

расстоянии друг от друга. Первая сфера заряжена зарядом  $q$ , вторая не заряжена. Сферы соединяют длинной тонкой проволокой. Какие заряды окажутся на сферах после этого? Какое количество теплоты выделится в процессе перезарядки? Зарядом на проволоке пренебречь.

После соединения система двух сфер вместе с проволокой будет представлять собой единый проводник. Значит, в результате перезарядки потенциалы сфер сравняются:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_2}{R_2},$$

где  $q'_1$  и  $q'_2$  — новые заряды сфер (рис.2). Полный заряд системы в ре-

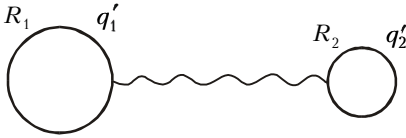


Рис. 2

зультате перезарядки не меняется, т.е.

$$q = q'_1 + q'_2.$$

Из этих уравнений можно вычислить заряды  $q'_1$  и  $q'_2$ :

$$q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q, \quad q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q.$$

Чтобы найти выделившееся количество теплоты, запишем закон сохранения энергии:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + Q,$$

подставим сюда выражения для начальной и конечной энергий:

$$W_{\text{нач}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1},$$

$$W_{\text{кон}} = \frac{q_1'^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2'^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

и получим искомую величину:

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2}{(R_1 + R_2) R_1}.$$

В этой задаче при вычислении потенциалов и энергий можно было рассматривать каждую сферу как изолированную. Другая ситуация возникает в случае вложенных друг в друга концентрических сфер.

**Задача 3.** Две тонкие концентрические проводящие сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) несут на себе заряды  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Вычислите потенциалы сфер и энергию системы. Какой заряд останется на внутрен-

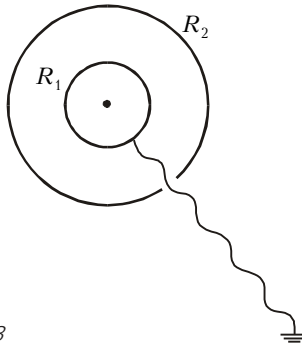


Рис. 3

ней сфере, если ее заземлить<sup>1</sup> (рис.3)? Как изменится при этом энергия системы?

Потенциал любой точки пространства можно найти по принципу суперпозиции — как сумму потенциала  $\varphi_1(r)$ , создаваемого зарядами первой сферы, и потенциала  $\varphi_2(r)$ , создаваемого второй сферой. Для каждой точки во внешней области ( $r \geq R_2$ ) оба слагаемых надо вычислять по формуле (1) — получится потенциал поля точечного заряда. Значит, потенциал внешней сферы ( $r = R_2$ ) равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_2}. \quad (4)$$

В пространстве между сферами ( $R_1 < r < R_2$ ) вклад внутренней сферы надо вычислять по формуле (1), а вклад внешней сферы — по формуле (2):

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}.$$

Положив в этой формуле  $r = R_2$ , мы опять получим потенциал внешней сферы, а положив  $r = R_1$ , получим ответ для потенциала внутренней сферы:

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}. \quad (5)$$

Такой же потенциал будет у всех точек при  $r < R_1$ .

Энергия этой системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} q_1 \varphi(R_1) + \frac{1}{2} q_2 \varphi(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1^2}{R_1} + \frac{2q_1 q_2}{R_2} + \frac{q_2^2}{R_2} \right).$$

Первый и третий члены представляют собой собственные энергии сфер, а второй член — энергию их взаимодействия.

После заземления внутренней сферы ее потенциал станет равным нулю. Применяя формулу (5), получим урав-

<sup>1</sup> Заземляющая проволока проходит через маленькое отверстие во внешней сфере без контакта с ней.

нение для нового заряда этой сферы:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

откуда найдем

$$q'_1 = -q_2 \frac{R_1}{R_2}.$$

С помощью формулы (4) найдем теперь новый потенциал внешней сферы:

$$\begin{aligned} \varphi'(R_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1 + q_2}{R_2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2(R_2 - R_1)}{R_2^2}. \end{aligned}$$

Поскольку потенциал внутренней сферы теперь равен нулю, энергия системы в конечном состоянии равна

$$W' = \frac{1}{2} q_2 \varphi'(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2 (R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Видно, что конечная энергия системы меньше начальной. Это и понятно. Уменьшение электростатической энергии системы равно тому количеству теплоты, которое выделилось при перезарядке.

**Задача 4.** Три концентрические проводящие сферы имеют радиусы  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Внутренняя и внешняя сферы не заряжены, заряд средней сферы равен  $q$ . В некоторый момент внутреннюю и внешнюю сферы соединяют проволокой (рис. 4). Какой заряд пройдет по

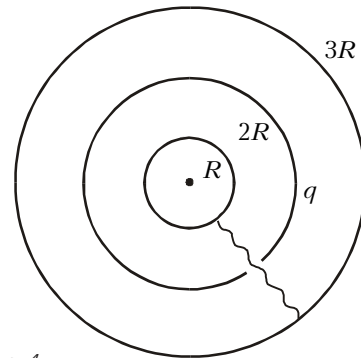


Рис. 4

этой проволоке, и какое при этом выделится количество теплоты?

Обозначим конечный заряд внешней сферы  $q'$ , тогда заряд внутренней сферы будет  $-q'$ . Применяя метод суперпозиции аналогично тому, как мы это делали в задаче 3, вычислим конечные потенциалы внутренней и внешней сфер и приравняем их друг другу. Потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi'(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q'}{R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R} \right)$$

(для вклада от всех трех сфер можно