

ности, описанной около этого треугольника, равен $5\sqrt{5}$. На сторонах треугольника ABC как на диаметрах построены три сферы, пересекающиеся в точке O . Точка O является центром четвертой сферы, причем вершина пирамиды S является точкой касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания ABC . Площадь части четвертой сферы, которая заключена внутри трехгранного угла, образованного лучами OA , OB и OC , равна 8π . Найдите объем пирамиды $SABC$.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\sin x \sin|x| \geq -\frac{1}{2}.$$

2. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора одного литра воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора тридцатью девятью литрами воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 литра воды равной 1 кг.

3. Решите неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \leq \log_{1-x}(1-2x).$$

4. На боковых ребрах AA_1 , BB_1 и CC_1 правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) расположены точки K , L и M соответственно. Известно, что угол между прямыми KL и AB равен $\frac{\pi}{4}$, а угол между прямыми KM и AC равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки K , L и M , и плоскостью основания ABC .

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0$$

и

$$x^2 + 86x + y + 202 \geq 0.$$

6. Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной окружности, а вершины B и D – на другой, причем центры окружностей лежат в плоско-

сти параллелограмма. Длины диагоналей параллелограмма равны 6 и 2 соответственно. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ до прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, равно 2. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2000», март)

1. Решите уравнение

$$\sin 5x + \sin 2x = \sin 7x.$$

2. Решите уравнение

$$3^{\sqrt{x-1}} - 10 \cdot 3^{-\sqrt{x-1}} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$2x^2 + \sqrt{2x^3} > x.$$

4. В $\triangle ABC$, в котором AD – медиана, $AD = m$, $AB = a$, $AC = b$. Найдите $\angle BAC$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\log x + \log_{\sqrt{5}} y = 3, \\ \log_5 (y - x - 2) + \log_{125} (y - x + 2)^3 = \log_3 12. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде высота равна 3, а объем равен $9\sqrt{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

7. При каких значениях b уравнение

$$25^x - (2b + 5)5^{x+\frac{1}{x}} + 10b \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

8. Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C , а хорду MN – в точке P ; $AB : BC = 2 : 3$. Найдите $AP : PC$.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$3 \cos 3x + \frac{2}{\cos x} = 3 \cos x.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{3x-2}{x-1} + 3 \log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1.$$

4. На стороне AC треугольника ABC взята точка A_1 , а на продолжении

стороны BC взята точка C_1 (C между B и C_1), длина отрезка A_1C равна 85% длины стороны AC , а длина отрезка BC_1 равна 120% длины стороны BC . Сколько процентов площади $\triangle ABC$ составляет площадь $\triangle A_1BC_1$?

5. Решите уравнение

$$3 \cdot \left| 3^{x-1} - 2 \right| + \left| 9^{\frac{x}{2}} - 3 \right| = 3.$$

6. В $\triangle ABC$ точка O – центр описанной окружности, $AB = a$, $AC = b$. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

7. При каких значениях a неравенство

$$(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a)\sqrt{1-x} \leq 0$$

имеет единственное решение?

8. Высота конуса равна 6, радиус основания равен 3. Точка A находится на расстоянии 3 от оси конуса и на расстоянии 4 от плоскости основания конуса. Прямая AB имеет с конусом единственную общую точку C и пересекает плоскость основания конуса в точке B . Расстояние от точки C до плоскости основания конуса равно 2. Найдите расстояние от точки B до вершины конуса.

Вариант 7

(химический факультет и факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$|x| = 2 - x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$$

3. Две бригады рабочих мостили два участка дороги (первая бригада – первый участок, вторая – второй), причем объем работ на втором участке был вдвое больше, чем на первом, а в первой бригаде было на 10 рабочих меньше, чем во второй. Производительность труда всех рабочих одинакова. Бригады одновременно начали работу, и когда первая бригада закончила работу, вторая еще работала. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде?

4. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью, равна 64π .

5. Треугольники DAB , DAC , DBC , представляющие собой боковые грани треугольной пирамиды, имеют одина-