

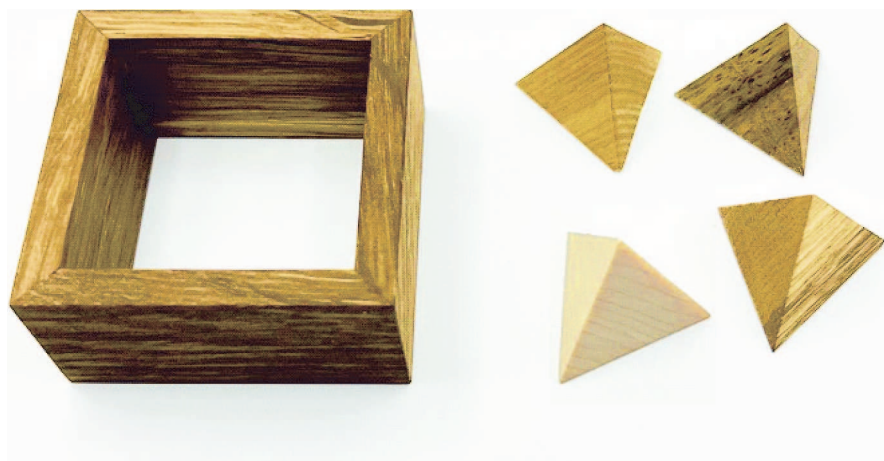
МАРТ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ТОРНАДО



Эта головоломка была предложена на международном форуме головоломщиков (International Puzzle Party), который проходил в Берлине в 2011 году. Один из ее авторов – математик А. Канель-Белов.

В головоломке всего пять элементов – четыре одинаковых тетраэдра и квадратная рамка. Их относительные размеры следующие: если ребро тетраэдра равно a , то сторона внутреннего квадрата рамки равна $1,5a$. Требуется разместить тетраэдры внутри рамки так, чтобы ни один из тетраэдров не имел возможности свободно перемещаться внутри рамки. Таким образом, нужно создать конструкцию из четырех тетраэдров, которая поддерживается квадратной рамкой.

Оказывается, это можно сделать двумя способами.

Желаем удачи!

Н. Авилов

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 О стадии роста организма и длительности плато. *А.Минеев*
- 11 Предел синуса. *К.Кохась, А.Подкорытов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 19 Задачи 25–28

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи M2834–M2837, F2841–F2844
- 21 Решения задач M2822–M2825, F2829–F2832

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 27 Задачи

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 28 Угол между радиусом и стороной. *Ю.Блинков, Д.Швецов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Вероятность в физике

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Сила света Солнца и лазерной указки. *С.Варламов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 39 Динамические аналогии и колебательные процессы. *Б.Мукушев*

ОЛИМПИАДЫ

- 44 XLVI Турнир городов. Задачи осеннего тура
- 46 Региональный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике
- 54 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (26)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Минеева*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

О стадии роста организма и длительности плато

А.МИНЕЕВ

К началу XXI века на стыке биологии, физики и представлений о фрактальном строении сосудистых систем фауны и флоры была развита теория, объяснившая множество биологических явлений с единой позиции. Кратко ее называют WBE-теорией по имени основоположников: G.V. West, J.H. Brown, B.J. Enquist [1]. Следующие из теории выводы называют законами «четвертых долей».

В данной статье речь пойдет о некоторых следствиях этой теории, относящихся к стадии роста представителей фауны от рождения до взрослого состояния и о длительности этой стадии. А также о том, как долго может продолжаться плато жизни организмов. Эта ситуация изображена в виде зависимости массы организма от времени $m(t)$ на рисунке 1. Незабываемые и неповторимые детство и юность, которые у каждого свои... Однако если отвлечься от деталей и просто проследить, как во времени масса организма растет до своего примерно постоянного (взрослого) значения, то авторы WBE-теории обнаружили некую общую закономерность, относящуюся ко множеству птиц, млекопитающих и рыб.

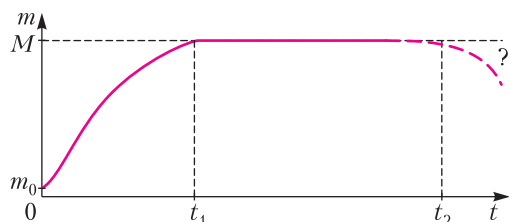


Рис. 1. Зависимость массы организма от времени. Здесь m_0 — масса при рождении; период роста: $0 < t < t_1$; плато: $t_1 \leq t \leq t_2$; $t > t_2$ — конец плато

Универсальная кривая роста организмов

Взгляните на кривую, изображенную на рисунке 2. В безразмерных координатах

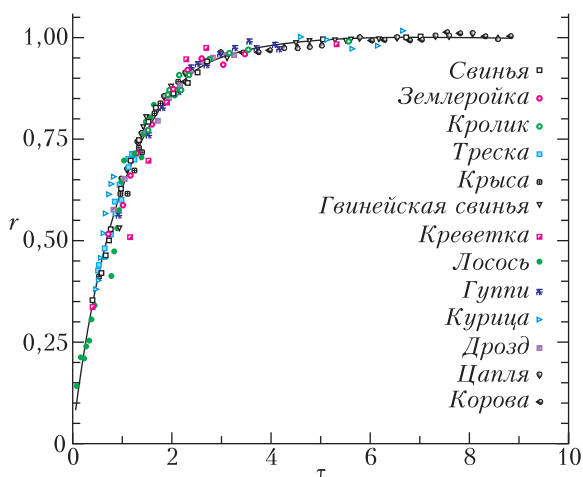


Рис. 2. Универсальная кривая роста представителей птиц, млекопитающих и рыб в безразмерных координатах

тах r, τ она может быть приведена к универсальному виду

$$r = 1 - e^{-\tau}, \quad (1)$$

где

$$r = \left(\frac{m(t)}{M} \right)^{1/4},$$

$$\tau = \frac{at}{4M^{1/4}} - \ln \left(1 - \left(\frac{m_0}{M} \right)^{1/4} \right). \quad (2)$$

Значения параметров a, m_0 и M для некоторых организмов показаны в таблице 1. Выход на плато зависимости массы от времени происходит, когда безразмерное время достигает значения $\tau \sim 3$. Как видно из таблицы, для млекопитающих

Таблица 1

	$a, \text{г}^{1/4}$ в сутки	m_0	M
Птицы			
Дрозд	1,9	1 г	22 г
Курица	0,47	43 г	2,1 кг
Цапля	1,56	3 г	2,7 кг
Млекопитающие			
Крыса	0,23	8 г	280 г
Кролик	0,36	0,12 кг	1,35 кг
Свинья	0,31	0,9 кг	320 кг
Корова	0,28	33,3 кг	442 кг
Рыбы			
Треска	0,017	0,1 г	25 кг
Лосось	0,026	0,01 г	2,4 кг

значение параметра a составляет примерно $0,3 \text{ г}^{1/4}$ в сутки, для птиц a больше, для рыб – существенно меньше. По-видимому, такое отличие связано с тем, что по сравнению с млекопитающими температура тела у птиц выше, а у рыб – гораздо ниже. Так, у певчего дрозда температура тела 45°C (!), у курицы $40\text{--}42^\circ\text{C}$. В то же время температура тела рыб лишь немного превышает температуру окружающей воды.

Зависимость параметра a от температуры отражает скорость обмена веществ в организме, при этом

$$a \sim \exp\left(-\frac{W}{kT}\right), \quad (3)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $W \sim 13$ ккал/моль $\approx 0,6$ эВ – энергия слабых связей (средняя энергия активации биохимических реакций в организме), T – температура в кельвинах. Подобная зависимость $a(T)$ приводит к тому, что у рыб скорость обмена веществ

существенно ниже, чем у млекопитающих, а у птиц – выше.

Из рисунка 2 следует, что время, за которое организм вырастает до взрослого состояния, примерно соответствует значению $\tau \sim 3$, что при использовании данных таблицы 1 позволяет оценить соответствующие значения времени роста разных животных.

На рисунке 3 приведены (для конкретных примеров животных) точки экспериментальных значений зависимости массы от времени и сплошная кривая, соответствующая соотношению (1); вертикальным пунктиром показано характерное «время взросления», соответствующее значению $\tau = 3$ из формулы (2).

Из вида универсальной кривой (1) получается, что все животные фактически растут одинаково, правда в безразмерных переменных r , τ . При переходе к размерным значениям массы m и времени t время накопления массы (до выхода на плато) оказывается разным: одни растут в течение месяцев, другим нужны годы. Так, для крысы это 170 суток, для курицы – 150 суток, для коровы и свиньи – около 800 суток.

Попробуем применить WBE-теорию к стадии роста человека. На этом пути нас ждут неожиданные сюрпризы, нетривиальные выводы, а также указание на одно из принципиальных отличий человека от животных.

Стадия роста: зависимость массы тела от времени у человека

Данные о зависимости $m(t)$ для детей от рождения до взрослого состояния приводят организации здравоохранения для того, чтобы давать советы родителям. Такие зависимости имеют вид средних значений

массы детей как функции времени, а также рекомендованные допустимые отклонения от средних значений (есть дети более худые или более полные и врачи дают советы по нормализации веса). Зависимость $m(t)$ для мальчиков приведена на

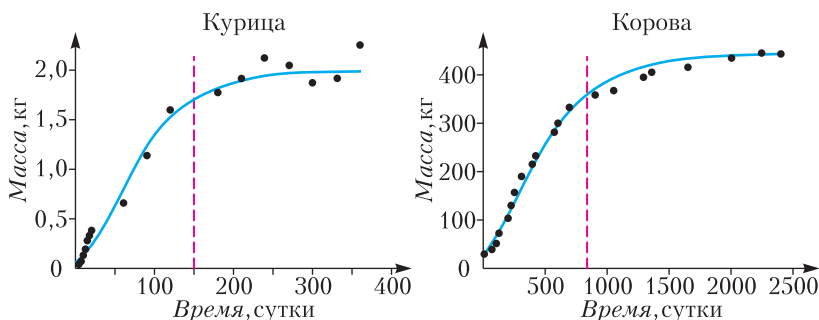


Рис. 3. Зависимость массы курицы и коровы от времени

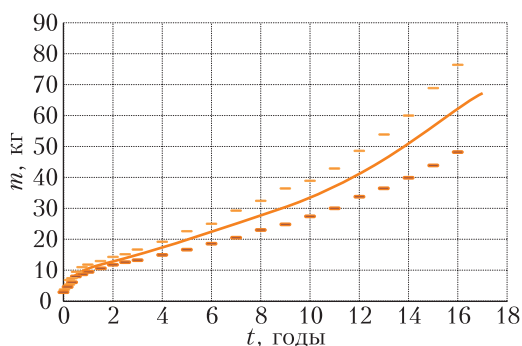


Рис. 4. Зависимость массы от времени у мальчиков. Сплошная кривая — среднее значение, верхние и нижние горизонтальные штрихи — допустимые отклонения от среднего значения

рисунок 4. Для девочек зависимость почти такая же, но у них, начиная с возраста 15 лет и старше, масса тела уже выходит на плато, в среднем близкое к 60 килограммам.

Прикинем, что дает универсальная кривая, заданная соотношениями (1) и (2). Поскольку люди — представители млекопитающих, используем значение параметра $a = 0,25$, примем, что вес новорожденного $m_0 = 3,5$ кг, а вес взрослого человека $M = 70$ кг. Для таких параметров WBE-теория дает время выхода массы на плато (при $\tau = 3$) значение $t_{\text{взр}} \approx 614$ суток, т.е. менее двух лет. Это на порядок меньше реального времени взросления около 20 лет. В чем дело?

Отметим, что и сам характер зависимости массы от времени для детей (см. рис. 4) существенно отличается от соответствующих зависимостей для животных (см. рис. 3). Так, на рисунке 3 кривые зависимости $m(t)$ большей частью *выпуклые* (с течением времени темп роста массы замедляется), а на рисунке 4 выпуклая часть относится только к первым двум годам жизни, после чего зависимость становится скорее *вогнутой* (прирост массы с ускорением). И только к 20–25 годам масса мальчиков выходит на плато (несколько раньше — у девочек). По характеру зависимости массы от времени получается, что человек больше похож не на теплокровных млекопитающих, а на холоднокровных — типа рептилий (змеи, крокодилы) или даже на рыб, которые растут медленно, но долго.

Что-то не сходится... В этой ситуации придется обратиться к исходным положениям WBE-теории.

Стадия роста: затраты энергии на развитие человеческого мозга

Согласно WBE-теории, на стадии роста организма поступающая с пищей энергия тратится на поддержание уже существующих клеток и на создание новых. Казалось бы, а как иначе? Однако, принципиальное отличие кривых роста массы животных от кривой для человека связано с энергетическими потребностями *человеческого мозга*. На стадии роста человека они очень большие, существенно больше, чем для других животных.

Оказалось, что отмеченное медленное развитие человека во многом является своеобразной платой за огромные затраты энергии, требующиеся для функционирования мозга. Ученым удалось проследить (от рождения до взрослого состояния) динамику изменения объема мозга, это позволяет найти эволюцию массы мозга $m_m(t)$ и, одновременно, потребление им глюкозы (иначе — затраты энергии на питание мозга). При этом выяснились неожиданные вещи. Несмотря на то, что отношение массы мозга к массе тела больше всего у младенцев, доля потребляемой мозгом энергии, отнесенная к полному энергопотреблению организма, оказалась максимальной в возрасте около 5 лет, когда на питание мозга тратится 2/3 всех энергозатрат организма. В результате для развития остального просто не хватает энергии. Иными словами, мозг детей «объедает» весь организм!

Более точно, измеренная учеными величина доли энергопотребления составляет 40% в возрасте нескольких месяцев, увеличивается до 60% в три года, имеет максимум в 66% в пять лет, спадает до 40% к десяти годам и далее уменьшается до 30% к пятнадцати годам. У взрослого человека на деятельность мозга расходуется уже только 20% всей энергии. При этом масса мозга у новорожденных составляет 10% от массы тела, а у взрослых — лишь 2–3%.

Почему доля энергии, потребляемая мозгом столь велика именно в детстве? Мозг растет: у новорожденного мозг по объему составляет всего 25–30% от мозга взрослого. Развиваются зрение и слух, вкусовые ощущения, вестибулярный аппарат. В мозгу быстро формируются представления об окружающем мире и о том, как вести себя в различных ситуациях, появляются навыки и привычки. Происходит развитие эмоций, воображения, интуиции, речи и памяти. Формируется характер и неповторимая личность, появляется целостная картина окружающего мира и т.д. Вот как писал Николай Носов (который «Незнайка...») о важности этого периода для детей: «... дайте побегать, попрыгать, покопаться в песочке, покувыркаться в зеленой травке, поваляться в снегу, сделать запруду в луже, да мало ли чего!».

Большая доля энергии, потребляемая мозгом в детстве, снижает энергоснабжение других органов и даже мешает их развитию. И действительно, в отличие от животных, желудочно-кишечный тракт детей способен усваивать в основном только термически обработанную пищу. Это замыкает цикл: мозг человека во многом формирует организм «под свои потребности» и существенно влияет на время взросления.

Связь между продолжительностью жизни и периодом взросления

Еще одной интересной особенностью статистических данных, накопленных в биологии, является отношение периода взросления t_1 к максимальной продолжительности жизни животных t_2 . В таблице 2 приведено значение отношения t_1/t_2 для птиц, млекопитающих и рыб. Из таблицы следует, что чем выше температура тела живот-

ного, тем ниже отношение t_1/t_2 – у птиц температура больше, чем у млекопитающих, и существенно больше, чем у рыб. Это означает, что птицы растут относительно быстро, а рыбы – медленно. Кроме того, чем короче длительность стадии роста, тем в целом меньше продолжительность жизни животного. Это хорошо подтверждается данными таблицы 3, приведенными для млекопитающих. Видно, что в среднем от-

Таблица 3

	Время роста t_1 , лет	Продолжительность жизни, t_2 , лет	Отношение t_1/t_2
Баран	2–3	10–15	~0,2
Верблюд	5–6	30–40	0,15–0,17
Козел	2–3	12–20	0,15–0,18
Корова	4–5	20–25	~0,2
Кошка	1,5	~10	~0,15
Кролик	1	7	~0,14
Лошадь	4–5	~30	0,13–0,17
Свинья	2–3	~15	0,14–0,2
Слон	8–12	60–70	0,13–0,17
Собака	2	10–15	0,14–0,2

ношение t_1/t_2 действительно близко к значению 0,17, указанному в таблице 2.

Попробуем применить значение отношения $t_1/t_2 = 0,17$ для людей с целью оценить их продолжительность жизни. Выберем в качестве реальной длительности стадии роста человека $t_1 = 20$ лет. Это приводит к разумной оценке продолжительности жизни: $t_2 = 20 \text{ лет} / 0,17 \approx 120 \text{ лет}$.

Действительно, есть документальное подтверждение, что старейший человек за всю историю планеты прожил около 120 лет. Им оказалась француженка Жанна Луиза Кальман, скончавшаяся в возрасте 122,5 года (1875–1997). Свою жизнь она провела в окрестностях небольшого городка Арль на юго-востоке Франции. К концу жизни все называли ее «Жанна Арлеанская, чье лицо прославилось на весь мир». Из того же городка и Винсент ван Гог, и его «Подсолнухи» там же были написаны. Жанна Кальман встречала его на улицах Арля. Последние 12 лет Кальман прожила в доме престарелых после того, как по неосторожности устроила пожар на кухне своей квартиры. В 115 лет она упала, сломала бедро и после

Таблица 2

	t_1/t_2
Птицы	0,11
Млекопитающие	0,17
Рыбы	0,28



Винсент ван Гог. «Подсолнухи». 1888, Арль

этого передвигалась в инвалидной коляске. Эти подробности приведены здесь только для того, чтобы дать понять, как непросто дожить до такого преклонного возраста.

Получается, что очень продолжительная стадия роста людей сыграла в пользу максимального их долгожительства. И этот максимум в настоящее время около 120 лет.

Закон четвертых долей: продолжительность жизни млекопитающих

Еще одним следствием WBE-теории является вывод о том, что продолжительность жизни животных t_2 растет с их массой, а скейлинг (показатель зависимости) также имеет вид «четвертой доли»: $t_2 \sim M^{1/4}$. На рисунке 5 приведены данные по средней продолжительности жизни млекопитающих с разной массой организма. Красная линия соответствует зависимости

$$t_2 \approx 10M^{0,25}, \quad (4)$$

где время измеряется количеством лет, а масса —

килограммами. Такая зависимость соблюдается в широком диапазоне изменения массы млекопитающих: от десятков граммов — до тонн. Опять с одним исключением: человек живет в несколько раз дольше, чем «положено» по соотношению (4).

Но всегда ли время жизни человека было так «приподнято» относительно других животных? Нет, указанное превышение среднего значения времени жизни человека по сравнению с другими млекопитающими наблюдается лишь в последние 100–200 лет. И связано оно во многом с успехами медицины и более комфортным образом жизни.

На рисунке 6 приведена средняя продолжительность жизни людей в прошлом. Видно, что тогда в среднем люди жили около 30 лет. На статистику данных сильно влияли эпидемии, болезни, детская смертность... Хотя и тогда были отдельные личности (из тех, кого сохранила история, вроде Платона и Пифагора), которые в те далекие времена дожили до 80 лет!

Одним из печальных факторов, влияющих тогда на среднюю продолжительность жизни, была высокая детская смертность. Известные примеры: у композитора Вольфганга Амадея Моцарта родилось шестеро детей, выжили двое. У его отца было семеро детей и тоже только двое выживших. У Льва Николаевича Толстого было тринадцать детей, из них пятеро умерли в раннем возрасте.

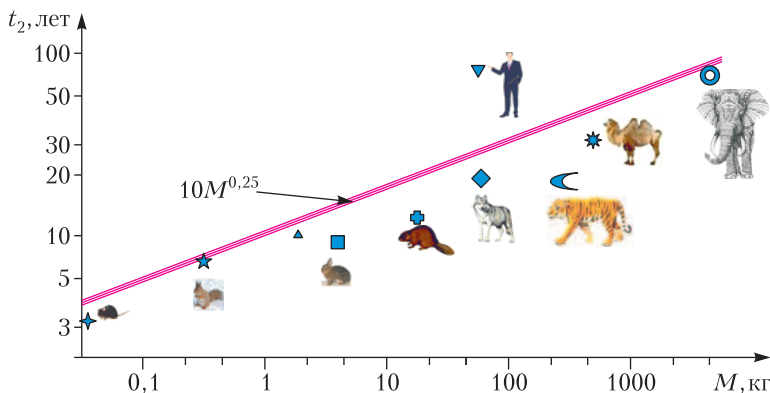


Рис. 5. Зависимость продолжительности жизни млекопитающих от массы

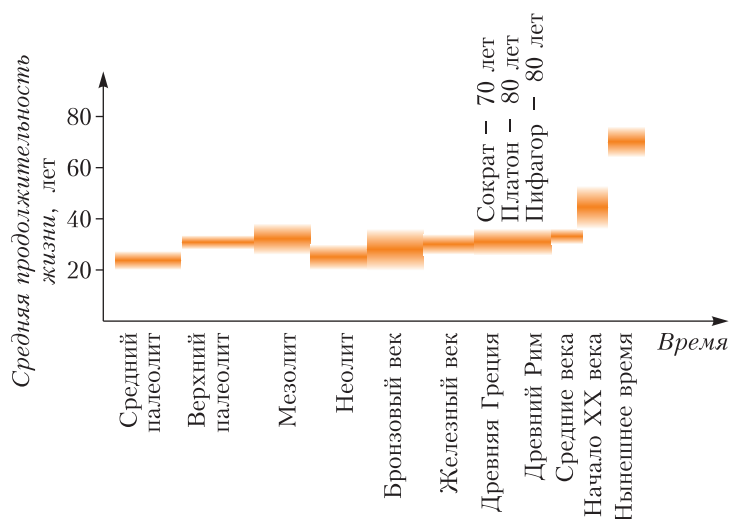


Рис. 6. Средняя продолжительность жизни людей в прошлом

С проблемой детской смертности удалось достичь значительного прогресса только к началу XX века. На рисунке 7 приведена вероятность дожить до определенного возраста в различные годы. Из рисунка следует:

- детская смертность сильно уменьшилась в начале XX века;
- средняя продолжительность жизни в XX веке растет;
- наблюдается тенденция более резкого обрыва кривой в преклонном возрасте, что отражает усугубление проблем со здоровьем у пожилых людей того времени.

Из данных рисунка можно оценить среднее время жизни людей в разные годы (вычислив площадь под кривыми). Его динамика выглядит следующим образом:

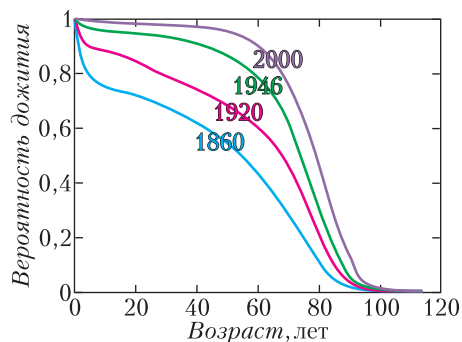


Рис. 7. Вероятность дожить до определенного возраста в разные годы

1860 год – 45 лет, 1920 год – 50 лет, 1946 год – 67 лет, 2000 год – 75 лет.

Роль относительной массы мозга

Есть еще одна причина долгой жизни людей по сравнению с другими млекопитающими. Она опять связана с относительно большим объемом мозга у людей, точнее, с большой величиной $\mu = M_m/M$ – отношением массы мозга M_m к массе тела M .

Отметим, что на рисунке 5 приведена зависимость продолжительности жизни млекопитающих *только* от массы тела. В ходе

обработки данных биологами было предложено более сложное эмпирическое соотношение для продолжительности жизни млекопитающих t_2 , которое учитывает массу мозга и удельную скорость обмена веществ p :

$$t_2 \sim M_m^{0,54} \cdot M^{-0,34} \cdot p^{-0,42}.$$

Преобразуем это соотношение к более удобному виду, воспользовавшись связью скорости обмена веществ, или, иначе, мощности метаболизма P , с массой млекопитающего M :

$$P \approx 3 \cdot M^{0,75}$$

(здесь мощность измеряется в ваттах, а масса – в килограммах). Отметим, что мощность метаболизма P связана с удельной скоростью обмена веществ p соотношением $P = pM$. В результате получаем

$$t_2 \sim C \cdot \left(\frac{M_m}{M} \right)^{0,54} \cdot M^{0,3}, \quad (5)$$

где C – постоянная, приблизительно равная 200, если время измерять в годах, а массу – в килограммах.

Соотношение (5) по показателю степени зависимости от массы тела близко к соотношению (4). Но, кроме этого, время t_2 примерно пропорционально корню из относительной массы мозга $\mu = M_m/M$. В диапазоне масс животных от 1 до 50 кг (кошки, собаки и даже шимпанзе) $\mu \leq 1\%$, для

человека относительная масса существенно больше: $\mu \sim 2\%$ ($M \sim 70$ кг, $M_m \sim 1,5$ кг). А вот для крупных животных (свинья, лошадь, слон) $\mu \sim 0,1 - 0,15\%$ (всего!). В результате, несмотря на большую массу крупных животных, продолжительность жизни

даже у слона в среднем меньше человеческой. И это несмотря на то, что масса мозга слона гораздо больше (у слона $M_m \sim 5$ кг, у человека $M_m \sim 1,5$ кг), поскольку слоновий мозг «вынужден обслуживать» огромное тело массой в несколько тонн.

Многое о работе мозга и биологических потребностях человека можно узнать из книги [2].

Старение

Не пытайтесь жить вечно, у вас ничего не выйдет.

Б. Шоу

Медицина уже давно пытается найти основную причину старения, чтобы подобрать способ борьбы с ним. Предложено огромное количество теорий, каждая из которых выделяет главным какой-то один механизм. Если бы он был найден, можно было бы попытаться замедлить процесс старения. В ходе проверки теорий было много частичных успехов, в основном на животных. Однако, появляется все больше аргументов, что проблема эта комплексная, причин старения очень много, а предложенные теории старения отражают только отдельные стороны этого процесса.

С другой стороны, идет поиск и совершенствование различных технологий продления жизни, вкладываются

огромные ресурсы. Постоянно сообщается об удачах того или иного подхода к продлению жизни. Некоторое представление о возрастной динамике человечества, того, как со временем увеличивается количество пожилых людей, дает рисунок 8.

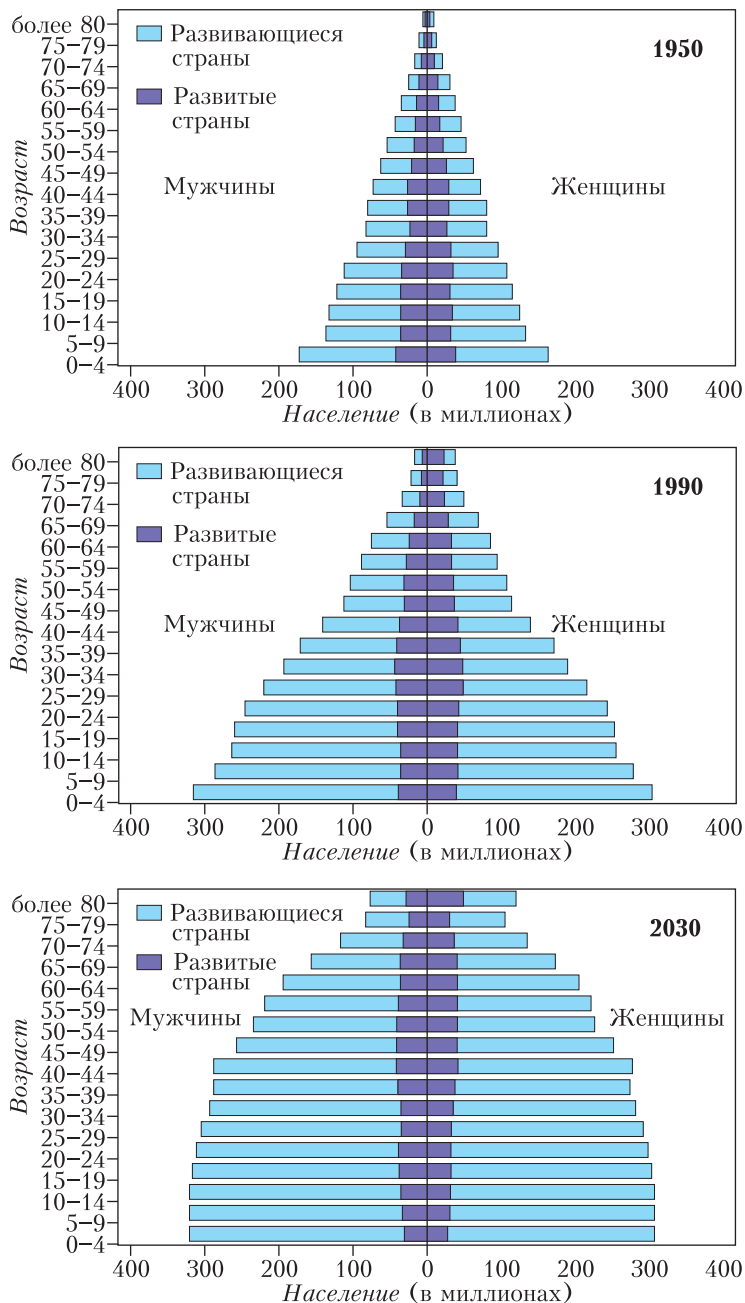


Рис. 8. Демографические данные ООН: статистика для 1950 и 1990 годов и прогноз на 2030 год

Из рисунка видно, как с течением времени «утолщается» возрастная пирамида, отражая постепенный рост средней продолжительности жизни. Можно заметить также, что мальчиков рождается несколько больше, чем девочек (основание пирамиды), но среди долгожителей уже преобладают женщины (вершина пирамиды).

У всех теорий старения есть нечто общее: с возрастом организм постепенно теряет все большую часть своих функций. Уменьшаются резервы организма, способность адаптироваться в окружающей среде, а сама адаптация происходит за все больший интервал времени. Нарастают различные ограничения. Происходят необратимые изменения на всех уровнях: клеточном (гены), в тканях, в органах и в целом организме. В итоге даже при отсутствии болезней этот процесс потери функций и определяет границу жизни человека.

Коснемся лишь самого верхнего «этажа» механизмов старения людей, связанных с нарушениями процессов регуляции в организме, еще не обремененного болезнями.

Потеря управляемости

Где начало того конца, которым оканчивается начало?

Козьма Прутков

Здесь мы рассмотрим вопрос постепенной потери управляемости *внутри человеческого организма*. Ключевые слова этого процесса: гомеостаз и его поддержание, резервы и запас прочности организма.

Живой организм – открытая система, которая взаимодействует с окружающей средой. Несмотря на изменение *внешних* условий, внутри организма должно поддерживаться постоянство большого количества параметров *внутренней* среды (гомеостаз): температуры тела, давления крови, состава и кислотности крови, частоты сердечных сокращений, частоты дыхания, концентрации глюкозы в крови... Регулирование системы гомеостаза должно происходить не только при действии внешних возмущений, но и при различных

изменениях и «встрясках» внутри самого организма, скажем, при нагрузках, стрессах, инфекциях и т.д.

Что понимается под резервами организма? По смыслу само слово *резерв* (или запас прочности) это превышение какого-то показателя над базовым. Может быть, это подпитка энергией выше некоторого минимума, необходимого для поддержания гомеостаза? Отчасти да, но поступающая энергия должна усваиваться, запасаться и быть готовой к использованию... Скорее, это интегральный показатель, который характеризует возможности организма адаптироваться к меняющимся условиям, как внешним (стресс, физические нагрузки), так и внутренним (инфекции, повреждения...), быстро нивелируя их. Приведем еще один, часто используемый термин, по сути близкий и к понятию резерва, и к запасу прочности: *биологический возраст*. Когда биологический возраст меньше реального, это является своеобразным запасом по долгожительству.

Многократный запас прочности 20-летних с возрастом уменьшается, и когда-то наступает время, когда он сходит на нет. Ресурсов организма уже не хватает на обеспечение основных жизненных процессов. Человек уже не может позволить себе ни бег, ни сильные волнения, а болезни, хотя бы просто простуда, переносятся тяжело. Кроме того, со временем снижается чувствительность к изменениям показателей гомеостаза и, как следствие, повышается порог реагирования на эти изменения. В результате организм откликается с запаздыванием и сильнее, чем в молодости, он становится все более беззащитным перед испытаниями, нагрузками, болезнями и стрессами.

На что надежда?

Однако, пора сменить пластинку и коснуться того, что может помочь увеличению как продолжительности, так и качества жизни. На этом пути важны и бессознательные усилия организма, и сознательная работа самого человека, и помощь медицины.

Почему первое направление названо *бес-сознательными* усилиями? Получая извне энергию на поддержание жизнедеятельности, организм *сам* старается замедлить старение. Иногда – адаптируясь к проблемам, связанным со старением, иногда – восстанавливая нарушенные функции, буквально «цепляясь» за жизнь.

Уменьшение запаса прочности организма по мере увеличения возраста связано с причинами, возникающими на всех уровнях от клеток до организма: повреждение ДНК, гибель клеток, разрушительное влияние свободных радикалов и токсических веществ, неточности регулирования функций, болезни, стрессы. Фактически с каждой из указанных причин организм пытается бороться: ремонтируя ДНК, выводя из организма разрушенные части клеток с потоком лимфы, регулируя активность ферментов и обменных процессов. По мере гибели части клеток оставшиеся переходят в более интенсивный режим работы, увеличиваются в размере и даже меняют строение (образуя до нескольких ядер в клетке). Похожие процессы происходят и с органами (печень, почки, легкие). В молодом организме в этих органах есть как работающие клетки, так и резервные. Последние задействуются при интенсивных нагрузках. По мере старения становится все меньше резервных и все больше работающих клеток. Запас уменьшается, и оставшиеся все чаще работают на пределе возможностей.

И тут пора уже приложить *сознательные* усилия самого человека и помочь организму, который старается работать по-прежнему в условиях снижения резервов с возрастом. Использовать приобретенные навыки и накопленный опыт, которые позволяют выполнять работу меньшими усилиями. И вообще вести активный образ жизни, необычайно важный для замедления темпов старения.

Затронем тему подобного влияния активного образа жизни на примере изменения деятельности человеческого мозга с возрастом. Казалось бы, нервные клетки не восстанавливаются, мозг постепенно «усыхает», уменьшается в объеме, работа-

ет все хуже, слабеют память, внимание... Но современные исследования показали, что новые клетки мозга регулярно появляются, образуются новые взаимосвязи между нейронами. Объем мозга после 80 лет уменьшается на 5–10% (если не предпринимать усилий), но активный образ жизни позволяет восстановить этот объем. При решении сложных задач мозг пожилых людей использует оба полушария, а не одно, как у молодых. Тренировка работы мозга позволяет улучшать и память, и внимание, и замедлять процессы старения.

Важна тренировка всех органов. Не чрезмерная, но достаточная для того, чтобы наступало постепенное утомление с последующим восстановлением. К этой позиции близки и взгляды Ганса Селье, основоположника учения о стрессе. Согласно ему, умеренные, не очень длительные стрессы (те, при которых расходование резервов организма сбалансировано и еще нет истощения) приводят к стимуляции и тренировке защитных сил организма, улучшают его физическое и психическое здоровье и способствуют долголетию. В этом случае организму также удастся адаптироваться к меняющимся условиям.

У большинства долгожителей довольно простые правила жизни: физическая активность, свежий воздух, сон, увлечения, любимое дело или хобби, позитивный настрой, общение, умеренность во всем, особенно в питании.

Однако, можно ли вообще продлить жизнь за нынешний предел в 120 лет и сделать это не редким исключением, а правилом? Или лучше прожить в итоге не так долго, но активно, оставив после себя добрую память и, может быть, последователей и потомков?

Литература

1. G.B. West, J.H. Brown, B.J. Enquist. A general model for ontogenetic growth. – Nature, 2001, v.413.
2. В.А. Дубинин. Мозг и его потребности. От питания до признания. – Эксмо, 2024.

Предел синуса

К. КОХАСЬ, А. ПОДКОРЫТОВ

МЫ РАССЧИТЫВАЕМ НА ЗНАкомство читателя с числом π и с понятием предела последовательности. Нас интересует вопрос: существует ли при каком-нибудь $x > 0$ предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x^n)$? Уверены, что читатели сразу скажут, чему равен этот предел, если $x \in (0; 1]$. Мы же обсудим здесь случай $x > 1$.

Начнем с хорошо известного и несложного сюжета.

Вопрос 1. Имеет ли последовательность $\{\sin n\}$ предел при $n \rightarrow +\infty$?

Ответ незатейлив – не имеет. Но доказательство уже этого факта не совсем очевидно. Давайте разбираться.

Теорема 1. Последовательность $\{\sin n\}$ не имеет предела.

Доказательство. Будем опираться только на определение синуса и определение предела. Построим на координатной плоскости окружность единичного радиуса с центром в начале координат и отметим на ней точку S с координатами $(1; 0)$. Пусть φ – произвольный положительный угол (для нас главные случаи: $\varphi = 1, 2, 3, \dots$). Отложим вдоль окружности против часо-

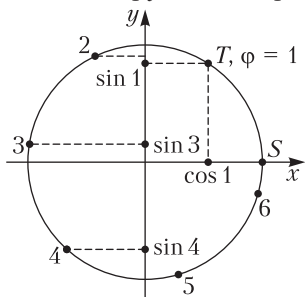


Рис. 1. Определение синуса и косинуса
вой стрелки дугу ST длины φ (рис. 1), так что координаты точки T – это $(\sin \varphi, \cos \varphi)$.

Точки окружности естественно задавать той же координатой φ , $\varphi \in [0; 2\pi]$. Разобьем нашу окружность на три части (рис. 2): Арктика $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, Антарктика $\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$ и Тропики (эта часть окруж-



Рис. 2. География окружности

ности, состоит из двух дуг). Заметим, что длины приполярных дуг – Арктики и Антарктики – равны $\frac{\pi}{2}$. Для наших целей важно лишь, что они больше 1.

Будем строить на окружности дуги длины 1, 2, 3, ..., откладывая их от точки S , а концы этих дуг будем обозначать теми же натуральными числами (см. рис. 1). Увеличивая n , мы переходим от точки n к точке $n + 1$, сдвигаясь вдоль окружности на 1 против часовой стрелки. Выполняя такие шаги, мы будем совершать все новые и новые обороты вокруг центра окружности, и на каждом обороте хотя бы одна целочисленная точка попадет на дугу Арктика и хотя бы одна – на дугу Антарктика. Для таких точек значение $\sin n$ либо больше $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$, либо меньше $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Теперь нетрудно убедиться, что последовательность с такими свойствами не может иметь предела. Действительно, допустим

противное – что она стремится к некоторому числу l , т.е. $\sin n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Пусть для

определенности $l \geq 0$. Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N , начиная с которого, т.е. при $n > N$, выполняется неравенство $|\sin n - l| < \varepsilon$.

Например, для $\varepsilon = \frac{1}{10}$ это значит, что

$|\sin n - l| < \frac{1}{10}$ при $n > N$. Поскольку l

неотрицательно, из этого неравенства следует, что $\sin n > -\frac{1}{10}$ для таких n . В частности,

это приводит к тому, что в Антарктике окажется лишь конечное число точек n , а это, конечно, неверно. Итак, последовательность $\{\sin n\}$ не имеет предела. Теорема доказана.

Введем полезное определение. Зафиксируем точку l . Для каждого $\delta > 0$ назовем *окрестностью* точки l (или, подробнее, *δ -окрестностью*) множество всех точек, находящихся от l на расстоянии меньше δ . На вещественной прямой окрестность – это промежуток вида $(l - \delta; l + \delta)$, эту окрестность можно также описать неравенством – число x принадлежит δ -окрестности точки l в том и только том случае, когда выполняется неравенство $|x - l| < \delta$. Например, в конце приведенного доказательства мы размышляли о том, что произойдет, если число $\sin n$ попадет в $\frac{1}{10}$ -окрестность точки l .

Окрестности можно рассматривать и на окружности, там окрестность точки l – это дуга с центром l (расстояния измеряются вдоль окружности).

Посмотрим внимательнее на наши шаги вдоль окружности (см. рис. 1). Откладывая на окружности точки 1, 2, 3, ..., мы совершаем вдоль окружности шаги длины 1 (против часовой стрелки). Поскольку $2\pi \approx 6,28$, точка 6 находится совсем близко к исходной точке S (рис. 3), т.е. за 6 шагов мы совершим почти полный оборот вокруг центра окружности. В результате точка 6 получается поворотом точки S приблизительно на угол $-0,28$ радиана (т.е. на $0,28$ по часовой стрелке). Анало-

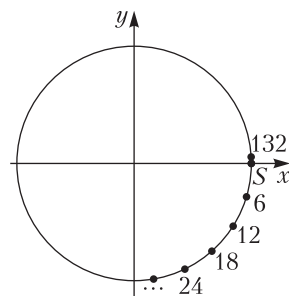


Рис. 3. Идем потихонечку

гично, точка 12 получается поворотом точки 6 еще на $-0,28$. Следовательно, верно следующее наблюдение.

Наблюдение. Откладывая на окружности точки 6, 12, 18, ..., мы совершаем вдоль окружности шаги длины $2\pi - 6 \approx 0,28$.

Читатель легко проверит, что за 22 таких шага мы опять совершим почти полный оборот вокруг центра, поскольку $22(2\pi - 6) \approx 6,23$ – чуть меньше чем 2π . В результате мы окажемся в точке 132, а расстояние от нее до точки S вдоль окружности равно $132 - 21 \cdot 2\pi \approx 0,0531$. Это значит, что откладывая на окружности точки 132, $2 \cdot 132$, $3 \cdot 132$, ..., мы совершаем вдоль окружности шаги длины приблизительно 0,0531. И так далее. Подобрав достаточно точное приближение $\frac{p}{q} \approx 2\pi$ с целыми p и

q , мы сможем перемещаться по окружности со сколь угодно маленьким шагом.¹ В результате мы посетим любую сколь угодно малую дугу окружности.

Возьмем это свойство на заметку. Последовательность $\{x_n\}$ на отрезке или на окружности будем называть *всюду плотной*, если каждый промежуток (дуга) содержит точку последовательности (ясно, что тогда он содержит бесконечно много точек). Вместо «всюду плотна» часто говорят короче – «плотна», но со словом «всюду» это свойство звучит убедительнее.

Договоримся об обозначениях. Откладывая по окружности дугу большой длины N , мы отслеживаем, сколько полных оборотов

¹ Здесь использована иррациональность числа π (см. теорему 8).

содержит эта дуга, после чего нас интересует, какую часть последнего, еще не полного, оборота совершил конец этой дуги. Эти действия абсолютно аналогичны операции деления с остатком, только делим мы на нецелое число (да еще на какое нецелое — на 2π). При выполнении этих действий будем использовать теоретико-числовые обозначения, например, $(6 \bmod 2\pi) \approx -0,28$, $(132 \bmod 2\pi) \approx 0,0531$ и т.п.

Итак, последовательность точек $\{n\}$ всюду плотна на единичной окружности, последовательность $\{n \bmod 2\pi\}$ всюду плотна на отрезке $[0; 2\pi]$, а последовательность $\{\sin n\}$ всюду плотна на отрезке $[-1; 1]$.

Предлагаем читателю проверить себя и объяснить, почему последовательности $\{\sin \sqrt{n}\}$, $\left\{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)\right\}$, $\{\sin \ln n\}$ не имеют пределов.

Теперь займемся более хитрой задачей и сильно разрежим последовательность всех номеров.

Вопрос 2. Имеет ли предел последовательность $\{\sin(n^2)\}$?

Ответ опять отрицательный. Сначала мы убедимся в этом «вручную», следуя той же идее, что и в доказательстве теоремы 1. Позже (см. теорему 4 и следствие из нее) получение результатов такого рода будет автоматизировано.

Теорема 2. Последовательность $\{\sin(n^2)\}$ не имеет предела.

Доказательство. Будем следить за положением точек n^2 на окружности или, если угодно, за точками $x_n = n^2 \bmod 2\pi$. Поскольку

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1, \\ (n+2)^2 &= (n+1)^2 + 2n + 3,\end{aligned}$$

точка x_{n+1} получается поворотом точки x_n на угол $\varphi = (2n+1) \bmod 2\pi$, а точка x_{n+2} — поворотом точки x_{n+1} на угол $\varphi + 2 = (2n+3) \bmod 2\pi$. Пользуясь Наблюдением, мы всегда можем подобрать сколь угодно большой номер n , для которого число $2n+1$ находится на дуге² $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$

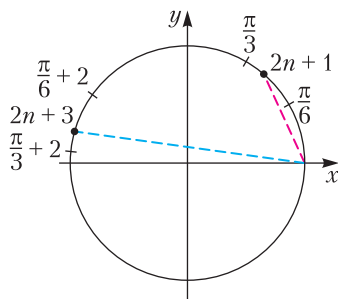


Рис. 4. Подбираем n . Красная хорда стягивает дугу величины $\varphi = (2n+1) \bmod 2\pi$, синяя — дугу величины $\varphi + 2 = (2n+3) \bmod 2\pi$

нашей окружности (рис. 4). Тогда точка x_{n+1} получается поворотом точки x_n на угол

$\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, а x_{n+2} получается поворотом x_{n+1}

на угол $\varphi + 2 \in \left[\frac{\pi}{6} + 2; \frac{\pi}{3} + 2\right] \approx \left[\frac{5}{2}; 3\right]$. Если

теперь идти по окружности против часовой стрелки от точки x_{n+2} в сторону точки x_n , то

придется пройти дугу длиной не меньше $2\pi - \varphi - (\varphi + 2) > 2\pi - \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} + 2\right) > 2$ (на рисунке 5 эта дуга отмечена зеленым цветом).

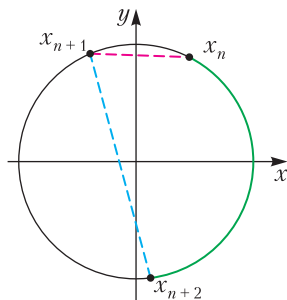


Рис. 5. Треугольник $x_n x_{n+1} x_{n+2}$ всегда достаточно широкий, поскольку его стороны стягивают дуги длины не меньше $\pi/6$

Рассуждая от противного, предположим, что предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^2)$ существует и равен l . Воспользуемся определением предела: для $\varepsilon = \frac{1}{10}$ существует номер N ,

² Маленькая загадка для читателя. Мы научились находить на указанной дуге точку, соответствующую числу, делящемуся на 6. А как же отыскать точку, соответствующую нечетному числу?

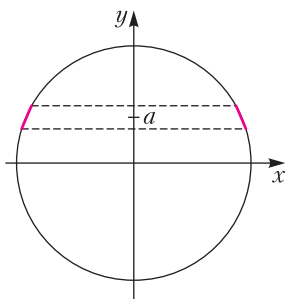


Рис. 6. Синус попадает в окрестность точки a . Горизонтальные пунктирные линии проведены на высоте $a \pm 1/10$

начиная с которого, т.е. при $n > N$, выполняется неравенство $|\sin(n^2) - l| < \frac{1}{10}$. Проще говоря, при всех больших n числа $x_n = n^2$, $x_{n+1} = (n+1)^2$ и $x_{n+2} = (n+2)^2$ должны находиться где-то на выделенных дужках (рис. 6). Но для тех значений n , которые мы обсуждали в связи с рисунком 5, это невозможно, поскольку треугольник $x_n x_{n+1} x_{n+2}$ не может быть настолько узким. Противоречие. Теорема доказана.

Нередка ситуация, когда последовательность не имеет предела, но ведет себя достаточно просто. Так будет, в частности, если она «склеена» из нескольких последовательностей, имеющих разные пределы. Например, $x_n = (-1)^n$. Для этой последовательности $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = 1$, если мы рассматриваем только четные n , и $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = -1$, если рассматриваем только нечетные n . В общем случае примем такое определение.

Определение. Пусть дана последовательность $\{x_n\}$. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ и рассмотрим члены последовательности с выбранными номерами:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$$

Мы получим *подпоследовательность* последовательности x_n . Ее можно рассматривать как самостоятельную последовательность, у которой первый член равен x_{n_1} , второй равен x_{n_2} и т.д. Эту новую последо-

вательность так и обозначают: $\{x_{n_k}\}$. Если у нее существует предел, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = l$, то число l называют *частичным пределом* последовательности x_n .

Нетрудно видеть, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечное множество частичных пределов $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$, то она обладает свойством, похожим на определение предела. А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что при каждом $n > N$ выполняется хотя бы одно из неравенств

$$|x_n - l_1| < \varepsilon, \dots, |x_n - l_m| < \varepsilon$$

(при малом ε выполняется лишь одно из них).

Всюкую такую последовательность можно разбить на m подпоследовательностей, каждая из которых стремится к своему пределу. Иными словами, члены такой последовательности можно записать в виде

$$x_n = \varphi_n + \varepsilon_n, \text{ где } \varphi_n \in L, \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Существование предела последовательности – весьма сильное свойство. Произвольная вещественная последовательность, даже ограниченная, совершенно «не обязана» иметь предел. Тем более замечательно, что по теореме Больцано–Вейерштрасса, доказываемой в стандартном курсе математического анализа, *всякая ограниченная вещественная последовательность имеет хотя бы один частичный предел*. С другой стороны, множество частичных пределов вполне может оказаться бесконечным. Например, читатель может доказать следующую теорему.

Теорема 3. Если A и B – вещественные числа и отношение $\frac{A}{\pi}$ иррационально, то последовательность $\{\sin(An + B)\}$ всюду плотна на отрезке $[-1; 1]$.

В частности, любое число из отрезка $[-1; 1]$ является частичным пределом последовательности $\{\sin n\}$.

Заметим, кстати, что при изучении частичных пределов последовательности вида $\{\sin x_n\}$ присутствие синуса в формуле не очень-то и существенно, все дело – в свойствах последовательности $\{x_n \bmod 2\pi\}$.

Каждому частичному пределу l последовательности $\{\sin x_n\}$ соответствуют один или два частичных предела последовательности $\{x_n \bmod 2\pi\}$: это $\arcsin l$ и $\pi - \arcsin l$ (частичными пределами смогут оказаться оба эти числа или лишь одно). Поэтому если мы разберемся с поведением последовательности $\{x_n \bmod 2\pi\}$, то перейти к синусу мы уж как-нибудь сумеем.

Приведем еще один пример использования частичных пределов.

Теорема 4. Пусть $p(x) = \alpha x^k + \beta x^{k-1} + \dots$ — многочлен, у которого старший коэффициент α несоизмерим с числом π (отношение $\frac{\alpha}{\pi}$ иррационально). Тогда последовательность $\{p(n) \bmod 2\pi\}$ имеет бесконечно много частичных пределов.

Доказательство. Допустим противное — последовательность $\{p(n) \bmod 2\pi\}$ имеет лишь конечное число частичных пределов, обозначим его m , $m \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{\tilde{p}(n) \bmod 2\pi\}$, где $\tilde{p}(x) = p(x) - p(x-1)$, имеет не более m^2 частичных пределов (нам важно лишь, что их число конечно). При этом многочлен $\tilde{p}(x)$ имеет степень на 1 меньше, чем $p(x)$, и его старший коэффициент по-прежнему несоизмерим с π . Повторив это рассуждение несколько раз, мы придем к последовательности $\{An + B \bmod 2\pi\}$, имеющей лишь конечное число частичных пределов, хотя дробь $\frac{A}{\pi}$ иррациональна. Но, как мы знаем из теоремы 3, это невозможно. Теорема доказана.

Следствие. Для любого непостоянного многочлена $p(n)$ с целыми коэффициентами последовательности $\{p(n) \bmod 2\pi\}$ и $\{\sin p(n)\}$ имеют бесконечно много частичных пределов.

Вопрос 3. Для каких $x > 1$ последовательность $\{\sin(x^n)\}$ имеет предел?

Увы, ответить на этот вопрос мы не сможем, поделимся лишь некоторыми соображениями. В качестве первого шага опять избавимся от синуса и будем рассматривать последовательность $\{x^n \bmod 2\pi\}$.

В 1935 году Ю. Коксма доказал (см. [2]), что для почти всех $x > 1$ последователь-

ность $\{x^n \bmod 2\pi\}$ всюду плотна на $[0; 2\pi]$. Поэтому x^n бесконечно много раз бывает вблизи каждой точки этого промежутка. Слова «почти все» — это термин; не вдаваясь в его смысл, скажем, что результат Коксмы не исключает существования таких x , для которых последовательность $\{x^n \bmod 2\pi\}$ все же предел имеет (но такие x очень редки).

Докажем однако, что при рациональных $x > 1$ последовательность $\{x^n \bmod 2\pi\}$, а вместе с ней и $\{\sin(x^n)\}$, не имеет предела. Это обосновывается следующей теоремой [1, задача I.3.8 г].

Теорема 5. Для каждого рационального $Q > 1$ множество частичных пределов последовательности $\{Q^n \bmod 2\pi\}$ бесконечно.

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что множество частичных пределов последовательности $\{Q^n \bmod 2\pi\}$ конечно. Тогда

$$Q^n = 2\pi k_n + \varphi_n + \varepsilon_n, \quad (1)$$

где $k_n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, а φ_n — один из частичных пределов последовательности $\{Q^n \bmod 2\pi\}$. Поскольку

$$Q^{n+1} = 2\pi k_{n+1} + \varphi_{n+1} + \varepsilon_{n+1},$$

ясно, что

$$0 = 2\pi(Qk_n - k_{n+1}) + (Q\varphi_n - \varphi_{n+1}) + (Q\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}).$$

Записав число Q в виде дроби $Q = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, получаем для всех n равенства

$$0 = 2\pi(pk_n - qk_{n+1}) + (p\varphi_n - q\varphi_{n+1}) + (p\varepsilon_n - q\varepsilon_{n+1}).$$

Обозначим для краткости выражения в скобках: положим $K_n = pk_n - qk_{n+1}$ — некоторое целое число, $\Psi_n = p\varphi_n - q\varphi_{n+1}$ — величина, принимающая лишь конечное число значений, и наконец, пусть $\delta_n = p\varepsilon_n - q\varepsilon_{n+1}$. Очевидно, $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. В этих обозначениях последние равенства записываются в виде

$$0 = 2\pi K_n + \Psi_n + \delta_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Разобьем натуральный ряд на конечное число частей, на каждой из которых число ψ_n не меняются. Так как число таких частей конечно и они исчерпывают весь натуральный ряд, то среди них есть хотя бы одна, содержащая бесконечно много номеров. Рассмотрим такую бесконечную часть $\mathcal{N}$ и пусть $\psi_n \equiv \psi$ при $n \in \mathcal{N}$, так что

$$0 = 2\pi K_n + \psi + \delta_n, \text{ если } n \in \mathcal{N}.$$

Отсюда следует (поскольку $K_n \in \mathbb{Z}$), что величина $\delta_n \bmod 2\pi$ постоянна при $n \in \mathcal{N}$. А так как $\delta_n \rightarrow 0$, то это возможно лишь в случае $\delta_n \equiv 0$ для достаточно больших $n \in \mathcal{N}$. То же самое верно и на любой другой части натурального ряда, где последовательность $\{\psi_n\}$ постоянна. Так как число таких частей конечно, мы получаем, что $\delta_n = 0$, т.е. $p\varepsilon_n - q\varepsilon_{n+1} = 0$, или, иными словами, $\varepsilon_{n+1} = \frac{p}{q}\varepsilon_n = Q\varepsilon_n$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $Q > 1$, это возможно лишь в случае, когда $\varepsilon_n \equiv 0$, начиная с некоторого номера. Тогда формула (1) упрощается:

$$Q^n = 2\pi k_n + \varphi_n.$$

Так как числа φ_n принимают лишь конечное число значений, найдутся разные номера n_1 и n_2 , для которых $\varphi_{n_1} = \varphi_{n_2}$. В этом случае $(Q^{n_2} - Q^{n_1}) = 2\pi(k_{n_2} - k_{n_1})$, что невозможно в силу иррациональности числа 2π . Теорема доказана.

Итак, мы доказали, что для рациональных $Q > 1$ последовательность $\{Q^n \bmod 2\pi\}$ «не желает» концентрироваться возле какой-то одной точки и даже вблизи конечно-го множества точек. Отсюда, впрочем, не видно никаких иных деталей ее поведения: например, существует ли промежуток $[a; b] \subset [0; 2\pi]$, который не содержит ни одного члена последовательности?

Прежде чем приступать к обсуждению подобных деталей, сформулируем теорему, которую доказывают в начале любого курса математического анализа (а иногда и вовсе не доказывают, относя ее утверждение к аксиомам вещественных чисел вместо аксиомы полноты).

Теорема о вложенных промежутках.

Пусть на вещественной прямой задана бесконечная последовательность отрезков, в которой каждый следующий отрезок содержится в предыдущем:

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$$

Тогда эта последовательность имеет непустое пересечение: существует такое число x , что $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k; b_k]$.

«Что за странная теорема, – может удивиться читатель, – здесь нечего доказывать, она совершенно очевидна». Не совсем. На самом деле, это утверждение – одно из тех, что задают «правила игры» при работе с множеством вещественных чисел. Именно такие утверждения лежат в основе наших представлений о геометрическом устройстве числовой прямой и того, что нам на ней очевидно, а что – нет. Например, если в теореме заменить вещественную прямую на множество $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, то получится ложное утверждение.

Возвращаясь к нашим последовательностям, покажем, что существуют такие числа $x > 1$, что последовательность $\{x^n \bmod 2\pi\}$ не прыгает хаотически по отрезку $[0; 2\pi]$, а концентрируется в весьма небольшой его части.

Теорема 6. Для любого промежутка $[p; q] \subset [0; 2\pi]$ существует такое число $x > 1$, что $(x^n \bmod 2\pi) \in [p; q]$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Мы построим требуемую точку с помощью теоремы о вложенных промежутках. Ясно, что для достаточно большого натурального m числа

$$a = 2\pi m + p \text{ и } b = 2\pi m + q$$

удовлетворяют неравенству

$$a(b - a) = a(q - p) \geq 2\pi. \quad (2)$$

Очевидно, $(y \bmod 2\pi) \in [p; q]$ для всех $y \in [a; b]$. Из неравенства (4) следует, что длина промежутка $[a^2; b^2]$ не меньше 2π :

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= b \cdot b - a^2 \geq a \cdot b - a^2 \geq \\ &\geq a(b - a) = a(q - p) \geq 2\pi \end{aligned}$$

(использованный здесь трюк будем применять и далее при оценке разности степеней). Поэтому промежуток $[a^2; b^2]$ содержит промежуток вида $[2\pi m_1 + p; 2\pi m_1 + q]$, где $m_1 \in \mathbb{N}$. Пусть $[a_1; b_1] \subset [a; b]$ – такой промежуток, что

$$a_1^2 = 2\pi m_1 + p \text{ и } b_1^2 = 2\pi m_1 + q.$$

Ясно, что $(y^2 \bmod 2\pi) \in [p; q]$ для всех $y \in [a_1; b_1]$. Из неравенства (4) следует, что длина промежутка $[a_1^3; b_1^3]$ не меньше 2π :

$$b_1^3 - a_1^3 \geq a_1(b_1^2 - a_1^2) = a_1(q - p) \geq 2\pi.$$

Значит, при некотором $m_2 \in \mathbb{N}$ промежуток $[a_1^3; b_1^3]$ содержит промежуток вида $[2\pi m_2 + p; 2\pi m_2 + q]$. Пусть $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1]$ – такой промежуток, что

$$a_2^3 = 2\pi m_2 + p, \quad b_2^3 = 2\pi m_2 + q.$$

Ясно, что $(y^3 \bmod 2\pi) \in [p; q]$ для всех $y \in [a_2; b_2]$. В силу неравенства (2) длина промежутка $[a_2^4; b_2^4]$ не меньше 2π :

$$b_2^4 - a_2^4 \geq a_2(b_2^3 - a_2^3) \geq a_2(q - p) \geq a(q - p) \geq 2\pi.$$

Продолжая построение по индукции, получим последовательность вложенных промежутков $\{[a_k; b_k]\}$. Искомая точка берется из их пересечения. Теорема доказана.

Эта теорема огорчает, как бы это сказать, своей неконструктивностью. Требуемое число существует, но задается сложной конструкцией. Попробуйте-ка его предъявить!

Попробуем. Но все же слегка ослабим задачу – избавимся от числа π . Деление на 2π с остатком – это все-таки экзотическая операция. Куда проще делить с остатком на... 1! Да-да, это хорошо известная операция *дробная часть числа*. Чтобы охватить при этом случаи других отрезков, рассматривают более общий вопрос – о поведении последовательности $\{\xi x^n \bmod 1\}$ с фиксированным коэффициентом ξ . Например, если вы узнали что-нибудь про такую последовательность при $\xi = \frac{1}{2\pi}$, то

вы тут же предскажете этот результат и для последовательности $\{x^n \bmod 2\pi\}$. Но мы не будем двигаться в этом направлении, далее всюду $\xi = 1$.

Предъявим число R , для которого частичные пределы последовательности $\{R^n \bmod 1\}$ заполняют весь отрезок $[0; 1]$. Это будет одновременно и иллюстрация к теореме 6 (точнее говоря, к ее аналогу при $\xi = 1$ и лишь для промежутка $[p; q] = [0; 1]$), и к результату Коксмы. А сам этот пример содержится в работе [3] Т. Виджаярагхавана 1941 года.

Теорема 7. Пусть R – наибольший положительный корень многочлена

$$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1.$$

Тогда последовательность $\{R^n \bmod 1\}$ плотна на $[0; 1]$.

Доказательство. Многочлен возвратный, т.е. обладает свойством $P(x) = x^4 P\left(\frac{1}{x}\right)$. Поэтому его легко разложить на множители:

$$P(x) = \left(x^2 - \frac{\sqrt{13} + 1}{2}x + 1\right) \left(x^2 + \frac{\sqrt{13} - 1}{2}x + 1\right).$$

Квадратный трехчлен в первой скобке имеет вещественные корни $x_1 = R \approx 1,722$ и $x_2 = \frac{1}{R} \approx 0,58$. Квадратный трехчлен во второй скобке имеет два комплексных корня x_3 и x_4 . Они представляют собой пару комплексно сопряженных чисел (поскольку многочлен вещественный) и при этом $x_3 = 1/x_4$ (поскольку многочлен возвратный). Поэтому корни x_3 и x_4 по модулю равны 1 и их можно записать в виде

$$x_3 = \cos \varphi + i \sin \varphi \text{ и } x_4 = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Проверим, что угол φ несоизмерим с π . Действительно, предположим, что $\varphi = \frac{k}{m} \cdot \pi$. Тогда числа x_3 и x_4 – корни многочлена $G(x) = x^{2m} - 1$, а x_1 и x_2 – не корни $G(x)$, поскольку $|x_1|, |x_2| \neq 1$. Это значит, что наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $G(x)$ является квадратный трехчлен $x^2 + \frac{\sqrt{13} - 1}{2}x + 1$. Но этого не может

быть: находя этот наибольший общий делитель с помощью алгоритма Евклида, мы обязательно получим многочлен с рациональными коэффициентами.

А теперь – внимание! При всех натуральных n число $p_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$ целое.

Чтобы убедиться в этом, заглянем ненадолго в теорию симметрических многочленов. Рассмотрим симметрические многочлены от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,$$

$$\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4.$$

Нам понадобятся *тождества Ньютона*. Так называются соотношения, связывающие функции σ_n и p_n :

$$p_1 = \sigma_1,$$

$$p_2 = p_1\sigma_1 - 2\sigma_2,$$

$$p_3 = p_2\sigma_1 - p_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

$$p_4 = p_3\sigma_1 - p_2\sigma_2 + p_1\sigma_3 - 4\sigma_4,$$

$$p_n = p_{n-1}\sigma_1 - p_{n-2}\sigma_2 + p_{n-3}\sigma_3 - p_{n-4}\sigma_4$$

при $n \geq 5$.

Здесь первые четыре формулы выглядят немного не так, как все следующие. Все тождества проверяются непосредственным раскрытием скобок (проверьте).

Если x_1, x_2, x_3, x_4 – корни многочлена $P(x)$, то по теореме Виета $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 1$ – это целые числа. И тогда по формулам Ньютона мы последовательно найдем, что $p_1, p_2, \dots$ – тоже целые числа.

Теперь благодаря формуле Муавра можно написать равенства

$$\begin{aligned} p_n &= R^n + \frac{1}{R^n} + (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n + \\ &+ (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n = R^n + \frac{1}{R^n} + \cos(n\varphi) + \\ &+ i \sin(n\varphi) + \cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi) = \\ &= R^n + \frac{1}{R^n} + 2 \cos(n\varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$R^n = p_n - \frac{1}{R^n} - 2 \cos(n\varphi).$$

Здесь в правой части p_n – целое число, дробь $\frac{1}{R^n}$ стремится к 0, а $2 \cos(n\varphi)$ всюду плотно пробегает отрезок $[-2; 2]$, поскольку

угол φ несоизмерим с π . Следовательно, последовательность $\{R^n \bmod 1\}$ всюду плотна на $[0; 1]$, что и требовалось доказать.

В общем случае поведение последовательностей вида $\{\xi x^n \bmod 1\}$ изучено плохо. Теорема 7 «приоткрывает завесу» на то, с какой стороны можно подходить к их исследованию. Известные результаты касаются, в основном, последовательностей, в которых числа ξ и x – алгебраические (корни многочленов с целыми коэффициентами).

Приложение

В дополнение к сказанному рассмотрим теорему, открытую И.Ламбертом в 1761 году. Из многочисленных известных доказательств приведем здесь доказательство Ш.Эрмита (1873 г.). Будем следовать изложению в книге [1] (см. задачу I.3.23).

Теорема 8. Число π иррационально.

Доказательство. Рассмотрим интегралы

$$H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Попробуем их вычислить. Для этого воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) g'(t) dt &= \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t) dt. \end{aligned}$$

Полагая $f(t) = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n$, $g'(t) = \cos t$ и интегрируя по частям два раза, получаем равенство (проверьте!):

$$H_n = (4n - 2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}.$$

Значения $H_0 = 2$ и $H_1 = 4$ нетрудно найти непосредственно, а все следующие значения H_n можно последовательно находить с помощью этой рекуррентной формулы:

$$H_2 = 6H_1 - \pi^2 H_0 = 24 - 2\pi^2,$$

$$H_3 = 10H_2 - \pi^2 H_1 = 240 - 24\pi^2 \text{ и т.д.}$$

Как нетрудно понять, каждое число H_n – это значение в точке π^2 некоторого многочлена степени не выше n с целыми коэффициентами. Обозначим его $P_n(x)$, так что

$$H_n = P_n(\pi^2).$$

Если допустить, что π – рациональное число, то и π^2 окажется рациональным, т.е. $\pi^2 = \frac{p}{q}$ для некоторых $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда

$H_n = P_n \left(\frac{p}{q} \right)$ и, более того, число $q^n H_n = q^n P_n \left(\frac{p}{q} \right)$ – целое (в правой части сокращаются все знаменатели). К тому же $H_n > 0$, поскольку подынтегральная функция в определении H_n положительна внутри промежутка интегрирования. Значит,

$$q^n H_n = q^n P_n \left(\frac{p}{q} \right) \geq 1.$$

Но это неравенство не может быть верным при больших n . Действительно, так как

$\pi < 4$, подынтегральная функция в определении H_n меньше 4^n . Следовательно,

$$H_n \leq \pi \cdot \frac{4^n}{n!} \text{ и } 1 \leq q^n H_n \leq \pi \cdot \frac{(4q)^n}{n!}.$$

При больших n дробь в правой части меньше 1, поскольку при $n > 8q$ замена n на $n + 1$ уменьшает ее по крайней мере в 2 раза.

Литература

1. Б.М.Макаров, М.Г.Голузина, А.А.Лодкин, А.Н.Подкорытов. Избранные задачи по вещественному анализу. – М.: МЦНМО, 2024.
2. J.F.Koksma. Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. – Compositio Mathematica, 1935, t. 2, p. 250–258.
3. T.Vijayaraghavan. On the fractional parts of the powers of a number (II). – Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1941, vol. 37, p. 349–357.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest Желаем успеха!

25. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости нарисована стрелка вверх, вниз, вправо или влево. Может ли оказаться так, что из каждой клетки в каждую есть путь, идущий по соседним клеткам согласно стрелкам?

А.Переpečко

26. Пять спортсменов провели восемь забегов на разные дистанции; все всегда финишировали в разное время. Перед каждым забегом Петя делал прогноз, в каком порядке финишируют спортсмены, а потом записывал в блокнот, сколько позиций он угадал верно. В итоге оказалось, что каждое следующее число в блокноте отличается от предыдущего, а сумма всех восьми чисел равна 30. В скольких забегах Петя угадал все пять позиций?

А.Грибалко

27. На отрезке OA отмечена точка B , на отрезке OD отмечена точка C так, что $ABCD$ – вписанный четырехугольник и $AB \neq CD$. Внутри угла AOD отметили точку P такую, что треугольники ABP и DCP подобны ($AB/DC = AP/DP = BP/CP$). Докажите, что P – пересечение прямых AC и BD .

Е.Бакаев

28. При каких n можно раскрасить каждую целочисленную точку плоскости в один из n цветов так, чтобы каждый цвет был использован хотя бы дважды и для любых двух одноцветных целочисленных точек A и B нашлись точки C и D того же цвета такие, что $ABCD$ – квадрат?

Е.Бакаев

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2834–M2837 предлагались на региональном этапе LI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи M2834–M2837, Ф2841–2844

M2834. Назовем набор чисел *удачным*, если его нельзя разбить на две непустые группы так, чтобы произведение суммы чисел в одной группе и суммы чисел в другой было положительным. Учитель написал на доске несколько целых чисел. Докажите, что дети могут дописать к имеющимся еще одно целое число так, чтобы полученный набор оказался удачным.

А.Кузнецов

M2835. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублевой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть ее: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня – на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достается Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные монеты. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша?

А.Кузнецов

M2836. Высоты BD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 1), высоты треугольника ADE пересекаются в точке F , точка M –

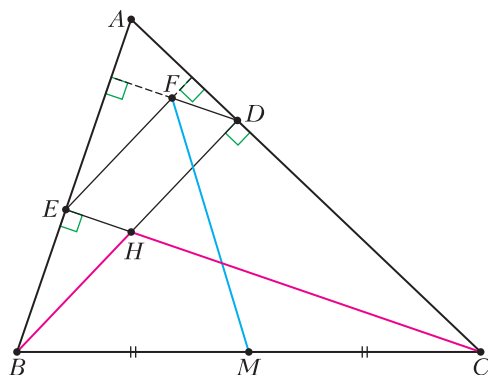


Рис. 1

середина стороны BC . Докажите, что $BH + CH \geq 2FM$.

А.Кузнецов

M2837. На графике функции $y = x^2$ отметили 1000 различных точек, абсциссы которых – целые числа из отрезка $[0; 100000]$. Докажите, что можно выбрать шесть различных отмеченных точек A, B, C, A', B', C' таких, что площади треугольников ABC и $A'B'C'$ равны.

А.Терёшин

Ф2841. На шероховатой горизонтальной плоскости стоит клин (рис. 2). Шайбу кладут на шероховатую наклонную плоскость клина и сообщают шайбе

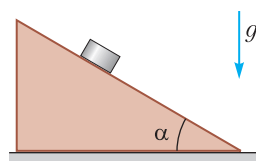


Рис. 2

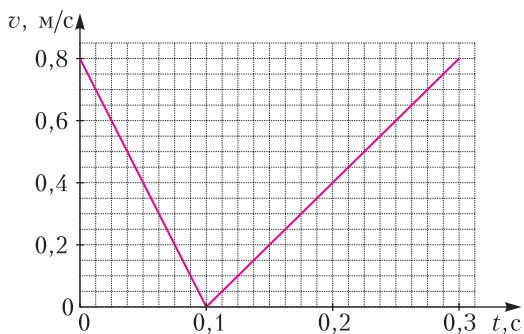


Рис. 3

начальную скорость. Шайба движется по покоящемуся клину. Часть зависимости модуля скорости шайбы от времени представлена на рисунке 3. Поступательное движение шайбы до и после остановки происходит по одной и той же прямой. Масса шайбы $m = 0,2$ кг, масса клина $M = 2m$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

1) Найдите $\sin \alpha$, где α – угол, который наклонная плоскость клина образует с горизонтом.

2) Найдите модуль $F_{\text{тр}}$ наибольшей силы трения, с которой горизонтальная плоскость действует на клин в процессе движения шайбы по клину при $0 < t < 0,3$ с.

3) При каких значениях коэффициента μ трения скольжения клина по горизонтальной плоскости клин будет находиться в покое при $0 < t < 0,3$ с?

В.Плис

Ф2842. Вырезанную из однородного листа металла пластину в форме равностороннего треугольника ABC (рис. 4) положили на гладкую горизонтальную плоскость

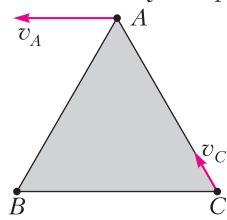


Рис. 4

и толкнули. Пластина пришла в движение. В момент $t = 0$ оказалось, что скорость точки A параллельна стороне BC и по величине равна $v_A = 0,4$ м/с, а скорость вершины C

направлена вдоль стороны CA . Длины сторон треугольника $a = 0,2$ м.

1) Найдите модуль v_C скорости вершины C .

2) За какое время τ пластина в системе центра масс совершит три оборота?

Пчела массой $m = 100$ мг прилетает и садится на пластину вблизи вершины B .

3) Найдите модуль R равнодействующей сил, приложенных к пчеле, сидящей на движущейся пластине. Масса пчелы пренебрежимо мала по сравнению с массой пластины.

В.Плис

Ф2843. Газовая плита отрегулирована так, что нагрев одного литра воды от 20°C до 100°C происходит за 10 минут. Избыточное давление в газовой сети 3 кПа. Атмосферное давление 10^5 Па, комнатная температура $+20^\circ\text{C}$. Каково сечение отверстия, через которое к горелке поступает горючий газ метан? Считайте, что воде достается 80% тепловой энергии, выделяющейся при сгорании метана. Удельная теплота сгорания метана 50 МДж/кг.

С.Варламов

Ф2844. Большое количество маленьких медных кубиков с абсолютно черными поверхностями граней образуют группу, которая движется вокруг Солнца по эллиптической орбите. Расположения кубиков таковы, что они никогда не загораживают друг для друга лучи Солнца и практически никак не влияют друг на друга. Кубики нагреты лучами Солнца, но температуры их разные. Для некоторых кубиков температуры максимально возможные, а для каких-то температуры минимально возможные. В данный момент эта группа находится ближе всего к Солнцу и на таком же расстоянии от Солнца, что и Земля, при этом минимальная температура $T_{\text{мин}} = T_0$. Когда же эта группа удаляется от Солнца на максимальное расстояние, то максимальная температура $T_{\text{макс}}$ некоторых кубиков становится равной T_0 . Каковы температуры T_0 и $T_{\text{макс}}$? С каким периодом обращается эта группа кубиков вокруг Солнца? В группу кубиков «затесался» один маленький медный шарик с такой же черной поверхностью. Какова его температура? (Числовые значения нужных для решения физических величин найдите самостоятельно.)

С.Варламов

Решения задач М2822–М2825, Ф2829–Ф2832

М2822. На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда

ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем одинаковым количеством гвоздей?

Ответ: всегда.

Пусть $K_1, \dots, K_m$ – данные круги. Границы кругов разрезают плоскость на области: одну неограниченную область и ограниченные области $A_1, A_2, \dots, A_n$ площадей $S_1, S_2, \dots, S_n$. Основная идея будет состоять в следующем: количества гвоздей для областей A_j будут «почти пропорциональны» площадям S_j . (Отметим, что если бы все площади S_i относились как целые числа, то мы вбили бы в A_j количества гвоздей, в точности пропорциональные площадям, и задача уже была бы решена.) Причем это сработает не только для салфеток – равных кругов, но и для салфеток в форме любых равновеликих фигур. Приступим к формальной реализации плана. Для каждой области A_j будем подыскивать подходящее количество гвоздей x_j . Для каждой пары индексов $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ положим $a_{ij} = 1$, если $A_j \subset K_i$, т.е. когда область A_j принадлежит кругу K_i , и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда количество гвоздей, вбитых в круг K_i , будет равно $N_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$. Получается, нам достаточно понять, что (однородная) система линейных уравнений $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет решение в целых положительных числах.

Мы знаем, что $x_1 = S_1, x_2 = S_2, \dots, x_n = S_n$ – (частное) решение данной системы (S_i – положительные вещественные числа). Далее мы используем такое (известное) общее утверждение для систем линейных уравнений с рациональными коэффициентами: сколь угодно близко от произвольного (частного) решения такой системы найдется рациональное решение. Формально это утверждение означает следующее. Пусть система линейных уравнений от переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет (частное) решение $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ оно имеет решение $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ такое, что все Y_i рациональны и $|Y_i - Z_i| < \varepsilon$ (для всех $i = 1, 2, \dots, n$).

Для доказательства утверждения можно воспользоваться структурой множества всех решений (совместной) системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами: найдется такое целое неотрицательное число r и рациональные числа b_{jk} , $j = 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, s$, что любое решение имеет вид $x_j = b_{j0} + b_{j1}t_1 + b_{j2}t_2 + \dots + b_{js}t_s$, где $t_1, \dots, t_s$ – произвольный набор действительных чисел. (Исходя из метода Гаусса, в качестве t_i можно взять некоторые из x_j – так называемые свободные неизвестные.) В частности, для данного решения $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ имеем $Z_j = b_{j0} + b_{j1}T_1 + b_{j2}T_2 + \dots + b_{js}T_s$ (для $j = 1, 2, \dots, n$). Чтобы получить искомое близкое рациональное решение, теперь можно заменить в формулах каждое из чисел T_i на достаточно близкое к нему рациональное число.

Из нашего утверждения следует, что помимо решения $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ наша система $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ имеет решение $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ такое, что все R_i рациональны и такие, что $R_i > S_i - \varepsilon$, где $\varepsilon = \min\{S_i\}$, так что все R_i положительны. Домножая все R_i на их общий знаменатель, получаем нужное нам решение нашей системы в целых положительных числах. Этим завершается решение.

О других способах получения из произвольного решения системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами рационального решения можно прочитать в статье С. Дориченко «О коровах, линейной алгебре и многомерных пространствах» («Квант» №5–6 за 2012 г.)

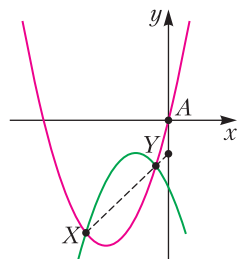
В заключение отметим, что если попробовать усилить условие и потребовать, чтобы в каждую салфетку-единичный круг был вбит ровно один гвоздь, то утверждение перестанет быть верным – см. задачу М1390 «Задачника «Кванта»» («Квант» №3/4 за 1993 г.)

П. Кожевников

М2823. На координатной плоскости нарисована парабола p – график уравнения $y = -x^2$ и отмечена точка A , не лежащая на параболе p . Через точку A проводят всевозможные параболы q вида $y = x^2 + ax + b$, пересекающие p в двух точках X и Y . Докажите, что всевозмож-

ные прямые XU проходят через фиксированную точку плоскости.

Для удобства перенесем систему координат так, чтобы начало координат совпало



с точкой A (см. рисунок). Тогда (в новой системе координат) парабола p будет иметь уравнение $y = -x^2 + cx + d$, где c и $d \neq 0$ – константы, а парабола q будет иметь уравнение

$y = x^2 + ex$, где e – параметр; здесь свободный член равен 0, поскольку q проходит через точку $(0;0)$. Сложив уравнения парабол p и q , получим линейное уравнение $2y = (c+e)x + d$. Это и есть уравнение прямой XU : действительно, координаты точки X удовлетворяют каждому из уравнений $y = -x^2 + cx + d$ и $y = x^2 + ex$, а значит, и их сумме; то же верно для точки Y . Осталось заметить, что все прямые вида $2y = (c+e)x + d$ проходят через фиксированную точку $\left(0; \frac{d}{2}\right)$.

Замечание. На самом деле утверждение задачи следует из общей теоремы о трех кониках (которую также можно назвать обобщенной теоремой о радикальных осях): если три коники проходят через две данные точки, то три прямые, соединяющие пары остальных общих точек каждых двух коник, пересекаются в одной точке. В нашем случае можно взять в качестве этих трех коник параболу p и две параболы q и q' , проходящие через точку A . Действительно, все параболы (с осью, параллельной Oy) имеют две общие (совпадающие) точки с бесконечно удаленной прямой; кроме того, «радикальная ось» парабол q и q' – вертикальная прямая.

П. Кожевников

M2824. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Первая девочка дружит с 4-мя мальчиками, вторая – с 5-ю, третья – с 6-ю, ..., 11-я – с 14-ю, а каждая из остальных четырех девочек дружит со всеми мальчиками. Оказалось, что существует ровно $3 \cdot 2^{25}$ способов разбить весь класс на

пары, так чтобы в каждой паре были мальчик и девочка, которые дружат. Докажите, что любой из друзей первой девочки дружит и со всеми остальными девочками тоже.

Будем оценивать количество N разбиений класса на пары «девочка–мальчик» так, чтобы в каждой паре мальчик и девочка дружили между собой. Будем набирать пары друзей, начиная с 1-й девочки.

Пусть A – множество всех мальчиков, а $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ – множества друзей 1-й, 2-й, ..., 15-й девочек, так что $|A_1| = 4$, $|A_2| = 5$, $|A_3| = 6$, ..., $|A_{11}| = 14$, $|A_{12}| = |A_{13}| = |A_{14}| = |A_{15}| = 15 = |A|$.

Опишем пошаговый алгоритм выбора. Возьмем $a_1 \in A_1$ – друга 1-й девочки, далее $a_2 \in A_2 \setminus \{a_1\}$ – друга 2-й девочки, $a_3 \in A_3 \setminus \{a_1, a_2\}$ – друга 3-й девочки, ..., $a_{15} \in A_{15} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{14}\}$ – друга 15-й девочки.

Заметим, что

$$|A_i \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}| \geq |A_i| - (i-1),$$

так что

$$\begin{aligned} |A_1| &= 4, \\ |A_2 \setminus \{a_1\}| &\geq 5 - 1 = 4, \\ |A_3 \setminus \{a_1, a_2\}| &\geq 6 - 2 = 4, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{12} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{11}\}| &\geq 15 - 11 = 4, \\ |A_{13} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}| &\geq 15 - 12 = 3, \\ |A_{14} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{13}\}| &\geq 15 - 13 = 2, \\ |A_{15} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{14}\}| &= 1. \end{aligned}$$

Поэтому при нашем выборе на первом шаге не менее 4 возможностей, на втором – не менее 4, ..., на 12-м – не менее 4, на 13-м – не менее 3, на 14-м – не менее 2, на 15-м – 1 возможность. Итого $N \geq 4^{12} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2^{25}$ вариантов.

Теперь докажем такой критерий:

равенство $N = 3 \cdot 2^{25}$ будет достигаться тогда и только тогда, когда имеется цепочка включений $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{15} = A$.

Отсюда будет следовать утверждение задачи, так как любой мальчик из A_1 будет входить во все A_i , т.е. являться другом всех девочек.

Действительно, если даны включения, то на каждом шаге алгоритма выбора возникает ситуация $a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \in A_i$, поэтому оценка

$$|A_i \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}| \geq |A_i| - (i-1)$$

(для каждого i) обращается в равенство. Значит, $N = 3 \cdot 2^{25}$.

Наоборот, пусть $N = 3 \cdot 2^{25}$. Тогда на каждом шаге алгоритма выбора оценка

$$|A_i \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}| \geq |A_i| - (i-1)$$

должна обращаться в равенство. Предположим противное, т.е. пусть хотя бы одно включение в цепочке не выполнено, скажем, найдется $x \in A_{j-1}$, но $x \notin A_j$. Рассмотрим $(j-1)$ -й шаг алгоритма выбора. Выбирая a_{j-1} , положим $a_{j-1} = x$, если x еще не входит в $\{a_1, \dots, a_{j-2}\}$; так что $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}\}$. Но тогда

$$|A_j \cap \{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}\}| \leq j-2$$

$$\text{и } |A_j \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}\}| \geq |A_j| - j + 2.$$

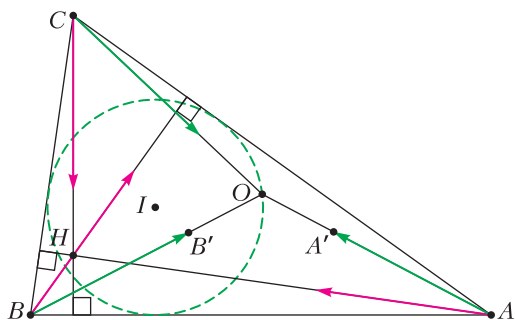
Получено противоречие с равенством

$$|A_j \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}\}| = |A_j| - (j-1).$$

Г.Шарафетдинова

M2825. По высотам остроугольного неравностороннего треугольника из его вершин одновременно начали ползти три жука с одинаковыми скоростями. В некоторый момент оказалось, что первый и второй жуки находятся на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что в этот момент и третий жук тоже находится на этой окружности.

Пусть H – ортоцентр, I – центр вписанной окружности ω , а O – центр описанной окружности данного треугольника ABC (см. рисунок).



Запустим одновременно с жуками с теми же скоростями пауков из точек A, B, C по лучам AO, BO, CO соответственно. Так как лучи AH и AO симметричны относительно биссектрисы AI угла BAC , жук и паук, стартовавшие из вершины A , будут одновременно оказываться на вписанной окружности. Теперь будем решать данную задачу про пауков – она будет эквивалентна исходной. Пусть условие одновременного попадания на ω выполнено для пауков, стартующих из A и из B . Так как $AO = BO$, в любой момент времени эти пауки симметричны относительно серединного перпендикуляра m_c к AB . Предположим, эти пауки одновременно оказались в различных точках $A' \in \omega$ и $B' \in \omega$. Но так как точка I лежит на серединном перпендикуляре к $A'B'$, то I лежит на m_c . Но отсюда следует, что $\triangle ABC$ симметричен относительно m_c – противоречие с неравносторонностью $\triangle ABC$.

Тогда наши два паука попали одновременно в одну и ту же точку, лежащую на ω . Эта точка – O (единственная точка, через которую проходят траектории пауков). В этот момент все три паука проползли расстояние R и окажутся в O .

А.Кузнецов

Ф2829. В первом опыте амперметр и вольтметр, соединенные последовательно, подключили к батарее, показания приборов были $I_1 = 0,3$ А, $U_1 = 18$ В. Во втором опыте эти же приборы, соединенные параллельно, подключили к этой же батарее, показания приборов стали $I_2 = 3,4$ А, $U_2 = 4,5$ В. Найдите ток короткого замыкания батареи $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи, r – внутреннее сопротивление батареи.

Сопротивление вольтметра $R_V = \frac{U_1}{I_1}$, сопротивление амперметра $R_A = \frac{U_2}{I_2}$. По закону Ома для полной цепи, в первом опыте

$$\mathcal{E} = I_1 (R_V + R_A + r),$$

во втором опыте

$$\mathcal{E} = \left(I_2 + \frac{U_2}{R_V} \right) r + U_2.$$

Из этих соотношений находим внутреннее сопротивление батарейки:

$$r = \frac{U_1 + U_2 \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right)}{I_2 + I_1 \left(\frac{U_2}{U_1} - 1 \right)}$$

и ЭДС батарейки:

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 \frac{I_1}{I_2} + I_1 \frac{U_1 + U_2 \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right)}{I_2 + I_1 \left(\frac{U_2}{U_1} - 1 \right)}$$

и приходим к ответу на вопрос задачи:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r} = 3 \text{ А.}$$

В.Плис

Ф2830. Заряд Q распределен равномерно по площади непроводящей сферы радиусом R . В первом опыте на расстоянии $2R$ от центра сферы поместили маленький шарик с зарядом q . Сила, с которой поле заряженной сферы действовало на шарик, равнялась F_1 . Во втором опыте шарик удалили, а такой же заряд q равномерно распределили по длине тонкого непроводящего стержня длиной R . Этот стержень расположили на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находилась на расстоянии $2R$ от центра сферы. Найдите силу F_2 , с которой поле сферы действовало на заряженный стержень. Все опыты проводились в вакууме вдали от других тел. Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми.

Для определенности будем считать все заряды положительными. Тогда в первом опыте

$$F_1 = qE(2R) = k \frac{Qq}{4R^2}.$$

Если однородно заряженный отрезок лежит на линии поля, вдоль которой напряженность поля равна $E_x(x)$, то суммарная сила, действующая со стороны этого поля на заряженный с линейной плотностью заряда $\lambda = \frac{q}{R}$ отрезок, составляет

$$F = \sum_{x_1 \leq x \leq x_2} \lambda \cdot \Delta x \cdot E_x(x) = \lambda \cdot \sum_{x_1 \leq x \leq x_2} E_x(x) \cdot \Delta x = \lambda (\varphi(x_1) - \varphi(x_2)).$$

В рассматриваемом втором опыте

$$(\varphi(2R) - \varphi(3R)) = \frac{kQ}{2R} - \frac{kQ}{3R} = \frac{kQ}{6R}.$$

Тогда

$$F_2 = \lambda (\varphi(2R) - \varphi(3R)) = \frac{kQq}{6R^2} = \frac{2}{3} F_1.$$

В.Плис

Ф2831. Приводное колесо велосипедной динамо-машинки прижимается сбоку к шине колеса велосипеда. Диаметр этого приводного колеса d . Якорь динамо-машинки, содержащий N витков каждый площадью S , вращается в однородном магнитном поле с индукцией B . С какой по величине скоростью v должен ехать велосипедист, чтобы лампочка в фаре велосипеда, рассчитанная на действующее значение напряжения U , светилась нормальным накалом при работе динамо-машинки? Сопротивления проводов ротора и лампочки (при номинальном напряжении на ней) одинаковы.

При качении колеса без проскальзывания линейная скорость точек шины в системе отсчета, связанной с велосипедом, примерно равна скорости v оси колеса в лабораторной системе отсчета (толщиной шин в сравнении с диаметром колес можно пренебречь). Ротор динамо-машинки вращается с угловой скоростью $\omega = \frac{2v}{d}$, в этом случае амплитуда ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_{\max} = \omega NBS.$$

Действующее напряжение U при гармоническом изменении напряжения со временем в $\sqrt{2}$ меньше амплитудного, а поскольку сопротивления лампочки и проводов ротора соединены последовательно и одинаковы по величине, то на каждом из них падает одинаковое напряжение. Следовательно,

$$2U = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Из приведенных соотношений следует

$$v = \sqrt{2} \frac{Ud}{NBS}.$$

В.Плис

Ф2832. Три когерентных монохроматических синфазных излучателя расположе-

ны в вакууме вдали от других тел в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Излучатели работают на частоте $\nu = 100$ МГц. При какой наименьшей длине стороны треугольника в дальней зоне на продолжении любой стороны треугольника волны трех источников гасят друг друга? Скорость электромагнитных волн в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Воспользуемся представлением чисел, имеющих действительную A и мнимую iB части, в виде

$$\begin{aligned} A + iB &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \exp\left(i \cdot \arctg \frac{B}{A}\right) = \\ &= C \cdot e^{i\varphi} = C \cos \varphi + iC \sin \varphi, \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Обозначение действительной части такого числа: $\operatorname{Re}(C \cdot e^{i\varphi}) = C \cos \varphi = A$. Длина волны излучения на частоте 100 МГц равна $\lambda = c/\nu = 3$ м. Угловая скорость изменения фазы излучения $\omega = 2\pi\nu$. Величина волнового вектора $k = 2\pi/\lambda$. Вклад одного источника в амплитуду волны в конкретном месте пространства дается выражением

$$\bar{E}(x, t) = \bar{E}_0 \operatorname{Re}(\exp(i(\omega t - kx))).$$

Величина и направление $\bar{E}_0$ зависят от смещения x от источника до места наблюдения, но при выполнении неравенства $|x| \gg a$ эта величина примерно одинакова для всех трех монохроматических и синфазных источников.

На оси x , содержащей любую сторону треугольника, с началом координат в ближайшей к месту вычисления поля вершине треугольника волновое поле в дальней зоне (т.е. при выполнении неравенства $x \gg a$) может быть вычислено так:

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, t) &= \bar{E}_0 \operatorname{Re} \left(\exp(i(\omega t - kx)) + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(i\left(\omega t - k\left(x - \frac{a}{2}\right)\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. + \exp(i(\omega t - k(x - a))) \right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, t) &= \bar{E}_0 \operatorname{Re} \left(\exp(i(\omega t - kx)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + \exp\left(ik\frac{a}{2}\right) + \exp(ika) \right) \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, t) &= \bar{E}_0 \operatorname{Re} \left(\exp(i(\omega t - kx)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(ik\frac{a}{2}\right) \left(1 + 2 \cos k\frac{a}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Множитель $\left(1 + 2 \cos k\frac{a}{2} \right)$ в выражении для вектора поля не зависит от времени. Амплитуда волнового поля обращается в ноль при $\cos \pi \frac{a}{\lambda} = -\frac{1}{2}$, откуда следует

$$\pi \frac{a}{\lambda} = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Таким образом, наименьшая длина стороны треугольника

$$a_{\text{н}} = \frac{2}{3} \lambda = 2 \text{ м.}$$

С. Варламов, В.Плис

Вниманию наших читателей

• В условии задачи М2814, опубликованном в «Кванте» №10 за 2024 год и продублированном в «Кванте» №1 за 2025 год, была допущена досадная опечатка. Приведенное в условии выражение должно быть таким:

$$\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a+\sqrt{c}}}{\sqrt{a-\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{c}}}.$$

• В условии задачи Ф2836, опубликованном в «Кванте» №1 за 2025 год, приведена не совсем корректная формулировка. Должно быть так:

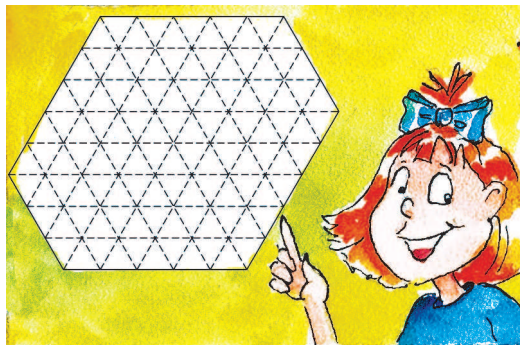
«Небольшой предмет находится на дне прозрачного водоема глубиной $h = 1$ м. По какой траектории движется его наблюдаемое из воздуха изображение при перемещении наблюдателя параллельно поверхности водоема? Каково максимальное расстояние между наблюдаемыми изображениями? Показатель преломления воды $n = 1,33$ ».

Редакция журнала «Квант» приносит свои извинения авторам упомянутых задач и читателям журнала за допущенные оплошности.

Задачи

1. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, по линиям сетки на 11 равных частей.

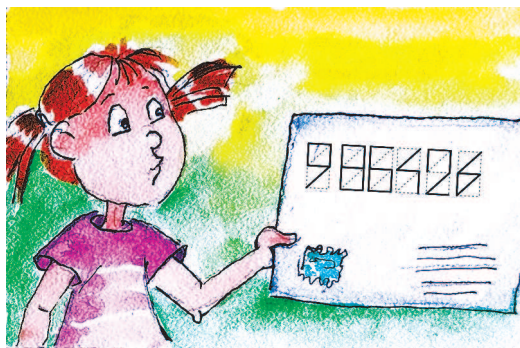
К. Кноп



2. Почтовый индекс состоит из шести цифр, нарисованных черточками — сторонами или диагоналями клеток, как показано на образце.



Таня написала индекс, но только одну цифру написала правильно, в двух цифрах сделала по одной ошибке (т.е. по одной черточке нарисовала не в том месте), а в остальных трех цифрах — по две ошибки (т.е. по две черточки нарисовала не в том месте). Количество черточек везде верное. На рисунке



Эти задачи предлагались на XXIX Турнире имени А.П. Савина.

показано, что у нее получилось. Какой был правильный индекс?

Т. Корчемкина

3. Имеется девять палочек: три красных, три желтых, три зеленых. Известно, что можно сложить треугольник из любой тройки палочек разных цветов. Сколько треугольников из палочек одинакового цвета можно гарантированно сложить?

А. Шаповалов



4. Перед экспертом и судьей лежат 20 гирек массами 10 г, 11 г, ..., 29 г. Эксперт знает массы всех гирек, а судья знает, что массы именно такие, но не знает, у какой гирьки какая. Судья берет по очереди каждую гирьку и кладет ее на одну из чаш весов, а эксперт в ответ должен взять какие-то две гирьки и тоже положить их на весы. Результат взвешивания фиксируется, и гирьки снимаются с весов. Может ли эксперт действовать так, чтобы после 20 взвешиваний судья узнал массы всех гирек?

К. Кноп, А. Грибалко



Угол между радиусом и стороной

Ю.БЛИНКОВ, Д.ШВЕЦОВ

Основной факт

Можно ли решить сложную олимпиадную задачу, обладая знаниями, не выходящими за рамки программы первого полугодия 8 класса? И не зная специальных «олимпиадных» фактов и приемов?

Оказывается, во многих случаях достаточно хорошо владеть обычным школьным материалом.

Рассмотрим простую задачу.

Задача 0. Пусть O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . Найдите угол ACO , если $\angle ABC = \alpha$ (рис. 1).

«Ну и что здесь может быть интересно?» – спросит читатель. Действительно, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу (рис. 2), т.е. если $\angle ABC = \alpha < 90^\circ$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$, откуда $\angle ACO = 90^\circ - \alpha$.

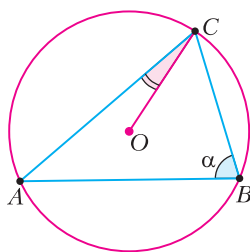


Рис. 1

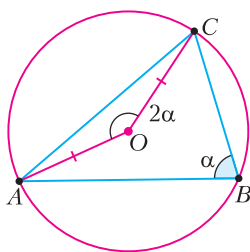


Рис. 2

Просто? Конечно! Но это и есть *основной факт* нашей статьи, благодаря которому мы сможем решить несколько трудных задач. В дальнейшем мы его будем называть *углом между радиусом и стороной*.

Основной факт. Пусть O – центр окружности, описанной около остроугольного тре-

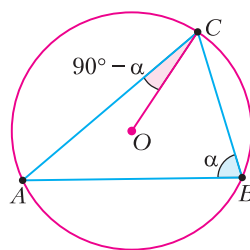


Рис. 3

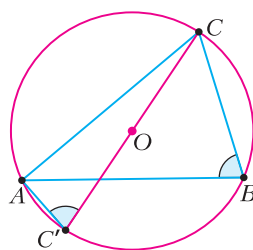


Рис. 4

угольника ABC . Тогда $\angle ACO = 90^\circ - \angle ABC$ (рис. 3).

Упражнения

1. Восстановите по рисунку 4 другое доказательство основного факта.

2. Как поменяется основной факт в случае тупого угла ABC ?

Как же можно использовать этот факт? Дело в том, что он указывает на расположение центра окружности, описанной около треугольника. В школьном курсе обычно доказывается, что центр описанной окружности треугольника равноудален от его вершин, т.е. лежит на пересечении серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. Но если фиксирован, например, угол B треугольника ABC , то центр описанной окружности также лежит на прямой, которая составляет фиксированный угол со стороной AC .

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Биссектриса AL пересекает описанную окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) в точке W ; точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника IBW лежит на стороне BC (рис. 5).

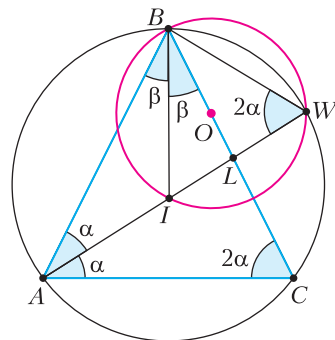


Рис. 5

Решение. Заметим, что BI – биссектриса угла B . Обозначим: $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$. Тогда $\angle IWB = \angle AWB = \angle ACB = 2\alpha$, используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу.

Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника IBW .¹ Тогда $\angle IBO = 90^\circ - 2\alpha$, согласно основному факту. С другой стороны, $\angle IBL = \angle IBC = \beta$. Осталось заметить, что $2\alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. O лежит на луче BC и внутри треугольника IBW . Задача решена.

Начиная с 2005 года, каждое лето в конце июля проводится финальный тур Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.² Как правило, задачи этой олимпиады трудны даже для опытных школьников. Следующая задача (в терминах геометрического места точек) предлагалась девятиклассникам на финальном туре в 2010 году.

Задача 2. Произвольная прямая, проходящая через вершину B остроугольного треугольника ABC , пересекает сторону AC в точке K , а описанную окружность – в точке M . Докажите, что центры описанных окружностей всех таких треугольников AMK лежат на одной прямой (рис. 6).

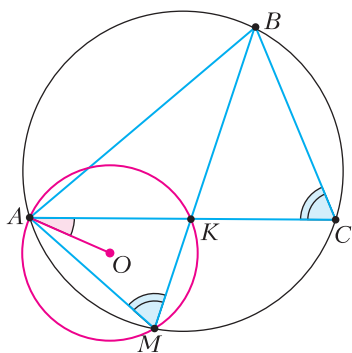


Рис. 6

Решение. Заметим, что $\angle AMK = \angle AMB = \angle ACB$, т.е. он фиксирован и острый. Пусть O – центр описанной окружности треугольника AMK . Тогда $\angle OAK = 90^\circ - \angle ACB$, со-

гласно основному факту, т.е. тоже фиксирован, причем точки O и M лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC . Следовательно, точка O лежит на фиксированном луче с началом в точке A , что и требовалось.

Упражнение 3. Найдите GMT таких центров.

В условии предыдущих задач фигурировал центр описанной окружности. Значительно сложнее, когда в условии про него ничего не сказано.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD , если $AB = 2$ (рис. 7).

Путь к решению. Заметим, что $ABCD$ – параллелограмм. Однако найти его углы или углы какого-то треугольника непосредственным подсчетом не получается. Но есть углы, дополняющие друг друга до 90° , причем один из них является углом треугольника, а другой отложен от луча, содержащего противоположную сторону. Исходя из этого, попробуем рассмотреть окружность, описанную около треугольника.

Решение. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 8).

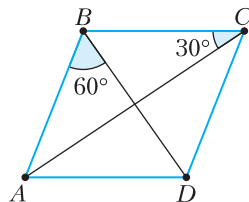


Рис. 7

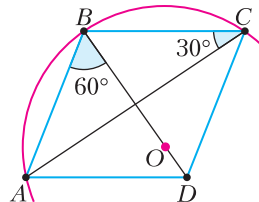


Рис. 8

Тогда $\angle ABO = 90^\circ - \angle ACB = 60^\circ = \angle ABD$, т.е. O лежит на луче BD . С другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC (почему?). Возможны два случая:

- точка O совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, т.е. параллелограмм является прямоугольником и $BD = 2AB = 4$;
- серединный перпендикуляр совпадает с прямой BD , т.е. параллелограмм является ромбом и $BD = AB = 2$ как сторона равностороннего треугольника.

Задача решена.

Заметим, что в задаче мы нашли центр описанной окружности как пересечение луча

¹ Тут внимательный читатель спросит: «Почему треугольник IBW остроугольный?». Это можно обосновать, используя лемму о трезубце.

² Страничка олимпиады – <https://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php>, на которой можно найти условия и решения задач прошлых лет и много другой полезной информации.

из вершины, проведенного под данным углом, и серединного перпендикуляра к стороне. Этот прием будет нами использован еще раз.

К высотам

Ну что ж, с основным фактом мы разобрались, посмотрели первые примеры. Что дальше? Какой угол также дополняет угол треугольника до 90° ? Конечно, угол между стороной треугольника и высотой, проведенной к другой стороне. Исходя из этого, можно сформулировать следующее.

Следствие 1. Пусть CC' – высота остроугольного треугольника ABC (рис. 9). Точка O – центр описанной окружности. Тогда $\angle ACO = \angle BCC'$, т.е. прямые CO и CC' симметричны относительно биссектрисы угла C треугольника ABC .

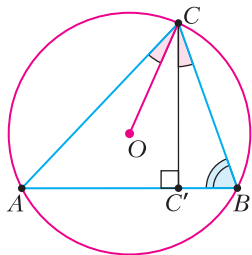


Рис. 9

Доказательство. Заметим, что если $\angle ABC = \alpha$, то $\angle BCC' = 90 - \alpha = \angle ACO$.

Следствие 1 верно и в случае тупоугольного треугольника. Как изменится доказательство?

Рассмотрим применение указанного следствия. Ученикам седьмого класса доступна такая задача.

Упражнение 4. В прямоугольном треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH к гипотенузе AB (рис. 10). Докажите, что $\angle ACM = \angle BCH$.

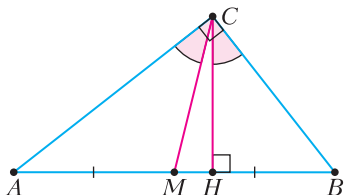


Рис. 10

Обратная задача, как это порой бывает, оказывается значительно труднее.

Задача 4. В неравностороннем треугольнике ABC (рис. 11) проведены медиана CM и высота CH (точка H лежит на отрезке AB).

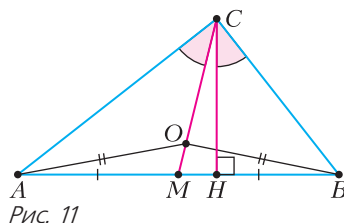


Рис. 11

Докажите, что если $\angle ACM = \angle BCH$, то $\angle ACB = 90^\circ$.

Решение. Докажем, что M – центр окружности, описанной около треугольника ABC , откуда и будет следовать утверждение задачи. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Тогда $\angle ACO = \angle BCH$, т.е. O лежит на луче CM . С другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB . Поскольку треугольник не является равнобедренным, то совпадать они не могут и центр O описанной окружности лежит на их пересечении – в точке M . Задача решена.

В следующей задаче, которая предлагалась девятиклассникам на Турнире математических боев имени А.П.Савина³ (в терминах ГМТ), идею симметрии высоты и радиуса спрятали чуть глубже.

Задача 5. Дан остроугольный треугольник ABC . На стороне AC выбираются произвольная точка K и такая точка L , что $\angle ABK = \angle CBL$ (рис. 12). Докажите, что центры описанных окружностей треугольников KBL и ABC лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что треугольники KBL и ABC имеют общую высоту BH , проведенную к стороне AC (рис. 13). Кроме того, из

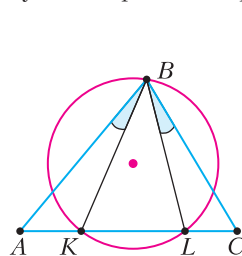


Рис. 12

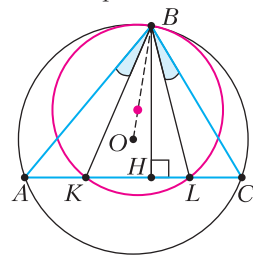


Рис. 13

равенства $\angle ABK = \angle CBL$ следует, что эти треугольники имеют также общую биссектрису, проведенную из вершины B . Тогда по следствию 1 фиксированный луч BO , на котором лежит центр описанной окружности

³ Сайт Турнира – <http://tursavin.ru/>

треугольника ABC , также содержит центр описанной окружности треугольника KBL . Задача решена.

Упражнение 5. Найдите ГМТ таких центров.

Рассмотрим еще одно важное следствие, характеризующее направление радиуса.

Следствие 2. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC , точка O – центр описанной окружности треугольника ABC (рис. 14). Тогда $CO \perp A_1B_1$.

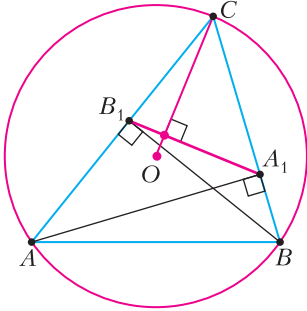


Рис. 14

Доказательство. Поскольку точки B , A_1 , B_1 и A лежат на окружности с диаметром AB (почему?), то $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ (рис. 15).

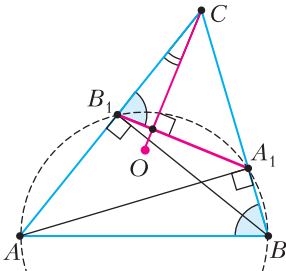


Рис. 15

Кроме того, $\angle ACO = 90^\circ - \angle CBA$, откуда и следует искомая перпендикулярность.⁴

Упражнения

6. Докажите это утверждение для тупоугольного треугольника.

7. Используя те же обозначения, докажите, что касательная, проведенная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC , параллельна прямой A_1B_1 .

⁴ Доказанное следствие можно обобщить следующим образом. Дан угол с вершиной C и точки P и Q внутри него; K и L – проекции точки P на стороны угла. Прямые CQ и KL перпендикулярны тогда и только тогда, когда CP и CQ – изогонали.

Простейшее применение данного следствия – задача, предлагавшаяся на Математической регате.

Задача 6. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из B на A_1C_1 , из A на B_1C_1 и из C на A_1B_1 , пересекаются в одной точке (рис. 16).

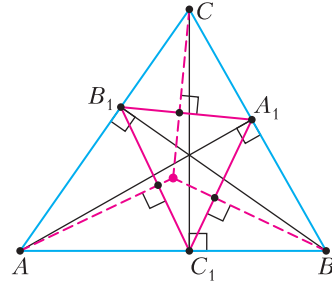


Рис. 16

Решение. Согласно следствию 2, указанные перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника ABC .

Эту задачу можно переформулировать и так.⁵

Упражнение 8. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров внеписанных окружностей треугольника на его стороны, пересекаются в одной точке.

Возможно и дальнейшее развитие сюжета.

Задача 7. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC , точка O – центр описанной окружности. Через точки A , B , C проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA , OB и OC (рис. 17). Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

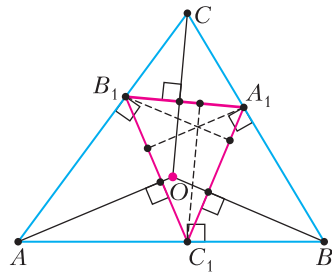


Рис. 17

Решение. Согласно следствию 2, указанные прямые перпендикулярны сторонам тре-

⁵ Об искусстве переформулирования задачи подробнее можно прочитать в «Кванте» №5 за 2022 год в статье «Как переформулировать задачу?».

(Продолжение см. на с. 34)

...задача, относившаяся к азартным играм,
...была источником теории вероятностей.

Симеон Дени Пуассон

Исчисление вероятностей, всецело построенное на точных заключениях, мы находим впервые только у Паскаля и Ферма.

Иероним Цейтен

Истинная логика нашего мира — это подсчет вероятностей.

Джеймс Клерк Максвелл

Первое применение теории вероятностей в физике... мы находим в основанной Больцманом и Гиббсом общей статистической теории теплоты...

Вольфганг Паули

...тепловые явления всегда происходят таким образом, что вероятность состояния возрастает...

Матвей Бронштейн

...участвуя в хаотическом движении, крупинка...с одинаковой вероятностью может иметь любое направление в пространстве.

Абрам Иоффе

Сегодня квантовая теория привела нас к более глубокому пониманию: она установила более тесную связь между статистикой и основами физики.

Макс Борн

Многому из наших знаний суждено навсегда остаться неопределенным. Нам дано знать только вероятности.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам ВЕРОЯТНОСТЬ в ФИЗИКЕ?

Элементарные понятия теории вероятностей, возникшие в связи с интересом к случайным событиям, были лишь материалом для будущей науки, становление которой пришлось на XVII – XVIII века. По мере того, как массовые случайные явления изучались все глубже, учение о вероятностях стало развиваться с огромной быстротой. В XIX веке в трудах ученых, исследовавших гигантские совокупности атомов и молекул, зародилась статистическая физика. А в прошлом столетии стало окончательно ясно, что современная физика абсолютно немыслима без понятия вероятности, решительно отличающегося от накопленного наукой прежнего багажа представлений.

Попробуем перекинуть мостик от первых шагов этой теории до нынешнего школьного курса физики в надежде, что это не потребует от вас невероятных усилий.

Вопросы и задачи

1. Монету бросают три раза. Какова вероятность, что все три раза сверху окажется «решка» (цифра)?

2. Чему равна вероятность выпадения «орла» (герба), по крайней мере, один раз при двукратном бросании монеты?

3. Две одинаковые игральные кости кидают одновременно. Какова вероятность выпадения двух пятерок?

4. Определите вероятность вытащить из колоды (36 карт): а) пиковую карту; б) красную карту; в) какую-либо даму?

5. Из коробки, в которой лежат 6 белых и 8 черных шаров одного диаметра, наугад извлекают один шар. Какова вероятность, что этот шар — белый?

6. Стержень ломают случайным образом на две части. Какова средняя длина меньшего куска?

7. В сосуде находятся две молекулы. Чему равна вероятность того, что обе будут: а) в левой половине сосуда; б) в любой из половин; в) в разных половинах сосуда?

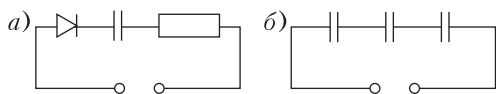
8. В сосуде вместимостью V_0 находится N молекул. Определите вероятность w того, что в объеме $V < V_0$ не будет ни одной молекулы.

9. Чему равна вероятность того, что вектор скорости молекулы равновесного газа «находится внутри» элемента телесного угла $\Delta\Omega$? Чему равна доля молекул, вектор скорости которых лежит в третьем октанте?

10. Считая воздух газом, состоящим из одинаковых молекул: а) оцените скорость теплового движения молекул при нормальных условиях; б) найдите число молекул в единице массы газа, средняя квадратичная скорость которых при абсолютной температуре T равна $v_{\text{кв}}$.

11. Может ли расширившийся газ сам собой сжаться и снова занять прежний объем?

12. Какая из двух электросхем, изображенных на рисунке, надежнее, если надежность р диода 0,7, конденсатора 0,8, резистора 0,9?



13. Чему равна постоянная распада λ для изотопов радия ^{230}Ra , если период полураспада $T_{1/2} = 93$ мин? Какова вероятность w распада изотопов за один час?

Микроопыт

Понаблюдайте за поведением капли чернил, упавших в воду. За счет чего растет ее диаметр?

Любопытно, что...

...от Паскаля и Ферма, давших ясные и простые примеры приложений теории вероятностей, принял эстафету Гюйгенс, изложивший в 1657 году свои результаты в книге «О расчетах при азартных играх» – первом трактате по новому научному направлению.

...в ответ на обращение по поводу новых игр с костями, Ньютону пришлось решать задачу для выяснения, какая из них выгоднее. Насколько известно, это была единственная работа ученого по теории вероятностей.

...занимаясь изучением вероятности судебных приговоров, французский физик и математик Пуассон установил в 1837 году один из первостепенных законов – так называемое «распределение», названное его именем и ставшее орудием исследова-

ния у ученых при решении множества разнообразнейших задач.

...21 сентября 1859 года на заседании Британской ассоциации содействия развитию науки Максвелл впервые доложил о своих работах, заложивших основу статистической, или вероятностной, картины мира.

...физики, изучавшие в начале XX века броуновское движение или диффузию газов, например Эйнштейн и Смолуховский, обратились к учению о вероятностных процессах до того, как эта проблематика привлекла внимание математиков.

...ответ на вопрос, почему тепло передается от горячих объектов к холодным, а не наоборот, предложил Больцман: потому, что это более *вероятно*. Идея, поначалу воспринятая учеными в штыки, в дальнейшем получила всеобщее признание.

...квантовая физика, в отличие от классической, отрицает возможность установления точных координат или траекторий той или иной частицы, например электрона, но оперирует лишь с вероятностями ее нахождения в данный момент времени в той или иной точке пространства.

...закон радиоактивного распада носит принципиально статистический характер в силу вероятностных законов поведения микрочастиц; только после создания квантовой механики удалось построить теорию радиоактивных превращений атомных ядер.

Что читать в «Кванте» о вероятности в физике (публикации последних лет)

1. «Блуждания по цеиям» – 2017, №3, с. 10;
2. «Неопределенность – основа квантовой физики» – 2021, №1, с. 2;
3. «Как возникает хаос. Закон равновесного хаоса идеального газа» – 2021, №4, с. 30;
4. «Кинематика случайного блуждания и освоение человечеством Галактики» – 2024, №1, с. 2.

Материал подготовил А.Леонович



(Начало см. на с. 28)

угольника $A_1B_1C_1$ (ортоотреугольника) и проходят через его вершины, т.е. являются его высотами и, разумеется, пересекаются в одной точке (ортоцентр ортоотреугольника). Задача решена.

Оказывается, что из двух последних задач следует решение задачи, предлагавшейся на Устной городской олимпиаде по геометрии 2010 года в качестве самой сложной.

Задача 8. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины C , и параллельна OC (рис. 18). Аналогично опреде-

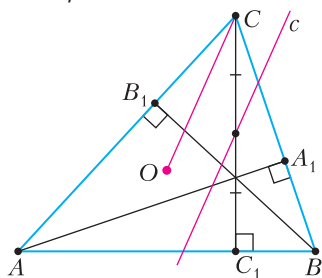


Рис. 18

ляются прямые a и b . Докажите, что прямые a , b , s пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим прямые из задачи 6 и из задачи 7. Пусть s' и c_1 — прямые, проходящие через точки C и C_1 (основание высоты из точки C) и параллельные s (рис. 19).

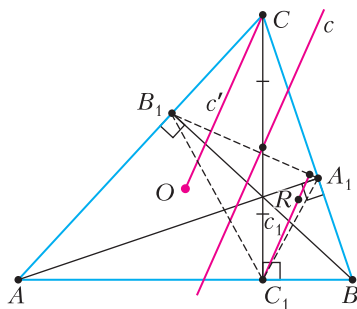


Рис. 19

Согласно задаче 6, прямая s' проходит через точку O — центр описанной окружности треугольника ABC . Кроме того, согласно задаче 7, прямая c_1 проходит через точку R — ортоцентр ортоотреугольника. Тогда прямая s проходит через середину отрезка OR по теореме Фалеса. Осталось заметить, что прямые a и b также проходят через эту точку. Задача решена.

Упражнение 9. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для любых точек, делящих высоты в одном и том же отношении.

Обобщаем — упрощаем

Полезно после решения проанализировать, все ли условия существенны. Можно ли как-то обобщить задачу? Вернемся к следствию 2. Оказывается, его можно легко обобщить. Заметим, что в доказательстве следствия не было существенно, что AA_1 и BB_1 именно высоты. Нам было достаточно того, что точки B , A_1 , B_1 , A лежат на одной окружности, или равенства $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ (см. рис. 15). Подобная ситуация часто встречается в задачах.

Определение. Пусть точки B_1 и A_1 лежат на прямых CA и CB соответственно (или обе на лучах CA и CB , или обе на лучах, дополнительных к ним). Говорят, что отрезки A_1B_1 и AB антипараллельны (относительно пары прямых CA и CB или относительно угла ACB), если $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ (рис. 20).

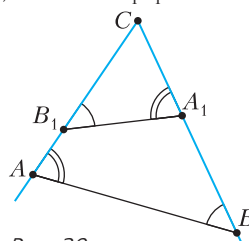


Рис. 20

Теперь мы можем сформулировать обобщение следствия 2.

Следствие 2'. Пусть отрезок $A'B'$ антипараллелен отрезку AB относительно прямых CA и CB , точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 21). Тогда $CO \perp A'B'$.

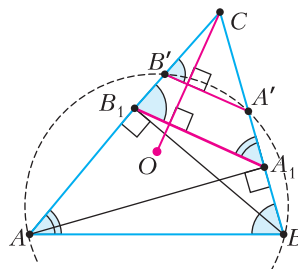


Рис. 21

Упражнение 10. Докажите обобщенное следствие, рассмотрев различные расположения точек A' и B' .

Каков следующий шаг? Заметим, что треугольники ABC и $A'B'C'$ можно поменять местами. Если O' – центр окружности, описанной около $\triangle A'B'C'$, то $CO' \perp AB$. Иначе говоря, высота одного треугольника проходит через центр описанной окружности другого и наоборот (рис. 22), поскольку антипараллельность взаимна.⁶

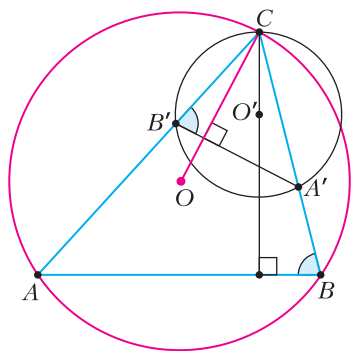


Рис. 22

Доказанное обобщение расширяет наши возможности. Рассмотрим конструкцию, связанную с двумя пересекающимися окружностями. Например, можно легко решить следующие задачи.

Упражнения

11. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ , пересекающие вторую окружность в точках B и C . Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC .

12. Решите предыдущее упражнение, используя угол между касательной и хордой или антипараллельность.

Мы же рассмотрим более сложный факт.

Задача 9. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA , которая пересекает вторую окружность в точке Y и прямая XB , которая пересекает вторую окружность в точке Z (рис. 23). Докажите, что прямые, содержащие высоты всех таких треугольников XYZ , проведенные из точки X , проходят через фиксированную точку.

Решение. Заметим, что точки Z , Y , A и B лежат на одной окружности, откуда следует

⁶ Этот результат можно объяснить и так: один треугольник из другого получается композицией симметрии относительно биссектрисы угла ACB и гомотетии с центром C .

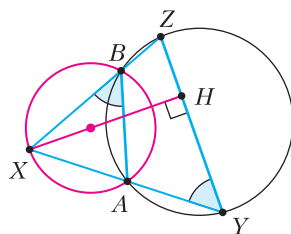


Рис. 23

равенство углов: $\angle XBA = \angle XYZ$ или антипараллельность отрезков AB и YZ относительно прямых XU и XZ .

Согласно следствию 2', высота XH треугольника XYZ проходит через центр описанной окружности треугольника XAB , т.е. через центр первой окружности. Задача решена.

И, наконец, сложная задача с финала Олимпиады по геометрии имени И.Ф. Шарыгина 2007 года.

Задача 10. В обозначениях задачи 9 найдите ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников XYZ .

Решение. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника XYZ , точки O_1 и O_2 – центры данных окружностей (рис. 24).

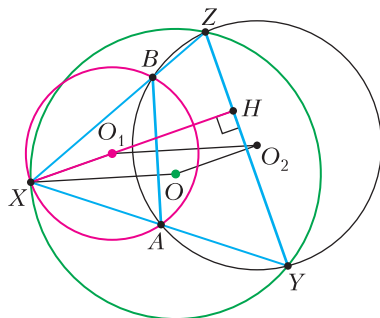


Рис. 24

По задаче 9, прямая XO_1 перпендикулярна YZ . Кроме того, XO перпендикулярна AB , если применить результат задачи 9 для треугольника XAB . Осталось использовать, что общая хорда двух окружностей перпендикулярна их линии центров: прямая O_1O_2 перпендикулярна AB , а OO_2 – прямой YZ . Тогда XO_1O_2O – параллелограмм или все точки лежат на одной прямой, т.е. векторы $\vec{XO}$ и $\vec{O_1O_2}$ равны. Значит, искомым ГМТ является образ первой окружности при параллельном переносе на вектор $\vec{O_1O_2}$. Осталось показать, что любая точка образа первой окружности может являться центром окружности, указанной в условии. Предлагаем убедиться в этом самостоятельно. Задача решена.

Начав с довольно простого основного факта, мы смогли решить целый ряд сложных задач. Предлагаем для самостоятельного решения несколько задач различной степени сложности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Прямая AO пересекает окружность в точке A_1 , а прямая, содержащая высоту AH , – в точке A_2 . Докажите, что а) прямая A_1A_2 параллельна BC ; б) $BA_1 = CA_2$.

2. Определите углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части.

3. Чевiana AA_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_2 . Пусть O' – центр описанной окружности треугольника BA_1A_2 . Докажите, что $O'A_1 \perp AC$.

4. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC , пересекает сторону AC в точке K , а описанную окружность – в точке M . Пусть O_a и O_c – центры окружностей, описанных около треугольников AMK и CMK соответственно. Докажите, что прямые AO_a и CO_c пересекаются на высоте треугольника ABC .

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса CL , точка O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. На стороне AC отмечена точка D так, что $DC = BC$. Докажите, что $CO \perp DL$.

6 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2012). Пусть I, I_a, I_c – центры вписанной и

внеписанных окружностей треугольника ABC . Точка O – центр описанной окружности треугольника II_aI_c . Докажите, что $OI \perp AC$.

7 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2021). На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ выбрали точку E так, что $\angle ABE = \angle CBD$. Пусть O, O_1, O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABC, ABE, CBE соответственно. Докажите, что прямые AO_1, CO_2 и DO пересекаются в одной точке.

8 (Московская математическая олимпиада, 2021). В остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC . Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K . Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1 .

9 (Московская математическая олимпиада, 1993). Дан выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором $AB = BC, \angle BAM = 30^\circ, \angle ACM = 150^\circ$. Докажите, что MA – биссектриса угла BMC .

10. В задаче 8 основного текста статьи мы показали, что три прямые a, b и c пересекаются в одной точке. Обозначим ее T . Оказывается, что точка T является центром так называемой окружности Тейлора. Пусть AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты треугольника ABC . A_1 и A_2 – проекции точки H_1 на прямые AB и AC . Аналогично определим точки B_1 и B_2, C_1 и C_2 . Тогда все эти шесть точек лежат на одной окружности – окружности Тейлора. Докажите, что точка T из задачи 8 является центром окружности Тейлора.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Сила света Солнца и лазерной указки

С.ВАРЛАМОВ

САМАЯ НЕОДНОЗНАЧНАЯ И, ТЕМ не менее, относящаяся к основным единицам в системе СИ – это единица силы света с названием «кандела», что в русском переводе означает «свеча». И если со всеми остальными

единицами все однозначно и четко, то запутанность определения силы света очевидна.

Попробуем разобраться в причинах и постараемся аккуратно и понятно объяснить, как же все-таки трактуется это понятие и каким образом вычисляется сила света для различных ситуаций и различных источников света.

Начнем издалека, от начала, или, как иногда говорится, «от печки». (Правда, «начало» и «печка» – это разные понятия, относящиеся первое ко времени, а второе к пространству.)

Солнце

Все живое на Земле возникло и продолжает развиваться «под солнечным светом». Наше светило – Солнце – горячий объект, который уже несколько миллиардов лет освещает окружающее пространство. Поэтому и жизнь на Земле адаптирована под свойства излучения Солнца. Большое число появившихся в результате эволюции видов животных

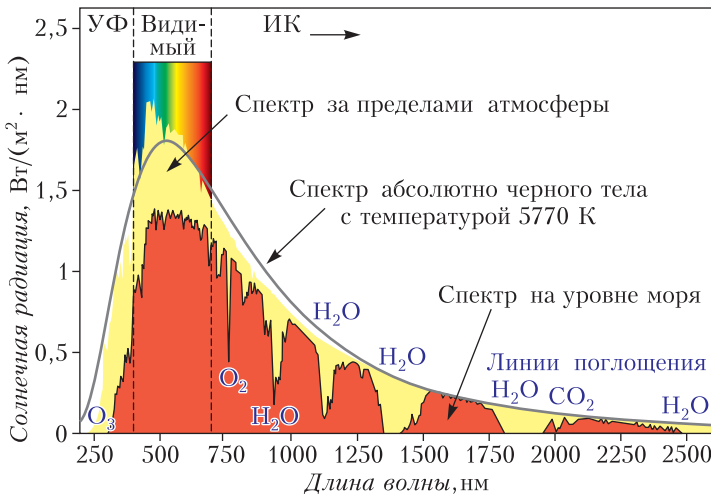


Рис. 1. Спектр солнечного излучения

имеет зрение. И мы – люди – тоже обладаем способностью видеть. Видимый для обычного человека (усредненный по большому количеству людей) диапазон длин волн электромагнитного излучения: 380 нм – 760 нм.

Излучение Солнца по своему спектральному составу близко к излучению абсолютно черного тела, нагретого до температуры 6000 К. Из рисунка 1 следует, что видимый человеком диапазон длин волн приходится на участок максимума в солнечном излучении. Однако, есть виды живых существ на Земле, у которых видимый для них диапазон длин волн отличается от человеческого.

Если источник света рассылает свет с мощностью излучения W по разным направлениям в пространстве неоднородно по направлениям, то для характеристики такого распределения вводится понятие относительной мощности, или интенсивности излучения, приходящейся на соответствующий элемент телесного угла Ω , т.е. $\Delta W / \Delta \Omega$. Например, лампа накаливания мощностью 100 Вт рассылает свет равномерно по всем направлениям в телесный угол, равный 4π

стерадиан (сокращенно – ср). Тогда интенсивность излучения от такой лампы равна примерно 8 Вт/ср. Если такую лампу поместить в фокус параболического зеркала, чтобы получился прожектор, то в направлении оси симметрии зеркальной параболы интенсивность излучения значительно вырастет.

Поскольку зрение человека основано на существовании у него в глазах трех чувствительных к цветам в разных диапазонах длин волн рецепторов и диапазоны чувствительности этих рецепторов перекрываются, то мы видим в том

самом диапазоне длин волн 380 нм – 760 нм (рис. 2). На самом деле имеются «колбочки», чувствительные к цветам, и «палочки», чувствующие просто свет без различия по цветам, но такие детали мы здесь обсуждать не будем.

Наиболее эффективным для создания зрительного ощущения яркости является излучение с длиной волны 0,555 мкм. Для такого излучения одновременно «работают» два чувствительных рецептора – зеленый и красный. Они совместно обеспечивают максимальное ощущение яркости (или силы света) в сравнении с любыми другими длинами волн при условии, что мощность излучения, попадающего в глаза, для этих разных длин

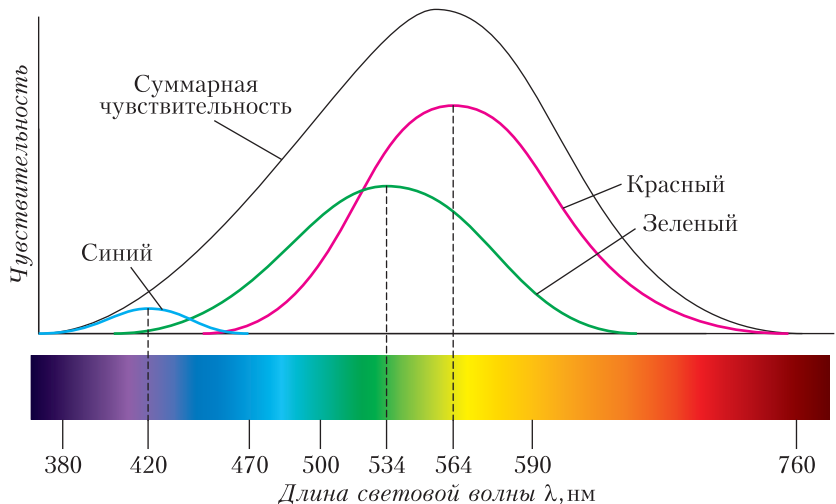


Рис. 2. Чувствительность глаза человека к свету разного цвета

волн одинакова и формы излучателей и расстояния от них до глаз совпадают.

Интенсивность излучения с длиной волны 555 нм, равная 1/683 Вт/ср, носит название «кандела», сокращенно – кд. Она как раз и является одной из основных в системе единиц СИ. Поскольку чувствительность глаза к разным длинам волн света разная, то вводится понятие «эффективность по зрительному ощущению» для разных длин волн. Для излучения с длиной волны 555 нм эффективность, или коэффициент эффективности, принимается равным единице. Для красного света эффективность по зрительному ощущению примерно в пять раз меньше, чем для света с длиной волны 0,555 мкм. Для солнечного излучения эффективность составляет только 1/7 часть от энергетической мощности, и это связано с тем, что большая часть мощности излучения Солнца приходится на диапазон невидимых нами инфракрасных волн.

Мощность солнечного излучения, уходящего в космическое пространство от нашего светила, на расстоянии, равном расстоянию от Земли до Солнца $L \approx 150$ млн км, через перпендикулярную потоку света площадку с площадью 1 м^2 , равна $E = 1370 \text{ Вт/м}^2$. Полная мощность излучения Солнца в телесный угол 4π равна $E \cdot 4\pi L^2 = 3,87 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Интенсивность излучения Солнца равна, соответственно, $EL^2 \approx 3,08 \cdot 10^{25} \text{ Вт/ср}$, а сила света Солнца с учетом эффективности по зрительному восприятию составляет $683 \cdot EL^2/7 \approx 3,01 \cdot 10^{27} \text{ кд}$.

Лазерная указка

Пусть лазерная указка создает поток красного света с длиной волны $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$, мощность которого $W = 1,0 \text{ мВт}$. Свет излучает лазерный светодиод, а направленность излучения обеспечивает собирающая линза с диаметром $D = 3 \text{ мм}$ (рис. 3).

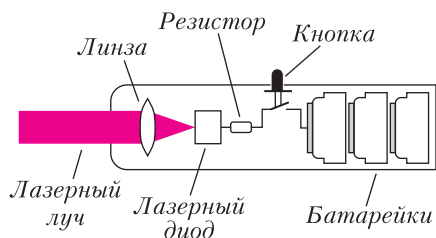


Рис. 3. Схема устройства лазерной указки

Какова интенсивность света указки (выраженная в Вт/ср) и какова максимальная сила света (в канделах) этого источника света, если его рассматривают с расстояния $L = 10 \text{ км}$? Сколько квантов света, испущенного указкой, попадает в глаз человека за одну секунду?

Для лазерной указки с выходным круглым отверстием диаметром D существенным в рассматриваемой ситуации является эффект дифракция излучения (рис. 4). Синус угла дифракции ϕ , равный $1,22\lambda/D \approx 2,6 \cdot 10^{-4}$,

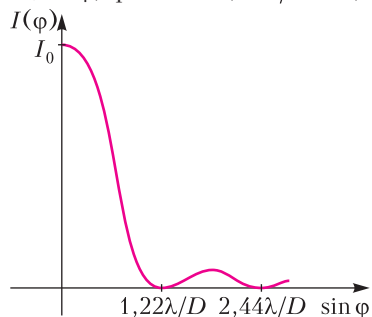


Рис. 4. Эффект дифракции излучения

соответствует полному пропаданию мощности световой волны в этом направлении. Этот синус весьма мал, поэтому и угол тоже мал. На расстоянии 10 км (10^4 м) центральное световое пятно от лазерной указки имеет радиус 2,6 м. Этот размер гораздо больше размеров человека и его глаз.

Будем считать (для упрощения вычислений), что излучение указки равномерно распределено в телесном угле, равном $(\lambda/D)^2$. В этом предположении интенсивность излучения указки в направлении его распространения равна приблизительно $2,13 \cdot 10^4 \text{ Вт/ср}$, а сила света (с учетом коэффициента эффективности по зрительному восприятию) составляет $2,91 \cdot 10^6 \text{ кд}$. Если не учитывать рассеяние света в воздухе, то можно оценить количество квантов света, попадающих в глаз человека, который смотрит на лазерную указку с расстояния 10 км в направлении вдоль луча света. Зрачок глаза будем считать максимально открытым, так что диаметр отверстия равен приблизительно 5 мм. В этот зрачок попадает поток света мощностью 10^{-9} Вт , что соответствует примерно $3,3 \cdot 10^9$ квантов света в секунду.

Динамические аналогии и колебательные процессы

Б. МУКУШЕВ

АНАЛОГИЯ – ЭТО МЕТОД ПОЗНАНИЯ, при котором на основе сходства объектов по одним признакам заключают об их сходстве и по другим признакам. Установив такое сходство и найдя, что число совпадающих признаков достаточно большое, исследователь может сделать предположение о том, что и другие свойства этих предметов совпадают. Ход рассуждений такого рода и составляет основу аналогии.

Аналогию обычно используют в физике на этапе теоретического исследования явлений и объектов, сравнивая основные признаки двух систем. В основе физической аналогии лежит схожесть математического описания сопоставляемых физических процессов и объектов. Именно при изучении аналогий пришло в физику отчетливо понимание того, что явления разной природы могут подчиняться одинаковым законам и закономерностям.

Физические аналогии делятся на два вида: *статические и динамические*. Статические аналогии характерны для систем, параметры которых не меняются со временем. Примером статической аналогии может служить сходство между законом всемирного тяготения и законом Кулона. Выражения для силы тяготения между двумя материальными точками с массами M и m и для силы электростатического взаимодействия двух точечных разноименных зарядов Q и q имеют вид

$$F_T = G \frac{Mm}{r^2} \text{ и } F_3 = k \frac{Qq}{r^2}.$$

Здесь G – гравитационная постоянная, k – коэффициент пропорциональности, r – рас-

стояние между взаимодействующими телами, $Q > 0$ и $q < 0$ или $Q < 0$ и $q > 0$.

Глубокое сходство обнаруживается при сопоставлении колебаний груза на пружине (пружинный маятник) и заряда в электрическом колебательном контуре (рис. 1).

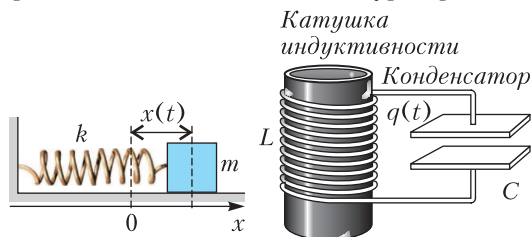


Рис. 1

Здесь аналогичными оказываются процессы, протекающие во времени в физически разных системах. Аналогии такого рода называются динамическими. Интересно, что принцип работы аналоговой вычислительной машины основан на схожести механического и электрического процессов. Процессы в динамически аналогичных системах описываются одинаковыми математическими уравнениями.

Использование аналогий во многих случаях помогает при решении физических задач. Рассмотрим ряд задач, решение которых существенно упрощается, если воспользоваться методом динамической аналогии.

Задача 1. Источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением соединен последовательно с катушкой индуктивностью L и конденсатором емкостью C (рис. 2). В начальный момент времени конденсатор не заряжен. Найдите зависимость от времени заряда в конденсаторе и напряжения на его обкладках после замыкания ключа.

Искать нужную зависимость с помощью законов электромагнетизма довольно сложно, поэтому целесообразно использовать механическую аналогию. На рисунке 3 приведена аналогичная колебательная система. Аналогом источника с ЭДС может служить

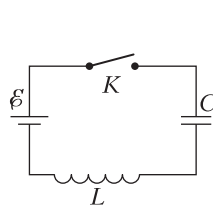


Рис. 2

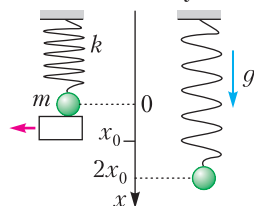


Рис. 3

поле силы тяжести. При выдергивании подставки из-под прикрепленного к пружине груза начинаются его колебания.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для груза:

$$ma = mg - kx.$$

Обозначим ускорение груза через x'' и введем обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Из уравнения второго закона Ньютона получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$x'' + \omega_0^2 x = g.$$

Решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = x_0(1 - \cos \omega_0 t), \text{ где } x_0 = \frac{mg}{k}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Груз совершает гармонические колебания около точки x_0 . Смещение груза лежит в интервале $[0; 2x_0]$.

Смещение груза $x(t)$ соответствует величине заряда на конденсаторе $q(t)$. Из аналогии между двумя колебательными системами получаем, что величина заряда на конденсаторе со временем изменяется в интервале $[0; 2q_0]$. Напишем зависимости от времени заряда и напряжения в конденсаторе после замыкания ключа:

$$q(t) = q_0(1 - \cos \omega_0 t),$$

$$\text{где } q_0 = C\varepsilon, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon(1 - \cos \omega_0 t).$$

На рисунке 4 представлен график физических величин $x(t)$ и $q(t)$. Здесь T – это период колебаний груза на пружине и заряда конденсатора.

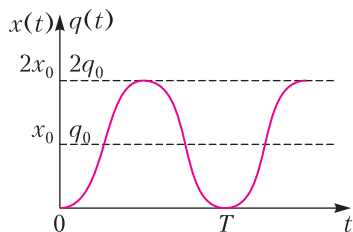


Рис. 4

Задача 2. Конденсатор емкостью C и катушки индуктивностями L_1 и L_2 включены в электрическую цепь, как показано на рисунке 5.

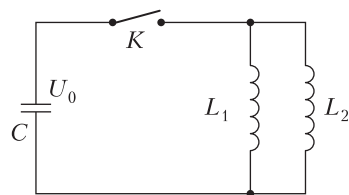


Рис. 5

а) Найдите период электрических колебаний этого контура.

б) Найдите наибольшие силы тока в каждой катушке, если конденсатор заряжен до напряжения U_0 .

а) Используем метод аналогии. Механическая аналогия данной электрической цепи представлена на рисунке 6. Грузики массы m_1 и m_2 скреплены между собой пружиной

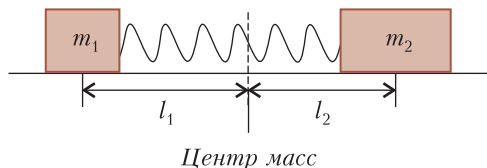


Рис. 6

жесткостью k . Плоскость, на которой находятся грузики, гладкая. Грузики сдвигают, сжимая пружину, затем их одновременно опускают. Нужно определить период возникших колебаний.

Центр масс системы не должен двигаться, поэтому грузики колеблются в противофазе с одинаковой частотой, а их отклонения x_1 и x_2 от положения равновесия удовлетворяют соотношению $k_1 x_1 = k_2 x_2$, где k_1 и k_2 – коэффициенты жесткости соответствующих кусков пружины длиной

$$l_1 = l \frac{m_2}{m_1 + m_2} \text{ и } l_2 = l \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

(l_1 и l_2 – расстояния от грузиков до центра масс системы). Известно, что удлинение $(1/n)$ -й части пружины всегда в n раз меньше удлинения всей пружины, т.е. $(1/n)$ -я часть пружины имеет жесткость в n раз большую, чем жесткость всей пружины. Поэтому

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} k \text{ и } k_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} k.$$

Отсюда следует, что период колебаний грузиков равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) k}}.$$

Следовательно, период электрических колебаний в нашем колебательном контуре равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{CL_1L_2}{L_1 + L_2}}.$$

б) Из соображений аналогии установим соответствия электрических и механических величин. Так, напряжение на конденсаторе соответствует силе упругости пружины. Используем закон сохранения энергии для механической колебательной системы:

$$\frac{F_0^2}{2k} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2},$$

где F_0 – сила упругости сжатой пружины, v_1 и v_2 – максимальные скорости грузиков. Поскольку грузики колеблются в противофазе с одинаковой частотой, максимальной скорости они достигают одновременно. Центр масс системы остается неподвижным, значит, не изменится импульс колебательной системы. Импульс системы относительно плоскости равен нулю, поэтому

$$m_1v_1 = m_2v_2.$$

Решая систему полученных уравнений, находим

$$v_1 = F_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{1}{k(m_1 + m_2)}},$$

$$v_2 = F_0 \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{1}{k(m_1 + m_2)}}.$$

А значит, наибольшие силы токов в каждой катушке равны

$$I_1 = U_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \frac{C}{L_1 + L_2}} \text{ и } I_2 = U_0 \sqrt{\frac{L_1}{L_2} \frac{C}{L_1 + L_2}}.$$

Задача 3. В схеме, изображенной на рисунке 7, левый конденсатор емкостью C_1 имеет заряд q_0 , а правый – емкостью C_2 – не заряжен.

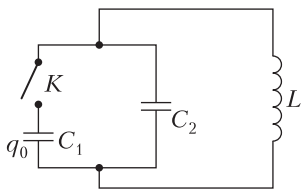


Рис. 7

а) Найдите уравнение изменения заряда в конденсаторах со временем после замыкания ключа.

б) Определите количество теплоты, выделившееся после установления гармонических колебаний в системе.

Данный электрический процесс можно наглядно продемонстрировать на аналогичной механической системе, представленной на рисунке 8. Проведем такой эксперимент:

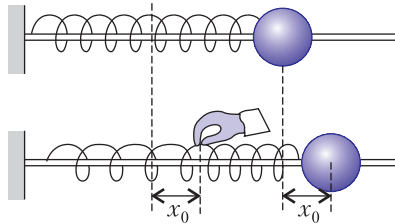


Рис. 8

захватим пружину за любой виток и растянем ее левую часть на некоторую величину x_0 . Правая часть пружины остается в недеформированном состоянии, так что груз в начальный момент смещен из положения равновесия вправо на x_0 и покоится. Затем пружину отпускаем, и возникают быстрые затухающие колебания самой пружины (из-за малости массы пружины по сравнению с массой груза период колебаний пружины очень маленький). Благодаря инертности, груз не успевает заметно сдвинуться, пока происходят затухающие колебания пружины. После затухания быстрых колебаний натяжение в пружине перераспределяется, а смещение груза остается равным x_0 . Таким образом, часть потенциальной энергии деформированной пружины превращается в тепло. Если обозначим жесткость левой части пружины через k_1 , а правой части через k_2 , то для общей жесткости k можем написать

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \text{ или } k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$

Итак, груз на пружине будет совершать гармонические колебания по следующему закону:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t,$$

$$\text{где } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

На начальном этапе внешней силой была совершена механическая работа, равная $\frac{k_1x_0^2}{2}$.

После установления гармонических колебаний в механической системе ее полная энер-

гия стала $\frac{kx_0^2}{2}$. При этом выделилось количество теплоты

$$Q = \frac{k_1 x_0^2}{2} - \frac{k x_0^2}{2}.$$

Вернемся к электрической системе, представленной в условии задачи. При замыкании ключа возникают быстрые затухающие колебания в контуре, состоящем из конденсаторов и соединяющих их проводов. Период таких колебаний очень мал, так как мала индуктивность соединительных проводов по сравнению с индуктивностью катушки. В результате этих колебаний заряд на пластинах конденсаторов перераспределяется, после чего два конденсатора можно рассматривать как один.

а) После затухания быстрых колебаний в системе происходят колебания, как в контуре с одним конденсатором емкостью $C_1 + C_2$, заряд которого в начальный момент равен q_0 :

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t, \text{ где } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L(C_1 + C_2)}}.$$

б) Количество теплоты, выделившееся после установления гармонических колебаний в электрической системе, равно

$$Q = \frac{q_0^2}{2C_1} - \frac{q_0^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Задача 4. В электрической цепи из двух одинаковых конденсаторов емкостью C и катушки индуктивностью L , соединенных последовательно (рис. 9), в начальный

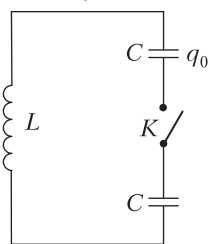


Рис. 9

момент один конденсатор имеет заряд q_0 , а второй не заряжен. Как будут изменяться со временем сила тока в контуре и заряды конденсаторов после замыкания ключа?

Механическая аналогия данной электрической системы показана на рисунке 10. Грузик массой m закреплен на гладкой плоскости. Если его отпустить, он начнет гармо-

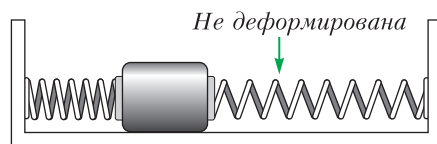


Рис. 10

нически колебаться. Из соображений симметрии колебания грузика происходят между точками 0 и x_0 с амплитудой $A = x_0/2$ (рис. 11). Считаем грузик материальной точкой. Скорость грузика меняется по гармоническому закону $v = v_0 \sin \omega_0 t$, где ω_0 — частота колебаний и v_0 — амплитуда скорости. Об-

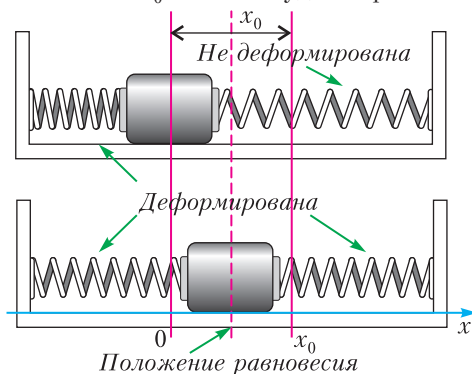


Рис. 11

щая жесткость системы пружин равна $2k$, поэтому $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Для того чтобы найти v_0 , воспользуемся законом сохранения энергии. Если x_1 — смещение левой пружины в момент времени t , то координата правой пружины равна $x_2 = x_0 - x_1$ и, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} + \frac{k(x_0 - x_1)^2}{2},$$

где v — скорость грузика в момент времени t . Отсюда находим

$$v^2 = \frac{2k}{m} x_1 (x_0 - x_1). (*)$$

Исследуя на экстремум это уравнение, убедимся, что v^2 максимально при $x_1 = x_0 - x_1 = x_0/2$. Поэтому для амплитуды скорости грузика получаем

$$v_0 = x_0 \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Следовательно,

$$v = x_0 \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin \omega_0 t.$$

Подставляя это выражение в (*), имеем

$$x_1 = \frac{x_0}{2} (1 + \cos \omega_0 t)$$

и, соответственно,

$$x_2 = x_0 - x_1 = \frac{x_0}{2} (1 - \cos \omega_0 t).$$

Все эти данные из механической аналогии перенесем на электрическую систему и получим следующие результаты:

- циклическая частота электрических колебаний в контуре равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$,

- сила тока в контуре меняется по гармоническому закону

$$I = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}} \sin \omega_0 t,$$

- амплитуда тока равна

$$I_0 = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}},$$

- заряд первого конденсатора меняется со временем по закону

$$q_1 = \frac{q_0}{2} (1 + \cos \omega_0 t),$$

- заряд второго конденсатора меняется со временем по закону

$$q_2 = q_0 - q_1 = \frac{q_0}{2} (1 - \cos \omega_0 t).$$

Следующая задача иллюстрирует обратный переход от механической системы к аналогичной электрической. Именно такой вид аналогии нашел широкое применение в науке и технике.

Задача 5. Найдите максимальную скорость груза на пружине в вязкой среде при действии на него переменной силы $f = 10 \sin 10t$ (Н) (рис. 12). Масса груза $m = 0,1$ кг, жесткость

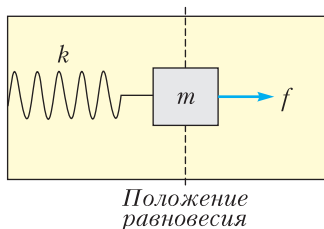


Рис. 12

пружины $k = 2$ Н/м, коэффициент сопротивления вязкой среды $\beta = 1$ Н·м/с. Сила сопротивления вязкой среды $F_{\text{вязк}} = -\beta v$.

В связи с тем, что такой сложный процесс, какой представлен в условии этой задачи, в школьном курсе физики не изучается, обратимся к аналогии. Аналогичная электрическая система представляет собой колебательный контур, содержащий внешний источник переменного тока (рис. 13). Из закона Ома

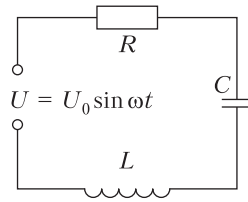


Рис. 13

для переменного тока находим максимальную силу тока в контуре:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Установим соответствия характеристик механической и электрической систем:

$$v \leftrightarrow i, f \leftrightarrow U, m \leftrightarrow L, k \leftrightarrow 1/C, \beta \leftrightarrow R.$$

Учитывая аналогичность систем, находим

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\beta^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2}}.$$

При подстановке данных из условия задачи

$$\beta = 1 \text{ Н} \cdot \text{м/с}, F_0 = 10 \text{ Н},$$

$$\omega = 10 \text{ с}^{-1}, m = 0,1 \text{ кг}$$

окончательно получаем

$$v_0 = 7,8 \text{ м/с}.$$

XLVI Турнир городов

Задачи осеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1 (4)¹. Дан описанный пятиугольник $ABCDE$. Центр его вписанной окружности лежит на диагонали AC . Докажите, что

$$AB + BC > CD + DE + EA.$$

Е.Бакаев

2 (4). В ряд лежат 100 камней: черный, белый, черный, белый, ..., черный, белый. Одной операцией либо выбирают два черных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в черный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только черные камни, и перекрашивают все эти черные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 черных камней, а потом 50 белых?

Е.Бакаев

3 (4). См. задачу М2818 «Задачника «Кванта»».

4 (5). Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 300 г на 4 куска. Затем мама распределяет 280 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?

А.Шаповалов

5 (5). Набор состоит из одинаковых трех-клеточных уголков, у которых центральные клетки испачканы краской. Прямоугольную доску покрыли в один слой уголками, не выходящими за пределы доски, а затем убрали уголки. Испачканные клетки оставили на доске следы. Всегда ли по этим следам можно узнать, как именно лежали уголки?

А.Грибалко

¹ В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждающихся за ее полное решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за разные пункты одной задачи суммируются).

10–11 классы

1 (3). См. задачу 2 базового варианта 8 – 9 классов.

2 (4). У двух многочленов с вещественными коэффициентами старшие коэффициенты равны 1. У каждого многочлена степень нечетна и равна числу его различных вещественных корней. Произведение значений первого многочлена в корнях второго равно 2024. Найдите произведение значений второго многочлена в корнях первого.

С.Янжинов

3 (5). В ряд записаны 5 натуральных чисел. Каждое из них, кроме первого, – наименьшее натуральное число, на которое не делится предыдущее. Могут ли все пять чисел быть различными?

Б.Френкин

4 (5). В равностороннем треугольнике ABC проведены отрезки ED и GF (рис. 1)

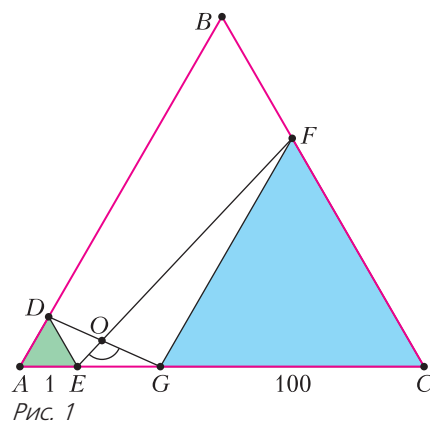


Рис. 1

так, что образовались два равносторонних треугольника ADE и GFC со сторонами 1 и 100 (точки E и G лежат на стороне AC). Отрезки EF и DG пересекаются в точке O , причем угол EOG равен 120° . Чему равна сторона треугольника ABC ?

М.Евдокимов

5 (5). Имеются чашечные весы без гирь и две кучи камней неизвестных масс, по 10 камней в каждой куче. Разрешается проводить сколько угодно взвешиваний, но на каждую чашу помещается не более 9 камней.

Всегда ли можно узнать, какая из куч тяжелее, или установить равенство их масс?

С.Дориченко

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашел сумму чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?

М.Дидин

2 (6). См. задачу M2821 а) «Задачника «Кванта».

3 (7). В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно (рис. 2). Прямые AI и CI вторично пересека-

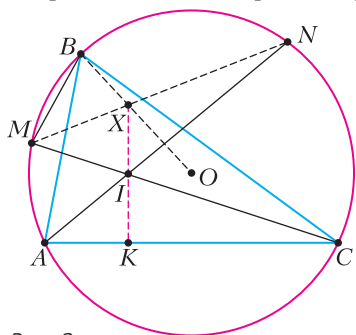


Рис. 2

ют описанную окружность треугольника ABC в точках N и M . Отрезки MN и BO пересекаются в точке X . Докажите, что прямые XI и AC перпендикулярны.

Ф.Ивлев

4. а) (5) См. задачу M2819 а) «Задачника «Кванта».

б) (3) См. задачу M2819 б) «Задачника «Кванта».

5 (8). На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.

Е.Бакаев

6 (10). См. задачу M2820 «Задачника «Кванта».

7 (10). Даны две строго возрастающие бесконечные последовательности положительных чисел, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно, что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в другой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть у этих последовательностей?

Б.Френкин

10–11 классы

1 (4). Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася?

М.Дидин

2 (6). Клетчатую доску 20×20 разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек.

А.Юран

3 (7). Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объема равен произведению площадей трех его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным?

А.Буфетов

4 (8). Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$, что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство

$$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \dots?$$

И.Лобацкий

5 (10). Дана окружность ω_1 , а внутри нее — окружность ω_2 (Рис. 3). Выбирают произвольную окружность ω_3 , которая касается двух предыдущих, причем оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2

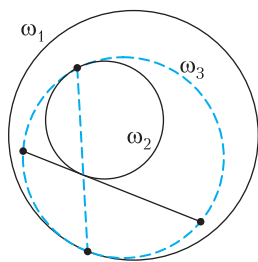


Рис. 3

и получают хорду окружности ω_3 . Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности.

П. Кожевников

6 (12). Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в

комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов. Число m назовем *волшебным числом замка*, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причем m – минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)

Т. Васильев

7 (14). См. задачу M2822 «Задачника «Кванта»».

Публикацию подготовили А.Грибалко, А.Глебов, Е.Веретенников, С.Дориченко, А.Заславский, П.Кожевников, М.Малкин, Л.Медников, Б.Френкин, А.Шаповалов, А.Юран

Региональный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

Теоретический тур

7 класс

Задача 1. Случай на эскалаторе

Экспериментатор Глюк и теоретик Баг одновременно ступили на параллельные эскалаторы в метро. Глюк едет сверху вниз, Баг – снизу вверх. Оба идут с постоянными скоростями по ходу движения. К моменту, когда друзья поравнялись, Глюк насчитал $N_1 = 144$ ступеньки, а Баг – $N_2 = 48$ ступенек.

1) Кто движется относительно эскалатора быстрее, Глюк или Баг, и во сколько раз?

2) Сколько ступенек N_4 насчитает Баг за все время движения, если Глюк за время движения насчитал $N_3 = 216$ ступенек?

3) Какое количество N ступенек можно насчитать, если идти по стоящему эскалатору?

Эскалаторы имеют одинаковую длину и движутся с одинаковыми скоростями.

А. Евсеев

Задача 2. Средняя скорость

Семиклассник, совершая поездку на дачу, через равные малые промежутки времени записывал путь, пройденный автомобилем. По этим данным он построил график зависимости пути s автомобиля от времени t (рис. 1). Но начинающий экспериментатор забыл оцифровать оси пути и времени. При этом он точно помнит, что между моментами, когда средняя путевая скорость принимала максимальное и минимальное значения, прошел

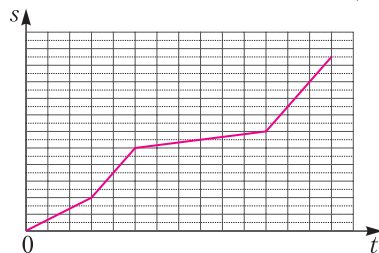


Рис. 1

ровно час, а средняя путевая скорость за последний час движения составила 50 км/ч.

Определите: 1) цену деления по оси t ; 2) цену деления по оси s (между сплошной и пунктирной линиями); 3) время в пути; 4) расстояние от дома до дачи; 5) мгновенную скорость на 40-й минуте; 6) во сколько раз минимальная мгновенная скорость движения меньше мгновенной скорости движения на последнем участке; 7) среднюю скорость на середине пути.

О.Инишева

Задача 3. Газировка

В ходе важного научного исследования был проведен опыт. В специальный стакан налили сладкую воду, после чего стали создавать в ней пузырьки газа. Постепенно увеличивая концентрацию пузырьков, исследователи фиксировали массу и объем газировки в стакане. Результат был занесен в таблицу. Определите:

- 1) плотность сладкой воды ρ_v ;
- 2) объем стакана V_c ;
- 3) объем одного пузырька V_0 .

К сожалению, значение массы в последнем столбце оказалось утеряно.

4) Используя уцелевшие данные, восстановите его. Считайте, что размеры пузырьков одинаковые.

Концентрация пузырьков, мм ⁻³	0	10	20	30
Масса, г	90	90	90	?
Объем, мл	90	99	110	110

Примечание. Концентрацией пузырьков n называют количество пузырьков в единице объема.

К.Кутелев

Задача 4. Грешные приборы

Ни один реальный прибор не дает возможности провести измерения с совершенной точностью. Поэтому в физике вводится понятие абсолютной погрешности прибора (чаще всего ее обозначают Δ). Полученный результат измерений, назовем его A , следует понимать как интервал возможных значений, т.е. реальное значение R измеряемой величины может быть любым в интервале

$$A - \Delta \leq R \leq A + \Delta.$$

Два грузовых поезда движутся с постоянными скоростями по пересекающимся желез-

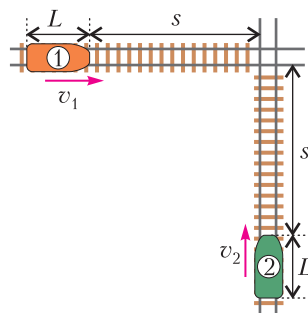


Рис. 2

нодорожным путям в направлении перекрестка (рис. 2). При этом они оба находятся на расстоянии $s = 7$ км от перекрестка. Длина поездов одинакова: $L = 1$ км. Считайте, что s и L измерены с очень высокой точностью. У локомотива первого поезда неисправен прибор для измерения скорости, поэтому машинист вынужден вычислять скорость, пользуясь подручными средствами. У него есть часы, которые позволяют измерить время с погрешностью $\Delta\tau = 2$ с. Также он может определять пройденное расстояние, ориентируясь по столбам, которые установлены через каждые $d = 200$ м вдоль путей, с погрешностью $\Delta d = 10$ м. Он замерил время прохождения между двумя соседними столбами и получил значение $\tau = 12$ с.

1) Исходя из данных, полученных машинистом первого поезда, определите, в каком диапазоне находится скорость его состава.

2) Какую скорость (в км/ч) должен показывать исправный спидометр второго поезда, имеющий погрешность $\Delta v = 1$ км/ч, чтобы на перекрестке гарантированно не произошло столкновение?

А.Евсеев

8 класс

Задача 1. Когда-то где-то

Когда-то где-то по прямому шоссе двигался равномерно автомобиль. Координаты автомобиля и моменты времени определял спутник GPS: иногда с погрешностью, иногда точно. Известно, что через 1,5 мин от начала наблюдения его координата была равна $(647,5 \pm 0,5)$ км, а через 3,5 мин — $(649,5 \pm 0,5)$ км. Еще известно, что в точке с координатой 648 км автомобиль был через $(2,25 \pm 0,25)$ мин от начала наблюдения, а в точке с координатой 651 км — через $(4,75 \pm 0,25)$ мин. Определите:

- 1) максимально возможную и минимально возможную скорости автомобиля;
- 2) путь автомобиля за 3 мин;
- 3) положение автомобиля через 3 мин 15 с от начала наблюдения.

А. Сеитов

Задача 2. Выигрышные блоки

Для систем, состоящих из нитей, подвижных и неподвижных блоков, применяемых для подъема грузов, можно ввести понятие выигрыша в силе k . Оно показывает, во сколько раз сила тяжести груза массой M превышает силу F , необходимую для его равномерного подъема, т.е. $k = \frac{Mg}{F}$. На ри-

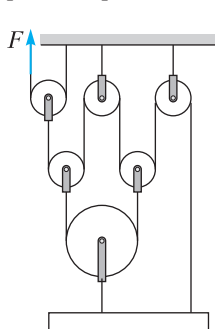


Рис. 3

сунке 3 представлена система, состоящая из нерастяжимых нитей пренебрежимо малой массы и шести блоков. Пусть данная система при равномерном подъеме груза массой M дает выигрыш в силе $k = 4$.

- 1) Какой выигрыш k_1 она даст при равномерном подъеме груза массой $M_1 = 3,5M$?

- 2) Какой максимальный выигрыш $k_{\max}$ в силе сможет дать такая система при равномерном подъеме груза?

- 3) Для каких масс грузов эта система может дать выигрыш в силе?

Трение в блоках отсутствует. Свободные участки нитей вертикальны. Два подвижных блока, расположенных на одной горизонтали, одинаковы. Считайте, что сила натяжения каждой нити постоянна по всей ее длине.

А. Евсеев

Задача 3. Меж двух жидкостей

Два открытых вертикальных цилиндрических сосуда соединены тонкой трубкой с краном (рис. 4). В сосу-

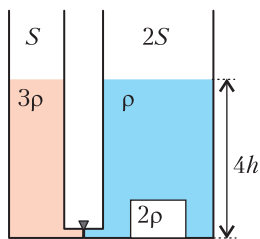


Рис. 4

де с площадью сечения S находится жидкостью плотностью 3ρ , а в сосуде с площадью сечения $2S$ – жидкостью плотностью ρ и шероховатый брусок, имеющий форму прямо-

угольного параллелепипеда. Высота бруска h , площадь основания S , плотность 2ρ . Высота столбов жидкости в сосудах одинакова и равна $4h$. Оба сосуда сверху открыты, жидкости не смешиваются, не сжимаются и не выливаются из сосуда. Объемом соединительной трубки можете пренебречь. Кран открывают. Определите высоту столбов жидкостей в каждом сосуде после того, как перетекание прекратится.

А. Евсеев

Задача 4. Тепловые шарики

В теплоизолированном сосуде находится $m_0 = 200$ г воды при температуре $t_0 = 20$ °С. В воду опускают шарик с теплоемкостью $C_{\text{ш}} = 200$ Дж/°С и температурой $t_{\text{ш}} = 98$ °С. После установления теплового равновесия температура в сосуде оказывается равной $t_1 = 35$ °С. Когда в сосуд, не вынимая первый шарик, опустили второй точно такой же шарик с той же температурой $t_{\text{ш}} = 98$ °С, то температура в сосуде после установления теплового равновесия оказалась равной $t_2 = 47$ °С. Не вынимая двух первых шариков, в сосуд помещают еще один точно такой же (начальная температура $t_{\text{ш}} = 98$ °С, теплоемкость $C_{\text{ш}} = 200$ Дж/°С). Определите t_3 – температуру теплового равновесия в этом случае. Считайте, что время опускания шарика в воду намного меньше времени установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость материала шариков $c = 500$ Дж/(кг · °С), плотность шариков $\rho_{\text{ш}} = 7800$ кг/м³, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Теплоемкостью сосуда можете пренебречь.

О. Инишева

9 класс

Задача 1. Импульсное ускорение

Частица двигалась в плоскости xu в положительном направлении оси x с постоянной скоростью, параллельной оси x . В момент времени $t = 0$ на нее начала действовать переменная сила, лежащая в плоскости xu . Действие этой силы привело к возникновению ускорения, которое периодически изменяло свое направление. Модуль ускорения при $t = 0$ был равен a и через каждый промежуток времени 2τ уменьшался в 2 раза. На рисунке 5 представлены графики зави-

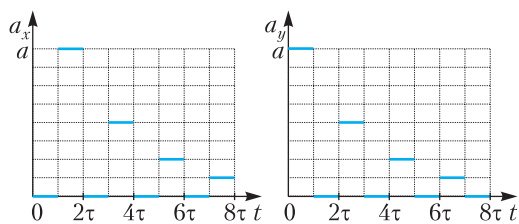


Рис. 5

симости проекций ускорения частицы от времени за некоторый начальный интервал времени. Считая известными a и τ , определите максимальную и минимальную (по модулю) скорости частицы, которая двигалась под действием этой силы в течение долгого времени. При этом скорость частицы отклонялась от первоначального направления движения на максимальный угол α .

Примечание. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна $b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots$

$$\dots = \sum_{i=0}^{\infty} bq^i = \frac{b}{1-q}, \text{ где } |q| < 1.$$

К. Кутелев

Задача 2. Другой уровень

См. задачу Ф2838 «Задачника «Кванта».

Задача 3. Не падать

Один конец невесомого жесткого стержня длиной L с закрепленным на конце маленьким шариком массой m касается массивного клина с углом α при основании (рис. 6). Другой конец стержня шарнирно закреплен в точке O . Систему удерживают в некотором положении, а затем отпускают. В момент, когда стержень горизонтален, шарик отрывается от клина. Найдите скорость v клина в этот момент. Ускорение свободного падения g считайте известным. Трения в системе нет.

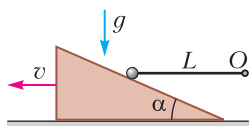


Рис. 6

В. Савинцев

Задача 4. Тепловой цикл

Экспериментатор Глюк поставил на газовую плиту кастрюльку с водой. Вода имеет неизвестные начальные массу M и температуру t_1 . Ненадолго отвлекшись, он обнаружил, что большая часть воды уже выкипела. Глюк осознал, что процесс нагревания нужного количества воды придется начинать

сначала. Он выключил плиту и с небольшим постоянным массовым расходом μ стал доливать в кастрюлю холодную воду температурой $t_x = 20^\circ\text{C}$. Когда масса воды в кастрюльке стала равна начальной, температура воды также оказалась равна начальной температуре. Диаграмма зависимости температуры воды в кастрюле в течение эксперимента от величины, обратной к общей массе воды в кастрюле, представляет собой замкнутый цикл 1–2–3–1, причем времена кипения воды на участке 2–3 и доливания холодной воды на участке 3–1 одинаковые. После окончания эксперимента Глюк случайно пролил воду на график, поэтому точка 1, участки 1–2 и 3–1 на графике оказались не видны, а единицы измерения одной из осей потеряны (рис. 7).

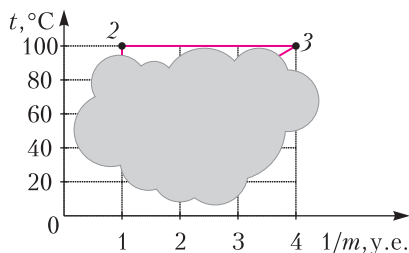


Рис. 7

1) Считая известными коэффициент полезного действия (КПД) газовой плиты $\eta = 0,5$, массовый расход газа $\mu_0 = 0,14$ г/с и удельную теплоту его сгорания $q = 33$ МДж/кг, определите полезную мощность плиты P . Здесь коэффициентом полезного действия называется отношение полезной мощности, поступающей к воде в кастрюле, к общей мощности, выделяющейся при сгорании газа.

2) Определите массовый расход холодной воды μ на участке 3–1.

3) Определите температуру t_1 воды в точке 1. Восстановите вид всей диаграммы.

4) Во сколько раз время t_{23} , в течение которого вода кипела на участке 2–3, больше, чем время t_{12} нагревания воды на участке 1–2?

Тепловых потерь нет. Испарением на участках 1–2 и 3–1 и теплоемкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), температура кипения воды $t_{100} = 100^\circ\text{C}$.

Д. Рубцов

Задача 5. Ваттметр

Экспериментатор Глюк нашел на чердаке ваттметр и технический паспорт к нему. В паспорте была схема устройства ваттметра, приведенная на рисунке 8, а также было указа-

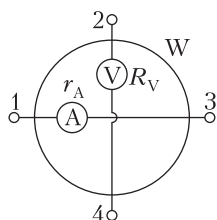


Рис. 8

но: «Ваттметр выводит на экран модуль произведения показаний амперметра и вольтметра, встроенных внутри прибора. Контакты 1 и 3 подключены к амперметру с внутренним сопротивлением $r_A = 5 \text{ Ом}$, а контакты 2 и 4 — к вольтметру с внутренним сопротивлением $R_V = \infty$. К сожалению, от времени чернила выцвели и Глюк не смог разобрать величину сопротивления вольтметра. Кроме того, на приборе не было видно подписей контактов. Глюк, решив во всем

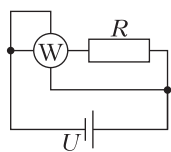


Рис. 9

разобраться, собрал цепь, схема которой изображена на рисунке 9. В цепь он включил идеальный источник постоянного напряжения и резистор сопротивлением $R = 500 \text{ Ом}$. Ваттметр, подключенный к цепи, показал значение $P_1 = 100 \text{ Вт}$. Затем Глюк вытащил ваттметр из цепи, повернул его на 90° и снова вставил в цепь. После этого прибор показал значение $P_2 = 1,0 \text{ Вт}$. Изображение ваттметра на обеих схемах соответствует его внешнему виду.

1) Определите внутреннее сопротивление вольтметра R_V , считая, что оно больше сопротивления амперметра ($R_V > r_A$).

2) Можно ли, используя те же самые элементы, собрать цепь так, чтобы ваттметр показал значение P_3 в диапазоне от 5 мВт до 20 мВт ? Ответ подтвердите расчетами и приведите либо доказательство невозможности, либо одну схему, удовлетворяющую интервалу.

М.Муравьев, И.Гурьянов

10 класс

Задача 1. Исследовательский зонд

Исследовательский зонд, находящийся на круговой орбите радиусом R вокруг планеты Шелезяка, изучает движение Болтика — маленького спутника планеты. Орбита Болтика также является круговой с радиусом r ($r < R$)

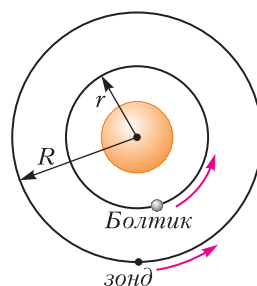


Рис. 10

и лежит в той же плоскости, что и орбита зонда (рис. 10). В процессе наблюдения приборы зонда зафиксировали, что Болтик спустя $t_1 = 165 \text{ мин}$ после пересечения им видимого края диска планеты оказался на максимальном угловом расстоянии $\theta_{\max} = 15^\circ$ от центра Шелезяки, а еще спустя некоторое время, большее t_1 , снова пересек край видимого диска планеты. Известно, что между указанными пересечениями других пересечений Болтика с видимым краем планеты не было. Планета Шелезяка имеет форму шара и лишена атмосферы. Масса Болтика много меньше массы планеты, зонд и спутник обращаются вокруг планеты в одну и ту же сторону. Угловой диаметр планеты, наблюдаемый зондом, равен $2\theta_0 = 6^\circ$. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

1) Определите отношение R/r .

2) Чему равен период обращения зонда T вокруг Шелезяки?

3) Найдите среднюю плотность Шелезяки ρ .

Примечание. Угловым расстоянием между точками A и B называется величина угла ASB , на сторонах которого лежат рассматриваемые точки, а вершина S находится в точке наблюдения (рис. 11,а). Угловым диамет-

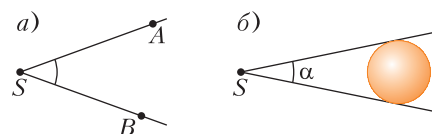


Рис. 11

ром астрономического объекта (например, звезды или планеты) называется величина максимально возможного угла α между двумя касательными к поверхности рассматриваемого объекта, вершина которого находится в точке наблюдения S (рис. 11,б).

А.Заяц

Задача 2. С ускорением

См. задачу Ф2839 «Задачника «Кванта».

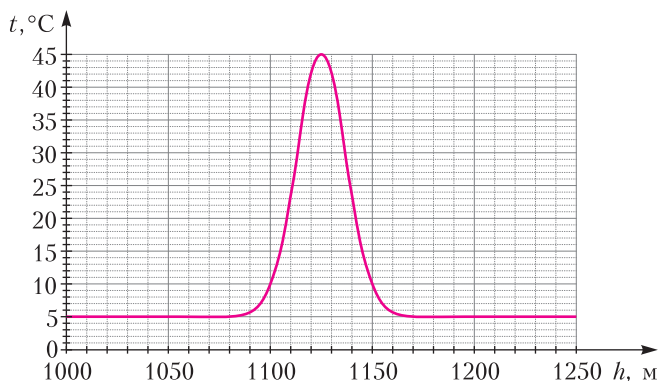


Рис. 12

Задача 3. Пузырек черного курильщика

В океанах на большой глубине около срединно-океанических хребтов могут встречаться такие источники тепла, как черные курильщики. Они извергают геотермальную воду высокой температуры. После одного из таких выбросов в толще океана появился слой теплой воды, температура t в котором изменялась с глубиной h так, как показано на рисунке 12. Продукты выброса черных курильщиков также часто содержат различные газы, которые формируют пузырьки.

1) Найдите все возможные значения глубины, на которых пузырек в воде будет находиться в равновесии.

2) Определите, являются ли найденные положения равновесия устойчивыми. Считайте, что течение в воде отсутствует и она находится в состоянии покоя; пузырек всегда имеет форму шара и давление внутри него равно внешнему давлению воды; газ внутри пузырька можно считать идеальным; температура внутри пузырька равна температуре окружающей воды; газ не растворяется в воде. Молярная масса газа $M = 222$ г/моль, плотность воды постоянна и равна $\rho_v = 1020$ кг/м³, универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Л. Колдунов

Задача 4. Точно не Снеллиус?

Даны светящийся отрезок AB , точка B' – изображение точки B , создаваемое некоторой тонкой линзой, и прямая α , проходящая через точку B' (рис. 13). Известно, что точка B' лежит в плоскости двойного фокуса



Рис. 13

линзы, а точка A' (изображение точки A) лежит на прямой α . Для всех возможных ситуаций с помощью циркуля и линейки без делений восстановите:

- 1) положение оптического центра линзы;
- 2) положение линзы и положение ее главной оптической оси;
- 3) положение фокусов линзы;
- 4) положение точки A' .

Считайте, что данная линза любые лучи (даже непараксиальные) преломляет по тем же правилам, что и параксиальные. Параксиальный луч – это луч, идущий под малым углом к главной оптической оси линзы и на малом расстоянии от нее.

А. Шишкина

Задача 5. Усилитель

В данной задаче рассматривается упрощенный принцип работы трехконтактного элемента электрической цепи – *полевого транзистора*. Контакты данного элемента называются «исток», «сток» (имеется в виду исток и сток электронов) и «затвор» (рис. 14). При этом сила тока через затвор много меньше силы тока, текущего между стоком и истоком. Вольт-амперная характеристика транзистора, т.е. зависимость силы тока I , текущего между стоком и истоком, от напряжения U между ними управляется напряжением $U_{зи}$, созданным между затвором и истоком (полярность подключения, соответствующая положительным значениям U и $U_{зи}$, указана на рисунке 14).

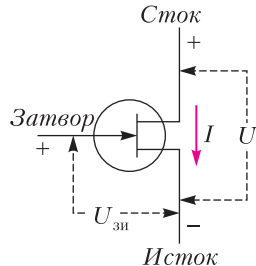


Рис. 14

В простейшей модели полевого транзистора его вольт-амперная характеристика описывается графиком, представленным на рисунке 15,а. При любых положительных напряжениях U между стоком и истоком через транзистор течет постоянный ток $I_{\text{нас}}$, называемый током насыщения. Сила тока насыщения зависит от напряжения $U_{\text{зи}}$, созданного между затвором и истоком, так, как показано на рисунке 15,б.

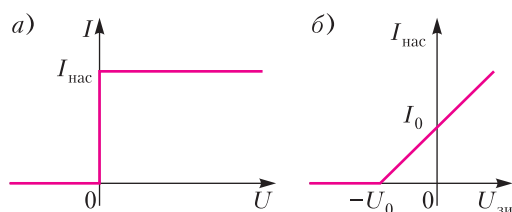


Рис. 15

На основе данного транзистора был собран простейший усилитель, т.е. устройство, позволяющее увеличить амплитуду переменного напряжения. Схема такого устройства

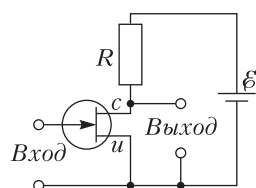


Рис. 16

изображена на рисунке 16 (буквами «с» и «и» отмечены, соответственно, сток и исток транзистора). На вход усилителя подается переменное напряжение синусоидальной формы с амплитудой U_a , зависимость $U_{\text{зи}}$ от времени t для которого представлена на рисунке 17, и определяют напряжение $U(t)$ на выходе. При решении задачи считайте известными параметры транзистора: $I_0 = 0,5 \text{ A}$, $U_0 = 1 \text{ В}$, напряжение батареи $\varepsilon = 10 \text{ В}$, а также то, что батарея является идеальной. Амплитудой колебаний называется значение максимального отклонения исследуемой величины от ее среднего значения.

1) При каких значениях U_a зависимость напряжения U на выходе усилителя от време-

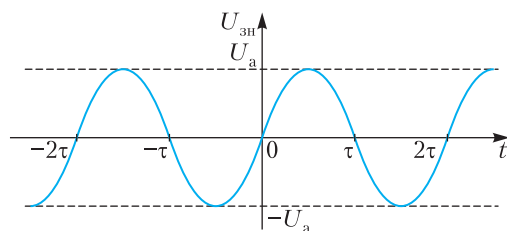


Рис. 17

ни будет иметь форму синусоиды, если сопротивление резистора равно: а) $R = 5 \text{ Ом}$; б) $R = 16 \text{ Ом}$?

2) Определите коэффициент усиления K , т.е. отношение амплитуды напряжения на выходе усилителя к амплитуде напряжения на входе, если $R = 5 \text{ Ом}$ и сигнал на входе усилителя имеет синусоидальную форму.

3) Постройте график зависимости выходного напряжения U от времени t , если $U_a = 2 \text{ В}$ и $R = 8 \text{ Ом}$. Отметьте на графике его основные особенности, укажите ключевые значения напряжений.

Ю. Черников

11 класс

Задача 1. Зацепился

См. задачу Ф2837 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Больше или меньше

См. задачу Ф2840 «Задачника «Кванта».

Задача 3. Зарядка аккумулятора

Иногда электродвигатель можно использовать в качестве генератора напряжения. Рассмотрим в качестве примера электродвигатель, в котором магнитное поле создается постоянным магнитом статора, и тогда при совершении работы по вращению в этом поле ротора двигателя в нем создается ЭДС индукции. Будем поддерживать вращение ротора за счет натяжения легкого нерастяжимого троса с массивным грузом, который плавно (и практически равномерно) опускается с некоторой высоты H . Отметим, что в таком режиме сила тока в обмотке ротора прямо пропорциональна силе натяжения троса. Возникшая ЭДС используется для зарядки аккумулятора, заряд которого увеличивается на величину $Q_1 = 300 \text{ мА} \cdot \text{ч}$. Если подключить этот аккумулятор к двум таким же параллельно соединенным электродвигателям и опустить тот же груз с той же высоты на двух одинаково нагруженных тросах, каждый из которых вращает ротор одного из электродвигателей, то приобретаемый заряд станет равным $Q_2 = 400 \text{ мА} \cdot \text{ч}$.

1) Во сколько раз отличается время зарядки в первом и втором случае?

2) Во сколько раз сила тока зарядки аккумулятора в первом и втором случае отличается от силы тока в цепи ротора одного электродвигателя с закрепленным неподвижно

ротором при подключении его к этому аккумулятору?

3) Какой заряд приобретет аккумулятор, если аналогичным образом использовать для его зарядки три таких электродвигателя?

Изменением ЭДС аккумулятора в процессе зарядки, внутренним сопротивлением аккумулятора и действием на груз сил сопротивления воздуха пренебречь.

К.Парфенов

Задача 4. Петля с током

В горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией B висит гибкая проводящая нить длиной L , по которой течет ток I (рис. 18). Оба конца нити подвешены прак-

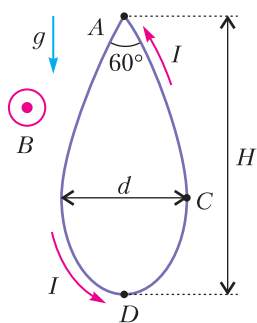


Рис. 18

тически к одной и той же точке A . В равновесном положении эти концы образуют друг с другом угол $\alpha = 60^\circ$, а расстояние между точкой подвеса и самой нижней точкой нити $H = L\sqrt{3}/4$. Ускорение свободного падения равно g . Собственным магнитным полем тока можно пренебречь. Нить является однородной.

1) Найдите массу нити m и силу натяжения нити T_D в ее нижней точке (точка D на рисунке).

2) Определите силу натяжения нити T_C в ее крайне правой точке (точка C на рисунке).

3) Найдите расстояние d между крайне левой и крайне правой точкой висящей нити.

А.Заяц

Задача 5. Я надел свои очки

Часто на портретных фотографиях, сделанных с помощью камеры смартфона, в отражении очков фотографирующего можно увидеть изображение его смартфона (рис. 19). Определите по фотографии радиус кривизны поверхности очков, оцените погрешность



Рис. 19



Рис. 20

измерений. Считайте, что расстояние между смартфоном и очками известно точно и равно $L = 50$ см. На рисунке 20 изображены смартфон и очки, лежащие рядом друг с другом. Длины, необходимые для получения числового ответа в задаче, можно измерить с помощью линейки по фотографиям.

Ю.Черников

*Публикацию подготовили
А.Вергунов, В.Шевченко*

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №2)

1. Карточка с числом 6.

Из первого утверждения Ани следует, что у нее хотя бы две карточки. Тогда у каждого из остальных, в том числе у Бори, не более трех карточек. Сумма всех чисел на карточках равна $1 + 2 + \dots + 7 = 28$. Если у Бори нечетная сумма, то он мог исключить вариант, что у всех остальных суммы нечетны, только в случае, когда у него ровно три нечетные карточки. Действительно, если бы у него была одна нечетная карточка, то всем остальным могло тоже достаться по одной нечетной карточке. А если сумма у Бори четная, то вариант, что у всех остальных суммы четны, он мог исключить только в случае, когда ему достались все три четные карточки. Действительно, если бы у него было не более одной четной карточки, то у двоих могло быть по одной четной карточке (и, возможно, у кого-то из них еще две нечетные), а у третьего – все оставшиеся. А если бы у Бори было две четные карточки, то могла быть ситуация, когда одному досталась третья четная карточка, а еще двоим – по две нечетные. Таким образом, из высказывания Бори можно понять, что у него ровно три карточки, причем все с числами одной четности. Тогда у Ани ровно две карточки, а у Вовы и Гены – по одной.

Аня	Боря	Вова и Гена
1,2	3,5,7	4,6
1,3	2,4,6	5,7
1,4	3,5,7	2,6
1,5	2,4,6	3,7
2,3	1,5,7	4,6
2,4	1,3,5	6,7
	1,3,7	5,6
	1,5,7	3,6
	3,5,7	1,6

Второму утверждению Ани соответствуют следующие пары чисел: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4). В таблице показано, какие варианты возможны в каждом из этих случаев. Из нее видно, что если бы у Вовы была карточка с числом 1 или 2, то он понял бы, какие числа у Ани. В обоих случаях Гене досталась бы карточка с числом 6. Для всех остальных чисел у Вовы есть как минимум два варианта, какие числа могут быть у Ани.

2. Может.

На рисунке 1 показан пример обертки, вырезанной из полоски шириной 2 клетки. Буквы пока-

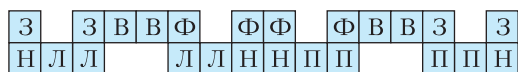


Рис. 1

зывают, какую грань покрывает клетка: Ф – фронтальную, З – заднюю, П – правую, Л – левую, В – верхнюю, Н – нижнюю.

3. Раскрасим треугольники в шахматном порядке так, чтобы угловые были черными. Тогда черных треугольников 55, поэтому хотя бы четыре из них принадлежат одной полоске. В этой полоске не меньше семи треугольников.

4. Рассмотрим схему дорог, показанную на рисунке 2: точки – города, сплошные линии – железные дороги, пунктирные – автомобильные.

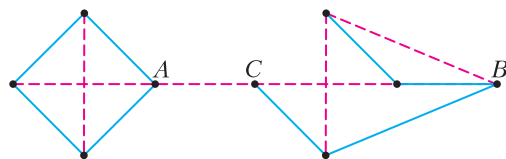


Рис. 2

Чтобы попасть из города А в город В, Васе придется проехать по автомобильной дороге из города А в город С. Далее его маршрут определяется однозначно, но он идет по циклу по четырем городам и не заходит в город В.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №1)

17. Да.

Пусть внешние углы треугольника это α , β , γ ; их сумма $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. Поставим часовых в вершины углов треугольника так, чтобы они полностью закрывали внешние углы, как показано на рисунке 3. Для того чтобы закрыть угол величиной ϕ , достаточно $\left\lceil \frac{\phi}{30^\circ} \right\rceil$ часовых ($\lceil x \rceil$ обозначает результат округления числа x до ближайшего целого в большую сторону). Пусть

$$a = \left\lceil \frac{\alpha}{30^\circ} \right\rceil, b = \left\lceil \frac{\beta}{30^\circ} \right\rceil, c = \left\lceil \frac{\gamma}{30^\circ} \right\rceil.$$

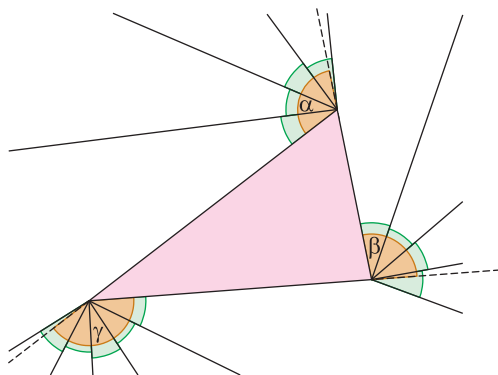


Рис. 3

Покажем, что $a + b + c \leq 14$. Из определения числа a понятно, что $a \cdot 30^\circ < \alpha + 30^\circ$. Аналогично для b и c . Сложив три неравенства, получим

$$(a + b + c) \cdot 30^\circ < (\alpha + \beta + \gamma) + 30^\circ \cdot 3 = 30^\circ \cdot 15,$$

откуда $a + b + c < 15$. Таким образом, мы получили, что в этом расположении часовых участвует не более 14 человек.

18. Могло.

Будем обозначать доминошку с a и b точками на половинках как ab . Выложим доминошки в порядке 00, 01, 02, ..., 06, 11, 12, ..., 16, 22, 23, ..., 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66. После склеивания и разрезания получим доминошки 60, 00, 10, 20, ..., 50, 61, 11, ..., 51, 62, 22, ..., 52, 63, 33, 43, 53, 64, 44, 54, 65, 55, 66. В каждой группе доминошек, начинавшихся с клетки с одним и тем же количеством точек, встречаются все те же доминошки, только теперь они повернуты в обратную сторону и доминошка с 6 точками на другой клетке переставлена в начало – т.е. снова получился полный набор.

19. 4.

Покажем сначала, как за 4 попытки гарантированно понять, в какой шкатулке цветок. Выберем шкатулки 1, 2, 3 и 4, как показано на рисунке 4, и будем открывать их по очереди,

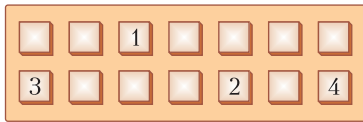


Рис. 4

пока не услышим какой-нибудь звук. Если это вальс, то мы нашли цветок. Если колокольчик зазвенел после открывания шкатулки 1 или 2, то шкатулка с цветком – одна из трех соседних, и, проверив две из них, мы либо найдем цветок, либо поймем, что он находится в оставшейся. Если колокольчик зазвенел после шкатулки 3, то, аналогично, цветок находится в одной из двух соседних с ней шкатулок, и, открыв любую из них, мы поймем, цветок был в ней или в другой. Наконец, если и после шкатулки 3 мы не слышали звуков, то остались только 3 шкатулки, в которых может быть цветок. Звук при открытии шкатулки 4 скажет, находится ли цветок в ней (вальс), в соседней шкатулке (колокольчик) или в оставшейся (тишина).

За три попытки найти шкатулку с цветком не получится: у каждой шкатулки не более 3 соседей, поэтому 3 открытые шкатулки и их соседи – это не более 12 шкатулок. Если все 3 раза, открыв шкатулку, мы не слышали никакого звука, то цветок может быть в любой из по-

крайней мере $14 - 12 = 2$ оставшихся шкатулок, т.е. определить его положение мы не сможем.

20. 5572.

Пусть

$$B = 2025 * 2024 * 2023 * \dots * 8,$$

$$A = B * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1.$$

Согласно определению операции «снежинка»,

$$B * 7 = B \cdot 7 - 7 \cdot B - 7 \cdot 7 + 77 = 28.$$

Поэтому

$$A = 28 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5572.$$

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. 1/8.

2. В трех из четырех равновероятных событий выпадет «орел», поэтому искомая вероятность равна 3/4.

3. 1/18, поскольку из 36 вариантов одна их половина соответствует другой (например, выпадения 3 и 5 равнозначно выпадению 5 и 3).

4. а) 1/4; б) 1/2; в) 1/9.

5. 6/14 = 3/7, поскольку из 14 извлечений шара 6 благоприятствуют искомому событию.

6. Вероятность того, что точка разлома находится в левой или правой половине стержня, одинакова. Если эта точка находится в левой половине, то левый кусок и является меньшим, его средняя длина равна половине от этой половины, что составляет четвертую часть стержня. То же – и для правой половины.

7. а) 1/4; б) 1/2; в) 1/2.

8. $w = (1 - V/V_0)^N$.

9. $\Delta\Omega/(4\pi)$; 1/8.

10. Решение задачи опирается на равновероятность направлений векторов скоростей молекул, поэтому: а) $v_{\text{кв}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{3p/\rho} \approx 280$ м/с; б) $v_{\text{кв}}^2/(3kT)$.

11. Нет, так как это был бы самопроизвольный переход от более вероятного состояния к состоянию, вероятность которого ничтожно мала.

12. Надежность схемы а): $p_1 = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504$; схемы б): $p_2 = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$. Надежность схемы б) больше.

13. Постоянная распада λ – это не что иное, как вероятность распада одного ядра за одну секунду, поэтому

$$\lambda = \ln 2/T_{1/2} \approx 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}; w = 1 - 2^{-t/T_{1/2}} \approx 0,37.$$

Микроопыт

Диаметр капли в воде растет, поскольку движение каждой молекулы чернил – это случайное блуждание между молекулами воды, подчиняющееся закону вероятностного движения.

XLVI Турнир городов

Задачи осеннего тура

Базовый вариант

8 – 9 классы

1. При симметрии относительно прямой AC , содержащей диаметр окружности (рис. 5), касательные AB и CB перейдут в касательные AE и CD соответственно, поэтому лучи AE и CD пересекутся в точке B' , симметричной точке B . Поскольку $AB + BC = AB' + B'C$, требуемое

Рис. 5

$$AB' + B'C > CD + DE + EA \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AE + EB' + B'D + DC > CD + DE + EA \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EB' + B'D > DE,$$

что верно по неравенству треугольника.

2. Нельзя.

Назовем кластером максимальную группу подряд лежащих камней одного цвета.

Первое решение. В начале все кластеры нечетны: имеют длину 1. Заметим, что если в какой-то момент все кластеры нечетны, то после применения операции все будут нечетны: три нечетных кластера «склеиваются» в один. Поэтому никогда не появятся два четных кластера.

Второе решение. Заметим, что 50-й камень – белый, а 51-й – черный. Оба их надо перекрасить. Один из этих двух камней перекрасится первым, после чего они станут одноцветными и далее уже всегда будут одноцветными (так как каждой операцией перекрашивается какой-то кластер целиком). Значит, сделать их черным и белым, как требуется, мы не сможем.

4. Сын.

Уменьшим все в 20 раз: у сына станет 15 г сыра, у матери 14 г масла. Сын делит сыр на куски в 1, 2, 4 и 8 г. Пусть на одной тарелке не больше k г, но больше $k - 1$ г масла, где k – целое число. Тогда на второй тарелке масла меньше $15 - k$ г. Сын кладет на первую тарелку k г (как известно, из чисел 1, 2, 4, 8 можно составить любую целую

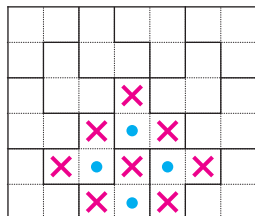


Рис. 6

сумму от 1 до 15), а на вторую $15 - k$ г.

5. Не всегда.

На рисунке 6 представлено разбиение прямоугольника 6×7 на уголки. Отразим фигуру из четырех отмеченных уголков отно-

сительно ее вертикальной оси симметрии. Фигура перейдет в себя, следы – в следы, а разбиение поменяется.

10 – 11 классы

2. –2024.

Пусть $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$, $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)$. По условию

$$\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m (b_j - a_i) = 2024.$$

Надо найти

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (a_i - b_j).$$

Поскольку m и n нечетны, это произведение отличается от предыдущего лишь знаком.

3. Не могут.

Пусть n – первое число в строке. Если n делится на какие-то степени (с натуральными показателями) различных простых чисел, то оно делится и на произведение этих степеней. Поэтому наименьшее число, на которое не делится n , – степень (возможно, первая) какого-то простого числа p . Если $p = 2$, то третье число в строке равно 3, четвертое равно 2, а пятое снова 3. Если же p нечетно, то третье число равно 2, четвертое 3 и пятое снова 2. В любом случае пятое число равно третьему.

4. 111.

Заметим, что (рис. 7)

$$\begin{aligned} \angle FEG &= \angle OEG = 60^\circ - \angle OGE = \\ &= 60^\circ - \angle DGE = \angle GDE. \end{aligned}$$

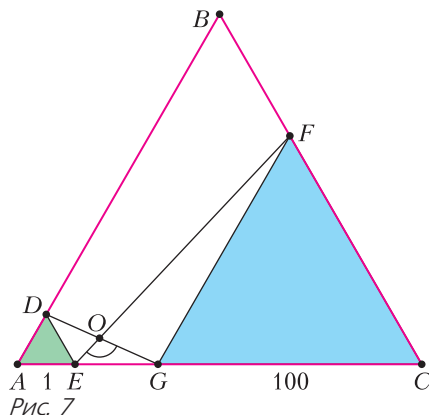


Рис. 7

Значит, треугольники FGE и GED подобны по двум углам (ведь еще $\angle DEG = \angle FGE = 120^\circ$), откуда $FG : GE = GE : ED$, поэтому $GE = \sqrt{FG \cdot ED} = 10$, и далее $AC = 1 + 10 + 100 = 111$.

5. Не всегда.

Пусть нам даже известны массы всех камней, кроме одного: в первой куче все камни по 10 г, во второй – 9 камней по 1 г и один камень массой больше 90 г, назовем его большим. Тогда резуль-

таты взвешиваний без большого камня нам и так известны заранее, а при любом взвешивании с участием большого камня перевесит чаша, на которой он лежит. При этом масса первой кучи равна 100 г, а масса второй — любое число, большее 99 г. Если оно при этом меньше 100 г, то тяжелее первая куча, если больше 100 г — то вторая. Поэтому сравнить кучи не удастся.

Сложный вариант

8 — 9 классы

1. Могут.

Годятся цифры 2 и 6. Напишем, например, числа 6, 22, 26, 26, 62, 66. Приведем для каждой цифры от 1 до 9 сумму с этой первой цифрой: $128 = 62 + 66$; $28 = 22 + 6$; $32 = 26 + 6$; $48 = 22 + 26$; $52 = 26 + 26$; $68 = 62 + 6$; $72 = 66 + 6$; $88 = 62 + 26$; $92 = 66 + 26$.

Замечание. Можно доказать, что примеров с другими цифрами нет.

3. Заметим, что M и N — середины дуг AB и BC соответственно (рис. 8). Поэтому треугольники

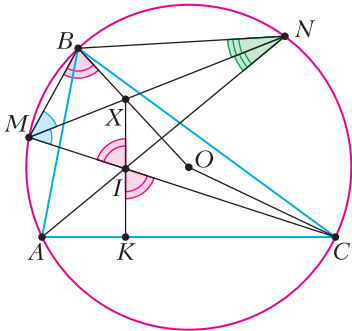


Рис. 8

MBN и MIN равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Значит, треугольники MBX и MIX равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда

$$\begin{aligned} \angle KIC &= \angle MIX = \angle MBX = \angle MBA + \angle ABO = \\ &= \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 2C) = 90^\circ - \angle KCI, \end{aligned}$$

т.е. угол IKC прямой, что и требовалось.

Замечание. Равенство треугольников MBN и MIN следует также из леммы о трезубце.

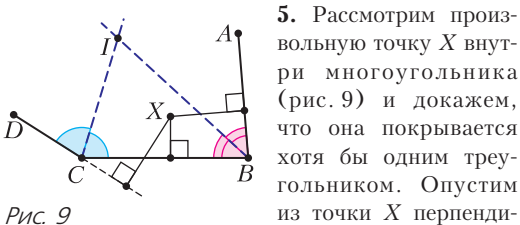


Рис. 9

5. Рассмотрим произвольную точку X внутри многоугольника (рис. 9) и докажем, что она покрывается хотя бы одним треугольником. Опустим из точки X перпенди-

куляры на все стороны (или их продолжения). Выберем сторону BC , для которой такой перпендикуляр самый короткий. Докажем, что треугольник BCI , построенный на этой стороне, содержит точку X . Биссектриса состоит из точек угла, которые равноудалены от сторон угла, и делит угол на две части: в каждой из них до одной из сторон ближе, чем до другой. (Это верно для углов, меньших развернутого, а у выпуклого многоугольника все углы такие.) Поэтому точка X лежит по ту же сторону от биссектрисы BI , что и сторона BC , и по ту же сторону от биссектрисы CI , что и сторона BC , а значит, лежит внутри треугольника BCI .

7. Два.

Правило построения последовательностей назовем просто *правилом*. Пусть два совпадения в последовательностях нашлись, рассмотрим второе. Если предыдущие члены тоже равны, то по правилу одна из последовательностей содержится в другой (так как они бесконечны), что запрещено. Пусть они не равны. Будем считать, что последовательности начинаются с них, и докажем, что теперь совпадение равно одно. Итак, первая последовательность — $a_1, a_2, \dots$, вторая — $b_1, b_2, \dots$, причем $a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3$.

Складывая первое и третье сравнения, получаем, что $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$, т.е. по правилу $a_3 < b_3$. Складывая второе и четвертое сравнения, получаем, что $b_1 + b_2 < a_2 + a_3$, т.е. по правилу $b_3 < a_4$. Действуя далее аналогично, получаем, что $a_n < b_n$ для каждого $n > 2$ и $b_n < a_{n+1}$ для всех натуральных n . Значит, больше совпадений не будет, поскольку последовательности идут так:

$$a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3 < b_3 < a_4 < b_4 < a_5 < \dots$$

Пример: 1, 2, 3, 5, ... и 1, 3, 4, 7, ...

Комментарии. 1. Если последовательности не обязательно строго возрастают, совпадений может быть три: например, для последовательностей 1, 2, 3, 5, 8, ... и 2, 1, 3, 4, 7, ...

2. Если последовательности конечны, совпадений может быть сколько угодно. Например, можно взять первые n членов последовательности Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... как первую последовательность и члены со второго по $(n+1)$ -й — как вторую.

10 — 11 классы

1. Может.

Назовем числа, начинающиеся на 1 или 2, *мелкими*, а начинающиеся на 7, 8 или 9, — *крупными*. Заметим, что сразу после каждого крупного числа на доске появится мелкое. В самом деле, если в крупном числе A всего k разрядов, то

$7 \cdot 10^{k-1} \leq A < 10^k$, откуда $1,4 \cdot 10^k \leq 2A < 3A < 3 \cdot 10^k$, т.е. после A появится число, в котором k разрядов, а первая цифра 1 или 2. Поэтому, если второе мелкое число появится на доске раньше первого крупного, то крупных чисел всегда будет меньше. Петя может начать, например, с мелкого числа 112. Чтобы помешать Пете, Вася вынужден умножить его на 3 (получится 336), потом на 2 (672). Умножение 672 как на 2, так и на 3 даст мелкое число.

Есть много других примеров: скажем, Петя может начать с числа 17.

2. Рассмотрим 20 клеток, «нанизанных» на главную диагональ. Они принадлежат 20 разным доминошкам. Центры этих доминошек лежат на двух прямых, параллельных главной диагонали, поэтому на одной из этих прямых таких центров не меньше 10.

Комментарий. На самом деле, на каждой из этих двух прямых лежит ровно по 10 центров. Это следует из задачи В.Произволова о том, что ровно 10 доминошек, «нанизанных» на диагональ, смотрят в одну из половин доски, а оставшиеся 10 – в другую. (Проверьте, раскрасив доску в шахматном порядке и подсчитав количество клеток каждого цвета в каждой из половин.)

3. Нет.

Пусть a, b, c – стороны параллелепипеда, h – его высота, опущенная на грань со сторонами a и b . Обозначим через S_{ab}, S_{bc}, S_{ca} площади граней со сторонами a и b, b и c, c и a соответственно. Тогда

$$V^2 = S_{ab}S_{bc}S_{ca} \geq S_{ab} \cdot b \cdot h \cdot a \cdot h \geq S_{ab}S_{ab}h^2 = V^2.$$

Из равенства следует, что $a \perp b$. Аналогично, $b \perp c$ и $c \perp a$.

4. Существует.

Первое решение. Подходит последовательность, где $a_k = 1/k$, если k степень двойки, и $a_k = 0$ иначе.

Второе решение (для знатоков). Положим $a_k = \frac{1}{k^s}$. Найдется такое s , что

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = 1,$$

так как дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

непрерывна при $s > 1$, причем $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2$ и $\zeta(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow 1$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \dots &= \frac{1}{(2k)^s} + \frac{1}{(3k)^s} + \frac{1}{(4k)^s} + \dots = \\ &= \frac{1}{k^s} \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right) = \frac{1}{k^s} \cdot 1 = a_k. \end{aligned}$$

Замечание. Подойдет любая последовательность $a_1, a_2, \dots$ с первым членом 1 и общей суммой 2, которая мультипликативна – для любых натуральных m и n выполнено $a_{m \cdot n} = a_m \cdot a_n$.

5. Пусть A и B – точки касания окружности ω_3 с окружностями ω_2 и ω_1 соответственно, C – точка пересечения отрезка AB с окружностью ω_2 и PQ – хорда окружности ω_3 , касающаяся ω_2 в точке C (рис. 10).

Для каждой пары из окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ рассмотрим центр гомотетии, переводящий одну окружность в другую. По теореме о трех гомотетиях, эти три точки лежат на одной прямой. Поскольку центр гомотетии, переводящей касающиеся окружности одна в другую, совпадает с их точкой касания, получаем, что отрезок AB проходит через центр H гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2 . Тогда хорда PQ параллельна проходящей через точку B касательной к ω_1 и серединный перпендикуляр к хорде PQ проходит через центр O окружности ω_1 . Пусть M – середина хорды PQ . Не теряя общности, M лежит на отрезке CQ . Тогда

$$\begin{aligned} OP^2 &= (OC^2 - CM^2) + MP^2 = \\ &= OC^2 + (MP - CM)(MP + CM) = \\ &= OC^2 + PC \cdot CQ = OC^2 + AC \cdot BC. \end{aligned}$$

Докажем, что эта величина не зависит от выбора окружности ω_3 , т.е. концы всех хорд PQ равноудалены от O . Для этого продлим CA до пересечения с ω_1 в точке D . Пусть R и r – радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда

$$AC \cdot BC = (CD - AD) \cdot BC = CD \cdot BC - AD \cdot BC.$$

Заметим, что $CD \cdot BC = R^2 - OC^2$ – степень точки C относительно окружности ω_1 . Поэтому

$$OP^2 = R^2 - AD \cdot BC.$$

Осталось доказать, что величина $AD \cdot BC$ не зависит от выбора ω_3 .

Так как H – центр гомотетии, переводящий ω_1 в ω_2 , то

$$\frac{R}{r} = \frac{HD}{HA} = 1 + \frac{AD}{HA},$$

откуда

$$AD = HA \cdot \left(\frac{R}{r} - 1 \right);$$

аналогично,

$$BC = HC \cdot \left(\frac{R}{r} - 1 \right).$$

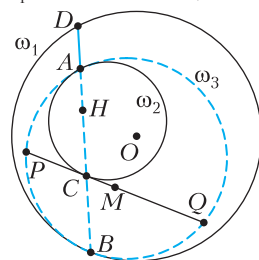


Рис. 10

Тогда

$$AD \cdot BC = \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \cdot HA \cdot HC = \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \cdot s,$$

где s — степень точки H относительно окружности ω_2 , т.е., величина, не зависящая от выбора ω_3 .

6. $m = 1000$.

Сначала докажем, что 1000 мудрецов всегда смогут выдержать испытание, независимо от того, как располагаются комнаты и коридоры в замке. Для этого мудрецы договариваются о следующем: каждый коридор закрепляется за каким-то конкретным мудрецом, который всегда находится в одной из комнат на концах этого коридора и переходит по нему, когда на этот коридор указывает Мерлин. Отсюда следует, что $m \leq 1000$.

Докажем теперь, что $m \geq 1000$, т.е. что при 999 мудрецах у Мерлина есть план победы. Для удобства предположим, что если мудрец выходит из комнаты, то он — самый младший из тех, кто в ней находился (в действительности совершенно неважно, кто из мудрецов где, важно только их количество в каждой из комнат). Докажем, что если мудрецов в замке меньше, чем коридоров, то Мерлин может выбирать коридоры так, чтобы через несколько ходов вне зависимости от действий мудрецов образовался пустой коридор (обе комнаты на его концах пустые).

Проведем индукцию по числу мудрецов. База индукции очевидна: если коридоры есть, а мудрецов нет, то есть пустой коридор.

Переход индукции. Сначала покажем, что Мерлин может получить одну пустую комнату, из которой ведет хотя бы один коридор. Возьмем самого старшего мудреца M . Если в результате команд Мерлина мудрец M покидает свою комнату, то эта комната становится пустой и будет искомым. Поэтому мы можем считать, что M всегда остается на своем месте вне зависимости от действий Мерлина. Наденем на M мантию-невидимку, по предположению индукции, Мерлин может получить две соседние комнаты, в которых никого нет (кроме, возможно, M). Таким образом, получена пустая комната, из которой ведет хотя бы один коридор.

Пусть есть пустая комната v . Пусть из нее выйдут коридоры $e_1, \dots, e_k$ и ведут в комнаты $v_1, \dots, v_k$. Назовем эти k комнат *уютными*, а эти k коридоров *опасными*. Если среди уютных комнат есть пустая, то Мерлин уже победил. Иначе выберем в этих комнатах по мудрецу (мудрец M_i находится в комнате v_i), назовем их *важными*. Неряя общности, мы можем считать, что k самых пожилых мудрецов — это важные мудрецы.

Запретим Мерлину выбирать опасные коридоры и наденем на важных мудрецов по мантии-невидимке (т.е. мысленно удалим из замка k важных

мудрецов и k коридоров вместе с вершиной v). По предположению индукции, у видимых мудрецов нет стратегии защиты от Мерлина. Это значит, что Мерлин может выбирать коридоры таким образом, что в исходном замке в какой-то момент или образуется пустой коридор, или один из важных мудрецов M_i должен будет выйти из своей комнаты v_i . В последнем случае в этот момент Мерлин получит две соседние пустые комнаты (v_i, v) .

Региональный этап LVIII Всероссийский олимпиады школьников по физике

7 класс

- 1) Глюк движется быстрее; 2) $N_4 = 144$ ступеньки; 3) $N = 288$ ступенек.
- 2) 1) 10 мин; 2) 5 км; 3) 2 ч 20 мин; 4) 105 км; 5) 90 км/ч; 6) в 9 раз; 7) 48,5 км/ч.
- 3) 1) $\rho_b = 1$ г/мл; 2) $V_c = 110$ мл; 3) $V_0 \approx 0,009$ мм³; 4) $m_4 = 80$ г.
- 4) 1) 49 км/ч $\leq v_1 \leq 76$ км/ч; 2) $v_2 < 41,75$ км/ч либо $v_2 > 87,40$ км/ч.

8 класс

- 1) 1) $v_{\max} = 80$ км/ч, $v_{\min} = 60$ км/ч; 2) 3 км $\leq l \leq 4$ км; 3) 649 км $\leq x \leq 649,5$ км.
- 2) 1) $k_1 = 7$; 2) $k_{\max} = 10$; 3) $M_r = \frac{M}{6}$.
- 3) $h_{\text{лев}} = \frac{7}{3}h$, $h_{\text{прав}} = \frac{29}{6}h$.
4. $t_3 = 57$ °C.

9 класс

1. Минимальная по модулю скорость была в начале, а максимальная в конце движения. Если начальная скорость v_0 мала, то $v_{\min} = v_0 = at \operatorname{ctg} \alpha$ и $v_{\max} = v_{\infty} = at \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 4 \operatorname{ctg} \alpha + 8}$. Если $v_0 \geq 2at$, то $v_{\min} = 2at(\operatorname{ctg} \alpha - 1)$ и $v_{\max} = \frac{2at}{\sin \alpha}$.
3. Чтобы шарик скользил по наклонной поверхности без отрыва, необходимо, чтобы проекции скорости $\vec{v}$ клина и скорости $\vec{u}$ шарика на ось, нормальную к поверхности, были равны:

$$u \cos \alpha = v \sin \alpha, \quad u = v \operatorname{tg} \alpha.$$

Проекция ускорений клина и шарика на данную ось также равны. После отрыва шарика от клина все действующие на клин силы вертикальны. В результате этого клин начинает двигаться равномерно. Следовательно, в момент отрыва проекция ускорения шарика на нормаль к поверхности клина равна нулю.

Так как стержень нерастяжимый, движение шарика представляет собой движение по окружности радиусом L . Найдем тангенциальную a_t и

нормальную a_n компоненты ускорения шарика. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось:

$$ma_\tau = mg, \quad a_\tau = g.$$

Для нахождения нормальной компоненты ускорения воспользуемся формулой центростремительного ускорения:

$$a_n = \frac{u^2}{L}.$$

Далее, запишем уравнение кинематической связи для проекций ускорений на нормаль к наклонной поверхности клина:

$$0 = a_\tau \cos \alpha - a_n \sin \alpha, \quad a_\tau = a_n \operatorname{tg} \alpha,$$

$$g = \frac{u^2}{L} \operatorname{tg} \alpha, \quad u^2 = gL \operatorname{ctg} \alpha.$$

С учетом того, что $u = vt \operatorname{tg} \alpha$, окончательно получим

$$v = \sqrt{\frac{gL}{\operatorname{tg}^3 \alpha}} = \sqrt{gL \operatorname{ctg}^3 \alpha}.$$

4. 1) За время Δt сжигается $\Delta m_0 = \mu_0 \Delta t$ газа, т.е. выделяется $\Delta Q = \Delta m_0 q$ энергии. Лишь η -я ее часть идет на нагревание воды: $\Delta Q_{\text{н}} = \eta \Delta Q$. Тогда полезная мощность

$$P = \frac{\Delta Q_{\text{н}}}{\Delta t} = \eta \mu_0 q \approx 2,3 \text{ кВт}.$$

2) Заметим, что на участке 1–2 не происходит изменения массы воды (не происходит испарений и доливаний), т.е. этот участок вертикальный. Обозначим массу воды в точке 1 через M . Уравнение, описывающее испарение на участке 2–3:

$$P \tau_{23} = \left(M - \frac{M}{4} \right) L = \frac{3M}{4} L.$$

Уравнение, описывающее доливание воды на участке 3–1:

$$\mu \tau_{31} = M - \frac{M}{4} = \frac{3M}{4}.$$

С учетом того, что $\tau_{23} = \tau_{31}$, получим

$$\mu = \frac{P}{L} = \mu_0 \frac{\eta q}{L} = 1,0 \text{ г/с}.$$

3) Уравнение теплового баланса на участке 3–1 ($t_{100} = 100^\circ\text{C}$ – температура кипения воды, c – удельная теплоемкость воды, m и t – текущие масса и температура воды на этом участке):

$$c \frac{M}{4} (t_{100} - t) = c \left(m - \frac{M}{4} \right) (t - t_x),$$

откуда

$$t(m) = t_x + \frac{M}{4} (t_{100} - t_x) \frac{1}{m}.$$

Последняя формула показывает линейность участка 3–1. Температура воды в точке 1 равна

$$t_1 = t(M) = t_x + (t_{100} - t_x)/4 = (t_{100} + 3t_x)/4 = 40^\circ\text{C}.$$

Диаграмма – это прямоугольный треугольник с вершинами (1; 40), (1; 100), (4; 100).

4) Уравнение, описывающее нагревание на участке 1–2:

$$P \tau_{12} = cM(t_{100} - t_1).$$

Тогда

$$\frac{\tau_{23}}{\tau_{12}} = \frac{3L}{4c(t_{100} - t_1)} \approx 6,9.$$

5. 1) Необходимо проанализировать два возможных варианта подключения (рис. 11) и расчи-

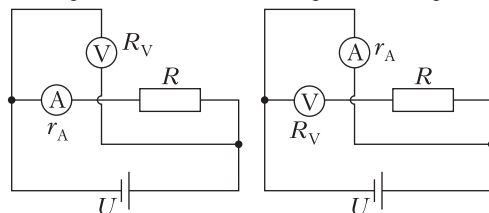


Рис. 11

тать показания ваттметра для каждого из них. В случае левой схемы показания амперметра (I_1) и вольтметра (U_1):

$$I_1 = \frac{U}{R + r_A}, \quad U_1 = U.$$

По условию показания ваттметра равны произведению показаний амперметра и вольтметра:

$$P'_1 = I_1 U_1 = \frac{U^2}{R + r_A}.$$

В случае правой схемы показания амперметра (I_2) и вольтметра (U_2):

$$I_2 = \frac{U}{r_A}, \quad I_V = \frac{U}{R + R_V}, \quad U_2 = I_V R_V = \frac{U R_V}{R + R_V}.$$

Тогда

$$P'_2 = I_2 U_2 = \frac{U^2}{R + R_V} \frac{R_V}{r_A}.$$

Отношение показаний ваттметра позволяет исключить напряжение источника:

$$k = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{R + R_V}{R + r_A} \frac{r_A}{R_V}.$$

Выразим искомое внутреннее сопротивление вольтметра;

$$R_V = \frac{R}{k \frac{R + r_A}{r_A} - 1}.$$

Теперь подставляем числовые значения. Если $k = 100/1 = 100$, то $R_V \approx 5,0 \cdot 10^{-2}$ Ом. Величина получилась меньше сопротивления амперметра, значит, этот ответ неверный. Если $k = 1/100 = 0,01$, то $R_V = 50$ кОм. Разумный результат.

2) Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 12. Сила полного тока в цепи равна

$$I = \frac{U}{R_V + \frac{R r_A}{R + r_A}}.$$

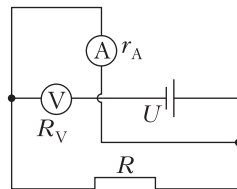


Рис. 12

С учетом неравенства $R_V \gg R \gg R_A$ получим

$$I = \frac{U}{R_V + \frac{Rr_A}{R+R_A}} \approx \frac{U}{R_V}.$$

Силу тока, протекающего через амперметр, можно выразить следующим образом:

$$I_A = I \frac{R}{R+r_A} \approx I = \frac{U}{R_V}.$$

Показания вольтметра: $U_V = IR_V$, а показания ваттметра:

$$P_3 = I_A U_V = I^2 R_V = \frac{U^2}{R_V}, U^2 = P_2 (R+r_A),$$

$$P_3 = \frac{P_2 (R+r_A)}{R_V} \approx 10 \text{ мВт}.$$

10 класс

1. 1) Угловое расстояние между Болтиком и центром Шелезяки будет максимальным, когда прямая «зонд-болтик» станет касательной к орбите спутника. В этом случае $\sin \theta_{\max} = \frac{r}{R}$, откуда

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\sin \theta_{\max}} \approx 3,864.$$

2) Пусть M – масса Шелезяки. Угловые скорости движения спутника и зонда соответственно равны

$$\omega_c = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \omega_3 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \omega_c = \omega_3 \left(\frac{R}{r} \right)^{3/2} \approx 7,595 \omega_3.$$

Следовательно, с точки зрения зонда, спутник делает один оборот вокруг планеты за время

$$T_{\text{отн}} = \frac{360^\circ}{\omega_c - \omega_3} = \frac{360^\circ}{6,595 \omega_3} = \frac{T}{6,595}.$$

Чтобы найти $T_{\text{отн}}$, сделаем чертеж (рис. 13), где точка O – центр планеты, точка S – исследова-

тельный зонд, а нарисованная окружность – орбита Болтика. В точках A или C спутник находится на краю видимого диска планеты, а точка B соответствует максимальному угловому расстоянию между центром Шелезяки и Болтиком (при наблюдении с зонда). Из геометрии рисунка $\angle ASB = \theta_{\max} - \theta_0 = 12^\circ$, $\angle ODA = 90^\circ + \angle ASB = 102^\circ$. По теореме синусов для треугольника SOA

$$\frac{R}{\sin \angle OAS} = \frac{r}{\sin \theta_0},$$

откуда, учитывая, что $\angle OAS > 90^\circ$, получим

$$\sin \angle OAS = \frac{R}{r} \sin \theta_0 = 3,864 \cdot \sin 3^\circ \approx 0,202, \\ \angle AOS \approx 168,334^\circ.$$

Найдем угол AOB :

$$\angle AOB = \angle OAS - \angle ODA = 66,334^\circ.$$

Так как движение по окружности равномерное, $\angle AOB = 360^\circ t_1 / T_{\text{отн}}$, откуда

$$T_{\text{отн}} = \frac{360^\circ}{66,334^\circ} t_1 \approx 5,43 \cdot 165 \text{ мин} \approx 895 \text{ мин}.$$

С учетом того, что $T = 6,595 T_{\text{отн}}$, получим

$$T \approx 5900 \text{ мин}.$$

3) Пусть R_{III} – радиус Шелезяки, тогда

$$\sin \theta_0 = \frac{R_{\text{III}}}{R}, R_{\text{III}} = R \sin 3^\circ \approx 0,0523 R.$$

Записывая массу планеты: $M = 4\pi R_{\text{III}}^2 \rho / 3$ и подставляя ее в выражение для угловой скорости движения зонда по орбите, получим

$$\omega_3^2 = \frac{G \cdot 4\pi R_{\text{III}}^3 \rho / 3}{R^3}, \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi G}{3} \cdot \rho \cdot 0,0523^3,$$

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2 \cdot 0,0523^3} \approx 7900 \text{ кг/м}^3.$$

3. 1) Пузырек будет находится в равновесии, если плотность газа ρ внутри него будет равна плотности воды $\rho_{\text{в}}$. Плотность газа

$$\rho = \frac{Mp}{RT} = \frac{M(p_0 + \rho_{\text{в}}gh)}{RT}.$$

Температура воды изменяется с глубиной, при этом данная зависимость представлена в виде графика. Поэтому представим условие равновесия графически. Для этого из последнего уравнения получим зависимость температуры T газа внутри пузырька от глубины h , на которой данный пузырек находится. Учитывая, что $\rho = \rho_{\text{в}}$, находим

$$T = \frac{Mp_0}{R\rho_{\text{в}}} + \frac{Mg}{R}h = 2,62 \text{ К} + 0,267 \frac{\text{К}}{\text{м}} \cdot h, \text{ или}$$

$$t = -270^\circ \text{C} + 0,267 \frac{^\circ \text{C}}{\text{м}} \cdot h.$$

Полученную зависимость $t(h)$ и зависимость из условия задачи представим на одном графике (рис. 14). Видно, что графики пересекаются в трех точках A , B и C , значит, существуют три соответствующих положения равновесия:

$$h_A = 103010 \text{ м}, h_B = 111010 \text{ м}, h_C = 113510 \text{ м}.$$

2) Проанализируем положение равновесия в точке A на устойчивость. Пусть пузырек смещается

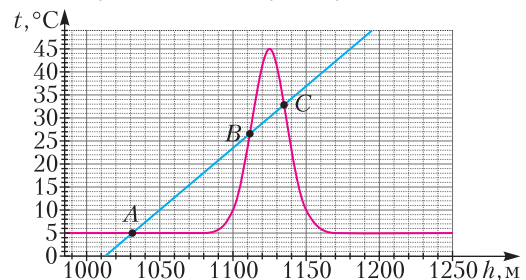


Рис. 14

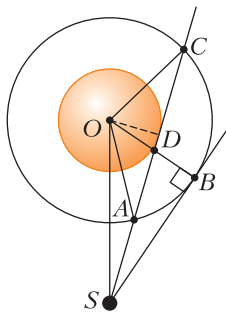


Рис. 13

на чуть большую глубину. В этом случае температура газа внутри пузырька будет меньше той, которая необходима для обеспечения его равновесия, а плотность газа в пузырьке будет больше плотности воды. Это означает, что сила Архимеда будет меньше силы тяжести и, следовательно, пузырек будет тонуть и дальше, т.е. положение равновесия в точке A неустойчиво. Аналогично рассуждая, получим, что положение равновесия в точке B устойчиво, а в точке C – неустойчиво.

4. Прежде всего необходимо понять, какая линза может быть. Изображение действительного объекта в рассеивающей линзе всегда лежит между фокальной плоскостью и плоскостью линзы. Так как B' лежит в плоскости двойного фокуса, то линза не может быть рассеивающей, поэтому делаем вывод, что линза собирающаяся.

Изображение B' может быть действительным или мнимым. Если изображение действительное, то точки B и B' лежат в плоскостях двойного фокуса и оптический центр находится на середине отрезка BB' . Если изображение B' мнимое, то B лежит между фокальной плоскостью и плоскостью линзы. Из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{-2F} = \frac{1}{F}$$

находим $a = 2F/3$, а расстояние между предметом и его изображением $\Delta = 2F - a = 4F/3$ в два раза больше расстояния a между предметом и линзой. Для построения оптического центра линзы в первом случае делим отрезок BB' пополам, на середине этого отрезка и будет оптический центр O (рис. 15). Во втором случае делим отрезок BB'

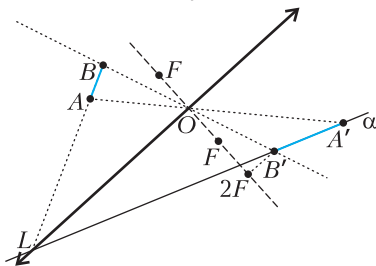


Рис. 15

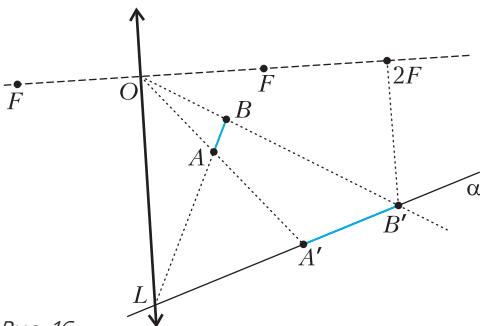


Рис. 16

пополам, продолжаем прямую, проходящую через этот отрезок, за точку B и откладываем еще половину отрезка BB' – найденная точка будет оптическим центром O (рис. 16). Для восстановления положения линзы найдем вторую точку линзы. Для этого заметим, что луч AB после преломления в линзе пойдет вдоль прямой α , так как изображение точки A' также лежит на этой прямой. Продолжим прямую, проходящую через отрезок AB , до пересечения с прямой α , найденная точка пересечения L будет принадлежать плоскости линзы.

Для восстановления главной оптической оси построим перпендикуляр к линзе в точке O . Чтобы найти фокус, пусть из точки B луч, идущий параллельно главной оптической оси, который после преломления в линзе пройдет через точку B' и пересечет ось в точке фокуса. Чтобы построить точку A' , пусть из точки A луч, параллельный оси. После преломления в линзе этот луч пройдет через фокус и пересечется с прямой α в точке A' .

5. 1) Синусоидальный сигнал на входе преобразуется усилителем в синусоидальный сигнал на выходе, если для всех $U_{\text{зн}}$, удовлетворяющих условию $|U_{\text{зн}}| \leq U_a$, выполняется неравенство

$$-U_0 \leq U_{\text{зн}} \leq U_0 \frac{\varepsilon - I_0 R}{I_0 R}.$$

При $R = 5$ Ом зависимость $U(t)$ будет сохранять форму синусоиды, если $U_a \leq 1$ В. При $R = 16$ Ом синусоидальность сигнала сохраняется при $U_a \leq 0,25$ В.

2) При $R = 5$ Ом

$$K = \frac{I_0 R}{U_0} = 2,5.$$

3) Искомый график представлен на рисунке 17.

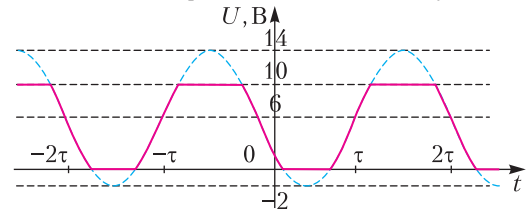


Рис. 17

11 класс

3. 1) Рассмотрим сначала случай одного генератора. Поскольку груз опускается равномерно, сила натяжения троса постоянна, поэтому ток в обмотке ротора постоянен. Это значит, что $Q_1 \approx It$. В случае с двумя генераторами они делят нагрузку поровну, т.е. сила натяжения каждого троса равна половине силы натяжения для одного троса. Поскольку магнитные силы, действующие на ротор, пропорциональны току через него, токи через генераторы в этом случае будут равны $I' = I/2$. Суммарный ток зарядки

аккумулятора остался тем же, т.е. теперь $Q_2 \approx It'$. Значит, отношение времен зарядки

$$\frac{t'}{t} \approx \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{4}{3}.$$

2) При опускании груза его потенциальная энергия переходит только в работу по дозарядке аккумулятора и в джоулево тепло, выделяющееся в цепи обмотки ротора. Закон сохранения энергии для зарядки одним генератором имеет вид

$$mgH \approx \varepsilon Q_1 + I^2 R t = Q_1 \left(\varepsilon + \frac{R Q_1}{t} \right).$$

Для зарядки двумя генераторами

$$mgH \approx \varepsilon Q_2 + 2I^2 R t' = \varepsilon Q_2 + \frac{1}{2} I^2 R t' = Q_2 \left(\varepsilon + \frac{R Q_1}{2t} \right).$$

Отсюда

$$Q_2 = Q_1 \frac{2(\varepsilon t + R Q_1)}{2\varepsilon t + R Q_1} = Q_1 \frac{2x + 2}{2x + 1},$$

где $x = \frac{\varepsilon t}{R Q_1}$. Отметим, что эта величина как раз и равна отношению силы тока через неподвижный ротор к силе тока зарядки:

$$\frac{I_0}{I} = x = \frac{2Q_1 - Q_2}{2Q_2 - 2Q_1} = 1.$$

3) Повторив аналогичные рассуждения для случая трех генераторов, получим

$$Q_3 = Q_1 \frac{3x + 3}{3x + 1} = \frac{3Q_1 Q_2}{4Q_1 - Q_2} = 450 \text{ мА} \cdot \text{ч}.$$

4. Чтобы найти силу, с которой однородное магнитное поле воздействует на проводник MN с

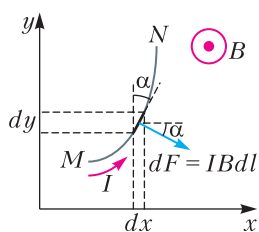


Рис. 18

током, имеющий сложную форму, возьмем маленький участок проводника длины dl (рис. 18). Сила, действующая на него, равна $dF = IBdl$ и направлена перпендикулярно. Проекции этой силы на оси координат равны

$$dF_x = IBdl \cos \alpha = IBdy,$$

$$dF_y = -IBdl \sin \alpha = -IBdx.$$

Суммируя по всем участкам проводника, получим

$$F_x = IB(y_N - y_M), \quad F_y = -IB(x_N - x_M).$$

Пусть T_A – сила натяжения нити в верхней точке, а $\rho = m/L$ – линейная плотность нити. Рассмотрим правую половину нити и запишем условия равновесия для сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$T_A \cos 30^\circ = mg/2,$$

$$T_A \sin 30^\circ + T_D = IBH.$$

Отсюда найдем

$$T_A = mg/\sqrt{3},$$

$$T_A/2 + T_D = IBL \cdot \sqrt{3}/4.$$

Применяя метод виртуальных перемещений, получим

$$T_A - T_D = \rho g H = \frac{mgH}{L} = \frac{mg\sqrt{3}}{4},$$

откуда

$$T_A - T_D = \frac{3T_A}{4}, \quad T_A = 4T_D, \quad T_D = \frac{IBL}{4\sqrt{3}},$$

$$mg = \sqrt{3}T_A = 4\sqrt{3}T_D = IBL, \quad m = \frac{IBL}{g}.$$

2) Рассмотрим участок нити CD , проведем аналогичные рассуждения и найдем

$$T_C = 2T_D = \frac{IBL}{2\sqrt{3}}.$$

3) Пусть K – некоторая точка, находящаяся на высоте y относительно точки D и смещенная относительно нее на x вправо. Обозначим T силу натяжения нити в точке K , φ – угол между касательной в точке K и горизонталью, а l – длину участка KD . Тогда

$$T \sin \varphi = \rho g l + IBx = IB(l + x),$$

$$T \cos \varphi = T_D - IB y,$$

$$T = T_D + \rho g y = T_D + IB y.$$

Дифференцируя первое уравнение и учитывая, что

$$T(1 + \cos \varphi) = 2T_D,$$

найдем

$$T \sin \varphi = 2IB\sqrt{hy}.$$

Поскольку $\tan \varphi = dy/dx$, окончательно получим

$$d = \frac{4h}{3} = \frac{L}{3\sqrt{3}}.$$

5. Обозначим реальный размер очков X , а реальный размер смартфона Y . Пусть α – угловой размер изображения очков на портретной фотографии, а β – угловой размер изображения смартфона на ней. Измерим отношение размеров изображений очков и смартфона на двух фотографиях:

$$\frac{X}{Y} = (1.1 \pm 0.1), \quad \frac{\alpha}{\beta} = (12 \pm 1).$$

На фотографии на рисунке 19,а отношение размеров изображений соответствует отношению реальных линейных размеров, а на рисунке 19,б – отношению угловых размеров изображений. Сделаем чертеж расположения изображения смартфона и очков (рис. 20). Обозначим размер изображения смартфона y , расстояние между изображением смартфона и очками l . Угловые размеры изображения смартфона и очков в приближении малых углов равны

$$\alpha = \frac{X}{L}, \quad \beta = \frac{y}{L+l}.$$

Положение изображения определяется формулой сферического зеркала

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{R},$$

где R – радиус кривизны зеркала. Размер изображения смартфона связан с его реальным размером через увеличение зеркала:

$$y = Y \frac{l}{L}.$$

Отсюда получим

$$R = \frac{2L}{\frac{\alpha}{\beta} \frac{Y}{X} - 2}.$$

Рассчитаем с учетом погрешности измерений минимально возможное значение радиуса кривизны и максимально возможное:

$$R_{\min} = \frac{2 \cdot 50 \text{ см}}{\frac{13}{1} - 2} = 9,09 \text{ см}, R_{\max} = \frac{2 \cdot 50 \text{ см}}{\frac{11}{1,2} - 2} = 12,24 \text{ см}.$$

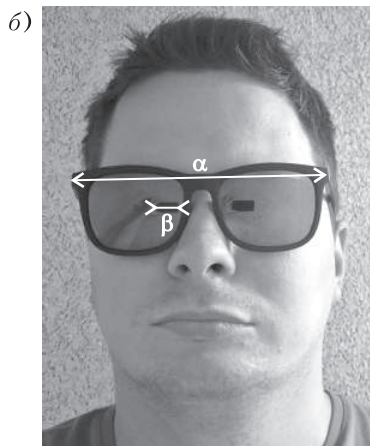
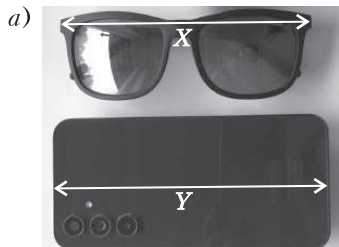


Рис. 19

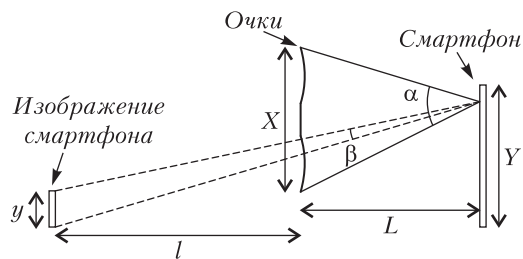


Рис. 20

Тогда окончательно

$$R = (10,7 \pm 1,6) \text{ см}.$$

Головоломка

(см. 2-ю с. обл.)

Решения головоломки приведены на рисунке 21.

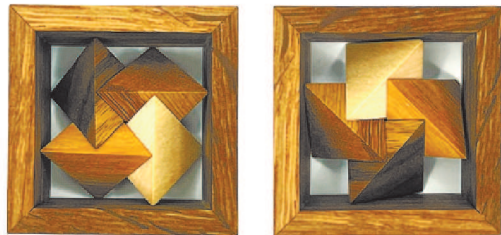


Рис. 21

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Грицук, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Н.В.Станцо

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

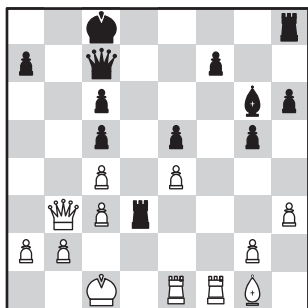
Тел.: (831) 218-40-40

Молодая ЧЕМПИОНКА

Пятнадцатилетняя шахматистка из Оренбурга Анна Шухман прибавила за последние несколько месяцев 230 пунктов рейтинга ФИДЕ и уже занимает четвертое место в рейтинг-листе спортсменок моложе 20 лет, возглавляет который Дивья Дешмукх из Индии, ставшая чемпионкой в 2024 году. Поздравляем Анну Шухман с уверенной победой в первенстве среди юниорок!

**А.Шухман – А.Нурман
Петрова, 2025**

1. e4 e5 2. ♘c3 ♗c6 3. ♕c4 ♗f6
4. d3 ♗c5 5. f4 d6 6. ♗f3 ♗a5
7. fe de 8. ♗g5 c6 9. ♗d2 ♗c4
10. dc h6 11. ♗h4 ♗e6 12. ♗f3
g5 13. ♗f2 ♗e7 14. ♗g3 ♗c7
15. ♗e2 0-0-0 16. 0-0-0 ♗g4
17. ♗e3 b6 18. ♗f3 ♗c5 19. ♗b3
♗de8 20. h3 ♗h5 21. ♗c3 ♗g6
22. ♗he1 ♗h5 23. ♗h2 ♗f4
24. ♗a4 ♗f2 25. ♗f1 ♗e2+
26. ♗d2 ♗d4 27. ♗d4 ♗d4 28. c3
♗c5 29. ♗c5 bc 30. ♗de1 ♗d8+
31. ♗c1 ♗d3 32. ♗g1.



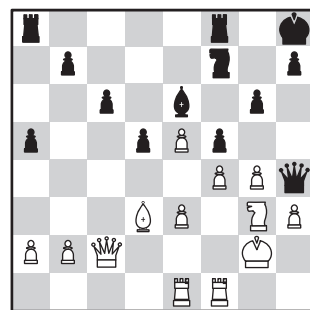
Партия игралась в последнем туре, и черных устраивала только победа, поэтому шахматистка из Казахстана избрала активное **32... ♗a5?!** (аккуратное 32... ♗hd8 скорее всего

привело бы к ничьей) и вскоре проиграла: **33. ♗f6! ♗c7?** Еще не поздно было вернуть ферзя: **33... ♗a6**, постаравшись откупиться пешкой на c5. **34. ♗h2 ♗e8 35. ♗d1 ♗d1+ 36. ♗d1 ♗d8 37. ♗e5+ ♗b7 38. ♗d6 ♗e8 39. ♗d7+ ♗a8 40. ♗c7 ♗a2 41. ♗d8+ ♗b7 42. ♗e8**, черные сдались.

Индийские шахматисты продолжают доминировать на всех уровнях профессиональных шахмат. Так, 25-летний гроссмейстер Аравинд Читамбарам выиграл два супертурнира подряд (в конце 2024 года в Ченнае и в начале 2025 года в Праге) и вплотную приблизился к элитной отметке в 2750 пунктов рейтинга ФИДЕ.

**А.Гири – А.Читамбарам
Прага, 2025**

1. d4 d5 2. c4 e6 3. ♗c3 ♗e7
4. cd ed 5. ♗f4 ♗f6 6. e3 ♗f5
7. ♗f3. Обычно в ответ на выход слона в ферзевом гамбите принято сразу атаковать пешку b7: 7. ♗b3 ♗c6 8. g4 ♗g4 9. ♗d5 ♗d5 10. ♗d5 с небольшим перевесом. **7...c6 8. ♗h4!? ♗g4 9. ♗c2 ♗bd7 10. h3 ♗e6 11. ♗f3 ♗e4 12. ♗d3 f5 13. ♗h2 0-0 14.0-0 ♗h8 15. ♗e2 a5 16. ♗e5 ♗e5 17. ♗e5 ♗f6 18. f3 ♗d6 19. g4?!** Белые переоценивают свою позицию, аккуратнее спокойное 19.b3. **19... ♗e7!? 20. ♗g3.** Выигрыш пешки оставляет слишком много слабостей: **20. ♗d6 ♗d6 21. gf ♗f7**, и после **♗e6** пешку e3 сложно защитить. **20...g6 21. ♗ae1?!** (размена стоило избегать: 21. ♗f4) **♗e5! 22. de ♗f7 23. f4 ♗h4!? 24. ♗g2 (24. ♗g2 fg 25. hg ♗h6! с решающим преимуществом).**



24... ♗g5! Внезапная жертва коня. Гораздо слабее 24...fg? 25. hg ♗g4 26. ♗h1, и черному ферзю некуда ходить. **25. ♗h1.** Коня брать нельзя: 25. fg fg 26. hg ♗g4, и белые не могут одновременно защитить пункты h3 и f3. **25...d4 26. fg de 27. gf?** Решающая ошибка, но и после лучшего **27. ♗hf1 f4 28. ♗e4 ♗ad8!** у белых слишком много слабостей. **27...gf 28. ♗e3 f4 29. ♗f3 fg 30. ♗e4 ♗f3 31. ♗f3 ♗f8 32. ♗e4 ♗f4 33. ♗d3 ♗f3 34. ♗d8+ (34. ♗f3 ♗d5) ♗g7 35. ♗f3 ♗d5+ 36. ♗e3 ♗e4+!** Гроссмейстерская точность. Черные максимально улучшают позицию ферзя, прежде чем забрать ладью. **37. ♗d2 ♗f4+ 38. ♗c2 ♗f5+ 39. ♗d2 ♗h1**, белые сдались.

А 18-летний гроссмейстер из Индии Пранав Венкатеш стал чемпионом мира среди юниоров. Стоит отметить, что в десятку лучших игроков младше 20 лет входят еще четыре его соотечественника и возглавляет список действующий чемпион мира Гукеш Доммараджу.

А.Русанов

Уроки с физикой

Очевидное и вероятное



Если соломинку случайным образом разломить на две части, то какой будет средняя длина меньшего куска?

(Подробнее – на с.32 внутри журнала)

