

Ф1593. На горизонтальном столе стоит тонкостенный цилиндрический стакан. Диаметр стакана $D = 10$ см, высота его $H = 8$ см. В стакан помещают тонкую спицу, как показано на рисунке 1. При какой длине спицы она может оставаться неподвижной? Масса спицы $m = 60$ г, масса стакана $M = 65$ г. Трения нет.

Спица может начать двигаться одним из двух способов — либо она опрокинет стакан, не проскальзывая относительно него, либо выскользнет из стакана, оставляя его неподвижным. Ясно, что в зависимости от соотношения масс спицы и стакана может реализоваться либо

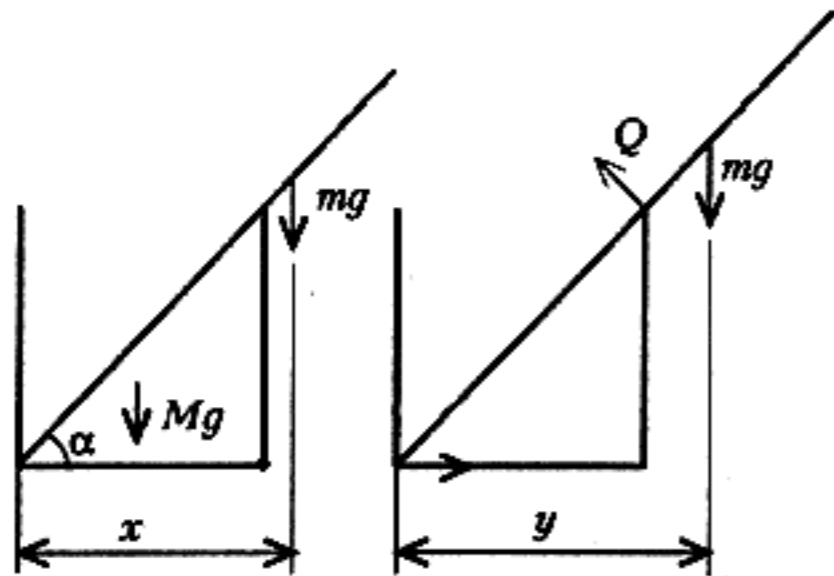


Рис.1

Рис.2

первый вариант, либо второй. Рассмотрим для начала первый. Итак, спица и стакан «склеены», стакан вот-вот начнет опрокидываться — он уже опирается на стол одной точкой (см. рис.1). Запишем равенство моментов сил тяжести относительно этой точки:

$$\frac{MgD}{2} = mg(x - D),$$

откуда

$$x = D(1 + 0,5M/m) = 15,4 \text{ см.}$$

Длина спицы при этом составляет

$$L = \frac{2x}{\cos \alpha} \approx 39,5 \text{ см.}$$

Для второго случая нужно рассмотреть равновесие спицы при вращении относительно верхней точки касания со стаканом (рис.2). Будем считать, что сила реакции Q в этой точке перпендикулярна спице, и запишем равенство моментов сил относительно нижнего конца спицы:

$$mgy = Q\sqrt{D^2 + H^2}.$$

По вертикали сила тяжести уравновешена проекцией силы реакции (сила, которая действует на нижний конец спицы, горизонтальна — спица уже не давит на дно стакана):

$$Q \cos \alpha = mg.$$

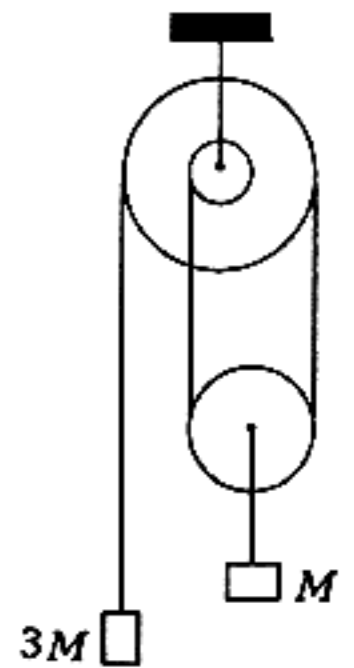
Отсюда найдем

$$y = \frac{D^2 + H^2}{D} \approx 16,4 \text{ см.}$$

Это больше, чем в первом случае; значит, при длине спицы $L = 39,5$ см стакан вместе со спицей начнет опрокидываться.

А. Коршков

Ф1594. На оси может вращаться блок, состоящий из двух склеенных дисков радиусов R и $2R$ (см. рисунок). Длинная нить закреплена одним концом на окружности малого диска и на этот диск намотано несколько витков, а другой конец нити образует петлю, удерживающую нижний блок, диаметр которого подобран так, что все свешивающиеся концы нити вертикальны. К подвижному блоку привязан груз массой M , к свободному концу длинной нити прикреплен груз массой $3M$. Найдите ускорения грузов. Блоки и нити невесомые, трение в осях отсутствует, движение считать происходящим в плоскости, перпендикулярной осям блоков.



В описанной ситуации необычно «выглядят» силы натяжения — нити не проскальзывают по поверхностям блока, там могут быть силы трения, в результате чего силы натяжения в разных частях длинной нити неодинаковы. Обозначим силу натяжения куска нити, привязанного к грузу $3M$, буквой Q , а натяжения свисающих кусков нити, удерживающих нижний блок, — буквой T (для нижнего блока все как обычно — моменты сил уравновешены при одинаковых натяжениях нити с двух сторон). Тогда сила натяжения нити, привязанной к грузу M , составит $2T$. Связь между этими силами мы найдем из анализа моментов сил, действующих на верхний блок. Он невесом, поэтому сумма всех моментов должна быть нулевой: $T \cdot 2R = TR + Q \cdot 2R$, откуда $Q = T/2$.

Теперь найдем связь между ускорениями грузов. Пусть верхний блок повернулся на некоторый угол α , тогда груз $3M$ опустится на $2R\alpha$, на «внутренний» блок намотается $R\alpha$, свисающий петлей конец нити укоротится на $R\alpha$, а нижний блок и привязанный к нему груз M поднимутся на $0,5R\alpha$. Отсюда видно, что если груз $3M$ движется с ускорением, равным a и направленным вниз, то ускорение груза M направлено вверх и составляет $a/4$.

Итак, запишем для каждого груза уравнение динамики:

$$2T - Mg = \frac{Ma}{4}, \quad 3Mg - \frac{T}{2} = 3Ma$$

и найдем искомое ускорение:

$$a = \frac{44}{49}g \approx 9 \text{ м/с}^2.$$

А. Блоков

Ф1595. В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем находится небольшое количество гелия. Атмосферное давление отсутствует, поршень «висит» над дном сосуда на высоте H . Поршень очень быстро поднимают на высоту $10H$ относительно дна сосуда и отпускают. На какой высоте над дном сосуда он установится после того, как его колебания затухнут? Сосуд теплонепроницаемый, теплоемкостью стенок и поршня можно пренебречь. Трение поршня о стенки пренебрежимо мало. Несколько лишних для этой за-