

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ

ISSN 0130-2221
2009 - №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

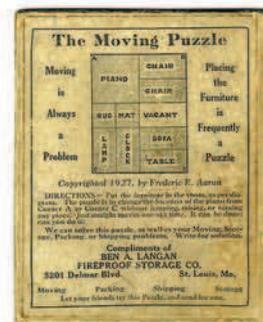
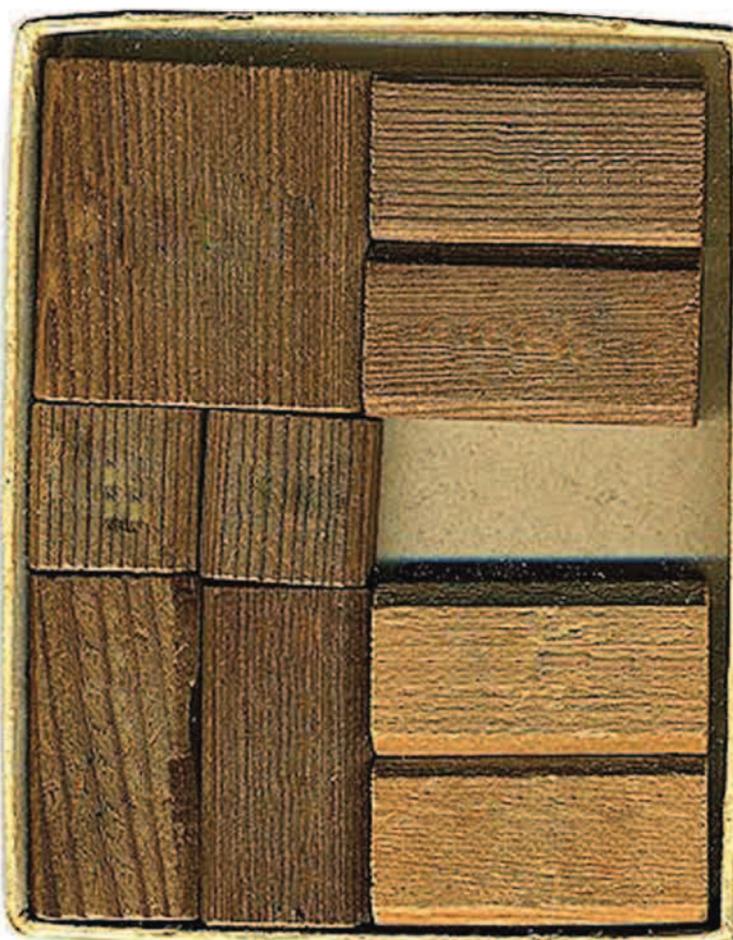


БРУСОЧКИ



В этом году исполняется 100 лет одной замечательной головоломке, ставшей родоначальницей целого семейства подобных игр. Автор головоломки Льюис Харди называл ее чемпионской. Но сейчас она больше известна как «клоцки» (klotski – английское написание польского слова klocki – деревянные блоки). Головоломка Харди изображена на рисунке в центре. Требуется передвинуть большой квадрат из левого верхнего в левый нижний угол, не вынимая брусочков из коробки.

(Продолжение – на странице 18 внутри журнала)



журнал ©
Квант СЕНТЯБРЬ 2009 №5
ОКТАБРЬ 2009

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН
Издатель — ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Товарный знак «Журнал «Квант» является собственностью ООО НПП ОО «Бюро Квантум»
© 2009, РАН,
Фонд Осипьяна, журнал «Квант»

- 2 Прямая Сильвестра. *С.Табачников, В.Тиморин*
7 Многоликий протон. *И.Иванов*
13 Задача Эрдеша – Секереша: продолжение истории. *В.Кошелев, А.Райгородский*

НАНОТЕХНОЛОГИИ

- 11 Космический нанолифт. *К.Богданов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи M2146–M2153, Ф2153–Ф2159
20 Решения задач M2124–M2130, Ф2138–Ф2144

К М Ш

- 28 Задачи
29 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
29 Летний турнир имени А.П.Савина

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Наклонная плоскость

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Загадки магнитной стрелки (продолжение). *И.Леенсон*
36 Ионосфера и шум цунами. *А.Стасенко*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 38 Об одной неточности Исаака Ньютона. *Б.Кондратьев*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 42 Снова о теореме Морлея. *Л.Штейнгарц*
43 Еще два доказательства теоремы Морлея

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 45 Сохранение полной энергии в задачах термодинамики. *А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

- 48 Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера
49 Заключительный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике
52 Заключительный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике
57 Московская студенческая олимпиада по физике 2009 года
58 Ответы, указания, решения
Информация (12)
Вниманию наших читателей (27)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье И.Иванова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*



В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»



Прямая Сильвестра

С. ТАБАЧНИКОВ, В. ТИМОРИН

Задача

В 1893 году Сильвестр поставил такую задачу [1]: *верно ли, что среди любого конечного множества точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, найдется пара точек такая, что проходящая через них прямая не содержит никаких других точек данного множества?* (Такая прямая, если она существует, называется *прямой Сильвестра*.) Несмотря на элементарную формулировку, задача оставалась нерешенной 40 лет. Возможно, ею просто никто не занимался. В 1933 году известный венгерский математик Эрдеш переоткрыл задачу Сильвестра и, после нескольких неудачных попыток ее решить, сообщил ее своему коллеге Тибору Грюнвальду (позже Грюнвальд сменил свою фамилию на Галлаи; он более известен под этой второй фамилией). Галлаи вскоре решил задачу. Однако широкую известность она получила еще через 10 лет, в 1943 году, когда Эрдеш опубликовал ее в популярном американском математическом журнале *American Mathematical Monthly* [2]. Одновременно с задачей в редакцию было представлено и решение, полученное Галлаи. Вскоре в редакцию поступило еще несколько решений, полученных Баком, Келли, Штейнбергом и Стинродом.

Ответ на вопрос Сильвестра положительный:

Теорема 1. *Для любого конечного неколлинеарного (т.е. не лежащего на одной прямой) набора точек на плоскости существует прямая Сильвестра.*

Мы будем называть это утверждение *теоремой Сильвестра – Галлаи*. Заметим, что первое опубликованное доказательство этой теоремы (1941) принадлежит Мельхиору. Известно множество доказательств теоремы Сильвестра – Галлаи, использующих идеи из самых разных областей математики. Мы обсудим некоторые из этих идей. Во-первых, мы руководствуемся принципом: полезней знать различные доказательства одной и

той же теоремы, чем одинаковые доказательства разных теорем. Во-вторых, различные идеи доказательства теоремы Сильвестра–Галлаи связаны с различными математическими теориями, и мы хотим дать читателю представление об этих теориях.

Немного истории: Сильвестр, Эрдеш и Галлаи

Прежде чем говорить о решениях задачи Сильвестра, скажем несколько слов о самом Сильвестре (1814–1897). Это математик, получивший фундаментальные результаты в теории инвариантов, полилинейной алгебре, теории чисел и комбинаторике. Кстати, Сильвестру принадлежит термин «детерминант». Кэли и Сильвестр – вот два самых знаменитых математика викторианской Англии.

Джеймс Джозеф Сильвестр родился в семье купца Абрахама Джозефа. Фамилию Сильвестр он взял позже. Сильвестр сменил несколько школ и колледжей, а затем учился в Кембриджском университете. Там он занял второе место по результатам очень серьезного выпускного математического экзамена. Экзамен, в принципе, давал право на получение одновременно степеней бакалавра и магистра. Но Сильвестр не получил эти степени, так как отказался от соответствующей формальной процедуры, включавшей признание канонов англиканской церкви. Научные степени Сильвестр получил только через 4 года, уже будучи профессором физики в лондонском университете.

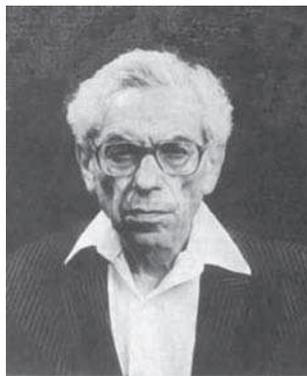
Сразу после этого Сильвестр переехал в США, чтобы преподавать математику в университете Вирджинии. Там он не проработал и пяти месяцев. Причина ухода состояла в том, что коллеги не поддержали его в стремлении выгнать одного студента.

После безуспешного поиска работы в США Сильвестр вернулся в Англию и стал работать специалистом по оценке финансовых рисков страховых компаний. Только в 1855 году (т.е. в возрасте 40 лет) ему удалось получить постоянную академическую позицию в Королевской военной академии в Вулвиче.

Так вышло, что расцвет математической карьеры Сильвестра пришелся на пенсионный возраст. В 1877–1883 годах Сильвестр возглавлял отделение математики в американском Университете Джонса Хопкинса, основал «Американский математичес-



Дж. Сильвестр



П. Эрдеш



Т. Галлаи

кий журнал» (*American Journal of Mathematics*). С 1883 года до конца жизни Сильвестр руководил кафедрой геометрии в Оксфорде. Задача Сильвестра приходится на этот, последний, период его жизни. Недавно появилась подробная биография Сильвестра [3].

Имя Пала Эрдеша (1913–1996), одного из самых известных и влиятельных математиков 20 века, конечно, знакомо читателям; ему задача Сильвестра обязана своей запоздалой популярностью. За свою жизнь Эрдеш опубликовал 1475 математических статей (это абсолютный рекорд среди математиков всех времен и народов). Большинство статей было написано с соавторами, которых насчитывается 511. В связи с этим было введено «число Эрдеша». Число Эрдеша для математика – это количество соавторов, отделяющих его от Эрдеша. Число Эрдеша для самого Эрдеша равно нулю, у его соавторов это число равно единице, у соавторов соавторов – двойке, и т.д. Большинство активно работающих математиков имеет малые числа Эрдеша (не больше 8). Например, числа Эрдеша авторов этой статьи равны 3 и 5.

Тибор Галлаи (1912–1992) был близким другом Эрдеша. Еще задолго до того, как они впервые увидели друг друга, они были знакомы заочно, как самые активные участники конкурса математических задач, проводимого Венгерским математическим журналом для старшей школы (этот журнал был близок по содержанию к журналу «Квант»). Галлаи стал победителем престижной математической олимпиады Этвеша и, как таковой, был принят в университет вне конкурса. Олимпиада Этвеша – самая старая в мире, она проводится с 1894 года по инициативе Венгерского физико-математического общества, которое возглавлял в то время известный физик барон Лоран Этвеш. Многие победители этой олимпиады стали в последствии знаменитыми математиками и физиками.

Келли и Штейнберг

Теперь, после долгого исторического введения, приступим к математике. Пожалуй, самое простое доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи принадлежит Келли (оно было опубликовано Кокстером [4]).

Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, для некоторого конечного множества M точек на плоскости прямой Сильвестра не существует. Тогда нам нужно доказать, что все точки коллинеарны. Предположим, что это не так. Рассмотрим три неколлинеарные точки A , B и C из множества M , такие, что расстояние от точки A до прямой BC минимально (т.е. среди всех пар «точка множества M » и «прямая, соединяющая две различные точки множества M » выберем такую, в которой расстояние от точки до прямой положительно и минимально). Заметим, что прямая BC содержит по крайней мере три точки множества M , иначе она будет прямой Сильвестра. Тогда две из этих точек, скажем B и C , лежат по одну сторону от основания перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC . Противоречие получается из такого факта: расстояние от одной из этих точек до прямой, соединяющей A с дру-

гой точкой, будет меньше, чем расстояние от A до прямой BC (рис. 1).

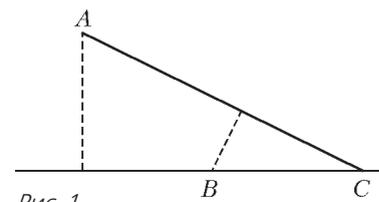


Рис. 1

Упражнение 1. Докажите, что высота тупого треугольника,

опущенная из вершины тупого угла, меньше высоты, опущенной из вершины острого угла. Докажите также аналогичное утверждение для прямоугольного треугольника.

Решение Келли очень просто, но обладает таким недостатком (скорее эстетическим и методологическим, чем собственно математическим). В формулировке задачи используются только понятия точки, прямой и отношения принадлежности. Евклидово расстояние в ней никак не фигурирует. На самом деле, есть много способов определить «расстояние» на плоскости. Эти разные «расстояния» отличны от привычного евклидова расстояния, но обладают похожими (или даже идентичными) свойствами. То, как определяется расстояние, не важно для отношения принадлежности между точками и прямыми. Многие из альтернативных «расстояний» могут быть использованы в доказательстве теоремы Сильвестра–Галлаи. Кажется естественным такой вопрос: можно ли обойтись в доказательстве теоремы только рассмотрением взаимного расположения точек и прямых, но не использовать такие понятия, как расстояние, угол, перпендикуляр и т.д. Оказывается, можно доказать теорему, используя только отношение принадлежности между точками и прямыми и отношение порядка между точками на прямой: такое доказательство принадлежит Штейнбергу.

Упражнение 2. Рассмотрим конечное множество точек M . Выберем точку X из M и прямую L , проходящую через точку X и не содержащую других точек множества M . Мы можем считать, что ни одна прямая, проходящая через X , не является прямой Сильвестра (иначе теорема доказана). Назовем *соединительной прямой* прямую, содержащую по меньшей мере 2 точки множества M . Ясно, что существует только конечное число соединительных прямых. Среди точек пересечения прямой L с различными соединительными прямыми найдется такая точка Y , что отрезок XY не содержит других точек пересечения. Докажите, что соединительная прямая, проходящая через точку Y , является прямой Сильвестра.

Указание. Если нет, то соединительная прямая L_Y , проходящая через Y , содержит по меньшей мере три точки множества M . Значит, с какой-то стороны от Y на прямой L_Y лежат две точки множества M . Обозначим через Z ту из точек с этой стороны от Y , которая будет второй по счету от Y (в смысле порядка точек на прямой). Одну из точек множества M , лежащих на прямой XZ , можно соединить с одной из точек множества M , лежащих на прямой L_Y так, что пересечение соответствующей соединительной прямой с прямой L находится строго внутри отрезка XY (здесь нужен небольшой перебор различных вариантов расположения точек). Противоречие с выбором точки Y .

Галлаи

Намеченное выше доказательство Штейнберга является модификацией доказательства Галлаи. Само доказательство Галлаи использует чуть больше, а именно, меру углов и понятие параллельности.

Снова рассмотрим прямую L , проходящую ровно через одну точку X нашего множества. Представим себе плоскость вложенной в трехмерное пространство (чтобы отличать ее от других плоскостей, назовем ее *начальной*), и зафиксируем некоторую точку O , не принадлежащую начальной плоскости (рис.2). Через точку O и прямую L проходит единственная плоскость.

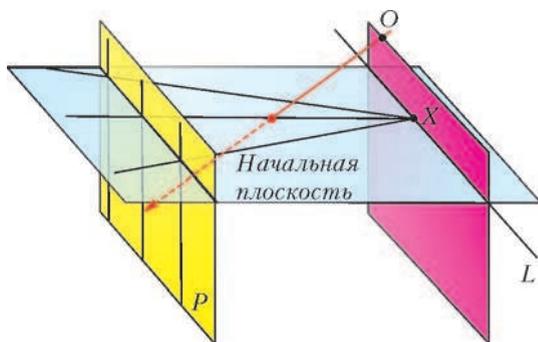


Рис. 2

Рассмотрим параллельную ей плоскость P , и спроецируем начальную плоскость на плоскость P из точки O . Заметим, что прямая L не имеет образа на плоскости P , поскольку никакой луч, начинающийся в O и проходящий через L , не пересечет P . Выражаясь образно, L переходит в «бесконечно удаленную прямую на плоскости P ». Четкое утверждение (которое нетрудно проверить) состоит вот в чем: прямые в начальной плоскости, проходящие через одну и ту же точку на прямой L , проецируются в параллельные прямые.

Напомним, что прямая L проходит через ровно одну точку X множества M . Кроме того, мы можем предполагать, что все прямые, проходящие через X и еще одну точку множества M , обязательно содержат какую-нибудь третью точку множества M . Образы этих прямых при нашей проекции являются параллельными прямыми, содержащими по меньшей мере по две точки множества M' (проекция множества M на плоскость P). Теперь доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи получается из следующего утверждения.

Рассмотрим конечное множество M' на плоскости и конечное множество параллельных прямых, такое, что каждая из этих прямых содержит по меньшей мере две точки множества M' , и все точки множества M' содержатся в объединении этих прямых. Рассмотрим прямую, соединяющую две точки множества M' и образующую наименьший ненулевой угол с направлением

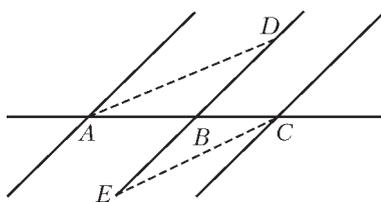


Рис. 3

рассматриваемых параллельных прямых. Эта прямая не может содержать никакой третьей точки множества M' . Действительно, если эта прямая содержит три точки A , B и C , то одна из прямых, соединяющих A или C с точкой E или D множества M' , образует еще меньший угол с направлением наших прямых (рис. 3).

Сколько прямых?

Укажем одно интересное следствие теоремы Сильвестра–Галлаи.

Теорема 2. *Предположим, что отмечены n точек на плоскости, не лежащих на одной прямой. Тогда найдется по меньшей мере n прямых, соединяющих пары отмеченных точек.*

Доказательство. Будем вести индукцию по количеству точек. Для трех неколлинеарных точек утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любого набора из n точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Рассмотрим теперь набор из $n + 1$ выделенной точки. Пусть A – одна из этих точек. Если оставшиеся n выделенных точек лежат на одной прямой, то, соединяя каждую из них с точкой A , получим еще n прямых; утверждение доказано.

Предположим теперь, что оставшиеся n выделенных точек не лежат на одной прямой. Тогда, согласно предположению индукции, они определяют по меньшей мере n прямых (каждая из которых соединяет две из оставшихся выделенных точек). Может так случиться, что все эти прямые проходят через точку A . В этом случае назовем точку A *плохой*. Если все выделенные точки плохие, то прямая, содержащая две выделенные точки, обязательно содержит и третью. Противоречие с теоремой Сильвестра–Галлаи.

Замечание. Естественный вопрос: сколько прямых Сильвестра определяет данное неколлинеарное множество из n точек? Известно [5], что прямых Сильвестра должно быть не меньше, чем $3n/7$. Гансен доказал в своей диссертации (1981), что прямых Сильвестра всегда не меньше, чем $n/2$. К сожалению, доказательство Гансена очень сложно, и его никому не удалось проверить. Унгар доказал [6], что n точек, не лежащих на одной прямой, определяют по меньшей мере $2\lfloor n/2 \rfloor$ разных направлений. Эту оценку нельзя улучшить.

На сфере

Обсудим еще одно доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи. Оно было предложено Е.Мельхиором и, независимо, Н.Стинродом – известным американским топологом. И само доказательство топологическое. Начнем с того, что перейдем с плоскости на сферу.

Рассмотрим центральную проекцию сферы на плоскость. Центральная проекция – это такое отображение сферы на плоскость, при котором прямая, соединяющая точку сферы с ее образом на плоскости, всегда проходит через центр сферы. Мы можем проецировать сферу на любую плоскость, не проходящую через центр. При такой проекции в каждую точку плоскости будет отображаться пара диаметрально противоположных точек сферы. Кроме того, на сфере найдется такая большая окружность (т.е. пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы), проекции точек которой не определены. Эта окружность параллельна плоскости, на которую мы проецируем.

Опишем теперь очень полезную конструкцию сферической двойственности. Каждой паре диаметрально противоположных точек на сфере соответствует большая окружность. А именно, проведем соответствующую

ший диаметр сферы, а также плоскость, проходящую через центр и перпендикулярную диаметру. Эта плоскость высечет на сфере некоторую большую окружность. Обратно, каждой большой окружности на сфере соответствуют ровно две диаметрально противоположные точки – концы диаметра, перпендикулярного плоскости данной большой окружности.

Теперь каждой точке на плоскости соответствует пара диаметрально противоположных точек на сфере (это соответствие устанавливается центральной проекцией, как описано выше), а следовательно, и некоторая большая окружность.

Упражнения

3. Сферическая двойственность «уважает» отношение инцидентности: если точка A лежит на большой окружности b , то соответствующая большая окружность a проходит через точку B .

4. Три точки на плоскости тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда соответствующие большие окружности на сфере проходят через одну и ту же пару диаметрально противоположных точек.

5. Пусть точкам A и B отвечают большие окружности a и b . Докажите, что угол между a и b равен сферическому расстоянию между A и B (рис. 4).

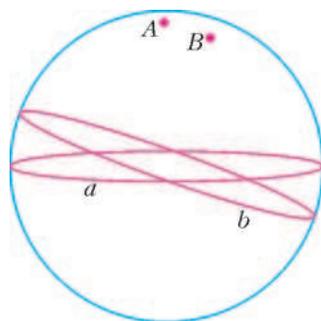


Рис. 4

Итак, мы видим, что теорема Сильвестра–Галлаи эквивалентна следующему утверждению. Пусть дано конечное множество больших окружностей на сфере. Тогда, если не все эти окружности проходят через одну и ту же пару диаметрально противоположных точек, то найдется точка, содержащая ровно две окружности из нашего множества.

Мельхиор, Стинрод и Эйлер

Опишем теперь доказательство Мельхиора и Стинрода.

Нам достаточно доказать утверждение про большие окружности на сфере, и тем самым будет доказана теорема Сильвестра–Галлаи. На самом деле можно доказать более общее утверждение. Рассмотрим конечное число точек на сфере. Будем называть эти точки *вершинами*. Рассмотрим также конечное число простых криволинейных дуг, соединяющих некоторые пары вершин. Допустим, что эти дуги не имеют общих точек, кроме вершин. Назовем эти дуги *ребрами*. Если на сфере нарисовать вершины и ребра, то они разобьют всю сферу на несколько кусков, которые мы будем называть *гранями*. Всю картинку, включающую вершины, ребра и грани, мы назовем *картой* на сфере.

Теорема 3. *Не существует такой карты на сфере, что каждая грань ограничена по меньшей мере тремя ребрами, а из каждой вершины выходит по меньшей мере шесть ребер.*

Из этой чисто топологической теоремы вытекает утверждение про большие окружности на сфере, сфор-

мулированное в конце предыдущего параграфа и эквивалентное теореме Сильвестра–Галлаи.

Доказательство. Пусть F_k – число граней, ограниченных k ребрами, а V_k – число вершин, из которых выходит k ребер. Обозначим через F , E и V , соответственно, общее число граней, число ребер и число вершин, принадлежащих рассматриваемой карте. Мы будем пользоваться известной *теоремой Эйлера*:

$$F - E + V = 2.$$

Читатель, скорее всего, знаком с этой теоремой; если это не так, мы рекомендуем доказать ее по индукции.

Посчитаем количество пар (вершина, выходящее из нее ребро). С одной стороны, каждое ребро ограничено ровно двумя вершинами. Значит, таких пар ровно $2E$. С другой стороны, число таких пар равно $6V_6 + 7V_7 + \dots \geq 6V$. Отсюда получаем неравенство $2E \geq 6V$.

Посчитаем теперь количество пар (грань, ребро на ее границе). С одной стороны, каждое ребро лежит на границе ровно двух граней. Значит, таких пар ровно $2E$. С другой стороны, число таких пар равно $3F_3 + 4F_4 + \dots \geq 3F$. Отсюда получаем неравенство $2E \geq 3F$.

Комбинируя полученные неравенства, приходим к противоречию:

$$6(E + 2) = 6V + 6F \leq 2E + 4E = 6E.$$

Упражнения

6. Рассмотрим карту на сфере. Количество ребер, выходящих из данной вершины, назовем *порядком* этой вершины. Докажите, что если каждая грань ограничена по меньшей мере тремя ребрами, то средний порядок вершины не превосходит 6. (Средний порядок вершины – это среднее арифметическое порядков всех вершин, то есть сумма порядков всех вершин, деленная на количество вершин.)

7. Рассмотрим выпуклый многогранник в трехмерном пространстве. Число ребер многогранника, выходящих из данной вершины, назовем *порядком* вершины. Число ребер многогранника, лежащих на данной грани, назовем *порядком* грани. Докажите, что средний порядок вершины, а также средний порядок грани не превосходят 6. Приведите пример многогранника, средний порядок грани которого превышает 5,5.

8. Следующее утверждение называется *двойственной теоремой Сильвестра–Галлаи*. Рассмотрим конечное множество прямых на плоскости, никакие две из которых не параллельны. Предположим, что эти прямые не проходят через одну и ту же точку. Тогда найдется точка, содержащая ровно две прямые рассматриваемого множества. Докажите, что двойственная теорема Сильвестра–Галлаи эквивалентна теореме Сильвестра–Галлаи. *Указание:* воспользуйтесь утверждением про большие окружности на сфере, а также центральной проекцией сферы на плоскость, при которой большие окружности переходят в прямые.

9. Покажите, что в утверждении двойственной теоремы Сильвестра–Галлаи можно предполагать без ограничения общности, что среди рассматриваемого конечного множества прямых нет никакой пары параллельных прямых. *Указание:* этого можно добиться, процируя сферу на подходящую плоскость.

Элкис и Зайденберг

Наконец, еще одно доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи, которое было придумано независимо Н.Элкисом и М.Зайденбергом. Начнем с двух упраж-

нений – они достаточно сложные, по уровню как серьезные олимпиадные задачи. Решения и указания к этим задачам можно найти в книге [7] (задача 38, б).

Упражнения

10. Пусть ABC – треугольник на плоскости, а PQR – вписанный в него треугольник (так, что вершины P, Q, R треугольника PQR принадлежат, соответственно, сторонам AB, BC, AC треугольника ABC ; рис. 5). Докажите, что площадь

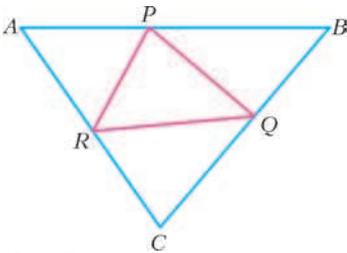


Рис. 5

одного из трех треугольников, остающихся при выкидывании треугольника PQR из треугольника ABC , не превышает площади треугольника PQR .

11. Если в предыдущем упражнении площадь треугольника APR совпадает с площадью треугольника PQR , а площади треугольников PBQ и QCR не меньше, то стороны PQ, QR и RP параллельны, соответственно, сторонам CA, AB, BC .

Докажем теперь двойственную теорему Сильвестра–Галлаи (а тем самым и саму теорему Сильвестра–Галлаи). Рассмотрим конечное число прямых на плоскости. Допустим, что не все эти прямые проходят через одну точку. Мы также можем предполагать без ограничения общности, что в рассматриваемом множестве прямых нет параллельных. Тогда можно рассмотреть треугольники, ограниченные различными тройками прямых. Среди всех таких треугольников выберем треугольник наименьшей площади. Обозначим этот треугольник через PQR . Теперь мы предположим, что через каждую точку пересечения двух прямых нашего множества проходит еще какая-то третья прямая нашего множества (это предположение должно привести нас к противоречию). В частности, есть прямые нашего множества, проходящие через вершины треугольника PQR , но не совпадающие со сторонами этого треугольника. Поскольку треугольник PQR имеет, по определению, минимальную площадь, эти дополнительные прямые не заходят внутрь треугольника. Значит, они ограничивают треугольник ABC , описанный вокруг треугольника PQR . Воспользуемся результатами приведенных выше упражнений. Мы получаем противоречие с минимальностью площади, если только стороны треугольника PQR не параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC . Однако мы предположили, что в рассматриваемом множестве прямых нет параллельных.

Комплексные числа: контрпример¹

К разряду неожиданностей можно отнести тот факт, что «комплексификация» теоремы Сильвестра–Галлаи не верна.

Точки и прямые, про которые мы говорили до сих пор, были действительными точками и действительными прямыми. Если ввести на плоскости систему координат,

¹ Читатель, не знакомый с комплексными числами, может пропустить этот раздел без ущерба для понимания дальнейшего текста.

то действительные точки изобразятся парами действительных чисел. Действительную прямую можно определить как множество действительных точек, удовлетворяющих определенному линейному уравнению с действительными коэффициентами. Однако в качестве координат можно брать и комплексные числа. Соответственно, можно говорить о комплексных точках, комплексных прямых и т.д. Множество всех комплексных точек плоскости сложнее себе представить, поскольку оно естественным образом отождествляется с действительным четырехмерным, а не двумерным, пространством. Рассмотрим такую систему уравнений:

$$z^3 + w^3 + (1 + 2z + 3w)^3 = zw(1 + 2z + 3w) = 0.$$

Существует ровно 9 комплексных точек (т.е. пар комплексных чисел (z, w)), удовлетворяющих этой системе – по три точки на каждой из трех прямых $z = 0, w = 0, 1 + 2z + 3w = 0$. Например, если подставить $z = 0$ в первое уравнение, то получится кубическое уравнение на w , у которого три комплексных решения – они соответствуют трем точкам на прямой $z = 0$; точно также можно поступить с двумя остальными прямыми. Комплексная прямая, проходящая через любые две из этих девяти точек, содержит и некоторую третью точку. С другой стороны, не существует комплексной прямой, проходящей через все 9 рассматриваемых точек.

Упражнение 12. Докажите эти утверждения.

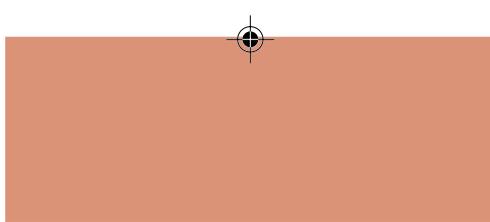
Итак, мы убедились, что над комплексными числами теорема Сильвестра–Галлаи не имеет места. Заметим, что коэффициенты в выражении $1 + 2z + 3w$ можно выбирать почти произвольным образом (избегая только некоторых вырождений, при которых одна из девяти точек убежит на бесконечность); например, можно с тем же успехом взять $e + \pi z + iw$.

Отметим, кстати, что уравнение $z^3 + w^3 + (1 + 2z + 3w)^3 = 0$ задает на комплексной плоскости кубическую кривую, а уравнение $zw(1 + 2z + 3w) = 0$ описывает точки перегиба этой кривой. Таким образом, наши девять точек – это точки перегиба комплексной кубической кривой. Из этих девяти точек только три могут быть вещественными.

Список литературы

1. J.J.Sylvester. *Mathematical Question 11851*. – Educational Times, 59 (1893), 98.
2. P. Erdos. *Problem 4065*. – Amer. Math. Monthly, 50 (1943), 65.
3. K.Parshall. *James Joseph Sylvester: Jewish mathematician in a Victorian world*. – John Hopkins University Press, Baltimore, 2006.
4. H.S.M.Coxeter. *A problem of collinear points*. – Amer. Math. Monthly, 55 (1948), 26–28.
5. L.Kelly, W.Moser. *On the number of ordinary lines determined by n points*. – Canad. J. Math., 1: (1958), 210–219.
6. P.Ungar. *$2N$ Noncollinear Points Determine at Least $2N$ Directions*. – Journal of Combinatorial Theory, Series A, 33 (1982), 343–347.
7. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*. – Библиотека математического кружка, вып. 17. – М.: 1974.

(Окончание следует)



Многоликий протон

И. ИВАНОВ

ИЗУЧАЯ СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА, ФИЗИКИ УЗНАЛИ, из чего сделаны атомы, добрались до атомного ядра и расщепили его на протоны и нейтроны. Все эти шаги давались довольно легко – надо было лишь разогнать частицы до нужной энергии, столкнуть их друг с другом, и тогда они сами разваливались на составные части.

А вот с протонами и нейтронами такой трюк уже не прошел. Хотя они и являются составными частицами, их не удается «разломать на части» ни в каком даже самом сильном столкновении. Поэтому физикам потребовались десятилетия для того, чтобы придумать разные способы заглянуть внутрь протона, увидеть его устройство и форму. В наши дни изучение структуры протона – одна из самых активных областей физики элементарных частиц.

Природа дает намеки

История изучения структуры протонов и нейтронов берет свое начало с 1930-х годов. Когда в дополнение к протонам были открыты нейтроны (1932), то, измерив их массу, физики с удивлением обнаружили, что она очень близка к массе протона. Более того, оказалось, что протоны и нейтроны «чувствуют» ядерное взаимодействие совершенно одинаковым образом. Настолько одинаковым, что, с точки зрения ядерных сил, протон и нейтрон можно считать как бы двумя проявлениями одной и той же частицы – нуклона: протон – это электрически заряженный нуклон, а нейтрон – нейтральный нуклон. Поменяйте протоны на нейтроны – и ядерные силы (почти) ничего не заметят.

Физики это свойство природы выражают как симметрию – ядерное взаимодействие симметрично относительно замены протонов на нейтроны, подобно тому как бабочка симметрична относительно замены левого на правое. Эта симметрия, кроме того что она сыграла важную роль в ядерной физике, была на самом деле первым намеком на то, что у нуклонов имеется интересное внутреннее строение. Правда тогда, в 30-е годы, физики этот намек не осознали.

Понимание пришло позже. Началось с того, что в 1940-50-е годы в реакциях столкновения протонов с ядрами различных элементов ученые с удивлением обнаруживали все новые и новые частицы. Не протоны, не нейтроны, не открытые к тому времени пи-мезоны, которые удерживают нуклоны в ядрах, а какие-то совсем новые частицы. При всем своем разнообразии эти новые частицы обладали двумя общими свойствами. Во-первых, они, так же как и нуклоны, очень охотно участвовали в ядерных взаимодействиях – сейчас такие частицы называют адронами. А во-

вторых, они были исключительно нестабильными. Самые неустойчивые из них распадались на другие частицы всего за триллионную долю наносекунды, не успев пролететь даже на размер атомного ядра!

Долгое время «зоопарк» адронов представлял из себя полную мешанину. В конце 1950-х годов физики узнали уже достаточно много разных видов адронов, начали сравнивать их друг с другом и вдруг увидели некую общую симметричность, даже периодичность их свойств. Была высказана догадка, что внутри всех адронов (в том числе и нуклонов) сидят некие простые объекты, которые получили название «кварки». Комбинируя кварки разными способами, можно получать разные адроны, причем именно такого типа и с такими свойствами, которые обнаруживались в эксперименте.

Что делает протон протоном?

После того как физики открыли кварковое устройство адронов и узнали, что кварки бывают нескольких разных сортов, стало понятно, что из кварков можно сконструировать много различных частиц. Так что уже никого не удивляло, когда последующие эксперименты продолжали один за другим находить новые адроны. Но среди всех адронов обнаружилось целое семейство частиц, состоящих, точно так же как и протон, только из двух *u*-кварков и одного *d*-кварка. Этакое «собратья» протона. И вот тут физиков подстерегал сюрприз.

Давайте сначала сделаем одно простое наблюдение. Если у нас есть несколько предметов, состоящих из одинаковых «кирпичиков», то более тяжелые предметы содержат больше «кирпичиков», а более легкие – меньше. Это очень естественный принцип, который можно называть принципом комбинирования или принципом надстройки, и он прекрасно выполняется как в повседневной жизни, так и в физике. Он проявляется даже в устройстве атомных ядер – ведь более тяжелые ядра просто состоят из большего числа протонов и нейтронов.

Однако на уровне кварков этот принцип совершенно не работает, и, надо признаться, физики еще не до конца разобрались, почему. Оказывается, тяжелые собратья протона тоже состоят из тех же самых кварков, что и протон, хотя они в полтора, а то и в два раза тяжелее протона. Они отличаются от протона (и различаются между собой) не *составом*, а взаимным *расположением* кварков, тем, в каком состоянии относительно друг друга эти кварки находятся. Достаточно изменить взаимное положение кварков – и мы из протона получим другую, заметно более тяжелую частицу.

А что будет, если все-таки взять и собрать вместе больше трех кварков? Получится ли новая тяжелая

частица? Удивительно, но не получится – кварки разобьются по трое и превратятся в несколько разрозненных частиц. Почему-то природа «не любит» объединять много кварков в одно целое! Лишь совсем недавно, буквально в последние годы, стали появляться намеки на то, что некоторые многокварковые частицы все же существуют, но это лишь подчеркивает, насколько природа их не любит.

Из этой комбинаторики следует очень важный и глубокий вывод – масса адронов вовсе не складывается из массы кварков. Но если массу адрона можно увеличить или уменьшить простым перекомбинированием составляющих его кирпичиков, значит, вовсе не сами кварки ответственны за массу адронов. И действительно, в последующих экспериментах удалось узнать, что масса самих кварков составляет лишь около двух процентов от массы протона, а вся остальная тяжесть возникает за счет силового поля (ему отвечают специальные частицы – глюоны), связывающего кварки вместе. Изменяя взаимное расположение кварков, например отодвигая их подальше друг от друга, мы тем самым изменяем глюонное облако, делаем его более массивным, из-за чего и возрастает масса адрона (рис. 1).

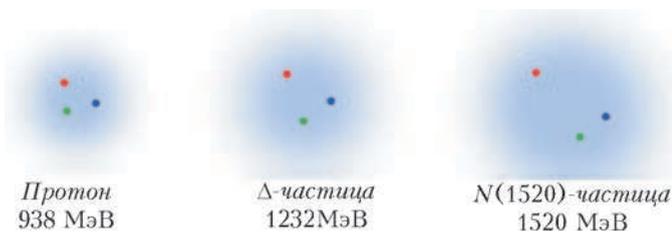


Рис.1. Условное изображение протона и нескольких его «собратьев». Цветные точки – это кварки, которые связаны друг с другом глюонным полем (голубое облачко). Несмотря на то, что все эти частицы составлены из одних и тех же кварков, у них разные массы и разные времена жизни. Массы частиц выражены в энергетических единицах – мегаэлектронвольтах (МэВ)

Что творится внутри быстро летящего протона?

Все описанное выше касается неподвижного протона, на языке физиков – это устройство протона в его системе покоя. Однако в эксперименте структура протона была впервые обнаружена в других условиях – внутри *быстро летящего* протона.

В конце 1960-х годов в экспериментах по столкновению частиц на ускорителях было замечено, что летящие с околосветовой скоростью протоны вели себя так, словно энергия внутри них не распределена равномерно, а сконцентрирована в отдельных компактных объектах. Эти сгустки вещества внутри протона знаменитый физик Ричард Фейнман предложил называть *партонами* (от английского *part* – часть).

В последующих экспериментах были изучены многие свойства партонов – например, их электрический заряд, их количество и доля энергии протона, которую каждый из них несет. Оказывается, заряженные партоны – это кварки, а нейтральные партоны – это глюоны. Да-да, те самые глюоны, которые в системе покоя протона просто «прислуживали» кваркам, притягивая

их друг к другу, теперь являются самостоятельными партонами и наряду с кварками несут «вещество» и энергию быстро летящего протона. Опыты показали, что примерно половина энергии запасена в кварках, а половина – в глюонах.

Партоны удобнее всего изучать в столкновении протонов с электронами. Дело в том, что, в отличие от протона, электрон не участвует в сильных ядерных взаимодействиях и его столкновение с протоном выглядит весьма просто: электрон на очень короткое время испускает виртуальный фотон, который врезается в заряженный партон и порождает в конце концов большое число частиц (рис.2). Можно сказать, что электрон является отличным скальпелем для «вскрытия» протона и разделения его на отдельные части – правда,

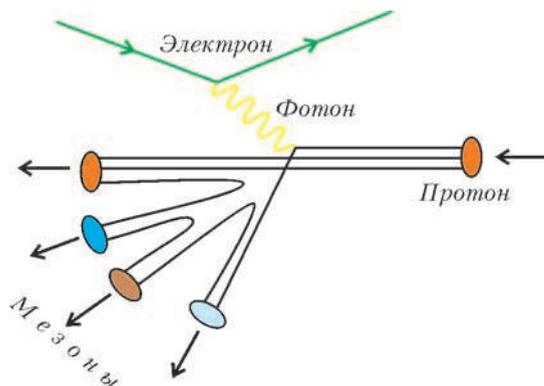


Рис.2. При столкновении протона с электроном между ними «проскакивает» квант электромагнитного поля – фотон. Сталкиваясь с одним из партонов в протоне, он порождает много вторичных адронов, например мезонов

лишь на очень короткое время. Зная, как часто происходят такие процессы на ускорителе, можно измерить количество партонов внутри протона и их заряды.

Кто такие партоны на самом деле?

И здесь мы подходим к еще одному поразительному открытию, которое сделали физики, изучая столкновения элементарных частиц при высоких энергиях.

В обычных условиях вопрос о том, из чего состоит тот или иной предмет, имеет универсальный ответ для всех систем отсчета. Например, молекула воды состоит из двух атомов водорода и одного атома кислорода – и не важно, смотрим ли мы на неподвижную или на движущуюся молекулу. Однако это правило – казалось бы, такое естественное! – нарушается, если речь идет об элементарных частицах, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. В одной системе отсчета сложная частица может состоять из одного набора субчастиц, а в другой системе отсчета – из другого. Получается, что *состав – понятие относительное!*

Как такое может быть? Ключевым здесь является одно важное свойство: количество частиц в нашем мире не фиксировано – частицы могут рождаться и исчезать. Например, если столкнуть вместе два электрона с достаточно большой энергией, то вдобавок к этим двум электронам может родиться либо фотон, либо электрон-позитронная пара, либо еще какие-нибудь части-

цы. Все это разрешено квантовыми законами, именно так и происходит в реальных экспериментах.

Но этот «закон несохранения» частиц работает *при столкновениях* частиц. А как же получается, что один и тот же протон с разных точек зрения выглядит состоящим из разного набора частиц? Дело в том, что протон – это не просто три кварка, сложенные вместе. Между кварками существует силовое глюонное поле. Вообще, силовое поле (как, например, гравитационное или электрическое поле) – это некая материальная «сущность», которая пронизывает пространство и позволяет частицам оказывать силовое влияние друг на друга. В квантовой теории поле тоже состоит из частиц, правда из особенных – виртуальных. Количество этих частиц не фиксировано, они постоянно «отпочковываются» от кварков и поглощаются другими кварками.

Покоящийся протон действительно можно представить себе как три кварка, между которыми перескакивают глюоны. Но если взглянуть на тот же протон из другой системы отсчета, словно из окна проезжающего мимо «релятивистского поезда», то мы увидим совсем иную картину. Те виртуальные глюоны, которые склеивали кварки вместе, покажутся уже менее виртуальными, «более настоящими» частицами. Они, конечно, по-прежнему рождаются и поглощаются кварками, но при этом какое-то время живут сами по себе, летят рядом с кварками, словно настоящие частицы. То, что выглядит простым силовым полем в одной системе отсчета, превращается в другой системе в поток частиц! Заметьте, сам протон мы при этом не трогаем, а только смотрим на него из другой системы отсчета.

Дальше – больше. Чем ближе скорость нашего «релятивистского поезда» к скорости света, тем более удивительную картину внутри протона мы увидим. По мере приближения к скорости света мы заметим, что глюонов внутри протона становится все больше и больше. Более того, они иногда расщепляются на кварк-антикварковые пары, которые тоже летят рядом и тоже считаются партонами. В результате ультрарелятивистский протон, т.е. протон, движущийся относительно нас со скоростью, очень близкой к скорости света, предстает в виде взаимопроникающих облачков кварков, антикварков и глюонов, которые летят вместе и как бы поддерживают друг друга (рис.3).

Читатель, знакомый с теорией относительности, может забеспокоиться. Вся физика основана на том принципе, что любой процесс протекает одинаково во всех инерциальных системах отсчета. А тут получает-

ся, что состав протона зависит от системы отсчета, из которой мы его наблюдаем?!

Да, именно так, но это никак не нарушает принцип относительности. Результаты физических процессов – например, какие частицы и сколько рождаются в результате столкновения – действительно оказываются инвариантными, хотя состав протона зависит от системы отсчета.

Эта необычная на первый взгляд, но удовлетворяющая всем законам физики ситуация схематично проиллюстрирована на рисунке 4. Здесь показано, как столкновение двух протонов с большой энергией выглядит

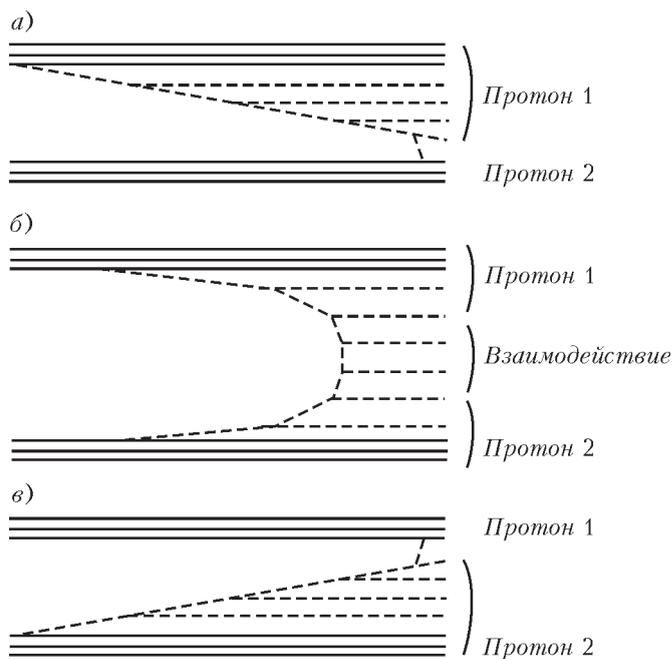


Рис.4 Схематическое изображение столкновения двух протонов при очень большой энергии: в системе покоя второго протона (а), в системе центра масс (б), в системе покоя первого протона (в). Во всех трех случаях взаимодействие протонов осуществляется через обмен «глюонного дерева», но к кому именно его относить (к первому или ко второму протону или же считать отдельным взаимодействием) – зависит от системы отсчета

в разных системах отсчета: в системе покоя одного протона, в системе центра масс, в системе покоя другого протона. Взаимодействие между протонами осуществляется через каскад расщепляющихся глюонов, но только в одном случае этот каскад считается «внутренностью» одного протона, в другом случае –

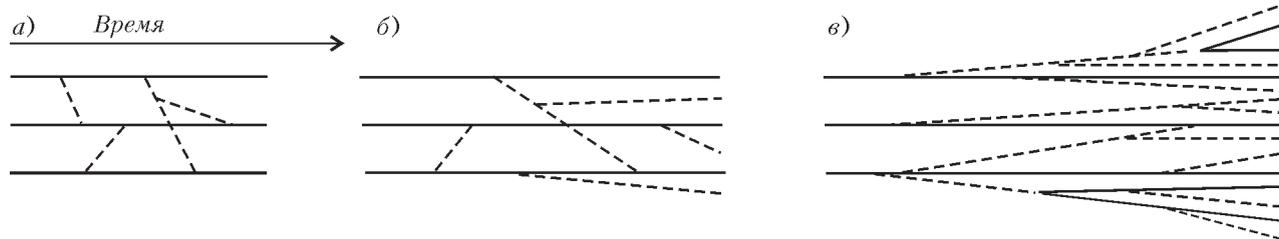


Рис.3. Схематическое изображение протона в разных системах отсчета. Медленно движущийся протон (а) можно представлять в виде трех кварков (сплошные линии), которые связаны друг с другом глюонами (штриховые линии). В быстро движущемся протоне (б) глюоны уже иногда летят рядом с кварками. При скорости протона, очень близкой к скорости света (в), и глюоны, и порожденные ими кварк-антикварковые пары становятся полноправными партонами – составляющими частями протона

частью другого протона, а в третьем – это просто некий объект, которым обмениваются два протона. Этот каскад существует, он реален, но к какой части процесса его надо относить – зависит от системы отсчета.

Трехмерный портрет протона

Все результаты, про которые мы только что рассказали, базировались на экспериментах, выполненных довольно давно – в 60-70-х годах прошлого века. Казалось бы, с тех пор все уже должно быть изучено и все вопросы должны найти свои ответы. Но нет – устройство протона по-прежнему остается одной из самых интересных тем в физике элементарных частиц. Более того, в последние годы интерес к ней снова возрос, потому что физики поняли, как получить «трехмерный» портрет быстро движущегося протона, который оказался гораздо сложнее портрета неподвижного протона.

Классические эксперименты по столкновению протонов рассказывают лишь о количестве партонов и их распределении по энергии. В таких экспериментах партоны участвуют как независимые объекты, а значит, из них нельзя узнать, как партоны расположены друг относительно друга, как именно они складываются в протон. Можно сказать, что долгое время физикам был доступен лишь «одномерный» портрет быстро летящего протона.

Для того чтобы построить настоящий, трехмерный портрет протона и узнать распределение партонов в пространстве, требуются гораздо более тонкие эксперименты, чем те, которые были возможны 40 лет назад. Такие эксперименты физики научились ставить совсем недавно, буквально в последнее десятилетие. Они поняли, что среди огромного количества разных реакций, которые происходят при столкновении электрона с протоном, есть одна особенная реакция – *глубоко-виртуальное комптоновское рассеяние*, – которая и сможет рассказать о трехмерной структуре протона.

Вообще, комптоновским рассеянием, или эффектом Комптона, называют упругое столкновение фотона с какой-нибудь частицей, например с протоном. Выглядит оно так: прилетает фотон, поглощается протоном, который на короткое время переходит в возбужденное состояние, а потом возвращается в исходное состояние, испуская фотон в каком-нибудь направлении.

Комптоновское рассеяние обычных световых фотонов не приводит ни к чему интересному – это простое отражение света от протона. Для того чтобы «вступила в игру» внутренняя структура протона и «почувствовались» распределения кварков, надо использовать фотоны очень большой энергии – в миллиарды раз больше, чем в обычном свете. А как раз такие фотоны – правда, виртуальные – легко порождает налетающий электрон. Если теперь объединить одно с другим, то и получится глубоко-виртуальное комптоновское рассеяние (рис.5).

Главная особенность этой реакции состоит в том, что она не разрушает протон. Налетающий фотон не просто бьет по протону, а как бы тщательно его ощупывает и затем улетает прочь. То, в какую сторону он улетает

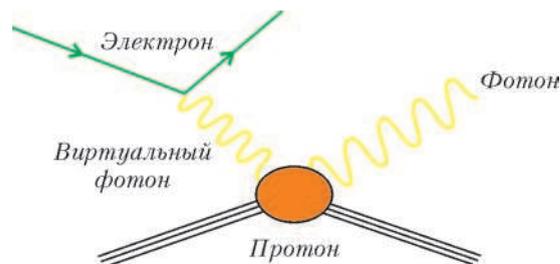


Рис.5. Схема глубоко-виртуального комптоновского рассеяния. Налетающий электрон испускает виртуальный фотон, который и рассеивается на протоне наподобие эффекта Комптона

и какую часть энергии у него отбирает протон, зависит от устройства протона, от взаимного расположения партонов внутри него. Именно поэтому, изучая этот процесс, можно восстановить трехмерный облик протона, как бы «вылепить его скульптуру».

Правда, для физика-экспериментатора сделать это очень непросто. Нужный процесс происходит довольно редко, и зарегистрировать его трудно. Первые экспериментальные данные об этой реакции были получены лишь в 2001 году на ускорителе HERA в немецком ускорительном комплексе DESY в Гамбурге; новая серия данных сейчас обрабатывается экспериментаторами. Впрочем, уже сегодня, на основании первых данных, теоретики рисуют трехмерные распределения кварков и глюонов в протоне. Физическая величина, про которую физики раньше строили лишь предположения, наконец стала «проступать» из эксперимента.

Ждут ли нас какие-нибудь неожиданные открытия в этой области? Вполне вероятно, что да. В качестве иллюстрации скажем, что в ноябре 2008 года появилась интересная теоретическая статья, в которой утверждается, что быстро летящий протон должен иметь вид не плоского диска, а двояковогнутой линзы. Так получается потому, что партоны, сидящие в центральной области протона, сильнее сжимаются в продольном направлении, чем партоны, сидящие на краях. Было бы очень интересно проверить эти теоретические предсказания экспериментально!

Почему все это интересно физикам?

Зачем вообще физикам надо знать, как именно распределено вещество внутри протонов и нейтронов?

Во-первых, этого требует сама логика развития физики. В мире есть много поразительно сложных систем, с которыми современная теоретическая физика пока не может полностью совладать. Адроны – одна из таких систем. Разбираясь с устройством адронов, мы оттачиваем способности теоретической физики, которые вполне могут оказаться универсальными и, возможно, помогут в чем-то совсем ином, например при изучении сверхпроводников или других материалов с необычными свойствами.

Во-вторых, тут есть непосредственная польза для ядерной физики. Несмотря на почти вековую историю изучения атомных ядер, теоретики до сих пор не знают точный закон взаимодействия протонов и нейтронов.

Им приходится этот закон отчасти угадывать, исходя из экспериментальных данных, отчасти конструировать на основе знаний о структуре нуклонов. Тут-то и помогут новые данные о трехмерном устройстве нуклонов.

В-третьих, несколько лет назад физики сумели получить ни много ни мало новое агрегатное состояние вещества – кварк-глюонную плазму. В таком состоянии кварки не сидят внутри отдельных протонов и нейтронов, а свободно гуляют по всему сгустку ядерного вещества. Достичь его можно, например, так: тяжелые ядра разгоняются в ускорителе до скорости, очень близкой к скорости света, и затем сталкиваются лоб в лоб. В этом столкновении на очень короткое время возникает температура в триллионы градусов, которая

и расплавляет ядра в кварк-глюонную плазму. Так вот, оказывается, что теоретические расчеты этого ядерного плавления требуют хорошего знания трехмерного устройства нуклонов.

Наконец, эти данные очень нужны для астрофизики. Когда тяжелые звезды взрываются в конце своей жизни, от них часто остаются чрезвычайно компактные объекты – нейтронные и, возможно, кварковые звезды. Сердцевина этих звезд целиком состоит из нейтронов, а может быть даже и из холодной кварк-глюонной плазмы. Такие звезды уже давно обнаружены, но что происходит у них внутри – можно только догадываться. Так что хорошее понимание кварковых распределений может привести к прогрессу и в астрофизике.

НАНОТЕХНОЛОГИИ

Космический нанолифт

К.БОГДАНОВ

ИЗВЕСТНО, ЧТО МНОГИЕ СПУТНИКИ ЗЕМЛИ, например спутники связи и метеорологические спутники, находятся на геостационарных орбитах и, таким образом, могут неподвижно висеть над одной и той же точкой ее поверхности.

Оценим высоту H геостационарной орбиты над поверхностью Земли. Пусть $R_3 = 6400$ км = $6,4 \cdot 10^6$ м – радиус Земли, $T = 24$ ч = 86400 с – период ее обращения вокруг оси. Тогда линейная скорость v геостационарного спутника в инерциальной системе отсчета, связанной с осью Земли, равна

$$v = \frac{2\pi(R_3 + H)}{T}.$$

С другой стороны, центростремительное ускорение спутника a должно быть равно ускорению свободного падения g на данной высоте:

$$a = \frac{v^2}{R_3 + H},$$

$$g = g_0 \left(\frac{R_3}{R_3 + H} \right)^2, \text{ где } g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2,$$

$$a = g.$$

Отсюда после нескольких алгебраических преобразований получаем

$$H = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_3^2 T^2}{4\pi^2}} - R_3 = 35900 \text{ км}.$$

Еще у К.Э.Циолковского возникла мысль использовать геостационарные спутники, а все необходимое для работы доставлять туда на космическом лифте по

тросу, соединяющему спутник с точкой на Земле, над которой он находится. Однако простые расчеты показали, что такой трос, сделанный даже из самых прочных сортов стали, оборвется под силой собственной тяжести.

Найдем, какой может быть максимальная длина L троса из стали, который не разорвется под силой собственной тяжести. Предел прочности стали $\sigma_{пр} = 0,8$ ГПа, плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³. Если S – площадь поперечного сечения троса, то вес P троса длиной L и плотностью ρ равен $P = \rho g L S$. Когда трос подвешен за один конец, механическое напряжение σ (отношение силы упругости троса к площади его поперечного сечения) в самой верхней точке троса равно

$$\sigma = \frac{P}{S} = \rho g L.$$

Чтобы трос не разорвался, σ должно быть меньше $\sigma_{пр}$, откуда следует, что

$$L < \frac{\sigma_{пр}}{\rho g} \approx 10 \text{ км}.$$

Полученное значение длины троса действительно гораздо меньше высоты геостационарной орбиты спутника.

Принято считать, что самыми прочными материалами на Земле сегодня являются углеродные нанотрубки. Теоретически их прочность должна составлять около 300 ГПа, однако экспериментальные значения оказываются не более 60 ГПа. Эти различия, по-видимому, вызваны отсутствием технологии производства длинных нанотрубок без дефектов. В настоящее время длина нанотрубок составляет не более нескольких

миллиметров. Предположим, что через некоторое время с помощью методов нанотехнологий станет возможным изготовление бездефектных нанотрубок длиной в сотни и тысячи километров. Это сделает возможным вернуться к идее космического лифта, используя вместо троса нанотрубки.

Найдем массу M углеродной нанотрубки длиной $L = 1$ км и диаметром $D = 1,4$ нм, считая, что нанотрубка состоит из атомов углерода, образующих правильные шестиугольники с ребром $d = 0,14$ нм (см. рисунок). Легко показать, что ширина шестиугольника (расстояние между параллельными ребрами) составляет $a = d\sqrt{3}$. Вдоль периметра нанотрубки укладывается полоска из n таких шестиугольников, причем

$$n = \frac{\pi D}{d\sqrt{3}} = 18.$$

Общее число атомов углерода в этих шестиугольниках равно $4n$. Аналогичные полоски из n атомов повторяются вдоль длины нанотрубки через расстояние, равное $3d$. Поэтому общее число атомов N у такой нанотрубки длиной L составит

$$N = 4n \frac{L}{3d} = \frac{4 \cdot 18 \cdot 10^3 \text{ м}}{3 \cdot 0,14 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 1,7 \cdot 10^{14}.$$

Масса такой нанотрубки будет равна

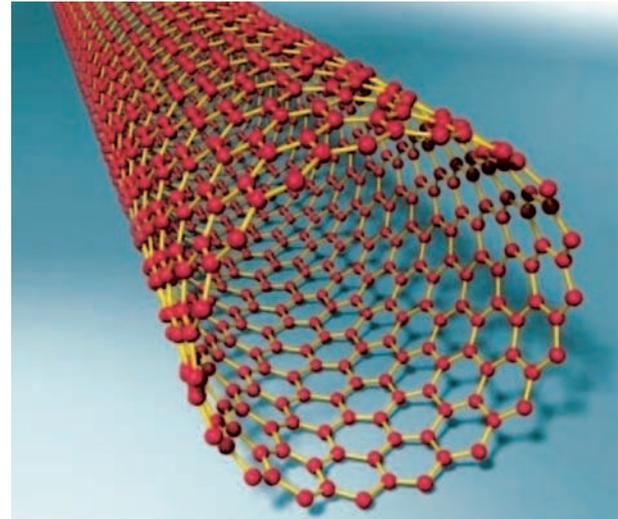
$$M = N \cdot 12 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3,4 \cdot 10^{-12} \text{ кг}.$$

Считая прочность троса из нанотрубок равной $\sigma_{\text{пр}} = 300$ ГПа, а его плотность $\rho = 1400$ кг/м³, определим максимальную длину L_{max} этого троса, не обрывающегося под силой собственной тяжести. Причем изменением ускорения свободного падения при удалении от Земли сначала будем пренебрегать.

Воспользуемся результатами расчетов для стального троса и найдем напряжение нашего троса из нанотрубок: $\sigma = \rho g L$. Чтобы трос не разорвался, должно выполняться условие

$$\sigma < \sigma_{\text{пр}}, \text{ или } L_{\text{max}} < \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\rho g} \approx 22000 \text{ км}.$$

Уже неплохой результат.



А какой может быть максимальная длина L_{max} этого не обрывающегося под силой собственной тяжести троса, если учесть изменение ускорения свободного падения при удалении от Земли?

Пусть площадь поперечного сечения троса равна S . Тогда вес dP отрезка троса длиной dH и плотностью ρ равен $dP = \rho g S dH$, где $g = g_0 \left(\frac{R_3}{R_3 + H} \right)^2$. Если трос длиной L подвесить за один конец, то напряжение в самой верхней точке троса будет равно

$$\sigma = \frac{P}{S} = \rho g_0 R_3^2 \int_0^L \frac{dH}{(R_3 + H)^2} = \rho g_0 R_3 \frac{L}{R_3 + L}.$$

Последний множитель в правой части полученного выражения при значениях $L > R_3$ монотонно увеличивается, стремясь к единице. Отсюда следует, что напряжение σ не может быть больше $\rho g_0 R_3 \approx 0,3 \sigma_{\text{пр}}$.

Таким образом, трос, сделанный из углеродных нанотрубок, в гравитационном поле Земли может быть любой длины, так как он никогда не разорвется под действием собственной тяжести. Это делает идею космического лифта вполне реальной.

ИНФОРМАЦИЯ

Благотворительный фонд «Новая мысль» (учредитель ЗАО «Финам») объявляет конкурс среди лиц, склонных к критическому анализу различных проблем физики, математики и информатики. Конкурсант должен сам поставить задачу и представить ее решение.

Цель конкурса: выявление и поощрение самостоятельно и конструктивно мыслящих людей.

Конкурс – ежегодный. Условия проведения очередного конкурса объявляются в декабре, итоги подводятся в мае следующего года, причем отдельно для лиц не старше 18 лет и для лиц до 35 лет.

Премияльные фонды формируются в следующих размерах:

для участников возрастной категории до 18 лет – 300000 руб. (главная премия 150000 руб., три поощрительные по 50000 руб.);

для участников возрастной категории до 35 лет – 500000 руб. (главная премия 200000 руб., три поощрительные по 100000 руб.).

Оргкомитет конкурса планирует впоследствии увеличение объемов наградных фондов.

Обращение-декларация Оргкомитета конкурса к участникам, правила оформления заявок, сроки, место и форма представления конкурсных материалов, а также прочая информация – все это будет опубликовано в шестом номере журнала «Квант» за 2009 год и в начале декабря помещено на сайте журнала «Квант».



Задача Эрдеша – Секереша: продолжение истории

В. КОШЕЛЕВ, А. РАЙГОРОДСКИЙ

Снова в путь

В «Кванте» №2 за этот год была опубликована наша статья «Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках» [1]. Там мы рассказывали удивительную (а местами даже романтическую) историю одной из самых красивых и популярных проблем комбинаторной геометрии – историю, которая началась 75 лет назад и которая весьма далека от своего завершения. Читателю, желающему как следует понять истоки того, о чем мы поведем речь в нынешней статье, необходимо, конечно, вооружиться вышеупомянутой статьей, ведь здесь мы лишь напомним краткое содержание «предыдущих серий», а после двинемся в принципиально новые для нас, до сих пор неизведанные области.

Итак, основными объектами нашего исследования были множества точек *общего положения* на плоскости. Напомним, что таковы все множества, никакие три элемента которых не лежат на одной прямой. Нашей целью было отыскание для каждого натурального числа n значения функции $g(n)$, которую мы полагали равной наименьшему g такому, что в любом множестве общего положения на плоскости, имеющем мощность g , обязательно есть n точек, являющихся вершинами выпуклого n -угольника.

Сперва мы обсудили вопрос о поведении функции $g(n)$ при $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ и выяснили, что всякий раз $g(n) = 2^{n-2} + 1$. Затем мы убедились в том, что вообще при всех $n \geq 3$ величина $g(n)$ конечна и что, более того, $g(n) \leq 4^n$, точнее $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 1$ при $n \geq 5$. Наконец, мы показали, что опять-таки при любом n $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$.

Вот, в сущности, и все. Оказывается, однако, что это лишь начало пути. И дело не только в том, что точный вид функции $g(n)$ по-прежнему неизвестен (мы лишь можем верить вслед за авторами проблемы, что $g(n) = 2^{n-2} + 1$); дело еще и в том, что исходная задача допускает ряд весьма естественных, ничуть не менее красивых обобщений и, как принято говорить в науке, модификаций. Именно о них мы теперь и поговорим.

Выпуклые и пустые многоугольники

Модификация задачи Эрдеша – Секереша

Спустя без малого полвека с момента выхода в свет замечательной статьи [2], а точнее в 1978 году, П. Эрдеши предложил слегка видоизменить условие исходной проблемы, которая к тому времени стала классической.

Он задался вопросом: что если мы будем искать в том или ином множестве X общего положения на плоскости не просто вершины выпуклых многоугольников, но вершины таких выпуклых многоугольников, внутри которых нет других точек множества X ? Такие многоугольники естественно называть *пустыми* или *дырами*. На рисунке 1 показан пример дыры и пример не дыры.

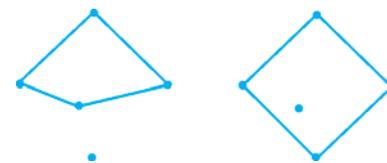


Рис. 1. Пример дыры и не дыры

Введем величину $h(n)$, которая послужит аналогом величины $g(n)$ в рамках новой задачи. Что это значит?

По идее, все очень просто. Допустим, для данного натурального $n \geq 3$ мы нашли такое число h , что в любом множестве общего положения на плоскости, имеющем мощность h , есть пустой n -угольник и найдется множество общего положения на плоскости, имеющее размер $h - 1$ и дыр на n вершинах не содержащее. Вот и положим тогда $h(n) = h$. Просто? Не совсем. Дело в том, что сходу не вполне понятно, почему наличие пустых многоугольников в произвольном h -точечном множестве гарантирует нам их присутствие в каждом множестве размера $h + 1$. Возникает проблема с соблюдением условия пустоты, которого раньше (т.е. при определении величины $g(n)$) вовсе не было. Иными словами, если прежде мы спокойно говорили о *пограничной* величине $g(n)$, начиная с которой всякое множество соответствующего размера содержало выпуклый многоугольник, то отныне такое спокойствие еще нужно заслужить. По счастью, проблема легко устранима.

Утверждение 1. Пусть при некотором h любое множество общего положения на плоскости, имеющее мощность h , содержит выпуклый и пустой n -угольник. Тогда то же самое верно и для каждого множества общего положения размера $h + 1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество X мощности $h + 1$. Пусть H – многоугольник, являющийся его выпуклой оболочкой (см. [1]). Удалим из X любую вершину этого многоугольника. Останется множество размера h , в котором, по нашему предположению, есть выпуклый и пустой n -угольник. Очевидно, выкинутая нами вершина находится вне этого n -угольника. Значит, X содержит выпуклый и пустой n -угольник. Утверждение доказано.

Если каждому h , для которого существует множество

размера h без выпуклых и пустых n -угольников, ставить в соответствие 0, а каждому h , для которого подобного множества нет, сопоставлять 1, то, ввиду утверждения 1, возникнет одна из трех ситуаций, изображенных графически на рисунке 2. В первой

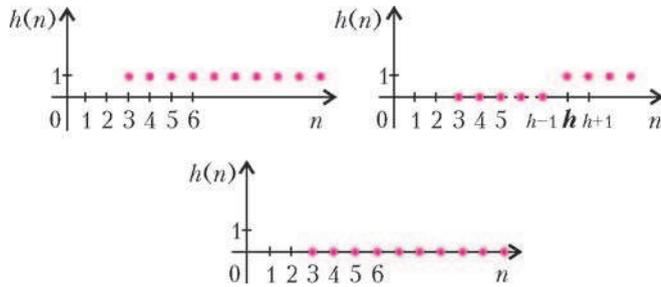


Рис. 2. Ситуации, возникающие при определении $h(n)$



Рис. 3. Четыре точки без выпуклых четырехугольников

ситуации $h(n) = 3$, во второй – $h(n) = h$, в третьей ситуации можно говорить, что $h(n) = \infty$ или что $h(n)$ не существует.

Попробуем разобраться с малыми n . Очевидно, что $h(3) = 3$. Зная доказательство того, что $g(4) = 5$, нетрудно понять, что и $h(4) = 5$. Иллюстрации к тому прежние (рис. 3, 4).

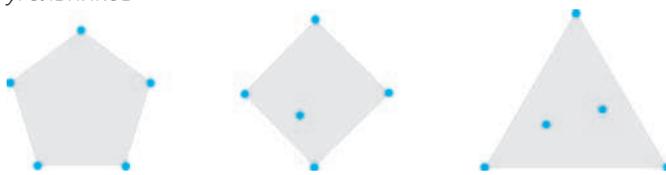


Рис. 4. Варианты взаимного расположения пяти точек

Так, может, $h(n) = g(n)$?

...И Эрдеш только зря старался, придумывая модификацию своей старой задачи? Э нет, все куда интереснее. Во-первых, на рисунке 5 изображен пример множества из девяти точек: оно в общем положении, и, как положено, выпуклые пятиугольники на его элементах строятся; однако ни один из этих пятиугольников пустым не является. И так, $h(5) \geq 10 > g(5) = 9$. На самом деле $h(5) = 10$. Это показал Х.Харборт в 1978 году. Мы не станем приводить здесь его рассуждение, которое, впрочем, не очень и сложное.

А в 1983 году, можно сказать, грянул гром среди ясного неба: Дж.Хортон доказал несуществование величины $h(7)$ и, стало быть, всех $h(n)$ при $n \geq 7$. Для каждого h он построил пример множества из h точек на плоскости, в котором нет выпуклых и пустых семи-

угольников. В следующем разделе мы опишем хортонскую конструкцию.

Множества Хортонa

Итак, нам нужно для каждого h построить множество на плоскости, размер которого h и в котором любой выпуклый семиугольник содержит хотя бы одну точку внутри. Ради реализации этого замысла нам потребуются вспомнить определения «чашек» и «крышек».

Чашки и крышки: краткое напоминание. Конечно, определение чашек и крышек мы уже давали в статье [1], и именно к ней нам следует отослать читателя. Соответственно, здесь мы не станем вдаваться в какие-либо подробности. Мы лишь подчеркнем, что и чашки, и крышки определяются в некоторой (любой) системе координат, каковую отныне мы будем считать раз и навсегда зафиксированной на плоскости. В этой системе координат типичная чашка и типичная крышка выглядят так, как это показано на рисунке 6.

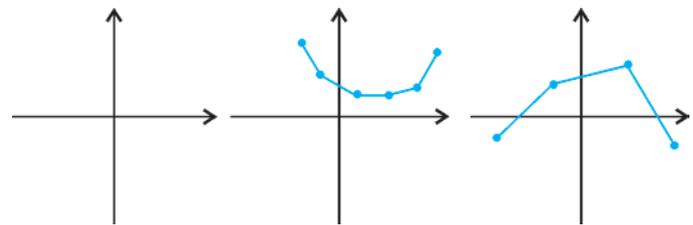


Рис. 6. Система координат и типичные чашка и крышка в ней

Напомним еще, что k -чашка – это чашка с k узлами и, стало быть, $k - 1$ звеньями. Например, чашка на рисунке 6 является 6-чашкой. Аналогично определяются и k -крышки.

И для чего же нам чашки с крышками? А все дело в том, что выполнено следующее простое утверждение.

Утверждение 2. *Любой выпуклый семиугольник на плоскости, у которого в данной системе координат нет сторон, параллельных оси Oy (назовем такие стороны вертикальными), либо содержит 5-чашку, либо содержит 5-крышку.*

Доказательство утверждения мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Вывод из утверждения такой: если для данного h мы построили множество размера h на плоскости, в котором никакие две точки не служат концами вертикального отрезка и в котором любая 5-чашка и любая 5-крышка содержат хотя бы одну точку этого множества, то и любой выпуклый семиугольник в этом множестве не пуст. (Мы говорим, что чашка (или крышка) содержит точку, если эту точку содержит выпуклый пятиугольник, полученный из нашей чашки (крышки) добавлением недостающего ребра.)

Небольшое упрощение задачи. Итак, нам нужно для каждого h придумать множество мощности h на плоскости, в котором нет вертикальных отрезков и в котором каждая 5-чашка и каждая 5-крышка в известном смысле содержат точки. А в сущности, зачем для каждого h ? На самом деле, вполне хватит нам и произвольной бесконечной последовательности натуральных чисел $h_k, k = 1, 2, 3, \dots$. Просто ввиду утвер-

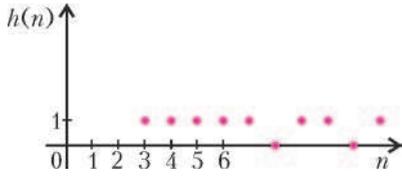


Рис. 7. Невозможная ситуация

ждения 1 не бывает ситуации, изображенной на рисунке 7 (сравните с рисунком 2), ведь если есть на графике ноль, то и слева от него стоят только нули.

В дальнейшем мы рассмотрим $k = 4, 5, 6, \dots$ и в качестве h_k возьмем 2^k . Дабы сделать изложение предельно ясным, мы сперва во всех подробностях опишем конструкцию в случае $k = 4$.

Случай $k = 4$. Нашей целью является построение множества из шестнадцати точек на плоскости. Оно должно быть общего положения, и в нем не должно быть пустых 5-чашек или 5-крышек, а также вертикальных отрезков. Организуем итеративный процесс построения. Идея простая: если уже есть какое-то множество, то его копию, полученную параллельным переносом на «достаточно большое расстояние», объединим с ним и все вместе объявим новым множеством. Понятно сразу, что, стартовав с одноточечного множества, мы за четыре шага как раз и получим шестнадцать точек.

Что ж, положим $S_1 = \{(0;0)\}$, т.е. S_1 – это множество, состоящее только из одной точки – начала координат (рис.8,а). Сдвинем это множество на вектор $(1; 8)$, получится множество $S_2 = \{(0;0), (1;8)\}$, которое мы с легкостью изобразим на рисунке 8,б. Теперь S_2 мы сдвигаем на вектор $(17; 4)$. Имеем

$$S_3 = S_2 \cup \{(17;4), (18;12)\}.$$

Это своего рода «змейка», показанная в уменьшенном по оси x масштабе на рисунке 8,в.

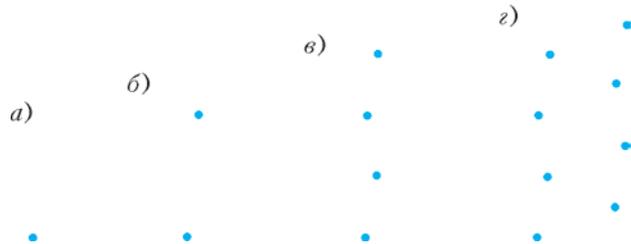


Рис. 8. Итеративное построение множества Хортона для $k = 1, 2, \text{ и } 3$

Далее осуществляем сдвиг всей змейки на вектор $(17^2; 2) = (289; 2)$ (совсем далеко от исходной змейки располагаем ее копию). Образуется множество S_4 с правой части рисунка 8,з, которую мы надлежащим образом промасштабировали в сравнении с другими частями того же рисунка.

Наконец, из S_4 формируем S_5 при помощи переноса на $(17^3; 1) = (4913; 1)$ (рис.9). Очевидна закономерность? Ну конечно: $17 = 2^4 + 1 = 2^k + 1$, $8 = 2^3 = 2^{k-1}$, и очередное множество получается из предыдущего за счет сдвига на $(17^i; 2^{3-i})$, $i = 0, 1, 2, 3$. При этом, разумеется, $|S_5| = 2^k = 16$, что и требовалось. Ясно, что в S_5 вертикальных отрезков нет. Остается убедиться в том, что нет в S_5 и пустых 5-чашек с 5-крышками. Это



Рис. 9. Множество Хортона для $k = 4$

делается путем сравнительно нехитрого перебора. Мы предлагаем читателю самому разобраться в этом. Будет не очень легко! Возможно, следующие иллюстрации (рис.10 и 11), показывающие типичные 5-чашки (всегда непустые), слегка помогут читателю.



Рис. 10. 5-чашка в множестве S_4

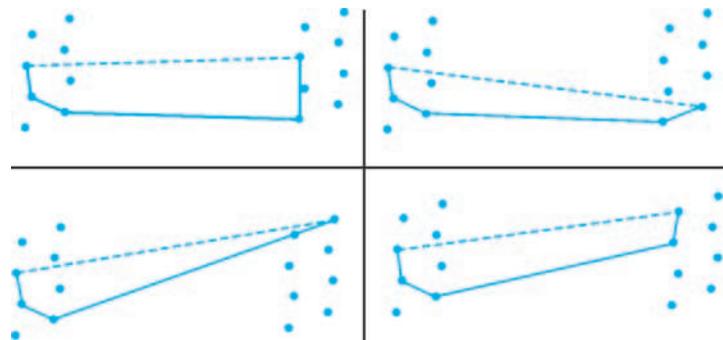


Рис. 11. 5-чашки в множестве S_5

Обратите внимание на ключевую идею: всякая прямая, соединяющая две точки из одной половинки множества Хортона, оставляет другую половинку по одну от себя сторону.

Случай произвольного k . Пусть теперь k – какое угодно, большее четырех. Прделаем абсолютно ту же процедуру, что и в предыдущем случае. А именно, положим $c = 2^k + 1$ (это аналог семнадцати) и стартуем с $S_1 = \{(0;0)\}$. Множество S_2 мы получаем, объединяя S_1 со своей копией, возникающей при сдвиге S_1 на вектор $(c^0; 2^{k-1}) = (1; 2^{k-1})$ (аналог вектора $(1; 8)$). Множество S_3 задается вектором $(c^1; 2^{k-2})$ (аналог вектора $(17; 4)$). И так далее. Последнее множество имеет номер $k + 1$, так что его мощность в как раз совпадает с $h_k = 2^k$, и образуется оно путем переноса своего предшественника – множества S_k – на вектор $(c^{k-1}; 2^0) = (c^{k-1}; 1)$ (аналог вектора $(17^3; 1)$). Иными словами, мы снова организуем итеративный процесс, в котором на каждом шаге мы копируем уже имеющееся множество, унося его «достаточно далеко» от исходника.

Понятно, что вертикальных отрезков в S_{k+1} нет. Проверку же того факта, что нет там также ни пустых 5-чашек, ни пустых 5-крышек, мы снова предоставляем читателю. Это еще труднее, чем в предыдущем случае; зато если вы разобрались с $k = 4$, то и прочие значения k вам будут подвластны.

А что же с шестиугольниками?

Между прочим, про случай $n = 6$ мы пока совсем не говорили. Мы сделали это намеренно, поскольку у этого случая весьма интригующая история, которая заслуживает отдельного изложения.

В течение довольно долгого времени с момента постановки новой задачи (т.е., напомним, с 1978 года) о величине $h(6)$ ничего известно не было. Никто не знал даже, конечна ли она. За неимением лучшего стали придумывать нижние оценки, хотя вполне могло статься, что $h(6)$ не существует. Оценка $h(6) \geq g(6) = 17$ тривиальна. В 1985 году Д.Раппопорт с помощью компьютера построил пример из двадцати точек на плоскости, среди которых не было шести вершин выпуклого и пустого шестиугольника. В 1988 году М.Овермарс, Б.Шолтен и И.Винсент привели аналогичный компьютерный пример из двадцати шести точек. В 2001 году вычислительная техника усовершенствовалась, Овермарс вернулся к задаче и предъявил пример уже из двадцати девяти точек. Это текущий рекорд, и он изображен на рисунке 12 (в правой колонке координаты точек).

Только в 2006 году стало ясно, что усилия Овермарса не были напрасными: Т.Геркен доказал, что $h(6) \leq g(9)$. Независимо от него в том же году К.Николаас установил неравенство $h(6) \leq g(25)$, которое, конечно, намного хуже геркеновского. Основываясь на идеях Геркена, П.Вальтр дал значительно более короткое доказательство оценки $h(6) \leq g(15)$. В любом случае получалось, что заведомо

$$h(6) \leq g(9) \leq C_{2,9-5}^{9-2} + 1 = 1717.$$

Спустя год В.Кошелев (один из авторов этой статьи) заинтересовался задачей, и ему удалось еще продвинуться в ней. Сейчас, благодаря Кошелеву и Овермарсу, мы имеем цепочку неравенств

$$30 \leq h(6) \leq g(8) \leq C_{2,8-5}^{8-2} + 1 = 463.$$

Техника доказательств, которую используют и Геркен, и Николаас, и Вальтр, и Кошелев, очень похожа на ту, которую мы применяли в разделе «А что с пятиугольниками?» статьи [1]. Там речь шла о вложенных друг в друга выпуклых оболочках и перебирались различные случаи их взаимного расположения. На сей раз этих случаев гораздо больше: для примера, у

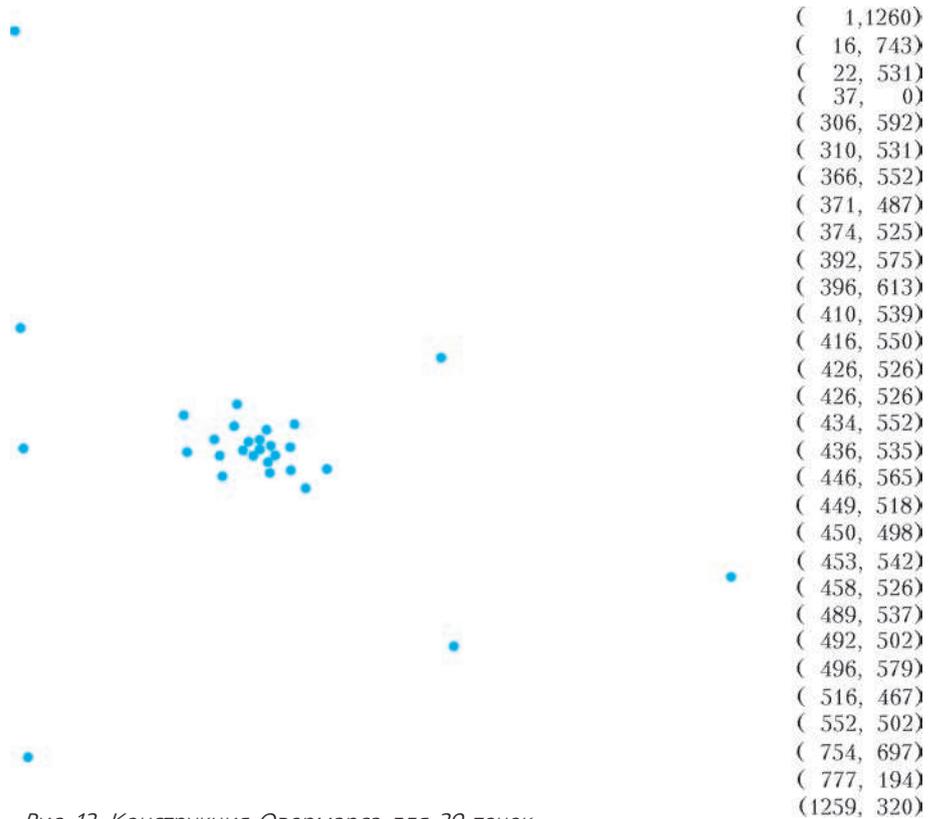


Рис. 12. Конструкция Овермарса для 29 точек

Кошелева их 43, и работа его занимает более пятидесяти журнальных страниц.

Заметим, что если верна гипотеза о равенстве $g(n) = 2^{n-2} + 1$, то $h(6) \leq g(8) = 65$. Мы верим в более сильный факт:

Гипотеза. *Имеет место равенство $h(6) = 30$.*

Иными словами, никакие вычислительные мощности уже не помогут, по-видимому, уточнить результат Овермарса.

Различные обобщения задач

Почти пустые многоугольники

Коль скоро мы знаем, что задача о величине $h(n)$ содержательна, осмысленно рассмотреть ее обобщение, при котором ищется не пустой многоугольник, а многоугольник с не более k точками исходного множества внутри. Соответствующую граничную величину принято обозначать $h(n, k)$. Тут имеется громадное поле для исследований, так как про $h(n, k)$ известно довольно мало. Мы перечислим здесь практически все когда-либо полученные результаты.

Во-первых,

$$h(3, k) = 3, \quad h(4, k) = 5, \quad h(5, 0) = 10, \quad h(5, \geq 1) = 9.$$

Во-вторых, понятно, что

$$h(n) = h(n, 0) \geq h(n, 1) \geq h(n, 2) \geq \dots$$

С другой стороны, в некоторый момент последовательность заведомо перестает убывать, а именно, для всех k , начиная с определенного $k' = k'(n)$, $h(n, k) = g(n)$. Иными словами, если выпуклый n -угольник в множестве есть, то в нем не слишком много

точек множества. Очевидно, что $k'(n) \leq g(n) - n$, однако точные значения для k' – дело будущего.

Далее, если, наоборот, фиксировать k и увеличивать n , то в какой-то момент сработает конструкция типа хортонвской и величина $h(n, k)$ обратится в бесконечность. Опять же, вопрос поиска этого момента – непростая задача для исследователя! Вот $h(7, 0) = \infty$, а про $h(7, 1)$ мы ничего не знаем; $h(8, 1) = \infty$, а что с $h(8, 2)$, не ясно; $h(9, 2) = \infty$, но конечна ли величина $h(9, 3)$ – пока вопрос; и так далее: не существуют

$$h(10, 3), h(11, 6), h(12, 9), h(13, 12), h(14, 15),$$

$$h(15, 22), h(16, 29), h(17, 36), \dots$$

Заметим, что весь перечень подобных результатов содержится в работе Бл.Сендова [3].

На самом деле, с ростом n величина k , при которой, по Сендову, $h(n, k)$ заведомо не существует, ведет себя примерно так же, как $(\sqrt[4]{2})^n$. Совсем недавно Кошелев сумел заменить упомянутую функцию на значительно большую (близкую к 2^n). В результате не существуют

$$h(12, 11), h(13, 19), h(14, 39),$$

$$h(15, 69), h(16, 139), h(17, 251), \dots$$

Заметим напоследок, что заведомо $h(6, 1) \leq g(7)$ и что, по-видимому, $h(6, 1) = g(6) = 17$.

Трехмерный аналог $g(n)$

До сих пор мы «жили» на плоскости, и, как видно, такая жизнь уже изобиловала всяческими трудностями. Имея желание еще усложнить себе существование, можно попробовать выйти в пространство.

Тут есть одна важная тонкость: а что теперь мы будем понимать под общностью положения? Понятно, что никакие три точки по-прежнему не должны попадать на одну прямую. Но обычно замечают большее: любые три точки в пространстве порождают плоскость, так давайте считать, что никакие четыре точки нашего множества не лежат в одной плоскости.

Вместо выпуклых n -угольников будем искать отныне выпуклые многогранники с n вершинами. Соответствующую пограничную величину назовем $g_3(n)$, подчеркивая, тем самым, что теперь у нас три, а не два измерения. Заметим, что в этой связи величину $g(n)$ часто обозначают $g_2(n)$.

Величина $g_3(n)$ конечна всегда, подобно своему «плоскому» аналогу. Более того, $g_3(n) \leq g_2(n)$. Покажите это! (Подсказка: используйте проекции многогранников на плоскость.) Тут также имеются специфические оценки. Например,

$$g_3(n) \leq C_{2n-7}^{n-3} + 3.$$

Кроме того, $g_3(4) = 4, g_3(5) = 6, g_3(6) = 9$.

Разумеется, и тут непочатый край дальнейшей работы. А ведь бывают же еще многомерные пространства...

Трехмерный аналог $h(n)$

Ну, тут уже все ясно. Правда, отчего бы нам не рассмотреть и $h_3(n)$?

Результатов, конечно, еще меньше – дел на будущее невпроворот. Принципиально известно лишь, что $h_3(n)$ существует при всех $n \leq 7$ (например, $h_3(4) = 4, h_3(5) = 6, h_3(6) = 9$) и не существует при всех $n \geq 22$. А при $n \in \{8, \dots, 21\}$ – ваша, читатели, вотчина. Каждый новый факт ценен.

О минимальном числе выпуклых многоугольников

Давайте напоследок спустимся с небес на землю (т.е. вернемся на плоскость) и обсудим еще один красивый вопрос, связанный с задачей Эрдеша – Секереша.

Действительно, мы знаем, что в каждом множестве X из $x \geq g(n)$ точек есть n вершин выпуклого n -угольника. Если само множество X порождает выпуклый x -угольник, то в нем, конечно, будет масса интересующих нас объектов – C_x^n штук. А каково, спрашивается, минимальное количество выпуклых n -угольников в множестве из x точек на плоскости? Это количество мы обозначим $G(n, x)$.

По аналогии введем и величину $H(n, x)$, равную наименьшему количеству выпуклых и пустых n -угольников в множестве из x точек на плоскости.

В некотором смысле величина $H(n, x)$ изучена лучше величины $G(n, x)$. Это связано хотя бы с тем, что уже $h(7)$ не существует, и многообразие потенциальных ситуаций в результате не столь велико. Посему мы лишь обсудим здесь поведение $H(n, x)$. Начнем с $n = 3$.

Сейчас известно, что для некоторого $c > 0$

$$x^2 - cx \ln x \leq H(3, x) \leq \frac{3771}{2240} x^2.$$

Наиболее любопытна, впрочем, чуть более слабая верхняя оценка $H(3, x) \leq 3x^2$, полученная с помощью вероятностной конструкции. Рассматривается «расческа», изображенная на рисунке 13. В ней x зубцов длины 1, и расстояния между соседними зубцами равны единице. С каждого зубца берется «случайная» точка. Получается случайное множество X мощности x . Методами теории вероятностей можно строго показать, что с положительной вероятностью наше множество содержит не больше $3x^2$ пустых треугольников, а стало быть, существует множество с не более $3x^2$ пустыми треугольниками. В последнем «стало быть» заключена глубокая философия вероятностного метода в комбинаторике (см., например, [4]).



Рис. 13. Расческа

Упомянутые выше методы теории вероятностей не вполне элементарны, и строгого рассуждения мы тут не приведем. Однако создать представление о вероятностной технологии попытаемся.

Итак, представим себе следующий эксперимент (желающие могут попробовать смоделировать его на компьютере). Положим $x = 1000$ и рассмотрим нашу расческу. Возьмем в руку иголку и станем наугад тыкать ею в последовательные зубцы, каждый раз отмечая точку, в которую воткнулась иголка. Возникнут точки a_1, \dots, a_{1000} . Поглядим на все треугольники,

образованные этими точками, и посчитаем, сколько среди них являются пустыми. Обозначим найденную величину через t_1 . Прделаем аналогичную процедуру еще 999 раз, так что в итоге у нас будет 1000 чисел t_1, \dots, t_{1000} . Найдем их среднее арифметическое t . Скорее всего, у нас получится $t \leq 3 \cdot 10^6$. Почему? Ну, это как раз и доказывается с помощью «не вполне элементарных» методов теории вероятностей. Вот проведите эксперимент и увидите! Далее, все то же самое осуществим для $x = 2000, 3000, \dots, 10000$. Почти наверняка всякий раз будет выходить, что $t \leq 3x^2$.

Описанный эксперимент (коль скоро в нем не нарушится обещанная оценка) дает уверенность в том, что «среднее число» пустых треугольников в случайном множестве X размера x на расческе не превосходит $3x^2$. Если вложить в понятие среднего строгий математический смысл, то уже безо всякого эксперимента можно доказать, что в среднем у случайной конфигурации точек на расческе заведомо не больше $3x^2$ пустых треугольников. Но тогда очевидно, что у некоторой конкретной конфигурации также не больше $3x^2$ пустых треугольников. Вот и все.

Кстати, эксперимент – это отличный способ подобрать наиболее подходящую конструкцию типа расчески, стартуя с которой можно получать оценки для $H(3, x)$ и пр.

Приведем еще несколько результатов о величинах $H(n, x)$:

для некоторого $c_1 > 0$

$$\frac{1}{4}x^2 - c_1x \leq H(4, x) \leq \frac{976}{448}x^2;$$

$$\left[\frac{x-4}{6} \right] \leq H(5, x) \leq \frac{393}{320}x^2;$$

$$0 < H(6, x) \leq \frac{666}{2240}x^2.$$

Последняя нижняя оценка такая странная по той простой причине, что, как мы помним, лишь совсем недавно было доказано существование $h(6)$: если бы это было не так, то $H(6, x)$ равнялась бы нулю. Именно это и происходит с $H(n, x)$ при $n \geq 7$.

Список литературы

1. В.Кошелев, А.Райгородский. *Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках*. – «Квант», №2, 2009.
2. P.Erdős, G.Szekeres. *A combinatorial problem in geometry*. – *Compositio Math.*, 2 (1935), 463–470.
3. Бл.Сендов. *Обязательные конфигурации точек на плоскости*. – «Фундаментальная и прикладная математика», 1 (1995), 2, 491–516.
4. А.М.Райгородский. *Вероятность и алгебра в комбинаторике*. – М.: МЦНМО, 2008.
5. В.Кошелев. *Задача Эрдеша – Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости*. – «Моделирование и анализ информационных систем», т. 16 (2009), №2, 21–73.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

БРУСОЧКИ

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Принцип устройства таких головоломок очень простой: в прямоугольной коробке лежат деревянные брусочки разной формы, их можно передвигать, но нельзя вынимать и перекладывать. (По-видимому, «клоцки» были своеобразной вариацией знаменитой «Игры в 15».) Задача в том, чтобы из начального положения получить другую (конкретную) расстановку этих брусочков. Иногда требуется, чтобы только один брусочек занял определенную позицию, а иногда – чтобы все. Можно усложнить задачу: добиться цели за минимальное число ходов или за ограниченное время.

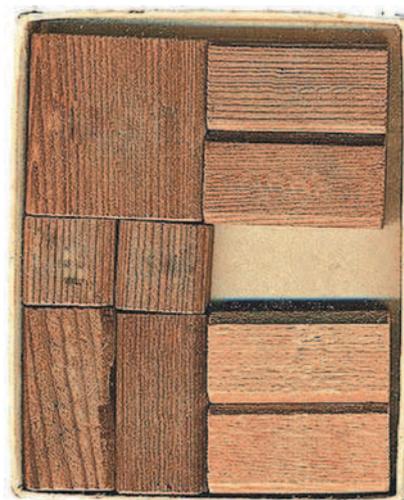


Рис. 1

Как правило, подобные головоломки довольно трудны, и поиск решения может потребовать немалых усилий. Например, известно, что невозможно решить чемпионскую головоломку

ку (рис. 1) менее, чем за 59 ходов.

Игра быстро обрела известность и популярность, стали появляться ее многочисленные модификации. На рисунке 2 показано другое начальное расположение брусочков. Здесь нужно передвинуть большой квадрат на место четырех маленьких квадратов. Интересно, что впервые кратчайшее решение – за 81 ход



Рис. 2

– опубликовал Мартин Гарднер в 1964 году.

Изготовить головоломку с брусочками несложно и в домашних условиях. Склейте коробку с дном в форме прямоугольника размером 4×5 , вырежьте из бумаги или фанеры брусочки размером 1×1 , 1×2 и 2×2 . Рекомендуется делать коробку для брусочков с небольшим припуском, чтобы их было легко передвигать.

Можно сделать и попытаться самостоятельно решить одну из приведенных головоломок, а можно придумать и что-то новое.

Е.Епифанов

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2146» или «Ф2153». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2149 и M2150 предлагались на Математической олимпиаде имени Леонарда Эйлера.

Задачи M2146–M2153, Ф2153–Ф2159

M2146. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

Н. Агаханов, И. Богданов

M2147. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано действительное число так, что все бесконечные в обе стороны горизонтальные и вертикальные последовательности чисел периодические. Докажите, что найдется бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими периодами тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами.

Е. Знак

M2148. По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 100 в некотором порядке. Петя вычислил 100 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшую из этих сумм. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

П. Кожевников

M2149. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADC = 2\angle ABC$. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до внешней биссектрисы угла ADC равно $AD + DC$.

С. Берлов

M2150. В стране Леонардии все дороги – с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число

жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.

Н. Гравин

M2151. Числовой треугольник

			1								
			1	1	1						
			1	2	3	2	1				
			1	3	6	7	6	3	1		
			1	4	10	16	19	16	10	4	1
							...				

составлен по следующему правилу. В первой строке одно число, равное 1. В k -й строке ($k = 2, 3, \dots$) записывается $2k - 1$ чисел, каждое из которых равно сумме трех чисел: числа, стоящего над ним, и двух его соседей в предыдущей строке (если некоторых из таких трех чисел нет, то они считаются равными 0). Докажите, что в среднем столбце не встретится чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

К. Каибханов

M2152*. Пара (p, q) различных простых чисел называется *особой*, если существует a , представимое в виде $a = x^p + y^p = z^q + t^q$ для некоторых натуральных x, y, z, t , но не представимое в виде $u^{pq} + v^{pq}$, где u и v – натуральные числа. Докажите, что любое простое число p входит в бесконечное число особых пар.

В. Сендеров

M2153*. Сумма телесных углов при вершинах выпуклого многогранника равна π . Докажите, что существует замкнутый маршрут по его ребрам, проходящий

через каждую его вершину ровно один раз. (Телесный угол измеряется площадью фигуры, высекаемой соответствующим многогранным углом на единичной сфере. Площадь всей единичной сферы равна 4π .)

И. Богданов

Ф2153. По прямой дороге с постоянной скоростью v_0 бежит кролик. На расстоянии L от дороги находится лиса. В тот момент, когда кролик оказывается ближе всего к лисе, она его замечает и бросается в погоню. Скорость лисы такая же, как у кролика, но лиса бежит с «упреждением» – вектор скорости лисы направлен все время в точку, которая находится впереди кролика на расстоянии d от него. Найдите минимальное расстояние между участниками забега.

З. Рафаилов

Ф2154. На гладком горизонтальном столе покоится монета, другая такая же монета скользит по столу. После абсолютно упругого удара скорости монет оказались одинаковыми по величине. Найдите угол разлета монет.

А. Простов

Ф2155. Моль гелия находится в сосуде под поршнем при нормальных условиях. С газом проводят замкнутый процесс. В первой части процесса газ расширяется, при этом теплоемкость его остается постоянной и равной $C = 100$ Дж/К, затем газ охлаждают до начальной температуры при неизменном объеме и, наконец, изотермически сжимают до начального объема. В первой части процесса газ получил количество теплоты $Q = 1$ Дж. Найдите работу газа в этом процессе.

А. Теплов

Ф2156. Производят расчет «атома водорода», в котором минимальное расстояние между протоном и электроном составляет $d = 1$ мкм, а максимальное расстояние в 3 раза больше. Какой будет максимальная скорость электрона в таком «атоме»?

Р. Александров

Ф2157. Коаксиальный кабель состоит из центральной жилы диаметром $d = 1$ мм и проводящей оплетки диаметром $D = 5$ мм. Пространство между жилой и оплеткой заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$. Найдите емкость и индуктивность в расчете на 1 м такого кабеля, а также величину волнового сопротивления – при подключении резистора такой величины к концу куска кабеля не происходит отражения электромагнитной волны, бегущей вдоль него.

А. Сложнов

Ф2158. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ, катушка индуктивностью $L = 1$ Гн и резистор сопротивлением $R = 300$ Ом соединены «звездой», а свободные выводы подключены к трем фазам сети напряжением $U = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц. Найдите напряжение в общей точке элементов по отношению к «нулевому» проводу.

А. Зильберман

Ф2159. Экран освещен удаленным источником света. На пути светового пучка располагают линзу, склеенную из двух плосковыпуклых стеклянных линз. Диаметр первой линзы $D_1 = 5$ см, ее фокусное расстояние $F_1 = 20$ см, диаметр второй линзы $D_2 = 1$ см, ее фокусное расстояние $F_2 = 10$ см. Линзы склеены плоскими поверхностями, плоскость склейки параллельна плоскости экрана, главные оптические оси линз совпадают. На каком расстоянии от экрана нужно расположить эту линзу, чтобы на экране получилось яркое пятно минимального диаметра? Во сколько раз освещенность в центре этого пятна больше освещенности экрана без линзы?

З. Рафаилов

Решения задач M2124–M2130, Ф2138–Ф2144

M2124. Пусть $n \geq 3$ – натуральное число, а x_1, x_2, \dots, x_n – положительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \dots$$

$$\dots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 = x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2.$$

При каких n можно утверждать, что числа x_1, x_2, \dots, x_n равны?

Ответ: в точности при нечетных n .

Если n четно, то набор $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a, x_4 = b, \dots, x_{n-1} = a, x_n = b$ удовлетворяет условию при любых a и b . Заметим, что возможны и другие наборы: например, при $n = 4$ условию удовлетворяет набор $x_1 = b + c, x_2 = b, x_3 = b + c, x_4 = c$, где b и c – любые числа.

Пусть теперь n нечетно. Без ограничения общности можно считать, что x_1 – наибольшее (или одно из наибольших) среди данных чисел. Тогда из равенства

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$$

следует

$$x_1^2 - x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3) - x_2(x_1 - x_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - x_2) = 0.$$

В силу выбора числа x_1 имеем $x_1 \geq x_2$; поэтому $x_1 - x_2 \geq 0$, значит, $x_1 + x_3 - x_2 > 0$. Отсюда следует, что $x_1 - x_3 = 0$, т.е. $x_3 = x_1$, и x_3 – также одно из наибольших среди данных чисел. Рассуждая далее таким же образом, получаем $x_5 = x_3, x_7 = x_5, \dots, x_n = x_{n-2}, x_2 = x_n, x_4 = x_2, \dots, x_{n-1} = x_{n-3}$. Таким образом, все данные n чисел равны.

Приведем также другое решение для нечетного n . Запишем исходные равенства в виде

$$\begin{cases} x_1(x_1 - x_2) = -x_3(x_2 - x_3), \\ x_2(x_2 - x_3) = -x_4(x_3 - x_4), \\ \dots \\ x_n(x_n - x_1) = -x_2(x_1 - x_2). \end{cases}$$

Предположим, что $x_1 - x_2 > 0$. Тогда, последовательно используя все равенства, получаем $x_2 - x_3 < 0$,

$x_3 - x_4 > 0$, $x_4 - x_5 < 0$, $x_5 - x_6 > 0$, ..., $x_n - x_1 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$, что противоречит предположению. Аналогично приводится к противоречию предположение о том, что $x_1 - x_2 < 0$. Если же $x_1 - x_2 = 0$, то последовательно получаем $x_2 - x_3 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$, ... $x_n - x_1 = 0$, откуда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

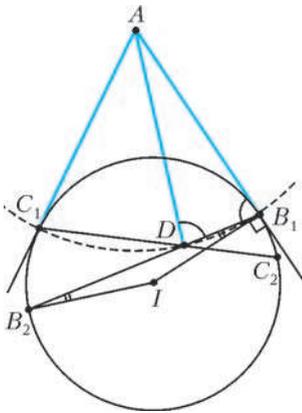
Отметим, что эта задача является обобщением одной из задач регионального этапа Всероссийской олимпиады этого года.

В. Сендеров

M2125. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Точка D , отличная от B_1 и C_1 , находится на расстоянии AC_1 от точки A . Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2 . Докажите, что B_2C_2 – диаметр окружности ω , перпендикулярный отрезку DA .

Пусть I – центр окружности ω .

Предположим вначале, что точка D лежит внутри окружности ω (см. рисунок). Так как $IB_1 \perp AB_1$, то $\angle IB_2B_1 + \angle ADB_1 = \angle IB_1B_2 + \angle AB_1D = 90^\circ$, откуда вытекает, что $IB_2 \perp AD$. Так же доказываем, что $IC_2 \perp AD$. Значит (поскольку B_2 и C_2 не совпадают), прямая B_2C_2 проходит через I и перпендикулярна AD , что и требовалось доказать.



Другие случаи расположения точки D можно рассмотреть аналогично.

Замечание. Используя обозначение $\angle(a, b)$ для угла от прямой a до прямой b ,

отсчитываемого против часовой стрелки ($\angle(a, b)$ определен с точностью до прибавления числа вида πk , где k – целое число), можно переписать решение, изложенное выше, так, чтобы оно не зависело от расположения точки D :

$$\begin{aligned} \angle(IB_2, B_1B_2) + \angle(B_1B_2, AD) &= \\ &= \angle(B_1B_2, IB_1) + \angle(AB_1, B_1B_2) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отметим, что частный случай этой задачи предлагался на региональном этапе Всероссийской олимпиады.

Р. Женодаров, П. Кожевников

M2126. На вечеринке компанию из 20 человек требуется посадить за 4 стола. Рассадка называется удачной, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

Ответ: 160.

Если два человека не являются друзьями, то будем говорить, что они являются *недрузьями*. Общее число

пар людей в данной компании равно $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$, поэтому достаточно доказать, что минимальное число пар недругов равно 30.

Докажем, что меньше чем 30 пар недругов быть не могло. Пусть это не так. Тогда найдется человек A , у которого не более двух недругов (если у каждого человека не менее трех недругов, то число пар недругов не меньше чем $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$). Пусть A при некоторой

удачной рассадке оказался за столом T . По условию за столом T всего 5 человек. Так как у A не более двух недругов, то за одним из оставшихся трех столов все сидящие являются друзьями A . Значит, если пересадить A за этот стол (а в остальном рассадку не менять), то новая рассадка окажется удачной, но за столом T будут сидеть 4 человека, что противоречит условию.

Приведем пример, удовлетворяющий условию, в котором имеется ровно 30 пар недругов. Разобьем всех людей на 5 четверок, и пусть любая пара людей из одной четверки – недруги, а любая пара из разных четверок – друзья. В таком случае у каждого человека ровно 3 недруга, и всего имеется $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$ пар

недругов. В описанной ситуации рассадка является удачной тогда и только тогда, когда люди из одной четверки оказываются за разными столами. Тем самым, удачные рассадки существуют, и при любой удачной рассадке за каждым столом окажется по одному человеку из каждой четверки, т.е. ровно 5 человек.

П. Кожевников

M2127. Внутри ветви гиперболы $x = \sqrt{y^2 + 1}$ расположены окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается гиперболы в двух точках и касается окружности ω_{n-1} , а окружность ω_1 имеет радиус 1 и касается гиперболы в точке $(1; 0)$. Докажите, что для любого n радиус окружности ω_n равен натуральному числу.

Пусть точка $(x_n; 0)$ – центр окружности ω_n , а r_n – ее радиус. Из построения окружностей сразу вытекает, что $r_1 = 1$, $x_1 = 1 + r_1 = 2$ и

$$x_{n+1} - x_n = r_{n+1} + r_n \tag{1}$$

при $n \geq 1$ (рис. 1).

Окружность ω_n ($n \geq 2$) задается уравнением

$$(x - x_n)^2 + y^2 = r_n^2.$$

Подставив в это равенство $y^2 = x^2 - 1$, получим равенство, которому удовлетворяют абсциссы x точек пересечения окружности ω_n и гиперболы:

$$\begin{aligned} (x - x_n)^2 + x^2 - 1 &= r_n^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x_n x + x_n^2 - r_n^2 - 1 &= 0. \tag{2} \end{aligned}$$

Касание окружности и гиперболы означает совпадение корней в квадратном уравнении (2), значит, его дискриминант обращается в ноль:

$$x_n^2 - 2(x_n^2 - r_n^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_n^2 = 2r_n^2 + 2. \tag{3}$$

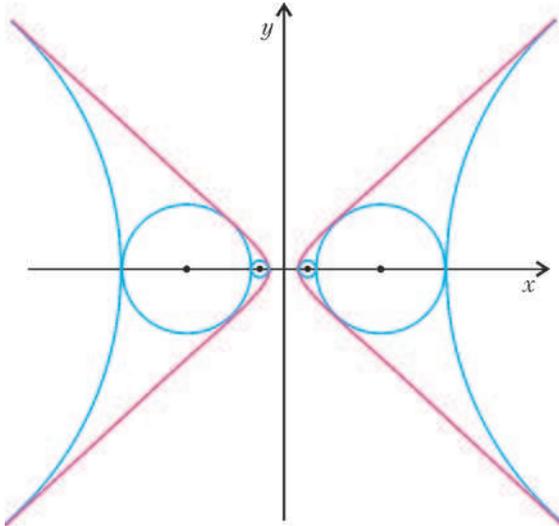


Рис. 1

Равенство (3) для окружности ω_{n+1} выглядит как
$$x_{n+1}^2 = 2r_{n+1}^2 + 2. \quad (3')$$

Вычитая из равенства (3') равенство (3), имеем
$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2(r_{n+1}^2 - r_n^2) \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = 2(r_{n+1} - r_n)(r_{n+1} + r_n),$$

откуда, с учетом равенства (1), находим $x_{n+1} + x_n = 2(r_{n+1} - r_n)$. Вычитая из полученного равенства (1), имеем

$$2x_n = r_{n+1} - 3r_n. \quad (4)$$

При $n = 1$, в частности, получаем $4 = r_2 - 3$, т.е. $r_2 = 7$. Возведем в квадрат (4), и подставим (3):

$$\begin{aligned} 4x_n^2 &= r_{n+1}^2 - 6r_{n+1}r_n + 9r_n^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8r_n^2 + 8 &= r_{n+1}^2 - 6r_{n+1}r_n + 9r_n^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r_{n+1}^2 - 6r_{n+1}r_n + r_n^2 &= 8. \quad (5) \end{aligned}$$

Итак, получено симметричное соотношение (5), связывающее радиусы r_n и r_{n+1} . Переформулировать (5) можно таким образом: число r_{n+1} является корнем уравнения $x^2 - 6r_nx + r_n^2 = 8$. Если $n \geq 2$, то, рассмотрев соотношение, аналогичное (5), для радиусов r_n и r_{n+1} , получим, что r_{n-1} также является корнем уравнения $x^2 - 6r_nx + r_n^2 = 8$. Тогда по теореме Виета $r_{n-1} + r_{n+1} = 6r_n$, что дает рекуррентное соотношение

$$r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1} \quad (*)$$

для вычисления радиусов. Из того что r_1 и r_2 – целые числа по цепочке выводим, что все r_n являются целыми.

Замечания. Если уравнение (2) имеет нулевой дискриминант, то $x = \frac{x_n}{2}$ – единственное решение этого уравнения. Отсюда вытекает, что абсцисса точки касания окружности ω_n и гиперболы равна $\frac{x_n}{2}$. Из геометрических соображений понятно, что $\frac{r_n}{x_n}$ должно стре-

миться к косинусу угла наклона асимптоты гиперболы, т.е. к $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Можно показать, что дроби $\frac{2r_n}{x_n}$ равны некоторым подходящим дробям для разложения $\sqrt{2}$ в цепную дробь (это объясняется известной связью между линейными рекуррентами, цепными дробями и уравнениями Пелля – см., например, статью В.Сендерова и А.Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3, 4 и 6 за 2002 г.).

Выбор радиуса $r_1 = 1$ связан с тем, что радиус кривизны данной гиперболы в точке $(1; 0)$ равен 1. Можно установить, что радиус кривизны гиперболы в точке касания с окружностью ω_n равен r_n^3 .

Самым любопытным в данной задаче, видимо, является наличие линейного соотношения (*) для радиусов трех последовательных окружностей. Вообще, если вписывать цепочку касающихся окружностей в гиперболу $x^2 - \frac{y^2}{B} = 1, B > 0$, то радиусы трех последовательных окружностей будут удовлетворять соотношению

$$r_{n+1} = (4B + 2)r_n - r_{n-1}. \quad (*')$$

Окружности можно вписывать и во внешность гиперболы $x^2 - By^2 = 1$ (рис.2), и тогда радиусы трех пос-

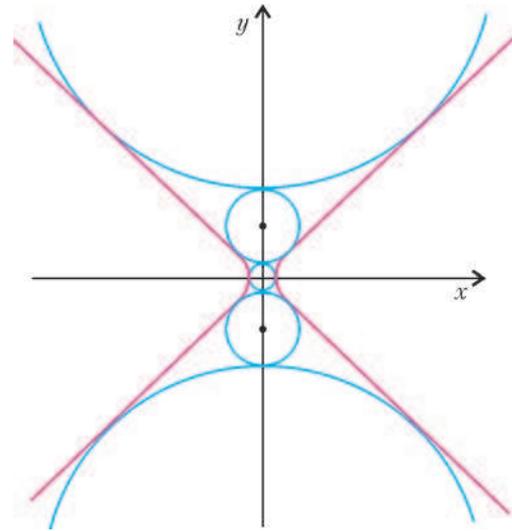


Рис. 2

ледовательных окружностей будут удовлетворять тому же соотношению (*').

Для цепочки окружностей, вписанных в параболу, радиусы образуют арифметическую прогрессию (см. задачу М.Евдокимова с XXXII Всероссийской олимпиады, 1998 г.).

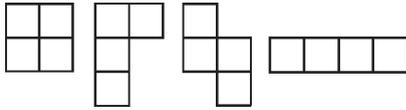
Если же цепочку хотя бы из трех окружностей удастся вписать в эллипс $x^2 + \frac{y^2}{B} = 1$, то соотношение на радиусы будет иметь вид

$$r_{n+1} = (2 - 4B)r_n - r_{n-1}.$$

В.Расторгуев, П.Кожевников

M2128. Вася отметил 10 клеток в клетчатой таблице 10×10 клеток. Всегда ли Петя может вырезать из

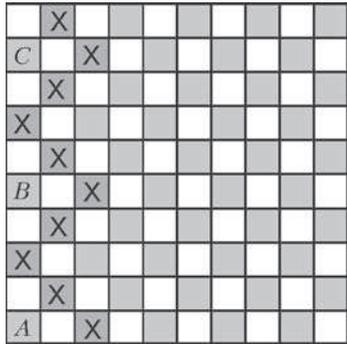
этой таблицы по линиям сетки 19 фигурок вида



так, чтобы фигурки не содержали отмеченные клетки?

Ответ: не всегда.

Предположим, что Вася отметил 10 клеток так, как показано на рисунке (значок «X»).



шахматную раскраску доски (при которой все отмеченные клетки являются черными). Заметим, что фигурка, не содержащая отмеченных клеток, не может содержать также ни одну из черных клеток А, В, С. Значит, все вырезанные Петей фигурки содержат не более

50 - 10 - 3 = 37 черных клеток. Но поскольку каждая фигурка содержит по две черных и по две белых клетки, может быть вырезано не более $\left\lfloor \frac{37}{2} \right\rfloor = 18$ фигурок.

И. Богданов, О. Подлипский

M2129. Найдите все пары натуральных чисел $n > 1$ и k , для которых $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n = n^k$.

Ответ. $n = 3, k = 2$.

Первое решение. Если $n = 3$, то $k = 2$. Пусть n нечетно, $n > 3$. Тогда при четном x сумма $1^n + 2^n + \dots + x^n$ делится на $\frac{x}{2}$. Действительно, поскольку $a^n + b^n$ делится на $a + b$, каждая из сумм $1^n + (x-1)^n, 2^n + (x-2)^n, \dots, \left(\frac{x}{2}-1\right)^n + \left(\frac{x}{2}+1\right)^n$ делится на $\frac{x}{2}$.

Остаются слагаемые $\left(\frac{x}{2}\right)^n$ и x^n , которые, очевидно, делятся на $\frac{x}{2}$. Значит, $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ делится на $\frac{n-1}{2}$. Но $\text{НОД}\left(\frac{n-1}{2}, n\right) = 1$ и $\frac{n-1}{2} > 1$ при $n > 3$. Следовательно, при $n > 3$ сумма $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ имеет простой делитель, на который не делится n . Докажем теперь, что при любом четном n сумма $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ не делится на n . Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. При нечетном a число $a^{2^s} - 1$ делится на 2^s .

Доказательство. Применим индукцию по s . При $s = 1$ утверждение верно. Пусть при $s = r$ утверждение верно.

Тогда $a^{2^{r+1}} - 1 = (a^{2^r})^2 - 1 = (a^{2^r} - 1)(a^{2^r} + 1)$ делится на 2^{r+1} , так как первая скобка делится на 2^r , а вторая четна. Переход индукции сделан, и лемма доказана.

Пусть $n = 2^s l$, где $s \geq 1, l$ - нечетно. Очевидно, $s < n$, поэтому для любого четного k число k^n делится на 2^s .

Из леммы следует, что для любого нечетного k число

$k^n - 1 = \left(\frac{n}{k^{2^s}}\right)^{2^s} - 1$ делится на 2^s ; тогда k^n дает остаток 1 при делении на 2^s . Итак, в сумме

$1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ ровно $\frac{n}{2}$ слагаемых дают остаток 1 при делении на 2^s , а остальные слагаемые делятся на 2^s . Имеем: $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$,

следовательно, сумма не делится на 2^s и тем более на n .

Замечание 1. Рассуждая как в начале решения, нетрудно доказать, что при любом нечетном n сумма $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ делится на n .

Замечание 2. При желании лемму легко усилить: при нечетном a и натуральном s число $a^{2^s} - 1$ делится на 2^{s+2} .

Второе решение. Проверив значения $n = 2, 3$, получаем, что подходит только $n = 3$, при этом $k = 2$. Покажем, что при $n \geq 4$ решений нет.

Лемма. При натуральных $n \geq 4$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{n} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. По неравенству Бернулли,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n-1} > 2,$$

откуда следует правое неравенство. Левое неравенство докажем индукцией по n . База при $n = 4$ проверяется непосредственно; переход следует из неравенств

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Лемма доказана.

Предположим, что нашлось решение с $n \geq 4$. Из леммы следует, что $(n-1)^n > \frac{1}{n} \cdot n^n = n^{n-1}$. Тогда

$n^k > (n-1)^n > n^{n-1}$, откуда $k \geq n$. Заметим, что при любом $s = 1, \dots, n-1$ выполнено неравенство $\left(\frac{n-1}{n}\right)^s \geq 1 - \frac{s}{n}$ (это - снова неравенство Бернулли), поэтому из леммы имеем $\left(\frac{n-s}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{sn} \leq \frac{1}{2^s}$.

Значит,

$$1 = \frac{(n-1)^n + \dots + 1^n}{n^k} \leq \frac{(n-1)^n + \dots + 1^n}{n^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-(n-1)}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Противоречие.

Замечание. Уравнение этой задачи возникло из рассмотрения более общих уравнений в натуральных числах: $1^n + 2^n + \dots + x^n = (x+1)^y$. Методом первого решения задачи можно найти все решения этого урав-

нения в предположении нечетности n : $(n, x, y) = (1, 2, 1)$ и $(n, x, y) = (3, 2, 2)$. При фиксированных четных n мы умеем доказывать лишь, что множество решений (x, y) конечно. О близких уравнениях в целых числах см. также в решении задачи M2025 в «Кванте» № 3 за 2007 год.

И.Богданов, В.Сендеров

M2130. Дан плоский (невыпуклый) шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = DE, BC = EF, CD = FA, \angle FAB = 3\angle CDE, \angle BCD = 3\angle EFA, \angle DEF = 3\angle ABC$ (здесь имеются в виду внутренние углы многоугольника, некоторые из которых могут быть больше 180°). Известно, что никакие две стороны шестиугольника не параллельны. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Из равенства углов в условии следует, что сумма углов шестиугольника равна $4(\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA)$, а с другой стороны эта сумма равна $4 \cdot 180^\circ$, откуда $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 180^\circ$. (Отметим, что так как углы шестиугольника меньше 360° , то каждый из углов ABC, CDE, EFA меньше 120° . Не умаляя общности, будем предполагать, что $\angle EFA < 60^\circ$; тогда в шестиугольнике $ABCDEF$ плоский угол BCD меньше развернутого).

Построим треугольник $A'C'E'$, в котором углы A', C', E' равны соответственно углам CDE, EFA, ABC . Пусть точки D', F', B' симметричны соответственно точкам A', C' и E' относительно прямых $C'E', A'E'$ и $A'C'$. Тогда соответствующие углы шестиугольников $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$ равны, и, кроме того, в шестиугольнике $A'B'C'D'E'F'$ равны пары противоположных сторон, а диагонали $A'D', B'E'$ и $C'F'$ пересекаются в одной точке, так как это высоты в треугольнике $A'C'E'$.

Применив подходящее преобразование подобия к шестиугольнику $A'B'C'D'E'F'$, можем получить шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, в котором $A_1 = A, B_1 = B$ и направление обхода контуров $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одинаковое (скажем, по часовой стрелке; рис. 1). Для решения задачи достаточно доказать совпадение этих двух шестиугольников.

Из равенства углов шестиугольников следует, что соответствующие векторы \overline{BC} и

Рис. 1

$\overline{B_1C_1}, \overline{CD}$ и $\overline{C_1D_1}$ и т.д. сонаправлены, в частности C лежит на луче B_1C_1, F – на луче A_1F_1 , а в силу равенства сторон $\overline{ED} = \overline{E_1D_1}$ (и, значит, $\overline{DD_1} = \overline{EE_1}$). Допустим, что $D \neq D_1$, и пусть точки X и Y таковы, что $\overline{CX} = \overline{FY} = \overline{DD_1}$. Тогда $\overline{D_1X} = \overline{DC}$, следовательно, точка X лежит на прямой C_1D_1 , причем $XC_1 = |XD_1 - C_1D_1| = |CD - C_1D_1| = |AF - A_1F_1| = FF_1$.

Кроме того, если X лежит на отрезке C_1D_1 , то F лежит на отрезке A_1F_1 ; если же X лежит на продолжении отрезка C_1D_1 за точку C_1 , то F лежит на продолжении отрезка A_1F_1 за точку F_1 . Аналогично, Y лежит на прямой E_1F_1 и $YF_1 = CC_1$, причем точки Y и C либо одновременно лежат соответственно на отрезках E_1F_1 и B_1C_1 , либо на продолжениях этих отрезков (за точки F_1 и C_1). Мы получаем, что треугольники FF_1Y и XC_1C равны по трем сторонам. Заметим (это существенно! – см. замечание ниже), что эти треугольники невырожденные: $\overline{CX} \neq \vec{0}$ по предположению, $C \neq C_1$ (иначе $F_1 = Y$ и $CD \parallel CX \parallel FY \parallel AF$), $X \neq C_1$ (иначе $F_1 = F$ и $BC \parallel CX \parallel FY \parallel EF$). Из равенства треугольников имеем $\angle FF_1Y = \angle XC_1C$. Однако $\angle FF_1Y$ равен $\angle AFE$ либо $180^\circ - \angle AFE$, а $\angle XC_1C$ равен $\angle BCD$ либо $180^\circ - \angle BCD$. Причем из предыдущих выводов о расположении точек C, X, F, Y следует, что если $\angle FF_1Y = \angle AFE$, то $\angle XC_1C = \angle BCD$, а если $\angle FF_1Y = 180^\circ - \angle AFE$, то $\angle XC_1C = 180^\circ - \angle BCD$. В любом случае получаем, что $\angle AFE = \angle BCD$ – противоречие.

Следовательно, $D = D_1$, откуда вытекает совпадение шестиугольников $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Замечание. Приведем пример шестиугольника, показывающий, что в этой задаче условие отсутствия параллельных сторон является существенным.

Построим параллелограмм $ACDF$, в котором $\angle ACD = 80^\circ$ и $AF > AC, E$ – точка пересечения биссектрис углов AFD и CDF . Построим на стороне AC вне параллелограмма треугольник ACB , равный треугольнику DFE (рис.2). Тогда по построению в шестиугольнике $ABCDEF$ равны пары противоположных сторон, и $\angle FAB = 3\angle CDE = 150^\circ, \angle BCD = 3\angle EFA = 120^\circ, \angle DEF = 3\angle ABC = 270^\circ$.

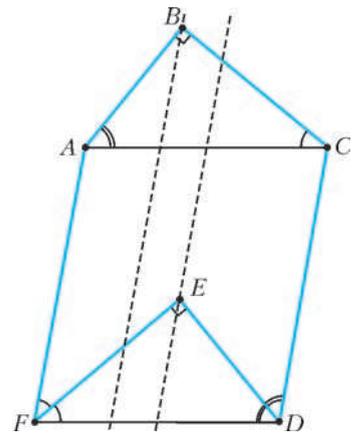


Рис. 2

Однако BE не проходит через центр параллелограмма $ACDF$ (точку пересечения AD и CF), так как E лежит на средней линии, параллельной CD , и отлична от центра параллелограмма, а B не лежит на этой средней линии.

Н.Белухов,
П.Кожевников

Ф2138. Подъемный кран медленно поднимает с помощью троса плавающее в воде бревно (рис.1). Трос прикреплен к одному концу бревна, которое можно считать

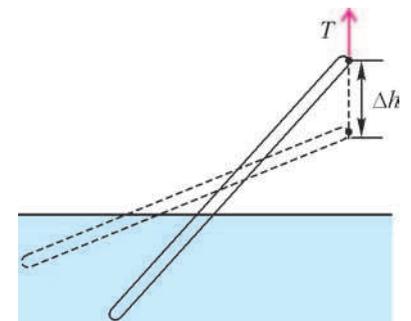


Рис. 1

тонким цилиндром с постоянной плотностью. Масса бревна m , длина L . Отношение плотностей воды и древесины $\gamma = 4/3$. Ускорение свободного падения g . Начальное положение бревна горизонтальное. 1) Какую минимальную работу A нужно совершить крану, чтобы полностью вытянуть бревно из воды? 2) Постройте график зависимости силы натяжения T троса от высоты над водой h приподнимаемого конца бревна. Укажите характерные точки графика. 3) Какую работу $A_{\Delta h}$ совершит кран при переводе бревна из одного наклонного положения в другое наклонное положение, в котором верхний конец бревна поднялся на высоту $\Delta h = L/5$?

1) Минимальная работа крана равна изменению потенциальной энергии бревна:

$$A = \frac{mgL}{2}.$$

2) Бревно в процессе подъема будет образовывать некий угол α с поверхностью воды, пока не примет вертикальное положение, оставаясь частично погруженным в воду. Бревно находится в равновесии, если выполняются два условия (рис.2).

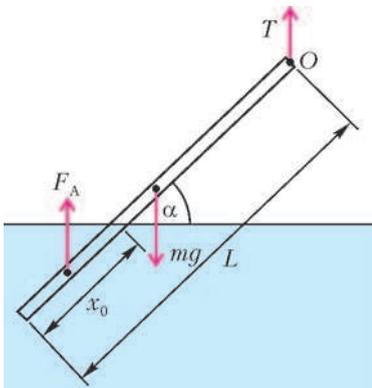


Рис. 2

а) Сумма всех действующих на бревно сил равна нулю, или, в проекциях на вертикальную ось:

$$T + F_A - mg = 0,$$

где $F_A = mg\gamma x_0/L$ – архимедова сила, x_0 – длина части бревна, погруженной в воду.

б) Сумма моментов сил относительно произвольной оси вращения равна нулю, или, выбрав ось, проходящую через верхний конец бревна:

$$mg \frac{L}{2} \cos \alpha - \left(mg\gamma \frac{x_0}{L} \right) \left(L - \frac{x_0}{2} \right) \cos \alpha = 0.$$

Отсюда следует, что сила T натяжения троса не зависит от угла наклона бревна относительно горизонта. Решая последнее уравнение, получим, что в воде будет находиться часть бревна длиной

$$x_0 = L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{L}{2}.$$

Пока бревно будет оставаться в наклонном положении, сила натяжения троса будет постоянной и равной $mg/3$. После того как бревно примет вертикальное положение, сила натяжения троса будет линейно возрастать от $mg/3$ до mg :

$$T = mg - F_A = mg \left(1 - \frac{\gamma x}{L} \right).$$

График зависимости силы натяжения троса T от высоты h приведен на рисунке 3.

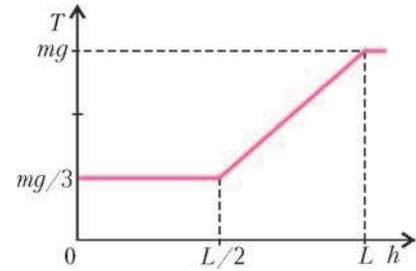


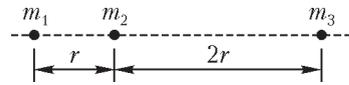
Рис. 3

3) Подъем верхнего конца бревна на высоту Δh происходит при постоянной силе натяжения $mg/3$. Поэтому искомая работа равна

$$A_{\Delta h} = T\Delta h = \frac{mg}{3} \frac{L}{5} = \frac{mgL}{15}.$$

В.Чивилёв

Ф2139. В открытом космосе три небольших астероида из-за гравитационного притяжения сближаются друг с другом вдоль общей прямой, неподвижной относительно звезд. Отношение расстояний от среднего астероида до крайних остается равным $n = 2$ вплоть до их столкновения (см. рисунок). Масса левого астероида m_1 , центрального m_2 . Найдите массу m_3 правого астероида.



Пусть ускорения астероидов равны a_1, a_2, a_3 , первые два ускорения направлены вправо, а третье – влево. В системе отсчета, связанной с третьим астероидом, ускорения первых двух равны $a_1 + a_3$ и $a_2 + a_3$ соответственно. Чтобы отношение расстояний от m_1 и m_2 до m_3 сохранялось неизменным, оно должно быть равно отношению соответствующих ускорений:

$$(a_1 + a_3) : (a_2 + a_3) = 3r : 2r = 3 : 2.$$

Отсюда получим связь ускорений:

$$a_3 = 2a_1 - 3a_2.$$

Из закона всемирного тяготения найдем ускорения астероидов:

$$a_1 = G \frac{m_2}{r^2} + G \frac{m_3}{9r^2}, \quad a_2 = G \frac{m_3}{4r^2} - G \frac{m_1}{r^2},$$

$$a_3 = G \frac{m_1}{9r^2} + G \frac{m_2}{4r^2}.$$

Подставляя эти значения в выражение для связи ускорений, получим

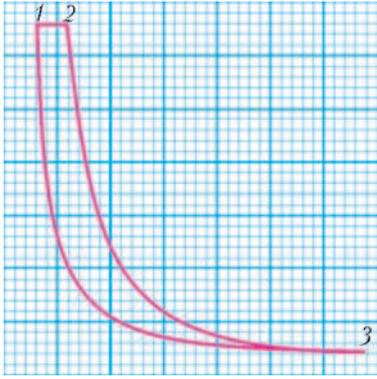
$$\frac{m_1}{9} + \frac{m_2}{4} = 2 \left(m_2 + \frac{m_3}{9} \right) - 3 \left(\frac{m_3}{4} - m_1 \right),$$

откуда найдем

$$m_3 = \frac{104m_1 + 63m_2}{19}.$$

И.Воробьев

Ф2140. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли pV -диаграмму замкнутого циклического процесса тепловой машины (см. рисунок). Процесс 1–2 –



изобара, процесс 2–3 – адиабата, 3–1 – изотерма. От времени чернила выцвели, и координатные оси на диаграмме исчезли. Известно, что рабочим веществом машины был идеальный газ (гелий) количеством $\nu = 2$ моль. Масштаб по оси давлений: 1 мал. кл. =

= 1 атм, по оси объемов: 1 мал. кл. = 1 л. 1) Восстановите положение координатных осей и вычислите максимальное давление газа в данном циклическом процессе. 2) Вычислите максимальную и минимальную температуры газа в цикле. 3) Найдите работу A_T газа на изотерме 3–1. 4) Найдите КПД цикла η . *Примечание.* Универсальная газовая постоянная $R = 0,082$ л.атм/(моль · К).

1) Будем отсчитывать разность давлений $\Delta p = p - p_3$ от точки 3 и разность объемов $\Delta V = V - V_1$ от точки 1. Тогда уравнение изотермы запишется в виде

$$pV = (p_3 + \Delta p)(V_1 + \Delta V) = \text{const}.$$

Рассмотрев три точки на изотерме – например, точки 1, 3 и одну в середине графика, – можно составить систему уравнений и выразить p_3 и V_1 .

А можно p_3 и V_1 найти более точным способом. Заметим, что $p_1 - p_3$ численно, в клетках, равно $V_3 - V_1$, значит, в этом масштабе график изотермы симметричен относительно перестановки $p \leftrightarrow V$ и p_3 численно равно V_1 и равно некоторому числу a . Таким образом, численно справедливо уравнение

$$\Delta p \Delta V + a(\Delta p + \Delta V) + a^2 = \text{const}.$$

Если отметить несколько точек на данном графике и построить график зависимости $y = \Delta p \Delta V$ от $x = \Delta p + \Delta V$, то графиком будет прямая с коэффициентом наклона $k = -a$. Так, найдем $p_3 \approx 1$ атм, $V_1 \approx 1$ л, и, следовательно, максимальное давление $p_{\text{max}} = p_1 \approx 32$ атм. Положение координатных осей становится очевидным.

2) Теперь можно определить максимальную и минимальную температуры в цикле:

$$T_{\text{min}} = T_1 = T_3 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} \approx 195 \text{ К},$$

$$T_{\text{max}} = T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R} \approx 780 \text{ К}.$$

3) Работу газа на изотерме можно определить как площадь под графиком изотермы со знаком минус:

$$A_T \approx -11,2 \text{ кДж}.$$

4) КПД цикла найдем как отношение работы A газа за цикл к подведенному количеству теплоты $Q_+ = Q_{12} = A_{12} + \nu C_V (T_2 - T_1) = 5A_{12}/2$. Работы определим по графику:

$$A \approx -13,0 \text{ кДж} \text{ и } A_{12} \approx 9,7 \text{ кДж}.$$

Окончательно получим

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{2A}{5A_{12}} \cdot 100\% \approx 54\%.$$

А.Шеронов

Ф2141. В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 1, напряжение между зажимами C и D равно $U_{CD} = 15$ В. Известно, что $R \gg r$. 1) Определите показание идеального вольтметра, подключенного к клеммам A и B. 2) Предположим, что к клеммам A и B подключен идеальный амперметр. Укажите направление тока, текущего через каждый из резисторов и амперметр.

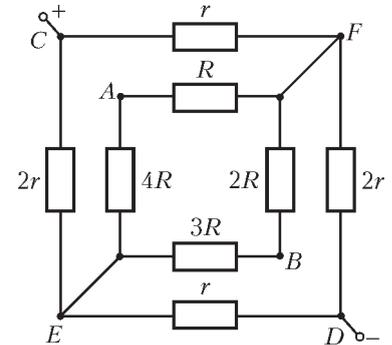


Рис. 1

По условию сопротивление «внутреннего» участка цепи много больше r . Это означает, что силу тока, идущего по нему, можно не учитывать при расчете напряжений и сил токов во «внешнем» участке цепи. Силы токов, текущих по ветвям CED и CFD, равны

$$I_0 = \frac{U_{CD}}{r + 2r}.$$

Напряжение между точками F и E составляет

$$U_{FE} = U_{CE} - U_{CF} = I_0 \cdot 2r - I_0 \cdot r = \frac{U_{CD}}{3}.$$

1) При подключении идеального вольтметра ток через него не идет. Силы токов в ветвях FAE и FBE составляют

$$I_{FAE} = \frac{U_{FE}}{R + 4R} \text{ и } I_{FBE} = \frac{U_{FE}}{2R + 3R} = I_{FAE}.$$

Напряжение на участке AB (показание идеального вольтметра) равно

$$U_{AB} = U_{FB} - U_{FA} = I_{FBE} \cdot 2R - I_{FAE} \cdot R = \frac{U_{FE}}{5} = \frac{U_{CD}}{15} = 1 \text{ В}.$$

2) Сопротивление идеального амперметра равно нулю, и это равносильно замыканию клемм A и B. При параллельном соединении больший ток течет через резистор с меньшим сопротивлением. Это означает, что $I_{FA} > I_{FB}$ и $I_{AE} < I_{BE}$. Поэтому ток через амперметр течет в направлении от A к B (так как полный ток, протекающий от F к узлам A и B, равен току, текущему от A и B к E). Направления всех токов указаны на рисунке 2.

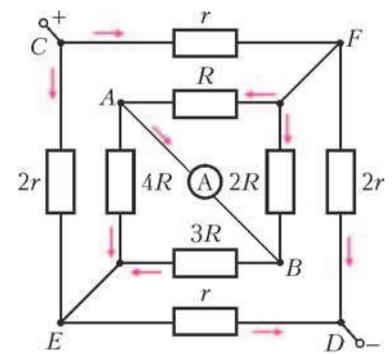


Рис. 2

М.Проскурин

Ф2142. $N = 2009$ одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10$ мкФ каждый зарядили до одинаковых напряжений $U = 10$ В и соединили последовательно, причем $n = 100$ штук оказались подключенными в одной полярности, а остальные – в другой. Концы получившейся цепочки соединили резистором сопротивлением $R = 1$ кОм. Какой полный заряд протечет по резистору и сколько в нем выделится тепла?

Найдем заряд q , протекший за большое время через резистор. Заряды каждого из n конденсаторов равны теперь $CU + q$, остальные конденсаторы имеют заряды $CU - q$. С учетом различия полярностей конденсаторов напряжение на резисторе должно быть нулевым при условии

$$(CU + q)n - (CU - q)(N - n) = 0.$$

Отсюда получим величину протекшего заряда:

$$q = \frac{CU(N - 2n)}{N} \approx 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

Теперь найдем выделившееся в резисторе тепло. Начальная разность потенциалов составляет $\Delta\varphi_{\text{нач}} = U(N - 2n)$, конечная разность потенциалов равна нулю. Значит, в резисторе выделится количество теплоты

$$Q = \frac{1}{2} q \Delta\varphi_{\text{нач}} = \frac{CU^2(N - 2n)^2}{2N} \approx 0,8 \text{ Дж}.$$

З.Рафаилов

Ф2143. На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью сложенным вдвое изолированным тонким проводом намотана катушка с большим числом витков (получились две одинаковые катушки – одна с выводами А и Б, другая – с выводами В и Г. Индуктивность катушки АВ равна 1 Гн. К точкам В и Г подключили резистор сопротивлением 1000 Ом, к выводам А и Б присоединили источник синусоидального напряжения частоты 1000 Гц с амплитудой 1 В. Какой ток течет через резистор? Как изменится ток, если выводы В и Г поменять местами?

Две катушки и резистор подключены последовательно. Нужно разобрать два случая: магнитные потоки в сердечнике вычитаются или складываются. Эти случаи «меняются местами» при обмене точек В и Г.

Если потоки вычитаются, то суммарный магнитный

поток равен нулю, и резистор оказывается подключенным напрямую к источнику. Ток через него при этом составляет

$$I = \frac{U}{R} = 1 \text{ мА}.$$

В противоположном случае магнитный поток через каждую из катушек удваивается – вторая катушка добавляет поток, равный «своему», если рассеяния магнитных линий нет. Учитывая ЭДС индукции двух катушек, получаем последовательное соединение резистора сопротивлением R и катушки индуктивностью $4L$ и ток определяем по формуле

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 16\omega^2 L^2}} \approx 0,24 \text{ мА}.$$

Мы подставляли амплитудные значения напряжения, поэтому значения токов тоже получились амплитудными.

А.Зильберман

Ф2144. Зрительная труба имеет объектив с фокусным расстоянием 1 м и окуляр с фокусным расстоянием 5 см. Линзы находятся на расстоянии 106 см друг от друга, на объектив падает широкий пучок лучей, параллельный главной оптической оси. Найдите угол расхождения выходящего пучка. Диаметр окуляра 0,5 см.

Рассмотрим падающий луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в первой линзе (объектив) он пересечет эту ось на расстоянии $d = 6$ см от окуляра (это задний фокус объектива). Далее он пройдет через окуляр и пересечет главную ось на расстоянии $f = 30$ см от него (это следует из формулы линзы $1/d + 1/f = 1/F$). За этой точкой пучок расходится, причем угол расхождения определяется крайним из лучей. Если диаметр окуляра D , то угол отклонения φ этого луча от главной оптической оси определяется соотношением

$$\text{tg } \varphi = \frac{D}{2f} = \frac{1}{120}.$$

Угол расхождения пучка δ вдвое больше. Учитывая малость угла, можно записать

$$\delta \approx 2\varphi \approx \frac{1}{60} \text{ рад} \approx 1^\circ.$$

А.Простов

Вниманию наших читателей!

Мы рады сообщить нашим читателям, что вышел в свет обновленный вариант электронного архива журнала «КВАНТ». На диске выложены все номера журнала с 1970 по 2008 год включительно, а также два приложения к журналу: книга Н.Б.Васильева, А.П.Савина, А.А.Егорова «Избранные олимпиадные задачи. Математика» и книга К.Ю.Богданова «Прогулки с физикой». Имеется хорошая система поиска нужного вам материала.

Диск можно приобрести в редакции журнала «КВАНТ». Наши координаты – на последней странице журнала. Пишите, звоните, мы вас ждем.

Мы также напоминаем нашим читателям, что пришло время подписываться на журнал «КВАНТ» на первое полугодие 2010 года. Журнал «КВАНТ» выходит один раз в два месяца вместе с приложением к журналу и распространяется только по подписке.

Подписаться на «КВАНТ» можно в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «РОСПЕЧАТЬ» 70465.

Задачи

1. Петя и Вася едут в соседних вагонах поезда. Вагон, в котором едет Петя, — пятый от «головы» поезда, а вагон, в котором едет Вася, — седьмой с «хвоста». Сколько вагонов в поезде?

М.Ахмеджанова



2. На рисунок изображена фигура, все углы между ее соседними отрезками прямые. Как с помощью только карандаша и линейки без делений провести прямую, которая отсекала бы от фигуры кусок, по площади равный половине площади фигуры?

В.Крюков



3. Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червяков. Если же в грибе меньше 10 червяков, он считается хорошим. В лукошке 90 плохих и 10 хороших



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые червяки переползут из плохих грибов в хорошие?

А.Канель

4. Для двух разных шариков легко сделать колечко, которое можно плотно надеть на каждый шарик (чтобы не было щелей).

А если взять две разные картофелины? Всегда ли удастся изготовить проволочное кольцо, возможно изогнутое и не плоское, которое можно будет плотно надеть на каждую из картофелин?

Г.Гальперин



5. По коридору идет толпа. Перед развилкой коридора стоит разделитель. Он направляет одного человека налево, а другого направо, так что поток делится на две одинаковые части. При помощи нескольких таких разделителей можно отделить четверть потока или три восьмых его. А можно ли отделить треть потока?

В.Арнольд



Иллюстрации Д.Гришуквой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. На новом сайте «Разговоры.ru» зарегистрировалось 2000 человек. Каждый из них пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

А.Эвнин

7. Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты — не равны?

Н.Авилов

8. Двести гирек массой 1 г, 2 г, ..., 200 г разложили на две чаши весов так, что любые две гири с разницей

масс 100 г попали на разные чаши и любые две гири с суммой масс 201 г тоже попали на разные чаши. При этом весы оказались в равновесии. Затем с каждой чаши убрали все гири четной массы. Докажите, что весы снова будут в равновесии.

В.Произволов

9. Найдутся ли такие натуральные числа a, b, c, d , что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?

М.Мурашкин

10. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина

Каждый год в конце июня увлеченные математикой школьники собираются в красивом месте Костромской области, чтобы соревноваться в решении задач. Турнир носит имя Анатолия Павловича Савина, основателя конкурса «Математика 6–8» журнала «Квант». Благодаря конкурсу в 1993 году и возник этот турнир математических боев. Организаторы турнира — журнал «Квант» и образовательная программа «Большая переменная» (руководитель Г.В. Кондаков).

Этим летом команды съехались на 7 дней (с 26 июня по 2 июля 2009 года) под город Судиславль на живописную базу отдыха «Берендеевы Поляны». Многие ребята приехали сюда гораздо раньше — они учились в летней математической школе, которая началась 11 июня, после которой решили остаться на турнир.

В нынешнем году друг с другом играли команды 6–8 классов: 8 команд 6 классов, 12 команд 7 классов и 8 команд 8 классов. Школьники приехали из Москвы, Санкт-Петербурга, Иванова, Костромы, Тамбова и Черноголовки. Команда Тамбова была приглашена на турнир как победитель конкурса «Математика 6–8» журнала «Квант».

В день заезда (25 июня) сразу была проведена оживленная математическая игра «Магический квадрат». Победителями стали команды «Фрактал» (6 класс, Санкт-Петербург), «Интеллектуал» (7 класс, Москва) и «218-Б» (8 класс, Москва).

На следующий день прошла устная командная олимпиада, по результатам которой команды были разделены на лиги по

классам, при этом 7 класс был разбит на две лиги. Далее в каждой лиге проходили математические бои. Последний день турнира — финальные бои, которые определили победителей в каждой лиге.

В лиге 8 классов первое место заняла команда «Москва-Юг». Ее собрала Т.П. Зорина в июньской летней математической школе 2008 года. За год с небольшим ребята выиграли разные турниры, включая этот турнир в прошлом году. В высшей лиге 7 классов лучшей стала команда кружка МЦНМО под руководством А.В. Спивака. Лучшие шестиклассники — ребята из кружка «Фрактал» Санкт-Петербурга, их преимущество оказалось ощутимым и во время боев, и во время командной олимпиады. Лучшей во второй лиге 7 классов стала команда школы 82 из Черноголовки Московской области. Ниже в таблице приведен список всех команд-призеров турнира.

В один из дней турнира участники отдохнули от боев — прошла личная олимпиада. В каждой параллели проводилось свое состязание со своими задачами.

В 6 классе за решение всех задач «гран-при» получил *Андрей Волгин* (команда МЦНМО), а диплом I степени выиграл костромич *Иван Петренко*. Лучшим семиклассником стал *Никита Сопенко* (команда Тамбова), лучшим восьмиклассником — *Михаил Артемьев* (гимназия 1543, Москва).

Обладателями дипломов II степени стали: *Семен Верченко* (8 класс, гимназия 1543), *Мария Сандрикова* (8 класс, ЦО 218),

Лига	Диплом	Команда	Капитан	Руководитель
Высшая 8	I степени	Москва-Юг	Ф.Лященко	Т.П.Зорина
Высшая 8	II степени	Гимназия 1514, Москва	А.Понфиленко	О.Р.Горская
Высшая 8	II степени	Лицей 14, Тамбов	Н.Сопенко	А.В.Бурмистрова
Высшая 8	III степени	ЦО 218, Москва	М.Сандрикова	А.Д.Блинков
Высшая 8	III степени	Гимназия 1543, Москва	М.Артемьев	А.В.Хачатурян
Высшая 7	I степени	МЦНМО, Москва	Т.Левинсон	А.В.Спивак
Высшая 7	II степени	Сборная Костромы	Р.Цветников	Д.А.Калинин
Высшая 7	II степени	Интеллектуал, Москва	Ю.Гребенникова	Н.М.Нетрусова
Высшая 7	III степени	Гимназия 1543, Москва	Ю.Котельникова	И.В.Раскина
Высшая 7	III степени	Гимназия 1514, Москва	Т.Степанов	Т.В.Житникова
Высшая 6	I степени	Фрактал, Санкт-Петербург	Е.Цейтина	А.П.Погода
Высшая 6	II степени	Воробьевы Горы, Москва	И.Гуценко-Чеведа	Т.П.Зорина
Высшая 6	II степени	ЦО 218, Москва	А.Зерцалов	Ю.А.Блинков
Высшая 6	III степени	Квантик, Москва	В.Волков	И.А.Николаева
Высшая 6	III степени	Горные Воробьи, Москва	А.Мельник	Т.П.Зорина
Первая 7	I степени	Школа 82, Черноголовка	А.Потапов	Л.Н.Головко
Первая 7	II степени	Школа 179, Москва	И.Пантелеева	А.Ю.Юрков

Юлия Гребенникова (7 класс, «Интеллектуал»), Максим Хабаров (7 класс, школа 30, Санкт-Петербург), Алексей Быстров (6 класс, Кострома), Степан Каргальцев (6 класс, ЦО 218), Никита Уваров (6 класс, гимназия 1543) и Михаил Ягудин (6 класс, команда МММФ).

Дипломами III степени награждены Алексей Виноградов (8 класс, гимназия 1514), Анна Добровольская (8 класс, гимназия 1514), Лев Синяков (8 класс, «Москва-Юг»), Петр Мельниченко (7 класс, ЦО 218), Богдан Славов (7 класс, школа 179), Марина Хачатурян (7 класс, гимназия 1543), Иван Буренев (6 класс, «Фрактал»), Андрей Зерцалов (6 класс, ЦО 218), Дарья Лебедева (6 класс, «Фрактал»), Сергей Полевой (6 класс, «Москва-Юг») и Павел Шевчук (6 класс, «Горные Воробьи»).

Помимо этого, многие ребята были поощрены дипломами за успешное участие и похвальными грамотами.

В часы, свободные от основных соревнований, участники олимпиады слушали лекции по математике, которые читали А.В.Спивак, С.И.Токарев, А.Б.Скопенков, А.В.Шаповалов, А.А.Заславский, С.Г.Волченков. Но развлечения были не только математические. Никогда не пустовали футбольное поле и волейбольная площадка. По вечерам проходили интеллектуальные игры, которые проводили Н.М.Нетрусова и А.В.Хачатурян. Очень интересные путешествия-экскурсии организовывала Т.П.Зорина, которая давно увлекается историей Судиславля и окрестных земель и теперь стала, наверное, самым лучшим экскурсоводом по этому древнему городу.

Более подробную информацию о результатах турнира и фотографии можно посмотреть на сайте

<http://kostroma-open.info/20090626.html>

Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия под руководством Александра Васильевича Шаповалова. В нее вошли А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков, Н.Т.Гребенник, Е.С.Горская, С.А.Дориченко, А.А.Заславский, Д.А.Калинин, Т.В.Караваева, П.В.Мартынов, К.А.Матвеев, Д.В.Прокопенко, И.В.Раскина, А.Б.Скопенков, К.А.Скопцов, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов. Существенный вклад в работу комиссии внесли руководители команд. Книжки и другие призы для победителей представили журнал «Квант», компания «Яндекс» и Фонд математического образования и просвещения (директор С.И.Комаров).

По традиции, идущей еще от первых турниров, в турнире было заявлено много новых авторских задач. Из них мы постарались выбрать такие, где из условий следует чуть-чуть больше, чем можно ожидать, или в решении есть неожиданный поворот и краткость. После номера каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит.

Избранные задачи турнира

1 (7–8). У трех братьев Антона, Бори и Васи дни рождения совпадают. Оказалось, что когда Антону исполнится 12 лет, сумма возрастов двух других братьев разделится на 12 без остатка. То же самое случится, когда 12 лет исполнится Боре. Докажите, что так же будет, когда 12 лет исполнится Васе.

А.Шаповалов

2 (7). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно BD , пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что $BK = 2CD$.

Фольклор

3 (7–8). Три сталкера дошли до Каменной Аномалии. Оттуда к кладу ведет тропа длиной 100 м. Сталкеры знают, что первый пошедший по тропе окаменеет в произвольном месте и что такая же участь ждет и второго. Оба оживут в тот момент, когда третий будет идти по тропе и суммарное расстояние от него до двух окаменевших спутников будет в точности равно 100 м. Могут ли сталкеры добраться до клада без риска окаменеть навсегда?

А.Блинков, И.Раскина

4 (8). Три окружности проходят через точку P и попарно пересекаются в точках A , B и C . Известно, что центр одной окружности лежит на прямой AP , а центр другой – на прямой BP . Докажите, что центр третьей окружности лежит на прямой CP .

Б.Френкин

5 (8). Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 2009 на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась произведению чисел в другой группе?

А.Шаповалов

6 (8). На клетчатой бумаге нарисован 222-угольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток может состоять этот многоугольник?

А.Шаповалов

7 (6–8). По кругу стоят лжецы и рыцари, всего 100 человек. В первый раз каждого спросили «Верно ли, что твой сосед справа – лжец?» Двое ответили «да», остальные – «нет». Во второй раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед слева через одного – лжец?» И снова двое ответили «да», остальные – «нет». В третий раз спросили: «Верно ли, что стоящий напротив тебя – лжец?» Сколько человек на этот раз ответят «да»?

А. Шаповалов

8 (7–8). Найдите наименьшее натуральное число, записываемое одинаковыми цифрами и делящееся на 2009.

С. Токарев

9 (8). Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Найдите его углы, если известно, что три из них равны, а все стороны четырехугольника различны.

А. Заславский

10 (7–8). Можно ли разбить квадрат 20×20 на доминошки 1×2 так, чтобы каждая граничила по отрезку с нечетным числом других доминошек?

А. Шаповалов

11 (7–8). На доску выписаны через запятую числа 1, 2, 3, ..., 2009. Двое играющих по очереди заменяют какую-нибудь запятую на + или \times (умножить). Если после замены всех запятых результат будет четным, выигрывает первый, если нечетным – второй. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

А. Шаповалов

12 (7–8). Десять ребят на лужайке играют в пейнтбол. Сначала каждый выстрелил краской в ближайшего к себе. (Если игроков, расположенных ближе всего к стреляющему, несколько, то он стреляет в любого из них.) Затем каждый выстрелил в наиболее удаленного от себя (если таковых несколько – то в любого из них). Какое наибольшее число порций краски могло в итоге попасть в одного игрока?

С. Токарев

13 (7–8). В треугольнике ABC проведена медиана BM . Найдите $\angle ABC$, если $\angle BAC = 30^\circ$, а $\angle BMC = 45^\circ$.

С. Токарев

14 (7–8). Можно ли все натуральные числа от 1 до 200 выписать по кругу так, чтобы для любых двух соседних чисел хотя бы одно отличалось от другого на целое число процентов?

И. Акулич

15 (7–8). Назовем *разносторонностью* треугольника отношение его наибольшей стороны к наименьшей, а *разноугольностью* – отношение его наибольшего угла к наименьшему. Петя уверен, что чем больше разносторонность треугольника, тем больше его разноугольность. Прав ли он?

И. Акулич

16 (7–8). На доске нарисован неравносторонний треугольник. Имеется угольник той же формы, выпи-

ленный из фанеры. Угольник можно прикладывать к доске (в том числе к уже начерченным прямым и точкам) и чертить линии по его краю. Всегда ли можно построить какую-нибудь из высот нарисованного треугольника?

А. Блинков, Ю. Блинков

17 (8). На столе лежат 10 кусков сыра. Петя съедает самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из оставшихся на столе кусков на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия – разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока не съест 9 кусков. Докажите, что Петя съест не более половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

18 (8). Измерив длины сторон и высот некоторого треугольника, Таня получила 6 различных чисел и записала их на 6 карточках. Перетасовав карточки, она выслала их Боре. Всегда ли сможет Боря выбрать из них три карточки, на которых выписаны длины сторон?

Б. Френкин

19 (6–8). Есть 63 одинаковые с виду монеты, одна из них – фальшивая, она легче настоящей. Есть чашечные весы без гирь, у которых правая чаша вымазана краской. Как за 5 взвешиваний выявить фальшивую монету, если монеты, побывавшие на правой чаше, нельзя после этого класть на левую?

А. Шаповалов

20 (8). В классе 32 человека. Каждый из них назвал два числа: количество его одноклассников с таким же ростом, но другим весом, и количество его одноклассников с таким же весом, но другим ростом. Среди названных чисел встретились все числа от 0 до 10. Докажите, что в этом классе можно выбрать двух человек с одинаковым ростом и одинаковым весом.

К. Матвеев, А. Шаповалов

21 (8). Решите систему

$$\begin{cases} x^5 + y^3 = 2z, \\ y^5 + z^3 = 2x, \\ z^5 + x^3 = 2y. \end{cases}$$

В. Сендеров

22 (8). На доске написаны два выражения: $x + y + z$ и $x^2 + y^2 + z^2$. Играют двое, они по очереди заменяют x , y и z в выражениях натуральными числами (вначале первый игрок заменяет x , затем второй – y , и наконец первый – z). Первый игрок хочет, чтобы в итоге оба выражения делились на 101, а второй пытается помешать этому. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его противник?

В. Сендеров, И. Богданов

*Публикацию подготовили
Д. Калинин, А. Шаповалов*

...если у вас имеется плоская поверхность, совершенно гладкая, как зеркало, а из вещества твердого, как сталь, не параллельная горизонту, но несколько наклонная, и если вы положите на нее совершенно круглый шар из вещества тяжелого и весьма твердого, например из бронзы, то что, думаете вы, он станет делать, будучи предоставлен самому себе?

...повторяя опыты сотни раз, мы постоянно находили, что отношение пройденных путей равно отношению квадратов времен их прохождения при всех наклонах плоскости...

Степени скорости, приобретаемые одним и тем же телом при движении по разным наклонным плоскостям, равны между собой, если высоты этих наклонных плоскостей одинаковы...

Тела, опускающиеся по дугам, соответствующим хор-

дам, наклоненным к горизонту..., совершают движение, как показывает опыт, также в равные промежутки времени и притом меньшие, нежели движение по хордам.

Галилео Галилей

...тело, падающее по наклонной плоскости, ... движется несвободно, так как находящаяся внизу плоскость... препятствует телу падать прямо, как этого требует сила тяжести.

Леонард Эйлер

Силы, возникающие при движении частицы вниз по склону под действием тяжести, весьма и весьма запутаны...

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам наклонная плоскость?

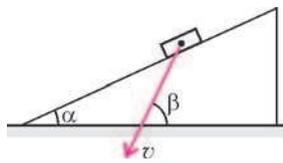
Что собой представляет наклонная плоскость — объект наблюдений, прибор для проведения опытов, простой механизм? И то, и другое, и третье — потому и стала персонажем «Калейдоскопа», тем более что открытие основополагающих законов механики трудно представить без ее участия. Великий Галилей, с которого и началось современное естествознание, сумел сделать ее надежным помощником в своих экспериментах и выводах, о чем можно судить по числу упоминаний о ней в его трудах, что лишь малой частью отражено в эпитафье.

Конечно, наклонные плоскости применяли еще строители египетских пирамид, поднимая с их помощью каменные блоки массой в две с половиной тонны на высоту в полтора метра. Но эти плоскости — неотъемлемая часть и сегодняшней нашей жизни. Принцип их действия используется в любом винтовом устройстве, начиная от шурупов и кончая навинчиваемыми крышками банок и бутылок. А как обойтись без знаний о наклонных плоскостях при строительстве автомобильных и железных дорог, в особенности на пересеченной или горной местности, при проектировании фуникулеров и эскалаторов, при прокладке горнолыжных спусков и возведении трамплинов, при организации аттракционов или оборудовании пандусов для инвалидов, при исследовании сползания ледников и схода лавин?..

Множество примеров лишь подтверждают важность обращения к этому простому механизму, «простота» которого, по мнению Фейнмана, не так очевидна, как кажется, в чем мы призываем убедиться и вас.

Вопросы и задачи

1. Скорость монеты, соскальзывающей с клина, изображена на рисунке. Графическим построением найдите скорость клина.



2. Из верхней точки вертикального диска прорезан желоб, составляющий угол α с вертикальным диаметром диска. Как зависит вре-

мя скольжения грузика по желобу от угла α , если трением можно пренебречь?

3. Под каким углом к вертикали должен быть направлен из точки, находящейся над наклонной плоскостью, гладкий желоб, чтобы шарик соскользнул по нему на плоскость за наименьшее время?

4. В прямоугольной трубке находится поршень, форма которого в сечении представлена на рисунке. Давление жидкости по обе стороны поршня в горизонтально расположенной трубке одинаково. Будет ли поршень находиться в равновесии?



5. Две мензурки одинаковой длины заполнены водой, одна расположена вертикально, другая — под углом 30° к горизонту. Как будут различаться давления воды на дно мензурок?

6. На доску положили два одинаковых кирпича — один плашмя, а второй на ребро. Какой кирпич соскользнет с доски первым (если при этом он не опрокидывается), когда доску станут наклонять?

7. Брусок находится на шероховатой плоскости, угол наклона которой можно изменять от 0 до 90° . Что при этом будет происходить с силой трения, действующей на брусок, если пренебречь явлением застоя?

8. На наклонной плоскости с углом наклона α покоится монета массой m . С какой силой реакции наклонная плоскость действует на монету? Чему равна при этом сила трения?

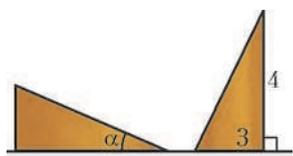
9. На клин, плоскость которого составляет угол α с горизонтом, положили небольшое тело. Какое ускорение надо сообщить клину в горизонтальном направлении, чтобы тело свободно падало?

10. На наклонной плоскости лежит монета, удерживаемая силой трения. Как она будет двигаться, если ей сообщить горизонтальную скорость вдоль плоскости?

11. Какой силой \vec{F} можно удержать на месте брусок массой m , лежащий на гладкой наклонной плоскости с углом при основании α ?

12. Математический маятник укреплен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости. Найдите положение равновесия маятника.

13. Левый клин медленно вдвигают под правый, отношение катетов в котором представлено на рисунке.



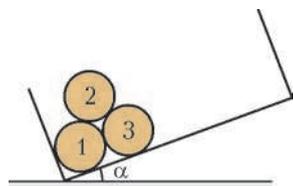
Каким должен быть угол α , чтобы правый клин перевернулся?

14. При каком условии винт может служить для крепления деталей?

15. С вершины сортировочной горки поочередно скатывают два вагона: один пустой, другой грузный. Какой вагон проедет дальше по прямолинейному участку после скатывания с горки?

16. Если автомобиль въезжает на гору при неизменной мощности двигателя, то его скорость движения уменьшается. Почему?

17. Цилиндр, диаметр которого равен его высоте, один раз соскальзывает с наклонной плоскости вдоль своей образующей, а другой раз скатывается с той же точки плоскости. Сравните поступательные скорости цилиндра у основания наклонной плоскости, считая коэффициент трения скольжения между цилиндром и плоскостью очень малым.



18. В кузове грузовика находятся три одинаковых гладких бревна, расположенных, как показано на рисунке. На какой угол α может наклониться кузов, чтобы верхнее бревно не скатилось на борт?

Склейте цилиндр из плотной бумаги (можно взять картонную втулку от рулона туалетной бумаги) и закрепите на его внутренней стороне кусок пластилина. Такой цилиндр может катиться вверх по наклонной плоскости. Как этого добиться?

Микроопыт

Склейте цилиндр из плотной бумаги (можно взять картонную втулку от рулона туалетной бумаги) и закрепите на его внутренней стороне кусок пластилина. Такой цилиндр может катиться вверх по наклонной плоскости. Как этого добиться?

Любопытно, что...

...наиболее гениальным изобретением Архимеда был водоподъемный винт. По оценке Галилея, это устройство «не только великолепно, но просто чудесно, поскольку мы видим, что вода поднимается в винте, непрерывно опускаясь». Архимедов винт использовался, например, в Египте как для подъема воды на возвышенности (на высоту до 4 метров), которых обычно разлил Нила не достигал, так и для осушения низменных местностей.

...со времен последователей Архимеда — Герона и Паппа — механику стали считать наукой о простых машинах: ворота, рычаге, блоке, клине и винте. Два последних основаны на свойствах наклонной плоскости, закон действия которой, правда, самому Архимеду известен не был.

...изучая равновесие замкнутой цепочки, наброшенной на две наклонные плоскости, голландский ученый Симон Стевин в своей работе «Начала статики» доказал, что сила, скатывающая груз, во столько же раз

меньше его веса, во сколько раз высота плоскости меньше ее длины.

...в трактате, составленном в период чтения им публичных лекций в 1597—1598 годах, Галилей, не зная еще закона разложения сил, рассматривал сначала рычаг, затем сводил к рычагу клин, к клину — наклонную плоскость, а к наклонной плоскости — винт.

...законы свободного падения тел Галилей устанавливал с помощью наклонной плоскости — желоба, оклеенного изнутри полированным пергаментом, применяя ее для «уменьшения» ускорения свободного падения в заданное число раз...

...разбирая движение по плоскости, которая «ни вниз не опускается, ни вверх не поднимается», Галилей выявил свойство тел сохранять свою скорость, хотя еще не нашел полной и точной формулировки закона инерции, что предстояло сделать Ньютону.

...исследуя перекачивание шара «с горки на горку», Галилей предположил, что, говоря современным языком, приобретаемая при спуске скорость не зависит от формы пути, по которому движется тело. Галилей, естественно, не знал, что такое положение вытекает из закона сохранения энергии, однако он этот закон предчувствовал и применял в простейших случаях падения тела или движения по наклонной плоскости и в опытах с маятником.

...Галилей геометрическим методом построил теорию движения по наклонной плоскости и движения по хордам круга, показав, что по дуге круга, которая меньше или равна четверти окружности, тело соскальзывает быстрее, чем по стягивающей хорде. Этим он предвосхитил постановку задачи о поиске линии быстрого спуска — брахистохроны, задачи, решенной в 1697 году Иоганном Бернулли. Уравнение этой кривой, оказавшейся циклоидой, используется, кстати, при проектировании санных трасс и «американских» горок.

...при завинчивании болта с шагом резьбы в 1 миллиметр с помощью гаечного ключа длиной 30 сантиметров мы выигрываем в силе в две тысячи раз, что либо позволяет надежно скреплять детали, либо легким усилием передвигать большие тяжести.

...чтобы автомобили не вылетали на поворотах, дороги в этих местах делают наклонными. Правильный угол наклона соответствует радиусу поворота и определенной скорости движения, на которую необходимо устанавливать ограничение. А вот велосипедные треки имеют на поворотах переменный наклон — в расчете на различные скорости, достигаемые спортсменами.

Что читать в «Кванте» о наклонной плоскости

(публикации последних лет)

1. «Комбинированные задачи по механике» — 2003, Приложение №6, с. 92;
2. «О динамике криволинейного движения» — 2005, №2, с. 30;
3. «Центр масс механической системы» — 2006, №2, с. 25;
4. «Какая горка самая быстрая?» — 2006, Приложение №6, с. 68;
5. «И тележка в гору едет...» — 2008, №5, с. 35;
6. «Подводные камни» силы Архимеда» — 2009, №2, с. 46.

Материал подготовил А.Леонovich

Загадки магнитной стрелки

И. ЛЕЕНСОН

В ПЕРВОЙ ЧАСТИ СТАТЬИ РАССКАЗЫВАЛОСЬ О ЧЕТЫРЕХ простых загадках магнитной стрелки. А теперь – более трудные загадки.

Загадка пятая. *Возьмите компас, освободите стрелку от зажима (он нужен для того, чтобы стрелка попусту не болталась и не стирала ось) и поднесите компас к массивному предмету из чугуна, например к батарее отопления. Вы увидите, что к верхней части батареи стрелка будет обращена синим концом, а к нижней части – красным. Как это объяснить?*

Этот опыт вполне можно показывать как фокус, причем вряд ли кто из присутствующих сразу сможет его разгадать. И чем севернее вы живете, тем более четко будет проявляться этот эффект.

Много лет назад одна из газет напечатала любопытную статью о том, как проходят вступительные экзамены в Московский физико-технический институт. Самым интересным оказался вопрос, который задали не экзаменаторы, а одна из поступающих (и такое случается).

Загадка шестая. *Девушка проделала дома опыт, результат которого показался ей странным: большая консервная банка отрывала от сильного магнита притянутую им железную кнопку. В чем тут дело?*

Это и в самом деле загадка. Консервные банки делают из жести, которая не намагничивается. А если она и «передает» действие постоянного магнита, с которым соприкасается, то уж, конечно, не может стать «сильнее» его и перетянуть кнопку на свою сторону. Но опыт показывает, что может!

Давайте проверим. Все, что нам потребуется, это достаточно сильный подковообразный магнит и два бруска из немагнитного железа (вернее, из малоуглеродистой стали, так как из чистого железа почти ничего не делают). С такими брусками удобнее ставить опыты, чем с кнопкой и консервной банкой. Один брусок должен быть небольшим – например, подойдет обыкновенный болт, который заменит кнопку, другой – массивным, он заменит банку.

Сначала убедимся, что ни болт, ни брусок не являются магнитами (вернее, не обладают остаточным магнетизмом, т.е. не могут сохранять намагниченность). Поднесем их поочередно на несколько секунд к постоянному магниту, а затем – к железным опилкам (их можно заменить мелкими немагнитными гвоздиками, канцелярскими скрепками и т.п.). Опилки не должны притягиваться ни к болту, ни к бруску.

Теперь расположим немагнитный брусок вертикально, поставим на него болт и сверху поднесем магнит. При этом между нижним бруском и болтом тоже обнаружится притя-

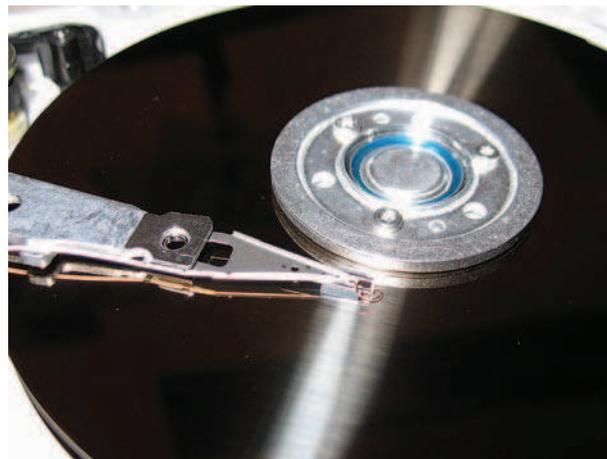
жение – болт передает магнитное действие магнита. А дальше (внимание!) начинается самое интересное. Как вы думаете, что будет, если, придерживая брусок на месте, прикоснуться магнитом к болту, а затем потянуть магнит вверх? Ответ как будто очевиден: магнит оторвет болт от бруска. Ничего подобного – не оторвет, болт останется на месте. Странный результат... Может быть, болт слишком тяжел? Но тогда почему магнит легко поднимает его, когда снизу нет бруска?

Немного изменим опыт, для чего будет удобнее использовать магнит не в виде подковы, а прямой (полосовой): расположим магнит снизу, на него поставим болт, а сверху – брусок. Придерживая магнит, потянем немагнитный брусок вверх. Невероятно – болт отрывается от магнита и висит на бруске! И чем сильнее постоянный магнит (и массивнее расположенный сверху брусок), тем выше можно поднять брусок с притянутым к нему болтом.

Абитуриентка была права: железо стало более сильным магнитом, чем постоянный магнит (с которым, кстати, оно даже не соприкасалось). Как же такое возможно?

Но сейчас настала пора разгадать тайну батареи отопления. Очевидно, что батарея намагничена, хотя и очень слабо – не удержит даже легкую скрепку. И намагнитить ее мог только один магнит – это сама Земля. Почему же южный магнитный полюс оказался у батареи сверху, а северный – внизу? (А вот в южном полушарии, например в Австралии, все будет наоборот.)

Разгадку дает простой эксперимент. Если хорошо намагнитить длинную спицу подвесить точно в центре тяжести (а это не так просто, поэтому лучше подвесить немагнитную спицу, а уже потом ее намагнитить), то можно заметить, что один ее конец норовит «клонуть» вниз, а другой «задирает хвост». Чем ближе к северу, тем заметнее наклон спицы, а на экваторе наклон не наблюдается вовсе. Это явление, в отличие от магнитного склонения, назвали магнитным наклонением. Его можно обнаружить и с помощью компаса, но необычного: стрелка компаса должна быть насажена не на вертикальную, а на горизонтальную ось (такой прибор называется инclinатором, от латинского *inclinare* – наклонять). Если же свободно подвешенную магнитную стрелку держать точно над магнитным полюсом (или неподалеку от него), то она расположится вертикально и будет смотреть вниз.



Данные на жестких дисках компьютеров записывают на тонких магнитных покрытиях

Начало см. в «Кванте» №3 за этот год.

Зная о том, что существует магнитное наклонение, легко понять, как именно намагнитилась батарея под действием «косого» магнитного поля Земли и почему верхняя и нижняя ее части представляют собой южный и северный полюсы постоянного, хотя и слабенького, магнита. (Понятно также, что в южном полушарии намагниченность будет противоположной.)

Если с помощью сильного постоянного магнита перемагнитить спицу, она, конечно, развернется в другую сторону. При этом тот ее конец, который был наклонен вниз, будет теперь приподнят. На севере Канады, например, наклон спицы будет очень сильным. А вот у стрелки обычного компаса магнитное наклонение практически не заметно – этому препятствует способ крепления стрелки на оси. Кроме того, эта стрелка слишком маленькая.

Теперь постараемся объяснить «фокус» с болтом, который отрывается от магнита.

Магнитные свойства вещества связаны с магнитными свойствами его атомов. У некоторых металлов (их называют ферромагнитными, от латинского названия железа – Ferrum) отдельные атомы-магнитики стремятся ориентироваться так, чтобы их одноименные полюса были направлены в одну сторону. Таким свойством при комнатной температуре обладают лишь железо, кобальт, никель и редкий металл гадолиний. Однако одинаковая магнитная ориентация атомов имеет место только в очень ограниченных областях металла, называемых доменами. Размеры этих мельчайших магнитиков-доменов составляют примерно 0,01–0,1 мкм. Если отшлифовать поверхность магнита и посыпать ее магнитным порошком, его частицы расположатся в основном по границам доменов, четко обозначив их контуры.

У куска чистого железа в целом нет собственного магнетизма, потому что «стрелки» разных доменов направлены в разные стороны и уничтожают действие друг друга. Поднесем теперь к куску железа магнит. Под его влиянием «стрелки» всех микромагнитиков, как по команде, повернутся в одну сторону. Исследования под микроскопом показали, что происходит это явление довольно любопытным образом: домены, которые случайно оказались «правильно» ориентированными, увеличиваются в размерах. Они присоединяют к себе, как бы «поедают», соседние домены, у которых направление собственной намагниченности оказалось «неправильным» относительно поднесенного магнита. В результате железо намагничивается. Максимальная намагниченность достигается, когда магнитные моменты всех доменов ориентированы в одну сторону – для этого нужен очень сильный внешний магнит.

Посмотрим, что произойдет, если убрать магнит. Если бы вместо чистого железа была стальная иголка, она так бы и осталась намагниченной: доменам в закаленной стали не очень просто выстроиться в одном направлении, но так же трудно и принять прежнюю ориентацию. Именно это свойство используют для создания постоянных магнитов. В них нужно ориентировать как можно больше доменов в одном направлении, но так, чтобы они потом сами собой не размагничивались (размагничивание происходит при сильных ударах и при нагреве до высокой температуры).

Понятно, что раз даже один атом магнита имеет северный и южный полюса, то невозможно изготовить магнит только с одним полюсом. Тем не менее, продолжают, хотя пока и безуспешно, экспериментальные поиски мельчайших «магнитных монополей», у которых есть только один полюс (по аналогии с тем, что электрические заряды можно разделить

на положительные и отрицательные).

Первые постоянные магниты, которые изготавливали еще в XIX веке, делали из углеродистой, а затем из вольфрамовой стали. Магнит считался хорошим, если он мог удерживать груз, масса которого равна его собственной. С середины 30-х годов XX века начали применять сплавы, которые по магнитным свойствам превосходили сталь в десять и более раз. Это были сплавы железа с никелем, алюминием, кобальтом, медью. В 1952 году появился сплав платины с кобальтом, магнитная энергия которого была еще выше. В 1969 году началось промышленное производство магнитов, способных удерживать груз, масса которого уже в сотни раз превышала их собственную. Такие магниты были сделаны из сплавов, содержащих редкие металлы – церий, празеодим, самарий. Сравнительно небольшой магнит из сплава самария с кобальтом, уместяющийся на ладони, способен удерживать небольшой автомобиль вместе с пассажирами. Секрет такого сплава в том, что он состоит из очень мелких сильно намагниченных частиц вытянутой формы, которые как бы вкраплены в слабомагнитное вещество. При изготовлении магнита эти частицы ориентируются в сильном магнитном поле преимущественно в одном направлении и дальше свою ориентацию не теряют, даже когда внешнее магнитное поле убирают.

В чистом железе, его называют «мягким», или в низкоуглеродистой стали, например в обычном гвозде, магнитные стрелки доменов переориентируются очень легко. Поэтому намагниченное железо даже не надо сильно нагревать или подвергать резким ударам – оно размагничивается само по себе, и довольно быстро. Но это же свойство доменов приводит к тому, что в сильном внешнем магнитном поле они почти все принимают одну ориентацию, и железо становится сильнейшим магнитом. Вот почему в нашем опыте достаточно массивный железный брусок стал более сильным магнитом, чем породивший его постоянный магнит.

Подобным свойством мягкого железа пользуются при изготовлении электромагнитов: довольно слабое магнитное поле катушки с током (соленоида) значительно усиливается, когда внутрь катушки вводят сердечник из мягкого железа. Из такого же железа делают и сердечники трансформаторов – ведь они должны быстро перемагничиваться, когда по обмоткам катушек течет переменный ток. Интересно, что мягкое железо за доли секунды размагничивается почти полностью. Это легко проверить в нашем втором опыте: отведите магнит в сторону – и болт сразу же упадет.

В заключение статьи – две простые экспериментальные задачи на смекалку.

В заключение статьи – две простые экспериментальные задачи на смекалку.



Простейший электромагнит: на ферромагнитный сердечник намотан электропровод в изоляции

Задача 1. В школьном физическом кабинете имеется большой полосовой магнит, полюса которого когда-то были окрашены в синий и красный цвета, и точно такая же по размеру немагнитная полоска железа. Со временем вся краска с магнита сошла, так что его стало невозможно отличить от немагнитной полоски. Как определить, какая из полосок магнитная, если нет никаких других железных предметов?

Задача 2. После того как определили, какая полоска – магнит, полюса этого магнита захотели заново окрасить синей и красной краской. Как узнать, какой конец этой полоски нужно окрасить в синий цвет, а какой – в красный? Рассмотрите два случая – когда у вас есть компас и когда его нет.

Ионосфера и шум цунами

А. СТАСЕНКО

«П О Д Н Я Л А С Ъ К Н Е Б У В О Л Н А В Ы С О Т Ы Н Е И З М Е Р И М О Й, закрыла грудью половину неба и, качая белым хребтом, согнулась, переломилась, упала на берег и страшной тяжестью своею... смыла весь берег» (М. Горький). Таково художественное описание катастрофических явлений, время от времени происходящих у берегов теплых стран и уже унесших жизни сотен тысяч людей.

Но при чем тут ионосфера, расположенная на высоте порядка сотен километров над землей и морем? А вот послушайте.

Вспомним, как объясняют поведение вещества, попавшего во внешнее постоянное электрическое поле с напряженностью \vec{E}_0 . Пусть имеется плоский слой вещества, состоящего из частиц с положительными и отрицательными зарядами в равных количествах, так что этот слой в целом электрически нейтрален. И пусть он находится в электрическом поле, перпендикулярном плоскостям этого слоя. Под действием поля положительные заряды сместятся в направлении вектора \vec{E}_0 , отрицательные – в противоположном направлении, так что на обеих плоскостях слоя возникнут поверхностные

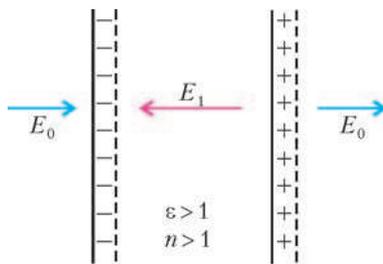


Рис. 1

заряды, которые породят вторичное поле \vec{E}_1 , противоположное по направлению полю \vec{E}_0 (рис.1). Это, так сказать, нормальное поведение вещества, поляризованного внешним полем. Его состояние можно описать такими макроскопическими ха-

рактеристиками, как диэлектрическая проницаемость ϵ и коэффициент преломления n . Обе эти величины больше единицы. В случае вакуума они равны единице.

Теперь посмотрим, что произойдет, если внешнее электрическое поле изменится во времени, например по синусоидальному закону

$$E = E_m \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь E_m – амплитуда, $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота колебаний поля, T – период колебаний. Конкретизируем вещество

– пусть оно состоит из электронов и положительно заряженных ионов, т.е. представляет собой плазму. Как известно, самый легкий из ионов (протон) почти в две тысячи раз тяжелее электрона, поэтому переменное электрическое поле будет заметно смещать в течение периода только электроны, и о ионах можно не думать – они нужны только для того, чтобы вещество в среднем (в пространстве и в течение периода) оставалось электронейтральным.

Второй закон Ньютона, описывающий динамику электрона в заданном переменном электрическом поле, запишем в виде

$$a = -\frac{e_0 E_m}{m_e} \sin \omega t = v_e' = x_e'' \quad (2)$$

Здесь a – это ускорение, m_e – масса электрона, e_0 – величина его заряда; знак «минус» учитывает, что сила, действующая на электрон, направлена против поля; в конце строчки формул сделано напоминание, что ускорение есть первая производная от скорости или вторая производная от смещения из положения равновесия (когда $x_e = 0$).

Тот, кто умеет интегрировать, сразу скажет, что для определения смещения по известному гармонически изменяющемуся ускорению нужно последнее умножить на $-1/\omega^2 = -(T/2\pi)^2$.

А для того, кто не умеет, достаточно предложить следующую аналогию. Рассмотрим малые колебания грузика массой m на нити длиной l . Этим «грузиком» может вообразить себя Читатель, а «нитью» пусть будут стропы качелей. Нарисуем изменения во времени кинематических характеристик грузика: ускорения a , скорости v , смещения x (рис.2; ось t направлена вниз). Поскольку колебания гармонические, смещение можно записать в виде

$$x = x_m \sin \omega t,$$

где x_m – амплитуда малых колебаний, а их частота, как известно, равна $\omega = \sqrt{g/l}$ (g – конечно, ускорение поля тяготения). Сила, возвращающая Читателя в положение равновесия, равна

$$F = -mg \sin \alpha \approx -mg \frac{x}{l},$$

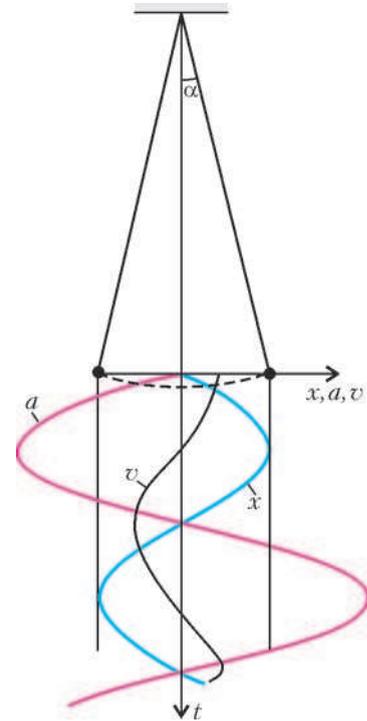


Рис. 2

откуда ускорение равно

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{g}{l}x = -\omega^2 x,$$

и смещение –

$$x = -\frac{a}{\omega^2}, \quad (3)$$

что и требовалось показать. Тут самое главное – знак «минус», т.е. тот факт, что при колебаниях ускорение направлено противоположно смещению.

Разумеется, тот же результат даст и решение уравнения (2).

Вернемся к нашему веществу, находящемуся в переменном электрическом поле. На рисунке 3 изображена картина

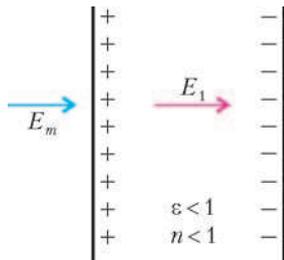


Рис. 3

полей и зарядов в тот момент, когда напряженность внешнего электрического поля достигла наибольшего (амплитудного) значения E_m . Согласно выражению (3), в этот момент смещение зарядов прямо противоположно той картине (см. рис.1), которая была при стационарном поле. В результате такого разделения зарядов возникает поле \vec{E}_1 , усиливающее внешнее поле.

Тут надо ожидать чего-то необычного – и вот оно-таки появляется. А именно, можно ожидать, что, в отличие от электростатики, где диэлектрическая проницаемость и коэффициент преломления больше единицы, тут будет все наоборот: $\epsilon < 1$, $n < 1$. Но последнее неравенство, согласно определению $n = c_0/c$, дает значение $c > c_0$ – скорость электромагнитной волны в плазме больше, чем в вакууме! Пора кричать «караул» и вызывать милицию, поскольку это противоречит основному постулату современной физики. Но подождем, что будет дальше.

А дальше вспомним, как вводится такая безразмерная макроскопическая характеристика вещества, как ϵ :

$$P_e = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E. \quad (4)$$

Смысл P_e понятен хотя бы из соображений размерности. Действительно, $[\epsilon_0] = \text{Ф/м}$, $[E] = \text{В/м}$ (вспомним привычный плоский конденсатор), тогда

$$[P_e] = [\epsilon_0 E] = \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3}.$$

Отсюда видно, что P_e – это объемная плотность электрических диполей. Получается, что, если каждый электрон сместился из положения равновесия на x , возник электрический диполь с моментом

$$p_e = -e_0 x.$$

А если электронов в единице объема N_e , то общий дипольный момент этой единицы объема будет

$$N_e p_e = -N_e e_0 x = P_e.$$

Записав выражение (3) в виде

$$x = -\frac{a}{\omega^2} = -\frac{F}{m\omega^2} = -\frac{(-e_0 E)}{m_e \omega^2},$$

из равенства (4) получим

$$-\frac{N_e e_0^2 E}{m_e \omega^2} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E$$

и, сократив на E , найдем

$$\epsilon = 1 - \frac{N_e e_0^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} < 1. \quad (5)$$

Понятно, что при $N_e = 0$ (нет ни электронов, ни ионов) имеем $\epsilon = 1$, как и полагается для вакуума. Кроме того, поскольку заряд входит в квадрате, знак его не имеет значения: если каким-то чудом закрепить электроны, то движение ионов даст качественно тот же результат, но гораздо более слабый из-за их большой массы.

Но вот что самое любопытное: существует такое значение частоты внешнего электромагнитного поля, при котором полученная диэлектрическая проницаемость становится равной нулю! Это так называемая плазменная частота:

$$\omega_p^2 = \frac{N_e e_0^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (6)$$

При этой частоте плазма становится похожей на металл, а от металла электромагнитные волны отражаются. Благодаря этому и было обнаружено существование высотных ионосферных слоев и возможность дальней радиосвязи.

Да, а как же быть с тем, что скорость электромагнитной волны в плазме получилась больше, чем скорость света в вакууме: $c > c_0$? Ничего страшного: дело в том, что этот результат получен для случая идеальной гармонической волны, которая, по определению, существовала до возникновения Вселенной и будет существовать вечно. Но такой волны не бывает! Реально существует волновой пакет, ограниченный в пространстве и времени, состоящий из набора волн с различными частотами и, значит, с различными скоростями распространения в плазме. Эти составляющие гармоники, обгоняя друг друга и отставая друг от друга, несут суммарную энергию со скоростью, не превосходящей c_0 , – с так называемой групповой скоростью.

Полученные выше выражения (5) и (6) оказались полезными прежде всего для исследования верхней атмосферы. Из них видно, например, что, изменяя ω , можно найти значение N_e , т.е. концентрацию электронов в ионосфере.

Но при чем здесь цунами – гигантская волна, порождаемая подводным землетрясением? А вот при чем. Длина такой уединенной волны – эти волны называют солитонами – порядка десятков и сотен километров (поэтому они и не очень-то заметны в открытом океане). Для такой волны океан, а тем более прибрежные отмели, – мелкие лужи. Поэтому скорость цунами можно оценить по формуле теории «мелкой воды»:

$$v = \sqrt{gh} \quad (\text{проверьте размерность}).$$

Полагая $h \sim 10^3$ м, получим

$$v \sim \sqrt{10 \text{ м/с}^2 \cdot 10^3 \text{ м}} = 10^2 \text{ м/с}$$

– не всякий байкер выжмет такую скорость! Так вот, этот солитон возмущает атмосферу – от него идет мощная акустическая волна. Дойдя до ионосферы, она периодически изменяет концентрацию электронов N_e . А зондируя возмущенную ионосферу при помощи электромагнитных волн, можно за тысячи километров узнать о приближающейся опасности.

Поистине чудесным образом здесь оказались связанными волны различной физической природы!

Об одной неточности Исаака Ньютона

Б. КОНДРАТЬЕВ

Введение

Луна – естественный спутник Земли – весьма примечательный объект на небе. Невооруженным глазом на ней видны темно-желтые пятна, их называют «морями» и «материками». Некоторые древнегреческие философы даже полагали, что это отражение лика Земли. Но если присмотреться, рисунок пятен остается всегда одним и тем же, что делает несостоятельной эту экстравагантную гипотезу – рисунок должен был бы меняться из-за быстрого суточного вращения самой Земли или, так как древние считали Землю покоящейся, из-за суточного поступательного движения Луны. Если же пятна принадлежат самой Луне, вывод будет еще более интересным: Луна смотрит на Землю всегда одной и той же своей стороной.

Возникает увлекательная научная задача объяснения наблюдаемого явления. Однако вплоть до конца семнадцатого века все астрономические теории первым делом брались за объяснение только поступательного движения Луны. Это и понятно, ведь самыми заметными на небе являются фазы Луны и связанное с ними ее поступательное движение на фоне звезд. По фазам Луны отсчитывали время, по ее положению среди звезд можно было определять долготу корабля на море. Собственное же вращение Луны долгое время оставалось скрытым для землян, и задача о нем могла возникнуть лишь при достаточно высоком уровне развития астрономии. Ни в фундаментальном труде Птолемея «Альмагест», где Луне посвящены четвертая и пятая книги, ни у Коперника автор этой статьи не нашел объяснений удивительной особенности вращающейся Луны – равенства ее суток лунному месяцу.

Объяснение вращения Луны в первом приближении

Вначале рассмотрим поступательно-вращательное движение Луны вокруг Земли на одной простой, но нетривиальной модели. Пусть орбита Луны чисто круговая. Представим себе, что в плоскости этой орбиты с центром в центре Земли расположен жесткий диск и для Луны в нем на соответствующем расстоянии от центра вырезан кружок, в котором она свободно вращается вокруг собственной оси. Диск в целом тоже вращается. Тогда наблюдатель на Земле может подбирать этому диску такую угловую скорость вращения Ω , при которой Луна не будет иметь ни поступательного, ни – самое главное – вращательного движения относительно любой точки диска, включая и наблюдателя в центре. Поступатель-

ное движение Луны сразу исключается, если угловая скорость задается по известной продолжительности лунного сидерического месяца: $\Omega = \frac{2\pi}{27,32 \text{ сут}}$. Но интересно, что Луна всегда будет смотреть на центр одной и той же стороной в том и только в том случае, если она вращается вокруг своей оси с той же угловой скоростью Ω .

Объясним, почему так получается. Любая точка нашего диска на расстоянии r от центра имеет скорость $v = \Omega r$, и, как говорят в механике, здесь существует поле скоростей. Важной же характеристикой любого поля скоростей является вихрь (или ротор) ζ . Необходимость привлечения понятия ротора вытекает из того, что именно он представляет локальное вращение в заданной точке поля скоростей. Дело в том, что при общем вращении диска происходит и локальное (собственное) вращение любой материальной точки с угловой скоростью $\frac{1}{2}\zeta$. В общем случае ротор – это вектор, но в данной плоской задаче отлична от нуля только одна его составляющая:

$$\zeta = \text{rot}_3 v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r v) = \frac{\Omega}{r} \frac{d}{dr}(r^2) = 2 \Omega.$$

Таким образом, в любой точке диска с жестким вращением ротор ζ равен удвоенной угловой скорости вращения диска. Следовательно, твердотельное вращение замечательно не только одинаковостью угловых скоростей всех частиц диска при обращении вокруг центральной оси, но еще и тем, что индуцируемое собственное вращение каждой его частицы (в том числе и частиц на центральной оси) будет происходить с одинаковой для всех локальной угловой скоростью. Для Луны это означает следующее: чтобы наш спутник смотрел на Землю всегда одной стороной, он должен иметь собственное осевое вращение с той же угловой скоростью Ω .

Другими словами, вращение малого кружка, выделенного мелко на диске, для любого (!) наблюдателя будет таким же, как и видимое вращение Луны. Отсюда вытекает, что один и тот же вид поверхности Луны для земного наблюдателя не должен скрывать главного – ее осевого вращения относительно инерциальной системы координат и других (внешних) тел солнечной системы. Из указанных особенностей вращения Луны следует: лунные сутки в точности равны лунному месяцу.

Законы Кеплера

Важный шаг в развитии астрономии связан с открытием трех законов Кеплера движения планет вокруг Солнца.

1 (1609 г.). Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис.1). Согласно первому закону, движение происходит по эллипсу с

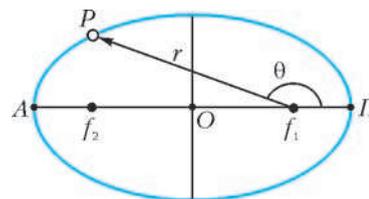


Рис.1. Траектория планеты – эллипс с центром в O , точки f_1 и f_2 – его фокусы, P и A – перигей и апогей, \vec{r} – радиус-вектор планеты P , θ – угол истинной аномалии

полуосями a_1 и a_2 , $a_1 > a_2$, уравнение которого в полярных координатах с началом в фокусе f_1 имеет вид

$$r = \frac{a_1(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

где \vec{r} – радиус-вектор движущегося тела, θ – истинная аномалия, т.е. угол, изменяющийся от 0 до 2π , e – эксцентриситет. Именно в фокусе f_1 эллипса и находится Солнце.

2 (1609 г.). Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

3 (1619 г.) Квадраты сидерических периодов обращения двух планет относятся друг к другу как кубы их средних расстояний от Солнца.

Кеплер попытался описать и движение Луны по эллипсу, но без особых успехов. Чтобы проникнуть в тайны движения Луны, мало было одной кинематики, не хватало главного – знания действующей на Луну силы.

Наступила эпоха Ньютона. В 1687 году вышли в свет его знаменитые «Математические начала натуральной философии», где Ньютон сформулировал основные понятия и принципы классической механики и, в частности, заложил основы новой науки – небесной механики. Здесь же Ньютон математически строго подтвердил пребывающую в пленках гипотезу о законе обратных квадратов и тем самым открыл (лучше сказать – строго доказал, так как идею высказывали и другие) закон всемирного тяготения. Был найден ключ к объяснению многих тайн Природы. С помощью этого закона Ньютон объяснил и обобщил эмпирические законы Кеплера.

Своей очереди ждала и задача о Луне. Для нее к тому времени стали известны новые, весьма любопытные и тонкие наблюдательные факты. С появлением телескопов были обнаружены (и то далеко не сразу) малые покачивания тела Луны. Это случилось в 1637 году. Галилей, систематически изучая Луну в телескоп на вилле в Арчетри (где он пребывал в качестве пленника инквизиции), обнаружил: «Луна открывает и скрывает свои волосы и часть диаметрально противоположного подбородка, что можно назвать понижением и поднятием лица». Кроме того: «Луна поворачивает свою голову то направо, то налево и открывает то или другое ухо». В этих словах итальянский ученый красочно представил замечательный и тонкий эффект: периодическое перемещение деталей рельефа относительно края видимого лунного диска. Так была открыта оптическая либрация Луны (от латинского *libratio* – покачивание). Теории был сделан вызов.

Как же Ньютон объяснял видимые покачивания тела Луны, т.е. оптическую либрацию?

Движение Луны по законам Кеплера

С открытием законов Кеплера начался новый этап в исследовании движения Луны. Сейчас известно, что масса Луны равна $\frac{1}{81,3}$ от массы нашей планеты (ни одна планета в Солнечной системе не имеет столь массивного, в сравнении с ней самой, спутника). Луна движется с запада на восток со средней скоростью 1,02 км/с по приблизительно эллиптической орбите вокруг нашей планеты в том же направлении, в каком движется и Земля вокруг Солнца. Орбита Луны довольно вытянута и имеет эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}} \approx 0,0549$$

, так что минимальное расстояние между центрами Земли и Луны равно 363300 км (Луна в перигее), а максимальное составляет 405500 км (Луна в апогее). Среднее расстояние равно 384400 км – это и есть большая полуось a_1 орбиты Луны. С хорошим приближе-

нием можно считать, что в первом фокусе эллипса f_1 находится центр Земли. А вот во втором... Впрочем, все по порядку.

Объяснение оптической либрации Луны

Движение Луны вообще очень сложное, а открытая Галилеем оптическая либрация относится к тонким явлениям в небесной механике. Три эмпирических закона оптической либрации для Луны сформулировал Доменико Кассини в 1693 году. Первые два из них гласят:

1) Луна вращается равномерно вокруг оси, причем период ее вращения совпадает с периодом обращения по орбите вокруг Земли.

2) Плоскость экватора Луны сохраняет постоянный (сейчас бы сказали – почти постоянный) наклон к эклиптике, т.е. к плоскости движения Земли вокруг Солнца.

Ньютон объяснил оптическую либрацию Луны как следствие неравномерного ее движения по эллиптической орбите вокруг Земли (согласно второму закону Кеплера, в перигее поступательная скорость больше, а в апогее – меньше) при строго равномерном вращении вокруг оси. В каждый момент времени мы видим ровно половину поверхности Луны, однако за лунный месяц (различают несколько лунных месяцев, но без потери смысла здесь это можно не учитывать) астрономы могут видеть до 59% этой поверхности.

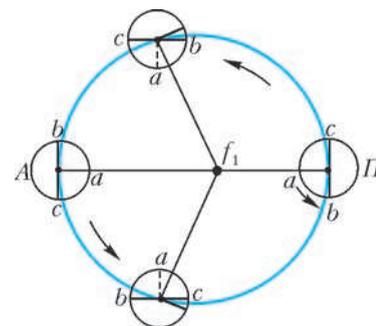


Рис.2. Оптическая либрация Луны по долготе. Пространственная ориентация тела Луны представлена тремя точками a, b, c . Малые секторы (выделены более толстыми линиями) показывают дополнительные при обзоре с Земли участки лунной поверхности

Рассмотрим рисунок 2. За четверть месяца после прохождения перигея P Луна пройдет путь немного больше четверти всей орбиты, а вокруг оси повернется ровно на 90° . В этом положении мы с правого (западного) края Луны будем видеть сектор, ранее недоступный нам. В апогее A будет видна та же часть поверхности, что и в перигее. В следующую (третью) четверть месяца Луна пройдет уже меньше четвертой части орбиты, а угол поворота будет ровно 270° , так что нам откроется ранее невидимая часть поверхности с восточного края. Это и есть оптическая либрация Луны по долготе. Очевидно, в точках A и P либрация по долготе обращается в ноль.

Для полноты добавим, что существуют также либрация по широте и суточная либрация, но их мы рассматривать не будем. Из сказанного читатель должен также уяснить, что под оптической либрацией понимают лишь кажущиеся (чисто геометрический эффект!) покачивания тела Луны.

На качественном уровне Ньютон полностью объяснил оптическую либрацию Луны. Однако, похоже, допустил при этом одну неточность.

Куда смотрит Луна?

Наблюдения свидетельствуют: лунный шар всегда обращен к Земле преимущественно одной стороной. Но почему, каким образом возникла столь яркая особенность в движении Луны? Знаменитый механик и математик Лагранж первым приблизился к ответу на этот трудный вопрос. Еще в 1764 году он установил, что «форма Луны должна быть эллипсоидом с наибольшей осью, направленной к Земле < мы же уточняем, что, строго говоря, эта ось направлена не на Землю, а совершает небольшие колебания относительно точки второго фокуса >. И если даже первоначально период вращения Луны не совпадал с периодом обращения вокруг Земли, все равно через некоторое время два этих периода должны были сравняться из-за влияния притяжения Земли и связанной с ним приливной диссипацией энергии вращения нашего спутника».

В своих «Началах» Ньютон пишет: «...Вследствие этого... происходит, что с Земли наблюдается одна и та же сторона Луны; в другом положении тело Луны не могло бы находиться в покое, а постоянно возвращалось бы к этому положению, совершая колебания. Но эти колебания, вследствие малости действующих сил, происходили бы весьма медленно, так что *та сторона, которая должна бы быть постоянно обращена к Земле, могла бы быть обращена и к другому фокусу лунной орбиты...* без того, чтобы немедленно быть оттянутой и повернутой к Земле».

Определенно, Ньютон говорит здесь о весьма тонком эффекте: из-за оптической либрации немного вытянутая фигура Луны должна совершать еще и очень малые крутильные колебания, но уже не кажущиеся, а действительно происходящие относительно ее центра масс. Это – первое предсказание физической либрации Луны. Но при этом само явление оптической либрации Ньютон описывает слишком расплывчато и даже двусмысленно. Действительно, из его фразы, выделенной выше курсивом, нельзя понять, как сторона Луны, которая должна бы быть постоянно обращена к Земле, могла бы быть обращена и к другому фокусу лунной орбиты. Ведь расстояние между обоими фокусами орбиты Луны достигает значения 42207 км, что составляет 3,3 поперечника Земли – не так уж мало. Поэтому указанные слова Ньютона больше озадачивают, чем проясняют суть дела.

В другом месте «Начал» читаем: «Так как для Луны, при равномерном ее обращении вокруг оси, сутки равны нашему месяцу, *то к нижнему фокусу ее орбиты будет всегда обращена почти постоянно одна и та же сторона...*» «К нижнему» значит ко второму фокусу орбиты. У эллипса, как известно, есть два фокуса: в одном находится центр Земли (точнее, системы Земля-Луна), а на другой, по высказанному здесь мнению Ньютона (выделено курсивом), будет всегда обращена почти постоянно одна и та же сторона Луны.

Однако никакой определенности к первому утверждению эта фраза Ньютона не добавляет. Как может выделенный радиус Луны почти постоянно быть направленным в одну и ту же точку внешнего пространства? Ведь процесс оптической либрации происходит непрерывно. И как сейчас мы убедимся, на самом деле все наоборот: выделенный радиус Луны почти постоянно не направлен (!) в точку второго фокуса, а совершает колебания относительно направления на него.

Конечно, на основании сказанного вряд ли можно гово-

рить об ошибке Ньютона, тем не менее, недопонимание сути дела в вопросе о действительном направлении выделенного радиуса Луны в ходе оптической либрации по долготе проявляется у Ньютона совершенно определенно. Не чувствуется чеканной ясности, характерной для этого великого ученого, авторитет которого и сейчас необычайно высок. Неудивительно, что некоторая неясность в описании данного явления встречается и в научно-популярной литературе.

Замечательный популяризатор науки Я.И.Перельман в книге «Занимательная астрономия» сначала пишет: «... когда Луна оказывается в *E*, радиус Луны, обращенный к Земле в точке *A*, опишет дугу в 90° и будет направлен ... к точке ... *неподалеку от другого фокуса лунной орбиты*». А ниже читаем: «...*Луна неизменно обращена одной и той же стороной не к Земле, а к другому фокусу своей орбиты...*». Здесь первая фраза (верная!) вступает в противоречие со второй.

Известный российский астроном В.И.Бронштэн в содержательной книге «Как движется Луна» приводит без каких-либо комментариев указанный выше взгляд Ньютона на характер движения Луны.

И даже крупный ученый, специалист по вращению Луны Моутсулас в известной коллективной монографии «Физика и астрономия Луны» (в переводе с английского языка), говоря о предсказании Ньютоном физической либрации, приводит его слова также, к сожалению, без каких-либо критических комментариев.

Тайная роль второго фокуса

Любой эллипс, не вырожденный в окружность, имеет два фокуса. В астрономии первый закон Кеплера утверждает: в одном из фокусов находится притягивающий центр – для планет это Солнце, для Луны Земля и т.д. Точка же второго фокуса для планет не играет никакой физической роли и представляет собой просто геометрическую точку. Другая ситуация складывается при описании синхронного движения Луны. Здесь второй фокус кинематически выделяется именно тем, что вокруг направления на него главная ось Луны совершает небольшие колебания. Такова же роль второго фокуса и для других спутников с синхронным вращением в Солнечной системе. Однако особого физического смысла для четырех галилеевских спутников Юпитера этот второй фокус не имеет, так как находится глубоко внутри самого Юпитера. А вот система Земля-Луна уникальна тем, что только здесь точка второго фокуса лежит далеко за пределами Земли (более трех ее диаметров), и не считаться с этим фактом в современной небесной механике уже нельзя.

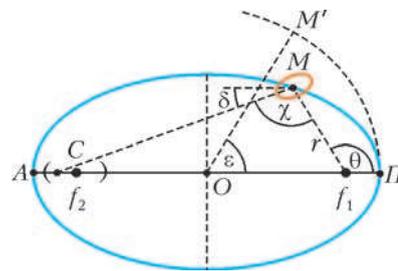


Рис.3. Большой эллипс – орбита Луны *M* (для наглядности сжатие преувеличено), *P* и *A* – точки перигея и апогея, f_1 и f_2 – фокусы эллипса, центр масс Земля-Луна находится в первом фокусе. Малый эллипс изображает фигуру Луны

Чтобы выяснить, что происходит с направлением главной оси, или большой оси инерции, Луны в ходе оптической либрации по долготе, рассмотрим движение Луны по эллипсу с эксцентриситетом $e = 0,0549$ при совпадении периодов осевого вращения и обращения Луны вокруг Земли (рис.3). Далее ограничимся двумя законами Кеплера. Согласно первому закону, в точке первого фокуса эллипса находится центр масс Земля-Луна. Еще в древности астрономы, а позднее и Кеплер, наряду с истинной аномалией θ вводили угол эксцентрической аномалии ϵ . Оба угла связаны между собой таким тригонометрическим соотношением:

$$\cos \theta = \frac{\cos \epsilon - e}{1 - e \cos \epsilon}.$$

За время, прошедшее от момента, когда Луна находилась в перигее ($\epsilon = 0, \theta = 0$), до момента с заданными в данный момент времени t значениями этих углов ϵ и θ радиус-вектор Луны заметает площадь

$$S = \frac{a_1 a_2}{2} (\epsilon - e \sin \epsilon).$$

Второй закон Кеплера требует, чтобы отношение этой площади к полной площади эллипса было равно отношению соответствующих времен:

$$\frac{S}{\pi a_1 a_2} = \frac{t}{T},$$

где T – период обращения по эллипсу. Отсюда находим

$$t = \frac{(\epsilon - e \sin \epsilon)}{2\pi} T.$$

Поскольку осевая угловая скорость вращения Луны Ω должна быть равна (по условию синхронного ее обращения вокруг Земли) среднему значению угловой скорости $\omega = \frac{2\pi}{T}$ при обращении вокруг нашей планеты, то угол поворота большой оси инерции Луны за указанное время t равно

$$\delta = t\Omega = t\omega = \frac{T\omega}{2\pi} (\epsilon - e \sin \epsilon) = \epsilon - e \sin \epsilon.$$

Рассмотрим треугольник f_1MC . В нем

$$\frac{d_{Cf_1}}{\sin \chi} = \frac{r}{\sin(\theta - \chi)}, \quad \delta + \chi = \theta, \quad \text{и} \quad d_{Cf_1} = r \frac{\sin \chi}{\sin \delta}.$$

Нас интересует расстояние $\Delta = d_{Cf_2} = 2a_1 e - d_{Cf_1}$. Для него имеем

$$\frac{\Delta}{a_1} = 2e - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} \frac{\sin \chi}{\sin \delta} = 2e - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} (\sin \theta \operatorname{ctg} \delta - \cos \theta).$$

Определим теперь $\operatorname{ctg} \delta$ как функцию от угла ϵ (или θ):

$$\operatorname{ctg} \delta = \operatorname{ctg}(\epsilon - e \sin \epsilon) = \frac{1 + \operatorname{tg} \epsilon \operatorname{tg}(e \sin \epsilon)}{\operatorname{tg} \epsilon - \operatorname{tg}(e \sin \epsilon)}.$$

Поскольку

$$\cos \epsilon = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad \sin \epsilon = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad \operatorname{tg} \epsilon = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{e + \cos \theta},$$

получается

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{1 + \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{e + \cos \theta} \operatorname{tg} \left(\frac{e\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right)}{\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{e + \cos \theta} - \operatorname{tg} \left(\frac{e\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right)}.$$

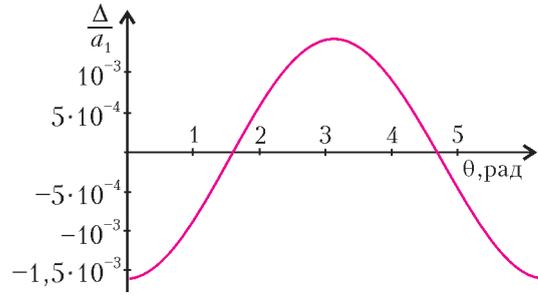


Рис.4. График для величины $\frac{\Delta}{a_1}$ как функции угла истинной аномалии θ

В итоге оказывается, что искомое расстояние от точки второго фокуса, на котором продолжение большой оси инерции Луны пересекает главную ось орбиты Луны, отлично от нуля и связано с полуосью a_1 таким соотношением:

$$\frac{\Delta}{a_1} = e + \cos \epsilon - \operatorname{ctg} \delta \cdot \sqrt{1 - e^2} \sin \epsilon.$$

Результаты расчетов по этой формуле приведены на рисунке 4. Разложение в ряд по степеням малого эксцентриситета:

$$\frac{\Delta}{a_1} = -\frac{\cos \epsilon}{2} e^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \cos^2 \epsilon \right) e^3 - \frac{\cos \epsilon}{24} (1 + 8 \cos^2 \epsilon) e^4 + \dots$$

дает, что в первом приближении эффект искомого отклонения пропорционален квадрату эксцентриситета орбиты Луны.

Итак, при обращении Луны по эллипсу вокруг Земли конец большой оси инерции нашего спутника не всегда будет направлен в точку второго фокуса, но совершает (без учета малой физической либрации) колебательные движения в окрестности этой самой точки:

$$-1,5933 \cdot 10^{-3} \leq \frac{\Delta}{a_1} \leq 1,4275 \cdot 10^{-3}.$$

В линейной мере

$$-612 \text{ км} \leq \Delta \leq 548 \text{ км}.$$

Обратим внимание на некоторую асимметрию относительно точки фокуса f_2 интервала изменения величины Δ . Как вы думаете, в чем причина такой асимметрии?

И еще. Полученная формула для величины $\frac{\Delta}{a_1}$ описывает оптическую либрацию по долготе для наблюдателя, расположенного в первом фокусе орбиты. А какой будет величина этой либрации для наблюдателя, переместившегося во второй фокус или в центр эллипса? Другими словами, в какой из трех указанных точек можно будет видеть наибольшую дополнительную (к 50%) площадь Луны?

Ответы на эти вопросы вдумчивым читателям предлагается найти самостоятельно.

Автор глубоко признателен рецензентам К.В.Холшевникову и В.Г.Сурдину за полезные замечания.

СНОВА О ТЕОРЕМЕ МОРЛЕЯ

Л. ШТЕЙНГАРЦ

Три короткие задачи о биссектрисах

Одной из самых удивительных и красивых теорем в геометрии по праву считается *теорема Морлея*, которая утверждает следующее (рис.1):

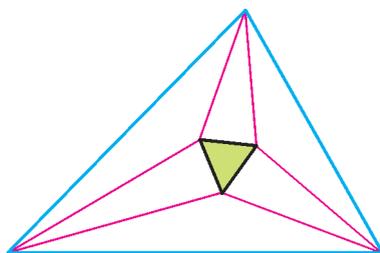


Рис. 1

Точки пересечения смежных трисектрис углов (т.е. лучей, делящих данный угол на три равные части) произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника.

Теорема была открыта в 1904 году английским математиком Франком Морлеем (Frank Morley). Тогда он рассказал об этой теореме своим друзьям, а опубликовал ее двадцать лет спустя в Японии.

У этой теоремы есть, к сожалению, один существенный «недостаток». До недавнего времени были известны лишь довольно сложные доказательства этой теоремы (см. список литературы в конце статьи). Как правило, учителя, рассказывая ученикам об этой теореме, говорят, в каком году и кем она была открыта, показывают красивый чертеж, но очень редко ее доказывают. На наш взгляд, этот «недостаток» можно устранить.

В этой небольшой статье мы предлагаем три совсем нетрудные задачи, решения которых доступны практически любому школьнику.

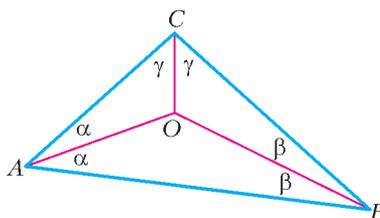


Рис. 2

После этих задач доказательство теоремы Морлея становится почти очевидным.

Задача 1. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O (рис.2). Докажите, что

угол COB на 90° больше, чем половина угла A .

Решение. Введем обозначения: $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Ясно, что $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Тогда $\beta + \gamma = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, $\angle COB = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha + 90^\circ$.

Задача 2 (обратная к задаче 1). Внутри треугольника ABC (рис.3) взята точка O так, что угол COB на 90°

больше, чем угол CAO , а угол COA на 90° больше, чем угол SBO . Докажите, что AO , BO и CO являются биссектрисами углов данного треугольника.

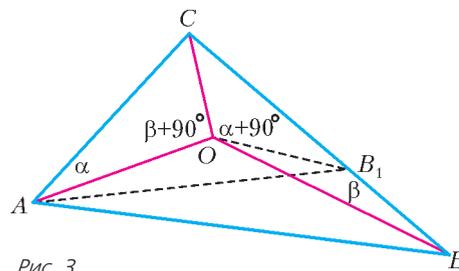


Рис. 3

Решение. Обозначим: $\angle CAO = \alpha$, $\angle CBO = \beta$. Тогда, по условию, $\angle COA = \beta + 90^\circ$, $\angle COB = \alpha + 90^\circ$. То, что CO – биссектриса угла C , очевидно, так как в каждом из треугольников ACO и BCO сумма двух углов одинакова (каждая из них равна $\alpha + \beta + 90^\circ$).

Докажем теперь, что AO – биссектриса угла CAB . Предположим, что это не так. Возьмем тогда на стороне CB (или на ее продолжении) точку B_1 так, чтобы луч AO оказался биссектрисой угла CAB_1 (см. рис.3). При этом окажется, что O – точка пересечения биссектрис треугольника CAB_1 . Тогда получаем (см. задачу 1), что $\angle COB_1 = \alpha + 90^\circ$, а это противоречит условию – ведь $\angle COB = \alpha + 90^\circ$. Следовательно, AO – биссектриса угла A . Но так как, кроме того, CO – биссектриса угла C , то BO – биссектриса угла B , что и требовалось.

Задача 3. На сторонах OA_1 и OB_1 равностороннего треугольника A_1OB_1 (рис.4) построили внешним образом треугольники A_1OA и B_1OB так, что угол B_1OB на 60°

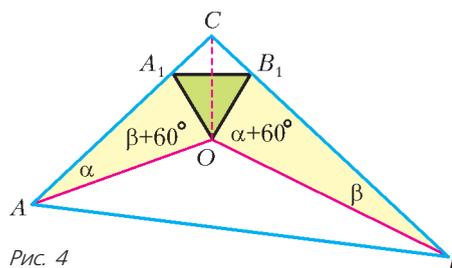


Рис. 4

больше, чем угол A_1AO , а угол A_1OA на 60° больше, чем угол B_1BO . Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C . Докажите, что AO , BO и CO являются биссектрисами углов треугольника ABC .

Решение. Обозначим: $\angle A_1AO = \alpha$, $\angle B_1BO = \beta$. Ясно, что $\angle AA_1O = \angle BB_1O$. Получается, что $\angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1$ (так как $\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 = 60^\circ$), т.е. треугольник A_1CB_1 оказывается равнобедренным. Поэтому треугольники A_1OC и B_1OC равны (по трем сторонам), и каждый из углов A_1OC и B_1OC равен 30° . При этом $\angle BOC = \alpha + 90^\circ$, а $\angle AOC = \beta + 90^\circ$.

Следовательно (см. задачу 2), AO , BO и CO являются биссектрисами треугольника ABC , что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы Морлея

Пусть ABC – данный треугольник, а треугольник XYZ образован трисектрисами углов данного треугольника (рис.5). Докажем, что треугольник XYZ равносторонний.

Автор статьи – преподаватель школы «Шуву» из Иерусалима.

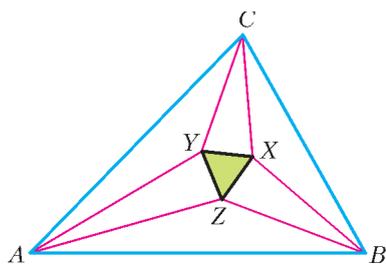


Рис. 5

Очевидно, что $\angle B_1A_2C_1 = \alpha$, так как $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

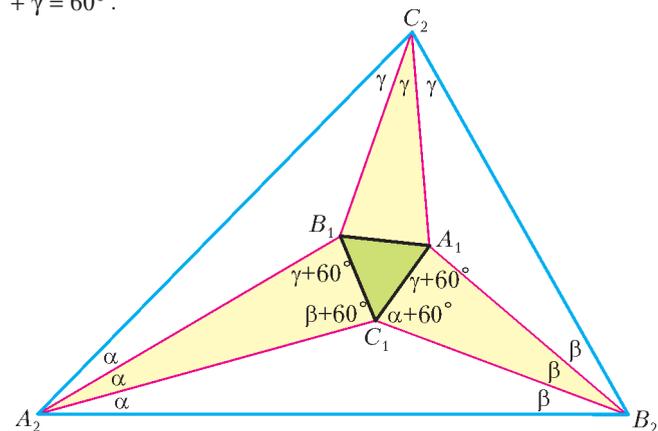


Рис. 6

Введем обозначения: $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$. Рассмотрим произвольный равно-
сторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 6). Построим на стороне B_1C_1 треугольник $A_2B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_2B_1C_1 = \gamma + 60^\circ$, а $\angle A_2C_1B_1 = \beta + 60^\circ$.

Точно так же построим еще два треугольника $A_1C_1B_2$ и $A_1B_1C_2$ (см. рис.6).

Лучи A_2B_1 и B_2A_1 пересекутся в некоторой точке M , так как сумма углов $B_1A_2B_2$ и $A_1B_2A_2$ меньше 180 градусов. При этом для треугольника A_2B_2M выполняются условия задачи 3. Поэтому A_2C_1 будет биссектрисой угла $B_1A_2B_2$, а B_2C_1 будет биссектрисой угла $A_1B_2A_2$. Это означает, что $\angle C_1A_2B_2 = \alpha$, а $\angle C_1B_2A_2 = \beta$.

Аналогичный результат получается и в остальных случаях (для A_2B_1 , C_2B_1 , C_2A_1 и B_2A_1).

Таким образом, оказывается, что в треугольнике $A_2B_2C_2$ проведены трисектрисы, и они при своем пересечении определяют равносторонний треугольник. Но очевидно, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны (по углам). Следовательно, и треугольник XYZ также равносторонний. Теорема Морлея доказана.

Литература

1. Г.С.М.Коксетер, С.П.Грейтцер. *Новые встречи с геометрией*. – М.: Наука, 1978.
2. Г.Тоноян, И.Яглом. *Теорема Морлея*. – «Квант», №8, 1978.
3. З.А.Скопец. *Геометрические миниатюры*. – М.: Просвещение, 1990.
4. В.В.Прасолов. *Геометрия. Задачи по планиметрии*. – М.: МЦНМО, 2007.
5. A.Connes. *A new proof of Morley's theorem*. – Publications Mathématiques de l'IHÉS, S88 (1998).

От редакции

С момента открытия теоремы Морлея прошло уже больше века, но до сих пор эта необыкновенно красивая задача привлекает к себе внимание математиков. В англоязычной литературе ее иногда называют «Morley's Miracle» («чудо Морлея»). «Квант» уже писал об этой теореме в № 8 за 1978 год в статье Г.Тонояна и И.Яглома «Теорема Морлея», где приведены первые элементарные, но весьма непростые ее доказательства.

Мы предлагаем вашему вниманию еще два элегантных и коротких рассуждения, найденных не так давно. Первое принадлежит Дж.Конвею (изобретателю игры «Жизнь»), а второе взято из математического фольклора. Они близки по духу, но в каждом есть своя изюминка.

Советуем также заглянуть на сайт

<http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/>

Там приведено больше десятка доказательств теоремы, в том числе принадлежащих и известным математикам.

Доказательство Конвея

Пусть углы исходного треугольника равны $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$. Введем удобное обозначение: будем писать ϕ^* вместо $\phi + 60^\circ$. Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 0^*$. Заметим, что существуют треугольники с углами $(0^*, 0^*, 0^*)$, $(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$, $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$, $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$, $(\alpha^*, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta^{**}, \gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma^{**})$, так как в каждом случае сумма углов равна 180° . Теперь для каждой тройки углов построим конкретный треугольник с этими углами, специально подбирая длины сторон.

Для тройки $(0^*, 0^*, 0^*)$ это будет равносторонний треугольник со стороной 1.

Для тройки $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$ – это треугольник, в котором сторона, соединяющая вершины с углами α^* и γ^* , равна 1 (рис.1,а). Аналогично поступим с тройками $(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$ и $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$.

Для тройки $(\alpha^{**}, \beta, \gamma)$ сделаем так. Рассмотрим треугольник BXC (рис.1,б), в котором угол при вершине B равен β , при вершине X равен α^{**} , а при вершине C равен γ . Через

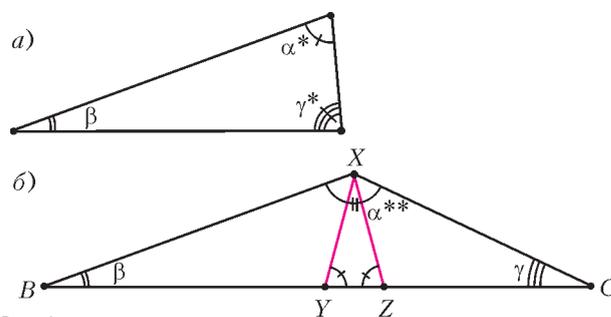


Рис. 1

вершину X проведем два луча, которые пересекают прямую BC в точках Y и Z под углом α^* , и подберем масштаб так, чтобы $XY = XZ = 1$. При этом сторона BX окажется равной стороне, лежащей против угла α^* в уже построенном треугольнике с углами $\alpha^*, \beta, \gamma^*$ (подумайте, почему). Это потребует нам чуть дальше. Аналогично построим треугольники и для двух оставшихся троек такого вида.

Итак, мы получили 7 треугольников. Расположим их как показано на рисунке 2, и начнем придвигать их друг к другу, чтобы получился рисунок 3. Почему все так хорошо совпадает? Во-первых, суммы углов при всех внутренних вершинах

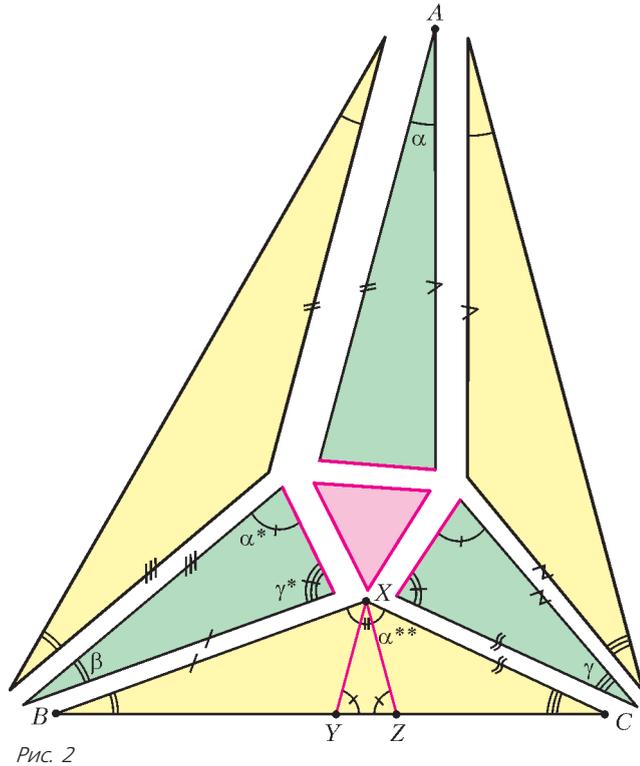


Рис. 2

равны 360° . Во-вторых, красный треугольник примыкает к зеленому по единичным отрезкам, а желтые треугольники примыкают к зеленым по равным отрезкам по построению (выше мы доказали это для треугольника BXC и треугольника с углами α^* , β , γ^* , аналогично рассматривается любая пара из желтого и зеленого треугольников).

Образовавшийся треугольник ABC подобен исходному по трем углам, а получившаяся картинка совпадает с той, что получится при проведении трисектрис. Поэтому и в исход-

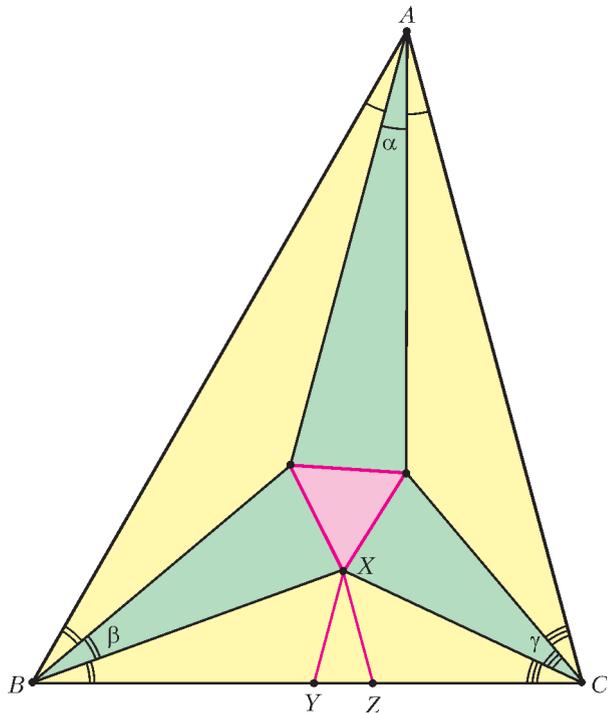


Рис. 3

ном треугольнике образованный трисектрисами треугольник будет равносторонним.

Еще одно доказательство

Рассмотрим равносторонний треугольник XYZ и отразим его симметрично относительно каждой из сторон, получится

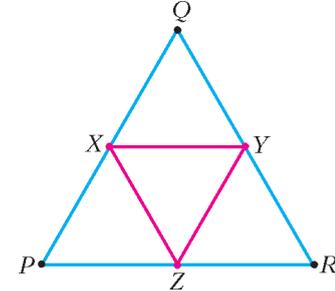


Рис. 4

треугольник PQR (рис.4). Пусть нам дан треугольник с углами 3α , 3β и 3γ . Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Из точки X проведем луч, образующий угол γ с лучом XP , а из точки Z – образующий угол α с лучом ZP . Эти лучи обязательно пересекутся (в точке B), так как сумма углов, которые они образуют с отрезком XZ , меньше 180° (рис.5). Аналогично проведем лучи ZA и YA ($\angle RZA = \beta$, $\angle RYA = \gamma$). Ясно, что

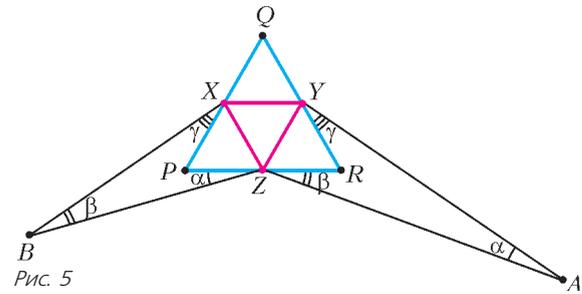


Рис. 5

угол при вершине B в треугольнике BXZ равен β , а угол при вершине A в треугольнике AZY равен α . Пусть прямая PR пересекает BX и AZ в точках S и T соответственно (рис. 6). Треугольники SXZ и TYZ равны по стороне и двум прилежащим углам. Поэтому $SZ = TZ$. Далее, треугольники SBZ

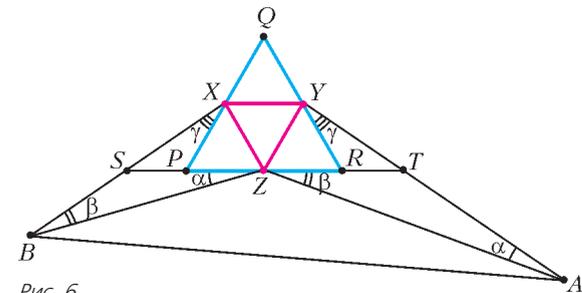


Рис. 6

и TZA подобны (в каждом есть углы α и β). Из двух последних утверждений получаем равенства $BZ:ZA = SZ:TA = TZ:TA$. Наконец, заметим, что $\angle BZA = \angle ZTA = 180^\circ - \alpha - \beta$. Тогда треугольник BZA подобен треугольнику ZTA по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, $\angle ZBA = \beta$, $\angle ZAB = \alpha$. Аналогичные рассуждения для точек X и Y вместо точки Z приведут нас к треугольнику ABC , углы которого равны 3α , 3β и 3γ . Этот треугольник подобен исходному, и, значит, снова теорема доказана.

Сохранение полной энергии в задачах термодинамики

А. ЧЕРНОУЦАН

В тех задачах термодинамики, где действующими лицами являются жидкости и твердые тела, внутренняя энергия выступает достаточно обособленно по отношению к механической энергии. Более того, первые же качественные задачи показывают, что типичные происходящие вокруг нас превращения внутренней энергии соответствуют весьма значительным изменениям энергии механической.

Вот характерный пример.

Задача 1. На какую высоту можно было бы поднять груз массой $M = 100$ кг, если бы удалось полностью превратить в работу энергию, выделяющуюся при охлаждении стакана воды от 100°C до 20°C ? Масса воды в стакане $m = 250$ г.

Решение. Записав соотношение

$$c_v m |\Delta t| = Mgh,$$

где $c_v = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) – удельная теплоемкость воды, получим

$$h = 84 \text{ м.}$$

Забывать выпить стакан чая – дело обычное, а вот поднять стокилограммовый груз почти на стометровую высоту – достойно Геракла или Ильи Муромца!

Совсем другая ситуация возникает в задачах с идеальными газами. Там изменения механической и внутренней энергии выступают как тесно связанные величины одного порядка. Наиболее ярко это проявляется в задачах, где система, выведенная из равновесия, приходит в новое равновесное состояние в результате неравновесного переходного процесса. Особенность таких задач состоит в том, что мы не можем описать промежуточные состояния системы, но закон сохранения энергии совместно с условием конечного равновесия позволяют найти решение.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 2. В высоком теплоизолированном цилиндре под поршнем находится гелий. Поршню толчком сообщают скорость $v = 2$ м/с. На сколько выше начального положения окажется поршень после прихода системы в равновесие? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. Поскольку к системе газ – поршень тепло не подводится и работа этой системы над внешними телами равна нулю, полная энергия системы (механическая плюс внутренняя) сохраняется. Кроме того, по условию можно

пренебречь изменением (за время процесса) внутренней энергии стенок сосуда и поршня. Тогда получаем (рис.1)

$$mgh_1 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2}vRT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}vRT_2.$$

Теперь запишем условие механического равновесия поршня

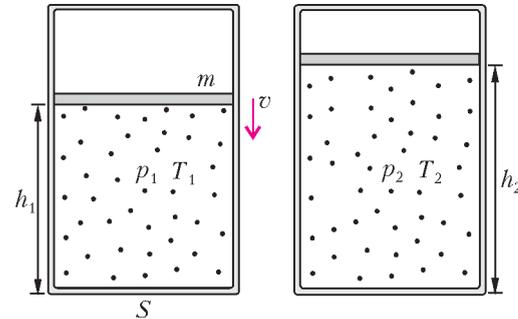


Рис. 1

и уравнение Менделеева–Клапейрона для гелия в начальном и конечном состояниях системы:

$$p_1 S = mg, \quad p_1 S h_1 = vRT_1,$$

$$p_2 S = mg, \quad p_2 S h_2 = vRT_2.$$

Отсюда, исключив давления, получим

$$mgh_1 = vRT_1, \quad mgh_2 = vRT_2.$$

Видно, что благодаря условию механического равновесия внутренняя энергия газа оказывается пропорциональной потенциальной энергии поршня. Подставив эти соотношения в закон сохранения энергии, найдем

$$\frac{5}{2}mgh_1 + \frac{mv^2}{2} = \frac{5}{2}mgh_2,$$

или

$$h_2 - h_1 = \frac{v^2}{5g} = 8 \text{ см.}$$

Отметим, что ответ не зависит от того, в каком направлении толкнули поршень – вверх или вниз.

Замечание. Иногда удобнее записывать уравнения по-другому. Для газа отдельно можно записать в стандартной форме второй закон термодинамики:

$$0 = \Delta U + A,$$

а работу газа над внешними телами (над поршнем) приравнять к изменению механической энергии поршня. Это особенно удобно в тех задачах, где надо учесть подводимое к системе тепло.

Задача 3. В высоком вертикальном цилиндре под поршнем массой $m = 16,6$ кг находится $\nu = 0,1$ моль гелия при температуре $T_1 = 200$ К. Вначале поршень удерживают на высоте $h_1 = 50$ см, а затем отпускают. На какой высоте окажется поршень после прихода системы к равновесию? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. Отличие этой задачи от предыдущей состоит в том, что условие равновесия поршня можно записать только в конечном положении, а в начальном состоянии сила тяжести поршня не равна силе давления газа. Тогда получим

$$p_2 S = mg, \quad p_2 S h_2 = vRT_2,$$

или

$$mgh_2 = \nu RT_2.$$

Подставив это соотношение в закон сохранения энергии

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_2,$$

найдем

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{5}{2}mgh_2,$$

откуда

$$h_2 = 0,4h_1 + 0,6\frac{\nu RT_1}{mg} = 80 \text{ см.}$$

Отметим, что конечная высота может быть как больше, так и меньше начальной. Если сила давления газа в начальном состоянии превышает вес поршня:

$$p_1 S = \frac{\nu RT_1}{h_1} > mg,$$

то поршень после освобождения пойдет вверх и высота увеличится, в противном случае поршень пойдет вниз и высота уменьшится.

Задача 4. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре $T_1 = 240 \text{ К}$. На поршне лежит груз массой, равной половине массы поршня. Груз мгновенно убирают и ждут прихода системы к равновесию. Чему станет равна температура газа? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. В этой задаче условия механического равновесия в начальном и конечном состояниях выглядят по-разному (рис.2):

$$p_1 S = \left(m + \frac{m}{2}\right)g, \quad p_2 S = mg,$$

где m – масса поршня, и после подстановки в уравнения

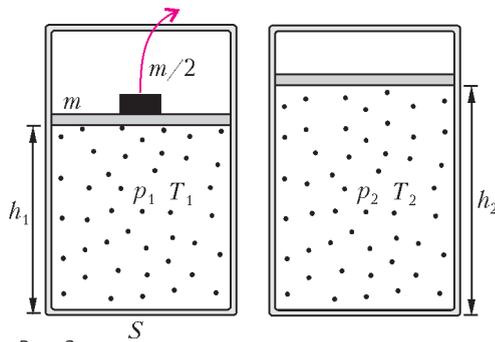


Рис. 2

Менделеева–Клапейрона получаются разные соотношения:

$$\frac{3}{2}mgh_1 = \nu RT_1, \quad mgh_2 = \nu RT_2.$$

Используя эти соотношения и закон сохранения энергии

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_2,$$

получим

$$T_2 = \frac{13}{15}T_1 = 208 \text{ К.}$$

Замечание. При решении этой задачи часто встречается характерная ошибка: в левой части уравнения, выражающего закон сохранения энергии, записывают начальную потенциальную энергию не как mgh_1 , а как $1,5mgh_1$, т.е. учитывают лежавший на поршне груз. Это неверно, так как поршень

начинает двигаться только после снятия груза и система поршень – газ после этого является замкнутой. (Если же включать в систему груз, то можно считать, что после отделения от поршня его удерживают на месте, и тогда его потенциальная энергия сокращается.)

Задача 5. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре $T_1 = 200 \text{ К}$. Температуру быстро, так что поршень не успевает сдвинуться с места, повышают до $T_2 = 250 \text{ К}$. Какой станет абсолютная температура газа после прихода системы к равновесию? Над поршнем газа нет.

Решение. После быстрого нагревания газа его давление возрастет, и равновесие нарушится. Поэтому условие равновесия и закон Менделеева – Клапейрона надо записывать для системы до нагревания (рис.3):

$$p_1 S = mg, \quad p_1 S h_1 = \nu RT_1$$

и в конечном состоянии:

$$p_3 S = mg, \quad p_3 S h_2 = \nu RT_3,$$

а закон сохранения энергии – для системы сразу после

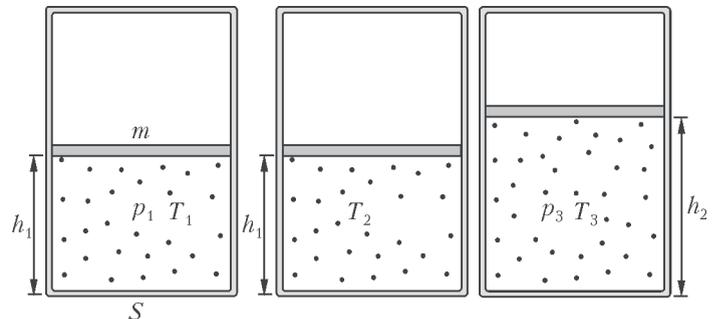


Рис. 3

нагревания и в конечном состоянии:

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_2 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_3.$$

После преобразований приходим к уравнению

$$\nu RT_1 + \frac{3}{2}\nu RT_2 = \nu RT_3 + \frac{3}{2}\nu RT_3,$$

откуда находим

$$T_3 = \frac{2T_1 + 3T_2}{5} = 230 \text{ К.}$$

Задача 6. В высоком теплоизолированном цилиндре под тонким массивным поршнем находится одноатомный идеальный газ. Над поршнем на некоторой высоте удерживают груз, масса которого равна массе поршня. Груз отпускают, и он падает на поршень. Через некоторое время после абсолютно неупругого удара система приходит в равновесие. Оказалось, что поршень в конце находится на той же высоте, что и в начале. Во сколько раз начальная высота груза над дном сосуда больше высоты поршня? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. В этой задаче нельзя приравнивать начальную и конечную энергии системы, так как при неупругом ударе часть энергии перейдет во внутреннюю энергию поршня и груза. Поскольку теплообменом между поршнем и газом за время установления механического равновесия мы пренебрегаем, эту энергию учитывать не надо.

Запишем закон сохранения энергии для падающего груза и закон сохранения импульса системы груз–поршень при

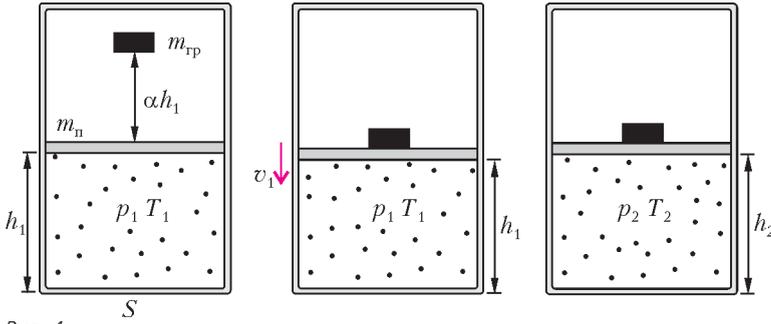


Рис. 4

неупругом ударе (рис.4):

$$m_{гр}g \alpha h_1 = \frac{m_{гр}v^2}{2}, \quad m_{гр}v = (m_{гр} + m_p)v_1,$$

где h_1 – начальная высота поршня, αh_1 – начальная высота груза над поршнем (нам надо найти $\alpha + 1$). Теперь запишем закон сохранения энергии для всей системы после удара:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \nu RT_1 + (m_{гр} + m_p) \frac{v_1^2}{2} + (m_{гр} + m_p)gh_1 &= \\ &= \frac{3}{2} \nu RT_2 + (m_{гр} + m_p)gh_2. \end{aligned}$$

От температур мы избавимся, записав условие равновесия и уравнение Менделеева–Клапейрона в начальном и конечном состояниях:

$$p_1 S = m_p g, \quad \nu RT_1 = p_1 S h_1,$$

$$p_2 S = (m_{гр} + m_p)g, \quad \nu RT_2 = p_2 S h_2.$$

Подставив все в закон сохранения энергии и обозначив $m_{гр} = \beta m_p$, в данной задаче $\beta = 1$, получим

$$\frac{3}{2} m_p g h_1 + \frac{\beta^2}{1 + \beta} m_p g \alpha h_1 + m_p (1 + \beta) g h_1 = \frac{5}{2} m_p (1 + \beta) g h_2.$$

Учитывая, что $h_2 = h_1$ и $\beta = 1$, найдем

$$\alpha = \frac{3(1 + \beta)}{2\beta} = 3,$$

т.е. начальная высота груза над дном сосуда должна быть в 4 раза больше высоты поршня.

Замечание. Высота поршня осталась прежней несмотря на увеличение веса поршня, поскольку приобретенной при ударе кинетической энергии хватило для соответствующего увеличения высоты (см. задачу 2).

Задача 7. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ при температуре $T_1 = 300$ К. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа оказался в 1,5 раза больше начального. Найдите конечную температуру газа (по шкале Кельвина). Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. Запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{3}{2} \nu RT_1 = \frac{3}{2} \nu RT_2 + \frac{kx^2}{2},$$

где x – деформация пружины, равная по условию половине начальной высоты поршня ($x = h_1/2$). Из условия равновесия поршня в конечном состоянии и уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p_2 S = kx, \quad p_2 (S \cdot 3x) = \nu RT_2$$

получим соотношение

$$kx^2 = \frac{\nu RT_2}{3}.$$

Подставив в закон сохранения энергии, найдем

$$T_2 = 0,9 T_1 = 270 \text{ К.}$$

В следующих задачах конечное состояние не является состоянием механического равновесия. Рассматривается момент, когда внутренняя энергия (и температура) достигает максимального значения. Первая из этих задач включалась в последние годы в варианты ЕГЭ.

Задача 8. В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр. В цилиндре находится $\nu = 0,1$ моль гелия, запертого поршнем. Поршень удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения. В поршень попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 400$ м/с, и застревает в нем. Температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении возрастает на $\Delta T = 64$ К. Какова масса поршня? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обменяться теплом с поршнем и цилиндром.

Решение. Из закона сохранения импульса при ударе

$$mv = (m + M)v_1$$

выразим начальную скорость поршня с пулей и подставим в закон сохранения энергии

$$\frac{(m + M)v_1^2}{2} + \frac{3}{2} \nu RT_1 = \frac{3}{2} \nu RT_2.$$

Получим соотношение

$$\frac{m^2 v^2}{2(m + M)} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T,$$

откуда найдем массу поршня:

$$M = \frac{m^2 v^2}{3 \nu R \Delta T} - m = 90 \text{ г.}$$

Задача 9. В длинном горизонтальном цилиндре между двумя одинаковыми поршнями находится $\nu = 0,1$ моль гелия. В начальный момент один поршень покоится, а другой приближается к нему со скоростью $v = 12$ м/с. На сколько градусов максимальная температура газа больше начальной? Массы поршней $m = 415$ г. Трением между поршнями и цилиндром и теплообменом пренебречь, за поршнями газа нет.

Решение. Максимальная температура соответствует моменту, когда поршни окажутся на минимальном расстоянии друг от друга и их скорости будут одинаковы. (Это особенно хорошо видно в системе отсчета центра масс, где поршни в этот момент неподвижны.) Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2} \nu RT_1 = \frac{2mu^2}{2} + \frac{3}{2} \nu RT_2.$$

Скорость поршней в момент наибольшего сближения найдем из закона сохранения импульса

$$mv = 2mu.$$

Подставив в закон сохранения энергии, получим

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mv^2}{6 \nu R} = 12 \text{ К.}$$

(Продолжение см. на с. 57)

Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера

По новому Положению о Всероссийской олимпиаде школьников ее региональный и заключительный этапы проводятся только для учащихся 9–11 классов. Более того, Центральный оргкомитет олимпиады не рекомендовал допускать восьмиклассников к участию в заключительном этапе олимпиады за 9 класс. Чтобы восполнить эти потери, группа организаций, работающих с математически одаренными школьниками, учредила и провела в 2008/09 учебном году для российских восьмиклассников математическую олимпиаду имени Леонарда Эйлера. Олимпиада проводилась также в Болгарии и Грузии. Для участников олимпиада была бесплатной: ее спонсировали АНОО «Вятский центр дополнительного образования» (Киров) и ООО «Компания Яндекс» (Москва), оказавшая олимпиаде также информационную поддержку. Полная информация об олимпиаде, включая задачи всех этапов с решениями, размещена в Интернете на сайте <http://www.matol.ru/>.

Олимпиада проходила в три этапа. Первый – дистанционный – состоялся в декабре и собрал более 3000 участников из 46 регионов России. Участвовать в нем могли все желающие восьмиклассники и учащиеся более младших классов. Этап включал 7 туров, проходивших в разное время дня и разные дни недели, чтобы каждый, независимо от часового пояса и смены, в которую он учится, мог выбрать удобное для участия время. Чтобы пройти на следующий, региональный этап, достаточно было показать хороший результат хотя бы в одном из туров. Свои работы участники сканировали и отправляли на проверку электронной почтой. Важнейшую роль в пропаганде новой олимпиады сыграли учителя и руководители кружков. Около 80 из них получили статус *доверенных лиц* ее Координационного совета с правом проводить туры дистанционного этапа для своих подопечных в очном режиме обычной олимпиады, а во многих случаях – и правом первичной проверки работ.

Региональный этап олимпиады проходил в 35 регионах России и собрал около 900 участников. Он был очным и проводился доверенными лицами Координационного совета. Кроме победителей дистанционного этапа сюда были приглашены лучшие участники ряда других математических соревнований: Турнира городов, окружных олимпиад и Математического праздника в Москве, муниципального



Обладатель диплома I степени Никита Косинов и члены жюри



Вручение диплома III степени Степану Комкову

этапа Всероссийской олимпиады в Санкт-Петербурге и ряде других регионов России, личных олимпиад Уральских турниров юных математиков, Кубка памяти А.Н. Колмогорова, Кировской летней многопредметной школы, олимпиад имени Е.Н.Анисимовой в Ижевске и имени Г.П.Кукина в Омске и некоторых других.

Региональный этап проводился по задачам, составленным Методической комиссией Всероссийской математической олимпиады. В ряде регионов России, где были сохранены официальные региональные олимпиады для восьмиклассников, эти олимпиады проводились по тем же задачам, и их результаты шли в зачет олимпиады имени Эйлера.

Заключительный этап прошел с 24 по 27 марта параллельно в Кирове, Москве, Омске и Санкт-Петербурге (участники распределялись между этими городами по территориальному признаку). По формату и уровню трудности варианта он соответствовал заключительному этапу Всероссийской олимпиады школьников. В нем приняли участие 209 школьников: 167 восьмиклассников, 39 семиклассников и 3 шестиклассника из Архангельской, Белгородской, Вологодской, Иркутской, Кировской, Костромской, Курганской, Ленинградской, Московской, Нижегородской, Новосибирской, Омской, Ростовской, Самарской, Саратовской, Свердловской, Тамбовской, Томской, Челябинской, Ульяновской, Ярославской областей, Камчатского, Краснодарского, Красноярского, Пермского краев, республик Башкортостан, Марий Эл, Тува, Татарстан, Саха (Якутия), Удмуртия, Чувашия, городов Москвы и Санкт-Петербурга, а также города Петропавловска республики Казахстан. В Кировском финале участвовали 66 школьников, Московском – 65, Омском – 45, Санкт-Петербургском – 33. Непростая задача согласования критериев оценки решений и награждения между четырьмя локальными жюри была своевременно и успешно решена с помощью электронной переписки и телефонных переговоров, и утром 27 марта на всех четырех локальных финалах было проведено награждение участников, показавших наиболее высокие результаты.

Абсолютным победителем олимпиады с результатом 55 баллов из 56 возможных стал семиклассник из ФМЛ 239 Санкт-Петербурга *Дмитрий Крачун*. Он награжден дипломом I степени и специальным дипломом за абсолютно лучший результат. Дипломами I степени награждены также 5 участников, показавших результаты в диапазоне от 39 до 43 баллов: *Ленар Исхаков* (Ижевск), *Никита Косинов* (Ульяновск), *Павел Осипов* (Томск), *Александр Калмынин* (Иркутск), *Николай Крохмаль* (Белгород). 124 лучших результата, показанных участниками финала, в том числе результаты всех победителей и призеров, опубликованы в Интернете по адресу

http://www.matol.ru/3etap_res.xls

ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

1. У реки живет племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч, пошел к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо. Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное ее значение?

М.Евдокимов, в редакции Л.Самойлова

2. При всяком ли натуральном n , большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

А.Шаповалов

3. См. Задачу M2149 «Задачника «Кванта».

4. См. Задачу M2150 «Задачника «Кванта».

5. Можно ли вместо звездочек вставить в некотором порядке в выражение

$$\text{НОК}(*, *, *) - \text{НОК}(*, *, *) = 2009$$

шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

Р.Женодаров

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$ и $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

С.Берлов

7. На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется 3 ореха. Если это – три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе – его соперник. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

И.Рубанов, А.Шаповалов

8. На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идет единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$ -м месте?

И.Богданов

Публикацию подготовил И.Рубанов

Заключительный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике

Как и в прошлом году, заключительный этап Всероссийской математической олимпиады прошел в конце апреля в городе-курорте Кисловодске. В олимпиаде приняли участие 60 девятиклассников, 83 десятиклассника и 77 учащихся 11 класса, представляющих 70 регионов России. Дипломы призеров олимпиады получили 76 школьников (8 – по параллели 9 класса, 28 – по параллели 10 класса и 40 – по параллели 11 класса), дипломами победителей были награждены 15 лучших участников (по 5 из каждой параллели). В связи с изменениями в организации Всероссийских олимпиад Федеральный окружной этап, проводившийся в течение многих лет, в 2009 году был отменен, поэтому к участию в заключительном этапе олимпиады допускались лишь победители регионального этапа олимпиады 2009 года, а также победители и призеры заключительного этапа олимпиады 2008 года. Такая схема отбора участников заключительного этапа несколько расширила географию олимпиады, однако не позволила приехать на главный математический форум страны многим ярким талантам (это отрази-

лось в основном на параллели 9 класса, в которой количество участников было на четверть меньше прошлогоднего, да и средние результаты выполнения заданий олимпиады оказались существенно ниже среднестатистических за последние годы).

Традиционными гостями олимпиады стали команды школьников из Болгарии и Китая. Наши зарубежные коллеги и соперники на международных олимпиадах подтвердили высокий уровень подготовки достойными результатами.

По решению жюри, было вручено несколько специальных индивидуальных призов. Призы за решение всех задач олимпиады получили девятиклассник Алексей Пахарев из Ульяновска, одиннадцатиклассник Глеб Ненашев из Санкт-Петербурга, а также выступавший в параллели 11 класса десятиклассник Виктор Омеляненко из Белгорода. Призами за изящное решение геометрических задач были награждены девятиклассник Никита Косинов (Ульяновск) и десятиклассник Максим Попов (Нижекамск).

Традиционный опрос показал, что в параллели 9 класса

участникам больше всего понравились задачи 7, 6 и 4, в параллели 10 класса – 2, 6 и 3, в параллели 11 класса – 6, 8 и 4. Семь из этих задач-лауреатов включены в «Задачник «Кванта»» прошлого номера.

Ниже приводятся условия задач и список дипломантов заключительного этапа XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

9 класс

1. Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

И. Богданов

2. См. задачу M2141 «Задачника «Кванта»».

3. Дано натуральное $n > 1$. Число $a > n^2$ таково, что среди чисел $a + 1, a + 2, \dots, a + n$ есть кратные каждому из чисел $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + n$. Докажите, что $a > n^4 - n^3$.

А. Голованов

4. См. задачу M2144 «Задачника «Кванта»».

5. Числа a, b и c таковы, что

$$(a + b)(b + c)(c + a) = abc,$$

$$(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3.$$

Докажите, что $abc = 0$.

С. Токарев

6. См. задачу M2139 «Задачника «Кванта»».

7. См. задачу M2140 «Задачника «Кванта»».

8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные площади. Всегда ли можно построить при помощи циркуля и линейки треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику $A_1B_1C_1$ и такой, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 будут параллельны?

Д. Терёшин

10 класс

1. Найдите все такие натуральные n , что при некоторых отличных от нуля действительных числах a, b, c, d многочлен

$$(ax + b)^{1000} - (cx + d)^{1000}$$

после раскрытия скобок и приведения всех подобных слагаемых имеет ровно n ненулевых коэффициентов.

В. Сендеров

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. См. задачу M2142 «Задачника «Кванта»».

4. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причем с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

И. Богданов

5. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006, но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k такое возможно?

А. Голованов

6. См. задачу M2143 «Задачника «Кванта»».

7. Окружность с центром I касается сторон AB, BC, AC неравностороннего треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Окружности ω_B и ω_C вписаны в четырехугольники BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C , отличная от IA_1 , проходит через точку A .

И. Богданов

8. См. задачу M2145 «Задачника «Кванта»».

11 класс

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более чем в полтора раза.

М. Мурашкин

2. Последовательность a_1, a_2, \dots такова, что $a_1 \in (1; 2)$ и $a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k}$ при любом натуральном k . Докажите, что в этой последовательности не может существовать более одной пары членов с целой суммой.

А. Голованов

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах – не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD .

И. Богданов

4. На плоскости отмечены все точки с целыми координатами $(x; y)$ такие, что $x^2 + y^2 \leq 10^{10}$. Двое играют в игру (ходят по очереди). Первым ходом первый игрок ставит фишку в какую-то отмеченную точку и стирает ее. Затем каждым очередным ходом игрок переносит фишку в какую-то другую отмеченную точку и стирает ее. При этом длины ходов должны все время увеличиваться; кроме того, запрещено делать ход из точки в симметричную ей относительно начала координат. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

И. Богданов

5. Пусть $1 < a \leq b \leq c$. Докажите, что

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

Д. Терёшин

6. В некоторых клетках доски 10×10 поставили k ладей и затем отметили все клетки, которые бьет хотя бы одна ладья (считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит). При каком наибольшем k может оказаться, что после удаления с доски любой ладьи хотя бы одна отмеченная клетка окажется не под боем?

С. Берлов

7. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника ACD . Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

Л. Емельянов

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Дипломанты олимпиады

Диплом победителя

по 9 классам получили

Пахарев Алексей – Ульяновск, гимназия 79,
Малясова Виктория – Ростов-на-Дону, Экономический лицей 14,
Егоров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Крачун Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Мукосеева Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 30;

по 10 классам –

Бондаренко Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ерохин Станислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кушнир Андрей – Иркутск, лицей 2,
Климовицкий Иосиф – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Попов Максим – Нижнекамск, лицей-интернат 24;

по 11 классам –

Ненашев Глеб – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Омельяненко Виктор – Белгород, лицей 38,
Гусев Даниил – Дзержинск, школа 2 с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,
Иванова Алина – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ,
Брагин Владимир – Снежинск, гимназия 127.

Диплом призера

по 9 классам получили

Бурова Ольга – Москва, лицей «Вторая школа»,
Сергиенко Ярослав – Краснодар, НОУ ВПО «Институт современных технологий и экономики»,
Заводов Алексей – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Янушковский Владимир – Москва, лицей «Вторая школа»,
Косинов Никита – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Титов Дмитрий – Усть-Лабинск, школа 2,
Кунявский Павел – Саратов, ФТЛ 1,
Цыбышев Алексей – Самара, гимназия 1;

по 10 классам –

Бернштейн Антон – Новосибирск, гимназия 1,
Горбачева Ирина – Краснодар, лицей 64,
Мокин Василий – Саратов, ФТЛ 1,
Исаак Евгений – Курган, школа 38,
Балицкий Алексей – Железногорск, школа 11 с углубленным изучением отдельных предметов,
Горбань Степан – Москва, СУНЦ МГУ,
Козачинский Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Бердников Александр – Новосибирск, гимназия 1,
Бояров Игорь – Тольятти, лицей 51,
Решетников Иван – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Меньщиков Андрей – Курган, школа 38,
Пологова Анна – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Степанов Борис – Екатеринбург, гимназия 9,
Вотяков Александр – Ижевск, ЭМЛ 29,
Мифтахов Азат – Нижнекамск, лицей-интернат 24,
Стручкова Анна – Якутск, лицей-интернат «Республиканский лицей»,
Ивлев Федор – Москва, СУНЦ МГУ,
Куприянов Александр – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,
Медведь Никита – Москва, лицей «Вторая школа»,
Сербина Дарья – Курган, гимназия 47,
Баглай Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Глухов Евгений – Кострома, лицей 17,

Голова Анна – Москва, СУНЦ МГУ,
Николаев Семен – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Печина Анна – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Самолук Сергей – Томск, школа 41,
Ламтюгин Алексей – Ульяновск, школа 21,
Лысенко Николай – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»;

по 11 классам –

Соколов Вячеслав – Санкт-Петербург, гимназия 261,
Савенков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Матдинов Марсель – Москва, СУНЦ МГУ,
Погорелов Дмитрий – Нижний Новгород, лицей 165 имени 65-летия ГАЗ,
Тыщук Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Царьков Олег – Москва, лицей «Вторая школа»,
Нечаев Станислав – Иркутск, гимназия 25,
Шабалин Филипп – Киров, КФМЛ,
Бершадский Ефим – Москва, СУНЦ МГУ,
Аксенов Виталий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Янушевич Леонид – Москва, центр образования «Технологии обучения»,
Антропов Александр – Пермь, школа 146 с углубленным изучением математики, физики, информатики,
Гусев Антон – Омск, лицей 64,
Кувшинов Алексей – Ижевск, ЭМЛ 29,
Сиволобов Виталий – Томск, лицей при Томском политехническом университете,
Ярославцев Иван – Москва, СУНЦ МГУ,
Глюз Борис – Майкоп, гимназия 22,
Калашник Анна – Москва, СУНЦ МГУ,
Круль Ярослав – Уфа, школа 42 с углубленным изучением отдельных предметов,
Нижибицкий Евгений – Краснодар, школа 73,
Устинов Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кондакова Елизавета – Москва, лицей «Воробьевы горы»,
Черкашин Данила – Санкт-Петербург, лицей 533,
Адуенко Александр – Брянск, гимназия 1,
Краснов Дмитрий – Курганская обл., п. Заозерный, гимназия 19,
Лобастов Степан – Киров, ФМЛ,
Лукьянец Евгений – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Орлов Олег – Пермь, школа 146 с углубленным изучением математики, физики, информатики,
Попов Леонид – Пермь, школа 146 с углубленным изучением математики, физики, информатики,
Сунгоркин Максим – Чебоксары, лицей 3,
Гильман Михаил – Санкт-Петербург, лицей 533,
Духов Кирилл – Жуковский, гимназия 1,
Маянцев Кирилл – Волгореченск, школа 3,
Никифоров Дьулустан – Якутск, лицей-интернат «Республиканский лицей»,
Плосконосов Андрей – Калуга, школа 6 им. А.С.Пушкина,
Рогуленко Сергей – Саратов, ФТЛ 1,
Сочнев Сергей – Майкоп, гимназия 22,
Шершнев Алексей – Гатчина, лицей 3,
Кокурин Михаил – Йошкар-Ола, школа 20,
Кольцов Иван – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики.

Публикацию подготовили *Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин*

Заключительный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

В этом году заключительный этап олимпиады по физике проходил в городе Жуковском Московской области на базе факультета аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (ФАЛТ МФТИ). Основные хлопоты по приему гостей, их размещению и питанию, а также по организации культурной программы взял на себя Генеральный спонсор олимпиады – Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ).

Жюри олимпиады было сформировано из сотрудников научно-исследовательских институтов Российской академии наук (ИТЭФ, ФИАН, ЦАГИ), профессоров и преподавателей МФТИ, МГУ, НГУ, а также из представителей Центральной методической комиссии по физике и студентов Физтеха – победителей Международных физических олимпиад прошлых лет.

В соответствии с новым Положением об олимпиаде, в заключительном этапе могли участвовать как победители и призеры заключительного этапа прошлогодней олимпиады, так и победители регионального этапа *каждого* субъекта Российской Федерации (по одному представителю от параллели 9, 10 и 11 классов). Оставшиеся места были соответственно распределены между призерами региональных олимпиад.

Как обычно, олимпиада проходила в два тура – теоретический и экспериментальный. Вот некоторые справочные данные об участниках и дипломантах олимпиады:

Класс	Количество участников	Диплом призера	
		победителя	призера
9	48	5	16
10	90	7	29
11	86	7	23
Всего	224	19	68



Нина Кудряшова со своим учителем физики – Аполонским Александром Николаевичем. Они еще не знают, что через три месяца Нина завоюет серебряную медаль на Международной физической олимпиаде школьников



Одиннадцатиклассник Андрей Корольков из подмосковных Химок – победитель олимпиады

Ниже приводятся условия задач теоретического и экспериментального туров и список дипломантов олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Бревно на привязи

См. задачу Ф2138 из «Задачника «Кванта».

Задача 2. Конфета на транспортере

Во время экскурсии на кондитерскую фабрику экспериментатор Глюк заметил, что скорость конфеты, попадающей из упаковочной машины под углом $\alpha = 60^\circ$ на ленту транспортера (рис.1; вид сверху), сначала уменьшается, а потом увеличивается. Начальная скорость \vec{v}_0 конфеты равна по модулю скорости u ленты транспортера и лежит в плоскости ленты. Чему равна скорость \vec{v}'_0 конфеты относительно ленты транспортера сразу после попадания ее на ленту? Вычислите минимальную скорость v_{\min} конфеты относительно неподвижного Глюка.

В. Слободянин

Задача 3. Двойной мост

См. задачу Ф2141 из «Задачника «Кванта».

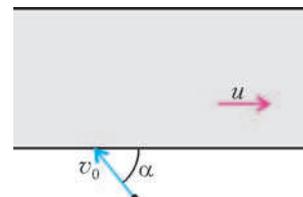


Рис. 1

Задача 4. «Дозаправка» чайника

Теоретик Баг решил попить чайку. Он взял теплоизолированный чайник, снабженный миниатюрным термометром, и включил его в электрическую сеть. Термометр показал температуру $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Через время $\tau_1 = 1$ мин, когда вода

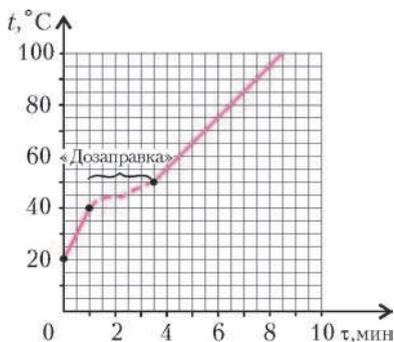


Рис. 2

нагрелась до температуры $t_1 = 40^\circ\text{C}$, он стал доливать в чайник воду. В момент $\tau_2 = 3,5$ мин, когда температура воды достигла $t_2 = 50^\circ\text{C}$, Баг остановился. Еще через 5 мин вода закипела. На рисунке 2 приведен график изменения температуры воды в чайнике в ходе ее нагрева и «дозаправки». Какой была температура t_x доливаемой воды? Считайте, что вода быстро перемешивается, а термометр показывает текущее значение ее температуры.

А.Воронов

10 класс

Задача 1. Шарик в лунке

В горизонтальной плоской плите сделана полусферическая гладкая лунка радиусом R (рис.3). Маленький шарик массой m прикреплен с помощью легкой нерастяжимой нити длиной $L = R$ к краю лунки (в точке A). В начальный момент нить натянута, а шарик касается края лунки. Шарик отпускают, и он без начальной скорости начинает скользить вниз. Найдите силу натяжения нити T в момент прохождения шариком нижнего положения. Ускорение свободного падения g .

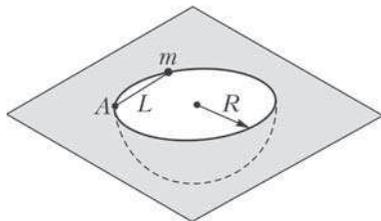


Рис. 3

вниз. Найдите силу натяжения нити T в момент прохождения шариком нижнего положения. Ускорение свободного падения g .

Д.Подлесный

Задача 2. Преломленный луч

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы (рис.4). От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только падающий луч и три точки: правый фокус F тонкой линзы, точка A , в которой преломился падающий луч, и точка B , принадлежащая левой фокальной плоскости линзы. Восстановите по этим данным положение линзы и ее главной оптической оси и ход луча за линзой.

В.Слободянин

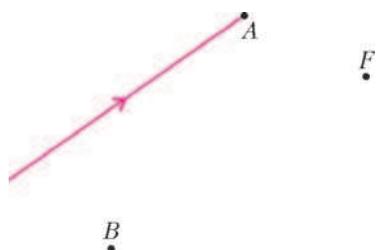


Рис. 4

Некоторое вещество обладает нелинейной проводимостью. Удельное сопротивление ρ этого вещества зависит от напряженности E электрического поля по закону $\rho = \rho_0 + AE^2$, где $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^7$ Ом·м и $A = 1,0 \cdot 10^{-3}$ Ом·м³/В². Этим веществом заполнено все пространство между пластинами плоского конденсатора. Площадь пластин $S = 1$ м².

Задача 3. Столкновение астероидов

См. задачу Ф2139 из «Задачника «Кванта».

Задача 4. Нелинейная проводимость

1) Через конденсатор течет ток. Найдите максимально возможное значение силы тока I_{\max} .

2) Предполагая, что расстояние между пластинами конденсатора равно $d = 1$ см, определите максимальную тепловую мощность, которая может выделяться внутри конденсатора при изменении напряжения между пластинами. Постройте качественный график зависимости мощности P от напряжения U .

3) Пусть теперь напряжение на конденсаторе постоянно и равно $U_1 = 2,0 \cdot 10^3$ В. Какая максимальная мощность может выделяться внутри конденсатора, если изменять расстояние между пластинами? При каком значении $d = d_1$ достигается максимальная мощность? Предполагается, что конденсатор полностью заполнен веществом при любых значениях d . Постройте качественный график зависимости выделяемой мощности P от расстояния d между пластинами.

С.Козел, В.Слободянин

Задача 5. Потерянные оси

См. задачу Ф2140 из «Задачника «Кванта».

11 класс

Задача 1. Головокружительный аттракцион

В головокружительном аттракционе человек массой $m = 70$ кг прыгает с платформы вниз в озеро. К ногам человека привязан конец резинового жгута некоторой длины L и жесткости k . Другой конец жгута прикреплен к платформе. У поверхности воды, пролетев расстояние $h = 90$ м, человек должен иметь нулевую скорость и ускорение $a_0 = 2g$. Считайте, что $g = 10$ м/с², а жгут подчиняется закону Гука. Размерами человека, сопротивлением воздуха и другими потерями энергии можно пренебречь. Определите:

- длину L нерастянутого жгута и его жесткость k ;
- удлинение жгута в положении равновесия (после затухания колебаний);
- максимальную скорость v_{\max} падения человека;
- амплитуду A и частоту ω гармонических колебаний человека на жгуте;
- время τ падения человека до поверхности воды.

Внимание! От точности ваших расчетов возможно будет зависеть жизнь человека!

К.Захарченко

Задача 2. Электрическая схема с индуктивностью

В схеме на рисунке 5 параметры всех элементов заданы. В начальном состоянии, когда ключ был разомкнут, ток в цепи, содержащей катушку индуктивностью L , отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем снова размыкают. Известно, что за время, пока ключ был замкнут, через катушку протек заряд q_0 . За все время после размыкания ключа в схеме выделилось количество теплоты Q_0 . Предполагая идеальными все элементы цепи, определите:

- силу тока I_0 , протекающего через катушку непосредственно перед размыканием ключа;
- заряд q_1 , протекший через резистор сопротивлением R за время, пока ключ был замкнут;
- заряд q_2 , протекший через резистор после того, как ключ был разомкнут;
- работу A , совершенную источником постоянного тока в течение всего процесса;

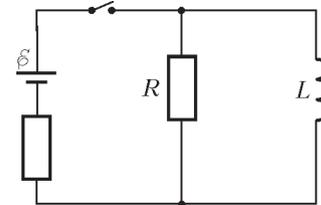


Рис. 5

5) количество теплоты Q , выделившееся в схеме, пока ключ был замкнут.

Указание. Найдите связь между зарядом, протекшим через резистор, и изменением магнитного потока через катушку.

А.Шеронов

Задача 3. Теплообмен с окружающей средой

В сосуд, содержащий смесь воды и льда, в момент времени $\tau = 0$ опустили нагреватель мощностью $P_0 = 440$ Вт. На рисунке 6 представлена зависимость температуры t смеси от времени τ .

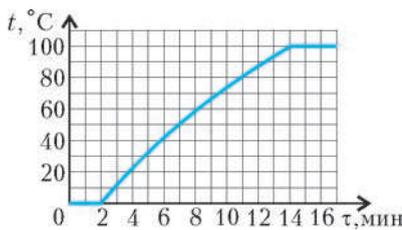


Рис. 6

Известно, что мощность P_T тепловых потерь пропорциональна разности температур $\Delta t = t - t_0$, где t_0 — температура окружающей среды. При расчетах вы можете принять $t_0 = 0$ °C и, следовательно, $P_T =$

αt , где α — постоянный коэффициент, не зависящий от температуры. Используя приведенный график зависимости $t(\tau)$, найдите:

- 1) начальную массу льда $m_{\text{л}}$ в смеси;
- 2) общую массу M содержимого сосуда;
- 3) коэффициент пропорциональности α ;
- 4) максимальную мощность нагревателя P_{max} , при которой вода никогда не закипит;
- 5) время τ_1 от начала таяния льда, в течение которого вода в сосуде закипит, если мощность нагревателя $P_1 = 300$ Вт.

Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·K), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,2 \cdot 10^5$ Дж/кг.

С.Козел

Задача 4. Задача Кельвина

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, совершенного над одним моле идеального одноатомного газа (рис.7). Со временем чернила выцвели, и от координатных осей T (температура) и V (объем) не осталось и следа. Из пояснений к тексту следовало, что в точке A температура 400 К, объем 4 л, давление газа минимально, а начало координат находится в нижней части рисунка. Там же был указан масштаб по осям.

- 1) Восстановите построением положение осей T и V .
- 2) Найдите максимальное давление газа в этом процессе.

Г.Тарнопольский

Задача 5. Задача с двумя линзами

На экспериментальном туре физической олимпиады участникам было предложено определить фокусные расстояния двух тонких собирающих линз, расположенных в торцах полого цилиндра длиной $L = 20,0$ см (рис.8). Один из

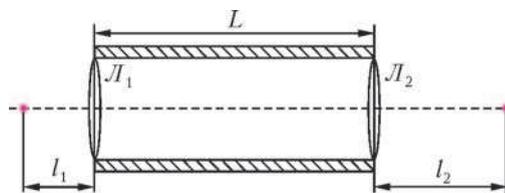


Рис. 8

участников, Вася Зазнайкин, аккуратно выполнил эксперименты и получил следующие результаты: а) если слева от левого торца цилиндра на его оси на расстоянии $l_1 = 5,0$ см расположить точечный источник света, то после прохождения через систему свет выходит из правого торца параллельным пучком; б) если на левый торец послать параллельный пучок света, то справа от правого торца на расстоянии $l_2 = 10,0$ см лучи сходятся в одну точку, лежащую на оси цилиндра. Однако рассчитать по этим экспериментальным данным фокусные расстояния F_1 и F_2 обеих линз Зазнайкин не смог. Помогите бедному Васе.

С.Козел

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Исследование стекла

Оборудование: стеклянная бутылка; кусочки стекла; пластиковый сосуд; мерный цилиндр; пластиковый стаканчик; пенопластовая крышка; термометр; секундомер; полоска скотча; горячая и холодная вода (по требованию); поднос и салфетки для поддержания в чистоте рабочего места.

1) Определите плотность ρ стекла, из которого сделана бутылка.

2) Определите суммарную теплоемкость C кусочков стекла.

Указание. Для определения теплоемкости стекла исследуйте зависимость температуры содержимого пластмассового стакана от времени и постройте графики этих зависимостей. Выведите формулу для расчета теплоемкости стекла по результатам этих исследований. Считайте, что мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур между содержимым стакана и комнатной температурой.

3) Считая, что плотность кусочков стекла равна плотности бутылочного стекла, определите удельную теплоемкость c стекла.

Примечание. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c_0 = 4200$ Дж/(кг·°C). При работе с горячей водой будьте предельно аккуратны! При измерении температуры придерживайте термометры рукой, чтобы не разбить их.

А.Шеронов, М.Осин

Задача 2. Ураган

Оборудование: электрическая цепь с вентилятором известной массы M (масса указана на корпусе вентилятора); мультиметр в режимах вольтметра и омметра; штатив с муфтой и лапкой; две линейки; канцелярский зажим; зажим «крокодил»; две тонкие проволоки.

Измерьте КПД η вентилятора. Исследуйте зависимость КПД от подаваемого на вентилятор напряжения U . Вентилятор включен в электрическую цепь, приведенную на рисунке 9. Для соединения контакта 5 с контактами 1, 2, 3 и 4 используйте зажим «крокодил». Представьте свои результаты в виде таблицы.

Примечание. Согласно второму закону Ньютона, если на тело действует постоянная сила F , то изменение импульса тела Δp за время Δt равно импульсу силы: $\Delta p = F \Delta t$.

Указание. Считайте, что при заданном напряжении U скорость v потока воздуха постоянна по всему сечению потока, идущего от лопастей, а в центральной части она

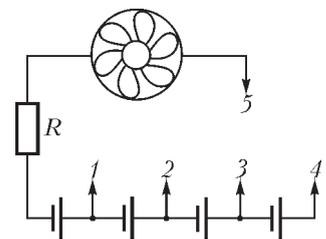


Рис. 9

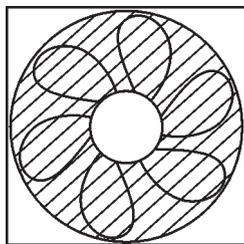


Рис. 10

равна нулю (рис. 10). Полезной мощностью вентилятора считайте кинетическую энергию, передаваемую воздуху за единицу времени. Плотность воздуха $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$. Заряжать батарейки запрещено! Разряженные батарейки не заменяются!

М. Осин

10 класс

Задача 1. «Звездный ящик»

Оборудование: «черный ящик» с тремя выводами; мультиметр в режиме вольтметра; мультиметр в режиме амперметра; соединительная колодка; отвертка; батарейка; два провода; резистор переменного сопротивления.

Внутри «черного ящика» находятся 3 элемента, соединенные «звездой» (рис. 11). Убедитесь в линейности этих элементов, построив для каждого элемента его вольт-амперную характеристику (не менее 10 точек). Определите параметр $R_i = \Delta U_i / \Delta I_i$ для каждого из них. В состав одного из элементов включен источник постоянного тока. Определите номер этого элемента и ЭДС \mathcal{E} источника.

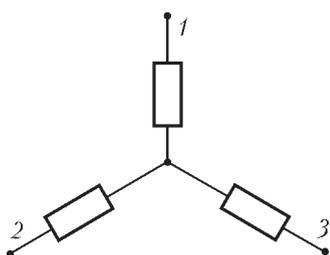


Рис. 11

Примечание. Напряжение выданной батарейки должно превышать 1 В. Будьте предельно аккуратны с ящиками – не переворачивайте и не трясите их. В случае, если между любыми двумя выводами неподключенного «черного ящика» напряжение превышает 4 В, следует обязательно обратиться к дежурным для проверки ящика.

А. Кобякин

Задача 2. Ураган в трубе

Оборудование: вентилятор известной массы M и шарик для настольного тенниса известной массы m (массы указаны на вентиляторе и шарике соответственно); регулируемый источник постоянного тока; два мультиметра; две линейки; канцелярский зажим; штатив; соединительные провода и тонкая проволока; нитки; бумажная труба; ножницы и скотч (по требованию).

1) См. задачу 2 для 9 класса.

2) Поставьте вентилятор вплотную к одному из концов выданной вам бумажной трубы. Поток воздуха должен быть направлен внутрь трубы. Вблизи другого конца трубы на ее

оси симметрии расположите теннисный шарик. Найдите силу F , действующую на шарик, помещенный в поток воздуха, выходящий из трубы. Полагая $F = Av^2$, определите коэффициент A . Считайте, что скорость воздуха на выходе из трубы равна скорости воздуха, создаваемой вентилятором.

М. Осин

11 класс

Задача 1. Формула Герца

Оборудование: два стальных шарика; тонкая медная проволока без изоляции; бумажный транспортир; три деревянные линейки; конденсатор известной емкости $C = 20 \text{ мкФ}$; резистор с известным сопротивлением $R = 68 \text{ Ом}$; батарейка; две кнопки; соединительные провода; мультиметр в режиме вольтметра с внутренним сопротивлением $R_V = 1,0 \text{ МОм}$, последовательно соединенный с резистором сопротивлением r_V (номинальное значение написано на рабочем месте); шесть клеммных колодок; отвертка; два провода с зажимами «крокодил»; скотч.

Подвесьте шарики на бифиллярных подвесах (рис. 12). Исследуйте, как зависит время соударения τ двух одинаковых стальных шариков от их относительной скорости v , предполагая, что оно удовлетворяет зависимости $\tau = Bv^\alpha$. Определите показатель степени α . По полученным данным определите время соударения τ_1 при относительной скорости $v_1 = 10 \text{ м/с}$. Проведите измерения для не менее чем семи различных относительных скоростей шариков. Погрешность измерения времени для каждого значения скорости не должна превышать 20%.

Указание. Если незаряженный конденсатор большой емкости заряжается в течение небольшого промежутка времени и напряжение на нем достаточно мало, так что ток зарядки I_C практически не меняется, то справедливо соотношение

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} \approx \frac{\Delta q_C}{\Delta t} = \frac{q_C}{t}.$$

Е. Богер

Задача 2. Колебания линейки

Оборудование: прикрепленная к столу металлическая линейка; длинная деревянная линейка; канцелярский зажим; шарики из бумаги; штатив.

Постройте таблицу зависимости круговой частоты ω колебаний свободного конца металлической линейки от длины L ее свободного конца в диапазоне от 10 см до 20 см с шагом 2 см.

В. Слободянин

Дипломанты олимпиады

Диплом победителя

по 9 классам получили

Паньков Александр – Пермь, школа 9 им. А.С.Пушкина,
Бегун Александр – Владивосток, школа 35,
Арзамасский Лев – Калининград, лицей 23,
Паринов Даниил – Воронеж, гимназия 9,
Виноградов Константин – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса;

по 10 классам –

Карелина Любовь – Екатеринбург, гимназия 9,

Горностаев Дмитрий – с. Шокша (Республика Мордовия), Шокшинская школа,
Кононов Яков – Улан-Удэ, Российская гимназия 59,
Антоненко Диниш – Ростов-на-Дону, Естественно-научный лицей 11,
Тарасов Артем – Киров, ФМЛ,
Ковалев Кирилл – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
Фролов Федор – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей;

по 11 классам –

Корольков Андрей – Химки, лицей 11,

Григорьевых Данил – Ижевск, Экономико-математический лицей 29,
Алюшин Алексей – Москва, СУНГ МГУ,
Толмачев Лев – Москва, школа 192,
Кудряшова Нина – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Соболев Антон – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Землянов Владислав – Урай, гимназия.

Диплом призера

по 9 классам получили

Шуранов Дмитрий – Уфа, гимназия 3 им. А.М.Горького,
Чурилов Антон – Ефремов, Ефремовский физико-математический лицей,
Заночкин Андрей – Саров, лицей 15,
Акинъчиков Алексей – Великий Новгород, школа 23,
Никитенков Павел – Смоленск, гимназия им. Н.М.Пржевальского,
Бубис Антон – Татарстан, ФМЛ 131,
Шель Егор – Тюмень, школа 29,
Головешкин Александр – Москва, лицей 1303,
Прокофьев Вадим – Рязань, школа 3,
Дехтяренко Ярослав – Брянск, школа 41,
Лучников Илья – Киров, школа 21,
Гамов Артемий – Саров, лицей 15,
Богданов Святослав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Шумаков Антон – Омск, гимназия 117,
Цыбров Федор – Республика Коми, гимназия,
Ионов Андрей – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»;

по 10 классам –

Николаев Егор – Республика Марий Эл, Политехнический лицей-интернат,
Алексеев Алексей – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Стройнов Евгений – Москва, СУНЦ МГУ,
Байнев Виталий – Саранск, лицей 43,
Качалов Вячеслав – Москва, школа-интернат «Интеллектуал»,
Коновалов Александр – Долгопрудный, лицей 5 «Физмат»,
Лавров Петр – Пермь, школа 146,
Анашкин Виктор – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Казеев Никита – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Давыдов Иван – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Старичков Никита – Калуга, школа 46,
Артамонов Дмитрий – Саров, лицей 15,
Садков Виктор – Саратов, ФТЛ 1,
Светогоров Александр – Калуга, гимназия,

Разумов Дмитрий – Нижний Новгород, лицей 40,
Костин Петр – Белгород, лицей 38,
Офенгейм Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Курочкин Никита – Чебоксары, лицей 3,
Попов Федор – Пермь, школа 146,
Ким Александр – Республика Саха (Якутия), Республиканский лицей,
Рыков Андрей – Снежинск, гимназия 127,
Шустикова Анна – Заречный, лицей 230,
Маргаритов Артемий – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
Бебех Илья – Республика Коми, Республиканский физико-математический лицей-интернат,
Первощиков Денис – Киров, школа 21,
Томас Павел – Новосибирск, лицей 130 им. М.А.Лаврентьева,
Белянчиков Михаил – Междуреченск, гимназия 20,
Смирнов Николай – Новосибирск, гимназия 3,
Комендатян Андрей – Самара, ФМШ;

по 11 классам –

Кравчук Петр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Усманова Динара – Миасс, лицей 6,
Светкин Михаил – Москва, СУНЦ МГУ,
Костарев Илья – Санкт-Петербург, лицей 533,
Цымбалов Иван – Тверь, лицей 35 ОАО «РЖД»,
Фадеев Алексей – Новочебоксарск, лицей 18,
Старков Григорий – Ноябрьск, школа 7,
Обидина Яна – Оренбург, гимназия 3,
Казеев Александр – Петропавловск-Камчатский, школа 33,
Берсенева Никита – Москва, Центр образования 1925,
Трегубов Дмитрий – Киров, ФМЛ,
Сафошкин Алексей – Рязань, гимназия 2 им. И.П.Павлова,
Бычин Андрей – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Михайлова Анастасия – Оренбург, гимназия 3,
Власюк Александр – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Левдик Павел – Челябинск, лицей 39,
Либерзон Даниил – Киров, ФМЛ,
Дорошенко Андрей – Омск, лицей 92,
Дубов Александр – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Киян Сергей – Тамбов, лицей 14,
Кузнецов Иван – Москва, СУНЦ МГУ,
Лисицкий Дмитрий – Белорецк, Компьютерная школа,
Матросов Михаил – Нововоронеж, школа 2.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

В горах тела весят больше или меньше?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

... В горах плотность воздуха, а вместе с ней и сила Архимеда, может значительно уменьшаться. Довольно простые расчеты (выполните их сами) показывают, что вес тел плотностью, например, $1/3$ плотности воды не

падает, а растет с подъемом на высоту. Так, вес пенопласта, плотность которого около 50 кг/м^3 , увеличивается, когда вы поднимаетесь в горы. Конечно, для кирпича, гири и человека вывод, сделанный в большинстве учебников, остается верным.

К.Богданов

Московская студенческая олимпиада по физике 2009 года

24 мая в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана прошла очередная Московская городская олимпиада по физике среди студентов технических вузов. В олимпиаде приняли участие 75 студентов из 8 вузов Москвы.

По результатам командного зачета первое место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана, набравшая 155 баллов, второе место заняла команда Московского государственного института стали и сплавов (МИСиС) (129 баллов), третье место – команда Московского государственного института электронной техники (80 баллов).

В личном зачете первое место завоевал И.Иванов из МГТУ им. Н.Э.Баумана, набравший 50 баллов, второе место завоевал А.Вятских (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 46 баллов), третье место – П.Карпов (МИСиС, 31 балл).

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Определите минимальный радиус кривизны траектории автомобиля массой m при максимально быстром повороте его на 90° градусов, если скорость до и после поворота равна v . Поворот происходит на пределе сцепляемости колес с дорогой, максимальная сила трения равна F .

2. Доска массой m своими концами опирается на цилиндр радиусом R и на катушку по внутреннему радиусу r_1 , которые лежат на горизонтальной поверхности так, что оси их горизонтальны и параллельны друг другу. Оси катушки и цилиндра связаны жесткими поводками. Коэффициент трения между доской, цилиндром и катушкой равен 1, проскальзывание между катушкой, цилиндром и горизонтальной поверхностью отсутствует. Какую силу необходимо приложить к доске, чтобы сдвинуть ее с места, если внешний радиус катушки r_2 и $2R = r_1 + r_2$?

3. Планетная система состоит из двух планет одинаковой массы, расстояние между которыми l , вращающихся относительно их общего центра масс. Определите радиус круговой стационарной орбиты космического аппарата в этой системе.

4. Тепловая машина работает по циклу Карно, забирая тепло от нагревателя с температурой T_1 и отдавая тепло

холодильнику с температурой T_2 . Определите работу, получаемую в каждом цикле, если приращение энтропии в каждом цикле при теплообмене ΔS , а КПД машины η .

5. Определите напряженность электрического поля в точке, находящейся на оси Z с координатой $z = a$, если часть плоскости XY между ветвями гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ заряжена с поверхностной плотностью электрического заряда σ .

6. Определите поток вектора индукции магнитного поля через боковые поверхности двух одинаковых плоских контуров с током I , намотанных в виде однослойной спирали с внутренним диаметром R , внешним диаметром $2R$ и большим числом витков N . Контур соосны, расстояние между ними $\delta \ll R$, а токи в них текут в противоположных направлениях.

7. Тонкостенный длинный цилиндр толщиной d , радиусом R и длиной L выполнен из материала с электропроводностью σ и концентрацией электронов n и вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω в магнитном поле. Индукция магнитного поля во всех точках перпендикулярна поверхности цилиндра и равна B . К концам цилиндра посредством скользящих контактов приложена разность потенциалов U . Определите ток вдоль оси цилиндра.

8. Тонкостенный длинный проводящий цилиндр толщиной δ , радиусом R и длиной L находится в однородном электрическом поле с напряженностью E , перпендикулярной его оси. Цилиндр вращается относительно собственной оси с угловой скоростью ω . Определите момент сил, прикладываемых к цилиндру для поддержания вращения с постоянной угловой скоростью, если коэффициент электропроводности проводника γ .

9. В нашем распоряжении осталась только периферийная часть зонной пластинки, про которую вам больше ничего не известно. Если осветить пластинку параллельным пучком света с длиной волны λ , то пучок отклонится на угол α и сфокусируется в точке на расстоянии l от пластинки. Что произойдет, если осветить пластинку пучком света с длиной волны Λ ?

Публикацию подготовили В.Голубев, М.Яковлев

Сохранение полной энергии ...

(Начало см. на с. 45)

Упражнения

1. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре 200 К. Над поршнем сначала удерживают груз так, что он едва касается поверхности поршня, а затем отпускают. Какой станет температура (в кельвинах) газа после установления равновесия? Масса груза равна половине массы поршня. Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

2. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия. На поршне лежит груз с массой, равной массе поршня. Груз мгновенно убирают и ждут прихода системы к равновесию. На сколько процентов увеличится высота, на которой находится поршень? Над поршнем газа нет. Считать, что за время движения поршня газ не успевает обменяться теплом с поршнем и цилиндром.

3. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем

находится некоторое количество гелия при температуре 200 К. Над поршнем сначала удерживают груз так, что он едва касается поверхности поршня, а затем отпускают. После установления равновесия груз мгновенно удаляют с поршня. Найдите температуру газа после того, как система снова придет в равновесие. Масса груза равна массе поршня. Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

4. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре 300 К. Температуру быстро (так, что поршень не успевает сдвинуться с места) повышают до 350 К. На сколько процентов увеличится высота поршня над дном цилиндра после прихода системы к равновесию? Над поршнем газа нет.

5. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того, как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа увеличился в 4 раза. Во сколько раз при этом уменьшилось его давление? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 4)

1. $2054 = 764 + 26 + 1264$

По условию Д и У – разные цифры. Наименьшее возможное значение Д = 2 при У = 1. Попробуем считать Е = 0. Получим

$$\begin{array}{r} \text{МАЛ} \\ + \quad 2\text{А} \\ + \quad 12\text{АЛ} \\ \hline 20\text{ЦЛ} \end{array}$$

Из последнего столбца Л + А = 10. Цифры 0, 1, 2 заняты. Остались 4 случая: Л = 3, А = 7, или Л = 4, А = 6, или Л = 7, А = 3, или Л = 6, А = 4. Перебирая их, находим ответ.

2. Барон не хватает.

Приведем пример для N = 19 (можно доказать, что это наименьшее возможное N):

$$9|18|7|16|5|14|3|12|1|10|11|2|13|4|15|6|17|8|19.$$

3. Да.

Назовем *стоимостью чая в пряниках* количество пряников (возможно, нецелое), которое можно купить за те же деньги, что и чай. При подорожании стоимость чая в пряниках остается прежней. Заменяем мысленно чай пряниками. Так как цены оба раза повышались на одно и то же число процентов, каждый раз количество пряников, которые можно купить на 1 рубль, уменьшалось в одно и то же число раз. Поскольку после первого подорожания это количество уменьшилось не больше, чем на один пряник, после второго подорожания оно также уменьшится не больше, чем на один пряник. Значит, рубля на чай хватит.

4. Обозначим ладьи цифрами 1, 2, 3, 4 по часовой стрелке, где 1 – ладья в левом нижнем углу. Ходы влево, вправо, вверх, вниз будем обозначать Л, П, В, Н соответственно. Серию ходов одной ладьей будем обозначать цифрой и последовательностью букв. Вот вариант ходов, собирающий ладьи в центре:

3Л, 4ВЛ, 1ПВЛ, 2НПВЛН, 3НПВ, 4НПВ, 1ЛНПВ, 3ЛНП, 2В, 4ПНЛВ, 2ПНЛВ, 4ПНЛВ, 2ПНЛВ, 3В.

5. 60° .

Если подвесить тело за одну точку, то оно обязательно повернется таким образом, чтобы центр тяжести (точка приложения силы тяжести) лежал на вертикали, проходящей через точку подвеса. Два первых подвешивания позволяют найти положение центра тяжести – точку О (рис. 1). При подвешивании за точку С вертикаль снова пройдет через точку О. Угол между ней и стороной

АВ будет равен 60° . (Треугольник АОВ прямоугольный, поэтому $CO = CB$ и треугольник ВСО равнобедренный, но один из его углов равен 60° – значит, этот треугольник равносторонний.)

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. См. рис.2.

2. Поскольку ускорение грузика пропорционально длине желоба, время движения по любому желобу, прорезанному по

хорде диска, будет одним и тем же.

3. Нужно построить окружность, проходящую через данную точку А и касающуюся плоскости с заданным углом наклона α в некоторой точке А',

а центр этой окружности должен лежать на вертикали под точкой А (рис.3). Тогда движение по желобу, расположенному по прямой АА' под углом $\alpha/2$ к вертикали, будет происходить за кратчайшее время (см. решение задачи 2).

4. Поршень будет находиться в равновесии, так как проекции сил давления жидкости на ось трубки слева и справа равны.

5. Давление жидкости определяется глубиной, отсчитываемой по вертикали, исходя из чего в первой мензурке давление воды на дно будет в два раза больше, чем во второй.

6. Кирпичи начнут скользить одновременно, так как действующие на них силы трения равны – они не зависят от размеров трущихся поверхностей.

7. До определенного угла α_0 (расчет дает значение $\text{tg } \alpha_0 = \mu$, где μ – коэффициент трения скольжения) растет сила трения покоя, удерживающая брусок на плоскости, при дальнейшем увеличении угла на брусок действует сила трения скольжения, убывающая до нуля при достижении 90° .

$$8. \vec{R} = -m\vec{g}, F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha.$$

9. Начав свободно падать, тело за некоторое время сместится по вертикали на высоту h, пропорциональную ускорению g (рис. 4). За то же время клин должен сместиться в горизонтальном направлении не менее чем на перемещение s, пропорциональное ускорению a (см. заштрихованный треугольник на рисунке). Учитывая, что $s/h = \text{ctg } \alpha$, получаем $a = g \text{ctg } \alpha$.

10. Как только монета получит указанную скорость, сила трения окажется направленной противоположно ей. Так как эта сила горизонтальна, то она не сможет препятствовать движению монеты вниз по наклонной плоскости. В результате монета станет двигаться по кривой, изображенной на рисунке 5.

11. $F_x = mg \sin \alpha$, $F_y \leq mg \cos \alpha$ (см. рис. 6).

12. Поскольку маятник находится на тележке, скатывающейся с наклонной плоскости с ускорением $a = g \sin \alpha$, его поло-

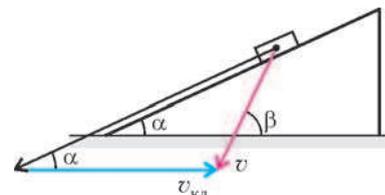


Рис. 2

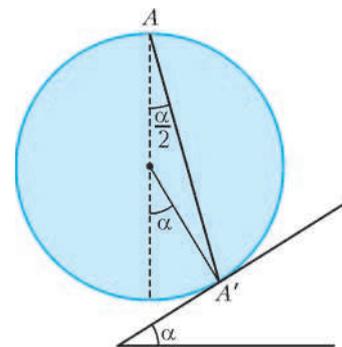


Рис. 3

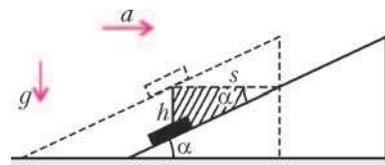


Рис. 4

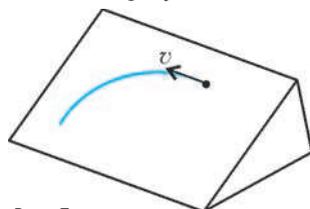


Рис. 5

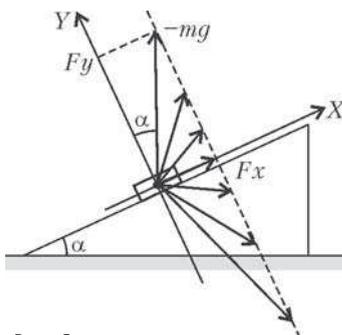


Рис. 6

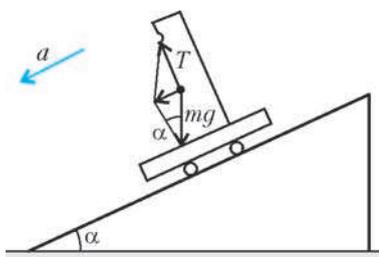


Рис. 7

жение равновесия будет таким, при котором маятник движется относительно плоскости с тем же ускорением, что и тележка. На рисунке 7 видно, что это возможно, лишь когда нить маятника перпендикулярна наклонной плоскости.

13. $\operatorname{tg} \alpha > 0,75$.
14. Для таких винтов выполняется неравенство $2\pi r \gg h$, где r и h – радиус и шаг винта соответственно.
15. Одинаково, если не учитывать сопротивление воздуха; второй вагон, если сопротивление учитывать.
16. При движении в гору необходимо увеличить силу тяги, а при постоянной мощности двигателя это возможно лишь при уменьшении скорости автомобиля.
17. При выполнении указанного в задаче условия скорость цилиндра у основания плоскости в первом случае больше, так как во втором случае часть потенциальной энергии цилиндра будет преобразована в кинетическую энергию вращения.
18. Верхнее бревно (2) останется в равновесии при $\alpha < 30^\circ$. В противном случае направление силы тяжести этого бревна пройдет левее точки опоры о нижнее бревно (1), и верхнее бревно скатится на борт.

Микроопыт

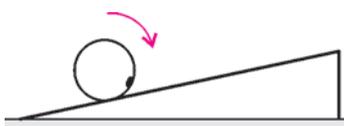


Рис. 8

Надо разместить цилиндр на наклонной плоскости так, как показано на рисунке 8, тогда он будет вести себя подобно игрушке «Ванька-встанька», когда момент силы тяжести относительно точки опоры заставляет фигурку разворачиваться, взбираясь вверх. Необходимо учесть, что при больших углах наклона плоскости цилиндр может начать проскальзывать по ней.

ЗАГАДКИ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ

- Задачи 1.** Концом одной из полосок надо прикоснуться к разным местам второй полоски. Если первая полоска – магнит, она будет притягивать вторую в любом месте. Если же первая полоска немагнитная, она будет с наибольшей силой притягиваться к концам второй полоски, с меньшей силой – ближе к ее центру и совсем не будет притягиваться точно в центре (где северный и южный полюса магнита как бы уничтожают друг друга).
- Задачи 2.** Если есть компас, то магнитную полоску, которая является магнитом, нужно поднести к компасу и посмотреть, как она будет действовать на стрелку. Тот конец полоски, который притянул синий конец стрелки компаса, надо покрасить в красный цвет, а другой конец полоски (он притягивает красный конец стрелки) – в синий. Если компаса нет, то подвесьте магнит на нитке точно в центре (или положите на плавающий в воде предмет) и посмотрите, как он будет ориентироваться по сторонам света. Тот конец бруска, который смотрит на север, надо покрасить в синий цвет.

СОХРАНЕНИЕ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОДИНАМИКИ

1. $T = 240 \text{ К}$.
2. $\delta = 60\%$.
3. $T = 224 \text{ К}$.
4. $\delta = 10\%$.
5. $k = 5$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

1. 26 км/ч.
Обозначим место обитания племени Мумбо-Юмбо через O , хранилище, к которому побегал Мумбо, через M , а хранилище, к которому пошел Юмбо, через U . Очевидно, что M находится выше по течению, чем O , а U ниже. Пусть расстояния от O до M и U равны x и y км соответственно ($x < y$), скорость реки равна v км/ч. На путь от O до U Юмбо затратил $y/6$ часов, а Мумбо $x/11 + (x + y)/v$ часов. Ясно, что в соседнее племя Юмбо приплывает раньше Мумбо тогда и только тогда, когда $y/6 < x/11 + (x + y)/v$. Так как $x < y$, из этого неравенства следует, что $y/6 < y/11 + (y + y)/v$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 26,4$ км/ч. Осталось проверить, что скорость реки могла равняться 26 км/ч. Для этого в неравенстве $y/6 < x/11 + (x + y)/v$ положим $v = 26$ км/ч и равносильно преобразуем его к виду $y/x < 111/110$. Последнее возможно (например, при $y = 1,12$ км, $x = 1,11$ км), что и завершает решение.

2. Да.

Каждая из данных дробей имеет вид $\frac{n+1-a}{a} = \frac{n+1}{a} - 1$, где $1 \leq a \leq n$. Стало быть, нам требуется найти такие различные натуральные числа a, b, c и d , не большие 2009, для которых $\left(\frac{n+1}{a} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{b} - 1\right) = \left(\frac{n+1}{c} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{d} - 1\right)$. Убрав минус единицы и поделив затем на $n + 1$, получим равносильное равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$. Осталось подобрать удовлетворяющие ему дроби. Это можно сделать, взяв любое равенство двух сумм различных натуральных слагаемых, НОК которых не больше 2009, и поделив его на этот НОК. Например, равенство $1 + 4 = 2 + 3$, поделенное на 12, дает $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

5. Нет.

Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел делится на каждое из них и, следовательно, на каждый их делитель. Значит, если среди чисел, от которых находят НОК, есть четное, то НОК тоже будет четным. Разность двух четных чисел – число четное, а 2009 – нечетное. Значит, если такие шесть последовательных натуральных чисел существуют, то все четные числа среди них должны быть в одном НОКе. Среди шести последовательных натуральных чисел три четных и три нечетных, значит, один НОК будет находится от трех последовательных четных чисел, а другой – от трех последовательных нечетных чисел. Но среди трех последовательных как четных, так и нечетных чисел есть кратное трем. Следовательно, оба НОКа кратны трем, и их разность делится на 3. Но 2009 на 3 не делится. Значит, таких шести последовательных натуральных чисел не существует.

6. Отложим на стороне AB отрезок $BE = BC$. Равнобедренные треугольники EBK и KBC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $EK = KC$, а $\angle AЕК = 180^\circ - \angle BEK = 180^\circ - \angle BKC = \angle CKD$. Кроме того, $KD = BD - BK = BA - BE = EA$. Следовательно, треугольники $AЕК$ и DKC равны. Далее, поскольку оба треугольника BEK и BAD – равнобедренные, $\angle BEK = 90^\circ - \angle EBD/2 = \angle BAD$. Поэтому $AD \parallel EK$, откуда $\angle KAD = \angle EKA = \angle KCD$.

7. Первый.

Назовем кучки из одного ореха единицами, а из двух – двойками. Первый игрок должен придерживаться следующих правил: 1) если на доске есть единицы – убрать одну из них; 2) не брать из двоек. В остальном ходы первого могут быть любыми. Заметим, что число орехов в начале игры нечетно,

значит, оно нечетно и перед любым ходом первого. Поэтому перед его ходом на доске всегда будет хотя бы одна нечетная кучка, т.е. первый всегда сможет сделать ход, не нарушая описанных правил. Теперь заметим, что после первого хода первого игрока на доске нет единиц. После хода второго игрока может появиться не более одной новой единицы, которую первый заберет. Значит, и после следующих ходов первого единиц на доске не будет, а после любого хода второго на доске будет не больше одной единицы. В частности, так будет и в конце игры, т.е. первый выигрывает.

8. 3001.

Поскольку каждое число ряда, начиная со второго, больше предыдущего хотя бы на единицу, $9 \cdot 1000^{1000}$ -е его число больше $9 \cdot 1000^{1000}$, т.е. в нем как минимум 3001 цифра. Обозначим n -е число ряда через a_n , и пусть k – наименьший номер такой, что в числе a_k 3002 цифры. Если мы докажем, что $k > 9 \cdot 1000^{1000}$, то получим, что в $9 \cdot 1000^{1000}$ -м числе ряда не более 3001 цифры, т.е. в нем ровно 3001 цифра. Рассмотрим числа от 0 до $10^{3001} - 1$, не имеющие единиц в десятичной записи. Дополнив каждое слева нулями до 3001 знака, мы получим все последовательности длины 3001 из цифр, отличных от единицы. Таких последовательностей 9^{3001} . Значит, и среди чисел a_1, \dots, a_{k-1} не более 9^{3001} чисел, не имеющих единицы в десятичной записи (так как все они не превосходят $10^{3001} - 1$).

Рассмотрим теперь процесс получения числа a_k из a_1 . На каждом из $k - 1$ шагов прибавляется число от 1 до 9, причем количество шагов, на которых прибавляется не единица, не превосходит 9^{3001} . Значит,

$$10^{3001} - 1 \leq a_k - a_1 \leq 9 \cdot 9^{3001} + 1 \cdot (k - 1 - 9^{3001}) = k - 1 + 8 \cdot 9^{3001},$$

откуда $k \geq 10^{3001} - 8 \cdot 9^{3001}$. Осталось показать, что $10^{3001} - 8 \cdot 9^{3001} > 9 \cdot 10^{3000}$. Для этого достаточно доказать, что $9^{3002} < 10^{3000}$. Заметим, что $9^7 = 4782969 < 5 \cdot 10^6$, откуда $9^{28} < 5^4 \cdot 10^{24} < 10^{27}$, и $9^{56} < 10^{54}$. Поэтому $9^{3002} = 9^{56} \cdot 9^{2946} < 10^{54} \cdot 10^{2946} = 10^{3000}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.

Пусть наши дроби – это $\frac{a}{600}$ и $\frac{b}{700}$. Тогда a взаимно просто с 6, а $b - c$ 7. Поэтому числитель их суммы $\frac{7a + 6b}{4200}$ взаимно прост как с $6 = 2 \cdot 3$, так и с 7. Поскольку $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5^2$, это означает, что знаменатель после сокращения будет не меньше чем $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$. Такой знаменатель действительно может получиться; например, $\frac{1}{600} + \frac{3}{700} = \frac{1}{168}$.

3. Заметим, что разность между любыми двумя числами вида $a + i$ ($i = 1, \dots, n$) не превосходит $n - 1$.

Пусть кратное числу $n^2 + i$, содержащееся среди наших чисел, – это $a_i(n^2 + i)$. Ясно, что $a_1 > 1$. Тогда найдется такое $1 \leq i \leq n - 1$, что $a_i > a_{i+1}$ (в противном случае $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, и $a_n(n^2 + n) - a_1(n^2 + 1) \geq a_1(n - 1) > n - 1$, что невозможно). Тогда

$$n - 1 \geq a_i(n^2 + i) - a_{i+1}(n^2 + i + 1) \geq a_i(n^2 + i) - (a_i - 1)(n^2 + i + 1) = n^2 + i + 1 - a_i,$$

т.е. $a_i \geq n^2 - n + i + 2 > n^2 - n$. Теперь, так как одно из наших чисел есть $a_i(n^2 + i) > (n^2 - n)(n^2 + 1) = n^4 - n^3 + n^2 - n$, то

$$a \geq a_i(n^2 + i) - n > n^4 - n^3 + n^2 - 2n \geq n^4 - n^3, \text{ так как } n \geq 2.$$

5. Заметим сначала, что для любых различных чисел x и y выполняется неравенство

$$x^2 - xy + y^2 > |xy|. \quad (*)$$

В самом деле, если $|xy| = xy$, то неравенство (*) равносильно неравенству $(x - y)^2 > 0$, которое верно; если же $|xy| = -xy$, то (*) равносильно неравенству $x^2 + y^2 > 0$.

Предположим, что $abc \neq 0$. Тогда, разделив второе равенство на первое, мы получаем

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^2b^2c^2 = |ab||bc||ac|.$$

Однако все скобки слева и все сомножители справа положительны; при этом каждый сомножитель слева не меньше соответствующего сомножителя справа. Тогда равенство может достигаться лишь тогда, когда все эти три неравенства обращаются в равенства, т.е. когда $a = b = c$. В этом случае первое равенство из условия принимает вид $8a^3 = a^3$, что невозможно при $a \neq 0$. Значит, наше предположение неверно, и $abc = 0$.

8. Всегда.

Если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то способ построения очевиден. В противном случае можно считать, что $AB \neq A_1B_1$ (пусть для определенности $AB < A_1B_1$).

Построим треугольник $A'B'C$ такой, что $AB \parallel A'B'$, $A'B' = A_1B_1$, $B'C = B_1C_1$, $CA' = C_1A_1$ (рис.9; это построение легко осуществить, например, используя равенство

$$\angle BCB' = \angle ABC + \angle A_1B_1C_1).$$

Тогда $ABB'A'$ – трапеция.

Пусть MN – ее средняя линия, а P – точка пересечения продолжений боковых сторон. Построим на отрезке PC как на диаметре окружность ω . Так как $AB < A_1B_1 = A'B'$ и $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} = S_{A'B'C}$, то расстояние от точки C до прямой AB больше расстояния от C до прямой $A'B'$, поэтому точки P и C лежат по разные стороны от прямой MN , следовательно, ω пересекает прямую MN . Пусть K – одна из точек пересечения (на рисунке она лежит на отрезке MN , но наши рассуждения на это опираться не будут).

Проведем прямую PK до пересечения с прямыми AB и $A'B'$ в точках X и Y соответственно. Тогда $\frac{AX}{XB} = \frac{A'Y}{YB'}$, поэтому

$S_{XBC} = S_{YB'C}$. Кроме того, $XK = KY$, а угол PKC – прямой как опирающийся на диаметр в окружности ω . Значит, CK – серединный перпендикуляр к отрезку XY , и $CX = CY$.

На продолжении отрезка XC за точку C возьмем точку Z такую, что $XC = CZ$. Построим треугольники A_2CZ и B_2CZ ,

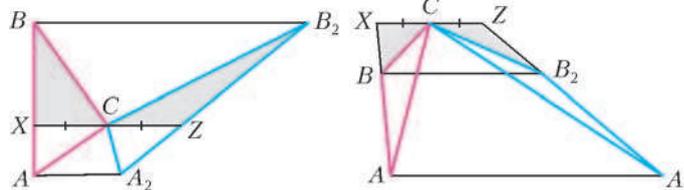


Рис. 9

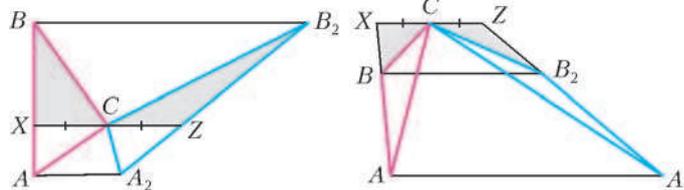


Рис. 10

равные треугольникам $A'CY$ и $B'CY$ соответственно (рис.10). Тогда $\Delta A_2B_2C = \Delta A'B'C = \Delta A_1B_1C_1$. Покажем, что $AA_2 \parallel BB_2$, тогда можно сдвинуть треугольник A_2B_2C вдоль прямой AA_2 , получив требуемый. Так как $CX = CZ$, $S_{ABC} = S_{A_2B_2C}$ и $S_{XBC} = S_{ZB_2C}$, то $S_{XAC} = S_{ZA_2C}$, расстояния от точек A и A_2 до прямой XZ равны, и расстояния от точек B и B_2 до прямой XZ также равны. Следовательно, $AA_2 \parallel XZ \parallel BB_2$, что и требовалось.

10 класс

1. 1001, 1000, 500.

Ясно, что существуют требуемые многочлены с 1001 и 1000 ненулевыми коэффициентами (например, $(2x+2)^{1000} - (x+1)^{1000}$ и $(2x+1)^{1000} - (x+1)^{1000}$). Предположим, что в нашем многочлене есть два коэффициента, равных нулю, — при x^i и x^j ($i > j$). Тогда $a^i b^{1000-i} = c^j d^{1000-j}$, $a^j b^{1000-j} = c^i d^{1000-i}$; разделив первое равенство на второе, получаем $\left(\frac{ad}{bc}\right)^i = \left(\frac{d}{b}\right)^{1000} = \left(\frac{ad}{bc}\right)^j$. Отсюда $\left|\frac{ad}{bc}\right| = 1$, $\left|\frac{d}{b}\right| = 1$ и $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$.

Ясно, что при замене $ax + b$ на $(-a)x + (-b)$ наш многочлен не изменится. Поэтому можно считать, что $\frac{a}{c} = 1$. Тогда, если $\frac{b}{d} = 1$, то итоговый многочлен $(ax+b)^{1000} - (ax+b)^{1000}$ нулевой, а если $\frac{b}{d} = -1$, то в полученном многочлене $(ax+b)^{1000} - (ax-b)^{1000}$ обнуляются в точности коэффициенты при четных степенях x , т.е. получается 500 ненулевых коэффициентов.

4. $k = 100400$.

Обозначим числа на окружности через a_1, \dots, a_{2009} , и положим $a_{n+2009} = a_n = a_{n-2009}$. Пусть $N = 100400$. Положим $a_2 = a_4 = \dots = a_{2008} = 100$ и $a_1 = a_3 = \dots = a_{2009} = 0$. Пусть мы сумели сделать все числа равными при каком-то значении k . Рассмотрим сумму $S = (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2008} - a_{2009})$. Эта сумма увеличивается на 1 при прибавлении единицы к паре (a_1, a_2) , уменьшается на 1 при прибавлении к паре (a_{2009}, a_1) и не изменяется при всех остальных операциях. Поскольку исходное значение S равно $S_0 = 100 \cdot 1004 = N$, а конечное должно быть нулем, то пара (a_{2009}, a_1) увеличивалась хотя бы N раз. Это значит, что $k \geq N$.

Осталось показать, что при $k = N$ требуемое всегда возможно. Рассмотрим произвольный набор чисел a_i . Увеличим каждую пару (a_i, a_{i+1}) ровно $s_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \dots + a_{i+2008}$ раз. Тогда число a_i превратится в

$$a_i + s_{i-1} + s_i = a_i + (a_{i+1} + a_{i+3} + \dots + a_{i+2007}) + (a_{i+2} + a_{i+4} + \dots + a_{i+2008}) = a_1 + \dots + a_{2009}$$

т.е. все числа станут равными. С другой стороны, $s_i \leq 1004 \cdot 100 = N$, что и требовалось.

5. $k = 2010$.

Обозначим нашу последовательность (a_n) . Ясно, что $a_1 < 1005 \cdot 1006 \cdot 97 \cdot N = D$ при некотором натуральном N . Тогда найдется такое n , что $a_n \leq D$, но $a_{n+1} > D$ (при этом $a_n \neq D$ из условия). Но наибольшими числами, меньшими D и делящимися на 1005 и 1006, являются числа $D - 1005$ и $D - 1006$ соответственно; поэтому $a_n \leq D - 1005$. Аналогично, $a_{n+1} \geq D + 1005$; отсюда $a_{n+1} - a_n \geq (D + 1005) - (D - 1005) = 2010$. Значит, и $k \geq 2010$.

При $k = 2010$ подходит, например, последовательность всех чисел, кратных 1005, но не кратных 97 (заметим, что 1005 не кратно 97).

7. Пусть ω_B касается BA_1 , IA_1 и BC_1 в точках K_B , L_B и M_B соответственно, а ω_C касается CA_1 , IA_1 и CB_1 в точках K_C , L_C и M_C соответственно (рис.11). Обозначим через O_B и O_C центры окружностей ω_B и ω_C соответственно, а через r_B и r_C — их радиусы (пусть для определенности

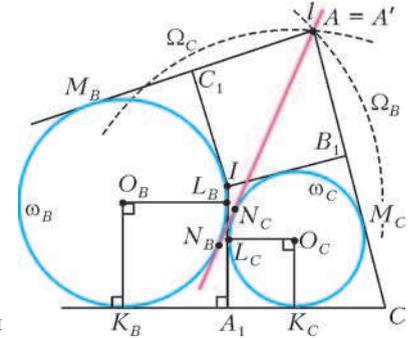


Рис. 11

$r_B > r_C$). Тогда четырехугольники $O_B K_B A_1 L_B$ и $O_C K_C A_1 L_C$ — квадраты, поэтому $A_1 L_B = r_B$, $A_1 L_C = r_C$ и $L_B L_C = r_B - r_C$.

Если вторая общая внутренняя касательная l касается ω_B и ω_C в точках N_B и N_C , то $N_B N_C = r_B - r_C$, причем N_C и L_B лежат по одну сторону от линии центров $O_B O_C$ (заметим, что точка A лежит по ту же сторону).

Аналогично получаем, что $C_1 M_B = r_B$, $B_1 M_C = r_C$. Отложим на продолжении отрезка $N_B N_C$ за точку N_C отрезок $N_C A' = AM_C = AB_1 + B_1 M_C$. Тогда

$$N_B A' = AM_C + N_B N_C = (AB_1 + r_C) + (r_B - r_C) = AC_1 + r_B = AM_B.$$

Итак, касательные из точек A и A' к окружности ω_B равны, и касательные из них к ω_C также равны.

Заметим, что ГМТ, длина касательной из которых к окружности ω_B равна AM_B , есть окружность Ω_B с центром O_B и радиусом $\sqrt{r_B^2 + AM_B^2}$. Таким образом, точки A и A' лежат на Ω_B . Аналогично, они лежат на окружности Ω_C с центром O_C и радиусом $\sqrt{r_C^2 + AM_C^2}$.

Итак, каждая из точек A и A' является одной из двух точек пересечения окружностей Ω_B и Ω_C , а поскольку A и A' лежат по одну сторону от $O_B O_C$, имеем $A' = A$. Значит, A лежит на прямой $N_B N_C$, что и требовалось доказать.

11 класс

1. Рассмотрим самый короткий маршрут l , проходящий по всем городам. Пусть он начинается в городе A , заканчивается в городе B , а его длина равна N . Тогда числа на табличках в городах A и B равны N , а все остальные не меньше N . Пусть C — один из оставшихся городов. Он лежит на данном маршруте, поэтому длина пути от C до одного из городов A или B не больше $N/2$ (без ограничения общности — до A). Рассмотрим маршрут, который выходит из C , доходит кратчайшим образом до A , а затем повторяет маршрут l . Он проходит через все города, и его длина не превосходит $N/2 + N = 3N/2$. Следовательно, число на табличке в городе C не больше $3N/2$.

Таким образом, все числа на табличках принадлежат отрезку $[N; 3N/2]$, откуда и следует требуемое.

2. Положим $b_k = a_k - k$. Тогда

$$b_{k+1} = b_k - 1 + \frac{k}{k + b_k} = b_k - \frac{b_k}{k + b_k} = b_k \left(1 - \frac{1}{k + b_k}\right).$$

Отсюда очевидной индукцией по k получаем, что $b_k > 0$ (поскольку $b_1 > 0$). Кроме того, $b_{k+1} = b_k - \frac{b_k}{k + b_k} < b_k$. Отсюда, в частности, следует, что $b_k \leq b_1 < 1$.

Заметим, что $b_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} - 2 = \left(\sqrt{a_1} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2$. Выражение в скобках положительно и возрастает, когда a_1 пробегает ин-

тервал $(1; 2)$; тогда $0 = 1 + \frac{1}{1} - 2 < b_2 < 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, $b_k \leq b_2 < \frac{1}{2}$ при $k \geq 2$.

Теперь, если $a_k + a_j$ – целое число, то $b_k + b_j$ – также целое. Значит, одно из чисел b_k, b_j (для определенности b_k) не меньше $\frac{1}{2}$; тогда $k = 1$, и $b_j = 1 - b_1$. Но таких чисел j не больше одного, так как последовательность (b_i) убывает. Из этого и следует утверждение задачи.

Замечание. Можно показать, что количество пар с целой суммой будет конечным при любом $a_1 > 1$.

3. Пусть AB_1, AC_1, AD_1 – высоты граней ACD, ABD, ABC (рис.12). Точки пересечения высот этих граней лежат на пря-

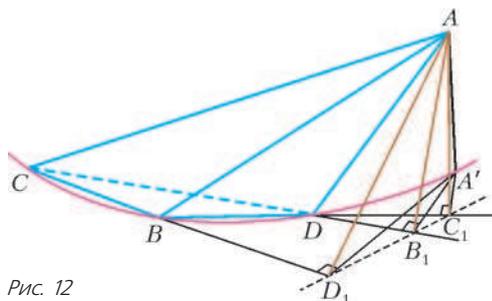


Рис. 12

мых AB_1, AC_1, AD_1 и отличны от точки A . Поскольку они лежат на одной прямой l , то прямые AB_1, AC_1, AD_1 лежат в плоскости α , содержащей l и A (ясно, что A не лежит на l). Значит, точки B_1, C_1, D_1 лежат на прямой пересечения плоскостей α и BCD .

Пусть A' – проекция точки A на плоскость BCD . Тогда по теореме о трех перпендикулярах точки B_1, C_1, D_1 являются проекциями A' на прямые CD, BD, BC . Значит, точки A', C, B_1, D_1 лежат на одной окружности (с диаметром $A'C$), а также точки A', D, B_1, C_1 лежат на одной окружности (с диаметром $A'D$). Отсюда

$$\begin{aligned} \angle(BC, A'C) &= \angle(D_1C, A'C) = \angle(D_1B_1, A'B_1) = \\ &= \angle(C_1B_1, A'B_1) = \angle(C_1D, A'D) = \angle(BD, A'D) \end{aligned}$$

(здесь через $\angle(a, b)$ обозначен угол от прямой a до прямой b , отсчитываемый против часовой стрелки; этот угол считается с точностью до прибавления числа вида πk , где k – целое). Из равенства $\angle(BC, A'C) = \angle(BD, A'D)$ следует, что точка A' лежит на описанной окружности треугольника BCD (рис.13) и, следовательно, на описанной сфере S пирамиды $ABCD$.

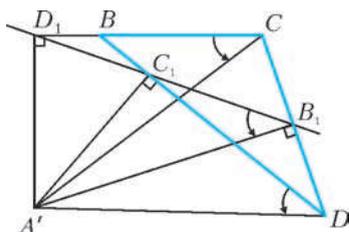


Рис. 13

Тогда центр O сферы S лежит в плоскости β , являющейся серединным перпендикуляром к AA' . Ясно, что середины ребер AB, AC, AD также лежат в β (так как треугольники ABA', ACA', ADA' прямоугольные). Это и требовалось доказать.

Замечание 1. Опустим перпендикуляры из произвольной точки A' , лежащей в плоскости BCD , на прямые BC, CD, BD (см. рис. 13). Их основания лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда A' лежит на описанной окружности треу-

гольника BCD . Эта прямая называется *прямой Симсона* точки A' .

Замечание 2. Тетраэдры, удовлетворяющие условию задачи, существуют.

4. Первый игрок.

Докажем более общее утверждение:

Пусть игра с теми же правилами происходит на конечном множестве точек S , которое содержит точку $O(0; 0)$ и переходит в себя при повороте на 90° . Тогда в этой игре выигрывает первый игрок.

(Ясно, что множество точек из условия удовлетворяет этим условиям.)

Доказательство будем вести индукцией по количеству n точек в S . Если $n = 1$, то первый выигрывает первым своим ходом. Пусть $n > 1$. Далее под *отрезками* мы всегда будем подразумевать отрезки, концы которых лежат в S и не симметричны относительно O . Рассмотрим длины всех отрезков. Пусть d – максимальная из них, и пусть $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ – все отрезки длины d (некоторые из точек A_i, B_j могут совпадать).

Заметим, что точка O не является концом ни одного из этих отрезков. Действительно, пусть это не так, и среди наших отрезков есть какой-то отрезок OA . Пусть точка $B \in S$ получается из A поворотом на 90° относительно O . Тогда $AB = \sqrt{2} OA > OA$, т.е. длина отрезка OA не максимальна – противоречие.

Выкинем из S все точки A_i, B_i . Заметим, что полученное множество S' удовлетворяет всем условиям нашего утверждения (так как множество отрезков A_iB_i переходит в себя при повороте на 90°). Значит, по предположению индукции в игре на полученном множестве S' выигрывает первый. Предъявим теперь выигрышную стратегию для него на множестве S .

Первый будет действовать по стратегии для множества S' с начала до того момента, когда второй впервые выведет фишку за пределы множества S' . Это случится, ибо согласно стратегии для S' у первого всегда есть ход, после которого фишка остается в множестве S' . Значит, рано или поздно второй сделает ход из точки X , лежащей в S' , в точку Y , не лежащую там (пусть тогда $Y = A_i$). Тогда первый может сделать ход в точку B_i (так как $A_iB_i = d$, а $XA_i < d$, иначе бы X не лежала в S'), после чего второму ходить некуда – он должен сделать ход длины большей d , а таких ходов нет. Итого, первый выигрывает.

Замечание. Аналогично доказывается, что если множество S переходит в себя при повороте на 90° вокруг O , но **не содержит** ее, то выигрывает второй.

5. Введем переменные $x = \log_a b, y = \log_b c$. В новых переменных неравенство принимает вид

$$x + y + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy,$$

что после приведения к общему знаменателю переходит в

$$\frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy} \geq 0.$$

Последнее неравенство верно, так как $x \geq 1, y \geq 1$ и $xy \geq 1$ в силу условия задачи.

6. $k = 16$.

Рассмотрим расстановку k ладей, удовлетворяющую условию. Возможны два случая.

1. Пусть в каждом столбце стоит хотя бы по одной ладье. Тогда вся доска находится под боем, и можно убрать ладью из любого столбца, в котором их хотя бы две. Значит, в этом случае в каждом столбце стоит ровно по одной ладье, и $k \leq 10$. Аналогично, если в каждой строке есть ладья, то тоже $k \leq 10$.

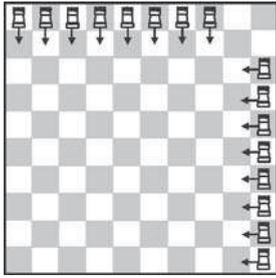


Рис. 14

2. Пусть теперь найдутся пустая строка и пустой столбец. Тогда клетка на их пересечении не под боем. Заметим, что каждая ладья является единственной либо в своей строке, либо в своем столбце (иначе ее можно выкинуть, и ее строка и столбец останутся под боем). Для каждой ладьи отметим эту строку или этот столбец. Если отмечены не более 8 столбцов и не более 8 строк, то всего ладей не больше $8 + 8 = 16$. Если же, для определенности, отмечены 9 столбцов, то ладей всего 9 (в каждом из 9 столбцов по одной, а в 10-м столбце по предположению ладей нет).

Итого, во всех случаях мы получили $k \leq 16$. Пример для 16 ладей показан на рисунке 14; для каждой ладьи стрелкой указана клетка, которая останется не под боем, если эту ладью убрать.

7. Обозначим описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P через ω_A и ω_C , соответственно. Пусть лучи AQ и CQ пересекают стороны CD и AD в точках C_2 и A_2 соответственно. Тогда из параллельности $AB \parallel CD$ и вписанности четырехугольника AA_1PQ получаем

$$\angle PSS_2 = 180^\circ - \angle AA_1P = \angle AQP = 180^\circ - \angle PQC_2,$$

т.е. четырехугольник $CPQC_2$ также вписан. Это значит, что C_2 лежит на ω_C ; аналогично, точка A_2 лежит на ω_A (рис.15).

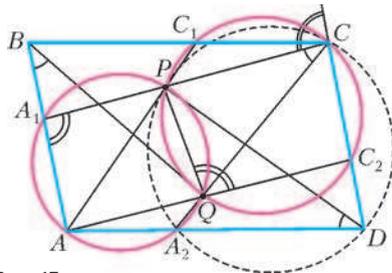


Рис. 15

Далее, так как четырехугольник AA_1PA_2 вписан и $AB \parallel CD$, имеем $\angle A_2PC = 180^\circ - \angle A_1PA_2 = \angle A_1AA_2 = 180^\circ - \angle A_2DC$, т.е. четырехугольник A_2PCD также вписан. Тогда $\angle PDA = \angle PDA_2 = \angle PCA_2 = \angle PCQ$. Аналогично получаем, что четырехугольник BA_1QC вписан, откуда $\angle QBA = \angle QCA_1 = \angle PCQ$. Отсюда следует $\angle PDA = \angle PCQ = \angle QBA$, что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение задачи остается верным, если Q не лежит в треугольнике ACD .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

- Начальная скорость конфеты относительно ленты транспортера равна $v'_0 = u\sqrt{3}$ и направлена по большей диагонали ромба со стороной u и углом 60° при вершине. Минимальная скорость конфеты относительно Глюка равна $v_{\min} = u/2$.
- $t_x = 10^\circ\text{C}$.

10 класс

- $T = mg\sqrt{3}$.
- См. рис.16, если линза собирающая, и рис.17, если линза рассеивающая.

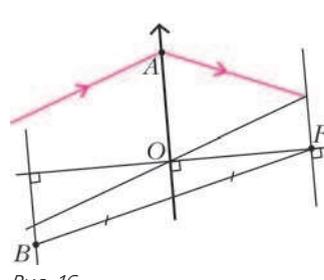


Рис. 16

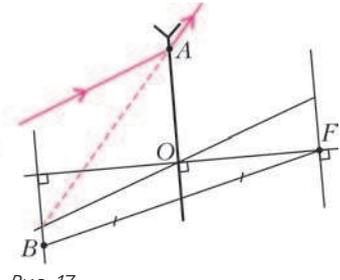


Рис. 17

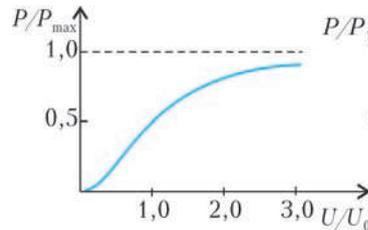


Рис. 18

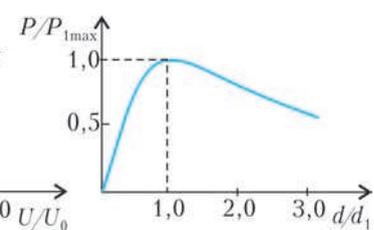


Рис. 19

- 1) $I_{\max} = \frac{S}{2\sqrt{A\rho_0}} = 5 \text{ mA}$; 2) $P_{\max} = \frac{Sd}{A} = 10 \text{ Вт, см.}$
рис.18; 3) $d_1 = \frac{U_1}{\sqrt{\rho_0/A}} = 2 \text{ см}$, $P_{1\max} = \frac{Sd_1}{2A} = 10 \text{ Вт, см.}$
рис.19.

11 класс

- 1) $L = \frac{h}{3} = 30 \text{ м}$, $k = \frac{9mg}{2h} = 35 \text{ Н/м}$;
2) $x_0 = \frac{2h}{9} = 20 \text{ м}$; 3) $v_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = 28,3 \text{ м/с}$;
4) $A = \frac{4h}{9} = 40 \text{ м}$, $\omega = \sqrt{\frac{9g}{2h}} = 0,71 \text{ с}^{-1}$;
5) $\tau = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9}\right)\sqrt{\frac{2h}{9}} = 5,41 \text{ с}$.
- 1) $I_0 = \sqrt{\frac{2Q_0}{L}}$; 2) $q_1 = \frac{\sqrt{2Q_0L}}{R}$; 3) $q_2 = 0$;
4) $A = \varepsilon q_0 + \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{2Q_0L}$; 5) $Q = A - Q_0$.
- 1) $m_{\text{л}} = \frac{P_0\tau_0}{\lambda} \approx 0,15 \text{ кг}$, где $\tau_0 = 2 \text{ мин}$ – время плавления льда;
2) $M \approx 0,48 \text{ кг}$; 3) $\alpha \approx 2,0 \text{ Вт/}^\circ\text{C}$;
4) $P_{\max} \approx 200 \text{ Вт}$; 5) $\tau_1 \approx 21 \text{ мин}$.
- 1) См. рис.20, где $a = 400 \text{ К}$, $b = 4 \text{ л}$, $l = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2) Максимальное давление соответствует точке C на графике и равно $p_{\max} \approx 4,75 \text{ МПа}$.

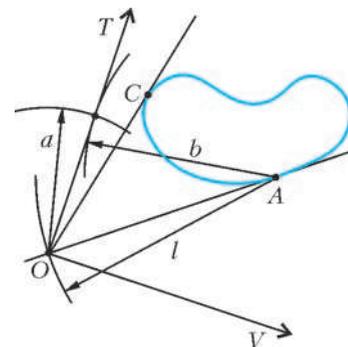


Рис. 20

$$5. F_1 = \frac{L^2 + 2l_1L \pm L\sqrt{L^2 + 4l_1l_2}}{2(L + l_1 - l_2)} = (20,0 \pm 16,3) \text{ см},$$

$$F_2 = \frac{L^2 + 2l_2L \pm L\sqrt{L^2 + 4l_1l_2}}{2(L + l_2 - l_1)} = (16,0 \pm 9,8) \text{ см},$$

возможны два случая: обе линзы длиннофокусные, тогда $F_1 = 36,3$ см и $F_2 = 25,8$ см, или обе линзы короткофокусные, тогда $F_1 = 3,7$ см и $F_2 = 6,2$ см.

МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2009 ГОДА

$$1. R_{\min} = \frac{mv^2}{2F}. \quad 2. F = \frac{mg}{2} \left(1 - \frac{R}{r_2}\right).$$

$$3. r = 2l. \quad 4. A = \frac{T_1 T_2 \eta \Delta S}{T_1(1 - \eta) - T_2}. \quad 5. E = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}\epsilon_0}.$$

$$6. \Phi = \mu_0 \pi I N \delta. \quad 7. I = \frac{2\pi R \delta \sigma (U - BL\omega R)}{1 + B^2 \sigma^2 / (e^2 n^2)}.$$

$$8. M = \frac{4\pi\omega L \epsilon_0^2 E^2 R^3}{\delta\gamma}.$$

9. Пучок света отклонится на угол $\beta = \arcsin \frac{\lambda \sin \alpha}{\Lambda}$ и сфокусируется на расстоянии $L = \frac{l\lambda}{\Lambda}$ от пластинки.

МОДУЛЬ СУММЫ И СУММА МОДУЛЕЙ

(см. «Квант» №4)

1. Неравенство (2) (см. статью) равносильно неравенству $|ab| \geq -ab$. Равенство достигается при $ab \leq 0$.
Неравенство (2') равносильно неравенству $|ab| \geq ab$. Равенство достигается при $ab \geq 0$.
2. Стандартное рассуждение по индукции. Неравенство (3) справедливо при $n = 2$ (это неравенство (1)). Если оно справедливо при $n = k$, то оно справедливо и при $n = k + 1$:

$$|a_1 + \dots + a_k + a_{k+1}| \leq |a_1 + \dots + a_k| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{k+1}|.$$

3. Равносильное неравенство имеет вид $(x^2 - 1)(y^2 - 1) < 0$, а это значит, что число 1 расположено между $|x|$ и $|y|$.

4. Числа x, y, z либо неположительны, либо неотрицательны, а числа $|x|, |y|, |z|$ — длины сторон некоторого треугольника (может быть, вырожденного).

Неравенство задачи 3 обращается в равенство, если и только если являются равенствами три неравенства, которые мы складывали, решая задачу. Для этого необходимо и достаточно выполнения трех условий:

$$x^2 - (z - y)^2 \geq 0, \quad y^2 - (x - z)^2 \geq 0, \quad z^2 - (x - y)^2 \geq 0,$$

или

$$|x| \geq |z - y|, \quad |y| \geq |x - z|, \quad |z| \geq |x - y|. \quad (*)$$

Докажем, что все числа x, y, z либо неположительны, либо неотрицательны.

Если одно из трех чисел равно 0, то, очевидно, два остальных равны.

Если ни одно из них не равно нулю и среди них есть как положительные, так и отрицательные, можно считать, что $x > 0, y > 0, z < 0$ (если x, y, z удовлетворяют системе (*), то $-x, -y, -z$ тоже ей удовлетворяют).

Но тогда $x \geq y - z, y \geq x - z$, откуда $x + y \geq y + x - 2z$, т.е. $z \geq 0$ (противоречие).

Итак, числа x, y, z имеют одинаковые знаки, и из (*) следует, что выполняются неравенства треугольника

$$|x| + |y| \geq |z|, \quad |y| + |z| \geq |x|, \quad |x| + |z| \geq |y|.$$

Нетрудно проверить, что эти условия не только необходимы, но и достаточны.

5. $n \cdot 2^{n-2}$.

Каждая такая расстановка однозначно определяется выбором точки, в которой ставится 1 (n способов), и любым набором чисел, стоящих против часовой стрелки на дуге между 1 и n . Таких наборов (включая и пустой набор) 2^{n-2} . Итого, получается $n \cdot 2^{n-2}$ способов.

7. Нет.

Если $x = ai, y = -ai$, где a — действительное число и $|a| < 1$,

то $\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| = \left| \frac{2a}{1-a^2} \right|$. При a , близких к 1, последнее выражение может быть сделано сколь угодно большим.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

seemat.ru

журнал ©
Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,
А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина,
В.М.Хлебникова**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

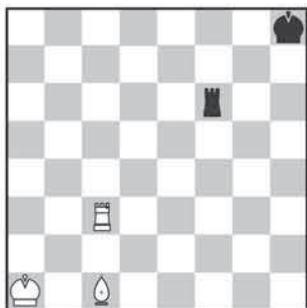
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

СИММЕТРИЯ УКРАШАЕТ

Благодаря мотивам симметрии (и асимметрии!) шахматные задачи и этюды часто приобретают дополнительное изящество. Сейчас мы в этом убедимся.

Начнем с одной старинной миниатюры.



Р.Бианкетти

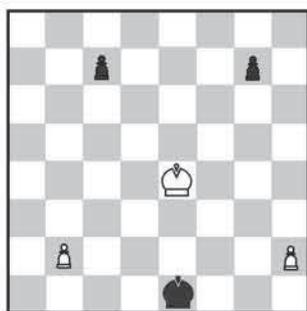
Выигрыш

После вступления **1. ♖b2!** все фигуры на доске выстроились по большой диагонали. Ладья черных в опасности, и, в зависимости от того, куда она двинется, возникают два симметричных варианта.

1... ♜f8 (1... ♜f7 2. ♜h3++ ♘g8 3. ♜h8×) 2. ♜c7+ ♘g8 3. ♜g7+ ♘h8 4. ♘a2!, и белые выигрывают ладью (но не 4. ♘b1 из-за 4... ♜f1+ 5. ♘a2 ♜a1+ 6. ♘b3 ♜a3+ 7. ♘c2 ♜c3+ 8. ♖:c3 пат).

Или

1... ♜h6 2. ♜g3+ ♘h7 3. ♜g7+ ♘h8 4. ♘b1! с аналогичным финалом (4. ♘a2? ♜a6+ и т.д.).



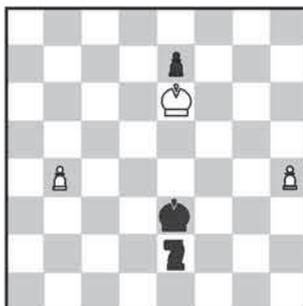
Г.Адамсон

Выигрыш

В этом этюде одна из белых пешек должна двинуться вперед, но какая?

1. h4! ♘d2 2. ♘d5 ♘c2 3. b4 ♘b3 4. ♘c5 ♘c3 5. b5 ♘b3 6. ♘c6 ♘c4 7. ♘:c7, и белый король отправляется в победный марш на королевский фланг.

А симметричное вступление представляет собой ложный след: **1. b4?** ♘d2 2. ♘d5 ♘c3 3. ♘c5 g5! 4. h3 ♘b3 5. b5 ♘c3 6. ♘c6 ♘b4 7. ♘:c7 ♘:b5 8. ♘d6 ♘b6 9. ♘e6 ♘c6 10. ♘f6 ♘d7 11. ♘:g5 ♘e8 12. ♘g6 ♘f8, и черные спасаются – с крайней пешкой выигрыша нет.



Э.Цешлер

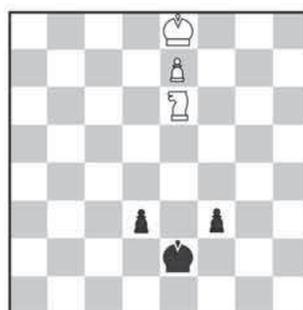
Выигрыш

А какой пешке первой стартовать в данной позиции? Ответ: никакой!

После **1. ♘e5!** белые сохраняют симметрию и ждут, когда черные первыми нарушат ее.

Упускает победу как **1. b5?** ♘d4+ 2. ♘:e7 ♘f4 3. b6 ♘c6+, так и **1. h5?** ♘f4+ 2. ♘:e7 ♘:h5! 3. b5 ♘f4 4. ♘d6 ♘d3 5. b6 ♘b4 и 6... ♘a6. Обе попытки (симметричные!) не удалась.

1... ♘f4 (1... ♘f3 2. h5!) 2. **b5** ♘f3 3. b6 ♘g4 4. h5! или 2... ♘g6+ 3. ♘e6 ♘e4 4. b6 ♘f4+ 5. ♘f7! с победой.



Т.Доусон

Выигрыш

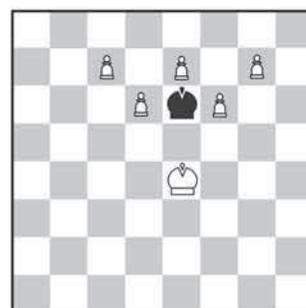
Здесь в распоряжении белых два логичных продолжения – **1. ♘d4+** и **1. ♘f4+**, забирая с темпом одну из проходных пешек. Линия «а», которая вносит в позицию асимметрию, как будто, не играет никакой роли. Кажется, что если выигрывает шах с d4, то достигает цели и шах с f4. Однако к победе ведет лишь первый из них.

1. ♘d4+! ♘e3 2. ♘:f3 ♘:f3 3. ♘f8! d2 4. e8 ♜d1 ♜ 5. ♜h5+, и все кончено. Если черные не ставят ферзя, то эндшпиль «ферзь против центральной пешки» легко выигран.

А вот **1. ♘f4?** дает только ничью – **1... ♘e3** 2. ♘:d3 ♘:d3 3. ♘d8 f2 4. e8 ♜ ♘d2! Разница в том, что эндшпиль «ферзь против слоновой пешки» уже ничейный (ситуация, когда белый король стоит близко к этой пешке, не в счет): **5. ♜b5** ♘e1 6. ♜b1+ ♘e2 7. ♜e4+ ♘f1 8. ♘e7 ♘g1 9. ♜g4+ ♘h1 10. ♜f3+ ♘g1 11. ♜g3+ ♘h1! 12. ♜:f2 пат.

Любопытно, что если линию «а» отрезать от доски, то выигрыша нет ни в одном случае, так как пешка «d» из ферзевой превращается в... слоновую.

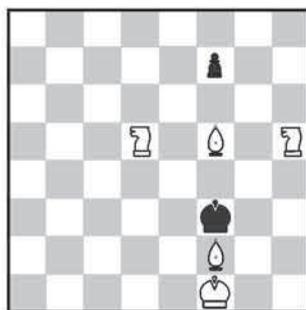
Следующая симметричная задача когда-то была пробным камнем для компьютера. Три белые пешки на пороге превращения, и ни одна из них не станет ферзем!



Ф.Хоффман

Мат в 3 хода

1. e8 ♘! ♘:d6 2. c8 ♜! ♘e6 3. ♜c6× или **1... ♘:f6** 2. g8 ♜! ♘e6 3. ♜g6×.



Д Бройер

Мат в 4 хода

Какова роль вертикалей «а», «b» и «с», нарушающих симметрию в этой позиции? Интересно, что именно на этих вертикалях разворачиваются главные события.

1. ♖a7! Справа аналогичное поле отсутствует. **1...f6** 2. ♘b6! Временно перекрывая слона. **2... ♘e3** 3. ♘c4++ ♘f3 4. ♘d2×. Так называемая индийская тема, выраженная в симметричной форме.

Е.Гук

Продукты с физикой



В ГОРАХ ТЕЛА ВЕСЯТ БОЛЬШЕ ИЛИ МЕНЬШЕ?

Взбираясь на вершину горы, мы удаляемся от центра Земли, а значит, сила ее притяжения становится меньше, откуда обычно делают вывод – вес тел в горах уменьшается. На самом деле, есть еще одна сила, определяющая вес тела, – сила Архимеда.

(Продолжение — на странице 56 внутри журнала)



Продукты с физикой