирующими движение крыльев птиц или насекомых?..



*Игрушки с физикой*

(Продолжение – на с. 45 внутри журнала)