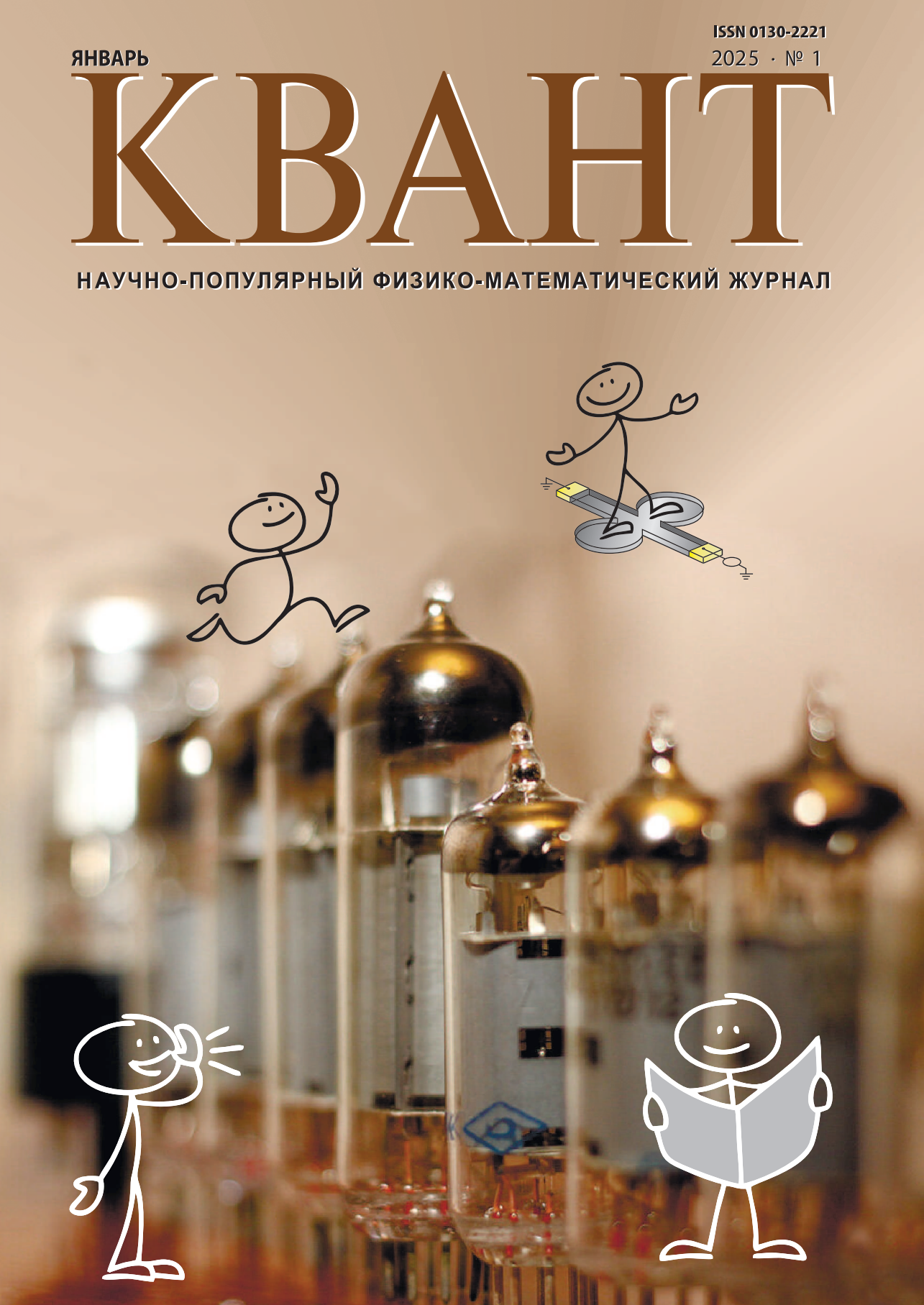
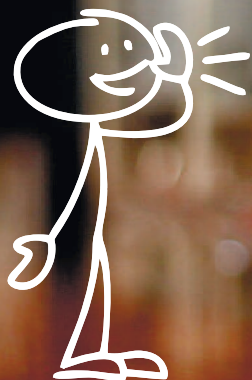
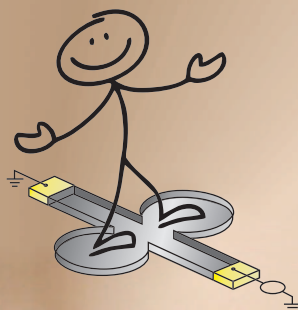


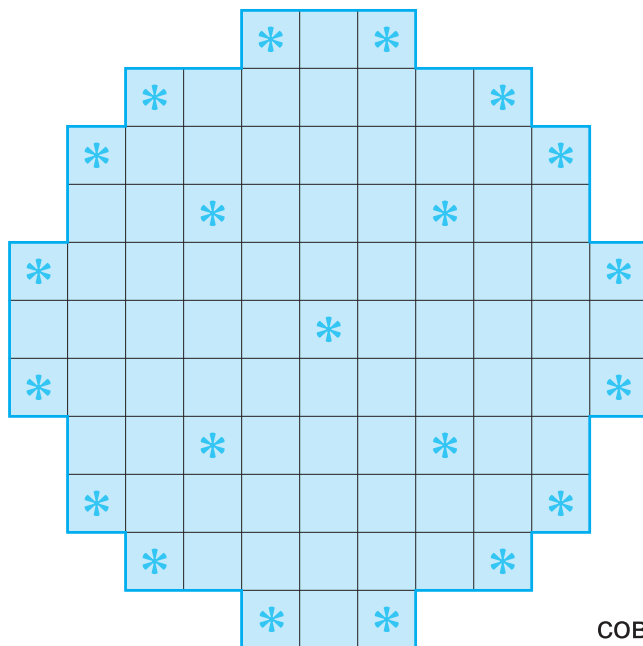
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



СНЕЖИНКА

Разрежьте большую снежинку по линиям сетки так, чтобы все части были различными геометрическими фигурами и в каждую часть попадала ровно одна маленькая снежинка.



Задача совсем не простая. В процессе решения остро ощущается нехватка маленьких снежинок в центральной части большой снежинки. В задачах на разрезание нередко помогают соображения о количестве и форме частей разрезания. Попробуйте применить эти соображения здесь. Желаем успеха!

С.Костин

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАНФизический институт
им. П.Н.Лебедева РАНМосковский
физико-технический институтМосковский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,**С.Д.Варламов, А.П.Веселов,****А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,****С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,****А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,****К.А.Кноп, П.А.Кожевников,****С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,****А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,****А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,****А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,****В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,****А.В.Устинов (заместитель главного****редактора), А.И.Черноуцан****(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

В.И.Берник, А.А.Боровой,**В.В.Козлов, А.Л.Семенов,****С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ

ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,****И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,****В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,****Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,****А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,****Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,****И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,****Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Проблемы электровакуумных. *Л.Ашкинази*
11 Об инвариантах Понселе и пучках
окружностей. *П.Кожевников*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 20 Использование логарифмов в XVIII веке.
Д.Златопольский

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 22 Задачи M2826–M2829, Ф2833–Ф2836
23 Решения задач M2810–M2817, Ф2817–Ф2820

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 33 Задачи
34 Старая задача на новый лад. *С.Дворянинов,*
А.Насипов
37 Что не так? *К.Кохась*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 39 Как искусственный интеллект игру придумывал.
А.Болотин

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 42 Неоднородность среды и преломление
звуковых волн. *С.Варламов*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 47 Игра с тенью. *И.Сычев*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 48 Задачи 17–20

ОЛИМПИАДЫ

- 49 Международная физическая олимпиада
2024 года
56 Ответы, указания, решения
«Квант» улыбается (19)
Вниманию наших читателей (32, 64)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Проблемы
электровакуумных»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Проблемы электровакуумных

Л. АШКИНАЗИ

ЭТА СТАТЬЯ ПОСВЯЩЕНА В ОСНОВНОМ проблемам электровакуумных приборов, поскольку разговор о них позволит рассказать, как действуют самые разные физические законы, как они связаны между собой.

Физика – это не просто список формул, это система параметров объектов (например – масса, ускорение, скорость, сила) и законов, которые связывают эти параметры (например – законы Ньютона, сохранение импульса). Причем каждый закон имеет свою область применения и точность, и знание области эффективного применения позволяет осознанно применять законы к решению новых задач. Не учебных задач, про каждую из которых сразу бывает известно, на какой она закон, а реальных задач, т.е. ситуаций в окружающем мире.

В статьях «Кванта» уже рассказывалось о законах и проблемах наших близких соседей – конденсаторов, резисторов, выключателей и предохранителей. Все они живут рядом с нами, в наших карманах, в наших квартирах. С электровакуумными приборами – далее электронными лампами или просто лампами – ситуация немного иная. На протяжении почти века они окружали человека – обитали в любом телевизоре, приемнике, магнитофоне и проигрывателе. Сегодня они нас дома не окружают, в части бытовой техники они уступили место полупроводниковым приборам, но остались в трех областях. Во-первых, это техника высококачественного воспроизведения звука, hi-fi и high end, с их интересной историей, физикой, техникой и мифологией. Во-вторых, это СВЧ-печи, или микроволновки, с их теплой и, надеюсь, вкусной едой. И в-третьих, это рентгеновские трубки – сердце генераторов рентгено-

ского излучения, которое весьма широко применяется в физике (различные методы исследования веществ), в технике (дефектоскопия) и медицине (с этим вы, наверное, сами знакомы).

Вне быта главные области применения электронных ламп сегодня – это радиолокация, космическая связь и ускорительная техника, т.е. области, где нужно сочетание высокой мощности и высокой частоты сигнала. На рисунке 1 показаны области частот и мощностей, освоенных вакуумными и полупроводниковыми приборами в разные годы. При этом имеется в виду средняя мощность; импульсная может быть существенно больше, и это мы еще обсудим. А пока рассмотрим последовательно принципы работы электронных ламп и их проблемы.

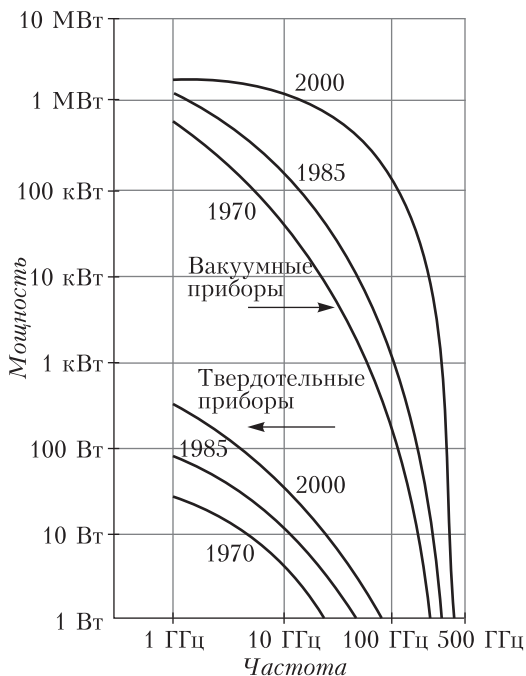


Рис. 1. Достигнутые уровни средней мощности на разных частотах

Поле управляет током

Первый принцип – поле управляет током, а вот его реализация – простейший прибор диод. Это два электрода, из одного, а именно катода, могут вылетать электроны, причем с малыми скоростями, из другого, анода, не могут. Электроды находятся в вакууме, поэтому электроны могут долететь от катода до анода. Если на аноде относительно катода положительное напряжение, электроны это и делают, если нулевое или отрицательное – не делают. Это – принцип работы, а вот его проявление – если подать на анод относительно катода переменное синусоидальное напряжение, ток будет идти только в положительные полуволны. Говорят, что диод «выпрямляет» напряжение, но это не выпрямление, а срезаание полуволн. Вот если после диода поставить конденсатор достаточной емкости – тогда будет нечто, похожее на выпрямление.

Сам по себе факт, что поле управляет током, не должен удивлять – закон Ома для обычных проводников говорит именно об этом. Однако в проводниках ток пропорционален полю (т.е. при фиксированном напряжении обратно пропорционален длине проводника), и в некоторых учебниках даже приводятся какие-то рассуждения по этому поводу (добавка к скорости электрона мала, поэтому время между рассеиваниями на решетке постоянно, значит, добавка линейно зависит от поля и так далее). А в вакууме все оказывается не так – ток пропорционален напряжению в степени $3/2$ и обратно пропорционален квадрату расстояния между плоскими параллельными электродами (закон Ленгмюра, он же закон трех вторых). Но здесь мы выходим за школьный курс математики – надо решить уравнение, в которое входят и функция, и ее производная, так называемое дифференциальное уравнение.

Важно понимать физические отличия ситуации в вакууме и в проводнике, их два. Во-первых, в проводнике поле создается

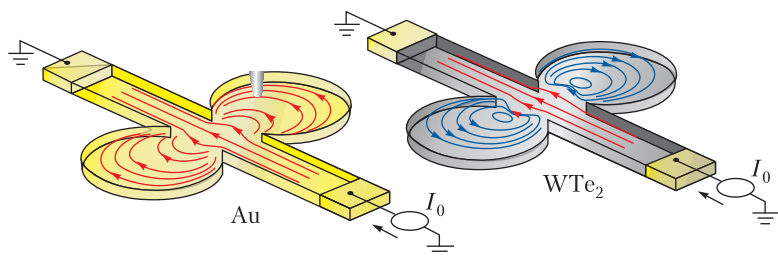


Рис. 2. Ток может течь и так, и этак

только внешним источником, средний заряд электронов скомпенсирован средним зарядом ионов. В вакууме это не так – ионов там очень мало, это же вакуум. Поэтому поле, созданное самими электронами, влияет на их движение. Во-вторых, в проводнике есть рассеивание электронов на решетке, в вакууме этого нет. Правда, есть еще сверхпроводимость, она упоминается в учебнике, но сейчас речь не о ней. В графене и некоторых других средах в области низких температур электроны могут начать вести себя «неправильно» – течь, как вода, с нулевой скоростью около стенок или с завихрениями... Но это вообще «передний край» физики. Вот удивительная картинка, обнаруженная в одной из публикаций (рис. 2). Слева – как ток течет по тонкой пленке из золота, т.е. по обычному проводнику, справа – по пленке из теллурида вольфрама.

Куда и почему в обычной жизни летит электрон? Второй закон Ньютона говорит, что ускорение направлено туда, куда направлена сила. Однако тело летит не обязательно туда же. Например, ускорение Земли направлено почти к центру тяжести Солнца (кстати, почему «почти»?), а летим мы, к счастью, не туда. Поэтому и ток не обязан идти именно на тот электрод, который создает поле и силу.

Мы пришли ко второму принципу.

Куда летит электрон

Второй принцип – ток может идти не на тот электрод, который создает поле, и вот его реализация – простейший прибор триод. Между катодом и анодом стоит третий электрод – сетка, она должна быть проводником, чтобы при подведении к ней напряжения создавать в лампе электрическое

поле (а что будет, если она диэлектрическая?), и быть проницаемой для летящих от катода электронов. Сеткой ее назвали потому, что она была похожа на сетку и осталась на нее похожа. Не возникла ли у вас мысль – применить в качестве сетки графен? Это красивая мысль, но увы – графен неплохо пропускает сквозь себя летящие электроны с энергией в десятки электрон-вольт, но тут-то речь идет о гораздо меньших величинах. Правда, существуют похожие на графен материалы, которые, естественно, называют «графеноподобными». А сколько еще таких создадут, или сколько таких создадите вы и какие у них будут свойства...

Кстати, масса у электронов есть не только в вакууме, но и в твердом теле, значит, есть инерция, поэтому ток и в твердом теле может идти, как в вакууме, если проводник мал и электрон не успевает испытать рассеяние. Это называется «баллистическая проводимость». Но, опять же, это новые результаты, а мы находимся в рамках классической физики.

Проявление этого второго принципа очевидно – мы можем управлять током, изменяя напряжение на сетке. При этом если сетка не перехватывает электроны (это мы еще обсудим), то входное сопротивление получается большим, а мощность управления – малой, и это замечательно. Если мы пропустим анодный ток по сопротивлению, то получим на выходе напряжение – мы сделали усилитель напряжения с высоким входным сопротивлением.

Третий принцип – сеток может быть несколько. Катодов и анодов, кстати, тоже может быть несколько, но пока нам непонятно зачем. А вот зачем несколько сеток, мы понимаем – чтобы было несколько способов управления током. Есть и возможности похитрее – если мы подадим на две сетки две синусоиды с частотами f_1 и f_2 , то в выходном сигнале будут «комбинационные частоты» $nf_1 + mf_2$ (n и m – любые целые), которые можно разделить фильтрами. Этот прием используется, наверное, во всех современных приемниках. Сеток может быть и не две, а три и больше, но это уже для других разнообразных применений.

То, о чем мы сейчас говорили, называется «сеточные лампы», они возникли в начале прошлого века, век служили людям и даже сейчас это делают. Хотя ни в рентгеновской трубке, ни в магнетроне (в СВЧ-печи) сетки нет, это диоды. Смысл рентгеновской трубки – в генерации при торможении электронов на аноде рентгеновского излучения, т.е. электромагнитного излучения с длиной волны $10^{-3} - 10^2$ нм. Смысл магнетрона, как это ни забавно, почти в том же – в генерации электромагнитного излучения. Правда, с длиной волны около 10 см и совершенно другим способом – при пролете электронного сгустка рядом с резонансным контуром. Но главный фокус магнетрона в том, что электроны собираются в сгустки под действием электромагнитного поля этих резонансных контуров. А оно возникает именно и только при пролете электронных сгустков. Вы думали, что только в цирке фокусник вынимает кролика за уши из шляпы, где его нет? Это делает миллиарды раз в секунду магнетрон в СВЧ-печке.

А теперь – о проблемах.

Проблемы с вакуумом

Первая, самая очевидная проблема – вакуум. Каким он должен быть, чтобы электрон мог с вероятностью хотя бы 0,99 добраться от катода до анода при расстоянии, например, 1 мм? Это простой вопрос, надо только знать размер молекулы азота. Например, можно исходить из того, что при давлении 1 атмосфера 22,4 литра азота имеют массу 28 граммов, а число Авогадро вы сами знаете. Получить соответствующий вакуум не очень трудно, но на практике требуется гораздо меньшая концентрация остаточных газов, т.е. более «высокий» вакуум, а почему – скоро узнаем.

Вакуум надо как-то отгородить от атмосферы, значит, нужен герметичный корпус. Нам повезло, что мы живем на Земле – разность давлений легко выдерживается технологически удобным тонкостенным баллоном. На Венере и особенно на Юпитере ситуация могла оказаться сложнее. Кстати, механические напряжения при упрощенной модели посчитать легко. В книжках

встречается близкая задача – почему при варке сосиски лопаются вдоль, а не поперек. Там, правда, давление не снаружи, а изнутри, но задача все равно похожая.

При работе электронной лампы ее стеклянный баллон нагревается, и при некоторых неисправностях нагрев может быть таким сильным, что атмосферное давление сможет деформировать баллон (рис. 3).

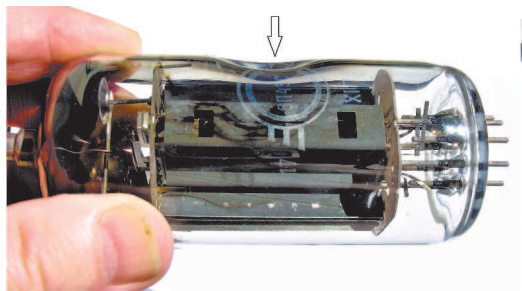


Рис. 3. Вот что бывает, когда стекло размягчается

Но это редкий и, можно сказать, криминальный случай. Чтобы лампа работала, надо подать напряжения на катод, анод и сетку (или несколько сеток). Иными словами, баллон должен быть либо диэлектрическим (стекло, керамика), либо металлическим, но тогда надо изолировать вводы. Можно было бы изолировать все, кроме одного, но на практике изолируют все – неудобно иметь металлический баллон под потенциалом одного из электродов. Соответственно, возникают и технологические (как сделать) и физические проблемы.

Вакуумно-плотное, т.е. без щелей, соединение металла и стекла (или керамики) – хорошо известная конструкторская и технологическая проблема. При каких условиях слипается раскаленное стекло с металлом – уже не простой и не слишком хорошо изученный вопрос. Но что происходит дальше? Само соединение осуществляется при высокой температуре, потом объект надо остудить, а что делают вещества при изменении температуры? В частности, изменяют свои размеры, а если они соединены и возникающие механические напряжения превзойдут прочность соединенных материалов или прочность самого соединения (это три разных прочности), то соединение разрушится. Механические напряжения могут быть в некоторых случа-

ях вычислены, если известны параметры соединяемых материалов. Например, вы можете получить этот результат, если соединены соосно цилиндр и стержень с известными коэффициентами термического расширения и модулями Юнга.

Кстати, почему в качестве модели для расчета напряжений надо брать систему с осевой симметрией? Не только потому, что она похожа на реальную конструкцию. А еще и потому, что конструкции из двух пластинок может быть энергетически выгоднее изогнуться, а это посчитать будет сложнее. На практике стараются в качестве вводов использовать материалы с таким же расширением, как материал баллона. Но это сплавы, у которых обычно выше сопротивление, а мы собирались по вводам пропускать токи.

Поэтому первая физическая проблема – вводы должны иметь достаточное сечение, чтобы они не грелись протекающим током, а вторая проблема – расстояние между вводами должно быть достаточно велико, чтобы не произошел пробой по поверхности баллона (пробой по поверхности происходит при меньших напряжениях, чем пробой по объему). Что касается пробоя в твердых телах, хоть по объему, хоть по поверхнос-

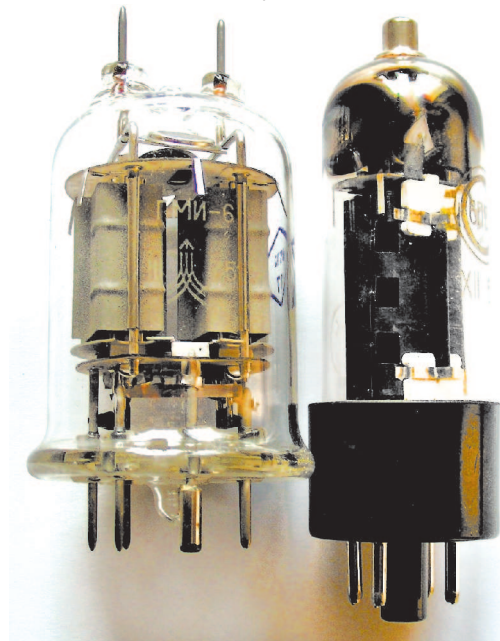


Рис. 4. Высоковольтные выводы вверх

ти, то физика явлений частично известна, но не настолько, чтобы говорить о расчете пробивного поля. Экспериментальные данные, конечно, есть и на практике в лампах, использующих высокие напряжения, ввод для этого напряжения располагают по-дальше от остальных (рис. 4).

Проблемы сетки

Выше объяснено, почему важный параметр – ток в цепи сетки. Этот ток зависит от трех факторов: от приложенного между сеткой и катодом напряжения, от сопротивления стекла и от перехвата сеткой электронов, летящих от катода. Идеальных диэлектриков вообще не существует, стекло – не самый хороший диэлектрик и тут оно вдобавок нагретое (почему – мы еще обсудим), а это уменьшает его сопротивление. В этом смысле диэлектрики ведут себя, как полупроводники, а не как проводники (об этом различии рассказано в учебнике). В лампах, специально предназначенных для работы с малыми токами в цепи сетки (электрометрические лампы), вывод сетки (не анода!) удаляют от остальных выводов (рис. 5).

Кроме тока по стеклу, вызванного приложенным напряжением, есть еще одна причина для тока в цепи сетки. Часть электронов, летящих от катода, перехватывается сеткой. Это зависит от того, как сделана сетка: от диаметра проволочек, от того, проволочки это или ленточки (рис. 6) и как они расположены. Траектории электронов и долю перехвата можно рассчитать, но это не школьная задача. Кстати, насчет сетки не из проволочек, а из ленточек. Как, вам кажется, надо располагать ленточки – плоскостью поперек потока электронов или вдоль него?

Допускать накопления электронов на сетке нельзя – сетка зарядится отрицательно до потенциала, при котором ее поле прекратит ток с катода (лампа запрется). В старых схемах сетку соединяли с като-

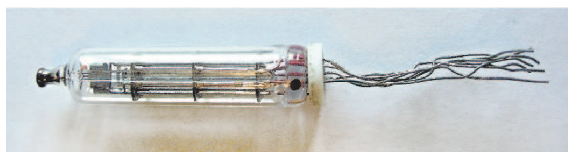


Рис. 5. Электрометрическая лампа



Рис. 6. Сетки из ленточек (в этой лампе было две сетки). Плоскость лент параллельна потоку электронов

дом через сопротивление (сопротивление утечки), которое для обеспечения стабильности работы делали вдобавок существенно меньше сопротивления стекла (которое зависит и от влажности, и от температуры, и от того, брались ли вы за баллон голыми пальцами). Сейчас напряжение на сетке относительно катода поддерживается независимым от перехвата тока источником.

Перехват тока сеткой плох по нескольким причинам, в частности, он нагревает сетку и с нее может начаться термоэлектронная эмиссия, т.е. сетка начнет вести себя, как катод (для этого есть и другая причина, мы до нее еще доберемся). Только управлять этим током сетка уже не будет, лампа перестанет работать. В некоторых более мощных лампах для уменьшения перехвата катод устраивают так, что электроны из него вылетают не равномерно по всей площади, а только с участков, расположенных под отверстиями в сетке (рис. 7). Это почти случай нескольких катодов. Почти – потому что катоды, в смысле элементы, которые эмитируют, тут действительно отдельные (это диски-луночки из гексаборида лантана LaB_6 , вделанные в графитовую матрицу), но подогреватель – он стоит сзади и не виден – он один. Чтобы не спорить, один это катод или много, говорят «катодно-подогревательный узел».

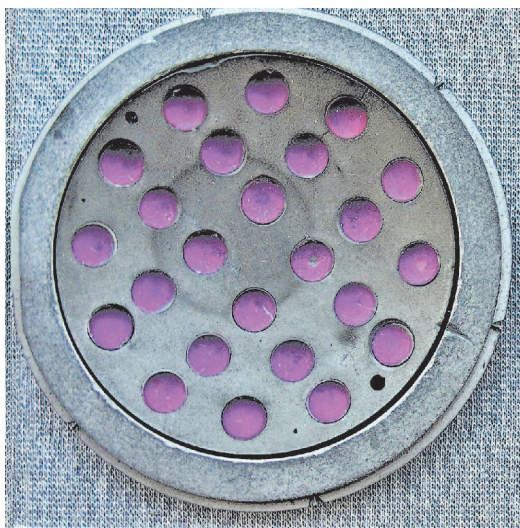


Рис. 7. Многоэмиттерный катодно-подогревательный узел

Проблемы катода

Итак, мы добрались до катода. Чтобы покинуть катод и вылететь в вакуум, у электрона есть два способа – получить дополнительную энергию, большую работы выхода, или воспользоваться квантовыми свойствами, позволяющими преодолеть тонкий (т.е. локализованный в пространстве) потенциальный барьер.

Что касается дополнительной энергии, то в учебнике упоминаются опять же два возможных способа – нагреть катод и облучить фотонами. Это, соответственно, термоэмиссия и фотоэмиссия. На самом деле есть и другие способы, например – направить на катод поток электронов или ионов, получить, соответственно, вторично-электронную и ионно-электронную эмиссию. Для всех видов эмиссии есть и теории, и экспериментальные данные, и кое-где в электровакуумных приборах эти процессы встречаются. Например, на аноде, куда прилетают электроны с относительно большими энергиями, возникает вторично-электронная эмиссия – это вредный процесс.

Электронно-оптические преобразователи (ЭОП), которыми «видят» приборы ночного видения, используют фотоэмиссию и вторично-электронную эмиссию, они необходимы для их работы. Фотоэмиссия обменивает кванты света на электроны, вторично-

электронная эмиссия усиливает поток электронов, а люминофор обменивает эти электроны обратно на кванты света – мы получили усилитель света. Кстати, как вы думаете, можно ли на этом принципе сделать преобразователь инфракрасного излучения в видимое? Далее, ионно-электронная эмиссия важна для работы люминесцентных (их еще называют энергосберегающими) ламп, впрочем, это уже не электровакуумные, а газоразрядные приборы. Но что касается катодов электронных ламп, то они всегда используют термоэмиссию.

Правда, в последние десятилетия идет медленное расширение применения упомянутой выше эмиссии сквозь тонкий потенциальный барьер, т.е. автоэлектронной эмиссии. Чтобы он был тонким, надо создать на поверхности высокую напряженность поля, а для этого катод должен быть в виде лезвия или острия. Соответственно, с катода эмитируется расходящийся веером поток электронов, а все классические электровакуумные приборы работали с пучками, в которых траектории электронов были параллельными. Поэтому использование автоэлектронной эмиссии требует разработки новых типов приборов, а это дело дорогое, не быстрое и вообще рискованное. В том смысле, что время и силы будут потрачены, но может ничего и не получиться. Тем не менее, физика и техника не стоят на месте, и к тому времени, когда вы «вступите в игру», ситуация, наверное, еще немного сдвинется в сторону автоэмиссии. Но в этой статье ограничимся рассмотрением термоэмиссии.

А почему из обычного плоского термокатада электроны вылетают с малыми скоростями и перпендикулярно поверхности катода? Для преодоления потенциального барьера важна не полная скорость электрона, а лишь компонента скорости, перпендикулярная поверхности. Поэтому при равных энергиях в наиболее выгодном положении оказываются электроны, летящие перпендикулярно барьеру. Иными словами, барьер сам отбирает такие электроны. С ростом энергии количество электронов, обладающих соответствующей энергией, быстро падает. Зря увеличивать темпе-

ратуру, сокращая срок службы, никто не будет, ее устанавливают такой, чтобы обеспечить необходимый ток (с небольшим запасом на дрейф параметров). И вылетевшие электроны оказываются теми, которым еле-еле хватило на это энергии.

Катоды самых первых электронных ламп были просто вольфрамовыми проволочками, они нагревались пропусканием тока (прямокальные катоды). Соответственно, срок службы ламп определялся скоростью испарения вольфрама, причем чем больше был нужен ток эмиссии, тем выше приходилось поднимать температуру и тем меньше оказывался срок службы. Вся дальнейшая вековая эволюция ламп была результатом работы физиков и инженеров, конструкторов и технологов над увеличением эмиссии и срока службы, причем в том сочетании, которое требовалось для того или иного прибора. Одно из направлений работы – поиск и создание для катодов материалов с низкой работой выхода (эта величина даже упоминается в учебнике).

Но по мере уменьшения работы выхода возникали две попутные проблемы. Первая – материал с низкой работой выхода содержал элементы I и II групп, причем V и VI периодов, т.е. наиболее химически активные. Значит, требовался очень высокий вакуум, иначе материал взаимодействовал с остаточными газами и работа выхода увеличивалась. Вторая – этот материал, испаряясь, попадал на изоляторы, имеющиеся внутри лампы, и портил их, ведь он-то был проводником. Изоляторы можно защитить от напыления экранами, но напыление попадало и на сетку, и она начинала работать, как катод, с названными выше последствиями. Поэтому сетки покрывали материалами, которые растворяли в себе то, что напылялось. На рисунке 8 показана сетка мощной электронной лампы, покрытая золотом. Белая поверхность за ней – покрытие так называемого оксидного катода, тонкого слоя тройного оксида (BaSrCa)O. После нагрева в вакууме он становится полупроводником с низкой работой выхода. А испаряет он при работе барий, который и оседает на сетке. Один из способов защиты – тонкая пленка золота,

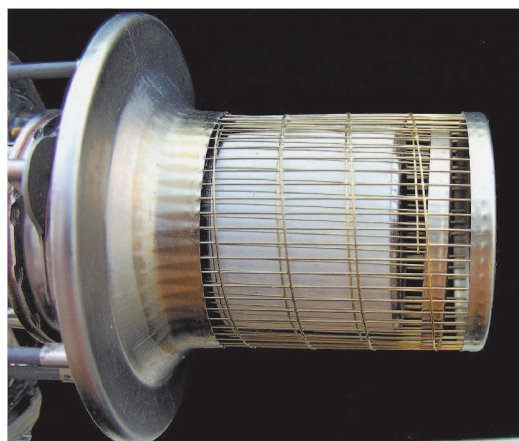


Рис. 8. Сетка покрыта золотом для растворения бария и увеличения работы выхода

она хорошо растворяет барий и не дает ему уменьшать работу выхода сетки. Сам слой оксида нанесен на подложку, обычно из никеля, а уж за ней находится нагреватель, нагревающий слой оксида до температуры, при которой он может эмитировать необходимый ток. Это – катод косвенного накала.

Попутно, разумеется, разработчики электровакуумных приборов решали все прочие задачи – увеличивали напряжение, ток, мощность, вибро- и ударопрочность, уменьшали габариты, вес и стоимость, все это по отдельности и в любых сочетаниях. И каждая из этих задач упиралась в физику, причем решение инженерных задач требовало знания разных ее разделов. И чем более новой и интересной была инженерная задача, тем более широкое знание физики требовалось для ее решения.

Первые три принципа, рассмотренные выше, касались электричества, точнее – взаимодействия заряда и поля. Они не специфичны для вакуумных приборов, при некоторых условиях они «работают» и в твердом теле, хотя это пока – передний край физики. Но четвертый принцип – гораздо более общий, это закон сохранения энергии. Разберемся, как он работает для электронных приборов.

Проблемы КПД

Электровакуумные приборы имеют источник питания, от которого они получают энергию. Можно представить себе два типа

электровакуумных приборов без источника питания – разрядник (их много разных) и диод с автоэлектронным катодом (подробности можно найти в интернете). Но кроме них все остальные потребляют энергию и мощность. А что они выдают? Лампы, работающие в области высоких частот, выдают электромагнитную волну, т.е. энергию и мощность. Про лампы, работающие в области относительно низких частот, сказать «выдают» нельзя, можно сказать «могут выдавать». Ибо для этого к ним надо подсоединить нагрузку, а без нагрузки у них на выходе имеется напряжение (или ток в цепи анода), но нет мощности. Правда, тут есть тонкости. Например, есть высокочастотные лампы, которым вредно работать без нагрузки. Так, СВЧ-печи (микроволновки) не положено включать без нагрузки. Но сейчас мы обсуждаем более простые ситуации. Так вот, так или иначе, а КПД не бывает 100 %. Соответственно, возникают два вопроса – как можно увеличить КПД и куда девается «остальное».

А остальное переходит в основном в тепло – электроны прилетают к аноду с энергией и почти вся она преобразуется в тепло (порядка 1 % – в рентгеновское излучение). От этого тепла много неприятностей, например, материал анода может испаряться или плавиться. Охлаждение происходит с внешней стороны, а греется анод изнутри. При нагреве материал анода расширяется, но внешние слои не дают ему это сделать, в материале возникают механические напряжения. В итоге материал анода трескается. Эти процессы с трудом поддаются расчету, но экспериментальные данные и опыт эксплуатации имеются.

В самом начале статьи было вскользь сказано про среднюю мощность и ее отличие от импульсной. Представим себе, что лампа работает в непрерывном режиме, часть потребленной ею энергии так или иначе преобразуется в тепло и достается электродам. В итоге все это тепло отводится в окружающую среду. Охлаждение естественное или искусственное, водяное или воздушное – не столь важно, главное, что тепло отводится в среду. Но все части лампы (и электроды, и оболочка) нагрева-

ются, а вот до какой температуры – зависит от того, как работает охлаждение. Раз какой-то элемент нагревается, значит, сильнее испаряется, изменяет размеры, теряет прочность, увеличивает эмиссию, может и совсем расплавиться. Тепловой режим отчасти поддается расчету, уравнения там не слишком сложные, но все-таки не школьные. Поэтому расчет нужен, но экспериментальная проверка обязательна.

Но вот что надо понимать про среднюю и импульсную мощности. Электровакуумные приборы любых типов часто работают в импульсном режиме. Рассмотрим самый простой случай, когда это прямоугольные импульсы длительностью t , следующие с периодом T . (На всякий случай – в книгах и статьях вы можете встретить термины «коэффициент заполнения», он равен t/T , и «скважность», она равна T/t .) Пусть мощность в течение импульса равна N . Тогда, очевидно, средняя мощность равна tN/T . Внимание, вопрос: чему равен нагрев какого-то определенного элемента лампы? Равен ли он нагреву при работе в непрерывном режиме с мощностью, равной средней, т.е. tN/T (что кажется естественным), или нагреву при работе в непрерывном режиме с мощностью, равной пиковой, т.е. N (что кажется глупостью)? Подсказка – возможны оба случая, а также все промежуточные.

На самом же деле это только самый маленький и начальный кусочек огромного куска физики и техники, причем имеющего отношения далеко не только к электронным лампам. Но в любом случае – все эти процессы вредны. Как их избежать? На этот вопрос есть много ответов, причем для каждого типа приборов ответы свои, но два общих – причем правильных – ответа вы можете дать сразу, исходя из того, что уже знаете. Надо притормозить электроны перед прибытием на анод. Это действительно делается, и называется это рекуперацией. Вы можете на досуге поразмышлять, есть ли у этого способа ограничения и какие (их по крайней мере два). Другой способ – «распушить» электронный пучок, обрушивающийся на анод, расширить его, уменьшить плотность мощности (отношение мощ-

ности к площади). Впрочем, и у этого способа есть ограничение (какое?).

С остальными принципами ситуация сложнее – сами они просты и возникающие проблемы известны, но в рамках школьного курса связать их, как это сделано выше, почти не получится. Однако сами принципы (точнее, два из них) и возникающие при этом проблемы мы назовем.

Принцип «собраться в кучку»

Этот принцип использует простую кинематику. Пусть у нас есть сгусток электронов и он летит, т.е. все электроны в данный момент имеют одинаковые скорости. Кстати, понятно ли, что только в этом случае можно говорить «он летит с такой-то скоростью»? Если да, то почему мы говорим: «Земля летит с такой-то скоростью»? Ведь у разных точек Земли скорость разная. Однако, вернемся к электронам.

Если вокруг них пустое пространство и нет в нем электрических и магнитных полей, то электроны так и будут лететь, но сгусток понемногу будет расширяться из-за закона Кулона. Если мы вообще собираемся что-то делать с этим сгустком, то нам, скорее всего, потребуются, чтобы он не расширялся. Делается это так – вдоль направления полета соленоидом или постоянными магнитами создается постоянное магнитное поле. Вспомните соответствующие формулы и скажите, как будут себя вести электроны. Во многих случаях это решит проблему, хотя создание такого поля – это дополнительная трата энергии (если соленоид) и во всех случаях это увеличение веса, габаритов и стоимости установки.

Теперь представим себе, что передние по ходу движения электроны немного уменьшили или задние немного увеличили свои скорости. Сгусток начнет укорачиваться, а если мы правильно распределим изменения скорости по нему (кстати, как именно?), то сгусток вообще соберется в блин. Проблемой здесь будет это самое правильное изменение скорости. Но зачем мы вообще собирали электроны в блин?

Ответ на этот вопрос – последний принцип, который здесь назовем, а именно, взаимодействие с электромагнитным полем.

Принцип «взаимодействовать с полем»

Но разве не было этого взаимодействия в сеточных лампах? Ответ таков – оно было, но настолько слабое, что для анализа работы ламп его учет не требовался. Разумеется, электромагнитное поле возникает всегда, когда есть переменное электрическое или магнитное поле. Но то, что возникло, зависит от того, с какой скоростью изменяется то, что изменяется. И область частот, в которых используются сеточные лампы, такова, что эти эффекты приходится учитывать не очень часто. Для работы на высоких частотах были созданы лампы, которые использовали именно взаимодействие с полем.

Что же касается возникающих при этом проблем, то их несколько. Электронный поток должен быть «аккуратным» – скорости электронов должны быть одинаковы, а их траектории не должны пересекаться. Но электромагнитное поле зависит и от координат в пространстве, и от времени, причем в разных местах и в разные моменты оно разное. Поэтому, как только мы допустили взаимодействие, мы допустили неаккуратность потока. Это означает, что и теория ламп, и их разработка будут сложными.

Для улучшения взаимодействия хочется сделать электронный сгусток поплотнее, но Шарль Кулон (из своего XVIII века) этому препятствует и с этим ничего поделать не удастся. Ввести в область взаимодействия положительные ионы для компенсации заряда не удастся, и вы уже знаете, почему. Кроме того, упомянутое выше в тексте «правильное изменение» скорости (линейное) на практике получить нельзя. Воздействие на электроны производится электромагнитным полем, а оно зависит от времени не так, как нам хочется, а по синусоиде. Все это означает, что тот, кто занимается теорией и практикой этих приборов, решает сложные задачи.

Как иногда шутят, «простые задачи решили до нас». Но это означает, что ваше удовольствие от решения будет больше, чем у тех, кто решал эти задачи раньше, а оно было не маленьким.

Об инвариантах Понселе и пучках окружностей

П. КОЖЕВНИКОВ

Вокруг теоремы Понселе

Теорема Понселе – одна из геометрических теорем, которой можно восхищаться бесконечно! Приведем один из «классических» вариантов ее формулировки (конечно, известны вариации и обобщения).

Теорема Понселе. Пусть на плоскости даны две окружности, и вторая окружность лежит внутри первой (рис. 1).

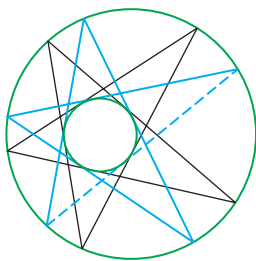


Рис. 1

Предположим, существует замкнутая n -звенная ломаная, все вершины которой лежат на первой окружности, а все звенья которой касаются второй. Тогда есть бесконечно много таких замкнутых n -звенных ломаных и любая точка первой окружности может быть вершиной такой ломаной.

Таким образом, построение ломаной можно начать с любой точки первой окружности, проводя касательную ко второй окружности и получая новую точку пересечения на первой окружности. Пошаговое построение такой ломаной называют процессом Понселе для пары данных окружностей, а саму ломаную (вписанную в первую окружность и описанную вокруг второй) – ломаной Понселе или траекторией Понселе. По сути, теорема Понселе

утверждает, что если траектория Понселе, начатая в некоторой точке первой окружности, оказалась периодической, т.е. замкнулась после какого-то шага, то эту замкнутую траекторию можно «вращать» между окружностями.

Зададимся вопросом, а какими интересными свойствами обладают траектории Понселе? Интересным свойством может быть инвариант, т.е. величина или характеристика, не зависящая от выбора траектории.

Пример метрического инварианта указан в задаче М2817 из «Задачника «Кванта» (ее решение см. в этом номере журнала). В этой задаче рассматривается пара окружностей, для которых существует семейство вписанно-описанных $(2n)$ -угольников Понселе, и утверждается, что отношение площади к сумме длин главных диагоналей является инвариантом, т.е. одной и той же величиной для любого $(2n)$ -угольника Понселе.

В решении задачи М2817 используется замечательный геометрический инвариант семейства $(2n)$ -угольников Понселе: их главные диагонали пересекаются в одной фиксированной (не зависящей от выбора $(2n)$ -угольника) точке. К этому факту мы обратимся в задаче 10 в конце статьи.

Рассмотрим утверждение про еще один геометрический инвариант для периодических траекторий Понселе.

Утверждение. Пусть для пары окружностей Ω, ω есть замкнутая n -звенная траектория Понселе. Рассмотрим n точек касания звеньев с ω . Тогда центр масс системы этих n точек – фиксированная точка.

Итак, центр масс точек касания, а точнее говоря, центр масс системы n равных масс,

помещенных в эти точки касания, не зависит от выбора траектории Понселе! Для сравнения отметим, что центр масс вершин траектории Понселе уже не будет неподвижным (в случае неконцентрических окружностей), а будет двигаться по окружности – это тоже красивый и совсем не очевидный факт.

Алгебраические рассуждения, доказывающие утверждение про центр масс точек касания, про траекторию центра масс вершин и многие другие факты, связанные с теоремой Понселе, можно найти в статье [1] и в материалах Летней конференции Турнира городов [2]. А не так давно автор этой статьи обнаружил довольно короткое геометрическое доказательство утверждения о центре масс точек касания. Желание познакомить читателя с этим доказательством и стало поводом для написания статьи.

В рассуждениях нам понадобятся пучки окружностей, разговор о которых может быть полезен сам по себе. Также мы вспомним ключевую лемму из классического геометрического доказательства теоремы Понселе (см., например, книгу [3] или упражнения 24–27 в статье [4]).

Пучки окружностей

Координатный подход

Стандартным уравнением окружности (в заданной прямоугольной системе координат на плоскости) будем называть уравнение вида $f(x, y) = 0$, где f имеет вид

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2. \quad (1)$$

Константы x_0, y_0, R имеют понятный геометрический смысл: (x_0, y_0) – это центр окружности, а R – ее радиус.

После раскрытия скобок стандартное уравнение окружности приводится к виду

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \quad (2)$$

Упражнение 1. Покажите, что уравнение вида (2) задает либо окружность, либо множество из одной точки («окружность» нулевого радиуса), либо пустое множество («окружность» мнимого радиуса). Напишите условия на a, b, c , при которых реализуется каждая из этих возможностей.

При домножении уравнения окружности (2) на константу $\lambda \neq 0$ получится эквивалентное (т.е. задающее ту же окружность) уравнение вида

$$\lambda(x^2 + y^2) + dx + ey + k = 0. \quad (3)$$

Пусть на координатной плоскости заданы две окружности своими уравнениями $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ вида (2). Зафиксируем константы λ_1 и λ_2 , одновременно не обращающиеся в 0 (т.е. такие, что $|\lambda_1| + |\lambda_2| > 0$), и рассмотрим *линейную комбинацию* этих уравнений

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0. \quad (4)$$

Несмотря на то, что в линейной комбинации (4) присутствуют два параметра λ_1 и λ_2 , по сути она зависит от одного параметра: например, разделив (4) на λ_2 (это не сработает только при $\lambda_2 = 0$), получим эквивалентное уравнение $t f_1 + f_2 = 0$,

где $t = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Если $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ – уравнения окружностей вида (3), то уравнение (4) также имеет вид (3), т.е. «почти всегда» задает окружность. Исключением является лишь случай обнуления коэффициента при $x^2 + y^2$; тогда мы получим линейное уравнение $dx + ey + k = 0$, где $|d| + |e| > 0$, задающее прямую (которую, впрочем, можно воспринимать как окружность бесконечного радиуса), либо же уравнение совсем «выродится» до вида $k = 0$.

Упражнения

2. Покажите, что если уравнения $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ задают окружности, центры которых лежат на прямой m , то центр окружности (4) также лежит на m .

Указание. Найдите центр окружности по ее уравнению (2).

3. Покажите, что

а) если уравнения $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ вида (3) задают неконцентрические окружности, то существует единственная прямая, задаваемая уравнением вида (4);

б) если окружности $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ концентрические, то и все окружности (4) концентрические.

Теперь дадим основное определение.

Определение. Пучком окружностей Π , порожденным окружностями $f_1(x, y) = 0$

и $f_2(x, y) = 0$, будем называть множество окружностей вида (4), где $|\lambda_1| + |\lambda_2| > 0$. При этом допускаются окружности нулевого и бесконечного радиуса.

Несколько окружностей, принадлежащих одному пучку, называют также *соосными*. Ниже увидим, что неконцентрические окружности, принадлежащие одному пучку, имеют общую радикальную ось, так что термин «соосные» вполне хорош.

Сформулируем в виде упражнений несколько несложных, но важных свойств пучков.

Упражнения

4 (о пересечении). Если точка M лежит на каждой из окружностей $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$, то она лежит и на любой окружности из пучка, порожденного ими.

5 (о замечании плоскости). Пусть две различные окружности $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ порождают пучок Π , а M – точка плоскости, не являющаяся их общей точкой. Тогда через точку M проходит ровно одна окружность из пучка Π .

Указание. Подставив координаты точки M в линейную комбинацию (4), получите линейное уравнение на λ_1 и λ_2 .

И еще одно свойство, показывающее «равноправие» всех окружностей в пучке.

Упражнение 6 (о порождающих пучка). Пусть две различные окружности $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ порождают пучок. Тогда любая пара окружностей из этого пучка порождает тот же пучок.

Указание. Заметьте, что множество линейных комбинаций двух наших уравнений не изменится при замене уравнения $f_2 = 0$ на $tf_1 + f_2 = 0$.

Завершая «координатный» разговор о пучках, отметим, что в алгебраической геометрии дело, конечно, не ограничивается рассмотрением лишь пучков окружностей. Порождающие уравнения $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ можно брать абсолютно произвольными; скажем, если $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – линейные функции, мы получим пучок прямых, если кубические – пучок *кубик* (см., например, статью [5]) и т.д. При этом общие свойства, сформулированные выше в упражнениях 4 – 6, остаются верными. Некоторые примеры

использования линейных комбинаций уравнений (т.е. по сути использование пучков) для решения задач показаны в статье [6].

Степень точки и обобщенная окружность Аполлония

Посмотрим еще раз на стандартное уравнение окружности $f(x, y) = 0$. Заметим, что величина $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ равна d^2 , где $d = d(x, y)$ – расстояние от точки $M(x, y)$ до центра (x_0, y_0) нашей окружности Ω . Поэтому $f(x, y) = d^2 - R^2$ – это знакомая многим любителям геометрии *степень точки M относительно данной окружности*:

$$f(x, y) = \text{pow}(M, \Omega)$$

для любой точки $M(x, y)$. Это соображение позволяет по-другому взглянуть на уравнение (4) и доказать следующую лемму о нахождении ГМТ.

Лемма (обобщенная окружность Аполлония, или лемма о соосных окружностях). Пусть даны две окружности ω_1 и ω_2 , а также зафиксирована константа $\lambda \neq 0$. Тогда множество точек M , для которых

$$\text{pow}(M, \omega_1) = \lambda \text{pow}(M, \omega_2), \quad (5)$$

есть *окружность, соосная с ω_1 и ω_2* .

Доказательство. В координатах уравнение (5) принимает вид $f_1(x, y) = \lambda f_2(x, y)$, где $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ – стандартные уравнения окружностей ω_1 , ω_2 . Остается заметить, что это уравнение приводится к уравнению $f_1 - \lambda f_2 = 0$ вида (4), что и доказывает лемму.

Окружность из леммы уместно назвать *обобщенной окружностью Аполлония* (или λ -окружностью Аполлония) для пары окружностей ω_1, ω_2 . Действительно, «классическая» окружность Аполлония определяется для пары точек A и B как множество точек M , для которых $MA = kMB$ (для некоторой константы $k > 0$). Как видим, это частный случай обобщенной окружности Аполлония для окружностей нулевого радиуса. При $\lambda = 1$ уравнение (5) превращается в определение радикальной оси $\text{pow}(M, \omega_1) = \text{pow}(M, \omega_2)$, так что 1-окружность Аполлония двух неконцент-

рических окружностей – это просто их радикальная ось. Отметим, что λ -окружности Аполлония – это в точности окружности из пучка, порожденного ω_1, ω_2 (если позволить дополнительно сами окружности ω_1 и ω_2 считать λ -окружностями Аполлония при $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$).

Упражнение 7. Пусть даны окружность ω и прямая l , а также зафиксирована константа $\lambda \neq 0$. Найдите множество точек M , для которых $\rho_{\omega}(M, \omega) = \lambda \rho(M, l)$, где ρ обозначает ориентированное расстояние от точки до прямой.

Радикальная ось и соосные окружности

Пусть две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2 принадлежат пучку Π окружностей (в таком случае они порождают пучок Π – см. упражнение 6). Как мы видели, их радикальная ось l тогда тоже принадлежит пучку Π . А поскольку l – единственная прямая в пучке Π (см. упражнение 3), получается, что прямая l является радикальной осью для любой пары окружностей из Π .

Нетрудно понять, что верно и обратное: если несколько окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ имеют общую радикальную ось l , то они принадлежат одному пучку. Действительно, как мы знаем, l лежит в пучке, порожденном ω_1 и ω_2 . Но тогда, согласно упражнению 6, ω_2 лежит в пучке Π , порожденном ω_1 и l . То же верно для каждой окружности $\omega_i, i = 2, 3, \dots$. Таким образом, термин «соосность» оправдывает свое название.

Отметим, что в некоторых конструкциях (см., например, задачу 5 в конце статьи) очень удобно пользоваться следующим соображением: если нашлись две различные точки A и B , у которых степени относительно (нескольких) данных окружностей равны, то эти окружности соосны (а прямая AB – их общая радикальная ось).

Описание пучков окружностей

Наконец, опишем явно, как геометрически устроены пучки окружностей.

Первый тип пучка – пучок, порожденный двумя окружностями, пересекающимися в двух точках A и B . Как устроен

такой пучок, по сути было ясно уже после упражнений 4 и 5: такому пучку принадлежат все окружности, проходящие через A и B , а также прямая AB (радикальная ось) (рис. 2,а).

Второй тип – пучок, порожденный двумя окружностями, касающимися в точке A . В этом случае пучок состоит из общей касательной окружностей, проведенной в A (радикальной оси), и всех окружностей, касающихся ее в точке A (рис. 2,б).

Третий тип получается, когда окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются и не concentрические. Пусть O_1 и O_2 – центры ω_1 и ω_2 (рис. 2,в). Проведем их радикальную ось l , отметим точку $S = l \cap O_1O_2$. Рассмотрим произвольную окружность ω из пучка Π , порожденного ω_1 и ω_2 . Ее центр лежит на O_1O_2 (см. упражнение 2). Кроме того, величина $t = \sqrt{\rho_{\omega}(S, \omega)}$ фиксирована (она равна $\sqrt{\rho_{\omega}(S, \omega_1)} = \sqrt{\rho_{\omega}(S, \omega_2)}$). Таким образом, длина касательной, проведенной к ω из точки S , равна t (иными словами, окружность ω ортогональна

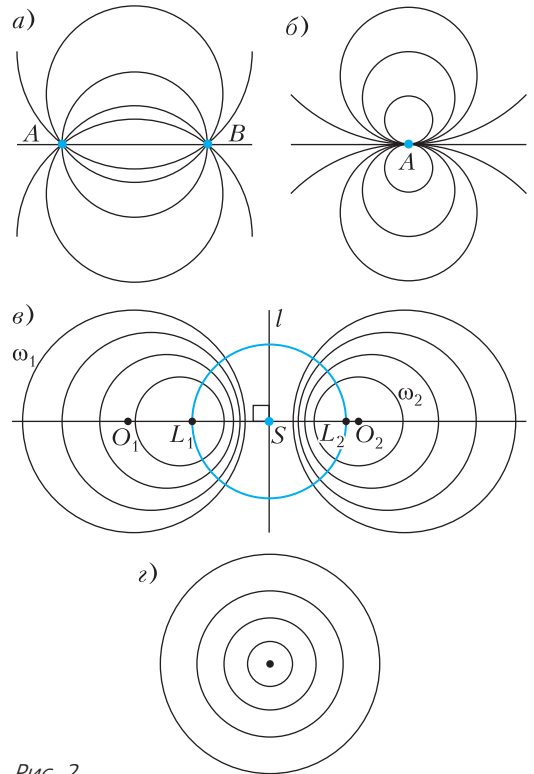


Рис. 2

окружности с центром S и радиусом t). Это условие выделяет окружности пучка Π среди всех окружностей с центрами на O_1O_2 . Теперь легко обнаружить в нашем пучке окружности нулевого радиуса – это точки L_1 и L_2 прямой O_1O_2 , находящиеся на расстоянии t от l . Эти точки L_1 и L_2 называют *предельными точками* пучка Π .

Упражнение 8. Докажите, что на рисунке 2, в любая окружность из пучка окружностей, проходящих через точки L_1 и L_2 , ортогональна любой окружности из пучка Π .

Наконец, четвертый тип получается, если ω_1 и ω_2 концентрические, они порождают пучок концентрических окружностей (рис. 2, z).

Ключевая лемма о процессе Понселе

Из данной точки A вне окружности ω можно провести к ней две касательные. Чтобы понимать, о какой именно касательной идет речь, зафиксируем некоторые договоренности. Далее под окружностью ω будем понимать окружность вместе с выбором направления ее обхода (по часовой стрелке или против). Будем считать, что луч $AХ$ касается ω , только если в точке касания направление \overline{AX} совпадает с направлением обхода окружности ω .

Пусть Ω и ω – пара окружностей, причем ω лежит внутри Ω . Сформулируем ключевую лемму.

Лемма. Пусть точки A_0, A_1, B_0, B_1 на окружности Ω таковы, что луч A_0A_1 и луч B_0B_1 касаются ω в некоторых точках X_1 и Y_1 соответственно (рис. 3). Пусть прямая X_1Y_1 пересекает прямую A_0B_0 в точке P_0 , а прямую A_1B_1 – в точке P_1 . Тогда существует окружность γ , касающаяся лучей A_0B_0 и A_1B_1 в точках P_0 и P_1 соответственно; причем окружности Ω , ω и γ соосны.

Доказательство. Будем считать, что B_0 и ω находятся по разные стороны от A_0A_1 , другие случаи взаимного расположения рассматриваются аналогично.

Прямые A_0A_1 и B_0B_1 касаются окружности ω , значит, углы $B_0Y_1X_1$ и $Y_1X_1A_1$ равны, обозначим их величину через t . Из

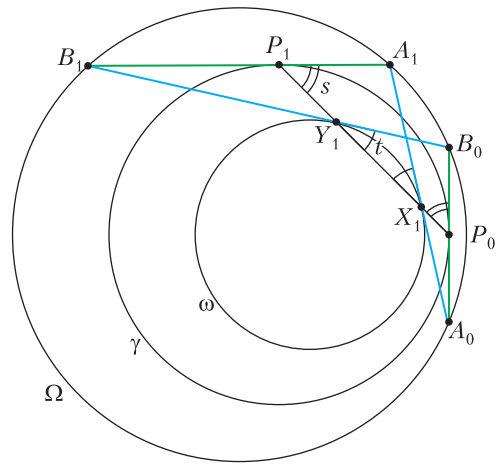


Рис. 3

того что точки A_0, A_1, B_0, B_1 лежат на одной окружности, следует равенство углов $P_1B_1Y_1$ и $X_1A_0P_0$. Далее,

$$\begin{aligned} \angle A_1P_1Y_1 &= \angle P_1B_1Y_1 + \angle B_0Y_1X_1 = \\ &= \angle X_1A_0P_0 + \angle Y_1X_1A_1 = \angle X_1P_0B_0. \end{aligned}$$

Видим, что угол между P_0P_1 и A_0B_0 равен углу между A_1B_1 и P_0P_1 , обозначим через s величину этого угла. Из равенства этих углов следует, что существует окружность γ , касающаяся лучей A_0B_0 и A_1B_1 в точках P_0 и P_1 соответственно (γ вписана в угол между прямыми A_0B_0 и A_1B_1).

Теперь, рассмотрим отношение $\frac{p\omega(A_1, \omega)}{p\omega(A_1, \gamma)}$. Оно равно отношению квадратов касательных $\frac{A_1X_1^2}{A_1P_1^2}$, которое, в свою очередь, из теоремы синусов для треугольника $A_1X_1P_1$, равно $\frac{\sin^2 s}{\sin^2 t}$. Положим $\lambda = \frac{\sin^2 s}{\sin^2 t}$. Повторив рассуждения выше с использованием теоремы синусов для треугольников $A_0X_1P_0, B_0Y_1P_0, B_1Y_1P_1$, получаем, что каждое из отношений $\frac{p\omega(A_0, \omega)}{p\omega(A_0, \gamma)}, \frac{p\omega(B_0, \omega)}{p\omega(B_0, \gamma)}, \frac{p\omega(B_1, \omega)}{p\omega(B_1, \gamma)}$ также равно λ . Значит, точки A_0, A_1, B_0, B_1 лежат на λ -окружности Аполлония для окружностей ω и γ . Таким образом, Ω и есть эта λ -окружность Аполлония, а значит, Ω, ω и γ соосны. Лемма доказана.

Следствие для траекторий Понселе.

Пусть $A_0A_1A_2\dots$ – траектория Понселе, т.е. точки A_0, A_1, A_2, \dots окружности Ω таковы, что лучи A_0A_1, A_1A_2, \dots касаются ω в некоторых точках X_1, X_2, \dots, X_n соответственно. Аналогично, пусть $B_0B_1B_2\dots$ – другая траектория Понселе, а Y_1, Y_2, \dots – соответствующие точки касания. Тогда

1) лучи A_0B_0, A_1B_1, \dots касаются некоторой фиксированной окружности γ ;

2) точки касания окружности γ с A_iB_i и $A_{i-1}B_{i-1}$ лежат на прямой X_iY_i (для всех $i = 1, 2, \dots$);

3) окружности Ω, ω и γ соосны.

Доказательство. Пусть γ_1 – окружность из ключевой леммы, соосная с окружностями Ω и ω , касающаяся лучей A_0B_0 и A_1B_1 . Аналогично, пусть γ_2 – окружность из ключевой леммы, касающаяся лучей A_1B_1 и A_2B_2 . Обе окружности γ_1 и γ_2 принадлежат пучку Π , порожденному окружностями Ω и ω . Но среди окружностей пучка Π , лежащих внутри Ω , есть не более одной окружности, касающейся луча A_1B_1 (как видно, например, из явного описания пучка – см. рис. 2, в). Это означает, что γ_1 и γ_2 совпадают, т.е. это одна и та же окружность, назовем ее γ . Продолжая рассуждать далее с парами касательных $A_{i-1}A_i$ и $B_{i-1}B_i$, заключаем, что γ – искомая окружность.

Отсюда ясно, что все три утверждения из следствия верны в силу ключевой леммы.

Теорема Понселе теперь доказывается совсем коротко.

Доказательство теоремы Понселе.

Пусть $A_0A_1A_2\dots A_n$ и $B_0B_1B_2\dots B_n$ – две траектории Понселе (для окружностей Ω и ω), причем известно, что первая траектория замкнутая, т.е. $A_n = A_0$. Согласно доказанному следствию, существует фиксированная окружность γ такая, что все лучи $A_iB_i, i = 1, 2, \dots$, касаются γ . В частности, луч A_0B_0 и луч A_nB_n , совпадающий с лучом A_0B_n , касаются γ . Но, с учетом нашей договоренности, существует единственный луч с началом в A_0 , касающийся γ . Значит, лучи A_0B_0 и A_0B_n совпадают, тем самым, $B_n = B_0$. Что и требовалось доказать.

Некоторые другие следствия ключевой леммы собраны в задачах 8–11 в конце статьи.

Центр масс точек касания

Теперь немного переформулируем утверждение про центр масс и докажем его.

Утверждение'. Пусть $A_0A_1\dots A_n$ – замкнутая траектория Понселе ($A_n = A_0$) для окружностей Ω и ω и пусть X_1, X_2, \dots, X_n – точки касания звеньев с ω . Аналогично, пусть $B_0B_1\dots B_n$ – еще одна (замкнутая) траектория Понселе и Y_1, Y_2, \dots, Y_n – соответствующие точки касания звеньев с ω . Тогда центр масс точек X_1, X_2, \dots, X_n совпадает с центром масс точек Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

Доказательство. Достаточно проверить, что сумма векторов $S = \overline{X_1Y_1} + \overline{X_2Y_2} + \dots + \overline{X_nY_n}$ – нулевая.

Как мы знаем, все лучи A_iB_i касаются фиксированной окружности γ , соосной с окружностями Ω и ω . Пусть r и ρ – радиусы окружностей ω и γ соответственно. Используя обозначения, аналогичные обозначениям на рисунке 3, пусть P_i – точки касания A_iB_i с окружностью γ . Мы знаем, что точки P_{i-1}, X_i, Y_i, P_i лежат на одной прямой. Покажем, что $\overline{X_iY_i}$ пропорциональны $\overline{P_{i-1}P_i}$ с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. Отсюда сразу следует равенство $S = \vec{0}$, так как сумма векторов $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n}$, очевидно, нулевая (ввиду того, что $P_n = P_0$).

Имеем $X_1Y_1 = 2r \sin t, P_0P_1 = 2\rho \sin s$. Как мы видели,

$$\lambda = \frac{\sin^2 s}{\sin^2 t} = \frac{\rho\omega(M, \omega)}{\rho\omega(M, \gamma)}$$

не зависит от выбора точки M окружности Ω . Получаем $\overline{X_iY_i} = \mu \overline{P_{i-1}P_i}$, где $\mu = \frac{r}{\sqrt{\lambda} \cdot \rho}$.

Коэффициент μ – константа, зависящая только от окружностей Ω, ω, γ , поэтому аналогично получаем $\overline{X_iY_i} = \mu \overline{P_{i-1}P_i}$ для всех i . Этим завершается доказательство.

В заключение приведем подборку задач на обсуждаемую тему.

Задачи

Разные задачи о соосных окружностях

1. Два жука A и B ползут с постоянными скоростями по прямым, пересекающимся в точке S . Докажите, что все окружности (ASB) соосны.

2. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q . Рассматриваются пары точек $A_1 \in \omega_1$, $A_2 \in \omega_2$ такие, что A_1A_2 проходит через P . Докажите, что середины M всевозможных отрезков A_1A_2 лежат на окружности, соосной с ω_1 и ω_2 . Каково уравнение этой окружности, если $x^2 + y^2 + a_i x + b_i y + c_i = 0$ – стандартные уравнения окружностей ω_i ?

Обобщите этот результат для точек M , делящих A_1A_2 в фиксированном отношении (так что $A_1M = \lambda MA_2$).

3. Даны окружности Ω и ω , причем ω лежит внутри Ω . Пусть L – предельная точка пучка, порожденного Ω и ω , лежащая внутри ω . Пусть прямая l пересекает Ω в точках A и B .

а) Пусть l касается ω в точке N . Докажите, что $\angle ALN = \angle BLN$.

б) Пусть l пересекает ω в точках C и D . Докажите, что $\angle ALC = \angle BLD$.

4 («теорема Чевы» про соосные окружности). Пусть даны три различные окружности ω_i , $i = 1, 2, 3$. Пусть $\gamma_1 - \lambda_1$ -окружность Аполлония для ω_2 и ω_3 (т.е. γ_1 – множество точек, для которых $\text{pow}(M, \omega_2) = \lambda_1 \text{pow}(M, \omega_3)$). Аналогично, $\gamma_2 - \lambda_2$ -окружность Аполлония для ω_3 и ω_1 , $\gamma_3 - \lambda_3$ -окружность Аполлония для ω_1 и ω_2 . Докажите, что если $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, то γ_1 , γ_2 и γ_3 соосны.

5. Четыре прямые образуют четырехсторонник: пусть ABC – треугольник, образованный тремя прямыми, а четвертая прямая пересекает прямые BC , CA , AB в точках A' , B' , C' соответственно. Докажите, что окружности, построенные на диагоналях AA' , BB' , CC' как на диаметрах, соосны, причем радикальной осью этих окружностей является *прямая Обера*, содержащая ортоцентры треугольников ABC , $A'B'C'$, $B'C'A$, $C'A'B$.

6 (Л. Шатунов, В. Шеломовский, Олимпиада имени И.Ф. Шарыгина, 2024 г., переформулировано). Пусть даны две пересекающиеся прямые x , y и четырехсторонник $AA'BB'CC'$ (точки обозначены, как в предыдущей задаче). Далее, через K_x , K_y обозначаем проекции точки K на прямые x и y . Пусть известно, что A_x , A'_x , A_y , A'_y лежат на одной (педальной) окружности α , а B_x , B'_x , B_y , B'_y лежат на одной окружности β . Докажите, что тогда C_x , C'_x , C_y , C'_y лежат на одной окружности γ , и при этом α , β , γ соосны.

Замечание. Известно, что условие существования педальной окружности $(A_x A'_x A_y A'_y)$ эквивалентно изогональности точек A и A' относительно угла между x и y . Как видим, из этой задачи сразу следует *теорема об изогоналях*. Кроме того, если в качестве x и y взяты две стороны четырехсторонника (скажем, ABC' и ACB'), то получается утверждение предыдущей задачи о соосности окружностей, построенных на AA' , BB' , CC' как на диаметрах.

7. Даны соосные окружности Ω , ω_1 , ω_2 , ω_3 . Треугольник $A_1A_2A_3$ вписан в окружность Ω , при этом A_1A_2 касается ω_3 в точке T_3 , A_2A_3 касается ω_1 в точке T_1 , A_3A_1 касается ω_2 в точке T_2 . Докажите, что либо T_1, T_2, T_3 лежат на одной прямой, либо A_1T_1 , A_2T_2 , A_3T_3 пересекаются в одной точке.

Следствия ключевой леммы

8. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Пусть окружность ω касается отрезков AE и BE , а также касается окружности $(ABCD)$ в точке T . Докажите, что существует окружность, касающаяся $(ABCD)$ в точке T , а также касающаяся прямых AD и BC (или AB и CD).

9 (теорема Понселе для пучка окружностей). Обобщенный процесс Понселе для окружностей Ω , $\omega_1, \omega_2, \dots$ определяется так: по точке $A_0 \in \Omega$ строится последовательность A_0, A_1, A_2, \dots точек окружности Ω такая, что луч $A_{i-1}A_i$ касается ω_i для $i = 1, 2, \dots$

Теорема Понселе для пучка окружностей утверждает, что если окружности Ω , $\omega_1, \omega_2, \dots$ соосны и обобщенный процесс Понселе с начальной точкой A_0 замкнулся на n -м шаге, то он замкнется на n -м шаге и для любой начальной точки.

Проведите доказательство этой теоремы (в случае, когда все ω_i лежат внутри Ω).

10. а) Пусть $\Omega, \omega_1, \omega_2$ – окружности, принадлежащие одному пучку Π , такие, что ω_1, ω_2 находятся внутри Ω . Пусть A_0, A_1, A_2 – точки на Ω такие, что луч A_0A_1 касается ω_1 , а луч A_1A_2 касается ω_2 . Докажите, что тогда всевозможные лучи A_0A_2 касаются фиксированной окружности из пучка Π .

б) Докажите, что в процессе Понселе A_0, A_1, A_2, \dots для окружностей Ω и ω для любого натурального k все «диагонали» вида $A_i A_{i+k}$ касаются фиксированной окружности, соосной с Ω и ω .

Проверьте, что то же верно для обобщенного процесса Понселе (для пучка окружностей).

(Теорема Понселе по сути является частным случаем этого утверждения: в случае замыкания $A_n = A_0$ «диагональ» A_0A_n «касается» Ω .)

в) Пусть $A_0A_1 \dots A_{2n}$ – замкнутая траектория Понселе для окружностей Ω и ω (таких, что ω

внутри Ω). Докажите, что «диагонали» A_0A_n , A_1A_{n+1} , ..., $A_{n-1}A_{2n-1}$ проходят через предельную точку пучка, порожденного Ω и ω .

11 (операция сложения на пучке). Рассмотрим пучок Π непересекающихся окружностей, и пусть Ω – некоторая окружность из Π . Пусть Π' – подмножество окружностей из Π , включающее Ω и все окружности из Π , лежащие внутри Ω . Для каждой окружности $\omega \in \Pi'$ определим (взаимно однозначное) отображение $g_\omega: \Omega \rightarrow \Omega$ условием $g_\omega(A) = B$, если луч AB касается ω .

а) Чему равна композиция $g_\omega g_{\bar{\omega}}$, где $\bar{\omega}$ обозначает ту же окружность, что и ω , но с другим направлением обхода? Для какой окружности ω преобразование g_ω – тождественное преобразование?

б) Докажите, что композиция $g_{\omega_1} g_{\omega_2}$ равна g_{ω_3} для некоторой окружности $\omega_3 \in \Pi'$.

в) Докажите, что для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Pi'$ верно $g_{\omega_1} g_{\omega_2} = g_{\omega_2} g_{\omega_1}$.

г) На элементах множества Π' определим операцию сложения: положим $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ в случае $g_{\omega_3} = g_{\omega_1} g_{\omega_2}$. Какими свойствами обладает эта операция? Как в терминах этого сложения задается условие периодичности траектории Понселе?

Вокруг центра масс точек касания

В задачах 12 – 15 рассматриваются замкнутые траектории Понселе $A_0A_1 \dots A_n$ для окружностей Ω и ω с центрами O и I и радиусами R и r соответственно (окружность ω лежит внутри окружности Ω); X_i – точки касания $A_{i-1}A_i$ с ω , G – центр (равных) масс X_1, X_2, \dots, X_n .

12. Докажите, что G лежит на прямой OI .

13. Рассмотрим центр масс середин дуг $A_{i-1}A_i$, проходимых от A_{i-1} к A_i против часовой стрелки, $i = 1, \dots, n$. Докажите, что этот центр масс постоянен и лежит на прямой OI .

14 (о функции суммы расстояний). Пусть \bar{e}_i – единичный вектор, сонаправленный с $A_{i-1}A_i$, а \bar{n}_i – результат поворота \bar{e}_i на 90° против часовой стрелки (так что \bar{n}_i – вектор единичной нормали для прямой $A_{i-1}A_i$). Рассмотрим (линейную) функцию $\rho(M, A_{i-1}A_i)$ ориентированного расстояния от точки M плоскости до прямой $A_{i-1}A_i$ (ее можно выразить через скалярное произведение векторов как $\rho(M, A_{i-1}A_i) = \overline{A_iM} \cdot \bar{n}_i$). Для замкнутой траектории Понселе $A_0A_1A_2 \dots A_n$ определим (линейную) функцию

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \rho(M, A_{i-1}A_i).$$

а) Докажите, что вектор $\bar{n} = \sum_{i=1}^n \bar{n}_i$ – инвариант Понселе (т.е. не зависит от выбора траектории).

б) Докажите, что функция f – инвариант Понселе.

в) Докажите, что суммы $\sum_{i=1}^n \cos \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $\sum_{i=1}^n \cos \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ – инварианты Понселе.

г) Пусть $n = 3$, т.е. рассмотрим семейство треугольников Понселе.

Докажите, что тогда $f(O) = r + R$ (формула Карно); прямая (линия уровня) $f(M) = 0$ пересекает прямые $A_{i-1}A_i$ в основаниях внешних биссектрис треугольника $A_0A_1A_2$.

Докажите аналогичные факты для случая, когда ω – A_0 -вневыписанная окружность треугольников Понселе $A_0A_1A_2$ (в этом случае, конечно, ω не будет лежать внутри Ω). Покажите (рассмотрев предельный случай треугольника Понселе), что точки пересечения прямой $f(M) = 0$ с Ω лежат на общих касательных окружностей Ω и ω .

15 (Ф. Нилов; вокруг суммы квадратов расстояний до точек касания). Рассмотрим (квадратичную) функцию $q(M) = \sum_{i=1}^n MX_i^2$.

Как несложно показать (например, с использованием скалярного произведения), $q(M) = nMG^2 + q(G)$ (это верно для произвольных точек X_1, \dots, X_n с центром масс G).

а) Докажите, что q – инвариант Понселе.

б) Решите следующее обобщение задачи M2668 «Задачника «Кванта» (автор – И.Вайнштейн):

Пусть $n = 2m$ и пусть мы рассматриваем $(2m)$ -угольники Понселе. Докажите, что

$\sum_{i=1}^{2m} \frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+m}A_{i+m+1}}$ – инвариант Понселе (индексы рассматриваются по модулю $2m$).

16 (П. Кожевников; вокруг центра масс точек касания для обобщенного процесса Понселе). Рассматриваются замкнутые траектории Понселе $A_0A_1 \dots A_n$ для соосных окружностей Ω , ω_i с центрами O и I_i и радиусами R и r_i соответственно (ω_i внутри Ω), $i = 1, \dots, n$; X_i – точки касания $A_{i-1}A_i$ с ω_i . (Будем полагать $r_i > 0$, если выбранное на ω_i направление обхода совпадает с направлением обхода Ω , и $r_i < 0$ в противном случае.)

Пусть d_i – длина отрезка касательной (т.е. корень из степени точки), проведенной из $M \in \Omega$ к ω_i ; в силу соосности, отношение $d_1 : d_2 : \dots : d_n$ не зависит от выбора точки $M \in \Omega$. Положим $m_i = \frac{d_i}{r_i}$.

а) Докажите обобщенное утверждение: центр масс m_1, m_2, \dots, m_n , помещенных в точки X_1, X_2, \dots, X_n , – инвариант Понселе.

б) Докажите, что этот центр масс не зависит от порядка окружностей ω_i в процессе Понселе.

в) Докажите, что этот центр лежит на линии центров окружностей пучка.

Проективное обобщение ключевой леммы

17. а) Пусть различные коники (или вообще кривые) w, f, g, t заданы (своими уравнениями в декартовой системе координат), причем t – из пучка, порожденного f и g . Тогда для любой f' из пучка, порожденного f и w , найдется g' из пучка, порожденного g и w , такая, что t окажется в пучке, порожденном f' и g' .

б) Выведите из а) ключевую лемму о процессе Понселе.

Литература

1. А.А. Заславский, Г.Р. Челноков. Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии. – Математическое образование, 2001, № 4(19).

2. 26-я Летняя конференция Турнира городов. Вокруг теоремы Понселе. <https://turgor.ru/lktg/2014/6/index.htm>

3. А.В. Акопян, А.А. Заславский. Геометрия кривых второго порядка. – МЦНМО, 2015.

4. В.Протасов. Два века теоремы Понселе. – «Квант», 2014, № 5-6.

5. Н.Васильев. Гексаграммы Паскаля и кубические кривые. – «Квант», 1987, № 8.

6. О.Иванов. Метод координат: решения без лишних вычислений. – «Квант», 2017, № 8.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

...Когда я был в Массачусетском технологическом институте, я часто любил подшучивать над людьми. Однажды в кабинете черчения какой-то шутник поднял лекало (кусок пластмассы для рисования гладких кривых – забавно выглядящая штука в завитушках) и спросил: «Имеют ли кривые на этих штуках какую-либо формулу?»

Я немного подумал и ответил: «Несомненно. Это такие специальные кривые. Дай-ка я покажу тебе. – Я взял свое лекало и начал его медленно поворачивать. – Лекало сделано так, что, независимо от того, как ты его повернешь, в наинизшей точке каждой кривой касательная горизонтальна».

Все парни в кабинете начали крутить свои лекала под различными углами, подставляя карандаш к нижней точке и по-всякому прилаживая его. Несомненно, они обнаружили, что касательная горизонтальна. Все были крайне возбуждены от этого открытия, хотя уже много прошли по математике и даже «выучили», что производная (касательная) в минимуме (нижней точке) для любой кривой равна нулю (горизонтальна). Они не совмещали эти факты. Они не знали даже того, что они уже «знали».

Ту же самую шутку я проделал четыре года спустя в Принстоне, разговаривая с опытным физиком, ассистентом Эйнштейна, который все время работал с гравитацией. Я дал ему такую задачу: вы взлетаете в ракете с часами на борту, а другие часы остаются на Земле.

Задача состоит в том, что вы должны вернуться, когда по земным часам пройдет ровно один час. Кроме того, вы хотите, чтобы ваши часы за время полета ушли вперед как можно больше. Согласно Эйнштейну, если взлететь очень высоко, часы пойдут быстрее, потому что, чем выше находишься в гравитационном поле, тем быстрее идут часы. Однако если вы попытаетесь лететь слишком быстро, а у вас только час в запасе и вы должны двигаться быстро, чтобы успеть вернуться, то ваши часы из-за большой скорости замедлятся. Поэтому вы не можете лететь слишком высоко. Вопрос сводится к следующему: по какой программе должны меняться скорость и высота, чтобы обеспечить максимальный уход вперед ваших часов?

Ассистент Эйнштейна довольно долго работал над этой задачей, прежде чем понял, что ответ – это просто свободное движение материи. Если вы выстрелите вверх так, что время, необходимое снаряду, чтобы пролететь и упасть, составляет ровно час, это и будет правильное движение. Это – фундаментальный принцип эйнштейновской гравитации, гласящий, что для свободного движения собственное время максимально. Но когда я поставил задачу в такой форме – ракета с часами, – физик не узнал этого закона. Все произошло так же, как с парнями в кабинете черчения, но на этот раз это не был оробевший новичок...

Из книги «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!»

Использование логарифмов в XVIII веке

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ

КАК ИЗВЕСТНО, В РЕЗУЛЬТАТЕ изобретения в XVII веке логарифмов появилась возможность заменять умножение и деление чисел, соответственно, сложением и вычитанием их логарифмов, а возведение в степень и извлечение корней – умножением и делением логарифмов.

Многие расчеты вплоть до появления калькуляторов проводились с помощью логарифмов. Большое количество расчетных задач, в которых использован этот прием, представлено в первом русском учебнике по геодезии С.К. Котельникова «Молодой геодет, или Первые основания геодезии», изданном в Санкт-Петербурге в 1766 году.

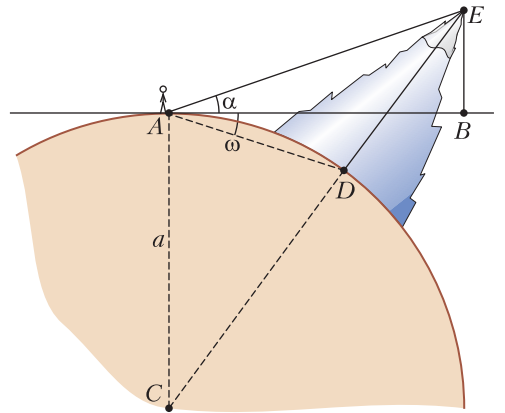
Для примера рассмотрим задачу определения высоты далеко расположенной горы E с учетом кривизны земного шара (см. рисунок). Искомую высоту можно получить из формулы

$$ED = a \frac{\sin(2\omega)\sin(\alpha + \omega)}{\cos\omega \cos(\alpha + 2\omega)},$$

где a – радиус земного шара. (Предлагается читателям вывести эту формулу самостоятельно.)

Чтобы воспользоваться полученной формулой, надо последовательно рассчитать значения:

- всех выражений в скобках;
- соответствующих значений тригонометрических функций;
- произведений в числителе и знаменателе дроби;



- их частного;
- его произведения на a .

Описание расчетов приведено в таблице 1. Видно, что вместо умножения и деления использовались сложение и вычитание логарифмов, и это действительно упрощало расчеты. Проанализировав таблицу, можно понять, что использовались логарифмы с основанием 10. Также можно заметить, что для избежания счета в отрицательных числах, отрицательные значения логарифма увеличивались на 10.

Таблица 1

Последовательность расчетов	Комментарий
Угол $\omega = 1292'' = 21'32''$ Угол $\alpha \dots\dots 1^\circ 58'55''$	Значения углов в градусах, минутах и секундах
Угол $\alpha + \omega \dots\dots 2^\circ 20' 27''$ Угол $\alpha + 2\omega \dots\dots 2^\circ 41' 59''$ Угол $2\omega \dots\dots 43' 04''$	Значения выражений в скобках
Лог. Син. $2\omega \dots\dots 8,0978487$ Лог. Син. $(\alpha + \omega) \dots\dots 8,6111243$	Значения логарифмов синусов
Лог. Син. 2ω Син. $(\alpha + \omega) 16,7089730$	Их сумма

Продолжение таблицы 1

Лог. Кос. ω 9,9999914 Лог. Кос. $(\alpha+2\omega)$. . . 9,9995177	Значения логарифмов косинусов
Лог. Кос. ω Кос. $(\alpha+2\omega)$. 9,9995091	Их сумма, уменьшенная на 10
$\text{Лог.} \frac{\text{Син. } 2\omega}{\text{Кос. } \omega} \frac{\text{Син. } (\alpha+\omega)}{\text{Кос. } (\alpha+2\omega)} \cdot 6,7094639$	Разность двух сумм, увеличенная на 10
Лог. $a = \text{Лог. } 20952400$ 7,3212337	Логарифм радиуса земного шара (принятого равным 20952400 футов, или 6390482 метров)
Лог. истин. вышины . . 4,0306976	Сумма двух последних значений, уменьшенная на 10
Лог. истин. вышины . . 4,0306976, которо- му Логарифму вЪ таблицах соотвѣт- ствуетъ число 10732. Следовательно искомая вышина горы 10732 фута.	Искомая высота в футах (определялась по таблицам логарифмов)

Интересно, что именно логарифмы тригонометрических функций были приведены в первых таблицах логарифмов, которые в 1614 году опубликовал шотландец Джон Непер в своей работе на латыни «*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*» («Описание удивительной таблицы логарифмов»). В ней представлены восьмизначные таблицы логарифмов по основанию $1/e$ от синусов, косинусов и тангенсов углов от 0 до 90 градусов с шагом в одну минуту. Фрагменты таблицы логарифмов из книги Непера для угла 30 градусов приведены в таблице 2. В ле-

Таблица 2

Gr.						
30						
<i>min</i>	<i>Sinus</i>	<i>Logarithmi</i>	<i>Differentia</i>	<i>Logarithmi</i>	<i>Sinus</i>	
0	5000000	6931469	5493059	1438410	8660254	60
1	5002519	6926432	5486342	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5479628	1441771	8657344	58
3	5007556	6910369	5472916	1443453	8655888	57
57	5142898	6649680	5113697	1535983	8576164	3
58	5145393	6644831	5107103	1537728	8574668	2
59	5147887	6639985	5100511	1539474	8573171	1
60	5150381	6635142	5093921	1541221	8571673	0

вой колонке указаны значения минут от 0 до 60 в дополнение к 30°, а в правой – минут от 60 до 0 в дополнение к 59°. Например, в 3-й строке таблицы указаны:

- дробные части синуса угла 30°2' и его логарифма (2-й и 3-й столбцы);
- дробные части синуса угла 59°58', или косинуса угла 30°2', а также его логарифма (6-й и 5-й столбцы);
- дробная часть тангенса угла 30°2' (4-й столбец¹).

В России таблицы логарифмов появились как минимум в начале XVIII века [1,2].

Читателям, заинтересовавшимся примерами использования логарифмов, предлагается ознакомиться со статьями [3-5] в «Кванте».

Литература

1. Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов, секансов. К научению мудролюбивых тщателей. – Москва, 1703
2. Таблицы логарифмов чисел, от единого даже до 10000, и натуральных синусов, тангенсов и секансов. – Санкт-Петербург, Морская Академическая типография, 1746.
3. А.Егоров. Площадь под гиперболой, логарифм и экспонента. – «Квант», 1973, № 6.
4. Б.Олдридж. Натуральный логарифм. – «Квант», 1992, № 8.
5. В. Клепцын. Изобретая логарифмическую линейку. – «Квант», 2021, № 9.

¹ Заголовок этого столбца – *Differentia* (рус. *разность*). Как вы думаете, почему?

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2827 и M2828 предлагалась на XIX Южном математическом турнире.

Задачи M2826–M2829, Ф2833–Ф2836

M2826. В квадрате $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки E и F соответственно так, что $BE = BF$.

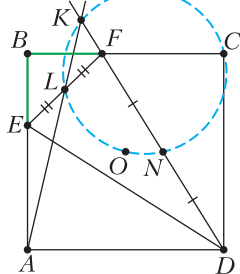


Рис. 1

Пусть L – середина EF , N – середина DF , O – центр квадрата, а K – точка пересечения прямых AL и DF (рис. 1). Докажите, что точки C, K, L, O, N лежат на одной окружности.

А. Палеев,
ученик 9 класса

M2827. Про положительные числа a, b, c известно, что из отрезков длиной a^{2024} , b^{2024} , c^{2024} можно составить треугольник. Докажите, что можно уменьшить одно из чисел a, b, c в 2024 раза и получить числа a', b', c' так, чтобы из отрезков с длинами a', b', c' также можно было составить треугольник.

Л. Шатунов

M2828. Максим загадал многочлен $f(x)$ степени n . Саша хочет отгадать его (зная n). За ход Саша может назвать некоторый отрезок $[a; b]$, и Максим назовет в ответ максимальное значение $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Сможет ли Саша отгадать $f(x)$ за конечное количество шагов?

М. Дидин

M2829*. Дан клетчатый квадрат $3m \times 3m$, где $m \geq 2$ – натуральное число. Лягушка сидит в клетке S , находящейся в левом нижнем углу. Она хочет попасть в клетку F , находящуюся в правом верхнем углу. Лягушка может перепрыгивать вправо или вверх в соседнюю клетку. Некоторые клетки липкие. Попав в липкую клетку, лягушка не сможет двигаться дальше. Множество клеток X назовем *блокирующим*, если лягушка не сможет попасть из S в F в случае, когда липкими являются в точности клетки множества X . Блокирующее множество называем *минимальным*, если при удалении из него любой клетки оно перестает быть блокирующим.

а) Докажите, что найдется минимальное блокирующее множество, в котором не менее $3m^2 - 3m$ клеток.

б) Докажите, что в любом минимальном блокирующем множестве не более $3m^2$ клеток.

ИМО2021, короткий список

Ф2833. Длина подводной лодки $L = 100$ м, диаметр корпуса $D = 10$ м, толщина стальных стенок корпуса $h = 10$ см. Модуль Юнга стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Подводная лодка погрузилась на глубину $H = 200$ м и не движется относительно воды. Как изменилась ее длина? Лодка пришла в движение со скоростью $v = 10$ м/с относительно воды. Оцените величину дополнительного изменения длины лодки.

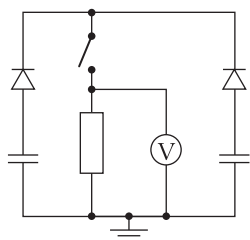
В. Подводный

**Решения задач М2810 – М2817,
Ф2817–Ф2820**

Ф2834. Две параллельные друг другу плоские тонкие горизонтальные металлические пластины (листы) находятся на расстоянии L (порядка 1 см) друг от друга. Нижний лист лежит на поверхности из льда при температуре $0\text{ }^\circ\text{C}$. Верхний лист является дном сосуда, в котором кипит вода, и его установившаяся температура равна $100\text{ }^\circ\text{C}$. Между этими металлическими листами находится воздух при атмосферном давлении. Горизонтальные размеры листов очень большие (много больше 1 см). Температура воздуха между листами зависит от расстояния до нижнего листа. Какой формулой описывается эта зависимость? Воздух прозрачен для всех длин волн. Листы абсолютно черные, т.е. поглощают все излучение, которое на них падает. Какова мощность теплопередачи от верхнего листа к нижнему, приходящаяся на 1 м^2 площади? Для справки: теплопроводность воздуха при атмосферном давлении и при температуре $0\text{ }^\circ\text{C}$ равна $0,0244\text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

С.Варламов

Ф2835. В приведенной электрической схеме (рис. 2) диоды идеальные, т.е. открываются при напряжении, равном нулю, и в режиме пропускания тока имеют нулевое внутреннее сопротивление. Сначала ключ разомкнут, а одинаковые по емкости C конденсаторы заряжены до напряжений



$+100\text{ В}$ и $+50\text{ В}$. Произведение CR равно 1 секунде. Через какое время после замыкания ключа идеальный вольтметр покажет напряжение 25 В ?

Рис. 2

В.Идеалов

Ф2836. Небольшой предмет находится на дне прозрачного водоёма глубиной $h = 1\text{ м}$. По какой траектории движется его наблюдаемое из воздуха изображение? Каково максимальное расстояние между наблюдаемыми изображениями? Показатель преломления воды $n = 1,33$. Траектория глаза наблюдателя и предмет находятся в одной вертикальной плоскости.

В.Пойманов

М2810. Дано натуральное число $n \geq 2$. Сколькими способами можно раскрасить клетки квадрата $n \times n$ в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета?

Ответ: $3 \cdot 2^{n+2} - 24$.

Случай 1. В первой строчке встречаются клетки только двух цветов, скажем (не умаляя общности), 1 и 2. Тогда во второй строчке обязаны чередоваться цвета 3 и 4, в третьей строчке снова чередуются цвета 1 и 2 и так далее. При этом все указанные раскраски подходят. Чтобы однозначно задать такую раскраску, выберем одну из 6 возможных пар цветов, которые будут встречаться в первой строчке (тем самым, определена пара цветов для каждой строчки), и в каждой строчке выберем один из двух возможных порядков чередования цветов. Итого $6 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n+1}$ способов.

Случай 2. Предположим, что в первой строчке есть хотя бы 3 различных цвета, скажем (не умаляя общности), 1, 2, 3. Пусть цвет 3 встретился в первый раз позже цветов 1 и 2 (считая слева направо). Рассмотрим первый такой момент. Тогда две клетки слева от него покрашены в разные цвета. Таким образом, мы нашли три подряд идущие клетки, покрашенные в разные цвета: не умаляя общности, 1, 2, 3 – именно в таком порядке (рис. 1). Поэтому в следующей строчке под клеткой цвета 2 может стоять только клетка цвета 4, значит, справа от нее стоит клетка цвета 1, а слева – цвета 3. Тогда в третьей строчке на



Рис. 1

этих же трех позициях стоят клетки цветов 1, 2, 3 (именно в таком порядке). Так однозначно заполняются три подряд идущих столбца. Далее, двигаясь от этих трех столбцов влево и вправо, понимаем, что по второй строчке первая и третья восстанавливаются одинаково. И так, мы доказали, что в нашем предположении первая и третья строчки покрашены одинаково. Аналогично показывается, что все строчки с четными номерами покрашены одинаково и все строчки с нечетными номерами покрашены одинаково. Тогда нам достаточно корректно (т.е. с соблюдением условий) задать раскраску первых двух строк, причем так, чтобы в первой строке (а тогда и во второй тоже) встречались клетки хотя бы 3 цветов. Посчитаем сначала, сколько всего есть способов корректно раскрасить две строки в 4 цвета. Покрасим вначале первый столбец из двух клеток – это можно сделать 12 способами, а затем для каждого следующего столбца будет однозначно определен набор из двух цветов его клеток, и этот столбец можно покрасить 2 способами. Итого $12 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n+1}$ способов. Вычтем количество «лишних» способов – в которых хотя бы в одной из строк (на самом деле в обеих) встречаются ровно 2 разных цвета; таких способов будет $6 \cdot 2^2 = 24$ (подсчет аналогичен случаю 1). Итого во втором случае получаем $3 \cdot 2^{n+1} - 24$ способа. Просуммировав способы из первого и второго случаев, получаем $2 \cdot 3 \cdot 2^{n+1} - 24 = 3 \cdot 2^{n+2} - 24$ способов.

И. Ефремов

M2811. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} такова, что $a_1 = 1$ и для каждого натурального $n = 1, 2, \dots, 100$ число $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$ является целым. Какое наибольшее значение может принимать a_{100} ?

Ответ: 2^{98} .

Пример: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2^2, a_5 = 2^3, \dots, a_{100} = 2^{98}$.

Оценка. Докажем, что a_i является делителем $s_{i-1} = a_1 + \dots + a_{i-1}$ для всех i . Этого

будет достаточно. Действительно, тогда индукцией по i мы доказываем пару оценок $s_{i-1} \leq 2^{i-2}, a_i \leq 2^{i-2}$ для $i \geq 2$. Переход $i \rightarrow i+1$ получается так:

$$s_i \leq s_{i-1} + a_i \leq s_{i-1} + s_{i-1} \leq 2^{i-2} + 2^{i-2} = 2^{i-1};$$

$$a_{i+1} \leq s_i \leq 2^{i-1}.$$

Итак, докажем.

По условию числа

$$l = (a_1 + \dots + a_i) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_i} \right)$$

и

$$k = (a_1 + \dots + a_{i-1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{i-1}} \right)$$

являются целыми. Тогда и число

$$l - k - 1 = a_i \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{i-1}} \right) + (a_1 + \dots + a_{i-1}) \frac{1}{a_i}$$

– целое. Рассмотрим два слагаемых в правой части этого равенства:

$$\alpha = a_i \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{i-1}} \right) \text{ и } \beta = (a_1 + \dots + a_{i-1}) \frac{1}{a_i}.$$

Числа α и β – рациональные, причем сумма $\alpha + \beta$ – целое число. Значит, у дробей α и β одинаковые (натуральные) знаменатели в несократимой записи. Более того, если бы эти знаменатели были больше 1, то произведение $\alpha\beta$ не являлось бы целым, а у нас $\alpha\beta = k$ – целое число. Значит, знаменатели в несократимой записи дробей α и β равны 1, т.е. α и β – целые. Но это завершает решение, так как нам требовалось показать, что $\beta = (a_1 + \dots + a_{i-1}) \frac{1}{a_i}$ – целое число.

М. Туревский

M2812. На координатной плоскости в некоторых точках с целыми координатами лежит по камешку (камешков конечное количество). Разрешается делать следующий ход: выбрать пару камешков, взять некоторый вектор \vec{a} с целыми координатами и далее один из выбранных камешков сдвинуть на вектор \vec{a} , а другой – на противоположный вектор $-\vec{a}$; при этом запрещается, чтобы в одной точке оказалось более одного камешка. Всегда ли

можно за несколько ходов добиться ситуации, в которой все камешки лежат на одной прямой?

Ответ: всегда.

Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ – начальные координаты камешков и пусть $(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \right)$ – координаты их центра масс.

Рассмотрим прямую l , проходящую через точку (x_0, y_0) , на которой лежит бесконечное количество узлов (т.е. точек с целыми координатами). Такая прямая l найдется. Действительно, если $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, то пойдет прямая $y_0x = x_0y$ – на ней лежат узлы вида (mx_0, my_0) , где $m \in \mathbb{Z}$; если же $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то подойдет прямая $y = 0$. Сделаем ход с 1-м и n -м камешками так, чтобы 1-й камешек попал в некоторый незанятый узел прямой l . (Отметим, что такой ход можно сделать: если 1-й камешек попал в узел A , то n -й камешек попадет в узел A' , симметричный A относительно середины отрезка между положениями 1-го и n -го камней до хода; так как возможностей выбора узла A бесконечно много, то для какого-то из них соответствующий узел A' будет незанят.) Сделаем аналогичные ходы со 2-м и n -м камешками, с 3-м и n -м камешками, ..., с $(n-1)$ -м и n -м камешками.

Теперь все камни, кроме, возможно, n -го, лежат на прямой l . Но заметим, что в процессе выполнения ходов центр масс камней (x_0, y_0) остается неизменным и он лежит на прямой l (согласно нашему выбору l). Но отсюда следует, что и оставшийся n -й камень также лежит на l .

К. Иванов, П. Кожевников

M2813*. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром I (рис. 1). Серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BD пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников APC и BPD пересекаются в точках P и Q . Докажите, что I лежит на прямой PQ .

Вначале изложим решение, придуманное И. Богдановым. Решение геометрическое

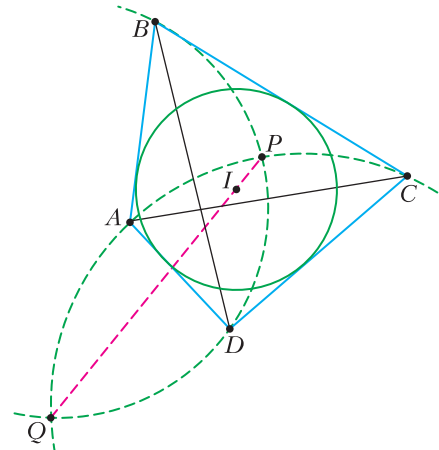


Рис. 1

и практически не использует сложных вспомогательных лемм.

Пусть M и N – середины AC и BD соответственно (рис. 2). Тогда MN – это прямая Ньютона–Гаусса для описанного четырехугольника $ABCD$ и, как известно,

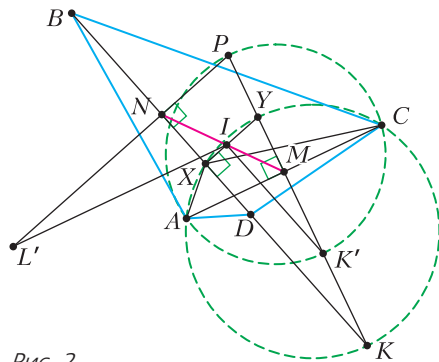


Рис. 2

I лежит на MN . Пусть прямая PM пересекает прямую BD в точке K , а прямую, параллельную BD и проходящую через I , в точке K' . Аналогично определим точки L и L' прямой PN . Согласно построению, I – ортоцентр треугольника $PK'L'$, поэтому $PI \perp K'L'$.

Далее покажем, что K' лежит на окружности (APC) . Тогда PK' – диаметр окружности (APC) и, аналогично, PL' – диаметр окружности (BPD) . Отсюда будет следовать утверждение задачи, так как центры окружностей (APC) и (BPD) будут являться серединами PK' и PL' , следовательно, $K'L'$ параллельна линии центров

этих окружностей, а значит, PI перпендикулярна этой линии центров.

Пусть перпендикуляр из I на BD пересекает PM и BD в точках Y и X . Точка X – проекция центра вписанной окружности I на диагональ, для этой проекции известно свойство: AX и CX симметричны относительно BD . Тогда для треугольника AXC точки K и Y – точки пересечения среднего перпендикуляра к AC с внутренней и внешней биссектрисами угла AXC . Значит, K и Y лежат на окружности (AXC) и являются серединами дуг AC (это верно и в случае $AX = CX$, который легко рассматривается). Отсюда, в частности, $MA \cdot MC = MK \cdot MY$.

Выполним гомотегию с центром M , переводящую N в I . Так как $PN \parallel YI$, при этой гомотегии треугольник PNK переходит в YIK' . Из гомотегии $MK' \cdot MP = MK \cdot MY$, но тогда, с учетом предыдущего равенства, имеем $MK' \cdot MP = MA \cdot MC$, а это означает, что точки A, P, C, K' лежат на одной окружности, что мы и хотели доказать. Задача решена.

Рассмотрим авторское решение. Отметим, что верно такое общее утверждение.

Утверждение 1. Пусть дан описанный вокруг окружности с центром I четырехугольник $ABCD$. Пусть точка X обладает таким свойством (*):

Пара биссектрис углов между прямыми XA и XC одновременно является парой биссектрис углов между прямыми XB и XD .

Тогда прямая XI – одна из указанной пары биссектрис.

В нашей задаче заметим, что Q удовлетворяет условию (*), так как в силу равенства $PA = PC$ прямая QP – это биссектриса угла между AQ и CQ и, аналогично, QP – биссектриса угла между BQ и DQ . Тогда из утверждения 1 следует, что QI – также биссектриса угла между AQ и CQ . Остается проанализировать конфигурацию и понять, что QI – «нужная» биссектриса (т.е. совпадающая с QP , а не с перпендикулярной ей).

Приведем доказательство утверждения 1 в следующей версии (из которой также следует утверждение нашей задачи).

Утверждение 1'. Пусть дан четырехугольник $ABCD$, описанный вокруг окружности ω с центром I . Пусть точка X такова, что XI – биссектриса угла AQC . Тогда XI также является биссектрисой угла BXD .

В доказательстве будем использовать инверсию относительно ω и следующую известную лемму.

Лемма о параллелограмме. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ и точка Z такая, что (направленные) углы ZAB и BCZ равны. Тогда равны углы ZBA и ADZ .

Эту лемму можно доказать счетом в синусах или рассмотрением четверки точек B, Z, C, Z' , лежащих на одной окружности, где $\overline{ZZ'} = \overline{DC}$.

Итак, доказательство утверждения 1'. Пусть вписанная окружность ω касается сторон AB, BC, CD, DA в точках E, F, G, H соответственно (рис. 3). Пусть A' – сере-

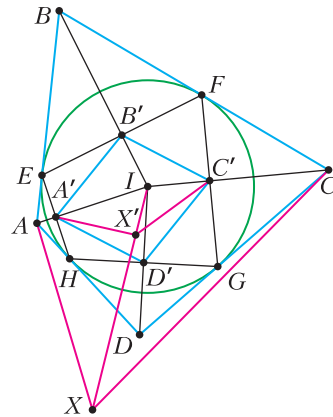


Рис. 3

дина HE , так что A' – образ точки A при инверсии относительно ω . Точки B', C', D' определим аналогично. Из инверсии $\angle IA'B' = \angle ABI = \angle IBC = \angle B'C'I$.

Далее, если X' – образ точки X при инверсии относительно ω , то $\angle IA'X' = \angle AXI = \angle IXC = \angle X'C'I$. Отсюда $\angle X'A'B' = \angle B'C'X'$. Тогда из леммы о параллелограмме (примененной к параллелограмму $A'B'C'D'$ и точке X') получаем $\angle X'D'A' = \angle A'B'X'$. Теперь, обращая рассуждения, аналогичные приведенным выше, выводим $\angle IXD = \angle BXI$, что и требовалось.

В завершение отметим, что наше утверждение может быть доказано и другими методами. Есть короткое доказательство с помощью двойственной теоремы Дезарга об инволюции. Другой подход – рассмотреть для нашего четырехугольника множество точек X , обладающих свойством (*). Оказывается, это множество является кубической кривой – так называемой кубикой фокусов. У этой кубики много интересных и красивых свойств; из них также можно вывести наше утверждение.

Чан Куанг Хунг, П. Кожевников

M2814. Положительные числа a, b, c таковы, что $b + c = a^2$. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{c}}}{\sqrt{a - \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{c}}}.$$

Ответ: $\sqrt{2} + 1$.

Вспользуемся известной формулой преобразования двойного радикала (ее легко доказать возведением в квадрат). В наших обозначениях, т.е. с учетом равенства $c = a^2 - b$, эта формула имеет вид

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a + \sqrt{c}} + \sqrt{a - \sqrt{c}}),$$

или

$$\sqrt{a + \sqrt{c}} + \sqrt{a - \sqrt{c}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a + \sqrt{b}}. \quad (1)$$

Аналогично (отметим, что b и c в наших рассуждениях равноправны):

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a + \sqrt{c}}. \quad (2)$$

Обозначим $X = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{c}}$ и $Y = \sqrt{a - \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{c}}$, так что $\frac{X}{Y}$ – нужное нам выражение. Складывая (1) и (2), имеем $X + Y = \sqrt{2}X$, откуда $\frac{X}{Y} + 1 = \sqrt{2} \frac{X}{Y}$ и $\frac{X}{Y} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.

П. Кожевников

M2815. Имеется набор из $2n$ фишек n различных цветов, по две фишки каждого цвета. Фишки выкладывают случайным образом в ряд. Докажите, что вероятность того, что в ряду найдутся две соседние фишки одного цвета, больше $1/2$.

Рассмотрим всевозможные ряды из $2n$ фишек n различных цветов, по две фишки каждого цвета. Ряд назовем *неудачным*, если в нем нет двух соседних одноцветных фишек. Остальные ряды считаем *удачными*. Нам надо доказать, что количество неудачных рядов меньше количества удачных. Назовем удачный ряд *интересным*, если в нем есть ровно одна пара соседних одноцветных фишек, причем эта пара не находится на первых двух позициях.

Возьмем неудачный ряд. Пусть первая фишка имеет цвет A . Найдем вторую фишку цвета A , пусть она стоит на k -м месте ($k \geq 3$, поскольку наш ряд неудачный). Переставим по циклу первые $k-1$ фишек так, чтобы две фишки цвета A оказались рядом. (Например, $ABCBDADC \rightarrow BCBDAADC$, $ABACDBDC \rightarrow BAACDBDC$ и т.д.) После этого мы получили интересный ряд, в котором ровно одна пара соседних фишек цвета A . Таким образом, мы сопоставили каждому неудачному ряду интересный ряд. При этом по интересному ряду можно однозначно восстановить неудачный ряд, которому он сопоставлен: а именно, можно найти (единственную) пару одноцветных соседних фишек и перенести левую из них на первое место (сдвинув остальные фишки по циклу).

Итак, неудачных рядов столько же, сколько интересных. Но очевидно, есть удачные ряды, не являющиеся интересными, например, ряды вида $AA\dots$. Тем самым, количество неудачных рядов строго меньше количества удачных.

А. Антропов, П. Кожевников

M2816. Выясните, для каких натуральных чисел t можно подобрать такое натуральное l , что сумма $n + n^2 + n^3 + \dots + n^l$ будет делиться на t при любом натуральном n .

Ответ: для t , свободных от квадратов, т.е. не делящихся на квадраты простых чисел. Ясно, что $t = 1$ годится.

Если t делится на p^2 для некоторого простого p , то такое t не подходит. Действительно, при $n = p$ указанная сумма равна $p + p^2(1 + p + \dots)$; видим, что она не делится

на p^2 , а следовательно, не делится и на m . Пусть теперь m свободно от квадратов и p – его простой делитель. При $n \div p$ указанная в условии сумма делится на p . Если $n \equiv 1 \pmod{p}$, то $n + n^2 + n^3 + \dots + n^l \equiv l \pmod{p}$, а значит, делимость на p будет выполнена при l , кратных p . Далее, пусть n имеет остаток, отличный от 0 и 1 при делении на p . Имеем $n + n^2 + n^3 + \dots$

$\dots + n^l = n \cdot \frac{n^l - 1}{n - 1}$; видим (поскольку n и знаменатель $n - 1$ не делятся на p), что сумма делится на p , если n^l дает остаток 1 при делении на p . Согласно малой теореме Ферма (которая утверждает, что если n не делится на p , то $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$), подойдет любое l , кратное $p - 1$.

Рассуждая так для каждого простого делителя числа m , понимаем, что для $m = p_1 p_2 \dots p_k$, где p_1, \dots, p_k – различные простые числа, подойдет l , кратное всем числам p_i и $p_i - 1$, иначе говоря, l :НОК($m, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_k - 1$). Тем самым, задача решена.

При $n = p_1 p_2 \dots p_k$ можно показать, что найденное условие для l (l :НОК($m, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_k - 1$)) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы l удовлетворяло условию задачи. Для доказательства можно применить дополнительные соображения, скажем, воспользоваться существованием первообразного корня по модулю простого числа (такого n , что $x = p - 1$ – это наименьшее натуральное число, для которого $n^x \equiv 1 \pmod{p}$).

А.Скабелин

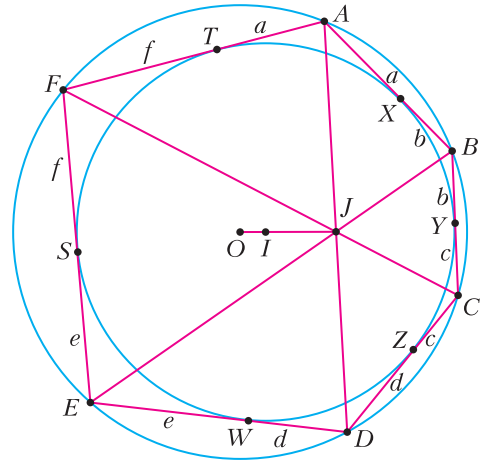
M2817*. Даны фиксированные окружности Ω и γ такие, что существует шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в Ω и описанный вокруг ω . (Отметим, что тогда, в силу теоремы Понселе, есть бесконечное семейство таких шестиугольников.) Дока-

жите, что величина $\frac{S_{ABCDEF}}{AD + BE + CF}$ не зависит от выбора шестиугольника $ABCDEF$.

Из теоремы Бриансона для описанного шестиугольника AD, BE и CF пересекаются в одной точке J , при этом известно, что

точка J – постоянная. (На самом деле в любом $(2n)$ -угольнике, вписанном в фиксированную окружность и описанном вокруг фиксированной окружности, «главные» диагонали проходят через фиксированную точку – см., например, статью В.Протасова «Два века теоремы Понселе» в «Кванте» №5–6 за 2014 г., следствие 3 из теоремы 3.) Более того, известно, что точка J , рассматриваемая как окружность нулевого радиуса, соосна с Ω и γ , т.е. эти три окружности имеют общую радикальную ось.

Обозначим через X, Y, Z, W, S, T точки касания γ с AB, BC, CD, DE, EF, FA соответственно (см. рисунок). Положим



$AT = AX = a, BX = BY = b, CY = CZ = c, DZ = DW = d, EW = ES = e, FS = FT = f$, так что квадраты отрезков касательных $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ – это степени точек A, B, C, D, E, F относительно γ . Также JA^2, \dots, JF^2 – степени точек A, B, C, D, E, F относительно (окружности нулевого радиуса) J .

Воспользуемся таким фактом про соосные окружности: если окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соосны, то для любой точки $X \in \omega_3$ отношение степеней точки X относительно ω_1 и ω_2 постоянно.

Получаем, что

$$\frac{a}{JA} = \frac{b}{JB} = \frac{c}{JC} = \frac{d}{JD} = \frac{e}{JE} = \frac{f}{JF} = \lambda,$$

где λ – некоторая константа, зависящая только от окружностей Ω и γ . (Отметим, что указанные равенства можно перефор-

мулировать геометрически так: TJ – биссектриса угла AJF и т.д.)

Но тогда

$$\frac{a + b + c + d + e + f}{JA + JB + JC + JD + JE + JF} = \lambda.$$

Для завершения решения остается теперь заметить, что $JA + JB + JC + JD + JE + JF = AD + BE + CF$, а $a + b + c + d + e + f$ – это полупериметр шестиугольника, который равен $\frac{S_{ABCDEF}}{r}$, где r – радиус γ .

Факты, на которые мы ссылались в решении, обсуждаются в статье «Об инвариантах Понселе и пучках окружностей».

А.Заславский, Чан Куанг Хунг

Ф2817. На геостационарном спутнике Земли произошла авария – он взорвался. Из множества образовавшихся осколков (фрагментов) выделим два. Один осколок (так ему повезло) продолжил движение с той же скоростью, какую имел спутник за мгновение до взрыва. Второй осколок в инерциальной системе отсчета, в которой центр Земли имел в момент взрыва нулевую скорость, сразу после взрыва тоже покоился. Толщина слоя атмосферы значительно меньше радиуса Земли $R = 6370$ км. Будем считать, что ее (атмосферы) просто нет. Будем также считать (для упрощения вычислений), что расстояние от центра Земли до спутника равно $L = 6,6R$, а период обращения Земли вокруг собственной оси (в инерциальной системе отсчета) равен в точности $T = 24$ ч.

- 1) Какова была относительная скорость и этих осколков сразу после взрыва?
- 2) Оцените время падения «остановившегося» осколка после взрыва.
- 3) Какой была величина относительной скорости этих двух осколков за мгновение до падения второго осколка на землю?

Ускорение свободного падения на экваторе Земли в выбранной инерционной системе отсчета равно

$$g = (9,80665 + 0,0337) \text{ м/с}^2 \approx 9,84 \text{ м/с}^2.$$

Второе слагаемое в написанном выражении соответствует учету собственного вращения Земли. В этой системе отсчета (в

которой центр Земли покоится) спутник за $T = 24$ ч делает полный оборот, двигаясь по окружности радиусом $L = 6,6R$. Такое движение обеспечивается силой, с которой Земля массой M притягивает к себе спутник.

Иными словами, выполняются условия

$$\frac{2\pi L}{u} = T, \quad \frac{u^2}{L} = \frac{GM}{L^2},$$

или

$$u^2 = \frac{R^2 (GM/R^2)}{L} = \frac{R^2 g}{L} = \frac{R^2 g}{Tu/(2\pi)}.$$

Из этих соотношений следует

$$u^3 = 2\pi R^2 \frac{g}{T},$$

откуда находим

$$u = 3073,6 \text{ м/с}.$$

Это ответ на первый вопрос.

Понятно, что «остановившийся» осколок в выбранной системе отсчета будет падать по прямой линии, проходящей через центр Земли. К моменту падения он приобретает такую скорость v , что выполняется соотношение

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R} \left(1 - \frac{1}{6,6} \right) = gR \left(1 - \frac{1}{6,6} \right).$$

Отсюда получаем

$$v \approx 10313,46 \text{ м/с}.$$

За время падения Δt этого осколка скорость первого фрагмента спутника, который продолжил движение по геостационарной орбите, повернулась в инерциальной системе отсчета на угол $\varphi = 2\pi\Delta t/T$. Следовательно, величина относительной скорости движения двух осколков может быть найдена так:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{(u \cos \varphi)^2 + (v - u \sin \varphi)^2}.$$

Таким образом, для ответа на третий вопрос нужно сначала получить ответ на второй вопрос.

Придется вспомнить законы Кеплера. Большая ось эллипса (окружности, по которой движется спутник) равна $2R \cdot 6,6$. А траектория движения «остановившегося» осколка вплоть до момента падения – это прямая линия, которую можно считать частью очень узкого эллипса с его большой осью, имеющей длину $R \cdot 6,6$. В соответ-

ствии с третьим законом Кеплера, квадраты периодов движения пропорциональны кубам больших осей. Из второго закона Кеплера о постоянстве секториальной скорости следует, что время падения пропорционально периоду и доле площади эллипса, замеченной радиус-вектором, соединяющим фокус эллипса и движущийся предмет. Площадь сектора, замеченного радиус-вектором, соединяющим центр Земли и осколок, к моменту падения близка к половине площади всего эллипса. А значит, время падения близко к половине периода движения по этому узкому эллипсу. Проведем более точный подсчет для доли времени падения от целого периода движения по узкому эллипсу. Превратим этот эллипс в окружность радиусом $3,3R$. Замеченная площадь составляет часть площади круга, равную приблизительно 0,452 (проверьте это самостоятельно). Следовательно, время падения составит примерно

$$\Delta t = 24 \text{ ч} \cdot (2^3)^{-2} \cdot 0,452 = 3 \text{ ч } 50 \text{ мин} .$$

Это – ответ на второй вопрос.

Теперь находим угол φ :

$$\varphi = 2\pi \cdot (8)^{-2} \cdot 0,452 \approx 1 \text{ рад}$$

и получаем ответ на третий вопрос:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{(u \cos \varphi)^2 + (v - u \sin \varphi)^2} = 7903,55 \text{ м/с} .$$

Иными словами, расстояние между осколками в этот момент увеличивалось с найденной скоростью.

С.Взрывной

Ф2818. *Вода набирается в бассейн из большого озера, на берегу которого установлен центробежный водяной насос. Асинхронный двигатель переменного тока имеет частоту $f = 1450$ об/мин и максимальную мощность $W = 1$ кВт. Этот двигатель используется в конструкции насоса, предназначенного для заполнения струей воды бассейна глубиной $h = 1,5$ м, шириной $b = 4$ м и длиной дорожки $l = 20$ м. Крыльчатка насоса имеет радиус $R = 10$ см и ширину $d = 3$ см. Отверстие на выходе из насоса имеет сечение $S_0 = 20 \text{ см}^2$ и расположено вблизи краев крыльев*

крыльчатки. Вылетающая из этого отверстия вертикально вверх вода достигает высоты, равной половине высоты H , на которой над водой в озере находятся верхние края бассейна. Трубу с какой высотой и каким одинаковым по длине трубы поперечным сечением нужно установить на выходе из насоса, чтобы первоначально пустой бассейн можно было за минимальное время заполнить водой? Каково это минимальное время? Потери мощности при протекании воды по трубам можно пренебречь.

Скорость движения крыльчатки на ее дальних от оси вращения концах определяется частотой вращения вала двигателя и радиусом крыльчатки:

$$u_{\text{max}} = \frac{2\pi R f}{60 \text{ с}} \approx 15,2 \text{ м/с} .$$

Если отверстие выхода воды из объема, в котором вращается крыльчатка, находится близко к краям крыльчатки, то в этом случае максимальное дополнительное давление, которое будет иметь вода вблизи краев крыльчатки при отсутствии потока (расхода воды), определяется величиной

$$\frac{\rho u_{\text{max}}^2}{2} = 2,3 \cdot 10^5 \text{ Па} = 2,3 \text{ атм} .$$

Значит, в принципе такой насос может подавать воду на высоту 23 метра (только очень медленно). Будем считать, что вода в объем, где вращается крыльчатка, поступает из отверстия вблизи оси вращения, а выходит из отверстия вблизи краев крыльчатки. Пусть эти отверстия имеют одинаковые сечения. Максимальный объемный расход воды $S_0 u$, который может обеспечить такой мотор с крыльчаткой и выходным отверстием в насосе с указанными в условии задачи размерами, определяется условием

$$\frac{S_0 \rho u^3}{2} = W .$$

Из этого условия следует, что $u = 10 \text{ м/с}$. Максимальный расход, следовательно, равен примерно 20 л/с. При этом давление на выходе из насоса не отличается от атмосферного и средняя скорость воды на выходе из насоса как раз равна u . Отсюда можно найти высоту, на которой находят-

ся над насосом (и уровнем воды в озере) края бассейна:

$$H = 2 \frac{u^2}{2g} = 10 \text{ м.}$$

Если вода в трубе, двигаясь со скоростью u_1 , поднялась на высоту h , а оставшееся расстояние $H - h$ пролетела в воздухе и достигла края бассейна, то бассейн можно заполнить. Таким образом, должно выполняться условие

$$V\rho gh + \frac{V\rho u_1^2}{2} = V\rho gH.$$

Давление на входе в трубу равно ρgh , а объемный расход жидкости равен Su_1 . Получается, что мощность, достающаяся воде, должна быть

$$W = Su_1\rho gH.$$

Из этого следует, что произведение Su_1 будет равно 10 л/с, что меньше максимального расхода 20 л/с в два раза. Это означает, например, что при сохранении скорости движения жидкости в трубе сечение трубы должно быть в два раза меньше. А поскольку в самой верхней точке траектории вода должна остановиться, то из условия сохранения скорости движения следует, что труба должна иметь высоту 5 м и внутреннее поперечное сечение 10 см^2 . При этом время заполнения первоначально пустого бассейна составит

$$t = \frac{120 \text{ м}^3}{0,01 \text{ м}^3/\text{с}} = 12 \cdot 10^3 \text{ с} = 3 \text{ ч } 20 \text{ мин.}$$

В.Водяной

Ф2819. *Имеется «поджатая» пружина. Такая пружина начинает изменять свою длину только при некотором пороговом значении растягивающей силы. Пружину подвешивают вертикально. Ее длина при двух различных подвешиваемых грузах массами M_1 и M_2 равна L_1 и L_2 соответственно. При этом все витки пружины уже разжались. Длина ненагруженной пружины L_0 меньше L_1 и L_2 , масса пружины m . Определите коэффициент упругости k пружины и величину силы поджатия f .*

Пусть пороговое значение силы равно f . Если к вертикальной пружине приложить усилие f , то она будет иметь только гравитационное растяжение, которое (как изве-

стно) равно $l = mg/(2k)$. Поэтому для вертикальной длины пружины под нагрузкой можно записать соотношение

$$L = L_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{Mg - f}{k} = a + bM,$$

где

$$a = L_0 + \frac{1}{k} \left(\frac{mg}{2} - f \right), \quad b = \frac{g}{k}.$$

Коэффициенты a и b линейного уравнения для L определяются через известные величины M_1, M_2, L_1, L_2 простыми соотношениями

$$a = \frac{L_1 M_2 - L_2 M_1}{M_2 - M_1}, \quad b = \frac{L_2 - L_1}{M_2 - M_1}.$$

Используя полученные уравнения, можно определить коэффициент упругости пружины и силу поджатия:

$$k = g \frac{M_2 - M_1}{L_2 - L_1},$$

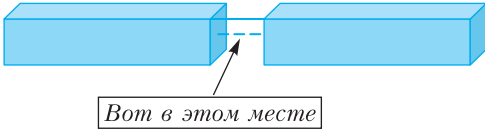
$$f = g \left(\frac{m}{2} - \frac{\Delta L_1 M_2 - \Delta L_2 M_1}{L_2 - L_1} \right).$$

Здесь $\Delta L_i = L_i - L_0$.

Вот пример экспериментальных данных. Пружина из школьного набора имеет массу 10,5 г и длину 5,9 см. Ее длина при грузе 12,8 г равна 6,8 см, а длина при грузе 50,7 г равна 15,5 см. Параметры, рассчитанные по полученным формулам, таковы: $k = 4,3 \text{ Н/м}$, $f = 0,14 \text{ Н}$.

А.Власов

Ф2820. *Немагнитный каркас длинного соленоида длиной L имеет поперечное к его оси симметрии сечение в форме квадрата с длиной ребра A . На поверхности соленоида в один слой виток к витку намотана проволока тоже квадратного поперечного сечения с ребром квадрата a . Поверхность проволоки изолирована тонким слоем лака. Выполняется цепочка неравенств $a \ll A \ll L$. По проволоке течет ток I . Каркас соленоида в одном месте (вблизи середины) аккуратно разрежали, освободили $1/4$ витка проволоки (длиной A) и расположили части этого соленоида так, что оси симметрии половинок совпали и освобожденный от касания с каркасом участок проволоки занял положение параллельно этим осям симметрии (см. рисунок). Ток, текущий по*



проволоке, остался прежним. Какова величина вектора индукции магнитного поля в точке на оси симметрии, расположенной на одинаковом расстоянии от полуцилиндров после разреза частей соленоида? Какой угол образует этот вектор магнитной индукции с осью симметрии половинок соленоида?

Если бы соленоид был бесконечно длинным и его не разрезали, то магнитное поле внутри соленоида было бы однородным, параллельным оси симметрии и равным по величине $B_0 = \mu_0 I / a$, где μ_0 — магнитная постоянная. При этом из любой выбранной внутри соленоида точки каркас соленоида был бы виден под телесным углом 4π . Теперь после проведенных изменений и с учетом конечности длины каркаса магнитное поле в указанной точке создают и две длинные части (половинки) соленоида, и участок освобожденного провода. Вклады длинных частей направлены вдоль оси симметрии, а вклад участка провода, не лежащего на каркасе, перпендикулярен оси симметрии.

Сначала разберемся с вкладом в поле участка проволоки, параллельного оси симметрии. Если из точки, в которой нужно найти поле, провести отрезки к концам этого участка проволоки, то они образуют с осью симметрии одинаковые углы α , для

которых $\cos \alpha = \sqrt{1/3}$. Вклад этого участка в магнитное поле (перпендикулярный оси симметрии) равен по величине

$$B_1 = \frac{2\mu_0 I \cos \alpha}{A/\sqrt{2}} = \frac{2^{3/2}\mu_0 I}{\sqrt{3}A} \approx 1,633 \frac{\mu_0 I}{A}.$$

Теперь найдем вклад в поле двух половинок соленоида. Каждая из половинок каркаса из выбранной точки на оси симметрии видна под телесным углом

$$\Omega = \frac{4\pi}{6} - \frac{A^2}{(L/2 + A/2)^2} \approx \frac{2\pi}{3} - 4\left(\frac{A}{L}\right)^2.$$

Таким образом, суммарный телесный угол равен

$$2\Omega = \frac{4\pi}{3} - 8\left(\frac{A}{L}\right)^2.$$

Следовательно, продольная к оси симметрии составляющая вектора индукции магнитного поля равна

$$B_2 = B_0 \frac{2\Omega}{4\pi} = \frac{\mu_0 I}{a} \left(\frac{1}{3} - \frac{2(A/L)^2}{\pi} \right).$$

С учетом сильных неравенств $a \ll A \ll L$ можно сделать вывод, что величина вектора индукции магнитного поля равна примерно

$$B \approx B_2 = \frac{\mu_0 I}{3a},$$

а этот вектор составляет с осью симметрии небольшой угол

$$\varphi = \frac{B_1}{B_2} = \frac{a}{A} (3 \cdot 1,633) \approx 4,89 \frac{a}{A}.$$

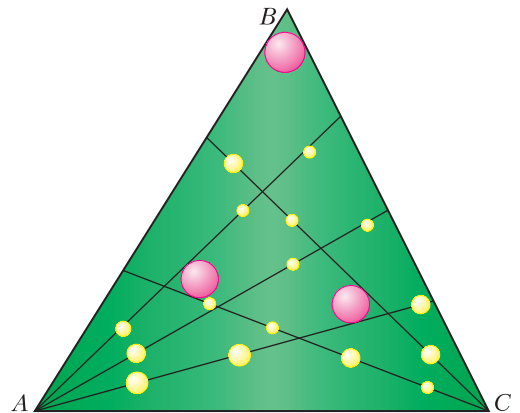
Д. Магнитный



Декоративная елочка

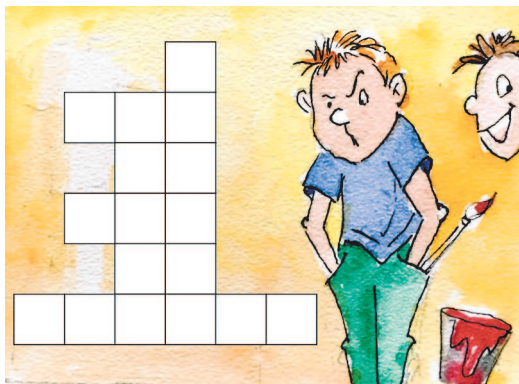
Декоративная новогодняя елочка имеет форму треугольника ABC . Из вершин A и C идут гирлянды вдоль лучей, которые делят каждый из углов A и C на равные части. Оказалось, что углы, отмеченные на рисунке красными шарами, равны. Чему равны углы елочки?

М. Евдокимов



Задачи

1. На рисунке изображена клетчатая фигура. За одну операцию разрешается выбрать прямоугольник, целиком лежащий внутри этой фигуры, и закрасить еще не закрашенные в нем клетки. За какое наименьшее количество операций можно закрасить все клетки этой фигуры?



2. По кругу стоят 100 ребят, каждый держит плакат с числом и видит числа всех остальных, но не видит своего числа. Каждый из ребят видит хотя бы два одинаковых числа. Какое наибольшее количество чисел может встречаться на плакатах лишь один раз?



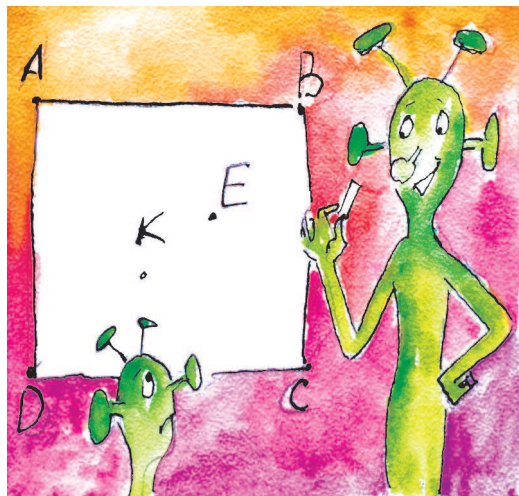
Задачи 1, 2, 3 предлагались на конкурсе «Смарт КЕНГУРУ». Задача 4 предлагалась на Московской устной олимпиаде.

3. В клетках квадрата 3×3 расставлены попарно различные числа. Какое наименьшее количество разных значений могут принимать суммы в прямоугольниках 1×2 ?



4. Внутри квадрата $ABCD$ отмечены точки E и K , а вне квадрата — точка F так, что треугольники ADE , EFC и BFK равносторонние. Докажите, что точка K лежит на прямой DE .

М.Волчкевич



Старая задача на НОВЫЙ лад

С. ДВОРЯНИНОВ, А. НАСИПОВ

ХОРОШО ИЗВЕСТНО, ЧТО ЗАДАЧИ, которые на первый взгляд кажутся совершенно разными, в сущности одинаковы. Например, значение дроби $\frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 2$

служит ответом задачи про совместную работу двух трактористов, один из которых может обработать поле за 6 часов, а другой – за 3 часа. В родственной задаче находится время до встречи двух поездов, движущихся навстречу друг другу по пути AB . По условию один поезд проходит весь путь за 6 часов, а другой – за 3 часа. В этой задаче тоже есть работа. Совершить ее – значит, преодолеть путь AB . Можно сказать, оставить след на пути.

В центре нашего теперешнего рассказа будут две задачи, родство которых отмечают не всегда.

Задача 1. *От пристани A вниз по реке ушел теплоход. Впереди него на расстоянии 50 км находился плот. У пристани B теплоход и плот оказались одновременно. На другой день от пристани A вниз по реке ушел катер, скорость которого в три раза больше скорости теплохода. Впереди него на расстоянии 75 км находился другой плот. И на этот раз у пристани B катер и плот оказались одновременно. Найдите расстояние от пристани A до пристани B .*

На рисунке 1 отмечены собственные скорости теплохода и катера, v и $3v$

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20250103>

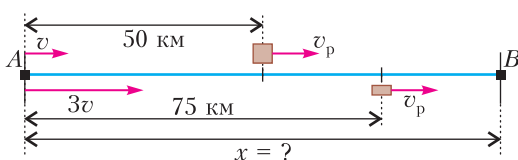


Рис. 1

соответственно, и скорость реки v_p . Приравняв время движения плота ко времени движения теплохода в первом случае и время плота ко времени катера во втором случае, приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x - 50}{v_p} = \frac{x}{v + v_p}, \\ \frac{x - 75}{v_p} = \frac{x}{3v + v_p}. \end{cases}$$

Отсюда после простых преобразований получаем уравнение

$$\frac{1}{x - 75} = \frac{2}{x - 50}$$

и находим $x = 100$. Значит, расстояние между пристанями A и B равно 100 км.

Составляя уравнения, мы, можно сказать, смотрели на движение теплохода, катера и двух плотов со стороны – с берега реки. Решим эту задачу по-другому. Теперь вообразим, что мы капитаны двух речных судов из задачи. Капитан теплохода видит (или знает), что впереди на расстоянии 50 км находится плот и что теплоход приближается к нему со скоростью v . Пусть теплоход догонит плот через время t . Для преодоления дистанции 75 км со скоростью v требуется время в полтора раз больше, т.е. $1,5t$. Но катер приближается к своему плоту со скоростью $3v$, следовательно, катер догонит свой плот за время $0,5t$.

Теперь посмотрим, что это значит для двух плотов. А значит это то, что путь первого плота до пристани B в два раза длиннее пути первого плота, т.е.

$$x - 50 = 2(x - 75).$$

Снова получаем $x = 100$.

Второе (арифметическое) решение выглядит очень эффектно. Но оно требует определенных интеллектуальных усилий и опыта в использовании пропорциональной зависимости – как прямой, так и обратной. Первое же решение основано на стандартном подходе к задачам на движение, когда один убегает, другой догоняет или же когда двое движутся навстречу друг другу. В этом (алгебраическом) решении никакое творчество не требуется, здесь уравнения думают за нас.

Кстати, выделенные курсивом слова – название статьи, дважды опубликованной в «Кванте» (см. «Квант» №9 за 1981 г. и №12 за 1987 г.). Сам же этот тезис – из книги Я.И.Перельмана «Занимательная алгебра». Вот пример задачи, к которой можно отнести это суждение:

Кусок льда с температурой 0°C и массой m поместили в воду с температурой 35°C . Масса воды равна 2 т . Определите температуру смеси, предполагая, что теплообмен происходит только между льдом и водой.

Известно, что удельная теплота плавления льда 340 кДж/кг , а удельная теплоемкость воды $4,2\text{ кДж/(кг}\cdot^{\circ}\text{C)}$. Предполагая, что весь лед растает, приходим к уравнению

$$340m + 4,2 \cdot 3m \cdot t = 4,2 \cdot m \cdot (35 - t).$$

Отсюда следует, что $t < 0$. Это неравенство означает, что весь лед не растает. Часть его так и останется в виде льда с нулевой температурой, а вся вода охладится до нуля градусов. Температура смеси будет нулевой.

А теперь вспомним такую физическую задачу.

Задача 2. *Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал 50 ступенек, второй раз, двигаясь в ту же сторону со скоростью втрое больше, он насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?*

По условию этой задачи заметим следующее. Человек бежит не по эскалатору, а по ленте эскалатора. Эскалатор – это большая и сложная подъемно-транспортная машина. Первое патентование эскалатора относят к 1859 году, первый эскалатор появился в 1894 году в Нью-Йорке как аттракцион для туристов, в метро – в 1911 году в Лондоне. В нашей стране первые эскалаторы начали действовать в 1935 году в Московском метрополитене. По этой причине задача про человека, бегущего по эскалатору, не могла появиться в задачниках в 30-е, да и в 40-годы прошлого века. А вот у современных школьников вызывает вопросы старинная задача, в которой 6 косцов в жаркий день за 8

часов выпили бочонок кваса и в которой спрашивается, сколько косцов выпьют такой же бочонок за 3 часа. Слово «косцы» школьникам столь же незнакомо, как слово «эскалатор» их дедушкам и бабушкам прошлого века.

Вдумчивые читатели, наверное, уже увидели, что две на первый взгляд разные задачи 1 и 2 – на деле одна и та же математическая задача. Сходство абсолютное, что хорошо видно из таблицы:

Река	Лента эскалатора
Берега реки	Неподвижные стенки эскалатора
Пристань А	«Начало» ленты эскалатора
Пристань В	«Конец» ленты эскалатора
Теплоход или катер на реке	Человек на ленте эскалатора
Плот на реке	Точка на ленте, которая попадает на конец ленты одновременно с человеком
Длина участка реки, измеряемая в километрах	Длина видимой части ленты эскалатора, измеряемая числом ступенек

Ясно, что, решив задачу 1 про теплоход, катер и два плота на реке, мы решили и задачу 2. Так что ответ к ней: 100 ступенек.

Рисунок 1, приведенный к задаче 1, вполне можно отнести к задаче 2 про эскалатор. При этом мы считаем, что человек бежит по ходу движения эскалатора – именно так зачастую поступает спешащий пассажир метро. Но в условии задачи об этом прямо не сказано, поэтому давайте рассмотрим тот случай, когда человек бежит против движения эскалатора.

Предположим, что эскалатор движется сверху вниз, а человек пытается подняться по нему снизу вверх (рис. 2). Эскалатор выступает для него таким спортивным тренажером, бегущей дорожкой. Пусть N – это невидимая вначале ступенька, находящаяся на расстоянии l от видимого начала эскалатора. Эта ступенька и человек встречаются в верхней точке эскалато-

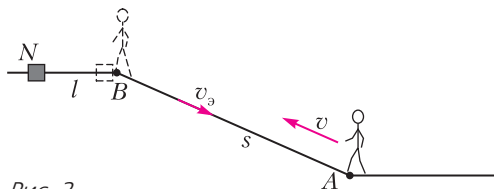


Рис. 2

ра, поэтому можно записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} l + s = 50, \\ \frac{l}{v_0} = \frac{s}{v - v_0}. \end{cases}$$

При скорости человека $3v$ получаем другую систему уравнений:

$$\begin{cases} d + s = 70, \\ \frac{d}{3v} = \frac{s}{3v - v_0}. \end{cases}$$

Здесь d относится к другой ступеньке, с которой человек сходит с эскалатора.

Из первых уравнений этих систем следует, что $l < d$, из вторых уравнений, наоборот, что $l > d$. Следовательно, две системы несовместны, и человек при выполнении условий задачи не может бежать против движения эскалатора.

Заметим, что к этому заключению можно прийти быстрее. Двигаясь снизу вверх против движения эскалатора, человек должен преодолеть все видимые им вначале ступени плюс те, которые добавятся за время его движения. При увеличении собственной скорости человек доберется до верха быстрее, следовательно, число дополнительных степеней будет меньше.

Начиная наш рассказ, мы намеревались убедить читателя в том, что задачу о движении человека по эскалатору можно и полезно трактовать как задачу о движении теплохода и плота по реке. Эти две задачи являются «двойняшками», каждая есть отражение другой. Если в задаче говорится о реке и теплоходе, то мы подразумеваем человека на ленте эскалатора. А можно и наоборот – задачу про движение на реке (или вообще движение) трактовать как задачу про эскалатор. Для примера возьмем такую задачу:

Два автомобиля одновременно отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 24 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

В переводе на «эскалаторный» язык задача выглядит так:

Число видимых ступеней эскалатора равно 420. Человек ступил на первую ступеньку движущегося эскалатора и пошел вниз. За единицу времени он проходит на 24 ступеньки больше, чем проезжает эскалатор. Первая ступенька двигалась по эскалатору на 2 единицы времени дольше человека. С какой скоростью движется эскалатор?

Математическая модель для обеих формулировок задачи одна и та же:

$$\frac{420}{v + 24} + 2 = \frac{420}{v},$$

где v – это скорость эскалатора (или второго автомобиля). Решая уравнение, получаем число 60. Тогда скорость ленты эскалатора – 60 ступенек за единицу времени, скорость второго автомобиля – 64 км/ч, скорость первого – 84 км/ч.

Затруднения при решении задач про эскалатор связаны, возможно, с тем, что ступенька – это единица длины ленты эскалатора и одновременно фиксированная точка на ленте. Надеемся, что после нашего рассказа затруднений не останется.



Что не так?

К. КОХАСЬ

– Добрый вечер, уважаемые телезрители, вы смотрите программу «Что не так?» Ее веду я, Горгулий, научный обозреватель «Самого первого канала». В нашей программе мы развеиваем околонуточные мифы и популярные заблуждения. Наш телезритель типон Ккху задает вопрос: «Что не так с формулой суммы квадратов?» На этот вопрос отвечает эксперт по вопросам адекватности дятел Спятел. Прошу вас, маэстро.

– Привет, друзья! Я дятел Спятел, и я объясню вам, почему формула

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

еще более абсурдна, чем это может показаться на самом деле. У меня есть большая квадратная комната, т.е. квадрат. В ней находятся сейф и стол. Таким образом, мы имеем сейф плюс стол в квадрате, т.е. в комнате. Но по этой формуле это то же самое, что сейф в квадрате – да, это так и есть, сейф действительно в квадрате, т.е. в комнате, плюс стол в квадрате, это тоже есть, так как стол тоже в комнате, и наконец, кроме этого, плюс дважды сейф на стол. Как же прикажете это понимать: если дважды поставить сейф на стол, он его просто дважды раздавит! Ерунда получается!

Внимательные педанты или мракобесы возражают мне что « $2ab$ » – это некоторое упрощение, более тонкий взгляд на вещи подсказывает, что это всего лишь $ab + ba$, но как вы понимаете, это ничего не меняет: стол на сейф – это уже лучше, это не так травматично, но один раз сейф на стол все равно остается!

– Большое спасибо, но не могли бы вы, уважаемый дятел, все-таки перейти, наконец, к ответу на вопрос нашего телезрителя типона Ккху? Ведь до сих пор, уважаемый Спятел, ваш блестящий ответ относился скорее к формуле квадрата суммы, нежели к формуле суммы квадратов.

– Еще раз привет, друзья! Я по-прежнему дятел Спятел, а рядом со мной по-

прежнему вездливый, но почему-то популярный телеведущий Горгулий программы «Что не так?» Мы говорим о формуле суммы квадратов! Итак, рассмотрим внимательно формулу

$$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2.$$

Хотя... Зачем нам ее рассматривать? Она называется тождеством Брахмагупты. С ней все ясно, Брахмагупта ее уже рассмотрел, поэтому рассмотрим-ка вместо этого формулу

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp + cs - dr)^2 + (ar - bs - cp + dq)^2 + (as + br - cq - dp)^2.$$

Она называется «тождество четырех квадратов» Эйлера. Прямо скажем, психоделическая формула. Строго говоря, следовало бы спросить «А что с ней так?» Редкий читатель сумеет дочитать эту формулу до конца. Например, не все обращают внимание на то, что в последней скобке перед dp стоит минус. Мало кто отдает себе отчет в том, что так ли уж необходим в последней скобке минус перед cq . Но вы знаете, тут имеются еще некоторые резервы, и я хотел бы еще немного сгустить краски и понагнетать ситуацию, поэтому вместо обсуждения этой формулы мы лучше перейдем к тождеству восьми квадратов!

– Маэстро, вы опять увлекаетесь! Я уверен, что наш странный телезритель типон Ккху, приславший этот странный вопрос, спрашивает нас не об этих формулах!

– Дорогие любопытные любители точных наук! Я все еще дятел Спятел, эксперт программы «Что не так?», со мной Горгулий с его ужасными манерами и попытками перебивать к месту и не к месту, и мы обсуждаем странности формулы суммы квадратов! Итак, рассмотрим сумму квадратов

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Чему же равна эта сумма? Оказывается, на этот вопрос, кроме наивного и непосредственного ответа «вот этому и равна», есть простой и, казалось бы, очень ясный ответ:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Что же не так с этой формулой? Ну как вам сказать... По этой формуле любой желающий мгновенно может найти сумму квадратов первых ста натуральных чисел. Или почти мгновенно... Или ста пятнадцати. Или ста пятнадцати с половиной. Или, если уж совсем немоготу, минус ста пятнадцати... эээ... с половиной! Неплохо, да? Спросим самих себя, непонятно, правда, зачем: сколько квадратов натуральных чисел нужно сложить, чтобы получить в ответе -5 ? И, составив уравнение

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = -5,$$

немедленно найдем ответ: $x = -3$, иными словами, нужно взять -3 квадрата! Странно, не правда ли?

– Да-да, очень странно. Что-то тут не так.

– Вот какие шикарные возможности предоставляет нам эта формула. Как же она доказывается? Разумеется, по индукции. Если мы предположим, что при $n = k$ эта формула верна, т.е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

то для доказательства индукционного перехода нам остается лишь проверить, что такая же формула верна и при $n = k + 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}. \quad (1)$$

А это уже совсем просто, потому что, применив предположение индукции, мы можем вот как преобразовать сумму в левой части:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Теперь любой терпеливый слушатель, хоть бы даже и сам типон Ккху, проверит без большого труда, что полученное выражение равно правой части формулы (1):

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \quad (2)$$

и этим завершит доказательство. Для проверки нужно всего лишь домножить равенство (2) на 6 и раскрыть скобки.

Все это так, но вот к какой особенности я хотел бы привлечь ваше внимание: точно таким же способом мы могли бы доказать то, что сумма квадратов равна какому-нибудь другому выражению, например

$$\frac{(2n^2+1)(2n+3)}{12}.$$

Для этого, рассуждая аналогично, мы вместо равенства (2) проверим равенство

$$\frac{(2k^2+1)(2k+3)}{12} + (k+1)^2 = \frac{(2(k+1)^2+1)(2(k+1)+3)}{12}.$$

Не буду отпугивать наших телезрителей этой проверкой, скажу лишь, что это еще одно совсем несложное упражнение на раскрытие скобок.

– Если я правильно вас понял, маэстро, в формуле для суммы квадратов что-то не так с правой частью. В смысле, применяя формулу, нам не следует заикливаться на том, что правая часть равна именно $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, а следует быть готовыми к тому, что она равна еще чему-нибудь, причем совершенно другому! Но ведь это очень неудобно! Как же наш телезритель типон Ккху вообще сможет воспользоваться этой формулой?

– А он и не сможет! Да и не надо ему ничем пользоваться! Нет никакого типона Ккху! Я, дятел Спятел, лично зарегистрировался вчера в чате нашей телепередачи под этим псевдонимом и задал этот дурацкий вопрос!

– Вы хотите сказать... А-а-а-а!!! Дорогие телезрители, кажется, в нашей программе «Что не так?» опять все пошло не так! В сегодняшнем выпуске с помощью нашего эксперта дятла Спятла неправильный телезритель задал неправильный вопрос о неправильной формуле и мы дали этой формуле неправильное доказательство. Стало ли от этого что-нибудь яснее? Вряд ли. С вами был Горгулий, вы смотрели самую потрясающую и инновационно продвинутую программу «Что не так?» Увидимся на следующей неделе!

Как искусственный интеллект игру придумывал

А.БОЛОТИН

На сайте <https://sumplete.com/> любой желающий может поиграть в игру, придуманную и запрограммированную искусственным интеллектом.

Правила игры следующие. На доске некоторого размера, например 3×3 , записаны числа. Нужно зачеркнуть несколько из них таким образом, чтобы суммы оставшихся чисел в каждом столбце и в каждой строке совпадали с числами, что написаны на полях.

Рассмотрим пример (рис. 1) и попробуем сыграть. В первом столбце и во второй строке суммы уже совпадают, там ничего зачеркивать нельзя. Посмотрим на второй столбец. Восьмерка из второй строки должна остаться. Значит, чтобы добрать сумму до 12, зачеркиваем 7 (рис. 2). В третьем столбце сумма должна быть 3. Тогда только тройку из второй строки и необходимо оставить.

2	7	6	2
4	8	3	15
5	4	9	9

11 12 3
Рис. 1

2	7	6	2
4	8	3	15
5	4	9	9

11 12 3
Рис. 2

Попробуем заглянуть в голову искусственному интеллекту и разобраться, как могут генерироваться числа на доске и суммы на полях. Понятно, что не любой набор чисел и сумм будет корректным. Например, если положить какую-то из требуемых сумм больше суммы всех чисел на доске, то, очевидно, решения не будет.

Естественно предположить, что числа на доске генерируются случайно, а после случайно генерируется «решение» и по нему уже считаются суммы. Такой вариант легче всего реализовать (по крайней мере, так кажется с человеческой точки зрения).

Возникает вопрос, что делать, если будет существовать другое решение, а не то, что сгенерировал компьютер. Разберемся, существуют ли какие-то разумные ограничения на начальные данные, чтобы решение было единственным.

Рассмотрим для этого сначала чуть более простую задачу. Пусть также есть некоторая доска и рядом с каждым столбцом и строкой написано число. Необходимо закрасить несколько клеток так, чтобы количества закрашенных клеток в столбцах и строках совпадали с соответствующими числами. По сути это та же задача, только теперь в каждой клетке записано по единице. Оказывается, что такой частный случай хорошо изучен. Есть критерий на существование решения, критерий на единственность решения и алгоритм нахождения решения.

Начнем с существования решения. Пусть требуемые суммы по строкам сверху вниз – r_1, r_2, \dots, r_m , по столбцам слева направо – s_1, s_2, \dots, s_n . Раскрасим в первой строке левые r_1 клеток, во второй – левые r_2 клеток и так далее. Такую раскраску назовем максимальной. Для каждого столбца в максимальной раскраске посчитаем количество закрашенных в нем клеток, получим некоторые числа c_1, c_2, \dots, c_n . Для того чтобы решение существовало, необходимо и достаточно выполнения неравенств $c_1 \geq s_1, c_1 + c_2 \geq s_1 + s_2, \dots, c_1 + c_2 + \dots + c_n \geq s_1 + s_2 + \dots + s_n$ и равенства $r_1 + r_2 + \dots + r_m = s_1 + s_2 + \dots + s_n$.

Упражнение 1. Покажите, что последнее равенство является необходимым, но не достаточным условием существования решения.

Рассмотрим пример на рисунке 3. Здесь $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 2, s_1 = 2, s_2 = 1, s_3 = 2, s_4 = 2$ и $r_1 + r_2 + r_3 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$. Строим максимальную раскраску (рис. 4), получаем $c_1 = 3, c_2 = 3, c_3 = 1, c_4 = 0$. Итак, $c_1 = 3 \geq 2 = s_1, c_1 + c_2 = 3 + 3 = 6 \geq 3 = 2 + 1 = s_1 + s_2, c_1 + c_2 + c_3 = 3 + 3 + 1 = 7 \geq 5 = 2 + 1 + 2 = s_1 + s_2 + s_3$ и, наконец, $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 3 + 3 + 1 + 0 = 7 \geq 7 = 2 + 1 + 2 + 2 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$. Значит,

				2
				3
				2
2	1	2	2	

Рис. 3

				2
				3
				2
3	3	1	0	

Рис. 4

решение должно существовать. Оно приведено на рисунке 5.

Возникает вопрос, единственно ли решение в данном случае? Несложно догадаться, что нет. Например, мы можем в приведенном решении «перевернуть» верхний правый квадрат 2×2 , т.е. раскрасить как бы другую диагональ квадрата. Очевидно, тогда мы получим новое решение.

В действительности возникновение таких «шахматных четверок» в вершинах прямоугольников со сторонами, параллельными сетке, как, например, на рисунке 6, — един-

				2
				3
				2
2	1	2	2	

Рис. 5

Рис. 6

ственное препятствие к единственности решения. Выходит, если каким-то образом построена раскраска, где нет «шахматных четверок», то построенное решение — единственное решение данной задачи.

Казалось бы, если придумать общий алгоритм раскраски, то задача будет полностью решена: сначала мы проверяем условие существования решения, затем строим его согласно алгоритму, а потом проверяем раскраски всех вершин прямоугольников со сторонами, параллельными сетке, чтобы получить информацию про единственность решения.

Алгоритм действительно существует. Однако он совсем не прост и мы не будем здесь его излагать (описание алгоритма можно прочитать, например, в [1]). Остановимся на том, что он есть и работает в некотором смысле «быстро».

Задача, которую мы сейчас рассмотрели, возникает в дискретной томографии, которая применяется, например, в обработке

изображений, медицине и даже в вопросах безопасности информации. У задачи довольно естественное происхождение: фактически речь идет о «рентгеновских лучах», которые просвечивают какой-либо объект и на выходе получают только некоторые проекции, необходимо же восстановить структуру самого объекта.

Упражнение 2. Существует ли и единственно ли (в случае существования) решение задачи дискретной томографии, изображенной на рисунке 7?

				3
				3
				3
				1
				3
2	3	3	1	4

Рис. 7

Но вернемся к задаче, предложенной искусственным интеллектом. Есть ли алгоритм ее решения? Алгоритм, конечно, есть: как минимум, можно просто перебрать все возможные случаи. Однако, нам скорее интересен ответ на вопрос, есть ли «быстрый» алгоритм.

Дело в том, что бывают задачи, которые можно «быстро» решить, говорят, что это задачи класса P, а есть те, которые можно «быстро» проверить, их относят к классу NP (строгие определения этих понятий можно прочитать, например, в [2]). Понятно, что если задачу можно «быстро» решить, то ее можно «быстро» проверить, просто посмотрев на ее «быстрое» решение. Поэтому любая задача из класса P также лежит в классе NP. А вот верно ли, что любая задача из класса NP лежит в классе P, неизвестно до сих пор. Большинство людей все-таки считают, что в NP есть достаточно сложные задачи, которые нельзя «быстро» решить.

В теории алгоритмов вводится строгое определение «быстроты» алгоритма, но нам достаточно интуитивного понимания. Чтобы было немного понятней, о каких задачах идет речь, рассмотрим некоторые примеры.

Пусть, например, даны два целых числа. Необходимо найти их наибольший общий делитель. Можно воспользоваться алгоритмом Евклида. На каждом шаге большее из чисел заменяем на разность написанных чисел. Как только числа сравниваются, останавливаемся. Полученное число и будет наибольшим общим делителем. Эта задача лежит в P.

Рассмотрим другой пример. Пусть есть некоторое мультимножество (множество, в котором элементы могут повторяться) целых чисел M и некоторое число S . Необходимо проверить, существует ли в M подмножество чисел, в сумме дающих S . Пока не известны быстрые алгоритмы нахождения требуемого подмножества. Таким образом, не известно, лежит ли эта задача в P . Однако мы точно можем сказать, что задача лежит в NP . Если нам дадут некоторый набор чисел, то нужно будет просто убедиться в том, что нас не обманули и действительно дали подмножество M , а также то, что сумма данных нам чисел равна S . Поскольку решение можно быстро проверить, задача лежит в NP .

Есть, кроме того, класс NP -полных задач, т.е. класс самых «сложных» NP -задач. Если найти «быстрый» алгоритм решения хотя бы какой-нибудь из них, то это автоматически будет значить, что для любой NP -задачи существует «быстрый» алгоритм. И рассмотренная нами задача как раз NP -полна.

Заметим, что задача нахождения подмножества M с суммой S по сути является частным случаем той игры, что придумал искусственный интеллект. Просто в данном случае идет игра на доске, одна из сторон которой равна 1. Таким образом, если хороший алгоритм и существует, то человеку до него, скорее всего, будет сложно догадаться, а тем более современному искусственному интеллекту. Остается только перебирать каким-то образом варианты.

Подобные задачи зачастую являются NP -полными. Например, sudoku также среди них. Так что можно быть уверенным, что при генерации нового уровня числа на доске появляются случайно и «решение» также выбирается случайно. Поэтому вероятно, что какой-то из уровней будет иметь не единственную правильную комбинацию, и это, конечно, не очень хорошо. Ведь тогда при решении придется в некоторый момент действовать наугад.

Подытожим наши рассуждения тем замечанием, что искусственный интеллект надо использовать с (человеческим) умом, а не надеяться на его безупречность. Однако здорово, что он способен дать думающему человеку столько пищи для размышления. Пред-

ставьте, сколько обобщений можно придумать на основе этой игры!

В заключение отметим, что обсуждаемая игра уже была придумана раньше (см. [3]). Так что еще неизвестно, действительно ли искусственный интеллект сам сгенерировал такие правила или все-таки воспользовался имеющимся материалом.

Упражнения

3. В задаче дискретной томографии единственным препятствием к единственности решения было существование «шахматных четверок». Приведите примеры препятствий к единственности решения, которые могут возникнуть при решении задачи, предложенной искусственным интеллектом.

4. Единственно ли решение задачи, предложенной искусственным интеллектом (рис. 8)?

7	7	6	1	6	8	8	35
6	5	5	4	5	9	3	23
9	5	2	4	3	4	7	27
3	6	8	2	5	9	4	13
6	6	9	2	3	6	4	15
7	5	1	4	9	7	6	23
4	2	6	2	4	4	9	15
9	23	22	16	19	28	34	

Рис. 8

Литература

1. *H.J. Ryser*. Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. – Canadian Journal of Mathematics, 2010, n. 9, p. 269–275.
2. *Д.В. Мусатов*. Сложность вычислений. – МФТИ, 2016.
3. <https://www.digitaltrends.com/gaming/suplete-chatgpt-ai-game-design-ethics/>

Неоднородность среды и преломление звуковых волн

С.ВАРЛАМОВ

В ВОЗДУХЕ И В ДРУГИХ ГАЗООБРАЗНЫХ средах при определенных условиях возникают и распространяются по всем направлениям от места появления звуковые волны. Если в твердых телах возможны и существуют продольные и поперечные волны, то в газах (да и в жидкостях тоже) на большие расстояния от источника распространяются только продольные волны, в которых направление распространения волны и смещения частиц среды от равновесного положения происходят вдоль одной линии. Когда амплитуда A колебаний частиц газа в волне вблизи положения равновесия невелика в сравнении с длиной волны λ , то и дополнительное к среднему значению давление в волне Δp тоже невелико в сравнении с этим средним значением. До тех пор, пока эти неравенства выполняются, скорость распространения звуковых волн в разреженных газах не зависит от частоты и амплитуды колебаний давления. Она определяется скоростью теплового движения молекул вещества, которая зависит от температуры и сорта вещества, из которого газ состоит:

$$v^2 \sim \frac{RT}{M}.$$

Здесь T – абсолютная температура, M – средняя молярная масса газа, R – универсальная газовая постоянная. Коэффициент пропорциональности зависит от того, сколько степеней свободы (или возможностей накопить механическую энергию) имеют молекулы газа при заданной температуре. Поскольку звуковые волны «бегают» быстро, а теплообмен с окружением – это процесс медленный, то в звуковых волнах характеристики газа описываются уравнением адиабаты. Если газ

представляет собой смесь разных веществ, то скорость звука в смеси разных газов зависит от ее (смеси) химического состава.

Волновое уравнение

Математическая связь между пространственными координатами x частиц, участвующих в волновом движении, и их смещениями y от положений равновесия во времени t задается известным волновым уравнением. Напишем его для плоской волны, распространяющейся вдоль одного (x) направления со скоростью v :

$$v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Такому волновому уравнению, в частности, соответствует волна, бегущая в направлении $+x$ и описываемая уравнением

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{vt}{\lambda}\right),$$

где A – амплитуда колебаний частиц вблизи положения равновесия, λ – длина волны, v/λ – круговая частота колебаний ω .

Плотность потока энергии в бегущей волне

Внутренние силы, действующие между соседними участками среды, которые участвуют в волновом движении, развивают механические мощности. По определению, для вычисления такой мощности в механике нужно пользоваться формулой $W = (\vec{F} \cdot \vec{v})$, т.е. мощность равна скалярному произведению силы на скорость перемещения места приложения этой силы. В случае с газами сила (как вектор) равна произведению давления в данном месте на ориентированную площадку \vec{S} . Плотностью потока энергии в волне, распространяющейся в газе, называется векторная величина, равная произведению избыточного давления Δp (скалярная величина) на скорость \vec{v} (вектор) упорядоченного (связанного с волной) движения частиц среды в этом месте.

Будем рассматривать бегущую волну, уравнение которой написано выше, и будем считать, что для такой волны выполняется неравенство $A \ll \lambda$. В этом случае максимальные по величине изменения давления в газе Δp будут значительно меньше среднего значения давления p_0 . Там в пространстве и в те моменты времени, где смещение частиц от

положения равновесия нулевое, достигают максимумы и минимумы давления $p_0 \pm \Delta p$. Этим же моментам времени и местам в пространстве соответствуют экстремальные упорядоченные скорости движения частиц $\pm A v / \lambda$. Иными словами, в этих местах и в эти моменты времени достигается максимальная плотность потока энергии в волне, равная $\Delta p A v / \lambda$. Причем знаки потоков энергии в направлении оси x в этих местах (там, где нулевые смещения частиц) одинаковы. В тех же местах, где частицы движутся с максимальной скоростью, величина дополнительного давления по отношению к среднему значению равна нулю. Произведение скорости их упорядоченного (не теплового) движения на среднее давление в этом месте тоже дает плотность потока энергии, но эти потоки в одном месте и в ближайшем вдоль направления распространения волны соседнем имеют противоположные знаки, поскольку скорости волнового движения отличаются в этих местах по направлению. В распространяющейся в направлении $+x$ волне среднее по времени значение плотности потока энергии в этом направлении положительно и равно половине от максимального значения, которое достигается именно в тех местах и в те моменты времени, где и когда смещения частиц от равновесных положений равны нулю. Таким образом, во времени поток энергии пульсирует с частотой $2v/\lambda$, которая в два раза выше частоты колебаний частиц в волновом движении, равной v/λ .

Волновые свойства

Для звуковых волн с малыми амплитудами колебаний давления справедлив принцип суперпозиции. При этом распространяющиеся через одну и ту же область пространства в разных направлениях волны не влияют друг на друга. Для звуковых волн (так же, как и для световых, т.е. электромагнитных волн) имеют место известные волновые явления. А именно: интерференция и дифракция волн. В отличие от световых волн, для звуковых волн в газах квантовые свойства не проявляются.¹

¹ Кстати, для звуковых волн в твердых телах квантовые эффекты имеют место. Именно этими эффектами определяется зависимость от температуры теплоемкости твердых тел при низких температурах.

Энергия волн. Громкость звука

Энергия звуковых волн в объеме с поперечными линейными размерами, значительно превышающими длину волны, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний давления в волне. Если считать, что потерь нет и источник звука выдает постоянную во времени мощность, создавая волны, распространяющиеся по всем возможным направлениям, то с увеличением расстояния от источника звука до места регистрации волны в выбранном постоянном направлении от источника амплитуда волн A убывает. Например, если источник и приемник звука находятся в однородной среде и размеры источника D и длина волны λ звука малы в сравнении с расстоянием R от источника до приемника, то произведение расстояния на амплитуду волны на этом расстоянии сохраняется:

$$AR = \text{const} .$$

Восприятие звуковых сигналов имеет определенные особенности. Известно, что диапазон частот сигналов, воспринимаемых человеком как звук, составляет для молодых людей от 20 Гц до 20 кГц. С возрастом чувствительность к высоким частотам падает. При этом одинаковые по амплитуде колебаний частиц в волне сигналы на разных частотах воспринимаются как разные по громкости. На рисунке 1 показаны уровни звука на разных частотах, которые воспринимаются как одинаковые по громкости. Наибольшая чувствительность достигается при

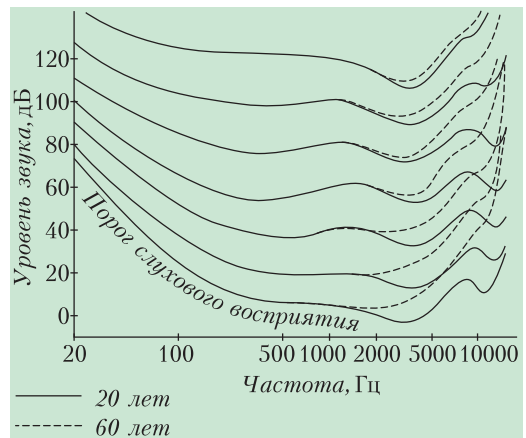


Рис. 1. Зависимость уровня громкости звука от частоты

частотах в диапазоне от 0,5 кГц до 5 кГц. Для характеристики громкости сигналов используется шкала десятичных логарифмов отношения $(\Delta p / \Delta p_{\min})^2$, где Δp_{\min} – это минимальная величина давления, ощущаемая как наличие звука для частоты звуковых колебаний, соответствующей максимальной чувствительности. Эта максимальная чувствительность достигается для частоты около 3 кГц при минимальной мощности 10^{-12} Вт, приходящейся на 1 м^2 площади. Величина $21 \lg(\Delta p / \Delta p_{\min})$ характеризует громкость звука в беллах (Б). Такое название носит единица измерения громкости звука в честь ученого, изобретателя и предпринимателя Александра Белла. А величина $20 \lg(\Delta p / \Delta p_{\min})$ характеризует громкость в децибеллах (дБ).

Нормальная громкость звуков, например речи, не требующих напряжения для того, чтобы услышать и разобрать услышанное, и в то же время не раздражающих сильной громкостью, составляет 50–70 дБ. Звуки громкостью больше 100–120 дБ воспринимаются болезненно как очень громкие, а еще более громкие звуки могут нанести непоправимые повреждения слуховому аппарату человека. На рисунке 2 приведены области

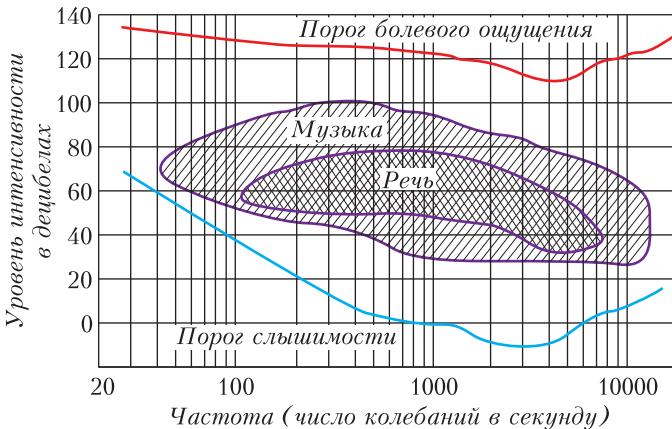


Рис. 2. Чувствительность уха человека к звукам разной частоты

частот и громкостей звука на разных частотах, соответствующие стандартным ситуациям (речь, музыка на концерте).

Диапазон частот и затухание звуковых волн

Следует отметить, что звук – это колебания давления в диапазоне частот от очень малых (инфразвуки) до максимальной час-

тоты, которая определяется двумя параметрами: средней скоростью теплового движения молекул и длиной свободного пробега молекул в газе. Например, при так называемых нормальных условиях скорость теплового движения молекул воздуха имеет порядок величины 550 м/с. Скорость звука при этих условиях равна примерно 320 м/с, а длина свободного пробега молекул составляет величину порядка 1 мкм. Для того чтобы волна распространялась, нужно, чтобы на длине свободного пробега умещалось не более четверти длины волны, следовательно, предельные частоты распространяющихся в воздухе звуков (при нормальных условиях) составляют около $320 / (4 \cdot 10^{-6}) \text{ Гц} \approx 80 \text{ МГц}$. Волны на таких высоких частотах затухают на расстояниях от источника, сопоставимых с размером самого источника. Затухание или рассеяние волн определяется соотношением между длиной волны и размерами областей с разными (отличающимися друг от друга) концентрациями молекул в них – т.е. размерами областей с флуктуациями плотности. Чем меньше частота звука, тем более однородной для колебаний на этой частоте является среда. Поэтому в воздухе,

например, низкочастотные звуки слышны на значительно больших расстояниях, чем высокочастотные. Так, частотный состав звука самолета, пролетающего мимо слушателя (над ним), зависит от расстояния между самолетом и слушателем. Чем выше летит самолет, тем более глухим и низкочастотным становится слышимый звук. Это связано как раз с тем, что высокочастотные звуки затухают с пройденным волной расстоянием (а это несколько километров) гораздо быстрее, чем низкочастотные. К примеру, на частотах 500 Гц и 5 кГц при одной и той же влажности воздуха 50% коэффициент затухания отличается примерно в 16 раз. А это соответствует отношению коэффициентов уменьшения дополнительных давлений в (плоских) звуковых волнах на каждом километре расстояния на соответствующих частотах в $10^{(1,6/2)} = 6,3$ раза.

Еще раз напомним, что при малых изменениях давления газа вблизи среднего значе-

ния $\Delta p \ll p_0$ скорость звука не зависит от амплитуды колебаний давления. А вот при увеличении амплитуды давления в волне до величин, сравнимых (или больше) со средним значением p_0 , скорость звука вырастает (возникают ударные волны).

Движение источника и приемника звука

Если источник звука движется относительно газа, то распределение в пространстве участков с повышенным и пониженным давлением (максимумов и минимумов давления в волне) зависит от направления, в котором распространяется звуковая волна, и от вектора скорости движения источника звука (учитывается и направление, и величина скорости источника). Это явление носит название эффекта Доплера, названного так в честь физика, впервые объяснившего этот эффект. Например, человек, неподвижно стоящий (в безветренную погоду) и слушающий звук проезжающего мимо него со скоростью меньше скорости звука автомобиля (поезда или пролетающего вертолета), слышит более высокую частоту колебаний звука во время приближения к нему источника в сравнении с частотой звука, приходящего к слушателю от удаляющегося от него того же источника звука. Движение самого слушателя относительно воздуха тоже приводит к зависимости высоты слышимого звука от направления распространения звуковых волн и от величины и направления скорости движения слушателя.

Сверхзвуковой самолет

Если источник звука движется относительно газовой среды со скоростью, превышающей скорость звука (некоторые современные самолеты могут летать в воздухе со скоростью больше скорости звука), то в этом случае все пространство разделяется на две области: одна область еще не занята звуковыми волнами, а в другой области звуковые волны уже существуют. Если такой источник звука движется прямолинейно и равномерно, то разделяет эти две области поверхность в форме конуса. Называют ее конусом Маха – по фамилии физика, который впервые описал ее. В вершине этого конуса находится источник звука и вершина движется со ско-

ростью источника звука. При этом вполне возможна ситуация, что самолет уже пролетел то место, в котором он был на минимальном расстоянии от наблюдателя, стоящего неподвижно на земле, а звуковые волны до него еще не дошли. В этом случае в момент прихода звуковых волн к слушателю возникает резкое изменение давления (хлопок), после которого слышится рев самолета. Причем по звуковым ощущениям создается впечатление, что от места над слушателем разлетаются в разные стороны два источника звука: один в ту сторону, куда полетел самолет, а другой в противоположную сторону. Пули, выпущенные из некоторых современных видов огнестрельного оружия, вылетают из ствола со скоростью в два раза выше скорости звука. И на значительной части длины траектории полета скорость пули превышает скорость звука. Поэтому справедливо высказывание: «если ты услышал звук летящей пули – она не твоя», т.е. она уже пролетела мимо и в тебя не попадет.

Звуковые волны в неоднородной среде

Понятно, что среды, в которых распространяются звуковые волны, могут быть неоднородными. Например, известно, что в воздухе (даже в неподвижном) с высотой над выбранным начальным горизонтальным уровнем может изменяться и температура, и плотность. Следовательно, волны в такой неоднородной среде могут изменять направление своего распространения, если переходят от участка с одним набором характеристик среды к участку с другим набором. При этом выполняются определенные соотношения между падающей на границу раздела участков волной, отраженной от этой границы или прошедшей через эту границу раздела волной. Действуют соответствующие законы отражения и преломления. Если считать, что потерь нет, что поверхность раздела плоская и ее геометрические размеры значительно больше длины волны, то эти законы совпадают с соответствующими законами в геометрической оптике и основываются на законах сохранения в механике. А именно: на законах сохранения импульса и энергии. Конечно, существуют ситуации, в которых длины волн сопоставимы

с размерами границ раздела, да и сами границы могут быть не плоскими, а кривыми. В таких случаях могут появляться такие же волновые эффекты, как и для электромагнитных волн, т.е. дифракция и интерференция.

Поверхностные волны

Если газовая среда неоднородна и наблюдается резкая граница раздела, например отделяющая друг от друга области с разной плотностью одного и того же газообразного вещества (при различных температурах, но одинаковом давлении) или области с разным составом газовых смесей, которые тоже имеют разные плотности, то в гравитационном поле вещества располагаются так, что менее плотная составляющая находится выше более плотной. В такой ситуации возможно образование и распространение вдоль этой границы раздела так называемых поверхностных волн. (Аналогом являются гравитационные волны на поверхности воды.) Скорость их распространения зависит от плотностей выше ρ_v и ниже ρ_n границы раздела, а также от величины ускорения свободного падения g . И, самое интересное, скорость распространения таких волн зависит и от длины волны, и от амплитуды. Конечно, в атмосфере на разных высотах плотности воздуха отличаются и такие поверхностные волны иногда наблюдаются в виде специфической формы облаков, но частота колебаний в таких волнах настолько мала, что они не попадают в диапазон частот, который мы можем слышать. Иными словами, называть такие волны звуковыми никак нельзя.

Задачи для самостоятельного решения

1. Каков коэффициент пропорциональности в формуле $v^2 \sim RT/M$ для газообразного водорода (H_2) при разных температурах $T_1 = 10$ К и $T_2 = 300$ К?

2. Какова скорость звука в газовой смеси гелия и водорода при одинаковой концентрации молекул этих веществ при нормальных условиях?

3. Какова скорость звука в атмосфере Сатурна, средняя температура которой равна примерно 140 К? Состав атмосферы Сатурна: H_2 (около 96 %), He (около 3 %), CH_4 (около 0,4 %).

4. Раскапризничавшийся ребенок кричит так, что на расстоянии 1 м от его рта уровень громкости звука составляет 120 дБ. Энергия его крика распределена по частотам равномерно в диапазоне (1–7) кГц. На каком расстоянии от ребенка его крик уже будет невозможно услышать?

5. Какова амплитуда колебаний давления воздуха (находящегося при нормальных условиях) в плоской звуковой синусоидальной волне, для которой амплитуда смещений частиц от положений равновесия равна 1 мм, а длина волны равна 1 м? Какова величина плотности потока энергии в этой волне?

6. Какова громкость звука (в дБ) в волне из предыдущей задачи, если частота колебаний 3000 Гц?

7. Внутри шарика с тонкими резиновыми стенками находится в газообразном состоянии вещество с названием НОВЕК (у этого вещества весьма большая молярная масса). Снаружи воздух находится при нормальных условиях. Радиус шарика равен 0,5 м. На шарик падает плоская звуковая волна с частотой 10 кГц. Вдали от этого шарика прибор регистрирует громкость звука 50 дБ. В каком месте нужно расположить микрофон, чтобы зарегистрировать максимальную громкость звука? Какова примерно эта максимальная громкость?

8. Самолет летит на высоте 1000 м с постоянной скоростью 200 м/с. Винт (пропеллер) этого самолета имеет три лопасти и вращается с частотой 1000 об/мин. Непосредственно под траекторией (на эпитраектории) находится наблюдатель. Какую частоту звука слышит этот наблюдатель в те моменты, когда самолет находится от него на расстоянии 3 км?

9. В огромном кратере (диаметр больше 10 км) давно потухшего вулкана с высокими (0,5 км) стенками воздух холодный (-10 °С). Над кратером медленно движется теплый воздух ($+20$ °С). Какова скорость распространения поверхностных (на границе раздела теплого и холодного воздуха) волн с длиной волны 10 м? Атмосферное давление составляет 10^5 Па.

10. Для чего в прошлом веке на открытых эстрадных площадках над подиумом высотой примерно 1 м делали стены в форме четверти сферы с радиусом 5–6 м, т.е. примерно во всю ширину рядов скамеек для зрителей, стоящих перед этой площадкой?

Игра с тенью

И. СЫЧЕВ

В солнечный летний день дети (да и взрослые) любят поиграть с тенью. Наиболее наблюдательные, наверное, обращали внимание на такой факт. Если стоять, например, под крышей дома и приближать свою тень к тени дома, то своя тень начинает вытягиваться в направлении тени дома (рис. 1). В чем же причина такого искажения тени?

Дифракцию не рассматриваем – не ее масштабы, все здесь макроскопическое. Воспользуемся законами геометрической оптики и изобразим схему данного явления (рис. 2). По-видимому, дело прежде всего в том, что источник света имеет ненулевые угловые размеры. Рассмотрим для упрощения только крайние лучи, идущие от диска Солнца (рис. 3,а). На большом расстоянии между экранами 1 и 2 тень от первого экрана не искажена (левое фото на рисунке 1). При достаточном сближении теней от головы и крыши на тело, более близкое к земле (экран 1), начинает попадать свет не со всей поверхности источника света, а только с той части, которая еще не загорожена более отдаленным телом (экран 2). При достижении этого положения экраном 1 начинает расти угол α между падающим лучом и вертикалью (начало солнечного луча как бы смещается по окружности диска Солнца по

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20250106>

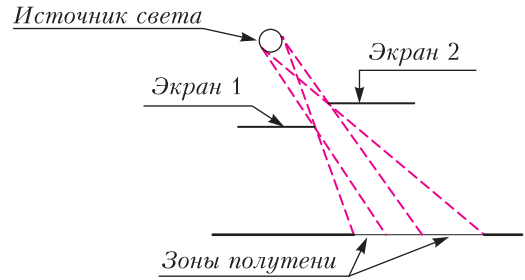


Рис. 2. Геометрическая схема явления

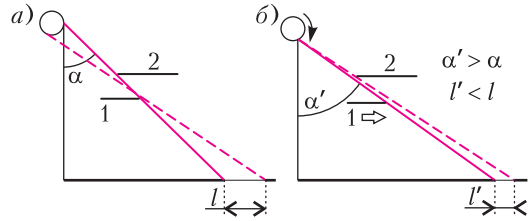


Рис. 3. Изменение угла α при движении экрана 1

часовой стрелке вниз) и, следовательно, тень от экрана 1 вытягивается навстречу тени от экрана 2 (рис. 3,б).

Таким образом, скорость смещения тени возрастает с увеличением угла α . Поэтому при приближении тени от головы (экран 1) к тени дома (экран 2) участки, близкие к дому (бóльшие углы α), дают более длинную тень: голова «вытягивается» в направлении крыши дома (правое фото на рисунке 1).

Попробуем оценить по величине удлинения тени угловой размер Солнца (рис. 4). Для упрощения расчета примем, что Солнце находится практически в зените и угол φ мал. В нашем опыте при росте человека

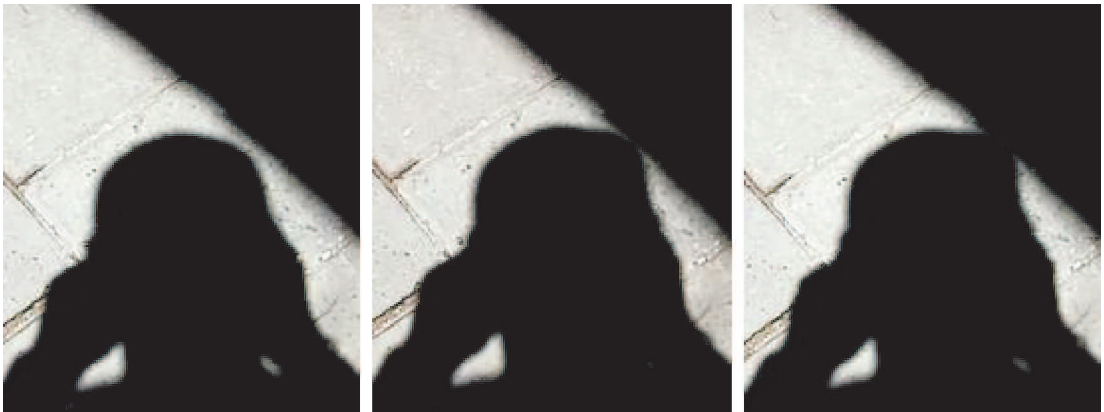


Рис. 1. Искажение тени объекта

1,6 м удлинение тени Δl происходит примерно на 1,4 см. Тогда видимый угловой диаметр Солнца будет равен

$$\varphi = \arctg \frac{1,4 \cdot 10^{-2}}{1,6} = \arctg 0,00875 = 0^\circ 30' 5''.$$

Полученный при расчете угол φ примерно равен известному угловому значению среднего видимого диаметра Солнца $\varphi_{\text{ср}} = 0^\circ 31' 59''$.

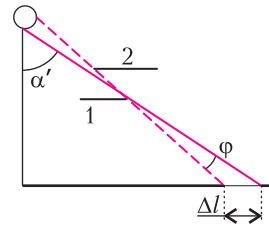


Рис. 4. Угловой размер Солнца и удлинение тени

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

17. Замок имеет форму треугольника. Барон хочет расставить часовых на стенах замка так, чтобы каждая точка вне замка была в поле зрения часовых. Каждый часовой видит все в пределах угла 30° , причем замок не должен загораживать обзор. В одной точке можно располагать несколько часовых. Можно ли гарантировать, что независимо от формы замка хватит 14 часовых?

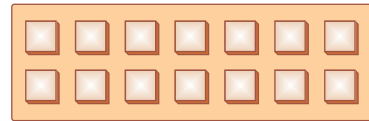
М. Прасолов, Е. Бакаев

18. Набор домино состоит из 28 различных прямоугольников 1×2 , в клетках которых поставлено от 0 до 6 точек. Петя сложил все доминошки в произвольном порядке в кольцо так, что получилась прямоугольная рамка толщиной в клетку доминошки. Затем Вася склеил все доминошки по соседним сторонам, а потом разрезал каждую доминошку на две половинки. Могло ли оказаться, что полученные Васей доминошки тоже образуют полный набор?

А. Грибалко

19. На столе лежат шкатулки – 7 сверху и 7 внизу так, как на рисунке. В одной из

шкатулок находится Волшебный цветок. Если открыть эту шкатулку, то начинает играть вальс. Если открыть шкатулку, в



которой нет Волшебного цветка, но он находится в одной из соседних шкатулок (слева, справа, сверху или снизу), то звенит колокольчик. Какое наименьшее количество шкатулок надо открыть, чтобы точно понять, в какой шкатулке находится Волшебный цветок?

С. Костин

20. Введем операцию «снежинка» по формуле

$$x * y = xy - 7x - 7y + 77,$$

где x и y – действительные числа. Найдите число

$$2025 * 2024 * 2023 * \dots * 3 * 2 * 1.$$

«Снежинки» выполняются последовательно одна за другой слева направо.

С. Костин

Международная физическая олимпиада 2024 года

54-я Международная олимпиада школьников по физике (IPhO-2024) проходила с 21 по 28 июля 2024 года в городе Исфохане (Исламская Республика Иран). В олимпиаде участвовали школьники из 46 стран. По результатам олимпиады было присуждено 18 золотых медалей, 35 серебряных, 53 бронзовых и 29 почетных грамот. От каждой страны участвовало 5 школьников. Сборная КНР получила 5 золотых медалей, сборная России – 4 золотые медали и 1 серебряную медаль. Далее следует сборная Румынии – 3 золотых и 2 серебряных, Индия и Вьетнам – по 2 золотых и 3 серебряных. По одной золотой медали у сборных Ирана и Белоруссии.

Сборная России была приглашена на олимпиаду как «сборная индивидуальных участников из России». Однако фактически наши школьники участвовали как сборная России: так они были представлены при открытии олимпиады и при награждении. На награждение наши участники вышли с флагами России. Это было сделано по решению оргкомитета олимпиады.

Сборную Российской Федерации представляли пять школьников:

*Егор Потапов,
Александр Анисимов,
Даниил Гаврилов,
Иван Лихоконь,
Алексей Гашпар.*

Все они получили золотые медали на Азиатской олимпиаде, которая проходила в мае в Малайзии. Егор Потапов также получил год назад золотую медаль на Международной физической олимпиаде в Японии. Четверо из команды окончили «Физтехлицей» имени П.Л. Капицы в городе Долгопрудном, кроме Алексея Гашпара, который обучался в московской шко-

ле 1589. Сборную сопровождали представители Московского физико-технического института (МФТИ) М.Н. Осин, Ф.М. Цыбров, М.П. Покровский и А.А. Ершов.

Олимпиада состояла из двух туров – теоретического и экспериментального. Максимальное возможное число баллов было 50. В результате наши школьники завоевали 4 золотые медали: Е. Потапов (45,55 баллов – третье место в мировом зачете, первое и второе места у школьников из КНР – 46,38 и 45,75 баллов соответственно), Д. Гаврилов (41,50 баллов – 7 место, выше – только школьники из КНР и Е. Потапов), А. Гашпар (38,51 баллов – 10 место) и И. Лихоконь (38,18 баллов – 11 место). Серебряную медаль получил А. Анисимов (33,19 баллов – 20 место).

Олимпиада была проведена на высоком организационном уровне. Обстановка на олимпиаде была очень благоприятная.

Теоретический тур

Задача 1. Парниковый эффект (10 баллов)

В 2021 году Сюкуро Манабэ и Клаус Хассельман получили половину Нобелевской премии по физике за работу по моделиро-



Слева направо: Е.Потапов, А.А.Ершов, А.Гашпар, Б.А.Бурмистров (генеральный консул России в Исфохане), А.Анисимов, М.Н.Осин, И.Лихоконь, Д.Гаврилов, Ф.М.Цыбров

ванию климата Земли и точное предсказание глобального потепления, вызванного промышленной деятельностью человека. В этой задаче мы рассмотрим простую модель глобального потепления, вызванного парниковым эффектом. Парниковые газы изменяют оптические свойства земной атмосферы, пропуская или поглощая инфракрасное излучение Земли, что приводит к повышению средней температуры планеты.

Все тела при различных температурах испускают тепловое излучение. Величина $u(\lambda, T) d\lambda$ есть мощность теплового излучения с единицы площади тела при температуре T в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$. Согласно формуле Планка для излучения абсолютно черного тела,

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1},$$

где $hc = 1,24 \cdot 10^3$ эВ·нм и $k_B = 8,62 \cdot 10^{-5}$ эВ·К. Длина волны, соответствующая максимуму $u(\lambda, T)$, находится из выражения $\lambda_{\max} T = b$ (закон смещения Вина). Можно показать, что $b = hc/(x_m k_B)$, где x_m – некоторая безразмерная величина, которая является ненулевым корнем уравнения $f(x) = 0$. Вам потребуется найти функцию $f(x)$ в одном из пунктов. Полная мощность излучения с единицы площади абсолютно черного тела во всех длинах волн определяется законом Стефана–Больцмана как $U(T) = \sigma T^4$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴). Более того, согласно закону излучения Кирхгофа, при тепловом равновесии тело, поглощающее определенную долю падающего излучения на определенной длине волны, будет излучать такую же долю излучения абсолютно черного тела на этой же длине волны.

В этой задаче считайте, что Солнце является абсолютно черным телом со средней температурой его поверхности $T_S = 5,77 \cdot 10^3$ К. Радиус Солнца $R_S = 6,96 \cdot 10^8$ м, среднее расстояние между Землей и Солнцем $d = 1,50 \cdot 10^{11}$ м. Обозначим спектральную мощность излучения Солнца на единицу площади Земли, нормальной к направлению излучения, через $\tilde{u}_S(\lambda)$.

В этой задаче предполагается, что Земля находится в тепловом равновесии и имеет одинаковую температуру во всех точках своей поверхности.

Во всех пунктах задачи выражайте искомую величину в общем виде через величины, приведенные в условии, а затем находите ее численное значение с точностью до трех значащих цифр. Необходимые единицы измерения указаны в листах ответов.

Часть А. Земля как черное тело (3 балла)

В этой части рассмотрим поверхность Земли как черное тело и пренебрежем земной атмосферой.

A1. Найдите солнечную постоянную S_0 .

A2. Найдите температуру Земли T_E .

A3. Найдите функцию $f(x)$.

A4. Вычислите значение x_m и, используя это значение x_m , найдите значение b .

A5. Найдите λ_{\max} для Солнца и для Земли.

На рисунке 1 показаны функции $\tilde{u}_S(\lambda)$ и $u(\lambda, T_E)$, где γ – некоторый безразмерный коэффициент, роль которого – отмасштабировать $\tilde{u}_S(\lambda)$ так, чтобы две функции имели одинаковый максимум.

A6. Найдите γ .

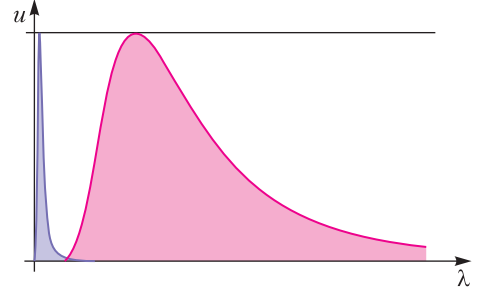


Рис. 1. График зависимости $u(\lambda, T_E)$ (красный, справа) и $\tilde{u}_S(\lambda)$ (синий, слева) от λ .

Часть В. Парниковый эффект (7 баллов)

В этой части мы рассмотрим простую модель, в которой земная атмосфера моделируется как тонкий слой на небольшом расстоянии над поверхностью Земли, так что разницей между площадью слоя атмосферы и площадью поверхности Земли можно пренебречь (рис. 2). В дальнейшем будем считать, что основная часть теплового излучения Земли и Солнца испускается на длинах волн, близких к λ_{\max} для каждого из них. Также предположим, что слой атмосферы отражает часть $r_A = 0,255$ видимого и ультрафиолетового излучения, падающего сверху или снизу, и полностью пропускает остальное. Предположим, что атмосфера совсем не отражает инфракрасное излучение, однако поглощает часть ϵ инфракрасного излучения

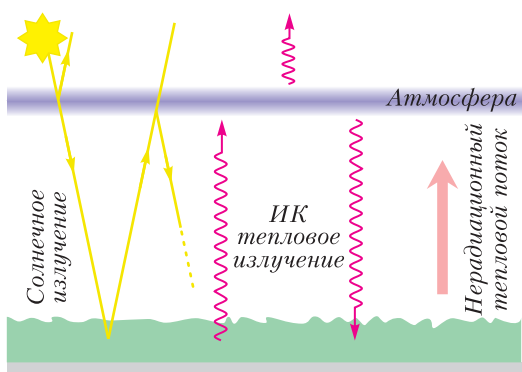


Рис. 2. Тепловые потоки между Землей и атмосферой

и пропускает остальную часть. Такое поведение, известное как парниковый эффект, изменяет среднюю температуру Земли. Поверхность Земли отражает часть r_E видимого и ультрафиолетового излучения и поглощает остальную часть этого излучения и все инфракрасное излучение.

В1. Предположим, что $\epsilon = 1$ и $r_E = 0$. Найдите температуру Земли T_E и температуру атмосферы T_A .

Теперь предположим, что $r_E \neq 0$. В этом случае система «Земля + атмосфера» отражает некоторую другую долю солнечного излучения, называемую «альбедо» и обозначаемую α .

В2. Найдите альбедо α через r_E и r_A . Рассчитайте его численное значение при $r_E = 0,102$ (и $r_A = 0,255$).

В3. Выразите температуру Земли через σ , α , S_0 и ϵ . Используя приведенные данные и рассчитанное альбедо, найдите численное значение ϵ , которое приводит к нынешней средней температуре Земли $T_E = 288$ К.

В4. Найдите $dT_E/d\epsilon$ и вычислите, на сколько увеличится температура Земли, если ϵ увеличится на один процент.

Предположим, что $T_A = 245$ К и $T_E = 288$ К. Эти значения получены из реальных данных и могут отличаться от результатов, которые вы получили в предыдущих пунктах. Теперь предположим, что имеет место неррадиационный (например, конвективный) тепловой поток $J_{NB} = k(T_E - T_A)$ от Земли к атмосфере, где k – постоянная. Величина J_{NR} – это передаваемая мощность с единицы площади.

В5. Выразите ϵ и k через T_E , T_A , σ , α и S_0 .

В6. Дифференцируя по ϵ выражения, полученные в пункте В5, получите два уравнения,

в которые входят $dT_A/d\epsilon$ и $dT_E/d\epsilon$. Используя эти уравнения, найдите численное значение изменения температуры Земли в результате увеличения значения ϵ на один процент.

Задача 2. Ионная ловушка и охлаждение атомов (10 баллов)

В последние десятилетия удержание и охлаждение атомов и ионов стали увлекательной темой для физиков, а за работы в этой области было присуждено несколько Нобелевских премий. В первой части этой задачи мы рассмотрим технику захвата ионов, известную как «ловушка Пауля». За эту работу Вольфганг Пауль и Ханс Демелт получили половину Нобелевской премии по физике 1989 года. Далее мы исследуем технику доплеровского охлаждения – одну из работ, упомянутых в пресс-релизе Нобелевской премии по физике 1997 года, присужденной Стивену Чу, Клоду Коэн-Таннуджи и Уильяму Филлипсу «за разработку методов охлаждения и удержания атомов с помощью лазерного излучения».

Часть А. Ловушка Пауля (5,6 баллов)

Известно, что с помощью электростатических полей невозможно создать устойчивое равновесие для заряженной частицы. Поэтому для создания точки стабильного равновесия для ионов требуются более сложные методы. Одной из таких методик является ловушка Пауля.

Рассмотрим равномерно заряженное кольцо с линейной плотностью положительного заряда λ и радиусом R . Положительный точечный заряд Q с массой m помещен в центр кольца (рис. 3).

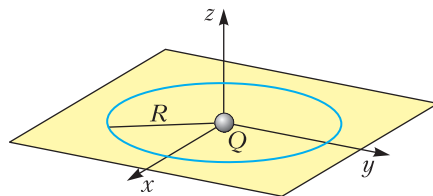


Рис. 3. Равномерно заряженное кольцо с линейной плотностью положительного заряда λ и радиусом R ; начало системы координат находится в центре кольца

А1. Используя декартовы координаты (x, y, z) , получите электрическое поле кольца в окрестности его центра с точностью до первого порядка по x/R , y/R , и z/R .

Найдите частоту малых колебаний заряженной частицы около центра кольца в направлениях, для которых существует устойчивое равновесие.

Для создания динамического равновесия мы применим переменные поля. Плотность заряда зависит от времени как $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$. Переменные λ_0 , u , и Ω заданы. Эффектами излучения пренебрегайте. Уравнение движения для малых смещений от центра кольца вдоль оси z будет иметь вид

$$z'' = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t)z. \quad (*)$$

A2. Выразите a и k через известные параметры.

Для получения приближенного решения уравнения (*) сделайте следующие упрощающие предположения: $a \ll 1$, $\Omega \gg k$ и $a\Omega^2 \gg k^2$. В таких предположениях решение уравнения разбивается на два слагаемых: $z(t) = p(t) + q(t)$, где $p(t)$ – медленно меняющаяся компонента и $q(t)$ – быстро осциллирующая компонента с малой амплитудой и со средним значением, равным нулю (рис. 4). Другими словами, $p(t)$ может быть принято за константу в течение нескольких колебаний $q(t)$.

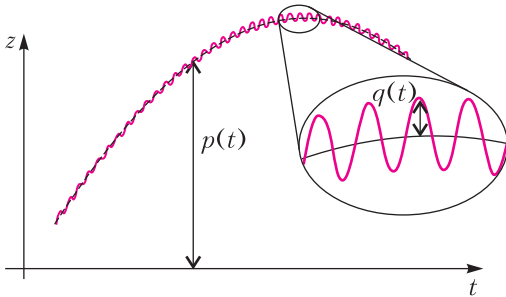


Рис. 4. Типичное решение уравнения движения заряженной частицы: $p(t)$ дает общее движение, $q(t)$ представляет собой маленькие колебания вокруг этой траектории. В эллипсе справа — увеличенная часть этой траектории

A3. Используя приведенные выше предположения, составьте уравнение для $q(t)$. Используйте a , Ω и p . Найдите такое решение этого уравнения, чтобы оно удовлетворяло указанным выше свойствам.

A4. Усредните эффект быстро осциллирующей компоненты и получите эффективное уравнение для $p(t)$. Найдите условие устойчивости равновесия.

Пусть $\lambda_0 = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл/м и $R = 10$ см. Будем удерживать однократно ионизированный атом в k раз более тяжелый, чем атом водорода.

A5. Вычислите k . Оцените наименьшую частоту, необходимую для стабилизации движения этого иона, если $a = 0,04$. Используйте числовые значения, приведенные в конце задачи.

Часть В. Доплеровское охлаждение (4,4 баллов)

Иногда возникает необходимость охладить попавший в ловушку атом или ион. Предположим, что захваченный атом с массой m имеет два энергетических уровня с разностью энергий $E_0 = \hbar\omega_A$. Электроны на нижнем уровне могут поглотить фотон и перейти на более высокий уровень, но через время τ они вернуться на нижний уровень и испустят фотон с частотой, вероятнее всего лежащей в пределах $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$.

B1. Используя принцип неопределенности Гейзенберга, найдите Γ .

По тем же причинам атом также может поглощать фотоны с угловой частотой лазерного излучения ω_L , находящейся в интервале $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$. Будем считать, что ω_L немного меньше, чем ω_A . Для нашего устройства зависимость количества поглощенных фотонов в единицу времени в системе отсчета атома от частоты падающих фотонов приведена на рисунке 5. Поглощенный фотон

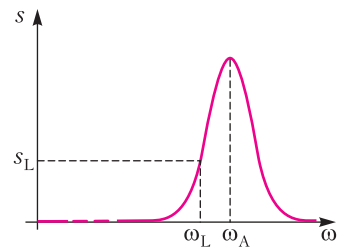


Рис. 5. Поглощенные в единицу времени фотоны в зависимости от частоты; частота, соответствующая разности энергий между двумя атомными уровнями, обозначена символом ω_A , а чуть меньшая частота лазера обозначена ω_L

затем переизлучается в случайном направлении. Чтобы упростить задачу, мы рассмотрим ее в одном измерении, т.е. предположим, что атомы могут двигаться только в направлении x , а лазерный свет светит на них только слева и справа. В системе отсчета

атомов свет имеет большую или меньшую частоту, обусловленную движением атомов. Поскольку скорость v атомов очень мала, мы рассматриваем только члены порядка v/c и игнорируем все члены более высокого порядка. Более того, выполняется условие $m \gg \hbar\omega_A/c^2$, а значит, скорость атома почти не меняется после поглощения фотона. Кроме того, изменение частоты из-за эффекта Доплера настолько мало по сравнению $\omega_A - \omega_L$, что функция для s на приведенном рисунке может быть аппроксимирована линейной:

$$s = s_L + \alpha(\omega - \omega_L),$$

где s – число поглощенных фотонов в единицу времени, s_L – значение s для $\omega = \omega_L$, α – наклон графика в точке ω_L . Частота переизлученного фотона почти равна частоте падающего фотона и в нашем приближении их можно положить равными. Фотон переизлучается с равной вероятностью в положительном и отрицательном направлении оси x . Обратите внимание, что мы рассматриваем процесс в системе отсчета атома.

В2. Атом в ловушке в лабораторной системе отсчета имеет скорость $v = v_x$. В системе отсчета атома вычислите скорости поглощения фотонов, падающих с каждого из двух направлений (обозначены s_+ и s_-), и получаемый импульс в единицу времени в каждом направлении (обозначается π_+ и π_-). Определите эффективную силу, действующую на атом в лабораторной системе отсчета, как функцию от v , $k_L = \omega_L/c$, \hbar и α . Считайте, что $s_L \ll \alpha\omega_L$.

Мы хотим найти самую низкую температуру, которая может быть достигнута с помощью этого метода. Предположим, что скорость конкретного атома уменьшилась ровно до нуля, и в этот момент он поглощает фотон (падающий с любого из двух направлений), а затем переизлучает фотон с почти той же частотой случайным образом в любом из двух направлений. Предположим, что этот процесс происходит один раз в τ единиц времени.

В3. Рассматривая импульс атома после такого процесса для двух возможных исходов, вычислите среднюю мощность, поглощаемую атомом в таких процессах.

В4. Используя выражение для силы, найденное в пункте В2, вычислите мощность потерь. Затем вычислите среднее значение v^2

в равновесии. Используя знания из кинетической теории газов, определите температуру атомов.

В5. Оцените эту температуру для атома, который в 100 раз тяжелее атома водорода. Числовые значения: $\omega_L = 2 \cdot 10^{16}$ рад/с, $\tau = 5 \cdot 10^{-9}$ с и $\alpha = 4$.

- Масса атома водорода $m_H = 1,674 \cdot 10^{-27}$ кг
- Заряд электрона $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
- Диэлектрическая проницаемость вакуума $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
- Постоянная (константа) Больцмана $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
- Постоянная Планка $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

Задача 3. Пульсар «Черная вдова» (10 баллов)

Большое число наблюдаемых звезд являются двойными. В двойной звезде одна или обе компоненты могут быть нейтронными звездами, вращающимися с большой угловой скоростью и излучающими электромагнитные волны. Такие звезды называются пульсарами. Иногда звезда-компаньон теряет свое вещество, которое в виде газа постепенно падает на нейтронную звезду и приводит к увеличению ее массы (рис. 6,а). Таким образом, нейтронная звезда постепенно

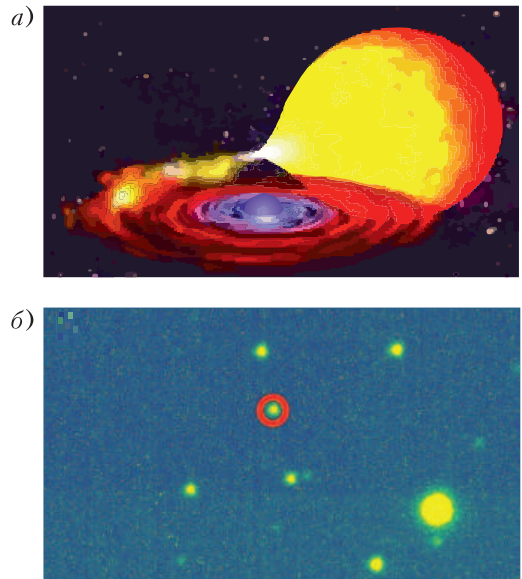


Рис. 6. а) Падение газов звезды-компаньона на нейтронную звезду; б) компаньон нейтронной звезды PSR J2215+5135

поглощает свою звезду-компаньона, из-за чего ее сравнивают с черной вдовой – самкой паука, которая после спаривания съедает самца. В результате нагрева газа, падающего на «Черную вдову», возникает наблюдаемое излучение. Самые тяжелые нейтронные звезды зачастую оказываются «Черными вдовами» и служат для ученых естественными лабораториями для проверки фундаментальных законов физики. На рисунке 6,б показано изображение компаньона нейтронной звезды PSR J2215+5135, полученное 3,4-метровым оптическим телескопом Иранской национальной обсерватории. На этом изображении нейтронная звезда не видна, а видимый свет излучается ее компаньоном.

Часть А. Двойная система (5 баллов)

Рассмотрим простую модель, в которой «Черная вдова» и ее звезда-компаньон представлены двумя точечными массами M_1 и M_2 , движущимися по круговой орбите вокруг общего центра масс. Чтобы исследовать динамику этой системы, перейдем во вращающуюся систему отсчета, в которой оба тела неподвижны. Примем центр масс за начало координат. Предположим, что тела лежат на оси x по разные стороны от начала координат на расстоянии a друг от друга и масса M_1 лежит на отрицательной полуоси. В произвольной точке (x, y) в плоскости орбиты эффективный потенциал $\varphi(x, y)$ единичной пробной массы равен сумме гравитационных потенциалов двух точечных масс и центростремительного потенциала.

A1. Выразите $\varphi(x, y)$ через M_1, M_2, G и a .

A2. Предполагая, что $M_1 > M_2$, постройте качественный график функции $\varphi(x, 0)$.

Пусть $M_2 = M_1/3$ (только в пункте A3) и звезда M_2 окружена разреженным газом. Масса этого газа мала по сравнению с массами звезд, поэтому его гравитационным влиянием можно пренебречь. Если газовое облако превысит некоторый критический размер, газ начнет перетекать на M_1 . Предположим, что перетекание начинается в точке $x = x_0$ на оси x .

A3. С помощью калькулятора вычислите значение x_0/a с точностью до двух значащих цифр.

Пусть период вращения звезд вокруг центра масс равен P , а газ течет от M_2 к M_1 с очень малой скоростью $dM_1/dt = \beta$. Ско-

рость перетекания настолько мала, что в течение одного периода вращения расстояние между звездами можно считать постоянным. При этом на больших масштабах времени расстояние между компонентами меняется, но движение компонент остается круговым.

A4. Выразите скорость изменения величин a и P через β, M_1, M_2, G и a .

Газ, отделяющийся от M_2 , образует диск, вращающийся вокруг M_1 , в котором газ нагревается за счет трения. Теряя энергию, газ по спирали медленно перемещается к центру диска и, наконец, падает на M_1 . В равновесном состоянии масса перемещается с постоянной скоростью β от M_2 к диску и от диска к M_1 . При этом нагретый диск испускает тепловое излучение как абсолютно черное тело. Поскольку диск формируется очень близко к нейтронной звезде, гравитационным влиянием M_2 при рассмотрении диска можно пренебречь. Пренебрегите также теплоемкостью газа.

A5. Определите температуру диска на расстоянии r от центра звезды M_1 . Выразите ответ через r, β, M_1, G и σ (постоянная Стефана–Больцмана).

В бинарной системе PSR J2215+5135 масса нейтронной звезды составляет $M_{NS} = 2,27M_{\odot}$, а масса звезды-компаньона – $M_S = 0,33M_{\odot}$, где $M_{\odot} = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца. Период вращения составляет $P = 4,14$ ч, постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/($m^2 \cdot K^4$), гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²). Предположим, что скорость потока массы к нейтронной звезде составляет $\beta = 9 \cdot 10^{-10}$ M_{\odot} /год.

A6. Вычислите температуру диска на расстоянии $r = a/10$. Ответ приведите в кельвинах.

Предположим, что после внезапного взрыва звезда M_1 выбрасывает часть своей массы из двойной системы с очень большой скоростью и ее масса становится равной M_1^* . Пусть после взрыва относительная скорость движения M_1^* и M_2 равна v^* .

A7. При каком максимальном значении v^* двойная система останется гравитационно связанной после взрыва? Какому минимальному значению M_1^* это соответствует, если разлет вещества после взрыва происходил изотропно? Выразите ответы через M_1^*, M_2, G и a .

Часть В. Анализ устойчивости звезды (5 баллов)

В этой части мы исследуем устойчивость одиночной звезды. Рассмотрим звезду, состоящую из вещества с уравнением состояния $p = K\rho^\gamma$, где K и γ – некоторые постоянные. Обозначим давление и плотность на расстоянии r_0 через p_c и ρ_c .

В1. Выразите ускорение свободного падения $g(r)$ на малом расстоянии от центра звезды через r и постоянные G и ρ_c .

В2. Выведите дифференциальное уравнение, описывающее равновесное распределение $\rho(r)$. Запишите его в следующей форме:

$$\frac{d}{dr} \left(h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right) + h_2(r)\rho = 0.$$

Найдите функции h_1 и h_2 .

В3. С помощью метода размерностей получите выражение для величины $r_0 = G^l p_c^m \rho_c^n$ с размерностью длины.

В4. Перепишите дифференциальное уравнение, полученное в пункте В2, в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \left(A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right) + A_2(x)u(x) = 0,$$

где $x = r/r_0$ и $u = \rho/\rho_c$. Найдите функции $A_1(u, x)$ и $A_2(x)$.

В5. При $\gamma = 2$ это уравнение можно решить точно, если ввести $u(x) = f(x)/x$. Найдите $f(x)$.

На рисунке 7 приведен график зависимости du/dx от x для некоторой звезды.

В6. Рассматривая график в окрестности точки $x = 0$, вычислите γ с точностью до 3 значащих цифр. Для снятия данных с графика вы можете использовать выданную линейку.

Чтобы исследовать устойчивость звезды, предположим, что она немного отклоняется от своего равновесного состояния: сферическая оболочка, которая находилась в равновесии на расстоянии r от центра, теперь имеет радиус \tilde{r} . Аналогично, величины g , p и ρ становятся равными \tilde{g} , \tilde{p} и $\tilde{\rho}$ соответственно. Для простоты будем рассматривать

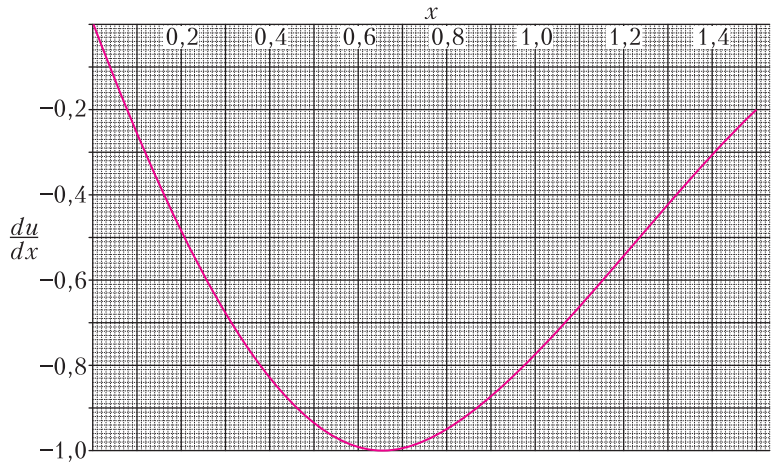


Рис. 7. График зависимости du/dx от x

только малые r вблизи центра звезды, для которых можно считать $\tilde{r} = r(1 + \epsilon t)$, где $\epsilon t \ll 1$.

В7. Выразите $\tilde{\rho}$ и \tilde{g} через ρ и g с точностью до первого порядка по ϵ .

В8. Используя второй закон Ньютона для элемента вещества на равновесном расстоянии r , выразите $d^2\tilde{r}/dt^2$ через \tilde{g} , $\tilde{\rho}$, K , γ и $\partial\tilde{\rho}/\partial\tilde{r}$. (Под $\partial\tilde{\rho}/\partial\tilde{r}$ подразумевается производная $\tilde{\rho}$ по \tilde{r} при постоянном t .)

В9. Получите выражение для $d^2\epsilon/dt^2$. Выразите ответ через ϵ и константы, данные в условии задачи. Найдите минимальное значение γ , при котором равновесие звезды будет устойчиво, а также получите выражение для угловой частоты колебаний звезды.

Публикацию подготовил М.Осин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №10 за 2024 г.)

5. Нет.

Пусть так могло быть. Тогда у любого жителя один сосед – правдолюб, а другой – лжец. Значит, жители, стоящие через одного, чередуются. Если занумеровать жителей по кругу, начиная с правдолюб, то 1-й – правдолюб, 3-й – лжец, 5-й – правдолюб, 7-й – лжец, и так далее. Так, 29-й – тоже правдолюб, но тогда у 30-го жителя одинаковые соседи, противоречие.

6. а) Да; б) нет.

а) Разделим доску на 4 квадрата 4×4 и в каждом с помощью двух квадратов 3×3 перекрасим все черные клетки в белый.

б) Запишем в белые клетки исходной доски белые нули, а в черные клетки – черные единицы. Каждое перекрашивание клеток в вершинах квадрата 2×2 или 4×4 меняет цвета двух нулей и двух единиц, а в вершинах квадрата 3×3 меняет цвет либо четырех нулей, либо четырех единиц. Значит, любое перекрашивание меняет цвет четного количества нулей. С другой стороны, каждый ноль, который в итоге остался белым, поменял цвет четное число раз, а ноль, в итоге ставший черным, – нечетное число раз. Исходно было 32 белых нуля, а в конце один из них должен стать черным, т.е. число перемен цвета среди нулей было нечетным – противоречие.

7. Рассмотрим две точки A, B этого множества на наибольшем расстоянии друг от друга. Тогда для любой точки C в треугольнике ABC сторона AB является наибольшей, значит, $\angle ACB \geq 60^\circ$. Следовательно, $\alpha \geq 60^\circ$.

Теперь рассмотрим точки A, B этого множества на наименьшем расстоянии. Рассуждая аналогично, получим, что $\alpha \leq 60^\circ$.

Значение $\alpha = 60^\circ$ действительно возможно: возьмем множество из трех точек, являющихся вершинами правильного треугольника.

8. Будем называть клетку *в-клеткой*, если она расположена в вертикально расположенной полоске, и *г-клеткой*, если она расположена в горизонтально расположенной полоске.

Предположим, что есть путь от верхней стороны прямоугольника до нижней по г-клеткам и что есть путь от левой стороны до правой по в-клеткам. Но они должны пересечься – получаем противоречие. Поэтому одного из таких путей нет. Не умаляя общности, будем считать, что нет пути от верхней стороны до нижней по г-клеткам. Докажем, что есть путь по красным клеткам между двумя верхними углами.

Будем называть сторону клетки *отмеченной перегородкой*, если она является короткой стороной одной из полосок. Покажем, что есть путь между двумя верхними углами по отмеченным перегородкам (переходим по узлам – каждый шаг совершается из вершины клетки в соседнюю вершину).

Заметим, что если в-клетка и г-клетка являются соседями по стороне, то их общая сторона является отмеченной перегородкой.

Будем называть множество клеток *связным*, если есть путь между любыми двумя клетками этого множества (переходим из клетки в соседнюю по стороне) по другим клеткам этого множества.

Рассмотрим связанное множество г-клеток, примыкающее к верхней стороне и максимальное по включению, т.е. в которое нельзя добавить никакую другую г-клетку с сохранением условия. Пример – на рисунке 1. Рассмотренное множество клеток выделено желтым цветом. Отмечен-

													A				B					
В	В	В	В	Г	Г	Г	В	В	Г	Г	В	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	В	В	В	Г	Г	В	В	Г	Г	В	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В
В	Г	Г	Г	В	Г	Г	В	В	Г	Г	В	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	В	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	
В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	
В	Г	Г	Г	В	Г	Г	Г	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	В	В	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	
Г	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	
Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	
Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	Г	Г	Г	В	В	В	В	В	В	В	В	В	

Рис. 1

ные перегородки выделены жирными линиями. Пусть самая левая из вершин клеток этого множества, лежащая на верхней стороне, это точка A ; и аналогично, самая правая – точка B . Тогда граница этого множества состоит из отмеченных перегородок, а также перегородок, лежащих на верхней стороне прямоугольника. Нет пути между верхней и нижней стороной по г-клеткам, поэтому это множество клеток не может примыкать к нижней стороне. Значит, от A до B можно пройти по границе этого множества клеток, проходя по отмеченным перегородкам.

Теперь покажем, как пройти из левого верхнего угла в правый верхний по отмеченным перегородкам. Идем слева направо по верхней стороне, пока на ней есть отмеченные перегородки. Когда они кончились, значит, мы подошли к левой

точке (A в обозначениях выше) связного множества г-клеток. Пройдем от нее по границе этого множества до правой точки (B). Затем идем дальше слева направо по верхней стороне и так далее, пока не придем в правый верхний угол. На рисунке 2 синим цветом схематично изображен путь, который может получиться.

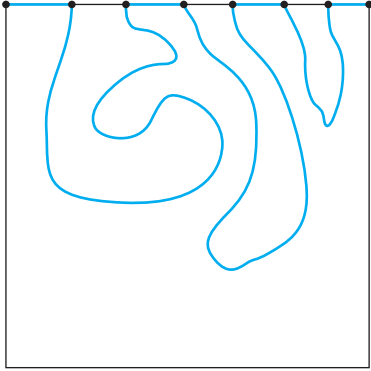


Рис. 2

Итак, мы показали существование пути по отмеченным перегородкам, а нам нужно показать существование пути по красным клеткам. Отмеченная перегородка – это короткая сторона полоски, поэтому к ней примыкает хотя бы одна красная клетка. Покажем, что по этим красным клеткам, соседним с перегородками, можно пройти.

Если имеет место случай а) на рисунке 3 (клетки 1 и 2 – красные), то есть переход между клетками 1 и 2 – красные), то есть переход между клетками 1 и 2.

Если имеет место случай б) (клетки 1 и 4 – красные), то можно показать, что клетка 2 или 3 тоже красная, тогда есть переход из 1 в 4 через 2 или 3.

В случае в) – когда происходит поворот, то клетка 1 красная.

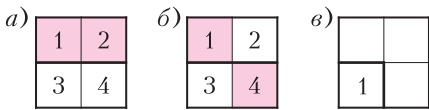


Рис. 3

Таким образом, можно пройти по красным клеткам, соседним с отмеченными отрезками пути между углами.

Об инвариантах Понселе и пучках окружностей

1. Пусть A_0, B_0 – положения жуков в один момент времени, A_1, B_1 – в другой момент времени, A_2, B_2 – в третий. Тогда $\text{pow}(A_0, (A_1SB_1)) = \overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0S}$. Аналогично выразив другие степени, получаем

$\frac{\text{pow}(A_0, (A_1SB_1))}{\text{pow}(A_0, (A_2SB_2))} = \frac{\overline{A_0A_1}}{A_0A_2}$, что равно (из-за равномерного движения жуков) $\frac{\overline{B_0B_1}}{B_0B_2}$, или $\frac{\text{pow}(B_0, (A_1SB_1))}{\text{pow}(B_0, (A_2SB_2))}$. По лемме о соосных окружностях тогда окружность (A_0SB_0) соосна с (A_1SB_1) и (A_2SB_2) .

Конечно, есть и другие решения (без применения леммы о соосных окружностях), использующие, например, поворотную гомотегию и точку Микеля (на самом деле все прямые вида AB имеют общую точку Микеля).

2. Имеем $\text{pow}(M, \omega_1) = \overline{MA_1} \cdot \overline{MP}$. Аналогично выразив $\text{pow}(M, \omega_2)$, имеем $\frac{\text{pow}(M, \omega_1)}{\text{pow}(M, \omega_2)} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_2}} = -\lambda$.

Для стандартных уравнений $f_i = 0$ это примет вид $f_1 + \lambda f_2 = 0$.

Элементарное решение можно получить, доказав постоянство угла между QM и PM , пользуясь подобием всех треугольников QA_1A_2 .

3. а) Решение следует из свойства биссектрисы и леммы о соосных окружностях:

$$\frac{AL^2}{AN^2} = \frac{\text{pow}(A, L)}{\text{pow}(A, \omega)} = \frac{\text{pow}(B, L)}{\text{pow}(B, \omega)} = \frac{BL^2}{BN^2}.$$

б) Рассмотрим еще одну окружность из того же пучка, касающуюся отрезка AB в точке N . Тогда, согласно а), LN – общая биссектриса углов ALB и CLD .

4. Если f_i – стандартные уравнения ω_i , то уравнения γ_i будут иметь вид $g_1 = f_2 - \lambda_1 f_3 = 0$, $g_2 = f_3 - \lambda_2 f_1 = 0$, $g_3 = f_1 - \lambda_3 f_2 = 0$. Легко проверить, что $g_1 + \lambda_1 g_2 + \lambda_1 \lambda_2 g_3 = 0$.

5. Достаточно показать, что каждый из указанных ортоцентров имеет одну и ту же степень относительно данных окружностей $\omega_a, \omega_b, \omega_c$. Пусть, скажем, в треугольнике ABC высоты AH_a, BH_b, CH_c пересекаются в точке H . Тогда $H_a \in \omega_a$ и $\text{pow}(H, \omega_a) = \overline{HA} \cdot \overline{HH_a}$. Аналогично выражается $\text{pow}(H, \omega_b)$. Но $\overline{HA} \cdot \overline{HH_a} = \overline{HB} \cdot \overline{HH_b}$, поскольку A, B, H_a, H_b лежат на одной окружности (с диаметром AB).

6. Имеем

$$\frac{\text{pow}(C_x, \alpha)}{\text{pow}(C_x, \beta)} = \frac{\overline{C_xA_x} \cdot \overline{C_xA'_x}}{C_xB_x \cdot \overline{C_xB'_x}} = \frac{\overline{C_xA_x}}{C_xB'_x} \cdot \frac{\overline{C_xA'_x}}{C_xB_x} = \frac{\overline{CA}}{C'B} \cdot \frac{\overline{CA'}}{C'B'}$$

То же выражение получаем и для $\frac{\text{pow}(C_y, \alpha)}{\text{pow}(C_y, \beta)}$. Аналогично,

$$\frac{\text{pow}(C'_x, \alpha)}{\text{pow}(C'_x, \beta)} = \frac{\text{pow}(C'_y, \alpha)}{\text{pow}(C'_y, \beta)} = \frac{\overline{C'A}}{C'B} \cdot \frac{\overline{C'A'}}{C'B'}$$

Но для произвольного четырехсторонника верно равенство $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}$ (его несложно вывести, пользуясь теоремой синусов). Из леммы о соосных окружностях получается, что точки C_x, C'_x, C_y, C'_y лежат на одной окружности, соосной с α и β .

7. Пусть $M \in \Omega$ – произвольная точка. По лемме о соосных окружностях, $\frac{A_1T_2^2}{A_1T_3^2} = \frac{pow(A_1, \omega_2)}{pow(A_1, \omega_3)} = \frac{pow(M, \omega_2)}{pow(M, \omega_3)}$. Видим, что произведение трех аналогичных выражений $\frac{A_1T_2^2}{A_1T_3^2}, \frac{A_2T_3^2}{A_2T_1^2}, \frac{A_3T_1^2}{A_3T_2^2}$ равно 1, т.е. выполнено условие теоремы Чевы либо теоремы Менелая.

8. Это сразу следует из варианта ключевой леммы для (соосных) касающихся друг друга окружностей.

9. Доказательство повторяет доказательство теоремы Понселе, поскольку используемая в нем окружность γ однозначно задается принадлежностью пучку и касанием луча A_0B_0 (и не зависит от выбора окружности ω_i из пучка П).

10. а) Рассмотрим окружность ω_3 из пучка П такую, что луч A_2A_0 касается ω_3 для какого-то фиксированного положения точки A_0 . Тогда для окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ломаная $A_0A_1A_2A_0$ будет замкнутой траекторией обобщенного процесса Понселе. Но, согласно теореме Понселе о пучке окружностей, тогда любая трехзвенная траектория будет замкнутой. Значит, все лучи A_2A_0 будут касаться ω_3 .

б) Выводится из а) индукцией по k .

в) Согласно б), все лучи A_iA_{i+n} должны касаться фиксированной окружности γ из пучка, порожденного Ω и ω . В частности, лучи A_0A_n и A_nA_0 касаются γ . Но это возможно, только если γ – нулевого радиуса, т.е. предельная точка пучка.

11. а) Легко видеть, что $g_\omega g_{\bar{\omega}} = g_\Omega$ – тождественное преобразование.

б) Это переформулировка задачи 10, а).

в) Достаточно повторить доказательство ключевой леммы; по сути в ней было доказано, что $g_\omega g_\gamma = g_\gamma g_\omega$.

г) Выполнены все свойства группы преобразований:

ассоциативность следует из ассоциативности композиции $(g_{\omega_1} g_{\omega_2}) g_{\omega_3} = g_{\omega_1} (g_{\omega_2} g_{\omega_3})$;

коммутативность показана в пункте в);

есть *нейтральный элемент* Ω и, согласно а), для каждого ω есть *противоположный элемент* $\bar{\omega}$, так что $\bar{\omega} + \omega = \Omega$.

Условие заикливания: $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \Omega$.

12. Следует из симметрии: есть траектории Понселе, симметричные относительно OI ; с другой стороны, знаем, что G – инвариант.

13. При одной из двух гомотетий, переводящих ω в Ω , точки касания X_i перейдут в данные середины дуг. Центр масс останется на OI , так как центр гомотетии лежит на OI .

14. а) Сумма $\sum_{i=1}^n \overline{IX_i}$ постоянна (так как центр масс точек X_i – инвариант). Но она равна $-r \sum_{i=1}^n \bar{n}_i$. (Вспомним, что в задаче 12 мы уже показали, что $\bar{n} \parallel \overline{OI}$. По-другому это можно вывести из того, что сумма $\sum_{i=1}^n \overline{OI} \cdot \bar{e}_i$ алгебраических проекций \overline{OI} на направления $\overline{A_{i-1}A_i}$ – нулевая.)

б) Имеем $f(M) = f(I) + \sum_{i=1}^n \overline{IM} \cdot \bar{n}_i = f(I) + \overline{IM} \cdot \bar{n}$. Но, согласно а), \bar{n} постоянен; $f(I) = nr$ – тоже константа.

в) Заметим, что $\rho(O, A_{i-1}A_i) = R \cos \angle A_{i-1}A_{i+1}A_i$. Теперь требуемое следует из того, что $f(O)$ – инвариант. Вторая сумма тоже пропорциональна $f(O)$, но для процесса Понселе $A_0A_2A_4 \dots$

15. а) Мы знаем, что G постоянна. Тогда инвариантность q следует из того, что $q(I) = nr^2$ – не зависит от выбора траектории Понселе.

б) Пусть L – предельная точка пучка, порожденного Ω и ω , лежащая внутри ω . Тогда точки X_i, L, X_{i+m} лежат на одной прямой – биссектрисе угла между прямыми $A_{i-1}A_{i+m-1}$ и A_iA_{i+m} . Поэтому из подобия $\Delta A_{i-1}LA_i \sim \Delta A_{i+m}LA_{i+m-1}$ следует

$$\frac{A_{i-1}A_i}{A_{i+m-1}A_{i+m}} = \frac{LX_i}{LX_{i+m}}, \text{ что равно } \frac{LX_i^2}{LX_i \cdot LX_{i+m}} = \frac{LX_i^2}{-pow(L, \omega)}$$

Суммируя по i , получаем константу, так как, согласно пункту а), $q(L) = \text{const}$.

16. а) Так же, как это сделано в доказательстве утверждения о центре масс, показывается, что векторы $m_i \overline{X_i Y_i}$ пропорциональны $\overline{P_{i-1} P_i}$ (с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от i).

б) Поменяем местами в процессе Понселе окружности ω_1 и ω_2 , тогда ломаная $A_0A_1A_2$ заменится на A_0KA_2 , так что луч A_0K касается ω_2 в точке Z_2 и луч KA_2 касается ω_1 в точке Z_1 . Получаем ситуацию, аналогичную рисунку 3 статьи.

Из равенства $\frac{X_1Z_1}{X_2Z_2} = \frac{m_2}{m_1}$ будет следовать, что центр двух точечных масс $(X_1, m_1), (X_2, m_2)$ совпадает с центром масс $(Z_1, m_1), (Z_2, m_2)$. Видим, что от обмена двух соседних окружностей в процессе Понселе центр масс не меняется.

в) В пункте б) мы видели, что центр масс G будет одной и той же точкой для процессов Понселе $\omega_1, \dots, \omega_n$ и $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$. Выбрав начальную точку A_0 на оси симметрии пучка, мы понимаем, что для процессов Понселе $\omega_1, \dots, \omega_n$ и $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$ центры масс будут симметричны относительно оси. Но траектория для $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$, проходящая в обратном порядке, является траекторией для процесса $\omega_1, \dots, \omega_n$. Значит, G симметрична сама себе относительно оси.

17. Указание. а) Будем считать, что w, f, g, t – не обозначения, а левые части задающих уравнений, т.е. наши кривые – это $w = 0, f = 0, g = 0, t = 0$. Если $t = \lambda f + \mu g$ и $f' = f + \alpha w$, то подойдет $g' = g + \beta w$, где β выбрано так, что $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$. б) В обозначениях рисунка 3 статьи положим, что w – окружность Ω , f – объединение прямых A_0A_1 и B_0B_1 , g – окружность ω , t – квадрика, заданная уравнением прямой X_1Y_1 , возведенным в квадрат, f' – объединение прямых A_0B_0 и A_1B_1 , g' – окружность γ .

Как искусственный интеллект игру придумывал

		2
		0
2	0	

Рис. 4

1. Данное условие является необходимым, так как каждая из сумм – количество закрасненных на доске клеток. Пример на рисунке 4 показывает, что условие не является достаточным.

2. Заметим, что существует следующее решение поставленной задачи (рис. 5). На соответствующей раскраске вершины верхнего левого квадрата 3×3 образуют «шахматную четверку». Таким образом, решение не единственно, так как эту четверку можно инвертировать. В существовании решения можно было также убедиться, проверив соответствующее необходимое и достаточное условие. Рассмотрим максимальную раскраску (рис. 6). Имеем $r_1 = 3, r_2 = 3, r_3 = 3, r_4 = 1, r_5 = 3$;

					3
					3
					3
					1
					3
2	3	3	1	4	

Рис. 5

					3
					3
					3
					1
					3
5	4	4	0	0	

Рис. 6

$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 3, s_4 = 1, s_5 = 4; c_1 = 5, c_2 = 4, c_3 = 4, c_4 = 0, c_5 = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что все неравенства выполняются и $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$.

2	1	1	2		2	1	1	2
1	2	1	2		1	2	1	2
1	1	2	2		1	1	2	2
2	2	2			2	2	2	

Рис. 7

- 3. Например, может возникнуть следующая «неединственность» (рис.7).
- 4. Решение не единственно (рис.8).

7	7	6	1	6	8	8	35
6	5	5	4	5	9	3	23
9	5	2	4	3	4	7	27
3	6	8	2	5	9	4	13
6	6	9	2	3	6	4	15
7	5	1	4	9	7	6	23
4	2	6	2	4	4	9	15
9	23	22	16	19	28	34	

7	7	6	1	6	8	8	35
6	5	5	4	5	9	3	23
9	5	2	4	3	4	7	27
3	6	8	2	5	9	4	13
6	6	9	2	3	6	4	15
7	5	1	4	9	7	6	23
4	2	6	2	4	4	9	15
9	23	22	16	19	28	34	

Рис. 8

Международная физическая олимпиада 2024 года

Задача 1

A1. $S_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 = 1,35 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

A2. $T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma}\right)^{1/4} = \sqrt{\frac{R_S}{2d}} T_S = 278 \text{ К}$.

A3. $f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x$.

A4. $x_m = \{4,96; 4,97\}, b = (2,89; 2,90) \cdot 10^6 \text{ нм} \cdot \text{К}$.

A5. $\lambda_{\max}^S = (5,01; 5,02) \cdot 10^2 \text{ нм}$,

$\lambda_{\max}^E = 1,04 \cdot 10^4 \text{ нм}$.

A6. $\gamma = \left(\frac{d}{R_S}\right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S}\right)^5 = \left(\frac{d}{R_S}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{\max}^S}{\lambda_{\max}^E}\right)^5 = (1,20; 1,21) \cdot 10^{-2}$.

$$\mathbf{B1.} T_E = \left(\frac{(1-r_A)S_0/2}{\sigma} \right)^{1/4} = 3,07 \cdot 10^2 \text{ K,}$$

$$T_A = \left(\frac{(1-r_A)S_0/4}{\sigma} \right)^{1/4} = 2,58 \cdot 10^2 \text{ K.}$$

$$\mathbf{B2.} \alpha = r_A + \frac{(1-r_A)^2 r_E}{1-r_A r_E} = 3,13 \cdot 10^{-1}.$$

$$\mathbf{B3.} T_E = \left(\frac{(1-\alpha)S_0}{2\sigma(2-\varepsilon)} \right)^{1/4}, \quad \varepsilon = (8,07; 8,11) \cdot 10^{-1}.$$

$$\mathbf{B4.} \frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{1}{4} \left(\frac{(1-\alpha)S_0}{2\sigma(2-\varepsilon)} \right)^{1/4} \frac{1}{2-\varepsilon},$$

$$\delta T_E = (4,87; 4,92) \cdot 10^{-1} \text{ K.}$$

$$\mathbf{B5.} \varepsilon = \frac{\sigma T_E^4 - (1-\alpha)S_0/4}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = (8,47; 8,52) \cdot 10^{-1},$$

$$k = \frac{\varepsilon \sigma (2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A} = (3,57; 3,66) \cdot 10^{-1} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{K).}$$

$$\mathbf{B6.} \varepsilon \left(\frac{1}{T_E - T_A} + \frac{4T_E^3}{2T_A^4 - T_E^4} \right) \frac{dT_E}{d\varepsilon} =$$

$$= 1 + \varepsilon \left(\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right) \frac{dT_A}{d\varepsilon},$$

$$1 + \varepsilon \left(\frac{4T_E^3}{T_E^4 - T_A^4} - \frac{4\sigma T_E^3}{\sigma T_E^4 - (1-\alpha)S_0/4} \right) \frac{dT_E}{d\varepsilon} =$$

$$= \frac{4T_A^3}{T_E^4 - T_A^4} \frac{dT_A}{d\varepsilon},$$

$$\delta T_E = (5,21; 5,28) \cdot 10^{-1} \text{ K.}$$

Задача 2

$$\mathbf{A1.} \vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0 R^2} (-x, -y, 2z),$$

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0 R^2 m}}.$$

$$\mathbf{A2.} k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\varepsilon_0 R^2 m}}, \quad a = \frac{Qu}{2\varepsilon_0 R^2 m \Omega^2}.$$

$$\mathbf{A3.} q^*(t) = pa\Omega^2 \cos \Omega t, \quad q(t) = -pa \cos \Omega t.$$

$$\mathbf{A4.} p^*(t) = \left(k^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \right) p, \quad \Omega > \sqrt{2} \frac{k}{a}.$$

$$\mathbf{A5.} k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\varepsilon_0 R^2 m}} = 2 \cdot 10^5 \text{ рад/с,}$$

$$\Omega_{\min} = 7 \cdot 10^6 \text{ рад/с.}$$

$$\mathbf{B1.} \Gamma = \frac{1}{\tau}.$$

$$\mathbf{B2.} s_+ = s_L + \alpha \omega_L \frac{v}{c}, \quad s_- = s_L - \alpha \omega_L \frac{v}{c},$$

$$\pi_+ = s_+ (-\hbar k_+), \quad \pi_- = s_- (+\hbar k_-), \quad F = -(2\alpha \hbar k_L^2) v.$$

$$\mathbf{B3.} P_{\text{cp}} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

$$\mathbf{B4.} P_{\text{пор}} = -2\alpha \hbar k_L^2 v^2, \quad (v^2)_{\text{cp}} = \frac{\hbar \Gamma}{2\alpha m}, \quad T = \frac{\hbar \Gamma}{2\alpha k_B}.$$

$$\mathbf{B5.} T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K.}$$

Задача 3

$$\mathbf{A1.} \varphi(x, y) = - \frac{GM_1}{\sqrt{\left(x + \frac{M_2}{(M_1 + M_2)} a \right)^2 + y^2}} -$$

$$- \frac{GM_2}{\sqrt{\left(x - \frac{M_1}{(M_1 + M_2)} a \right)^2 + y^2}} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} (x^2 + y^2).$$

A2. См. рис. 9.

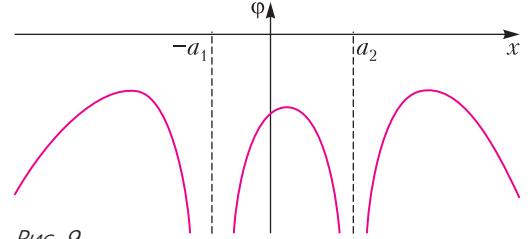


Рис. 9

$$\mathbf{A3.} \frac{x_0}{a} \approx 0,36.$$

$$\mathbf{A4.} a' = -2\beta a \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2} \right),$$

$$P' = -6\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \beta \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2} \right).$$

$$\mathbf{A5.} T = \left(\frac{GM_1 \beta}{8\pi \sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

$$\mathbf{A6.} T = 9 \cdot 10^3 \text{ K.}$$

$$\mathbf{A7.} v^* < \sqrt{\frac{2G(M_1^* + M_2)}{a}}, \quad \frac{M_1 - M_2}{2} < M_1^*.$$

$$\mathbf{B1.} g(r) = - \frac{4\pi G \rho_c r}{3}.$$

$$\mathbf{B2.} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{4\pi G r^2}{K\gamma} \rho(r) = 0,$$

$$h_1(\rho, r) = r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2(r) = \frac{4\pi G r^2}{K\gamma}.$$

$$\mathbf{B3.} r_0 = G^{-1/2} p_c^{1/2} \rho_c^{-1}.$$

$$\mathbf{B4.} \frac{d}{dx} \left(x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + \frac{4\pi x^2}{\gamma} u = 0,$$

$$A_1(u, x) = x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = \frac{4\pi x^2}{\gamma}.$$

$$\mathbf{B5.} f(x) = \frac{\sin \sqrt{2\pi} x}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\mathbf{B6.} \gamma \in [1,64; 1,70].$$

$$\mathbf{B7.} \tilde{\rho} = \rho(1 - 3\varepsilon), \quad \tilde{g} = g(1 - 2\varepsilon).$$

$$\mathbf{B8.} \frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K\gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

$$\mathbf{B9.} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = - \frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)\varepsilon, \quad \gamma > \frac{4}{3},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)}.$$

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

Физика

(см. «Квант» №11-12 за 2024 г.)

10 класс

1. 1) Следуем второму закону Ньютона и определению веса:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \quad \vec{P} = -\vec{N}, \quad P = N = mg\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{gR}\right)^2},$$

$$\delta = \frac{P - mg}{mg} \cdot 100\% = \left(\sqrt{1 + \frac{v^2}{gR}} - 1\right) \cdot 100\% \approx 28\%.$$

2) Скорость правого самолета $\vec{v} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{u}$, $v_{\text{пер}} = \omega(L - R)$, скорости \vec{v} и $\vec{v}_{\text{пер}}$ антипараллельны. Тогда

$$u = \omega(L - R) + v = \frac{v}{R}L = 200 \text{ м/с}, \quad \vec{u} \uparrow \vec{v}.$$

2. 1) Наибольшая продолжительность полета наблюдается в случае $v_0 \uparrow \downarrow \vec{g}$, тогда

$$v_0 = \frac{gT}{2} = 45 \text{ м/с}.$$

2) За время полета T перемещение осколка, упавшего на склон, $\vec{r}(T) = \vec{v}_0T + \frac{\vec{g}T^2}{2}$. Изобразим эти векторы на рисунке 10. Проекция векторов

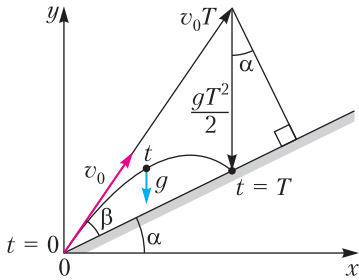


Рис. 10

\vec{v}_0T и $\frac{\vec{g}T^2}{2}$ на направление нормали к склону равны по величине:

$$v_0T \sin \beta = \frac{gT^2}{2} \cos \alpha.$$

Отсюда находим продолжительность полета:

$$T = \frac{2v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}.$$

Дальность s полета равна алгебраической сумме проекций векторов \vec{v}_0T и $\frac{\vec{g}T^2}{2}$ на склон:

$$s = v_0T \cos \beta - \frac{gT^2}{2} \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} (\sin(\alpha + 2\beta) - \sin \alpha).$$

Отсюда следует, что наибольшей дальности соответствует такой угол β , при котором множитель в скобках принимает наибольшее значение:

$$\sin(\alpha + 2\beta) = 1, \quad \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

т.е. наибольшая дальность достигается в том случае, когда вектор начальной скорости направлен по биссектрисе угла между склоном и вертикалью, и она равна

$$s = \frac{v_0^2(1 - \sin \alpha)}{g \cos^2 \alpha} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1}{1 + \sin \alpha} = 135 \text{ м}.$$

3. 1) По данному графику $a_1 = 2 \text{ м/с}^2$, $a_2 = 4 \text{ м/с}^2$, при скольжении шайбы вниз $a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, при скольжении шайбы вверх $a_2 = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. Отсюда

$$\sin \alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g} = 0,3.$$

2) При качении цилиндра с идеальной жидкостью без проскальзывания потеря энергии нет. По закону сохранения энергии приращение кинетической энергии системы (цилиндр катится без проскальзывания, вода движется поступательно) равно убыли потенциальной энергии:

$$mv^2 + \frac{Mv^2}{2} = (m + M)gh,$$

$$v^2 = \frac{m + M}{m + \frac{M}{2}}gh = \frac{1 + n}{1 + 0,5n}gh, \quad n = \frac{M}{m} = 1.$$

Здесь учтено, что при качении однородного тонкостенного цилиндра без проскальзывания его кинетическая энергия равна mv^2 , где v – скорость центра масс цилиндра. Далее,

$$v = \sqrt{\frac{1 + n}{1 + 0,5n}gh} = 2 \text{ м/с}.$$

3) Перемещения h по вертикали и $(x - x_0)$ вдоль наклонной плоскости связаны соотношением

$$h = (x - x_0) \sin \alpha.$$

Тогда

$$v^2 = 2\left(\frac{1 + n}{2 + n}g \sin \alpha\right)(x - x_0).$$

При равнопеременном движении с нулевой начальной скоростью

$$v_x^2 = 2a_x(x - x_0).$$

В рассматриваемом случае движение происходит в положительном направлении x . Отсюда

следует, что центр масс системы движется с ускорением

$$a_x = \frac{1+n}{2+n} g \sin \alpha = 2 \text{ м/с}^2.$$

4) По теореме об изменении импульса системы,

$$\frac{\Delta((m+M)\vec{v})}{\Delta t} = (m+M)\vec{a} = (m+M)\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}}$$

Переходим к проекциям на перпендикуляр к наклонной плоскости и на наклонную плоскость:

$$N = (m+M)g \cos \alpha, \\ (m+M)a_x = (m+M)g \sin \alpha - F_{\text{тр.}}$$

Из приведенных соотношений следует

$$F_{\text{тр.}} = \frac{g \sin \alpha}{2+n} (m+M) \leq \mu N = \mu (m+M)g \cos \alpha.$$

Качение без проскальзывания будет происходить при $\mu \geq \frac{tg \alpha}{2+n} \approx 0,1$.

4. 1) Приращение внутренней энергии в изобарическом процессе

$$U_2 - U_1 = \frac{Q}{\Delta T_1} \Delta T_2.$$

Согласно первому началу термодинамики,

$$Q = U_2 - U_1 + A,$$

отсюда находим работу газа в процессе изобарического расширения:

$$A = Q \left(1 - \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = 200 \text{ Дж.}$$

2) Теплоемкость смеси газов в изохорическом процессе

$$C_V = \nu_1 \cdot 1,5R + \nu_2 \cdot 2,5R = \frac{Q}{\Delta T_1} = 40 \text{ Дж/К.}$$

3) Теплоемкость смеси газов в изобарическом процессе

$$C_p = \nu_1 \cdot 2,5R + \nu_2 \cdot 3,5R = \frac{Q}{\Delta T_2} = 60 \text{ Дж/К.}$$

Отношение теплоемкостей

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\nu_1 \cdot 2,5R + \nu_2 \cdot 3,5R}{\nu_1 \cdot 1,5R + \nu_2 \cdot 2,5R} = \frac{5x+7}{3x+5} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \beta = 1,5,$$

где $x = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{N_r}{N_k}$.

Решение уравнения

$$\frac{5x+7}{3x+5} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \beta = 1,5$$

приводит к ответу

$$\frac{N_r}{N_k} = \frac{5\beta - 7}{5 - 3\beta} = 1.$$

5. 1) В рассматриваемый момент времени скорость и ускорение частицы взаимно перпенди-

кулярны, следовательно, радиус кривизны траектории в малой окрестности

$$R = \frac{v_0^2}{a}.$$

Ускорение обусловлено действием силы

$$F = qE = q \frac{U}{d},$$

так что ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qU}{m d}.$$

С учетом равенства

$$U = \frac{Q}{C}$$

приходим к ответу

$$R = \frac{v_0^2 d C}{\gamma Q}.$$

2) Для ответа на второй вопрос заметим, что срединная плоскость конденсатора – это поверхность нулевого потенциала. В конденсаторе скорость убыли потенциала при смещении от положительно заряженной обкладки к отрицательно заряженной равна

$$E = \frac{U}{d}.$$

Тогда в рассматриваемый момент потенциальная энергия заряженной частицы равна $q \frac{U}{4}$.

Далее, по закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} + q \frac{U}{4} = \frac{mv^2}{2}.$$

Искомая скорость

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{1}{2} \gamma U}.$$

11 класс

1. 1) Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на направление соответствующей наклонной плоскости:

$$mg \sin \alpha_1 - F_1 = ma_1,$$

откуда

$$F_1 = \frac{14}{65} mg.$$

2) Запишем аналогичный закон движения для цилиндра:

$$4mg \sin \alpha_2 - F_2 = 4ma_2$$

и найдем

$$F_2 = \frac{55}{78} mg.$$

3) Для системы из бруска, клина и цилиндра за малое время Δt справедливо равенство

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2.$$

Здесь \vec{F} – сумма внешних сил, $\Delta\vec{p}_1$ и $\Delta\vec{p}_2$ – изменения импульсов бруска и цилиндра соответственно. В проекциях на горизонтальное направление (направо)

$$F_3\Delta t = 4m\Delta v_2 \cos \alpha_2 - m\Delta v_1 \cos \alpha_1.$$

Отсюда

$$F_3 = 4ma_2 \cos \alpha_2 - ma_1 \cos \alpha_1 = \frac{6}{13} mg.$$

2. Можно показать, что для одноатомного идеального газа в линейном процессе 1–2 или 2–1 (рис. 11) максимальная температура достигается при $V_M = V_A/2$, а точка инверсии K в подводе и отводе тепла – при $V_K = 5V_A/8$. При этом в процессе 1–2 на участке 1– K тепло подводится, а на участке K –2 отводится. В процессе 2–1 на участке 2– K тепло подводится, а на участке K –1 отводится.

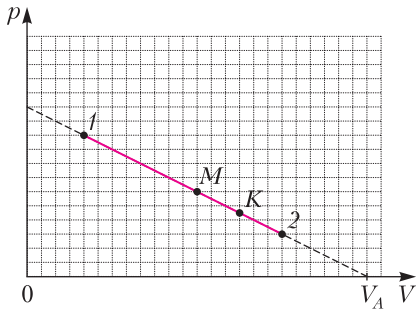


Рис. 11

1) Приращение внутренней энергии в процессе 2–3

$$U_3 - U_2 = \frac{3}{2} p_3 V_3 - \frac{3}{2} p_2 V_2 = -\frac{63}{4} p_0 V_0.$$

Работа за цикл

$$A = \frac{9}{4} p_0 V_0.$$

Тогда

$$\frac{|U_3 - U_2|}{A} = 7.$$

$$2) T_M = \frac{p_M V_M}{\nu R} = \frac{18 p_0 V_0}{\nu R}, \quad T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} = \frac{16 p_0 V_0}{\nu R},$$

$$\frac{T_M}{T_1} = \frac{9}{8}.$$

3) В процессе 1–2 тепло непрерывно подводится (точка инверсии лежит вне 1–2):

$$Q_{12} = \frac{3}{2} p_2 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) = 12 p_0 V_0.$$

В процессе 3–1 объем $V_K = 5V_0$, тогда

$$Q_{3K} = \frac{3}{2} p_K V_K - \frac{3}{2} p_3 V_3 - \frac{1}{2} (p_K + p_3) (V_3 - V_K) = 8 p_0 V_0.$$

$$Q^+ = Q_{12} + Q_{3K} = 20 p_0 V_0.$$

Окончательно

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{9}{80}.$$

3. 1) Разность потенциалов в диэлектрике в ϵ раз меньше, чем в отсутствие диэлектрика:

$$\varphi(x) - \varphi(R) = \frac{1}{\epsilon} \left(k \frac{Q}{x} - k \frac{Q}{R} \right),$$

$$\varphi(R) = k \frac{Q}{R},$$

$$\varphi(x) = k \frac{Q}{R} \left(\epsilon - 1 + \frac{R}{x} \right),$$

$$\varphi\left(\frac{R}{4}\right) = k \frac{Q}{\epsilon R} (\epsilon + 3).$$

2) Пусть $r_1 = \frac{R}{3}$, $r_2 = \frac{2R}{3}$. Тогда

$$\varphi(r_1) = k \frac{Q}{\epsilon R} \left(\epsilon - 1 + \frac{R}{r_1} \right),$$

$$\varphi(r_2) = k \frac{Q}{\epsilon R} \left(\epsilon - 1 + \frac{R}{r_2} \right),$$

$$\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)} = \frac{\epsilon - 1 + R/r_1}{\epsilon - 1 + R/r_2} = \frac{\epsilon + 2}{\epsilon + 1/2}.$$

Используя график, получаем

$$\frac{4}{3} = \frac{\epsilon + 2}{\epsilon + 1/2}, \quad \epsilon = 4.$$

$$4. 1) -n_1 \frac{\Delta B}{\Delta t} S - L_1 \frac{\Delta I}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0, \quad \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right| = \frac{n_1 \alpha S}{L_1 + L_2} = \frac{n \alpha S}{5L}.$$

2) Выберем положительное направление тока так, чтобы поток внешнего поля через L_1 был положительным. Тогда поток внешнего поля через L_2 будет отрицательным. Из второго правила Кирхгофа можно получить, что сумма магнитных потоков сохраняется:

$$B_0 n_1 S - 2B_0 n_2 S = \frac{B_0}{2} n_1 S - \frac{2B_0}{3} n_2 S + L_1 I + L_2 I.$$

$$\text{Отсюда } I = -\frac{13 B_0 n S}{30 L}, \quad |I| = \frac{13 B_0 n S}{30 L}.$$

(Типичный неверный ответ $|I| = \frac{19 B_0 n S}{30 L}$.)

5. Ход лучей показан на рисунке 12, S_1 – изображение в линзе от S , S_2 – изображение в зеркале от S_1 , S_3 – изображение в линзе от S_2 , причем S_3 случайно совпало с S_1 , так как по формуле линзы $\frac{1}{h/3} + \frac{1}{f} = \frac{1}{h/2}$. Неосвещенные области показаны жирными линиями. Из подобия треугольников следует

$$r_1 = \frac{r}{3}, \quad r_2 = \frac{5r}{3}, \quad r_3 = \frac{2r}{3}, \quad r_4 = \frac{10r}{3}.$$

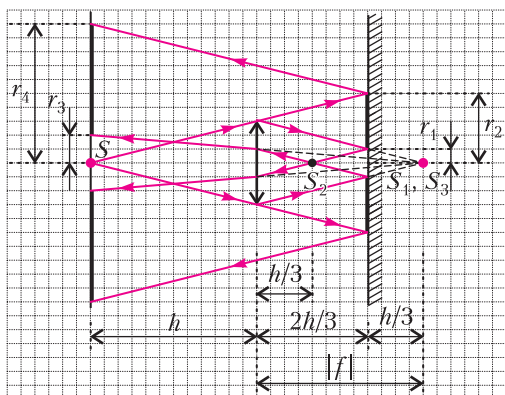


Рис. 12

1) Площадь неосвещенной части зеркала

$$S_3 = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \frac{8}{3} \pi r^2 = 24\pi \text{ см}^2.$$

2) Площадь неосвещенной части стены

$$S_c = \pi r_4^2 - \pi r_3^2 = \frac{32}{3} \pi r^2 = 96\pi \text{ см}^2.$$

Снежинка

(см. 2-ю с. обл.)

Решение головоломки приведено на рисунке 13.

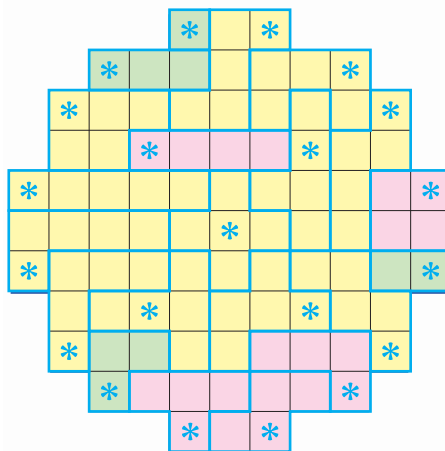


Рис. 13

Внимание наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Грицук, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР

Н.В.Станцо

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

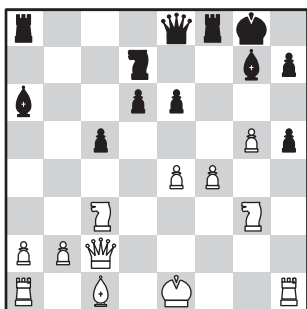
в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40

ПАРТИИ ГОДА

Рассмотрим сегодня наиболее интересные партии, сыгранные в прошлом году на разных турнирах.

**В.Федосеев – С.Салем
Шарджа, 2024**

1. d4 ♘f6 2. c4 g6 3. h4!? d6
4. ♗c3 ♗bd7 5. ♖c2 c5 6. d5 a6
7. e4 b5 8. cb ♗g7 9. ba 0-0
10. h5?! (точнее ♗f3) ♗h5 11. g4
♗hf6 12. g5 ♗h5 13. ♗e2 ♗a6
14. ♗h5 gh 15. f4! (в случае
15. ♗h5? ♗e5 черные быстрее
создадут проблемы королю соперника, задержавшемуся в центре) e6 16. ♗ge2 ♖e8 17. de
fe 18. ♗g3.

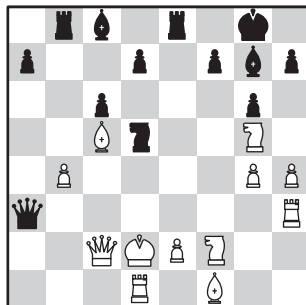


18... ♗e5!? Черные сами хотят атаковать! 19. fe ♗e5
20. ♖g2 (20. ♗h5?? ♖h5+!
21. ♗h5 ♖f1+ 22. ♗d2 ♗f4, мат)
♗b8. Точнее сразу 20... ♖g6 с
возможным 21. ♗h5 ♗d3 22. ♗g3
♗a3! нападая на коня с3. 21. ♗h5
♖g6 22. ♗e3 d5? (ошибка,
точнее 22... ♗d3 23. 0-0-0 ♗c3
24. ♗d3 ♗b2 25. ♗d2 ♗e5)
23. 0-0-0! (не только защищая
короля, но и подключая к атаке
ладью с a1) d4 24. ♗dg1?!
(выигрывало промежуточное
24. ♖h3! de 25. ♗f6+ ♗f6 26. gf,
и уже далее ♗dg1) dc 25. b3!
♗d3 26. ♖h3? К практически
выигранному окончанию вело
26. ♗f6+ ♗f6 27. gf ♖g2 28. ♗g2+
♗f7 29. e5, а теперь черные
наносит эффектный удар.

26... ♗b3! 27. ab ♗a8 28. ♗d1?
Допускает форсированный мат.
Единственный шанс на спасение
давало 28. ♗f6+ ♗f6 29. ♖e6+
♖f7 30. gf+ ♗h8! 31. ♖c8+ ♗c8
с перевесом черных в окончании.
28... ♖h5+ 29. ♖h5 ♗a1+
30. ♗c1 ♗c1+, и после 31. ♗c1
♗f4+ черные проводят ферзя с
шахом, поэтому белые сдались.

**П.Магсудлу – Н.Абдусатторов
Вейк-ан-Зее, 2024**

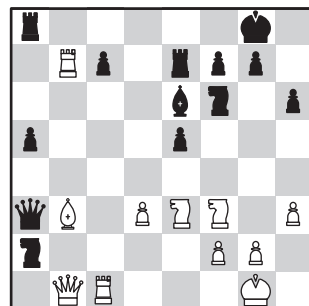
1. c4 e5 2. ♗c3 ♗f6 3. ♗f3 e4
4. ♗g5 c6 5. ♖a4! Принятие
жертвы пешки ведет белых к
неприятной позиции после
5. ♗ge4 ♗e4 6. ♗e4 d5 7. cd cd
8. ♗g3 h5. 5... ♖e7 6. f3 ef 7. ♗f3
g6 8. d4 ♗g7 9. c5?! (точнее
сразу 9. ♗f4) 0-0?! (9...b6!?
10. cb d5 с преимуществом)
10. ♗f4 ♗a6 11. ♗d6 ♗e3
12. ♗d1! (развитие важнее выигрыша
качества) ♖e6 13. ♗f2?
Точное 13. e3! b5 14. ♖a3 ♗d5
15. ♗d3 ♗e3 16. ♗f2 ♗g4+ 17. ♗g3
позволяло белым более-менее
обезопасить короля, сохраняя
явное позиционное преимущество.
13... ♗e8 14. h4 b6 15. ♗g5
♖f5 (компьютер советует
15... ♖d5! 16. 0-0-0 bc 17. dc
♖f5 с обоюдоострой позицией)
16.g4 ♖d5 17.0-0-0! bc 18. dc
♗c5 19. ♖c2? К победе вело
19. ♖a2! ♖c4 20. ♗b1, и после
21. e3! черные теряют либо ферзя,
либо коня. Теперь же чаша
весов склоняется в другую сторону.
19... ♖a2! 20. ♗c5 ♗b8
21. b4 ♖a3+ 22. ♗d2 ♗d5
23. ♗h3.



23... ♗e3! 24. ♗fe4 (оставляло
шансы 24. ♗e3! ♗e3 25. ♖d3
♖d3 26. ♗d3 ♗d1 27. ♗d1 a5
с перевесом у черных) ♗h3
25. ♗h3 h6 26. ♗f3?! Упорнее
26. ♗f7+! ♖h3 27. ♗fd6 ♗a6
28. ♖a2 ♗e2! 29. ♗e2 ♖g4, но
и в этом варианте белый король
слишком раскрыт, чтобы
спастись. 26... ♗b4 27. ♖c1 ♖a5
28. ♗e3 d5 (эффектнее
28... ♗d5+ 29. ♗f2 ♗c3! 30. ♗c3
♖c5) 29. ♗ed2 h5 30. ♗f2 hg
31. ♗b3 ♖c7 32. ♖d2 gf 33. ♗c8
fe 34. ♗e2 ♖c8, белые сдались.

К следующей позиции пришла партия шахматисток на женской олимпиаде, и белым при помощи неожиданного маневра удалось развить эффектную атаку.

**А.Саргсян – Лу Мяойи
Будапешт, 2024**



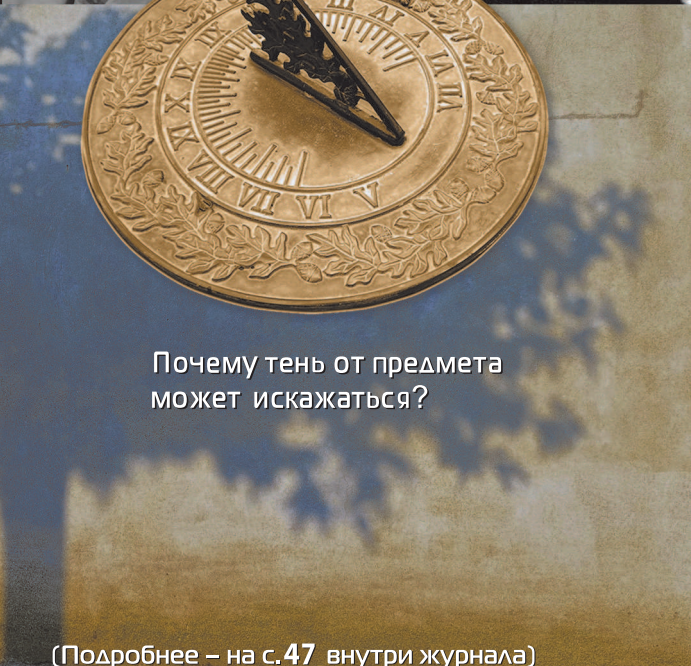
22. ♗c6! ♗b3 (22... ♗b4?
23. ♗e6! fe 24. ♗c4, и ферзь
пойман) 23. ♗b3 ♖a4 24. ♗f6!
Жертва качества разрушает
пешечное прикрытие короля,
и защищать такую позицию
человеку крайне сложно.
24...gf 25. ♗f5 ♗ee8? 26. d4 ed
27. ♗3d4 ♗ad8 28. ♗h6+ ♗f8
29. ♖h7 ♗e1+ 30. ♗h2 ♖c4
31. ♗hf5 ♗e8 32. ♗d3 ♗d7
33. ♗e6+ ♗e6 34. ♗d8 ♖f4+
35. ♗g3 ♗e5 36. ♖c2 ♗b4
37. ♖c7 ♗e4 38. ♖d7+, и после
38... ♗e5 белые могут поставить
мат сразу четырьмя способами,
поэтому черные сдались.

А.Русанов

Индекс 90964

Уроки с физикой

«ТЕНЬ НА ПЛЕТЕНЬ»



Почему тень от предмета
может искажаться?

ISSN 0130-2221 25001



9 770130 22252

(Подробнее – на с.47 внутри журнала)