

Московский государственный технический
университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Один рабочий выполнил $5/7$ некоторого заказа, а затем его сменил другой рабочий; таким образом, весь заказ был выполнен за 20 ч. За сколько часов каждый рабочий может выполнить этот заказ, если, работая вместе, они выполнили бы его за 10 ч?

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \sin(3x + \pi).$$

Укажите его корни, лежащие в промежутке $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение

$$3^{1+\sqrt{x}} + 9 = 28 \cdot \sqrt{3^{\sqrt{x}}}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x}{x-1} + \log_2(x+2) \leq 3.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, одна сторона которого лежит на оси x , другая – на прямой $x = 4$, а одна из вершин – на графике функции $y = x^3$ ($0 < x < 4$)?

6. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 1, \\ \frac{x + |x|}{y - a} = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a .

7. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ с высотой 6 и стороной основания 11 проведена плоскость, проходящая через апофему TK боковой грани TAB и параллельная медиане BM боковой грани TBC . На каком расстоянии от этой плоскости находится медиана BM ?

Вариант 2

1. Один рабочий за час делает на 2 детали меньше, чем другой; соответственно, на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2,5 ч больше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33.$$

4. Решите неравенство

$$1 + \log_x(3 - 2x) < 0.$$

5. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB = 2$, $CD = 5$ и высотой, равной 4, разбивается на две части прямой, проходящей через вершину A и пересекающей основание CD . Какое наименьшее значение может иметь сумма квадратов площадей этих частей?

6. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \log_2\left(2 + \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x|}{x}\right), \\ (x+4)^2 + (y-a)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a .

7. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD , если расстояние от BD до секущей плоскости равно l , а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол 30° и с диагональю AC_1 – угол 60° .

Публикацию подготовил Л. Паршев

Российский государственный педагогический
университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа $n > 1$ определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{(x+2)(x-1)}{x-2n}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \begin{cases} (x-4)f_2^2(x), & \text{если } |x| \leq 1; \\ |x|, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

в) При каких a уравнение $g(x) - a = 0$ имеет ровно два решения?

2. Решите уравнение $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} = (0,81)^{-2x}$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 5 \cos x - \operatorname{ctg} x.$$

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle BAD = \angle CBD = 90^\circ$, $BD = a$, $CD = b$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых проходит через точки A, B, D , а другая – через точки B, C, D .

5. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной a и острым углом α . Площадь сечения, проходящего через противоположные стороны оснований параллелепипеда, равна S . Определите объем параллелепипеда.

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{2n + 2x - x^2}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_4^2(x), & \text{если } |x| \leq 2; \\ x, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$