

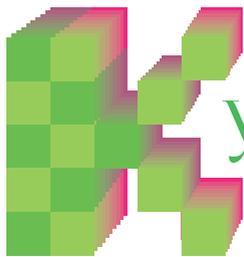
ISSN 0130-2221
2024 · № 11-12.

НОЯБРЬ-ДЕКАБРЬ

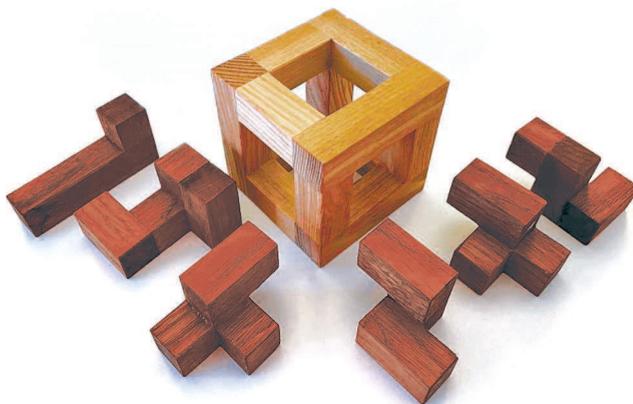
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





УБИК С НАЧИНКОЙ



Головоломка «КУБИК С НАЧИНКОЙ» состоит из каркаса куба $4 \times 4 \times 4$ и начинки из шести элементов (см. фото). Все элементы, кроме одного, можно разбить на пять единичных кубиков. Один элемент составлен из семи кубиков.

Задание головоломки заключается в том, чтобы через окна размером 2×2 в каркасе куба начинить его шестью элементами так, чтобы получился полностью заполненный куб $4 \times 4 \times 4$. Пустот внутри куба оставаться не должно, иначе каким-то кубикам начинки не хватит места!

Головоломка трудная, поскольку, вставляя элементы, вам постоянно придется бороться за экономию пространства, а чем больше элементов вставлено в каркас, тем теснее внутри него и тем сложнее манипулировать элементами головоломки.

Автор этой головоломки Геннадий Ярковой – чемпион России по решению головоломок. Головоломка имеет полезную особенность: ее каркас – это не только фактический элемент головоломки, но и футляр для ее начинки.

Желаем удачи!

Н.Авилов

КВАНТ

НОЯБРЬ-
ДЕКАБРЬ

2024

№ 11-12

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Неожиданное решение Нобелевского комитета.
Л.Белопухов
10 Нужно больше золота! *А.Онопrienко*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи M2818–M2825, Ф2825–Ф2832
20 Решения задач M2806–M2809, Ф2813–Ф2816
28 Вариации на тему одной геометрической
задачи. *Н.Николов, А.Иванов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 32 Задачи 9–16

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 33 Задачи
34 71 узелок. *К.Кохась*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Задача Капицы о пролете цилиндра через
соленоид. *И.Кравченко*

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 40 Про барометр и не только. *С.Дворянинов*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 42 Физико-математическая олимпиада «Физтех»

- 48 Ответы, указания, решения

- 62 Напечатано в 2024 году

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Л.Белопухова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Неожиданное решение Нобелевского комитета

Л. БЕЛОПУХОВ

НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ ПО ФИЗИКЕ 2024 года присуждена «за фундаментальные открытия и изобретения, которые позволяют осуществить машинное обучение с использованием искусственных нейронных сетей» («for foundational discoveries and inventions that enable machine learning with artificial neural networks»).

Это решение стало для физиков совершенно неожиданным. Ведь термины «машинное обучение», «искусственные нейронные сети» как отдельные стороны «искусственного интеллекта» принадлежат не физике, а информатике. Но нобелевской номинации по информатике не существует. И хотя нобелевские премии по физике присуждались иной раз и по космологии, и за лазерные инструменты, и за волоконную оптику, но это все-таки близко к физике. А вот информатика...

Тем более, что по информатике, по кибернетическим исследованиям и достижениям есть свои премии. Самая престижная из них – это премия Алана Тьюринга. Она присуждается Ассоциацией вычислительной техники – международной организацией, учрежденной в 1966 году под эгидой нескольких компаний, в том числе компании Google, которая с 2014 года полностью спонсирует деятельность этой организации. Ассоциация состоит из 35 секций, в которые входят ученые из многих стран мира. Отдельные секции есть и по искусственному интеллекту, и по машинно-человеческому общению. Премия Тьюринга по сумме равна нобелевской и считается, что по престижности не уступает ей. За 58 лет она была присуждена 81 ученому. Ее генераль-

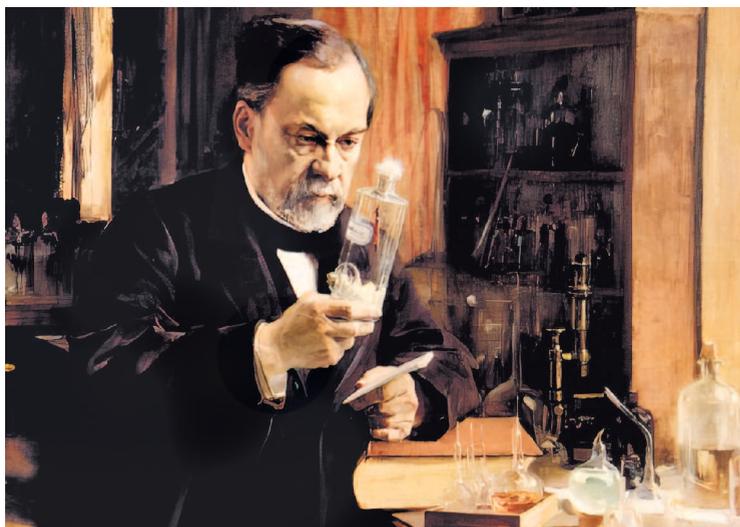
ным секретарем с 2022 года является греческий ученый, профессор Афинского университета Яннс Иоаннидис.

И вот, в 2024 году Нобелевский комитет по физике не смог выделить среди физических исследований работу, достойную Нобелевской премии. И он решил присудить премию ученым-кибернетикам, но таким, которые использовали в своих исследованиях физические идеи. Такими оказались двое ученых, опубликовавших свои основополагающие работы в 1982 и 1986 годах. Член Нобелевского комитета по физике, профессор Шведской королевской академии наук Эллен Мунс, председательствовавшая в этом году на заседании по присуждению премии, 8 октября в своем выступлении подчеркнула, что достижения избранных комитетом новых лауреатов – свидетельство глубокого переплетения в современной науке математики, информатики, физики и биологии. И она отметила, что их работы являются фундаментом всего современного искусственного интеллекта.

В первые же недели после присуждения премии Google провела представительный опрос ученых разных специальностей. Поддерживают решение Нобелевского комитета около 30% опрошенных, 50% – против, 20% – не могут сделать оценку. Думается, что не только эти 20%, но и многие из тех, кто были «против», не имеют четкого представления о развитии кибернетических исследований в конце прошлого и начале нынешнего века. За последние 15 лет огромное число людей на всех континентах земного шара уже привыкли пользоваться дарами искусственного интеллекта, не вникая в природу этого замечательного достижения человечества.

И еще. Завещание Альфреда Нобеля четко определило, что премии должны присуждаться за достижения, приносящие пользу человечеству, и, по смыслу текста завещания, не когда-либо в будущем, а уже в год присуждения премии. А работы по информатике в этом смысле имеют большое преимущество перед физическими исследованиями. Например, для работ по экспериментальным лазерным инструментам для создания аттосекундных световых импульсов, удостоенных прошлогодней Нобелевской премии по физике, невозможно даже ориентировочно представить сроки их применения в каких-либо устройствах, улучшающих жизненные условия людей. А результаты работ по искусственному интеллекту – вот они, у всех в руках, или на столах, или в карманах.

За последние пару десятков лет исследования по искусственному интеллекту и его применению стали столь многочисленны, что Нобелевский комитет по физике, решив обратиться к этой отрасли науки, был в большом затруднении – слишком много хороших и уже внедренных работ. И при выборе лауреатов он выбрал критерием связь работ по информатике с физикой и из большого числа номинантов выделил тех, которые в своих работах использовали конкретные физические идеи. Оба лауреата по первым своим работам были физиками.



Альфред Нобель

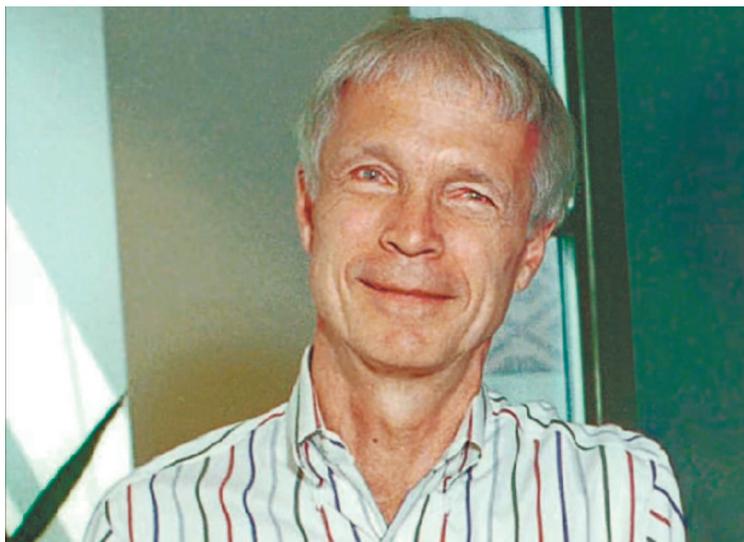
Лауреаты

Джон Джозеф Хопфилд – американский ученый, физик, молекулярный биолог, биофизик, исследователь искусственного интеллекта. Он родился в 1933 году в Чикаго, в семье физиков. Его отец Ян Юзеф Хмелевский родился и вырос в Польше, но получил образование и защитил докторскую диссертацию по физике в США. Он сменил имя и фамилию и стал американским гражданином Джоном Джозефом Хопфилдом – они с сыном полные тезки. Мать Джона Хопфилда младшего – тоже физик. Они преподавали в разных университетах Америки, а Джон Хопфилд старший стал известным спектроскопистом. В 1933 году его пригласили организовать на международной выставке в Чикаго показ американской науки. Там и родился будущий нобелевский лауреат.

Семья была научной, «физической», и это определило судьбу сына. Для высшего образования он выбрал удивительный колледж в маленьком городке северо-западного американского штата Пенсильвания. Мало кто слышал в России об этом Суорворт-колледже. Это очень маленький частный вуз, там на четырех курсах обучается всего лишь 1700 студентов. Но пять выпускников этого колледжа стали нобелевскими лауреатами! По физиологии и медицине, по химии, по экономике и двое – по физике.

Это – свидетельство очень разносторонней подготовки в этом колледже и, конечно, высокой квалификации его преподавателей. Джон Хопфилд учился на нескольких факультетах одновременно, но бакалаврскую выпускную работу в 1954 году защищал по физике. По старинной традиции, эта степень называлась «бакалавр искусств» по физике.

Он продолжил свое образование в Корнельском университете вблизи Нью-



Джон Хопфилд

Йорка и в 1958 году стал доктором философии по физике. Темой диссертации Хопфилда была квантово-механическая теория вклада экситонов в комплексную диэлектрическую проницаемость кристаллов. (Экситон – это квазичастица, представляющая собой электронное возбуждение, распространяющееся по кристаллу без переноса заряда и массы. Для полупроводниковых кристаллов это, фактически, комплекс электрона проводимости и дырки.)

Свои работы по физике твердого тела он продолжил в Bell Laboratories, занимаясь оптическими свойствами полупроводников. Но затем увлекся биологией, биофизикой и биохимией и стал преподавать не физику, а биологию и химию. В 1974 году в Калифорнийском университете Хопфилд представил интересную и важную работу «Механизм исправления ошибок в биохимических реакциях», чтобы объяснить точность репликации ДНК. А с 1980 года его главным интересом стало теоретическое исследование работы головного мозга, его нейронной сети. Этим работам Хопфилд отдал больше 40 лет жизни. К анализу работы мозга он применил кибернетические методы. В 1982 году появилась его статья «Нейронные сети и физические системы с возникающими коллективными вычислительными возможностями». В этой

работе Хопфилд нейронную сеть мозга теоретически моделировал физической системой, в которой элементы взаимодействовали между собой так, чтобы общая энергия взаимодействия стремилась к минимальному значению. В качестве примера Хопфилд приводит коллектив атомов ферромагнетика, в котором атомы влияют друг на друга так, чтобы их спины «выстраивались» параллельно. Тогда энергия взаимодействия будет минимальной.

Элементы любой системы можно теоретически наделить некоторой активностью взаимодействия, аналогичной энергии. Сеть таких элементов имеет формальное сходство с нейронной сетью головного мозга, в которой аксоны, эти отростки нейронов, пересекаются в синапсах, где и происходит передача сигнала – информации. Эта теоретическая модель заключалась в алгоритмах и программах построения структуры («архитектуры») массива данных, который вводится в вычислительную машину. Взаимодействие этих данных можно представить как сеть. Поэтому эта теоретическая модель получила название «сеть Хопфилда». И можно сделать обучающие программы, которые будут заставлять машину находить минимальное значение общей характеристики активности взаимодействия узловых элементов сетей.

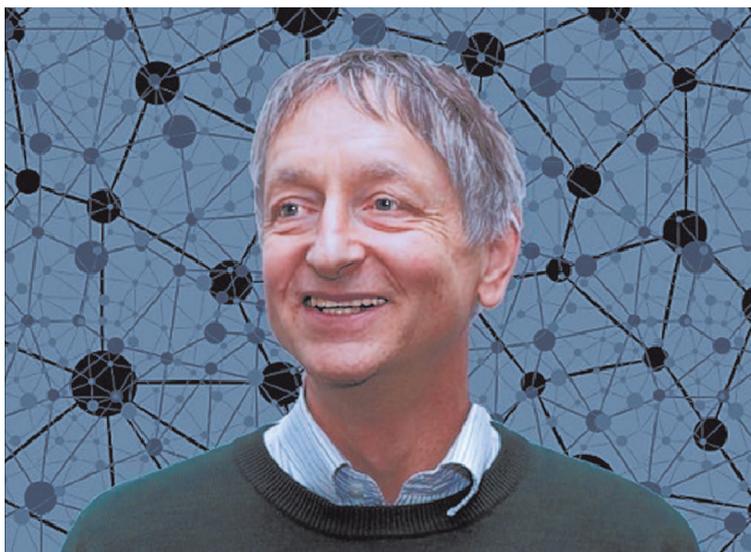
Идеи Хопфилда дали толчок разработке разных вариантов алгоритмов обработки данных («искусственных нейронных сетей») для различных конкретных случаев получения результатов. В этих алгоритмах существенным стало предложенное Хопфилдом использование состояния системы, получившееся в данной задаче, для последующей обработки, т.е. машинное обучение и самообучение машины. Хопфилд ввел для этого явления понятие «ассоциативная память» – как элемент

машинного обучения. Тем самым, идеи искусственного интеллекта получили возможность конкретного воплощения.

Сам Хопфилд принял активное участие в разработке алгоритмов для получения высококачественных изображений, в проблемах машинного перевода и др. В 80-е годы прошлого века исследователи не имели возможности применить идеи искусственного интеллекта к задачам с большим объемом вводимых данных, например к задачам экономики. У тогдашних машин не хватало мощности для обработки таких объемов данных. Только через 20 лет появились достаточно мощные компьютеры. И работы Хопфилда и его последователей стали существенной частью современного внедрения искусственного интеллекта. А интересы самого Хопфилда все больше смещались в область биофизических и биохимических исследований работы естественных нейронных сетей головного мозга.

С 1997 года Хопфилд работает в Принстонском университете и с 2005 года занимает должность заслуженного профессора (по биологии). Он прекрасный преподаватель и в свои 90 с лишним лет продолжает свою педагогическую деятельность. В 2007 году он выступил в Лондоне с замечательной публичной лекцией «Как мы можем думать так быстро? От нейронов к мозговым вычислениям».

Джон Хопфилд был удостоен многих наград – медалей и премий, в том числе в 2001 году медали Дирака от международного центра теоретической физики «за важный вклад во впечатляюще широкий спектр научных дисциплин», а в 2005 году – Всемирной премии Альберта Эйнштейна в области наук о жизни, как лидирующего теоретика-биолога. Теперь он стал и Нобелевским лауреатом по физике.



Джеффри Хинтон

Джеффри Хинтон – британо-канадский ученый, компьютерщик, психолог-когнитивист. Он родился в 1947 году в семье известных лондонцев. Дядя его бабушки, так сказать, двоюродный прадед, Джордж Эверест был географом и главным топографом Индии. Это он «открыл» гималайские вершины и определил их высоту. В его честь самую высокую сухопутную вершину земного шара Джомолунгму называют также Эверестом. Отец Джеффри – энтомолог, мать – писательница. Двоюродная сестра – физик-ядерщик, одна из очень немногих женщин-ученых, участвовавших в американском Манхэттенском проекте (создании атомной бомбы).

Родители мальчика поощряли его интерес к математике и естественным наукам. Он помнил материнский наказ: «Будь академиком или неудачником». Он стал академиком. Ученую степень бакалавра Хинтон получил в Кембриджском университете, однако не по математике и не по физике, а по экспериментальной психологии. В 31 год в Эдинбургском университете он стал доктором наук – защитил диссертацию по искусственному интеллекту. И с тех пор вот уже 45 лет только этим и занимается. Работал он в разных университетах, но в конце концов осел в Канаде, став профессором факультета компьютер-

ных наук университета канадского города Торонто, а также канадским гражданином. Он основал там небольшую компьютерную компанию.

Джеффри Хинтон значительно улучшил нейросеть Хопфилда, введя туда распределение активностей каждого синапса, зависящего от вводимых данных, по вероятностному закону, аналогичному физическому закону распределения микрочастиц по энергиям. Поскольку этот физический закон впервые был сформулирован Людвигом Больцманом, нейросеть Хинтона получила имя «машина Больцмана». Вот именно эту связь нейросети Хинтона с физикой и имел в виду Нобелевский комитет, присуждая ему премию по физике.

Машина Больцмана сама, без участия человека, могла оценивать и структурировать вводимые данные. И кроме этого, во всех своих нейросетях Хинтон применяет алгоритм обратного распространения ошибок как самый важный элемент машинного обучения и самообучения. Хинтон не раз говорил, что эту идею изобрел не он, а другие исследователи еще в 70-е годы. Но воплотил эту идею в конкретные, «глубинные» нейросети именно Хинтон и его коллеги. Его знаменитая, наиболее цитируемая статья была опубликована в 1986 году и называлась «Learning representation by back-propagating errors». Есть много различных русских переводов этого названия, но понятно, что в статье речь шла об алгоритме обратного распространения ошибок.

Хинтон с сотрудниками, участвуя в обшечанадском проекте «Искусственный интеллект, робототехника и общество», создал научные программы, которые он назвал «Нейронные обучения и адаптивное восприятие» и «Обучение в машинах и в мозгах». Он продолжает и сейчас активно работать в этом направлении и получил неофициальный титул «крестный отец искусственного интеллекта». А официальное признание в компьютерном мире было закреплено присуждением ему (совместно с двумя другими учеными) в 2018 году премии Алана Тьюринга «за концептуальные и инженерные прорывы, сделавшие

глубинные нейросети краеугольным компонентом в вычислительной технике».

В 2004 году компания Google, возглавившая мировой процесс по созданию искусственного интеллекта, выделила грант компании Хинтона а в 2013 году купила эту компанию. Хинтон стал при этом вице-президентом компании Google по направлению нейросетей, не прекращая работ по глубинным нейросетям в университете Торонто. Однако в 2023 году он вышел из компании Google в связи с невозможностью свободно говорить о рисках работ по искусственному интеллекту.

Искусственный интеллект и его риски

Международный термин, обозначающий искусственный интеллект, звучит немного по-другому. Международное (английское) наименование – AI. Artificial Intelligence. Не углубляясь в тонкости перевода, заметим только, что в толковых словарях, как в электронных, так и в «бумажных», существует разногласие в трактовке терминов *интеллектуальность*, *интеллект*, *интеллигентность*, *интеллигент*. Под *интеллектом* чаще всего понимают разум, способность рассуждать.

Но вот несколько определений для употребления русскоязычного термина *искусственный интеллект*, или *ИИ* (из Википедии):

ИИ – научное направление, в рамках которого ставятся и решаются задачи аппаратного или программного моделирования тех видов человеческой деятельности, которые традиционно считаются интеллектуальными;

ИИ – направление в информатике и информационных технологиях, задачей которого является воссоздание с помощью вычислительных систем и иных устройств разумных рассуждений и действий;

ИИ – способность системы правильно интерпретировать внешние данные, извлекать уроки из таких данных и использовать полученные знания для достижения конкретных целей и решения задач при помощи гибкой адаптации.

Эти и подобные им определения раскрывают содержание искусственного интел-

лекта, но не просты для краткого определения на обычном «бытовом» уровне. И не лучше ли определение, которое вытекает из знаменитого «теста Тьюринга», сформулированного им в статье «Вычислительные машины и разум», опубликованной в 1950 году в оксфордском философском журнале «Mind»: «машину можно считать разумной, если она способна вести беседу с одним человеком, который не может отличить ее от другого человека»? Вариант: «машину можно считать

искусственным интеллектом, если с ней можно беседовать, как с человеком, или даже лучше». *Даже лучше*, по-видимому, означает, что машина не обругает, не называет дураком, а просто вежливо предложит еще подумать.

Что может делать искусственный интеллект? В принципе, очень многое. Например:

- исследование рынка и интеллектуальный анализ данных;
- управление финансовыми потоками как в масштабе фирм, так и в масштабе государства;
- принятие финансово-экономических решений в гораздо более короткие сроки, чем это делается человеком;
- построение моделей кредитного риска;
- роботизация промышленности;
- роботизация научных исследований;
- создание новых конструкционных материалов;
- полная машинная медицинская диагностика;
- переход к беспилотному транспорту;
- переход от игр между людьми к играм человека с машиной;
- машинное искусство (живопись и музыка);
- возможности удобного общения человека с машиной (смартфоны и ноутбуки).



Машина Deep Blue переиграла Гарри Каспарова

В этом впечатляющем списке пока освоены, пожалуй, только две позиции. Одна из них – игровая. По мнению компетентных специалистов, уже не существует игр, в которых человек смог бы победить машину. Первой игрой, которая пала в битве с машиной, стали шахматы. В 1997 году в третьем матче с машинной программой Deep Blue тогдашний чемпион мира Гарри Каспаров проиграл матч из шести партий со счетом 3,5:2,5. И после этого никто уже не мог обыграть в шахматы искусственный интеллект.

Аналогичное положение сложилось и в древнейшей игре «го», распространенной в восточных странах больше шахмат. В отличие от шахмат, доска для этой игры расчерчена 361 линией (19 на 19), один игрок имеет 181 черных, другой – 180 белых «камней», камни кладутся по очереди на точки пересечения линий. Цель игры – окружить своими камнями как можно большую территорию доски, при этом камни противника, попавшие в окружение, выбывают из игры. Игра значительно более абстрактна, чем шахматы, и имеет очень глубокую стратегию. До недавнего времени считалось, что компьютер не способен играть в эту игру наравне с профессиональными игроками, поскольку игра име-

ет очень высокий уровень абстракции и огромное число перебора всех доступных вариантов (по некоторым оценкам, больше числа атомов во Вселенной). Однако в 2017 году машинная программа победила китайского игрока Ке Цзе, занимавшего первую позицию в неофициальном рейтинге игроков в «го».

Почему компьютерщики тратят много времени на разработку игровых алгоритмов искусственного интеллекта? Одна из причин – финансовая, поскольку матчи человека с машиной привлекают много зрителей и спонсоров. Другая – психологическая. Широко разрекламированные факты победы искусственного интеллекта над человеком способствуют большему интересу к его внедрению у лиц, обладающих властью и финансами. Во всяком случае, вот уже несколько лет в мире наблюдается бум интереса к внедрению глубоких нейронных сетей, это – один из синонимов искусственного интеллекта. Другой, совсем далекий от сути дела синоним – «цифрование».

Но пока еще основные затраты вкладываются в разработку алгоритмов общения человека с компьютером. Мы уже привыкли общаться с компьютером (и особенно со смартфоном), как с человеком, задавать ему вопросы, иной раз не очень даже четко их формулируя, разговаривать с ним («Элиза» и «Алиса») и ждать разумного ответа. И мы не удивляемся, когда видим, как, например, на автомобильном заводе у конвейера стоит не человек, а робот. Он осторожно берет деталь и аккуратно прилаживает ее на нужное место. Мы мало удивляемся, когда видим, как люди с ограниченными физическими возможностями возвращаются к полноценной жизни с помощью умных роботов. И возможно, через десять-двадцать лет на улицах городов и на шоссе дорог большинство автомобилей будут «беспилотными» и будут вежливо уступать дорогу машинам, где за рулем сидит человек.

Разработки последних лет получили имя ChatGPT, или просто GPT-3, GPT-4, GPT5. «Chat» в переводе не нуждается, а «GPT» – это Generative Pre-trained

Transformer (генеративный предварительно обученный преобразователь). Именно эти разработки применяются в последних моделях смартфонов, количество экземпляров которых уже исчисляется миллиардами и приносит огромные прибыли фирмам-изготовителям и самим разработчикам. А вот остальные позиции применения искусственного интеллекта из приведенного списка находятся в стадии разработок в различных научных центрах (на первом месте – центры компаний Google и YouTube). По некоторым оценкам, только за счет внедрения систем AI (ИИ) в промышленность и транспорт мировой ВВП должен увеличиться к 2030 году больше чем на 4%.

В сравнении с другими странами наша страна по затратам на развитие работ по искусственному интеллекту находится на десятом месте. Ее опережают не только США и КНР, но и такие страны, как Индия и Канада. Однако в последние годы ситуация начала резко изменяться.

В 2021 году при Правительстве РФ был создан «Национальный центр искусственного интеллекта», который координирует все работы, ведущиеся по этому направлению. Большой грант (7 миллиардов рублей) распределен этим центром между шестью ведущими научными организациями. Это:

- Сколковский институт науки и техники (Москва);
- Московский физико-технический институт;
- институт системного программирования РАН (Москва);
- университет Иннополис (Татарстан);
- высшая школа экономики (Москва);
- университет ИТМО (Санкт-Петербург).

В этом, 2024 году Минфин вместе со Сбербанком запустили пилотный проект по использованию ИИ в бюджетном процессе (расчет госбюджета на 2025-27 годы). Намечается перелом (правительственные задания) в отношении внедрения уже разработанных систем ИИ в отдельные производственные проекты.

Но все это пока – планы, проекты, наметки. В чем же дело? В чем причина отставания России в этом вопросе от ведущих стран мира? Есть несколько причин. Главное – это нехватка хорошо подготовленных специалистов по информационным технологиям и нехватка суперкомпьютеров, без которых нельзя вести работы в этом направлении. Но, пожалуй, основная причина – это скептическое отношение больше 50% (согласно социальным исследованиям) российского предпринимательского сообщества к искусственному интеллекту, как к модной новинке, которая никогда не заменит выработки решений человеком, а не машиной.

Следует признать, что это недоверие имеет глубокие корни и характерно не только для России. Ведь действительно, если рассматривать искусственный интеллект не как помощника, а как полноправного партнера человеческой жизни, то сразу же возникает ряд вопросов. Один из них – уменьшение количества рабочих мест в производительной сфере и сфере обслуживания. Все меньше и меньше нужно будет людей, которые работают физически (т.е. руками). А где зарабатывать на жизнь? Какое-то количество работников нужно будет для развертывания работ по искусственному интеллекту. Но какая-то часть людей будет просто не способна к такой работе, где важны уже не умелые и трудолюбивые руки, а развитые мозги.

Следующая проблема – это образование. Образование должно стать таким, чтобы оно развивало мозг и способность к обучению. В настоящее время это происходит в отдельных школах, у отдельных учителей. Но в большинстве своем вся система массового школьного образования не учит самостоятельному мышлению, а скорее отучает от него. Да и вузовская система в какой-то степени тоже. И это не только российская проблема. Это проблема общемировая. Об этом нужно думать уже сейчас и предпринимать какие-то шаги. Так, на социологическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова одна из тем выпускных бакалаврских работ посвящена

проблеме изменения образовательной системы в эпоху внедрения искусственного интеллекта. Начало положено.

Но есть еще один глобальный вопрос, связанный с массовым внедрением искусственного интеллекта. В марте 2023 года Илон Маск возглавил организацию получения подписей под открытым письмом правительствам всех стран. Письмо озаглавлено «Приостановить гигантские эксперименты с искусственным интеллектом». Помимо конкретного предложения остановить на полгода работы по созданию более мощных систем искусственного интеллекта, чем GPT-4, в письме говорится о рисках искусственного интеллекта, таких, как «устаревание человечества» и «потеря контроля над обществом в целом». Письмо подписали несколько тысяч ученых, занимающихся проблемами вычислительной техники и искусственного интеллекта, в том числе оба будущих нобелевских лауреата по физике 2024 года. После присуждения премии Джон Хопфилд сказал: «Как физика, меня очень нервирует то, что неподконтрольно». А Джеффри Хинтон оставил пост вице-президента Google «для того, чтобы иметь возможность свободно высказываться о рисках по искусственному интеллекту».

Джон Хопфилд сравнил современные разработки ИИ с открытием деления урана в 1938 году. Еще недавно казалось, что история поставила точку на рисках этого открытия и что в конечном счете оно принесло человечеству благо экологически чистого получения энергии. Но сейчас в этом вопросе весы истории снова зашатались. Оказалось, что «контроля над обществом в целом» не существует.

А может быть, все не так страшно. И даже только один факт резкого усиления качества человеческого общения после создания и внедрения системы GPT-4 на весах истории станет важнее рисков искусственного интеллекта. Хочется так думать.

Нужно больше золота!

А. ОНОПРИЕНКО

В 2010 ГОДУ НА МЕЖДУНАРОДНОЙ математической олимпиаде была предложена задача, которую придумал голландский математик Ганс Зантема, в прошлом сам участник Международной математической олимпиады 1974 года. Как это нередко бывает, задача связана с наукой, которой занимается Ганс. О том, как задача была придумана, можно прочитать в его статье [1].

Задача вызвала интерес у известного математика Теренса Гао, в прошлом самого юного золотого медалиста международных олимпиад. Он предложил всем желающим решать эту задачу совместно, пока шла олимпиада. За поиском решения, в котором участвовали как профессиональные математики, так и школьники, можно проследить на сайте [2].

Сначала мы обсудим задачу и ее решение, а затем посмотрим, какая наука за этим стоит.

Задача

Имеется 6 стоящих в ряд коробок с монетами: S_1, \dots, S_6 . Изначально в каждой коробке лежит по одной монете. Разрешается делать следующие действия:

- если коробка S_k ($1 \leq k \leq 5$) непуста, разрешается убрать из нее 1 монету и добавить 2 монеты в коробку S_{k+1} ;

- если коробка S_k ($1 \leq k \leq 4$) непуста, разрешается убрать из нее 1 монету и поменять местами содержимое коробок S_{k+1} и S_{k+2} .

Выясните, можно ли после нескольких таких ходов добиться того, чтобы коробки с первой по пятую были пустыми, а шестая коробка содержала в точности $2010^{2010^{2010}}$ монет.

Удивительно, что искомое (очень-очень большое) количество монет получить можно! Приведем решение этой задачи.

Идея состоит в следующем. Сначала покажем, как получить просто *довольно много* монет в одной из коробок, а потом уменьшим это количество до требуемого, «перегнав» при этом все монеты в шестую коробку.

Ниже запись типа $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a'_1, \dots, a'_n)$ означает следующее. Пусть несколько подряд идущих коробок содержат a_1, \dots, a_n монет. Тогда за несколько разрешенных операций можно получить в этих коробках a'_1, \dots, a'_n монет соответственно, причем число монет в оставшихся коробках не изменится.

Покажем, как сделать такой переход:

$$(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0).$$

Проведем последовательно такие действия:

$$\begin{aligned} (a, 0, 0) &\rightarrow (a-1, 2, 0) \rightarrow (a-1, 1, 2) \rightarrow \\ &\rightarrow (a-1, 0, 4) \rightarrow (a-2, 4, 0) \rightarrow (a-2, 3, 2) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow (a-2, 0, 8) \rightarrow (a-3, 8, 0) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow (a-4, 16, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (0, 2^a, 0). \end{aligned}$$

Итак, из a монет в одной коробке мы уже умеем получать 2^a монет в соседней справа коробке. Научимся получать еще больше монет! Обозначим через ${}^a 2$ такое число:

$$\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_a. \text{ Например, } {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536.$$

Теперь покажем, что можно сделать следующее:

$$(a, 0, 0, 0) \rightarrow (a, {}^a 2, 0, 0).$$

При доказательстве мы будем пользоваться тем, что уже умеем делать $(b, 0, 0) \rightarrow (0, 2^b, 0)$ (такие действия будем проводить с второй, третьей, четвертой коробками):

$$\begin{aligned} (a, 0, 0, 0) &\rightarrow (a-1, 2, 0, 0) \rightarrow (a-1, 0, 4, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (a-2, 4, 0, 0) \rightarrow (a-2, 0, 2^4, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (a-3, 2^{2^2}, 0, 0) \rightarrow \left(a-3, 0, 2^{2^{2^2}}, 0 \right) = \\ &= (a-3, 0, {}^4 2, 0) \rightarrow (a-4, {}^4 2, 0, 0) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow (0, {}^a 2, 0, 0). \end{aligned}$$

Видно, что число ${}^a 2$ довольно большое уже для небольших a . Теперь дело за малым. Соберем вместе разложенные по одной в разных коробках монетки, после чего применим два раза действие $(a, 0, 0, 0) \rightarrow (0, {}^a 2, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (1, 1, 1, 1, 0, 3) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 3, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (1, 1, 0, 3, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 3, 0, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, {}^3 2, 0, 0, 0) = \\ &= (0, 0, 16, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0, {}^{16} 2, 0, 0). \end{aligned}$$

Оценим, насколько велико число ${}^{16} 2$. Оказывается, оно гораздо больше требуемого в задаче числа $2010^{2010^{2010}}$. Для доказательства достаточно весьма грубых оценок:

$$\begin{aligned} {}^{16} 2 &> 2^{2^{2^{15}}} = 2^{2^{4 \cdot 2^{14}}} > 2^{2^{1 \cdot 2^{14}}} = \\ &= 2^{(2^{14})^{2^{14}}} > 2^{2010^{2011}} > 2^{11 \cdot 2010^{2010}} = \\ &= (2^{11})^{2010^{2010}} > 2010^{2010^{2010}}. \end{aligned}$$

Остается последний шаг – уменьшить число монет ${}^{16} 2$ в четвертой коробке до требуемого количества $N = 2010^{2010^{2010}}$. Воспользуемся тем, что N делится на 4. Также отметим, что можно сделать следующее: $(a, 0) \rightarrow (0, 2a)$. Для этого нужно сделать a раз первое действие. Теперь сделаем следующие действия (будем писать только число монет в 4–6 коробках, так как 1–3 коробки будут все время пусты): $({}^{16} 2, 0, 0) \rightarrow ({}^{16} 2 - 1, 0, 0) \rightarrow ({}^{16} 2 - 2, 0, 0) \rightarrow \dots$
 $\dots \rightarrow (N/4, 0, 0) \rightarrow (0, N/2, 0) \rightarrow (0, 0, N)$.

Задача решена.

Можно ли уйти в бесконечность?

Удивительно, как из достаточно маленького числа монет (изначально их было всего 6) столь простыми операциями можно получить как минимум ${}^{16} 2$ монет! Чтобы получить представление, насколько огромно это число, отметим, что уже ${}^5 2$ содержит в десятичной записи почти 20 тысяч цифр! Возникает естественный вопрос, возможно ли получить *сколь угодно много* монет в одной из коробок, или же количество монет ограничено *сверху* каким-то числом?

Сначала докажем, что при любом начальном числе коробок и любом расположении монет в них невозможно проделывать разрешенные в задаче действия сколь угодно долго. Пусть имеется n коробок. Будем обозначать ситуации, получающиеся по ходу наших действий, в виде упорядоченной последовательности длины n целых неотрицательных чисел: (a_1, \dots, a_n) (a_i обозначает количество монет в i -й коробке).

Рассмотрим порядок на таких последовательностях, называемый *лексикографическим*. Это совершенно естественный порядок на словах (т.е. последовательностях букв некоторого алфавита), именно так упорядочивают слова в словарях и справочниках, чтобы нужное слово было легко найти. Напомним, что это за порядок. Для того чтобы сравнить последовательности (a_1, \dots, a_n) и (b_1, \dots, b_n) , сначала нужно сравнить a_1 и b_1 (просто как числа). Если $a_1 < b_1$, то первая последовательность меньше второй, если $a_1 > b_1$, то первая последовательность больше второй. Если $a_1 = b_1$, то нужно сравнить a_2 и b_2 и т.д. Формально,

$$(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_n),$$

если найдется такое k , что

$$\begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ \dots \\ a_k = b_k, \\ a_{k+1} < b_{k+1}. \end{cases}$$

Отметим, что в нашем определении сравнивать можно только последовательности одинаковой длины, в отличие от естественного лексикографического порядка на словах. Сравнить последовательности разной длины следовало бы так: $(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_m)$, если либо найдется такое k , что выполнена предыдущая система, либо (a_1, \dots, a_n) является началом последовательности (b_1, \dots, b_m) .

Почему же мы не сравниваем последовательности разных длин? Причин этому две. С одной стороны, сравнивать нам понадобится только последовательности одинаковой длины, потому что количество коробок при наших действиях не меняется. С другой

стороны, лемма, которую мы докажем ниже, оказывается неверной, если разрешить сравнивать последовательности разных длин.

Лемма 1. *Для лексикографического порядка на последовательностях длины n не существует бесконечно убывающих цепочек, т.е. не существует последовательностей, для которых выполнено*

$$(a_1^1, \dots, a_n^1) > (a_1^2, \dots, a_n^2) > \dots > (a_1^m, \dots, a_n^m) > \dots$$

Доказательство. Допустим, что такая бесконечно убывающая цепочка существует. Посмотрим на первые члены этих последовательностей a_1^1, a_1^2, \dots . Эти числа не возрастают, поэтому, начиная с некоторого момента, данная последовательность стабилизируется (не будет строгого убывания). Рассмотрим этот момент и отбросим идущие перед ним конечное число членов последовательности, переобозначив при необходимости индексы. Таким образом, теперь во всех последовательностях первый член одинаков. Рассмотрим вторые члены этих последовательностей a_2^1, a_2^2, \dots . По тем же причинам они, начиная с некоторого момента, стабилизируются. Рассмотрим этот момент. Повторив эти же рассуждения n раз, приходим к выводу, что *все n членов* с какого-то момента стабилизируются, что противоречит строгому убыванию в лексикографическом порядке. Лемма доказана.

Используя эту лемму, докажем, что, если мы начнем с некоторого изначального расположения монет в коробках, то количество монет, которое мы сможем получить, ограничено сверху. Мы не будем давать каких-либо (даже грубых) оценок на эту верхнюю границу. Доказательство будет основано исключительно на общих соображениях, связанных с конечным и бесконечным.

Будем представлять возможные расположения монет в коробках в виде вершин дерева. Корень этого дерева – изначальное расположение монет. Стрелка ведет от предка к потомку, если последовательность монет, записанная в потомке, может быть получена из последовательности монет, записанной в предке, при помощи одной из двух разрешенных операций.

Сделаем два важных замечания относительно полученного дерева.

- Лемма 1 означает, что в этом дереве нет бесконечных путей.

- В этом дереве из каждой вершины ведет конечное (даже ограниченное сверху единым числом) количество стрелок к потомкам. Это количество тривиально оценивается сверху числом $2n - 3$ (с последней коробкой операции проделывать нельзя, с предпоследней коробкой можно проделать только первую операцию, со всеми остальными – не более 2 различных операций). Таким образом, мы имеем дело с *деревом с конечным ветвлением*.

Для завершения доказательства осталось применить лемму Кёнига. Это несложно доказываемое утверждение играет важную роль в математической логике.

Лемма 2 (Кёниг). *В бесконечном дереве с конечным ветвлением существует бесконечный путь.*

Из леммы Кёнига следует, что наше дерево обязано быть конечным: если бы оно было бесконечным, то, поскольку оно с конечным ветвлением, в нем был бы бесконечный путь. Таким образом, раз наше дерево с возможными расположениями монет конечно, то и количество монет в коробках (как общее, так и в каждой конкретной коробке) обязательно будет ограничено сверху.

Как много монет можно получить?

Как мы уже убедились, имея 6 коробок по 1 монете в каждой, можно получить если не сколь угодно большое, но все же астрономически большое число монет. Следующий естественный вопрос, связанный с этой задачей, таков. При каком минимальном числе коробок наблюдается столь экстремальный рост числа монет? Будем считать, что, как и в исходной задаче, изначальное в каждой коробке лежит по одной монете.

Если изначальное было 4 коробки, то нетрудно проверить перебором, что можно получить максимум 28 монет в четвертой коробке.

Что если изначальное имеется 5 коробок? В этом случае количество монет, которое

возможно получить, резко возрастает. Мы не будем проводить полный анализ и находить точную верхнюю оценку. Приведем пример, как можно добиться $2^{2^{14}+1}$ монет в одной из коробок (десятичная запись этого числа содержит почти 5 тысяч цифр). Будем пользоваться тем, что мы умеем проводить следующие действия (за несколько шагов):

$$(a, b) \rightarrow (0, 2a + b); (a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0).$$

Проведем операции:

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (0, 3, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 2, 3, 1, 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 2, 2, 3, 1) \rightarrow (0, 2, 2, 0, 7) \rightarrow (0, 2, 1, 7, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 2, 1, 0, 14) \rightarrow (0, 2, 0, 14, 0) \rightarrow (0, 1, 14, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 0, 2^{14}, 0) \rightarrow (0, 0, 2^{14}, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 0, 0, 2^{2^{14}}, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 2^{2^{14}+1}). \end{aligned}$$

В случае 6 коробок число монет, которое можно получить, увеличивается до невероятных размеров. Ранее мы видели, что можно получить число $^{16}2$ (напомним, что это число равно 2^{2^2} , где «башня» содержит 16 двоек). Покажем, что можно получить гораздо больше, а именно $^{2^{14}}2$ монет. Это число равно 2^{2^2} , где «башня» содержит $\underbrace{2^{2^2}}_{2^{14}}$ двоек. Мы будем пользоваться тем, что умеем проводить следующие действия (за несколько шагов):

$$(a, b) \rightarrow (0, 2a + b); (a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0); (a, 0, 0, 0) \rightarrow (0, {}^a 2, 0, 0).$$

Искомое число получается при помощи таких операций:

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (0, 3, 1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 2, 3, 1, 1, 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 2, 2, 3, 1, 1) \rightarrow (0, 2, 2, 2, 3, 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 2, 2, 2, 0, 7) \rightarrow (0, 2, 2, 1, 7, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 2, 2, 1, 0, 14) \rightarrow (0, 2, 2, 0, 14, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 2, 1, 14, 0, 0) \rightarrow (0, 2, 1, 0, 2^{14}, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 2, 0, 2^{14}, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 2^{14}, 0, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 0, {}^{2^{14}} 2, 0, 0) \rightarrow (0, 0, {}^{2^{14}} 2, 0, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 0, 0, {}^{2^{14}} 2, 0, 0). \end{aligned}$$

Увеличиваем число коробок

Можно ли как-то оценить, сколько монет можно получить, имея изначально n коробок? Исходя из предыдущих примеров, видно, что сначала мы старались собрать побольше монет в одной коробке с номером поменьше, после чего делали одну из следующих операций: $(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0)$ или $(a, 0, 0, 0) \rightarrow (0, {}^a 2, 0, 0)$. Для удобства дальнейших подсчетов и для изучения немного более общей ситуации мы будем полагать, что в первой из наших n коробок сразу лежит m монет, а остальные коробки пусты.

Опишем иерархию функций, определенных на натуральных числах. Сначала отметим, что сложение натуральных чисел может быть определено через повторно проводимую операцию прибавления единицы:

$$a + b = a + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b.$$

Умножение может быть определено через повторно проводимую операцию сложения:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b.$$

Операция возведения числа a в степень b может быть определена как многократное умножение:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_b.$$

Так можно продолжать и дальше. Для функций, растущих значительно быстрее показательных, удобное стрелочное обозначение предложил Дональд Кнут. Обозначим $a \uparrow b = a^b$. Двойная стрелочка $\uparrow\uparrow$ будет обозначать многократное возведение в степень:

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a^{\underbrace{a^{\dots^a}}_b}}_b = a \uparrow (a \uparrow (a \uparrow \dots)).$$

Можно продолжать дальше и определить тройную стрелочку:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow^3 = a \uparrow\uparrow (\underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow \dots)}_b).$$

Вообще, $(n + 1)$ -я стрелочка определяется через n -ю стрелочку:

$$a \uparrow^{n+1} b = a \uparrow^n (\underbrace{a \uparrow^n (a \uparrow^n \dots)}_b).$$

Пользуясь этими обозначениями, оценим снизу, сколько монет можно получить из такой изначальной ситуации: имеется n коробок, в первой лежит m монет, а остальные коробки пусты. Как мы видели выше, из ситуации $(m, 0, 0)$ можно получить ситуацию $(0, 2^m, 0)$. Таким образом, при $n = 3$ можно получить $2^m = 2 \uparrow m$ монет во второй коробке. Далее, из ситуации $(m, 0, 0, 0)$ можно получить ситуацию $(0, {}^m 2, 0, 0)$. Тем самым, при $m = 4$ можно получить ${}^m 2 = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}_m = 2 \uparrow \uparrow m$ монет во второй коробке. Из этих наблюдений напрашивается следующий вывод.

Лемма 3. Пусть имеется $n \geq 3$ коробок, в первой лежит m монет, а остальные коробки пусты. Тогда разрешенными операциями можно получить во второй коробке $2 \uparrow^{n-2} m$ монет.

Доказательство. Утверждение доказывается индукцией по числу коробок. База, соответствующая $n = 3$, уже проверена ранее. Докажем шаг индукции. Пусть мы умеем проделывать следующее с n коробками:

$$(m, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 2 \uparrow^{n-2} m, 0, \dots, 0).$$

Прделаем такие действия с $n + 1$ коробками:

$$\begin{aligned} (m, 0, \dots, 0) &\rightarrow (m-1, 2, 0, \dots, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (m-1, 0, 2 \uparrow^{n-2} 2, 0, \dots, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (m-2, 2 \uparrow^{n-2} 2, 0, \dots, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (m-2, 0, 2 \uparrow^{n-2} (2 \uparrow^{n-2} 2), 0, \dots, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (m-3, 2 \uparrow^{n-2} (2 \uparrow^{n-2} 2), 0, \dots, 0) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow (0, \underbrace{2 \uparrow^{n-2} (2 \uparrow^{n-2} (2 \uparrow^{n-2} \dots))}_m, 0, \dots, 0) = \\ &= (0, 2 \uparrow^{n-2} m, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Как мы видим, уже во второй коробке можно получить довольно много монет (причем это «много» зависит от числа коробок). В последней коробке можно получить еще больше монет. Предлагаем вам попробовать сделать соответствующие оценки.

Примитивно рекурсивные функции

Откуда в нашей задаче берется столь быстрый рост числа монет при росте числа коробок? Нужно повнимательнее приглядеться к построению функций вида $x \uparrow^n y$: каждая следующая получается путем многократной итерации предыдущей. Интересно, что при помощи подобной рекурсивной процедуры из небольшого набора просто устроенных функций можно получить много достаточно интересных функций.

Прежде всего отметим, что все функции двух аргументов вида $f(x, y) = x \uparrow^n y$ (n фиксировано, а аргументами функции являются натуральные числа x и y) обладают любопытной особенностью. Для вычисления их значений требуется рекурсия только по одному аргументу и еще несколько простых функций и операций. Определим все аккуратно.

Будем считать, что все функции определены на множестве $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и принимают значения в этом же множестве. Кроме того, функции могут зависеть от 0 аргументов (в этом случае они являются постоянными функциями). Введем обозначения для следующих функций, которые будем называть *элементарными*:

$\mathbf{o}(x) = 0$ (тождественный ноль);

$\mathbf{s}(x) = x + 1$ (прибавление единицы);

$\mathbf{I}_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$ для $1 \leq m \leq n$ (функции проекции).

Рассмотрим две операции над функциями. Первая операция представляет собой композицию нескольких функций. Эта операция обобщает известную операцию композиции функций $g(f(x))$. Пусть нам даны функции f_1, \dots, f_n , зависящие от m аргументов, а также функция g , зависящая от n аргументов. Их композиция $K[g, f_1, \dots, f_n]$ является функцией, зависящей от m аргументов. Определяется она так:

$$\begin{aligned} K[g, f_1, \dots, f_n](x_1, \dots, x_m) &= \\ &= g(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)). \end{aligned}$$

Вторая операция – *примитивная рекурсия* – устроена более хитрым образом.

Пусть нам дана функция f , зависящая от n аргументов, и функция g , зависящая от $n + 2$ аргументов. Тогда с их помощью можно построить функцию h , зависящую от $n + 1$ аргументов, следующим образом:

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n, 0) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ h(x_1, \dots, x_n, y + 1) &= \\ &= g(x_1, \dots, x_n, y, h(x_1, \dots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Обозначим эту операцию буквой R , тогда $h = R[f, g]$. Прimitивная рекурсия ведется по одному аргументу (последнему). Поскольку в нашем распоряжении есть функции-проекции \mathbf{I}_m^n и операция композиции, примитивную рекурсию можно вести по любому аргументу. Функция f задает начальное значение рекурсивно определенной функции h , а функция g позволяет совершать рекурсивный вызов. Как правило, значение функции h на аргументах $x_1, \dots, x_n, y + 1$ зависит от значения функции h на аргументах x_1, \dots, x_n, y , а также от самих аргументов x_1, \dots, x_n, y .

Функции, которые можно собрать из элементарных функций и операций композиции и примитивной рекурсии, называются *примитивно рекурсивными функциями*.

Покажем, что ранее встречавшиеся нам функции являются примитивно рекурсивными. Как уже было сказано выше, операция сложения получается повторением операции прибавления единицы. Можно записать это чисто рекурсивным образом, используя при этом элементарные функции:

$$\begin{aligned} x + 0 &= x = \mathbf{I}_1^1(x), \\ x + (y + 1) &= (x + y) + 1 = \mathbf{s}(x + y). \end{aligned}$$

Формально, чтобы собрать двуместную функцию $x + y$ с помощью операции примитивной рекурсии, нам нужны одноместная и трехместная функции. Одноместная функция (задающая начальное значение) уже есть – это \mathbf{I}_1^1 . Трехместная функция $g(x, y, z)$ должна вести себя как $\mathbf{s}(z)$. Такую функцию можно собрать из элементарных с помощью операции композиции, а именно

$$g(x, y, z) = \mathbf{s}(\mathbf{I}_3^3(x, y, z)) = K[\mathbf{s}, \mathbf{I}_3^3](x, y, z).$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$x + y = R[\mathbf{I}_1^1, K[\mathbf{s}, \mathbf{I}_3^3]](x, y).$$

Аналогичным образом доказывается, что умножение и возведение в степень также являются примитивно рекурсивными функциями. Функция умножения получается повторением операции сложения и потому удовлетворяет следующей схеме примитивной рекурсии:

$$x \cdot 0 = 0 = \mathbf{o}(x),$$

$$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x.$$

Учитывая, что мы уже доказали примитивную рекурсивность функции сложения, получаем, что и функция умножения также примитивно рекурсивна. Иными словами, функция $x \cdot y$ удовлетворяет схеме примитивной рекурсии с такими функциями:

$$f(x) = \mathbf{o}(x), g(x, y, z) = z + x.$$

Рассмотрим функцию возведения в степень (будем считать, что $0^0 = 1$). Соотношения

$$\begin{aligned} x^0 &= 1, \\ x^{y+1} &= x^y \cdot x \end{aligned}$$

представляют собой примитивно рекурсивную схему с функциями

$$f(x) = \mathbf{s}(\mathbf{o}(x)), g(x, y, z) = z \cdot x.$$

Итак, мы увидели, что функция $x \uparrow^1 y = x^y$ является примитивно рекурсивной. Продолжая эту цепочку, получим функции $x \uparrow^2 y, x \uparrow^3 y, x \uparrow^4 y, \dots$. А именно, зададим следующую примитивно рекурсивную схему:

$$\begin{aligned} x \uparrow^{n+1} 1 &= x, \\ x \uparrow^{n+1} (y + 1) &= x \uparrow^n (x \uparrow^{n+1} y). \end{aligned}$$

Здесь для ясности мы начали не с 0, как выше, а с 1. Хотя можно было бы начать и с 0.

По сути, это и есть наши прежние определения $(n + 1)$ -й стрелочки через n -ю стрелочку, записанные в более аккуратном (индуктивном) виде, без использования многоточий. Теперь можно заметить, что каждая функция вида $x \uparrow^n y$, зависящая от переменных x и y , является

примитивно рекурсивной. Доказать это можно при помощи математической индукции по n .

Рекурсия 2-й степени и быстрорастущие функции

Огромное число функций натуральных аргументов, встречающихся в математике, являются примитивно рекурсивными. Приведем (без доказательства примитивной рекурсивности) несколько примеров:

- функции двух аргументов, равные неполному частному и остатку при делении одного аргумента на другой;
- функция одного аргумента n , равная n -му числу Фибоначчи;
- функция одного аргумента n , равная 1 для простого n и 0 для не простого n ;
- функция Эйлера $\varphi(n)$, равная количеству натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n .

Кажется, что у нас появился инструмент, позволяющий вычислить все функции, сопоставляющие натуральным числам натуральные числа и вычислимые в неформальном, интуитивном смысле. Оказывается, это не так. Ниже мы приведем пример *функции Аккермана*, которая не является примитивно рекурсивной функцией – для вычисления функции Аккермана требуются более сильные средства, нежели описанная ранее примитивная рекурсия.

Ранее неоднократно подчеркивалось, что функция $x \uparrow^n y$ является примитивно рекурсивной, будучи функцией *двух аргументов* x и y . Число n играет роль не аргумента функции, а индекса в нумерации последовательности функций. Что если попытаться определить рекурсивным образом функцию $x \uparrow^n y$ *трех аргументов* x , y и n ? Мы сделаем это, но сначала еще раз поговорим о примитивной рекурсии.

Числа натурального ряда образуют естественным образом упорядоченную последовательность: 1, 2, 3, ... Отметим, что последовательность 0, 1, 2, 3, ... с точки зрения порядка устроена точно так же; для определенности будем говорить про после-

довательность 1, 2, 3, ... Это упорядочение играет фундаментальную роль в задании функций при помощи примитивной рекурсии. Пусть выбран один из аргументов функции. Зададим значение функции, когда этот аргумент равен 1, и зададим правило, как найти значение функции в точке $n + 1$, если известно ее значение в точке n . Заданная таким образом функция будет определена *в любой точке*, поскольку, прибавляя много раз 1 к единице, можно добраться до любого натурального числа. Пожалуй, это самое важное свойство натурального ряда, в основе которого лежит метод математической индукции. Можно показать, что если значение функции в точке $n + 1$ задается по значению функции не только в точке n , но и в каких-то других меньших точках, то такая рекурсивная процедура может быть сведена к примитивной рекурсии.

Чтобы вести рекурсию по двум аргументам сразу, нужно упорядочить пары натуральных чисел. Можно придумать много разных способов это сделать, т.е. много разных порядков. Мы рассмотрим уже встречавшийся ранее лексикографический порядок: пара (x_1, y_1) меньше пары (x_2, y_2) , если либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Выпишем пары по порядку, начиная с самой маленькой:

$$(1,1) < (1,2) < (1,3) < \dots < (2,1) < (2,2) < \dots < (2,3) < \dots < (3,1) < (3,2) < (3,3) < \dots$$

В этом упорядочении пара (1,1) является самой маленькой. Пары $(n,1)$ играют особую роль – у них нет непосредственно предшествующей пары.

Допустим, что мы хотим задать функцию $F(x, y)$ рекурсией по двум аргументам сразу. Для этого мы должны задать значение $F(1,1)$, а также как-то выразить $F(x, y)$ через значения этой же функции для предыдущих пар значений аргументов. Заданная таким образом функция будет определена при любых значениях аргументов. Доказать это можно при помощи леммы 1, положив $n = 2$ (мы не будем останавливаться на этом подробно).

Рекурсия 2-й степени интересна тем, что она *принципиально не сводится* к примитивной рекурсии. Поясним и уточним этот факт. Обозначим через $F(n, x, y)$ функцию $x \uparrow^n y$. Рекурсию будем вести по аргументам n и y . Зададим следующую схему рекурсии 2-й степени:

$$F(1, x, y) = x^y,$$

$$F(n+1, x, 1) = x,$$

$$F(n+1, x, y+1) = F(n, x, F(n+1, x, y)).$$

Аргумент x в этом определении фиксирован, поэтому рассмотрим, как зависит функция F от остальных двух аргументов. Первая строчка соответствует заданию функции F на парах вида $(1, y)$. Вторая строчка задает функцию F на парах вида $(n+1, 1)$ – это как раз те пары, у которых нет непосредственно предшествующей пары. Наконец, третья строчка выражает функцию F на паре $(n+1, y+1)$ через значения функции F на парах $(n+1, y)$ и $(n, F(n+1, x, y))$. Обе эти пары с точки зрения лексикографического порядка меньше пары $(n+1, y+1)$, поэтому данная схема является примером корректно заданной схемы рекурсии 2-й степени.

Оказывается, функция F *не является примитивно рекурсивной функцией*: ее невозможно задать, пользуясь элементарными функциями и операциями композиции и примитивной рекурсии. Причина в следующем. Обозначим через $A(x)$ функцию $F(x, 2, x)$. Функция A по своему определению очень близка к *функции Аккермана* (а точнее, к варианту Рожи Петер, упростившей изначальное построение Аккермана, подробнее см. [3]). Для функции A верна следующая теорема.

Теорема. Пусть f – любая примитивно рекурсивная функция одного аргумента. Тогда найдется такое число n , что для всех чисел $x > n$ выполнено неравенство $f(x) < A(x)$.

Из этой теоремы следует, что функция A не является примитивно рекурсивной (иначе, взяв в формулировке теоремы A в качестве f , мы бы пришли к противоречию). Значит, функция F также не примитивно рекурсивна, поскольку A может быть

получена из F при помощи операции композиции и элементарных функций.

Интересно отметить, что описанная в изначальной задаче игра с монетками моделирует вычисление функции Аккермана. А именно, для вычисления значения $A(n)$ нужно взять $n+2$ коробки и положить в первую коробку n монет. Тогда разрешенными операциями можно получить во второй коробке $A(n)$ монет (см. лемму 3).

При вычислении функции Аккермана появляются рекурсивные вызовы огромной глубины. Поэтому функцию Аккермана используют для тестирования способности компилятора оптимизировать рекурсию. Также функции типа функции Аккермана возникают в качестве мер временной сложности некоторых алгоритмов.

Для дальнейшего изучения этой темы рекомендуем цикл лекций Л.Д. Беклемишева «Быстрорастущие функции («быстрее, выше, сильнее»)», прочитанный в летней школе «Современная математика» в Дубне в 2012 году.

Литература

1. *H.Zantema*. A problem from IMO 2010. – Nieuw Archief voor Wiskunde, 2011, vol. 5, n. 1, p. 40-43.
2. <https://polymathprojects.org/2010/07/08/minipolymath2-project-imo-2010-q5/>
3. *А.И.Мальцев*. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986.

Задачи

по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2818–M2820, M2821a, M2822 предлагались на XLVI Турнире городов, задачи M2823, M2824 – на III Южно-Российской математической олимпиаде «Ассара», задача M2825 предлагалась на олимпиаде Sirius Mathematical Olympiad.

Задачи Ф2825–Ф2832 предлагались на различных этапах олимпиады «Физтех» текущего года.

Задачи M2818–M2825, Ф2825–Ф2832

M2818. Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N . Оказалось, что N делится на M . Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N .

А.Грибалко

M2819. У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось – округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет, если: а) мешков всего 8; б) мешков всего 9?

А.Глебов

M2820. Назовем ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали, горизонтальными, а остальные – вертикальными. Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46 , после чего чередовать его горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать

клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.

А.Грибалко

M2821. *Дорогой* на плоскости будем называть прямую, по которой можно двигаться только в одну сторону.

а) Петя и Вася по очереди проводят дороги, начинает Петя. Разрешается проводить только горизонтальную или вертикальную дорогу; направление на дороге выбирает тот, кто проводит дорогу (при создании этой дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрестка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?

б) Пусть на плоскости проведены несколько (конечное множество) дорог, любые две из которых пересекаются. При каком наименьшем m всегда можно добавить m дорог и сделать так, чтобы можно было проехать от любого перекрестка до любого другого?

А.Перепечко

M2822. На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем одинаковым количеством гвоздей?

В.Дольников, П.Кожевников

M2823. На координатной плоскости нарисована парабола p – график уравнения $y = -x^2$ и отмечена точка A , не лежащая на параболе p . Через точку A проводятся всевозможные параболы q вида $y = x^2 + ax + b$, пересекающие p в двух точках X и Y . Докажите, что всевозможные прямые XY проходят через фиксированную точку плоскости.

П. Кожевников

M2824. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Первая девочка дружит с 4-мя мальчиками, вторая – с 5-ю, третья – с 6-ю, ..., 11-я – с 14-ю, а каждая из остальных четырех девочек дружит со всеми мальчиками. Оказалось, что существует ровно $3 \cdot 2^{25}$ способов разбить весь класс на пары, так чтобы в каждой паре были мальчик и девочка, которые дружат. Докажите, что любой из друзей первой девочки дружит и со всеми остальными девочками тоже.

Г. Шарфетдинова

M2825. По высотам остроугольного неравностороннего треугольника из его вершин одновременно начали ползти три жука с одинаковыми скоростями. В некоторый момент оказалось, что первый и второй жуки находятся на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что в этот момент и третий жук тоже находится на этой окружности.

А. Кузнецов

Ф2825. Камень брошен под углом α к горизонту. Точка старта находится на высоте H над горизонтальной площадкой. В полете высота, на которой находится камень, растет, достигает максимума, а затем убывает до нуля. В момент падения камня на площадку вектор скорости камня образует с горизонтом угол β . Найдите горизонтальное перемещение камня за время полета. Соппротивлением воздуха можно пренебречь.

Ю. Павленко

Ф2826. На гладкой горизонтальной плоскости расположен клин. Гладкая наклонная плоскость клина образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Шайбу удерживают на гладкой наклонной плоскости клина, а затем отпускают. Система приходит в движение, начальные скорости шайбы и клина нуле-

вые. Масса клина $M = 0,6$ кг, масса шайбы $m = 0,3$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Клин и шайба движутся поступательно и прямолинейно. Определите модуль силы, с которой горизонтальная плоскость действует на клин.

В. Плис

Ф2827. Однородный гибкий выпрямленный во всю свою длину $L = 0,8$ м жгут движется поступательно со скоростью $v_0 = 1$ м/с, направленной вдоль жгута, по гладкому горизонтальному столу, а затем соскальзывает со стола через закрепленную на краю стола направляющую трубку с гладкими внутренними стенками (рис. 1). В какой момент времени T весь жгут примет вертикальное положение? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². В момент времени $t = 0$ правый конец жгута как раз добрался до поворота в трубке.

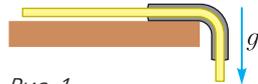


Рис. 1

В. Плис

Ф2828. Циклический процесс, проводимый с одноатомным идеальным газом, представлен на рисунке 2 в координатах (p, ρ) . В процессе 1–2 давление газа изменяется по закону $p = a + \frac{b}{\rho}$, где a и b – постоянные, ρ – плотность газа. Максимальная внутренняя энергия газа в процессе $U_{\max} = 4986$ Дж. Найдите работу газа за цикл.

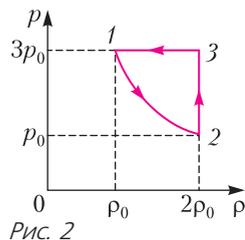


Рис. 2

В. Плис

Ф2829. В первом опыте амперметр и вольтметр, соединенные последовательно, подключили к батарейке, показания приборов были $I_1 = 0,3$ А, $U_1 = 18$ В. Во втором опыте эти же приборы, соединенные параллельно, подключили к этой же батарейке, показания приборов стали $I_2 = 3,4$ А, $U_2 = 4,5$ В. Найдите ток короткого замыкания батарейки $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}$, где \mathcal{E} – ЭДС батарейки, r – внутреннее сопротивление батарейки.

В. Плис

Ф2830. Заряд Q распределен равномерно по площади непроводящей сферы радиусом R . В первом опыте на расстоянии $2R$ от центра сферы поместили маленький шарик с зарядом q . Сила, с которой поле заряженной сферы действовало на шарик, равнялась F_1 . Во втором опыте шарик удалили, а такой же заряд q равномерно распределили по длине тонкого непроводящего стержня длиной R . Этот стержень расположили на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находилась на расстоянии $2R$ от центра сферы. Найдите силу F_2 , с которой поле сферы действовало на заряженный стержень. Все опыты проводились в вакууме вдали от других тел. Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми.

В.Плис

Ф2831. Приводное колесо велосипедной динамо-машинки прижимается сбоку к шине колеса велосипеда. Диаметр этого приводного колеса d . Якорь динамо-машинки, содержащий N витков каждый площадью S , вращается в однородном магнитном поле с индукцией B . С какой по величине скоростью v должен ехать велосипедист, чтобы лампочка в фаре велосипеда, рассчитанная на действующее значение напряжения U , светилась нормальным накалом при работе динамо-машинки? Спротивления проводов ротора и лампочки (при номинальном напряжении на ней) одинаковы.

В.Плис

Ф2832. Три когерентных монохроматических синфазных излучателя расположены в вакууме вдали от других тел в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Излучатели работают на частоте $\nu = 100$ МГц. При какой наименьшей длине стороны треугольника в дальней зоне на продолжении любой стороны треугольника волны трех источников гасят друг друга? Скорость электромагнитных волн в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

С.Варламов, В.Плис

Решения задач М2806–М2809, Ф2813–Ф2816

М2806. Можно ли нарисовать на плоскости замкнутую 20-звенную ломаную и пронумеровать ее звенья числами $1, 2, 3, \dots, 20$ в порядке обхода так, чтобы для каждого натурального $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ звенья с номерами i и $10 + i$ пересекались друг друга и не пересекали остальные звенья?

Ответ: нельзя.

Предположим противное, и пусть $A_1A_2 \dots A_{20}$ – данная ломаная. Пусть A – точка пересечения звеньев A_1A_2 и $A_{11}A_{12}$. Из условия следует, что первые 10 звеньев ломаной не имеют общих точек, кроме концов, тогда у нас образуется замкнутая несамопересекающаяся ломаная $AA_2A_3A_4 \dots A_{11}A$, назовем эту ломаную C (рис. 1). При этом

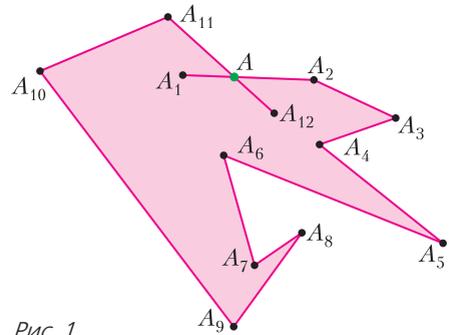


Рис. 1

вершины A_1 и A_{12} окажутся либо одновременно внутри, либо одновременно снаружи контура C . Далее, звено $A_{12}A_{13}$ пересекает контур C ровно один раз, значит, вершины A_{12} и A_{13} лежат в разных частях плоскости относительно контура C : одна внутри, другая снаружи. Аналогично рассуждаем с парами вершин A_{13} и A_{14} , A_{14} и A_{15} , ..., A_{20} и A_1 . Получается, что $A_{12}, A_{14}, \dots, A_{20}$ лежат в одной части плоскости относительно контура C , а $A_{13}, A_{15}, \dots, A_{19}, A_1$ – в другой. Но это противоречит нашему предыдущему выводу о том, что A_1 и A_{12} находятся в одной части плоскости относительно C . Этим завершается решение.

Приведем схему другого решения. Воспользуемся следующей известной теоремой о раскраске областей (в которой фактически обобщаются понятия «вне» и «внутри» для самопересекающихся ломаных).

Теорема. Пусть на плоскости проведены несколько замкнутых ломаных так, что множество из точек пересечения и самопересечения конечно (т.е. ломаные образуют плоский граф, в котором степень каждой вершины четна). Тогда области, на которые разделена плоскость, можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы области, имеющие общий отрезок границы, были раскрашены в разные цвета.

Вернемся к задаче и предположим, что ломаная $A_1 \dots A_{20}$, о которой идет речь в условии, существует. Воспользуемся раскраской областей из теоремы. Начнем обход ломаной, стартуя с первого звена A_1A_2 от точки A пересечения звеньев A_1A_2 и $A_{11}A_{12}$. В процессе обхода мы будем встречать точки пересечения 2-го и 12-го звеньев, 3-го и 13-го и т.д. Пусть мы начали обход так, что черная область находится по правую сторону относительно направления движения $\vec{AA_2}$ (рис. 2). Заметим, что после

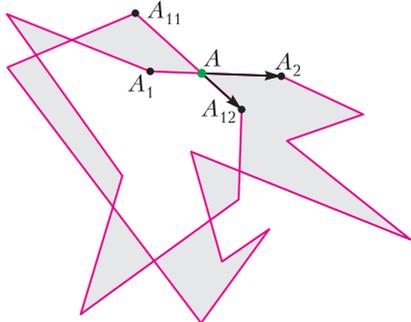


Рис. 2

прохождения точки самопересечения эта ситуация меняется на противоположную: если черная область находилась по правую сторону относительно нашего движения, то после прохождения очередной точки самопересечения черная область станет находиться по левую сторону и наоборот. Тогда после прохождения точки A , 11-й по счету точки самопересечения, черная область должна опять находиться по правую сторону от нашего движения. Но 11-я точка самопересечения – это снова точка A . Получается, что после повторного прохождения точки A черная область находится по правую сторону от направления движения $\vec{AA_{12}}$, что неверно. Противоречие.

Несложно решить общую задачу про $(2n)$ -звенную ломаную, в которой пересекаются только пары звеньев i и $i + n$ ($i = 1, 2, \dots, n$). При четном n получается противоречие, как и выше при $n = 10$. Для нечетных $n \geq 3$ несложно построить пример и убедиться, что такие ломаные существуют.

В завершение отметим, что данная задача фактически является частным случаем следующего утверждения, известного как теорема Гаусса (см., например, статью С.Табачникова «О плоских кривых» в «Кванте» №11-12 за 1988 г., упр. 11):

Пусть замкнутая ломаная имеет конечное множество точек пересечения пар звеньев. Занумеруем (произвольным образом) эти точки. Далее обойдем ломаную и будем выписывать последовательность номеров точек пересечения в том порядке, в котором они встречаются в процессе обхода. Получится последовательность чисел, в которой каждый номер встретится дважды. Тогда в этой последовательности между любыми двумя одинаковыми номерами находится четное количество номеров.

И.Ефремов, П.Кожевников

M2807. *Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ и $a^3 + b^3 + c^3$ делятся на $a + b + c$. Кроме того, $\text{НОД}(a + b + c, 6) = 1$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $(a + b + c)^2$.*

Для каждого целого неотрицательного k обозначим $p_k = a^k + b^k + c^k$. В частности, $p_0 = 3, p_1 = a + b + c$. Нам нужно доказать, что p_5 делится на p_1^2 .

Запишем равенство

$$p_1^2 = (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = p_2 - 2(ab + bc + ca).$$

Так как по условию p_2 делится на p_1 , то $2(ab + bc + ca)$ также делится на p_1 ; а поскольку p_1 взаимно просто с 2, $(ab + bc + ca)$ делится на p_1 .

Воспользуемся разложением

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Видим, что $p_3 - 3abc$ делится на p_1 , и, поскольку p_3 делится на p_1 , получаем, что

и $Зabc$ делится на p_1 . По условию задачи, $З$ взаимно просто с p_1 , значит, abc делится на p_1 .

Итак, мы получили, что каждое из выражений $s_1 = p_1 = a + b + c$, $s_2 = ab + bc + ca$, $s_3 = abc$ делится на p_1 . (Выражения s_1, s_2, s_3 называют элементарными симметрическими функциями от a, b, c .)

Затем воспользуемся равенством $p_4 = s_1p_3 - s_2p_2 + 3s_3p_1$ (его можно проверить непосредственно). Видим, что каждое слагаемое в правой части делится на p_1^2 , значит, p_4 делится на p_1^2 .

Далее, из равенства $p_5 = s_1p_4 - s_2p_3 + 3s_3p_2$ (которое тоже можно проверить непосредственно) также следует, что p_5 делится на p_1^2 , что завершает решение.

Заметим, что решение можно получить и другими способами, например, выразив p_5 явно через элементарные симметрические функции. Формулы, которыми мы воспользовались в решении, — это частные случаи так называемых тождеств Ньютона, связывающих симметрические функции p_i и s_j от трех переменных a, b, c . Можно продолжить последовательность этих тождеств $p_k = s_1p_{k-1} - s_2p_{k-2} + 3s_3p_{k-3}$ (для $k = 6, 7, \dots$) и показать, что в условиях задачи p_{3m}, p_{3m-1} и p_{3m-2} делятся на p_1^m для всех $m = 1, 2, \dots$

А.Антропов, А.Голованов,
П.Кожевников

М2808. Некоторые участники турнира дружат между собой, и у каждого есть хотя бы один друг. Каждому участнику турнира выдали футболку, на которой написано количество его друзей на турнире. Докажите, что хотя бы у одного участника среднее арифметическое чисел, написанных на футболках его друзей, не меньше, чем среднее арифметическое чисел на всех футболках.

Занумеруем участников $1, 2, \dots, N$, и пусть у участника номер i количество друзей равно n_i (т.е. на его футболке написано n_i).

Положим $s_i = \frac{n_t + \dots}{n_i}$, где сумма в числителе берется по всем участникам t , которые дружат с i . Предположим противное: каж-

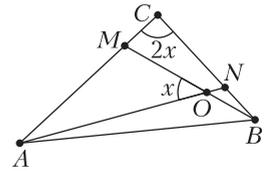
дое s_i меньше, чем среднее количество друзей: $s_i < \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_N}{N}$. Тогда, суммируя по всем участникам i , получаем, что $S = s_1 + s_2 + \dots + s_N$ меньше, чем $2E = n_1 + n_2 + \dots + n_N$, так что E — это количество дружб (т.е. E — количество ребер в нашем графе дружб). Переставив слагаемые в сумме S , видим, что S равно сумме

скобок $\left(\frac{n_t}{n_i} + \frac{n_i}{n_t} \right)$ по всем парам друзей $i - t$.

Каждая такая скобка не меньше 2 (как сумма взаимно обратных положительных чисел), а поскольку количество пар друзей равно E , получаем $S \geq 2E$. Но это противоречит ранее установленному неравенству $S < E$.

П.Кожевников

М2809. Точки M и N выбраны соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $AM = BC$ и $CM = BN$ (см. рисунок). Пусть O — точка пересечения отрезков AN и BM . Найдите угол ACB , если известно, что он вдвое больше, чем угол AOM .



Решение задачи приведено в статье «Вариации на тему одной геометрической задачи».

Ф2813. В сосуд кладут кусок льда массой $m_л$ и заливают порцией воды массой $m_в$. На диаграмме (рис. 1) показаны области с указанием конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры куска льда $t_л \in [-100\text{ }^\circ\text{C}; 0\text{ }^\circ\text{C}]$ и температуры порции воды $t_в \in [0\text{ }^\circ\text{C}; 100\text{ }^\circ\text{C}]$. Известно, что в диапазоне $[-100\text{ }^\circ\text{C}; 0\text{ }^\circ\text{C}]$ удельная теплоемкость льда зависит от его температуры по закону $c_л(t_л) = c + \alpha t_л$, где $c = 2100\text{ Дж/(кг}\cdot\text{ }^\circ\text{C)}$, $t_л$ — температура льда в градусах Цельсия, а α — некоторая постоянная величина. Удельная теплоемкость воды $2c = 4200\text{ Дж/(кг}\cdot\text{ }^\circ\text{C)}$, а удельная теплота плавления льда $\lambda = 336\text{ кДж/кг} = 2сТ$, где $T = 80\text{ }^\circ\text{C}$. Теплоемкостью сосуда и тепловыми потерями пренебречь.

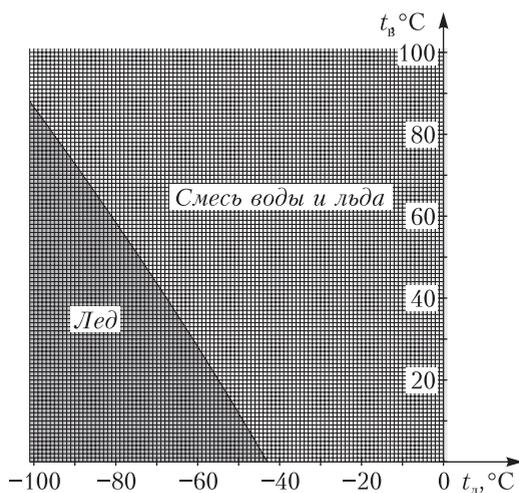


Рис. 1

- 1) Определите α и $\gamma = m_{\text{л}}/m_{\text{в}}$.
- 2) Качественно начертите аналогичную диаграмму конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры куска льда $t_{\text{л}} \in [-100\text{ }^\circ\text{C}; 0\text{ }^\circ\text{C}]$ и температуры порции воды $t_{\text{в}} \in [0\text{ }^\circ\text{C}; 100\text{ }^\circ\text{C}]$, но при равных массах льда и воды $m_{\text{л}} = m_{\text{в}}$. Укажите на диаграмме характерные точки.

1) Линия на диаграмме, разделяющая состояния «лед» и «смесь воды и льда», соответствует льду при температуре плавления $0\text{ }^\circ\text{C}$. Выведем уравнение данной линии. Количество теплоты, которое вода отдает при остывании до $0\text{ }^\circ\text{C}$ и кристаллизации, равно

$$Q_{\text{отд}} = 2cm_{\text{в}}t_{\text{в}} + m_{\text{в}}\lambda.$$

Средняя удельная теплоемкость льда при нагревании от $t_{\text{л}}$ до $0\text{ }^\circ\text{C}$ равна

$$c_{\text{ср}} = \frac{c + (c + \alpha t_{\text{л}})}{2} = c + \frac{\alpha t_{\text{л}}}{2}.$$

Тогда количество теплоты, необходимое для нагревания льда до $0\text{ }^\circ\text{C}$, равно

$$Q_{\text{получ}} = c_{\text{ср}}m_{\text{л}}(-t_{\text{л}}) = -\left(c + \frac{\alpha t_{\text{л}}}{2}\right)m_{\text{л}}t_{\text{л}}.$$

Так как тепловых потерь нет,

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}}.$$

Используя обозначения $\gamma = m_{\text{л}}/m_{\text{в}}$ и $\lambda = 2cT$, получим искомую зависимость:

$$t_{\text{в}}(t_{\text{л}}) = -T - \frac{\gamma t_{\text{л}}}{2} - \frac{\alpha \gamma t_{\text{л}}^2}{4c}.$$

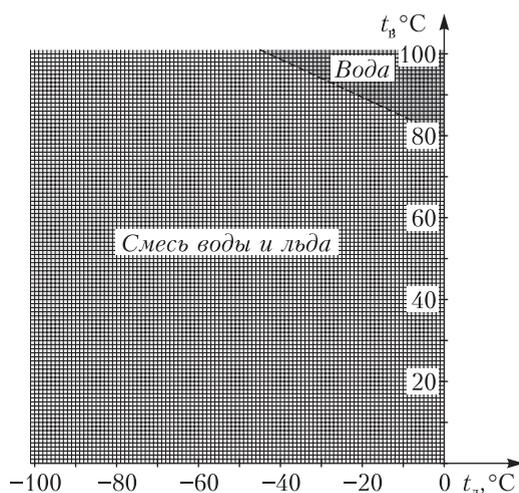


Рис. 2

Подставив в это уравнение точки $(-95; 80)$ и $(-55; 20)$ из диаграммы, в которых разделяющая линия хорошо попадает на узлы координатной сетки, получим

$$\gamma = 4,0, \alpha = 7,0 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot (\text{ }^\circ\text{C})^2).$$

- 2) См. рис. 2.

Д.Рубцов

Ф2814. Прямой сплошной непроводящий усеченный конус заряжен по боковой поверхности так, что его поверхностная плотность заряда зависит от расстояния до вершины O целого конуса как $\sigma(x) = A/x$, где A – известная положительная константа. Основания усеченного конуса заряжены однородно с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (см. рисунок). Длина образующей и половинный угол раствора конуса, дополняющего усеченный конус до целого, равны l и $\alpha = 30^\circ$ соответственно, длина образующей усеченного конуса равна l .

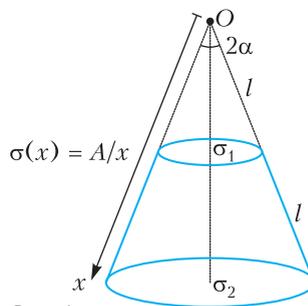


Рис. 1

1) Пусть $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$, где σ_0 – известная величина. Найдите вектор напряженности \vec{E}_O в точке O.

В конусе просверлили тонкий канал так, что пробный отрицательный заряд $-q (q > 0)$ массой m может без трения перемещаться вдоль оси симметрии конуса. Далее справедливо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$.

2) Докажите, что существует положение равновесия пробного заряда, не зависящее от значения σ_0 . Найдите это положение равновесия. В качестве ответа приведите расстояние от него до точки O.

3) При каких значениях σ_0 найденное положение равновесия будет устойчивым? Для значений, соответствующих устойчивому равновесию, найдите период малых колебаний пробного заряда в окрестности положения равновесия.

Примечание. Конус закреплен, диэлектрическая проницаемость усеченного конуса $\epsilon = 1$, влиянием силы тяжести и явлениями магнетизма пренебречь.

1) Разобьем боковую поверхность на колечки и начнем интегрировать:

$$E_1 = \int_1^{2l} k \frac{2\pi x \sin \alpha}{x^2} \frac{A}{x} \cos \alpha \cdot dx = \frac{\sqrt{3}A}{8\epsilon_0} \int_1^{2l} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\epsilon_0 l}$$

Суммарная напряженность от оснований E_2 равна нулю. Тогда

$$E_O = E_1 = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\epsilon_0 l}$$

2) Расстояние от положения равновесия F до точки O равно

$$OF = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

3) Положение равновесия устойчиво в случае

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l},$$

а период колебаний равен

$$T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\epsilon_0 l}{q} \left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}},$$

где q – пробный заряд.

Г.Расторгуев

Ф2815. Электрическая цепь представляет собой тетраэдр, в двух противо-

ложных ребрах которого находятся первый и второй идеальные источники постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 соответственно, в остальных ребрах расположены четыре резистора R_1, R_2, R_3 и R_4 (рис. 1).

Значения ЭДС источников и сопротивление одного из резисторов известны: $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $\mathcal{E}_2 = 12$ В, $R_2 = 3$ Ом. Величина силы тока через первый источник равна $I_1 = 1$ А и не изменяется при смене полярности подключения этого источника.

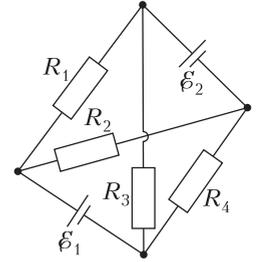


Рис. 1

не полярности подключения этого источника. Величина силы тока через второй источник при указанной на рисунке полярности равна $I_2 = 2$ А. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

1) Чему будет равна величина силы тока через второй источник, если полярность первого источника изменить?

2) Найдите величину силы тока через второй источник, если: а) первый источник удалить из цепи; б) первый источник заменить перемычкой с нулевым сопротивлением.

3) Чему равны сопротивления резисторов R_1, R_3 и R_4 ?

1) Воспользуемся методом наложения токов. Будем искать силы токов в ветвях цепи как суперпозицию сил токов, текущих в данных ветвях под действием одного источника, при условии, что другой источник в силу его идеальности заменен идеальной перемычкой. Пусть перемычкой заменен второй источник. Обозначим силы токов, текущих через первый и второй источники, через I_{11} и I_{21} соответственно (рис. 2). Тогда при смене полярности

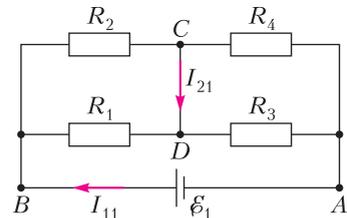


Рис. 2

подключения первого источника направление тока I_{11} изменится на противоположное, а величина силы тока останется неизменной. Теперь переключкой заменим первый источник. Обозначим силы токов, текущих через первый и второй источники, через I_{12} и I_{22} соответственно (рис. 3). Если

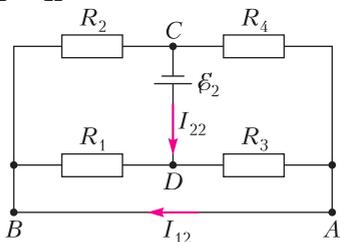


Рис. 3

сила тока I_{12} не равна нулю, то сохранение величины силы полного тока через первый источник при смене его полярности невозможно. Значит, сила тока I_1 равна нулю. Это возможно, только если мост является сбалансированным. Тогда имеем следующее соотношение между сопротивлениями:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Заметим, что данное условие также является условием балансировки моста, к которому подключен первый источник, когда второй заменен переключкой CD . Значит, сила тока I_{21} также равна нулю. Отсюда можно сделать вывод, что силы токов, текущих через первый и второй источники, определяются только величинами ЭДС соответствующих источников и полярностями их подключений. Таким образом, сила тока I'_2 , текущего через второй источник при смене полярности подключения первого источника, равна

$$I'_2 = I_2 = 2 \text{ А.}$$

2) Величины сил токов I_{2a} и I_{26} в случаях а) и б) соответственно будут определяться сопротивлением моста, подключенного к выводам C и D второго источника:

$$I_{2a} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_a}, \quad I_{26} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_6}.$$

Поскольку мост является сбалансированным, удаление переключки AB не приведет к изменению сопротивления моста между узлами C и D . Тогда сопротивления моста r_a

и r_6 будут одинаковыми и равными сопротивлению эквивалентного источника $r_0 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$, найденному при решении первого пункта, т.е. $I_{2a} = I_{26}$. Поскольку $I_2 = \mathcal{E}_2 / r_0$, то

$$I_{2a} = I_{26} = I_2 = 2 \text{ А.}$$

3) Силы токов I_1 и I_2 , текущих через первый и второй источники соответственно, определяются выражениями

$$\mathcal{E}_1 = I_1 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right),$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 \left(\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right).$$

Введем два обозначения: $R_1 = kR_2$, $R_4 = \alpha R_2$. Тогда $R_3 = \alpha k R_2$ и для сил токов I_1 и I_2 имеем

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_2} \frac{1+k}{k(1+\alpha)}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} \frac{1+\alpha}{\alpha(1+k)},$$

$$I_1 I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{R_2^2 \alpha k}, \quad \alpha k = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{I_1 I_2 R_2^2} = 4.$$

Заметим, что из условия задачи следует

$$\frac{\mathcal{E}_1}{I_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{I_2}.$$

Из этого соотношения и выражений для I_1 и I_2 получаем

$$\frac{\alpha(1+k)}{1+\alpha} = \frac{k(1+\alpha)}{1+k}, \quad \alpha(1+k)^2 = k(1+\alpha)^2,$$

$$\alpha + 2\alpha k + k^2 \alpha = k + 2\alpha k + \alpha^2 k,$$

$$\alpha + 4k = k + 4\alpha, \quad \alpha = k.$$

Учитывая, что $\alpha k = 4$, имеем $k = \alpha = 2$. Тогда

$$R_1 = R_4 = 2R_2 = 6 \text{ Ом}, \quad R_3 = 4R_2 = 12 \text{ Ом.}$$

А.Аполонский

Ф2816. В толстой плите из непроводящего твердого материала перпендикулярно поверхности просверлено отверстие диаметра $2r_0$, глубина которого меньше толщины плиты (рис. 1). К «дну» отверстия прикреплен один конец резинки с коэффициентом жесткос-

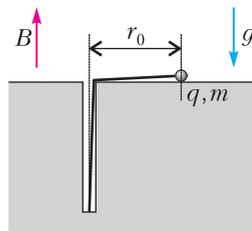


Рис. 1

ти k . Длина недеформированной резинки в точности равна глубине отверстия. На другом конце резинки закреплена бусинка массой m , заряженная положительным зарядом q . Плита расположена горизонтально в поле тяжести. Поверхность плиты гладкая. Перпендикулярно поверхности плиты включено однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен противоположно вектору ускорения свободного падения. Величина индукции магнитного поля равна B . Растягивая резинку, бусинку смещают по поверхности плиты на расстояние r_0 от оси отверстия и отпускают, сообщив ей такую перпендикулярную резинке скорость, что бусинка движется по окружности.

1) Определите угловые скорости движения бусинки при вращении ее по часовой стрелке и против часовой стрелки (если смотреть за ее движением сверху).

Сила, действующая на бусинку, зависит и от ее координаты \vec{r} , и от ее скорости \vec{v} линейным образом. Поэтому если есть два разных закона движения $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$, описывающие некоторые движения бусинки, то уравнение $\vec{r}(t) = \alpha \vec{r}_1(t) + \beta \vec{r}_2(t)$ при любых постоянных α и β правильно описывает закон физически реализуемого движения этой бусинки под действием таких же сил (ведь скорость и ускорение бусинки в любой момент времени будут описываться такими же комбинациями). Например, если бусинку из того же начального положения, что и в пункте 1, отпускают без начальной скорости, то закон ее движения можно найти как результат наложения (суперпозиции) законов вращений, изученных в этом пункте.

2) На какое минимальное расстояние к оси отверстия приблизится бусинка после отпускания без начальной скорости с расстояния r_0 от отверстия?

3) Через какое время τ после отпускания бусинка вновь окажется на расстоянии r_0 от оси отверстия?

4) Изобразите траекторию бусинки для случая $q^2 B^2 / (mk) = 1/2$. Через какое время после отпускания бусинка в первый раз окажется в исходной точке?

1) Уравнение движения бусинки на резинке в магнитном поле \vec{B} имеет вид

$$m\vec{a} = -k\vec{r} + q[\vec{v} + \vec{B}],$$

т.е. оно является линейным и однородным уравнением по отношению к закону движения $\vec{r}(t)$. При движении по окружности радиусом r_0 центростремительное ускорение бусинки создается силой упругости резинки и силой Лоренца, причем в зависимости от направления вращения сила Лоренца направлена либо к центру окружности, либо от него. Значит, величина угловой скорости бусинки находится из уравнения

$$m\omega^2 r_0 = kr_0 \pm qB\omega r_0,$$

$$\omega^2 = \pm \frac{qB}{m}\omega - \frac{k}{m} = 0.$$

Далее введем обозначения $\Omega = \frac{qB}{2m}$ и $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Тогда, выбирая для каждого случая положительный корень, приходим к выводу, что при вращении по часовой стрелке величина угловой скорости

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} + \frac{qB}{2m},$$

а при вращении против часовой стрелки

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} - \frac{qB}{2m} < \omega_1.$$

2) Пусть $\vec{r}_1(t)$ – закон движения бусинки, вращающейся по окружности радиусом r_0 по часовой стрелке, а $\vec{r}_2(t)$ – закон движения бусинки, вращающейся по той окружности против часовой стрелки. Модули скоростей движения у бусинки при этих движениях различаются: $|\vec{v}_1| = \omega_1 r_0$, а $|\vec{v}_2| = \omega_2 r_0$. Если записать суперпозицию этих законов движения в виде

$$\vec{r}(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t) + \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t),$$

то, в соответствии с линейностью и однородностью уравнения движения, этот закон тоже удовлетворяют уравнению движения. Легко определить начальные условия, которым он соответствует: поскольку $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0) = \vec{r}_0$ и при различных направлениях вращения $|\vec{v}_1(0)| = \omega_1 r_0 = \frac{\omega_1}{\omega_2} |\vec{v}_2(0)|$, то $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ и $\vec{v}(0) = 0$. Следовательно, по-

лученный закон описывает движение бусинки, запущенной без начальной скорости с расстояния r_0 от отверстия, и вектор координаты такой бусинки можно в любой момент времени найти как сумму вектора $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t)$ с постоянной длиной $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0$, вращающегося с угловой скоростью ω_1 по часовой стрелке, и вектора $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t)$ с постоянной длиной $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0$, вращающегося с угловой скоростью ω_2 против часовой стрелки от того же начального положения (рис. 2). Отметим, что угол между

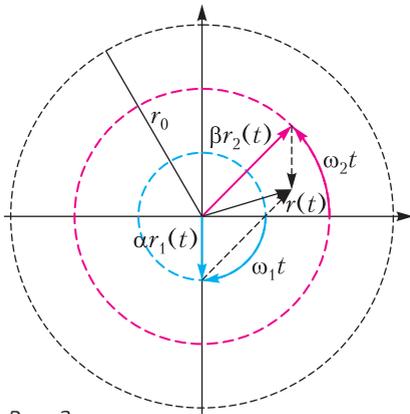


Рис. 2

этим векторами в момент времени t равен $\varphi(t) = (\omega_1 + \omega_2)t$. Поэтому, по теореме косинусов, в этот момент времени расстояние от бусинки до отверстия удовлетворяет уравнению

$$r^2(t) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + 2 \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \cos((\omega_1 + \omega_2)t).$$

Значит,

$$r(t) = \frac{r_0}{\omega_1 + \omega_2} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t)}.$$

Таким образом, циклическая частота изменения расстояния от бусинки до положения равновесия равна $\omega_1 + \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$, причем минимальное значение

$$r_{\min} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} r_0$$

расстояние принимает в моменты времени

$$t_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что для нахождения r_{\min} не обязательно исследовать закон изменения расстояния $r(t)$: достаточно понять, что расстояние от бусинки до отверстия минимально, когда векторы «составляющих» векторов нашей суперпозиции направлены противоположно. Тогда ясно, что r_{\min} равно разности их модулей.

3) Из формулы для $r(t)$ видно, что максимальное расстояние от бусинки до отверстия равно начальному: $r_{\max} = r_0$, и оно достигается в моменты времени

$$t'_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} n, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Как видно, впервые после отпущения это произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}.$$

4) При таком соотношении параметров $\Omega^2 = \omega_0^2/8$, следовательно, $\omega_1 = \omega_0\sqrt{2}$, а $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{2}$. Значит, отношение угловых скоростей $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 1$, т.е. общее движение периодическое и траектория оказывается замкнутой. В этом случае

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{3} \vec{r}_1(t) + \frac{2}{3} \vec{r}_2(t),$$

длины векторов, сумма которых дает $\vec{r}(t)$, равны $r_0/3$ и $2r_0/3$, а закон изменения расстояния выглядит так:

$$r(t) = \frac{r_0}{3} \sqrt{5 + 4 \cos(3\omega_2 t)}.$$

Ясно, что период движения – наименьшее общее кратное периодов двух составляющих движений, которое в нашем случае равно периоду меньшей частоты ω_2 . Поэтому впервые после отпущения бусинка окажется в исходной точке спустя время

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}},$$

а период изменения расстояния от отверстия

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\omega_0} = \frac{1}{3} T_1.$$

Поэтому за один период движения бусинка трижды достигает максимального расстояния r_0 , и трижды – минимального $r_0/3$. Таким образом, траектория за полный оборот вокруг оси отверстия трижды проходит от окружности с радиусом r_0 до окружности с радиусом $r_0/3$ и обратно, причем вблизи общих точек с большей окружностью бусинка движется по радиусу (траектория касается радиуса), в общих точках с меньшей окружностью радиальная скорость бусинки обращается в ноль при ненулевой угловой скорости – бусинка движется перпендикулярно радиусу и ее траектория касается меньшей окружности в общих точках. По этим сведениям можно достаточно корректно изобразить вид траектории (рис. 3).

А.Аполонский, К.Парфенов

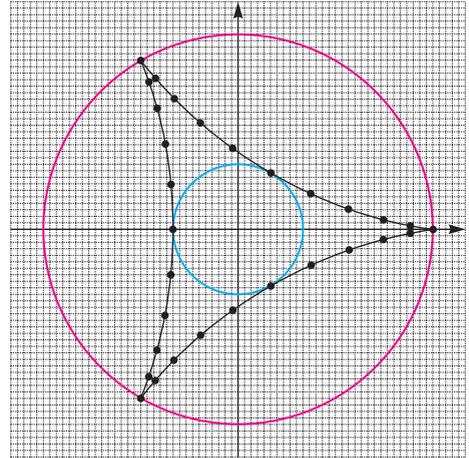


Рис. 3

Вариации на тему одной геометрической задачи

**Н.НИКОЛОВ (СОФИЯ),
А.ИВАНОВ (ПЛЕВЕН)**

В этой статье мы обсудим сюжет, связанный с геометрической задачей М2809, предлагавшейся на 73-й Болгарской национальной олимпиаде.

Рассмотрим такую несложную конструкцию. Пусть точки M и N расположены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC (рис. 1). Пусть отрезки AN и BM пересекаются в точке O . Далее будем использовать стандартные обозначения элементов треугольника: $BC = a$, $AC = b$, $\angle ACB = \gamma$. Кроме того, положим $CM = m$, $CN = n$, $\angle AOM = \theta$.

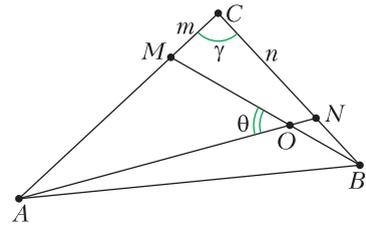


Рис. 1

Начнем со следующей задачи, которая в принципе доступна ученикам 7–8 классов.

Задача 1. Пусть $\angle ACB = 90^\circ$, а также пусть известно, что $AM = BC$ и $CM = BN$. Найдите $\angle AOM$.

Упражнение 1. Выясните, каков ответ в задаче 1 в предельных случаях $AC = BC$ и $AC = 2BC$.

Решение. Построим треугольник AMB до параллелограмма $AMB P$ (рис. 2). Тогда $BC =$

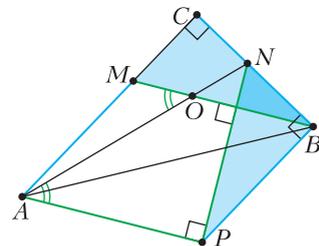


Рис. 2

$= AM = PB, CM = BN, \angle BCM = 90^\circ = \angle PBN$ и, значит, треугольники BCM и PBN равны. Следовательно, $AP = BM = PN$. Также имеем $\angle BNP = \angle CMB = 90^\circ - \angle MBN$, т.е. $NP \perp BM$, отсюда $NP \perp AP$. Тогда треугольник ANP – равнобедренный прямоугольный, откуда $\angle AOM = \angle OAP = 45^\circ$. Задача решена.

Упражнение 2. Получите другое решение задачи 1 из следующего построения (рис. 3). Пусть $BNAX$ – параллелограмм.

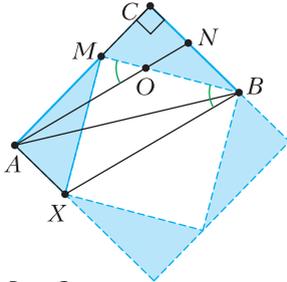


Рис. 3

а) Докажите равенство прямоугольных треугольников BCM и MAX .

б) Найдите углы треугольника XMB и далее найдите $\angle AOM$.

По-другому эту конструкцию можно получить, если взять квадрат, построенный на стороне AC , и вписанный в него квадрат, построенный на стороне BM .

Отметим, что в наших обозначениях условия $AM = BC$ и $CM = BN$ задачи 1 переписываются как $b - m = a$ и $m = a - n$.

Если $\angle ACB = 90^\circ$, несложные вычисления позволяют выразить величину θ через a, b, m, n . В частности, зафиксируем такое утверждение.

Утверждение 1. Если $\angle ACB = 90^\circ$, то $\theta = 45^\circ$ тогда и только тогда, когда

$$ab - mn = bm + an. \quad (1)$$

Доказательство. Положим $\theta_1 = \angle CAN$ и $\theta_2 = \angle BMC$, так что $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{NC}{AC} = \frac{n}{b}$ и $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{BC}{MC} = \frac{a}{m}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2} = \frac{ab - mn}{bm + an}.$$

Остается воспользоваться тем, что $\theta = 45^\circ$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} \theta = 1$. Что и требовалось.

Упражнения

3. Проведите алгебраическую выкладку, показывающую, что из системы равенств $b - m = a$ и $m = a - n$ следует (1).

4. Пусть a, b, m, n – положительные числа. Докажите, что из (1) следует, что $b > n$ и $a > m$.

Теперь мы зафиксируем a, b, m, n , а углу γ позволим меняться – можно считать, что у нас есть шарнир ACB с фиксированными отметками M и N на AC и CB . Тогда угол θ зависит от γ , т.е. определена функция $\theta = \theta(\gamma)$ при $\gamma \in (0; \pi)$. Можно понаблюдать (например, в программе Geogebra) за изменением $\theta(\gamma)$. Докажем некоторые утверждения о поведении $\theta(\gamma)$.

Утверждение 2. Пусть $a > m$ и $b > n$. Тогда $\theta(\gamma)$ строго убывает на интервале $(0; \pi)$.

Прежде чем доказать это утверждение, зафиксируем такое следствие.

Следствие. Пусть выполнено (1). Тогда: $\theta > 45^\circ$ тогда и только тогда, когда $\gamma < 90^\circ$, $\theta = 45^\circ$ тогда и только тогда, когда $\gamma = 90^\circ$, $\theta < 45^\circ$ тогда и только тогда, когда $\gamma > 90^\circ$.

Доказательство. Действительно, из упражнения 4 мы знаем, что (1) влечет $a > m$ и $b > n$. Тогда все следует из утверждений 1 и 2: $\theta(\gamma)$ строго убывает, а кроме того, выполнено

$$\text{равенство } \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}. \text{ Следствие доказано.}$$

Напомним задачу M2809 (приведем ее формулировку в наших обозначениях) и поймем, что она сразу следует из утверждения 2.

Задача 2 (M2809). Известно, что $AM = BC$ и $CM = BN$. Найдите γ , если известно, что $\gamma = 2\theta$.

Первое решение. Как мы видели в следствии, при $\gamma < 90^\circ$ выполнено $2\theta > 2 \cdot 45^\circ > \gamma$, а при $\gamma > 90^\circ$ выполнено $2\theta < 2 \cdot 45^\circ < \gamma$. Значит, $\gamma = 90^\circ$ – единственное возможное значение.

В конце этой статьи мы приведем еще одно короткое изящное геометрическое решение задачи M2809, не опирающееся ни на какие другие утверждения из статьи.

Но пока продолжим исследование.

Доказательство утверждения 2. Положим $x = \cos \gamma$, $y = -\cos \theta$. Нам достаточно понять, что функция $y(x)$ строго возрастает на промежутке $x \in [-1; 1]$. Ниже мы вычислим $y(x)$ явно.

Достроим треугольник AMB до параллелограмма $AMBP$ (рис. 4) так, что $BP = AM = b - m$, $\angle NBP = 180^\circ - \gamma$, $\angle NAP = \theta$.

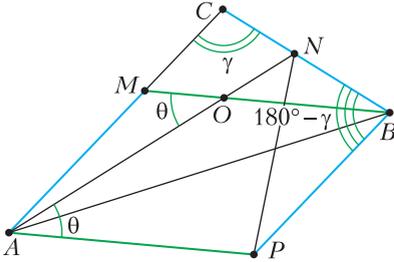


Рис. 4

Выразим AN , $AP = BM$, PN , пользуясь теоремой косинусов для треугольников ACN , MCB , PBN , а далее выразим $y = \cos \theta$, применив теорему косинусов для треугольника PAN . Имеем

$$AN^2 = b^2 + n^2 - 2bnx,$$

$$AP^2 = BM^2 = a^2 + m^2 - 2amx,$$

$$PN^2 = (a - n)^2 + (b - m)^2 + 2(a - n)(b - m)x,$$

а далее, как нетрудно проверить непосредственно,

$$y = -\cos \angle NAP = \frac{PN^2 - AN^2 - AP^2}{2AN \cdot AP} = \frac{k(px - 1)}{\sqrt{1 - qx}\sqrt{1 - rx}},$$

где $k = \frac{2(an + bm)}{\sqrt{b^2 + n^2}\sqrt{a^2 + m^2}}$, $p = \frac{ab + mn}{an + bm}$,

$$q = \frac{2bn}{b^2 + n^2} < 1, \quad r = \frac{2am}{a^2 + m^2} < 1.$$

Заметим, что $p - 1 = \frac{(a - m)(b - n)}{an + bm} > 0$, так что $p > 1$.

Видим, что $y\left(\frac{1}{p}\right) = 0$. Далее, при $x \in \left(\frac{1}{p}; 1\right]$

функция $y(x)$ – положительная и строго возрастающая, так как числитель положителен и возрастает, а знаменатель положителен и убывает. Чтобы исследовать функцию

$y(x)$ при $x \in \left[-1; \frac{1}{p}\right)$, преобразуем выражение к виду

$$y(x) = (-k) \cdot \sqrt{1 - \frac{(p - q)x}{1 - qx}} \cdot \sqrt{1 - \frac{(p - r)x}{1 - rx}}.$$

Каждый из корней – положительная убывающая функция, значит, $y(x)$ возрастает. Утверждение доказано.

Упражнение 5. Убедитесь (пользуясь алгебраическими или геометрическими сообра-

жениями), что $y(1) = 1$ и $y(-1) = -1$. Таким образом, убывающая функция $\theta(\gamma)$ для $\gamma \in (0; \pi)$ имеет область значений $(0; \pi)$ и может быть доопределена по непрерывности в концах интервала: $\gamma(0) = \pi$ и $\gamma(\pi) = 0$.

Докажем еще одно утверждение; оно будет следовать из предыдущего.

Утверждение 3. Пусть выполнено равенство (1) и $\gamma \geq 45^\circ$. Тогда $\theta \leq 90^\circ$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $\gamma = 45^\circ$ и $an = bm$.

Доказательство. Покажем, что $y \leq 0$ при $x \leq 1/\sqrt{2}$. Из предыдущего доказательства знаем, что знак y такой же, как знак $px - 1$. Значит, достаточно проверить, что $p^2 \leq 2$, т.е. что

$$(ab)^2 + (mn)^2 \leq 2((an)^2 + (bm)^2 + abmn).$$

Возведя (1) в квадрат, получим, что

$$(ab)^2 + (mn)^2 = (an)^2 + (bm)^2 + 4abmn$$

и все сводится к очевидному неравенству $(an - bm)^2 \geq 0$. Ясно, что $y = 0$ выполнено только при $x = 1/\sqrt{2}$ и $an = bm$.

Упражнение 6. Пусть $AM = BC$ и $CM = BN$, т.е. $a = m + n$ и $b = 2m + n$, где $m > 0$ и $n > 0$ произвольные. Пользуясь предыдущим утверждением, покажите, что если $\gamma \geq 45^\circ$, то $\theta \leq 90^\circ$, причем $\theta = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $n = \sqrt{2}m$.

Ясно, что в нашей конструкции оба неравенства $a \leq m$ и $b \leq n$ одновременно не могут быть выполнены. В следующих двух утверждениях мы рассмотрим случай $a \leq m$ (случай $b \leq n$ аналогичен). В доказательствах изучаем ту же функцию $y(x)$, что и ранее в доказательстве утверждения 2.

Утверждение 4. Пусть $a = m$. Тогда $\theta(\gamma)$ строго убывает при $\gamma \in (0; \pi)$, при этом область значений $\theta(\gamma)$ – интервал $(0; \pi/2)$.

Доказательство. В наших предыдущих обозначениях имеем $p = r = 1$ и $y(x) = -k\sqrt{\frac{1 - x}{1 - qx}}$ – отрицательная строго возрастающая функция на промежутке $x \in [-1; 1]$. При этом $y(-1) = -1$ и $y(1) = 0$.

Утверждение 5. Пусть $a < m$. Тогда существует $\gamma_0 \in (0; \pi/2)$ такое, что $\theta(\gamma)$ строго возрастает на интервале $(0; \gamma_0]$, принимая все значения из интервала $(0; \theta(\gamma_0)]$, и строго убывает на интервале $[\gamma_0; \pi)$, принимая

все значения из интервала $[\theta(\gamma_0); 0)$. Кроме того, $\theta(\gamma_0) < \pi/2$.

Доказательство. Так как $a < m$, то $p < 1$, и из формулы для $y(x)$ видим, что $y(x) \in (-1; 0)$ при $x \in (-1; 1)$, а кроме того, $y(\pm 1) = -1$. Теперь остается понять, что найдется $x_0 \in (-1; 1)$ такое, что $y(x)$ строго возрастает при $x \in [-1; x_0]$ и строго убывает при $x \in [x_0; 1]$, а кроме того, $x_0 > 0$.

Вычисление производной дает:

$$y'(x) = \frac{ux + v}{2(\sqrt{1-qx}\sqrt{1-rx})^3},$$

где $u = 2qr - pq - pr$, $v = 2p - q - r$. Видим, что (поскольку $y(x)$ — не постоянная функция) производная $y'(x)$ может обра-

щаться в 0 лишь в одной точке ($x_0 = -\frac{v}{u}$), соответственно знак $y'(x)$ может меняться не более одного раза (только в точке x_0). Значит, либо $y(x)$ строго монотонна на $[-1; 1]$, либо $[-1; 1]$ разбивается точкой x_0 на два промежутка строгой монотонности. Первый вариант невозможен, поскольку $y(\pm 1) = -1$. Значит, $x_0 \in (-1; 1)$, при этом, поскольку $y(x) > -1$ на интервале $x \in (-1; 1)$, $y(x)$ обязана строго возрастать при $x \in [-1; x_0]$ и строго убывать при $x \in [x_0; 1]$.

Остается выяснить, что $x_0 = -\frac{v}{u} > 0$. Мы уже знаем, что $y'(x) > 0$ при $x \in [-1; x_0]$ и $y'(x) < 0$ при $x \in [x_0; 1]$. В частности, $y'(-1) > 0$, откуда $-u + v > 0$ и $y'(1) < 0$, значит, $u + v < 0$. Отсюда получаем, что $u < 0$. Покажем, что $v > 0$, непосредственной подстановкой: положим $s = \frac{a}{m}$, $t = \frac{n}{b}$ (так что $s > t$) и преобразуем

$$\begin{aligned} \frac{v}{2} &= p - \frac{q}{2} - \frac{r}{2} = \frac{s+t}{st+1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{t}{t^2+1} = \\ &= \frac{(s-t)^2(s+t)}{(st+1)(s^2+1)(t^2+1)} > 0. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

В завершение, как и было обещано, приведем решение задачи 2, не опирающееся на результаты статьи. Это решение придумал участник олимпиады Васил Василев.

Второе решение задачи M2809. Итак, $AM = BC$, $CM = BN$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle AOM = \frac{\gamma}{2}$.

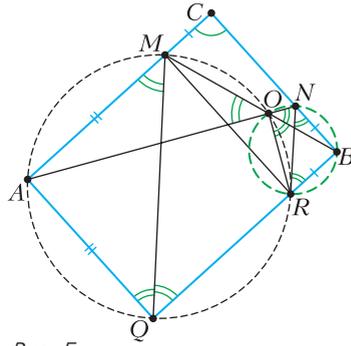


Рис. 5

1) Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACBQ$ (рис. 5). Тогда $\angle QAM = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \gamma$. А поскольку $AM = BC = AQ$, из равнобедренного треугольника AMQ имеем $\angle AQM = \frac{180^\circ - \angle QAM}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Видим, что $\angle AQM = \angle AOM$, значит, точки A, Q, O, M лежат на одной окружности.

2) Теперь на отрезке BQ возьмем точку R такую, что $BR : RQ = CM : MA$ (так, что $AMRQ$ и $MCBR$ — параллелограммы). Тогда $\angle CBR = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \gamma$. А поскольку $BR = CM = BN$, из равнобедренного треугольника BRN имеем $\angle BRN = \frac{\gamma}{2}$. Видим, что $\angle BRN = \angle BON$, значит, точки B, R, O, N лежат на одной окружности.

3) Далее, из окружности $(BRON)$ видим, что $\angle ROB = \angle RNB = \frac{\gamma}{2}$. Но из предыдущего счета углов $\angle RQM = \angle RQA - \angle MQA = \gamma - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Значит, $\angle ROB = \angle RQN$, откуда следует, что четырехугольник $MQRO$ — вписанный.

4) Итак, все пять точек A, Q, O, M, R лежат на одной окружности. Отсюда сразу следует утверждение задачи, поскольку тогда $AQRM$ — вписанный параллелограмм, а это значит, что он — прямоугольник, откуда $\gamma = \angle AQB = 90^\circ$.

Упражнение 7. Замените шаг 3) решения доказательством того, что $AQRO$ — вписанный четырехугольник.

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

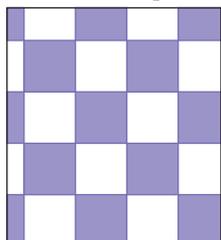
Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

9. Из клетчатой скатерти со стороны клетки 1 вырезали прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам клеток, как на рисунке. Суммарная площадь белой части прямоугольника равна 10. Найдите его периметр.



Г. Караваяев

10. Можно ли число

20242024202420242024

представить в виде суммы шести натуральных чисел, каждое из которых записывается а) только цифрами 0 и 4; б) только цифрами 4?

Е. Бакаев

11. Миша смотрел «Что? Где? Когда?» и выписывал счет, начиная с 0:0 и до конца игры (в каждом раунде разыгрывается одно очко; игра заканчивается, когда зрители или знатоки наберут 6 очков). Если у зрителей было больше очков, Миша делал запись синей ручкой, если очков было больше у знатоков — красной ручкой, а если была ничья — зеленой. Могло ли оказаться, что красных, синих и зеленых записей было поровну?

М. Евдокимов

12. Можно ли всю поверхность какого-нибудь выпуклого многогранника оклеить в один слой одним правильным десятиугольником и несколькими квадратами?

Е. Бакаев

13. В комнате находится 50 лампочек. К каждой лампочке подсоединены два выключателя, каждый либо включен, либо выключен. Лампочка горит только тогда, когда оба выключателя, подсоединенных

к ней, включены. Сначала в комнате горело 15 лампочек, а когда все 100 выключателей переключили, стало гореть 24 лампочки. Сколько выключателей теперь надо переключить, чтобы зажглись все лампочки?

Г. Караваяев

14. а) Дан треугольник площади 4. В нем отмечают точку и соединяют с вершинами, при этом получаются три треугольника. Если их площади равны 1, 1, 2, то назовем такую точку *хорошей*. Рассмотрим треугольник с вершинами в трех хороших точках. 1) Докажите, что он подобен исходному треугольнику. 2) Найдите его площадь.

б) Дан треугольник площади 6. В нем отмечают точку и соединяют с вершинами, при этом получаются три треугольника. Если их площади равны 1, 2, 3, то назовем такую точку *хорошей*. Найдите площадь выпуклого шестиугольника с вершинами в шести хороших точках.

Е. Бакаев

15. Федя разложил перед собой 16 лотерейных билетов и продает их по 1000 рублей за каждый. Два из них выигрышные — купивший получит стоимость билета и еще 1000 рублей выигрыша. Федя сегодня добрый, поэтому за 100 рублей ему можно задать любой вопрос, который допускает ответ «да» или «нет», и он честно на него ответит. Можно ли, задав несколько таких вопросов, гарантированно заработать а) 1200 рублей; б) 1300 рублей?

Ф. Ивлев

16. На прямой отмечено несколько точек. Известно, что для любых отмеченных точек A, B, C таких, что B на отрезке AC , выполняется $AB/BC \leq 3$. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

Е. Бакаев

Задачи

1. В кружке 10 человек, у каждого из них дома есть аквариум. Известно, что у каждого в аквариуме не более 6 рыбок, причем не более чем у половины из этих людей не менее трех рыбок. Какое наибольшее число рыбок может быть у всех членов этого кружка вместе?



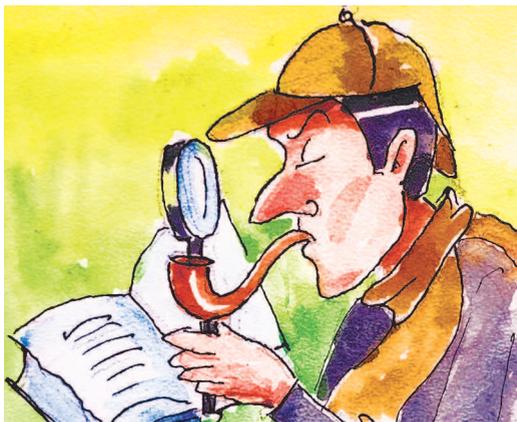
2. В ряд по возрастанию выписаны 12 различных целых чисел. Первые три из них — нечетные, последние два — четные, а среднее по величине из нечетных чисел стоит рядом со средним по величине из четных чисел. Сколько всего нечетных чисел среди этих 12?



Задачи 1 и 2 предлагались на конкурсе «Смарт КЕНГУРУ». Задачи 3 и 4 предлагались на Московской устной олимпиаде.

3. Существует ли такое натуральное число, у которого сумма цифр в десятичной записи равна 100, а у удвоенного числа — 110?

*Олимпиада Чили для юниоров
2012 года*



4. Петя записал на доске четыре различных двузначных числа. Докажите, что Вася сможет взять некоторые из них и, используя знаки четырех арифметических действий и скобки, составить выражение, значение которого будет больше 1, но меньше 2.

К.Кноп



71 узелок

К. КОХАСЬ

– Разумеется, произведения искусства не стареют, – объяснял коллега Спрудль. – Но я не люблю бессмысленные финтифлюшки. Хочется, чтобы антикварная ве-е-ещь была бы функциональной, чтобы она была не просто древней, но при этом и – бульк – как бы это сказать, высокотехнологичной в своем классе.

– Понимаю, – сказал Горгулий. – Думаю, я смогу вам помочь. Вы знаете, что такое египетский треугольник?

– Пе-е-ервый раз слышу, бульк!

– Совершенно гениальный инструмент, хотя и кажется немного простоватым. Использовался при строительстве египетских пирамид!

– Что вы говорите, – заинтересовался коллега Спрудль.

– Это веревка, связанная в кольцо, на которой завязано 12 узелков. С ее помощью отмерялись прямые углы. Это потрясающе! Чтобы отмерить прямой угол, вы берете первый, четвертый и восьмой узелки и тянете их в стороны, чтобы получился треугольник. Тогда угол, в вершине которого находится чет-

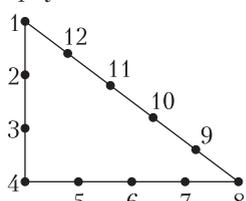


Рис. 1

вертый узелок, – прямой!

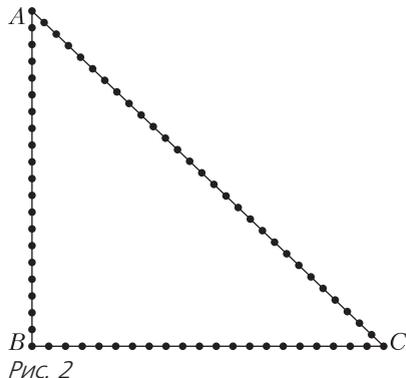
– Любопытно, любопытно, – пробормотал коллега Спрудль, разглядывая чертеж (рис.1).

– Но мало кто знает, – продолжал Горгулий, – что имеется куда более продвинутый вариант этого инструмента. Это... древнешумерский треугольник!

Горгулий достал из ящика стола красивую, довольно потертую веревку, на которой было завязано очень много узелков.

– От древних шумеров мало что осталось, – с нотками сожаления произнес Горгулий. – Истинные шедевры слишком хрупки. Это всего лишь более поздняя имитация. Но время не в силах стереть

интеллектуальную ауру этого предмета! Смотрите, здесь не 12 узелков, а существенно больше – 71. В то время еще не додумались до идеи завязать эту веревку в кольцо. Для построения прямого угла ABC мы от первого узла A должны отсчитывать узлы: 21-й узел обозначим B , а 42-й – C (рис.2). Последний, т.е. 71-й узел, совместим с



узлом A . Конечно, отсчитывать десятки узелков довольно хлопотно, – импровизировал Горгулий, – но уверяю вас, оно того стоит. Это вам не грубая поделка 3, 4, 5. Фактически, это в 5 раз более точное построение! Видите: потянув за узлы A, B, C , мы получаем треугольник со сторонами 20, 21 и 29, и он прямоугольный!

– Беру! – клюнул, наконец, коллега Спрудль.

– Следующий год – год Пифагора, – сказала Огрыза, заходя в комнату. – Смотрите, какой замечательный новогодний флажок я купила у коллеги Спрудля. Очень красиво, да и недорого!

– Я тоже купил у него флажок, – сказал дядя Спятел.

– И я, – поддакнула Бусенька.

– Вы, кажется, очень довольны своими покупками, – сказал таракан Кузька. – Неужели коллега Спрудль стал положительным персонажем?

– Вряд ли, – с сомнением сказала Огрыза, – но ему единственному пришла в голову очень удачная идея делать и продавать новогодние флажки в форме прямоугольного треугольника.

– При чем тут прямоугольные треугольники? Что тут удачного? – не понял Кузька.

– Ну как же, с именем Пифагора связана знаменитая теорема, – объяснил дятел Спятел. – В любом прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c выполняется равенство

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

– Не может быть! – воскликнул Кузька. – В любом прямоугольном треугольнике?

– В любом! – подтвердил дятел Спятел.

– Я должен это проверить! Дайте мне ваши флажки! – сказал Кузька и убежал за рулеткой.

Бусенька, дятел Спятел и Огрыза положили на стол свои флажки, и Кузька принялся за измерения, бегая с рулеткой от одного флажка к другому. Время от времени он откладывал рулетку и кружил на одном месте, словно танцевал.

– Все-таки это завораживающее зрелище, когда Кузька что-то вычисляет, – похвалила Бусенька. – Эти его приемы счета на лапах порою выглядят как настоящий балет.

– Готово! – доложил Кузька, – я все проверил. Диагноз ясен: вы слишком увлекаетесь авторитетами. Теорема Пифагора неверна!

– Как неверна? Почему неверна? – хором спросили Бусенька и дятел Спятел.

– Кажется, кто-то из нас спятил, – предположила Огрыза.

– Я очень аккуратно вычислил стороны ваших флажков в миллиметрах и для каждого из них подсчитал величину $c^2 - a^2 - b^2$. Для бусенькиного флажка эта величина равна 220, для огрызинового – 265, а для флажка дятла Спятла – 317.

Все с удивлением смотрели на Кузьку.

– Забавно, – сказал, наконец, дятел Спятел. – Я заплатил за свой флажок как раз 3 рубля 17 копеек.

– А я за свой 2 рубля 65 копеек, – сказала Огрыза.

– А я за свой, – театрально закатив глаза, медленно произнесла Бусенька, – 2 рубля 20 копеек!

Теперь уже Кузька смотрел на остальных, как на новые ворота.

– Мистика какая-то, – сказал он.

– По крайней мере, из твоих вычислений ясно, что наши флажки – это не прямоугольные треугольники, – сказала Бусень-

ка. – Угол, который мы считали прямым, на самом деле чуть-чуть больше 90° . На глаз разница практически незаметна. Интересно, как коллега Спрудль назначает цену?

– По площади, – сказала Огрыза. – Он при мне измерил катеты флажка, перемножил их, поделил на 2 и сообщил: «Площадь флажка столько-то квадратных сантиметров», а потом вычислил цену флажка, умножив площадь на цену одного квадратного сантиметра.

– Но ведь флажок непрямоугольный, – возмутился дятел Спятел, – его площадь меньше половины произведения сторон! Значит, он высыл площадь, а вместе с ней и цену!

– Может, он ошибается, потому что думает, что флажки у него прямоугольные, – предположила Бусенька. – А то, что все его ошибки в его пользу, – это рефлекс, который он вырабатывал годами. Как он выкраивает флажки? С помощью угольника?

– Ааааа... Кажется, я знаю как! – догадался дятел Спятел. – С помощью египетского треугольника! Точнее, не египетского, а древнешумерского!

– Древне... какого? – не понял Кузька.

– Древнешумерского! Горгулий завязал на старой веревке 71 узелок и продал ее коллеге Спрудлю по цене антиквариата. Будто бы это древний инструмент для построения прямых углов. Узелки завязаны через равные расстояния. Совмещая первый узел с последним, мы строим с помощью веревки треугольник со сторонами 20, 21 и 29.

– $20^2 + 21^2 = 29^2$, – быстро подсчитал Кузька. – Это же настоящий прямоугольный треугольник! Он древний?

– Очень древний, – подтвердила Бусенька, – и довольно-таки шумерский. Вот только мне кажется, что очень неудобно все время совмещать первый и последний узел. Почему бы не связать концы веревки в том месте, где совмещаются узлы?

– Действительно неудобно, – согласилась Огрыза. – Видимо, коллега Спрудль так и сделал. Но если при этом он совместил крайние узлы, то у него получился двойной или даже тройной узел – очень неуклюжая конструкция.

– Я думаю, он не стал бы завязывать лишний узел, – сказал дятел Спятел. – Ведь это была бы очевидная подделка, уменьшающая историческую ценность инструмента. Наверно, он завязал незаметный узелок, а то и вовсе склеил концы веревки.

– Если предположить, что он удлинил при этом веревку на одно звено, – подытожила Бусенька, – то получится, что для откладывания прямого угла он строит треугольник ABC со сторонами 20, 21 и 30. В таком треугольнике

$$\cos \angle ABC = \frac{20^2 + 21^2 - 30^2}{2 \cdot 20 \cdot 21} \approx -0,07,$$

что соответствует $\angle ABC \approx 94^\circ$.

– Подумать только, лишние 4 градуса, – сказал дятел Спятел, внимательно рассматривая свой флажок.

– Но как же так получилось, – спросил Кузька, – что цена флажка равна величине $c^2 - a^2 - b^2$?

– У наших флажков углы ABC одинаковые, поэтому величина $c^2 - a^2 - b^2$ пропорциональна площади, – ответила Огрыза, – а то, что коэффициент пропорциональности равен 1, просто совпадение.

– Не может быть! – не поверил Кузька.

Вопросы

1. Вооружившись калькулятором, найдите, сколько стоит один квадратный сантиметр флажка у коллеги Спрудля.

2. Большую ли прибыль получал коллега Спрудль из-за неправильного подсчета площади, иными словами, на сколько процентов он завывшал площадь флажка?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Задача Капицы о пролете цилиндра через соленоид

И. КРАВЧЕНКО

В ЭТОЙ СТАТЬЕ ПРЕДЛАГАЕТСЯ ЧИТАТЕЛЮ вместе с автором порассуждать над задачей академика Петра Леонидовича Капицы из брошюры «Физические задачи» (М.: Знание, 1966). Ее оригинальное условие выглядит так:

Через соленоид, по которому течет ток, пролетает проводящий цилиндр. Определите условия, при которых магнитное поле не позволит цилиндру пролететь через соленоид. Омическими сопротивлениями цилиндра и соленоида можно пренебречь.

Возможно усмотреть два существенно отличающихся способа интерпретации данного условия:

- Цилиндр издали подлетел к соленоиду и уже частично в нем находится («пролетает»), имея некоторую скорость движения.

- Цилиндр, уже целиком находящемуся внутри того же соленоида, придали толчком некоторую скорость движения (тоже «пролетает»).

Имя П.Л. Капицы как ученого связано с фундаментальными открытиями в области физики низких температур и объяснением сверхпроводимости. Так, Нобелевская премия по физике 1978 года присуждена П.Л. Капице за «базовые исследования и открытия в области физики низких температур». Петр Леонидович был также блестящим экспериментатором и инженером, его работы вошли в историю развития физического эксперимента.

В этой связи упомянутые в условии задачи соленоид и цилиндр как нельзя кстати можно считать *сверхпроводящими*. А электрическое сопротивление любого сверхпроводника должно быть равным нулю ($R = 0$). Хотя рекомендация не учитывать сопротивление проводящих тел есть в самом условии, требование сверхпроводимости избавляет от необходимости учета тепловых потерь энергии в рассматриваемой системе.

Однако, сверхпроводимость – это не просто идеальная проводимость; условие

сверхпроводимости объекта предполагает, что *магнитный поток через любой замкнутый сверхпроводящий контур сохраняется неизменным* (это так называемый закон сохранения магнитного потока через сверхпроводящий контур). Сверхпроводимость может также «разрушаться» – более подробно об этом и не только можно прочитать в статье Ю.Шаврина «Закон сохранения магнитного потока» в «Кванте» №6 за 1970 год.

Наш сверхпроводящий цилиндр будем считать сделанным не из железа, а то с его (железа) магнитными свойствами нам разобраться будет далеко не просто. За магнитные свойства материала отвечает физическая величина, называемая магнитной проницаемостью и обозначаемая μ , – в нашем рассмотрении у цилиндра она будет примерно равна единице. (Вообще далее будем исходить из предположения, что в любой области пространства $\mu = 1$.)

Уточним еще начальные условия в рассматриваемой задаче, чтобы при ее решении получить вполне определенный ответ.

1) Считаем, что соленоид закреплен.

2) Пусть цилиндру, изначально покоившемуся относительно соленоида и целиком находящемуся внутри соленоида, придали толч-

ком некоторую скорость движения \vec{v} , направленную вдоль оси соленоида (не усложняем геометрию ситуации).

3) Соленоид и цилиндр в происходящем процессе в любой момент времени расположены соосно (симметрия в помощь).

4) Соленоид и цилиндр считаем длинными: это означает, что длина соленоида (цилиндра) много больше диаметра его сечения. Обозначая длины соленоида и цилиндра через L и l , а диаметры их сечений соответственно через D и d , условия их «длинности» записываются так: $L \gg D$ и $l \gg d$. (В случае длинного соленоида при протекании по нему «вращающегося» тока можно полагать, что магнитное поле, порожденное этим током, является однородным и сосредоточено целиком внутри этого соленоида.)

5) Размеры соленоида много больше соответствующих размеров цилиндра: $L \gg l$ и $D \gg d$ (в предельных случаях решение всегда значительно проще – здесь мы избавляемся от лишней математики: не зря же брошюра, из которой взята предлагаемая задача, называется «Физические задачи»).

6) В соленоид и цилиндр, перед тем как их вложить друг в друга, «закачали» магнитные поля индукций B_c и $B_{\text{ц}}$ соответственно (о «закачке» поля внутрь сверхпроводника см. в упомянутой статье Ю.Шаврина).

Итак, соленоид и цилиндр представляют систему, которую будем считать изолированной (энергия не приходит в систему от других тел и не уходит из системы к каким-либо телам). *Под процессом в задаче понимаем движение цилиндра после сообщения ему скорости толчком вплоть до его остановки вне соленоида.*

Из условия рассматриваемой задачи можно заключить, что будет происходить торможение цилиндра. Поэтому условие «непролета» можно сформулировать в общих чертах так: *магнитное поле не позволит цилиндру пролететь через соленоид в том случае, если цилиндр будет иметь начальную скорость \vec{v} , недостаточную для его выхода из пространства внутри соленоида.* Сила, препятствующая движению цилиндра, действует на него, конечно, со стороны соленоида (точнее, магнитного поля соленоида). Решение задачи с использованием законов Ньютона видится проблематичным – на этом пути мы можем встретить и требование неоднородности магнитного поля соленоида



вблизи цилиндра, и необходимость вывода формулы для действующей на цилиндр магнитной силы, и интегрирование.

В подобного рода ситуациях нередко вырывают энергетические соображения. Энергия нашей системы не может меняться (система изолирована), а состояния системы в начале и в конце процесса нам известны. Применяя закон сохранения энергии, можно просто найти минимальную начальную скорость \vec{v}_{\min} цилиндра, удовлетворяющую его выходу из соленоида, а затем констатировать – при скоростях цилиндра, меньших \vec{v}_{\min} , соленоид не позволит цилиндру пролететь через него. Так и сделаем.

Энергия системы в начале процесса складывается из кинетической энергии E_{k0} цилиндра, энергии W_{c0} магнитного поля внутри соленоида вне цилиндра и энергии $W_{ц0}$ магнитного поля цилиндра:

$$E_{k0} + W_{c0} + W_{ц0}.$$

Энергия системы в конце процесса состоит из энергии W_c магнитного поля внутри соленоида, в котором уже нет цилиндра, и энергии $W_{ц}$ магнитного поля цилиндра, находящегося уже вне соленоида:

$$W_c + W_{ц}.$$

Закон сохранения энергии предполагает равенство начальной и конечной энергий:

$$E_{k0} + W_{c0} + W_{ц0} = W_c + W_{ц}.$$

На рисунке 1 схематически показано взаимное расположение соленоида С и цилиндра Ц в начале процесса, на рисунке 2 – их взаимное расположение в конце процесса. На этих рисунках стоит обратить внимание на область $PKMNP$ пространства внутри соленоида, заключенную внутри воображаемого цилиндра с боковой поверхностью, лежащей на внутренней поверхности соленоида, и основаниями PN и KM , проходящими через основания сверхпроводящего цилиндра. Из рисунков видно, что конфигурация системы внутри соленоида *вне* области $PKMNP$ в начале и в конце процесса одинакова. Полагая магнитное поле внутри соленоида *вне* указанной области в начале и в конце процесса неизменным, для удобства под энергиями W_{c0} и W_c в законе сохранения энергии понимаем энергии поля внутри соленоида только в области $PKMNP$ *вне* цилиндра.

Энергия W однородного магнитного поля с индукцией B в объеме V может быть

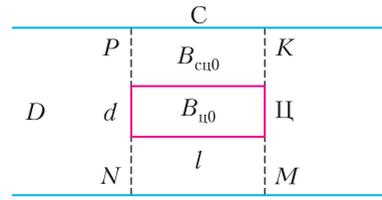


Рис. 1

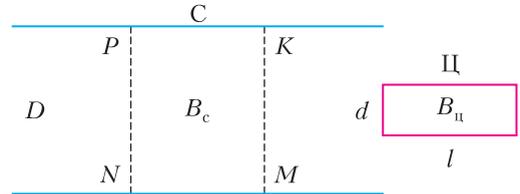


Рис. 2

выражена через объемную плотность энергии w :

$$W = wV,$$

где $w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$ (μ_0 – магнитная постоянная).

Обозначив $k = \frac{1}{2\mu\mu_0}$, перепишем выражение для W несколько иначе:

$$W = kB^2V.$$

Эта формула окажется для нас более удобной – ею и будем пользоваться как выражением для энергии однородного магнитного поля (коэффициент k в любой области пространства в нашей ситуации есть величина постоянная, что можно показать).

Для общности допустим, что магнитное поле *всегда* существует в любой области как внутри соленоида, так и внутри цилиндра. Тогда, с учетом всего сказанного и определения кинетической энергии, перепишем закон сохранения энергии так:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} + kB_{cн0}^2V_{цн} + kB_{ц0}^2V_{ц} = kB_c^2V_c + kB_{ц}^2V_{ц}, \quad (1)$$

где m – масса цилиндра, $B_{cн0}$ – индукция в области $PKMNP$ *между* соленоидом и цилиндром с объемом пространства

$$V_{цн} = \pi l \left(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4} \right) \text{ в начале, } B_{ц0} - \text{ индукция}$$

в цилиндре объемом $V_{ц} = \pi \frac{d^2}{4} l$ в начале, B_c – индукция в области $PKMNP$ с объемом

$$V_c = \pi \frac{D^2}{4} l \text{ в конце, } B_{ц} - \text{ индукция в цилиндре в конце.}$$

Далее, сверхпроводящее состояние соленоида и цилиндра требует сохранения магнитного потока в них через любой контур по их поверхности. Обозначая магнитные потоки через произвольный контур по соленоиду и цилиндру Φ_c и $\Phi_{\text{ц}}$ соответственно, имеем

$$\Phi_c = \text{const},$$

$$\Phi_{\text{ц}} = \text{const}.$$

Магнитный поток Φ через *плоский* контур в случае *однородного* поля с индукцией \vec{B} по определению равен $\Phi = BS \cos \alpha$, где S – площадь контура, α – угол между нормалью к плоскости контура и вектором \vec{B} . Если в разных частях такого контура индукция имеет различную величину, то для нахождения магнитного потока через контур можно рассчитать сначала «частичные» потоки через каждую из таких частей, а потом сложить эти потоки.

Выберем в области $PKMNP$ произвольный плоский контур, проходящий по поверхности соленоида (пусть плоскость контура перпендикулярна оси соленоида), и запишем равенство магнитных потоков в начале и в конце процесса через этот контур:

$$B_{\text{сн0}}(S - s) + B_{\text{ц0}}s = B_c S, \quad (2)$$

где $S = \pi \frac{D^2}{4}$ и $s = \pi \frac{d^2}{4}$ – площади торцов соленоида и цилиндра соответственно. В левой части этого уравнения первое слагаемое – «частичный» поток с индукцией $B_{\text{сн0}}$, второе слагаемое – «частичный» поток с индукцией $B_{\text{ц0}}$.

Теперь запишем равенство магнитных потоков в начале и в конце процесса через произвольно выбранный плоский контур, проходящий по поверхности цилиндра (пусть плоскость этого контура также перпендикулярна оси цилиндра):

$$B_{\text{ц0}}s = B_{\text{ц}}s. \quad (3)$$

Учитывая условие $D \gg d$ и то, что масса цилиндра $m = \rho\pi \frac{d^2}{4}l$ (где ρ – массовая плотность цилиндра), совместное решение уравнений (1), (2) и (3) позволяет найти скорость v_{min} через индукции B_c и $B_{\text{ц}}$ соленоида и цилиндра соответственно:

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{2B_c B_{\text{ц}} - B_c^2}{\rho\mu\mu_0}}.$$

Значит, цилиндр не пролетит через соленоид при скоростях, удовлетворяющих неравенству

$$v < \sqrt{\frac{2B_c B_{\text{ц}} - B_c^2}{\rho\mu\mu_0}}. \quad (4)$$

Полученный результат корректен с точки зрения теории размерностей.

В заключение рассмотрим несколько частных случаев.

• Если индукции B_c и $B_{\text{ц}}$ равны друг другу, т.е. $B_c = B_{\text{ц}} = B$, то выражение для скорости упрощается:

$$v < \sqrt{\frac{B^2}{\rho\mu\mu_0}}.$$

Такой результат можно получить из чисто *энергетических* соображений. Начальная кинетическая энергия цилиндра должна быть меньше увеличения энергии магнитного поля во всей системе, когда цилиндр вышел из соленоида:

$$\frac{mv^2}{2} < \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V_{\text{ц}}$$

(преобразование этого соотношения показывает, что размеры цилиндра здесь не играют роли).

• Если поля в цилиндре нет, т.е. $B_{\text{ц}} = 0$, то в выражении для скорости под корнем получаем *отрицательную* величину, что можно интерпретировать как невозможность «застревания» цилиндра – какая бы ни была скорость у цилиндра вначале, он всегда выталкивается из соленоида.

• Если поля нет в соленоиде, т.е. $B_c = 0$, то в условии для скорости под корнем получается ноль – наша система не препятствует и не способствует вылету цилиндра (система находится в энергетически безразличном равновесии).

Вообще, возможность «застревания» цилиндра требует, чтобы подкоренное выражение неравенства (4) для скорости было положительным. Тогда имеем

$$2B_c B_{\text{ц}} - B_c^2 > 0,$$

откуда получаем допустимые соотношения между величинами индукций соленоида и цилиндра:

$$\frac{B_c}{B_{\text{ц}}} < 2.$$

Про барометр и не только

С.ДВОРЯНИНОВ

*А для низкой жизни были числа,
Как домашний, подъяремный скот,
Потому что все оттенки смысла
Умно число передает.*

Приведенные строки поэта Николая Гумилева как эпитафия встречаются в очень многих книгах. Главное то, что слова эти верно



Рис. 1. Барометр на Главном здании Московского государственного университета

выражают роль чисел и соответствующих им величин в жизни человека. Пример – на рисунке 1.

Присмотримся внимательнее к прибору для измерения атмосферного давления (рис. 2). Читаем его название – барометр-



Рис. 2. Барометр-анероид

анероид. Величина атмосферного давления приведена в двух разных единицах – в миллиметрах ртутного столба и в сотнях паскалей.

Наличие двух шкал на приборе – явление не уникальное. На рисунке 3 вверху черным цветом показано значение скорости в милях за один час, красным – в более привычных нам километрах в час. На внешней шкале рисунка внизу указаны те значения, которые наиболее популярны на данной территории или в данной стране.



Рис. 3. Спидометр с двумя шкалами

Значение температуры на рисунке 4 приведено в градусах Цельсия и в градусах Фаренгейта. Весы безмен (рис. 5) одновременно показывают массу взвешиваемого груза в килограммах и фунтах.



Рис. 4. Термометры с двумя шкалами



Рис. 5. На шкалах безмена приведены килограммы и фунты

Но вот что интересно. На спидометре и на безмене мы видим цифру ноль. Ноль есть и на термометре на рисунке 4. А вот на барометре и на медицинском термометре (рис. 6) ноль отсутствует. Почему?

Более того, на шкале барометра-анероида мы видим слова

*шторм, дождь, ветер, переменнo,
ясно, сушь, в.сушь*

Что здесь означает сокращение «в.»? Для чего на шкале барометра пишут поясняющие слова? На шкалах других приборов никаких слов нет.

Попробуем ответить на эти вопросы.

Атмосферное давление – величина переменная. Оно зависит от места на земле и от времени (и еще от высоты, конечно). Например, 4 декабря 1954 года в Москве был зафиксирован рекорд атмосферного давления – 767 мм рт. ст. А 4 декабря 2022 года этот рекорд был побит. Другой пример – 23 ноября 1970 года давление было 720 мм рт. ст. и оно считалось рекордным для этого дня. Но 23 ноября 2023 года давление упало (т.е. уменьшилось) до 719,7 мм рт. ст.

Как мы видим, размах атмосферного давления не превосходит 60 мм рт. ст. Это меньше 10% от нормального давления 745–755 мм рт. ст. Как следствие, обычный (не метеозависимый) человек не ощущает колебаний атмосферного давления, и поэтому числа на шкале барометра ему ничего не говорят. Вот потому-то и пишутся на барометре поясняющие слова! А те числовые показания давления, которые не наблюдаются в природе, не пишутся вовсе.

Аналогично, на медицинском термометре не нужны показания выше 42 градусов. При высокой температуре белок крови сворачивается, что смертельно опасно. Другая крайность – низкая температура. Значения ниже 32 градусов несовместимы с жизнью человека.

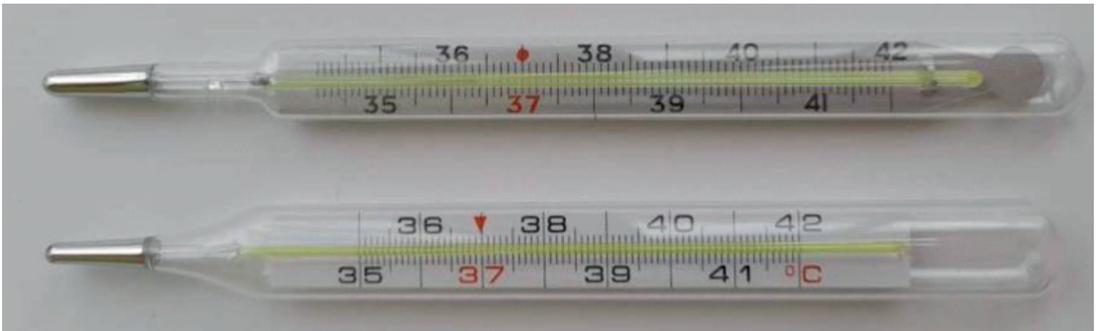


Рис. 6. Медицинский термометр

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

Математика

9 класс

Вариант 1

1 (3 балла). Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2 (4 балла). Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .

3 (5 баллов). На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.

4 (5 баллов). В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партией перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5 (5 баллов). Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на

отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

6 (4 балла). На острове расположено несколько деревьев. Между некоторыми деревьями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причем по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревьев выходит ровно по одной дороге. Сколько деревьев может быть на острове?

7 (5 баллов). Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

10 класс

Вариант 1

1 (3 балла). Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2 (4 балла). Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3 (5 баллов). Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4 (5 баллов). Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5 (4 балла). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x+5y^2}. \end{cases}$$

6 (4 балла). На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут

вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в черный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7 (6 баллов). В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведенной из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

11 класс

Вариант 1

1 (3 балла). Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что ее седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член

равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2 (4 балла). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3 (5 баллов). Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4)\cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4 (5 баллов). Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причем точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырехугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5 (4 балла). Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, отно-

сительно любой из двух «средних линий» прямоугольника («средней линией» прямоугольника назовем отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трех членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6 (4 балла). Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7 (6 баллов). В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади ее боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1 (3 балла). Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2 (4 балла). Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3 (4 балла). Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестерки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестерок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.

4 (5 баллов). Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5 (5 баллов). Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?

6 (4 балла). Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α .

Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках? (Пирамиды считаются различными, если их множества вершин различны.)

7 (6 баллов). Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причем отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .

Физика

9 класс

1. Беспилотные летательные аппараты применяют для доставки полезных грузов. Продолжительность полета аппарата по маршруту $A \rightarrow B$ в безветренную погоду составляет $T_0 = 400$ с. Расстояние AB равно $s = 9,6$ км.



Рис. 1

1) Найдите скорость u аппарата в спокойном воздухе.
 Допустим, что в течение всего времени полета ветер дует с постоянной скоростью $v = 16$ м/с под углом α к прямой AB (рис. 1) таким, что $\sin \alpha = 0,6$.

2) Найдите продолжительность T_1 полета по маршруту $A \rightarrow B$ в этом случае. Скорость аппарата относительно воздуха постоянна и равна u .

3) При каком значении угла α продолжительность полета по маршруту $A \rightarrow B \rightarrow A$ максимальная? Движение аппарата прямолинейное.

4) Найдите максимальную продолжительность T_{\max} полета по маршруту $A \rightarrow B \rightarrow A$. Движение аппарата прямолинейное.

2. Школьник наносит удар по мячу, лежащему на горизонтальной площадке. Модули скоростей мяча через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с после старта одинаковы. За этот промежуток времени вектор скорости повернулся на угол $2\beta = 60^\circ$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

1) Найдите продолжительность T полета от старта до падения на площадку.

2) Найдите максимальную высоту H и дальность L полета.

3) Найдите радиус R кривизны траектории в момент времени $t_1 = 1$ с.

3. Клин с углом при вершине $\alpha = 30^\circ$ находится на горизонтальной поверхности. На наклонной плоскости клина покоится однородный шар (рис. 2), касающийся вертикальной стенки.

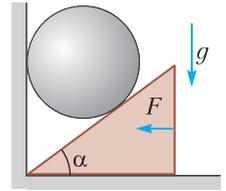


Рис. 2

Массы шара и клина одинаковы и равны $m = 1$ кг. Трения нет. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

1) Найдите горизонтальную силу F , которой систему удерживают в покое.

Силу F снимают, шар и клин приходят в поступательное прямолинейное движение с нулевой начальной скоростью. После перемещения по вертикали на $H = 0,8$ м шар абсолютно упруго сталкивается с горизонтальной поверхностью.

2) Найдите перемещение h шара после соударения до первой остановки.

3) Найдите ускорение a клина в процессе разгона.

4) При каком значении угла α ускорение клина максимальное?

5) Найдите максимальное ускорение a_{\max} клина.

4. На шкале ртутного термометра расстояние между отметками $t_1 = 35^\circ\text{C}$ и $t_2 = 42^\circ\text{C}$ равно $L = 5$ см. В термометре находится $m = 2$ г ртути. Экспериментально установлено, что с ростом температуры объем ртути увеличивается по линейному закону. График зависимости объема V ртути от температуры t , измеренной в градусах Цельсия, представлен на рисунке 3. При температуре $t_{100} = 100^\circ\text{C}$ объем ртути в $\beta = 1,018$ раз больше объема ртути при $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Плотность ртути при температуре t_0 считайте равной $\rho = 13,6$ г/см³. Тепловое расширение стекла пренебрежимо мало.

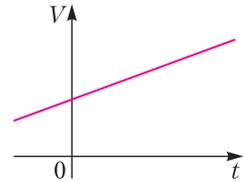


Рис. 3

1) Следуя представленным опытными данным, запишите формулу зависимости объема V ртути от температуры t , измеренной в градусах Цельсия. Формула должна содержать величины $m, \rho, \beta, t_0, t_{100}, t$.

2) Найдите приращение ΔV объема ртути при увеличении температуры от $t_1 = 35^\circ\text{C}$ до $t_2 = 42^\circ\text{C}$. В ответе приведите формулу и число в мм³.

3) Найдите площадь S поперечного сечения капилляра термометра. Ответ представьте в мм^2 .

5. В цепи, схема которой представлена на рисунке 4, сопротивления резисторов $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$.

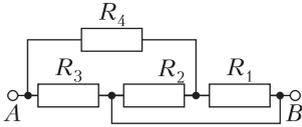


Рис. 4

1) Найдите эквивалентное сопротивление $R_{\text{экв}}$ цепи.

Контакты A и B подключают к источнику постоянного напряжения $U = 10 \text{ В}$.

2) Найдите мощность P , которая рассеивается на всей цепи.

3) На каком резисторе рассеивается наименьшая мощность? Найдите эту наименьшую мощность P_{min} .

10 класс

1. Во время выполнения пилотажного упражнения два самолета летят в горизонтальной плоскости с одинаковыми по модулю скоростями $v = 80 \text{ м/с}$ по окружностям одинакового радиуса $R = 800 \text{ м}$ (рис. 5). Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

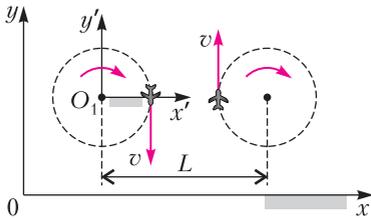


Рис. 5

1) На сколько процентов δ вес каждого летчика больше силы тяжести, действующей на летчика?

В некоторый момент времени самолеты оказались на прямой, проходящей через центры окружностей, в положении максимального сближения. Расстояние между центрами окружностей $L = 2 \text{ км}$. Вектор скорости каждого самолета показан на рисунке.

2) Найдите в этот момент скорость \vec{u} второго (правого на рисунке) самолета во вращающейся системе отсчета $x'O_1y'$, связанной с первым (левым на рисунке) самолетом. В ответе укажите модуль и направление вектора \vec{u} .

2. Плоская поверхность склона образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 6). У подножья склона разрывается фейерверк. Осколки летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по модулю скоростями. Наибольшая продолжительность полета одного из осколков $T = 9 \text{ с}$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

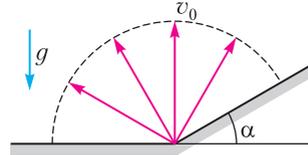


Рис. 6

1) Найдите начальную скорость v_0 осколков.
2) На каком максимальном расстоянии s от точки старта упадет осколок на склон?

3. В первом опыте на шероховатую наклонную плоскость кладут шайбу и сообщают шайбе начальную скорость. Шайба движется по плоскости, сталкивается с упором, отскакивает от него и продолжает движение по плоскости. Часть зависимости модуля скорости шайбы от времени представлена на рисунке 7. Движение шайбы происходит вдоль одной и той же прямой. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

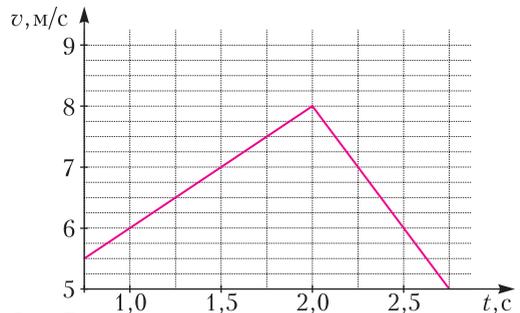


Рис. 7

1) Найдите $\sin \alpha$, где α – угол, который наклонная плоскость образует с горизонтом.

Во втором опыте с той же наклонной плоскости скатывается без проскальзывания тонкостенная однородная цилиндрическая бочка, полностью заполненная водой. Начальная скорость нулевая. Масса воды равна массе бочки. Упор удален с наклонной плоскости. Воду считайте идеальной жидкостью. Масса торцов бочки пренебрежимо мала.

2) С какой по величине скоростью v движется бочка после перемещения по вертикали на $h = 0,3 \text{ м}$?

3) Найдите ускорение a , с которым движется бочка.

4) При каких величинах коэффициента трения скольжения μ бочка катится без проскальзывания?

4. В изохорическом процессе к смеси идеальных газов гелия и кислорода подводят $Q = 600$ Дж теплоты. Температура смеси увеличивается на $\Delta T_1 = 15$ К. Если к той же смеси подвести то же самое количество теплоты в изобарическом процессе, то температура смеси повысится на $\Delta T_2 = 10$ К.

1) Найдите работу A смеси газов в изобарическом процессе.

2) Найдите теплоемкость C_V смеси в изохорическом процессе.

3) Найдите отношение $\frac{N_{\text{г}}}{N_{\text{к}}}$ числа атомов гелия к числу молекул кислорода в смеси.

Указание: внутренняя энергия двухатомного газа кислорода $U = \frac{5}{2} pV$.

5. Частица с удельным зарядом $\gamma = \frac{q}{m} > 0$ движется между обкладками плоского конденсатора. Заряды обкладок конденсатора $Q > 0$ и $-Q$, емкость конденсатора C , расстояние между обкладками d . В некоторый момент частица движется параллельно обкладкам со скоростью v_0 на расстоянии $d/4$ от положительно заряженной обкладки.

1) Найдите радиус R кривизны траектории в этот момент времени.

Через некоторое время после вылета из конденсатора частица пересекает серединную плоскость конденсатора (плоскость, равноудаленную от обкладок).

2) С какой по величине скоростью v движется в этот момент частица?

11 класс

1. С клина, находящегося на шероховатом горизонтальном столе, соскальзывает брусок массой m с ускорением $a_1 = 5g/13$ и скатывается без проскальзывания полый цилиндр массой $4m$ с ускорением $a_2 = 5g/24$ (рис. 8). Клин остается в покое. Углы наклона поверх-

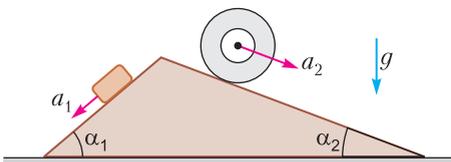


Рис. 8

ностей клина к горизонту α_1 ($\sin \alpha_1 = 3/5$, $\cos \alpha_1 = 4/5$) и α_2 ($\sin \alpha_2 = 5/13$, $\cos \alpha_2 = 12/13$). Направления всех движений лежат в одной вертикальной плоскости.

1) Найдите силу трения F_1 между бруском и клином.

2) Найдите силу трения F_2 между цилиндром и клином.

3) Найдите силу трения F_3 между столом и клином.

Каждый ответ выразите через m и g с числовым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

2. С идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс $1-2-3-1$. На рисунке 9 представлена зависимость p/p_0 от V/V_0 , где V и p – объем и давление газа, V_0 и p_0 – некоторые неизвестные объем и давление.

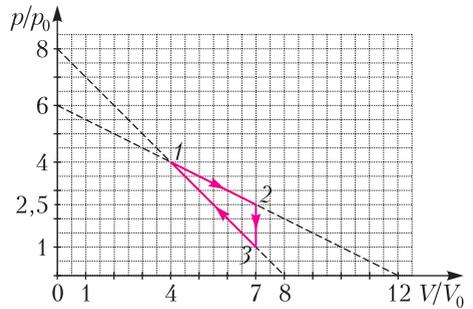


Рис. 9

1) Найдите отношение модуля приращения внутренней энергии газа в процессе $2-3$ к работе газа за цикл.

2) Найдите отношение максимальной температуры газа в процессе $1-2$ к температуре газа в состоянии 1.

3) Найдите КПД цикла.

Ответы выразите числом в виде обыкновенной дроби или целого числа.

3. В центре полого шара с диэлектрической проницаемостью ϵ и радиусами поверхностей r и R находится шарик с зарядом Q (рис. 10).

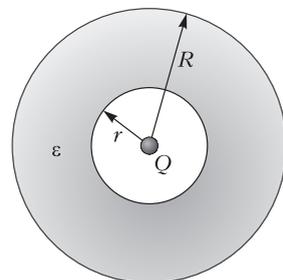


Рис. 10

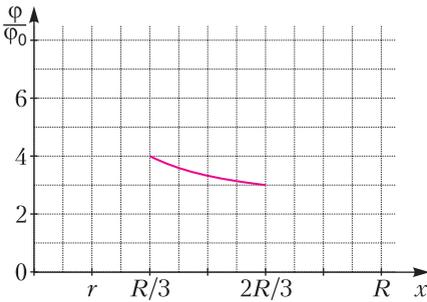


Рис. 11

Известна графическая зависимость потенциала φ электрического поля внутри диэлектрика от расстояния x от центра полого шара в интервале изменений x от $R/3$ до $2R/3$ (рис. 11). Здесь φ_0 – потенциал в некоторой точке вне шара. Потенциал в бесконечно удаленной точке принят равным нулю.

1) Считая известными r, R, Q, ϵ , найдите аналитическое выражение (в виде формулы) для потенциала внутри диэлектрика при $x = R/4$.

2) Используя график, найдите численное значение ϵ .

4. Две катушки с индуктивностями $L_1 = L$ и $L_2 = 4L$ и числами витков $n_1 = n$ и $n_2 = 2n$ помещены во внешние однородные магнитные поля с постоянными во времени индукциями (рис. 12). Площадь витка каждой

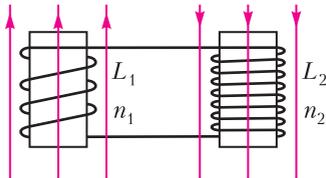


Рис. 12

катушки S . Индукции внешних полей направлены перпендикулярно плоскостям витков катушек. Катушки находятся достаточно далеко друг от друга. Омическое сопротивление катушек и соединительных проводов пренебрежимо мало. Вначале тока в катушках нет.

1) С какой скоростью (по модулю) начнет изменяться ток в катушках, если в катушке с индуктивностью L_1 индукция внешнего поля начнет возрастать со скоростью $\Delta B/\Delta t = \alpha$ ($\alpha > 0$), а во второй катушке внешнее поле останется неизменным?

2) За некоторое время индукция внешнего поля в катушке с индуктивностью L_1 умень-

шилась от B_0 до $B_0/2$, не изменив направления, а в катушке с индуктивностью L_2 индукция внешнего поля уменьшилась от $2B_0$ до $2B_0/3$, не изменив направления. Внешние поля в катушках изменялись неравномерно. Найдите ток (по модулю) в катушках к концу изменения внешних полей. Ответ дайте с числовым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

5. В стене сделана небольшая выемка, внутри которой находится маленькая лампочка так, что прямой свет от лампочки на стену не попадает (рис. 13). Справа от лам-

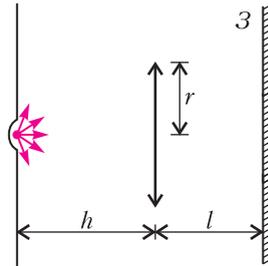


Рис. 13

почки на некотором расстоянии h расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = h/2$. Главная оптическая ось линзы горизонтальна и проходит через лампочку. Радиус линзы $r = 3$ см. Справа от линзы на расстоянии $l = 2h/3$ расположено параллельно стене плоское зеркало Z . Считайте, что свет, идущий мимо линзы, проходит плоскость линзы беспрепятственно. Размеры стены и зеркала намного больше размеров линзы.

1) Найдите площадь неосвещенной части зеркала.

2) Найдите площадь неосвещенной части стены.

Ответы дайте в см^2 в виде $\gamma\pi$, где γ – целое число или простая обыкновенная дробь.

Публикацию по математике подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, И.Глухов, А.Головко, М.Голубев, С.Городецкий, В.Дубинская, П.Останин, О.Подлипский, С.Саулин, А.Скубачевский, Д.Терёшин; по физике – В.Бабинцев, В.Плис, В.Усков, В.Чивилёв, И.Юдин, Ю.Юрьев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №10)

1. 3.

Пусть меньшая сторона прямоугольника равна a , большая сторона равна b . Тогда $2(a + b) = 1$. Пять красных отрезков на рисунке 1 в сумме дают

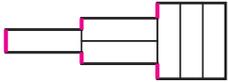


Рис. 1

длину b , так как проецируются как раз на большую сторону прямоугольника. Остальные части периметра фигуры состоят из 5 отрезков длины b и 6 отрезков длины a . Получаем, что периметр фигуры равен $6(a + b) = 3$.

2. 8.

Начнем выполнять операции: 1, 4, 7, 10, 8, 11, 9, 12, 10. Число 10 мы уже получали ранее, поэтому после этого операции будут выполняться в цикле из 5 операций. До этого цикла было сделано 3 операции, значит, в цикле было выполнено $2024 - 3 = 2021$ операций. Поделив 2021 на 5, получим остаток 1, значит, последним шагом робот придет в число 8.

3. 90.

Заметим, что в ребусе используется десять различных букв, поэтому они заменяют все десять цифр. В частности, одна из них соответствует нулю. На ноль числа не начинаются, а если бы на ноль заканчивалось одно из слагаемых в какой-то сумме, то ЕЁ заканчивалось бы на ту же цифру, что и другое слагаемое в этой сумме. Остается единственная возможность: $\ddot{E} = 0$.

Тогда $O + Ч = T + \ddot{I} = 10$ и $\Pi + C + 1 = I + A + 1 = E$. Так как сумма всех десяти цифр равна 45, то $45 = (O + Ч) + (T + \ddot{I}) + (\Pi + C) + (I + A) + E + \ddot{E} = 10 + 10 + (E - 1) + (E - 1) + E + 0 = 18 + 3 \cdot E$, откуда $E = 9$. Таким образом, ЕЁ в любом решении ребуса может быть равно только 90.

4. Ответ показан на рисунке 2.

Предположим, что в расположении, приведенном на рисунке, для правильной раскраски достаточно трех цветов.

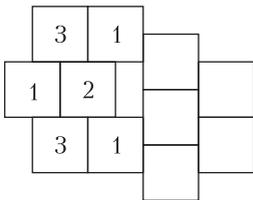


Рис. 2

Пронумеруем цвета числами от 1 до 3, и пусть два квадрата в «центральной строке» покрашены в первый и второй цвета. Квадраты сверху и снизу от них раскрашиваются однозначно. Теперь посмотрим на три квадрата в столбце справа от уже раскрашенных: в них должны чередоваться второй и третий цвета. Но тогда оба квадрата справа от них должны быть раскрашены в первый цвет. Противоречие.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №11–12)

1. 40.

Если у человека больше 2 рыб, то будем называть всех его рыб, сверх этих двух, *дополнительными*. Людей, у которых есть хотя бы одна дополнительная рыба, не больше 5. И у каждого из них не больше $6 - 2 = 4$ дополнительных рыб. Поэтому всего дополнительных рыб не больше $5 \cdot 4 = 20$. А обычных рыб у каждого не больше 2, поэтому всего их не больше $10 \cdot 2 = 20$. При этом ситуация, когда рыба у каждого именно столько, возможна: пятеро имеют по 6 рыб и еще пятеро по 2 рыбы.

2. 7.

Пусть слева и справа от этой пары средних чисел стоит по a четных чисел и по b нечетных чисел. Четных чисел всего $2a + 1$ и нечетных чисел всего $2b + 1$, всего чисел 12, значит, $a + b = 5$. Поэтому эта пара стоит посередине: на 6-м и 7-м местах из 12. Используя информацию про крайние числа, получаем $a \geq 2$, $b \geq 3$. Так как $a + b = 5$, то $a = 2$ и $b = 3$. Получаем, что нечетных чисел всего $2b + 1 = 7$.

3. Существует.

Например, 1919...19 (10 единиц и 10 девяток). Действительно, сумма цифр этого числа равна 100, а удвоенное число – это 3838...38 (10 троек и 10 восьмерок), у которого сумма цифр равна 110. *Комментарий.* Существует и много других примеров. Все примеры строятся из следующего соображения: при умножении числа на 2 «в столбик» должно быть ровно 10 переходов через десяток (т.е. в числе должно быть 10 цифр, которые не меньше 5), так как каждый переход уменьшает сумму цифр результата на 9.

4. Рассмотрим промежутки: [10, 19], [20, 39], [40, 59], [60, 99]. Если на каком-то из них найдется хотя бы два числа, записанных Петей, то результат деления большего на меньшее будет больше 1, но меньше 2. Если же это не так, то на каждом промежутке ровно по одному числу. Тогда сумма второго и третьего чисел лежит на четвертом промежутке. Если она равна четвертому числу, то отношение четвертого к третьему меньше 2. Если же она не равна ему, то мы получили два различных числа на одном промежутке и можем поделить большее из них на меньшее.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №9)

1. Да.

Рассмотрим выражение $3(2a - 1) + 2(3b - 1) + (6c - 1) = 6(a + b + c - 1)$. Поскольку мы сложили три числа, кратных 1001, то и их сумма

$6(a + b + c - 1)$ делится на 1001. А так как 6 и 1001 не имеют общих делителей, то на 1001 делится именно $6(a + b + c - 1)$.

2. Белые гирьки обозначим буквами A, B, C , а черные – буквами a, b, c . Первым взвешиванием сравним A и a . Возможны три варианта.

I. **Гирьки равны по массе.** Тогда они дают нужную пару. Взвесим теперь B и b . Если и они равны, то это вторая пара, а C и c – третья; иначе B и c – вторая пара, b и C – третья.

II. **Одна из гирек тяжелее на 2 г.** Пусть тяжелее, например, белая гирька. Тогда у A масса 103 г, у a масса 101 г. Положим теперь на одну чашу гирьки A и B , а на вторую C и b . Составим табличку возможных масс этих гирек и найдем разность масс между чашами (считаем ее положительной, если перевесила левая чаша, и отрицательной, если правая):

A	B	C	b	Разность
103	101	102	102	0
103	101	102	103	-1
103	102	101	102	2
103	102	101	103	1

Видим, что разность позволяет однозначно восстановить массы гирек B, C, b , но тогда мы определим все гирьки и распределим их по парам.

III. **Одна из гирек тяжелее на 1 г.** Пусть тяжелее, например, белая гирька. Тогда либо $A = 103$ и $a = 102$, либо $A = 102$ и $a = 101$. Положим на одну чашу гирьки A и a , на вторую B и b и снова посмотрим на возможные разности:

A	a	B	b	Разность
103	102	101	101	3
103	102	101	103	1
103	102	102	101	2
103	102	102	103	0
102	101	101	102	0
102	101	101	103	-1
102	101	103	102	-2
102	101	103	103	-3

Разность одинакова в двух случаях, но при этом $A = b, B = a$ (значит, и $C = c$) – гирьки по парам распределяются одинаково. В остальных случаях массы всех гирек снова определяются однозначно, и мы сможем разбить их на пары.

3. $C_{98}^{49} = \frac{98!}{49!49!}$ способами.

Рассмотрим два квадрата 50×50 : в левом верхнем углу и в правом нижнем углу. У них ровно одна общая клетка – центральная. В этих двух квадратах в сумме 100 отмеченных клеток, а всего отмечено 99 клеток. Следовательно, центральная клетка отмечена, а вне этих двух квадратов

нет отмеченных клеток. (На рисунке 3 изображена аналогичная ситуация, но для квадратов со сторонами 9 и 5 вместо 99 и 50 соответственно.) Рассмотрев аналогично квадраты в правом верхнем углу и в левом нижнем углу, получим, что отмеченные клетки могут находиться только в «кресте», образованном центральным столбцом и центральной строкой (рис. 4.)

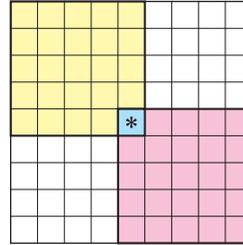


Рис. 3

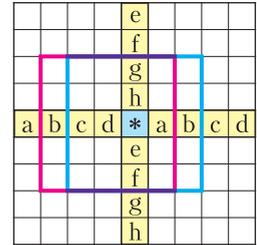


Рис. 4

В центральной строке 99 клеток. Одна из них центральная, а остальные клетки разобьем на пары так: клетка из 1-го столбца и из 51-го, из 2-го и из 52-го, из 3-го и из 53-го, ..., из 49-го и из 99-го. Для двух клеток одной пары существует два квадрата 50×50 , которые отличаются только клетками этой пары (один квадрат отличается от другого сдвигом на 1 по горизонтали). Значит, эти две клетки либо обе отмечены, либо обе не отмечены. (На рисунке 4 клетки из одной пары отмечены одинаковыми буквами. Красным и синим выделены два квадрата 5×5 , отличающиеся только клетками типа b .)

Аналогичное утверждение верно про клетки центрального столбца. Значит, вся расстановка отмеченных клеток однозначно восстанавливается по заполнению 98 клеток центрального столбца, которые лежат сверху или слева от центральной клетки. Получается, что нужно из этих 98 клеток выбрать 49, которые отмечены. Сделать это можно $C_{98}^{49} = \frac{98!}{49!49!}$ способами.

4. В каждом ромбе и 10-угольнике проведем отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, затем соединим их в ломаные. Получится 50 ломаных, каждая из которых соединяет две противоположные стороны 100-угольника. (На рисунке 5 для примера показано, что получится, если проделать это для разбиения правильного 10-угольника на ромбы. Получится 5 ломаных.) В статье «Зонагоны» А.Устинова в «Кванте» №9 и №10 за 2024 год рассматривается аналогичный объект (цепочки де Брёй-

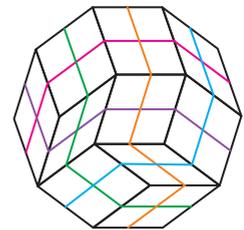


Рис. 5

на) и доказывается, что каждая их пара пересекается ровно один раз. В нашем случае это означает, что любая пара ломаных пересекается ровно один раз – в центре ромба или 10-угольника. Далее мы используем этот факт.

Рассмотрим пару противоположных сторон 100-угольника, пусть они параллельны прямой a . Будем говорить про ломаную, соединяющую середины этих двух сторон, что она *соответствует направлению a* . Рассмотрим два 10-угольника. Предположим, сторона одного из них параллельна прямой a и сторона другого также параллельна a . Тогда стороны десятиугольников, соседние с этими, также параллельны друг другу и некоторой прямой b . Следовательно, ломаные, соответствующие направлениям a и b , пересекаются как в центре одного десятиугольника, так и в центре второго. А они пересекаются ровно один раз – получаем противоречие. Значит, никакая сторона одного десятиугольника не параллельна никакой стороне другого. При этом каждая сторона десятиугольника параллельна одной из сторон 100-угольника. Стороны 100-угольника идут в 50 направлениях, стороны 10-угольника – в 5 направлениях. Так как все эти направления различны, то всего 10-угольников не больше 10.

71 узелок

1. Так как в сантиметрах и копейках $x \cdot \frac{1}{2}ab = c^2 - a^2 - b^2$, то $x = 4 \cdot \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = -4 \cos \gamma \approx 0,281$ коп/см².

2. Вместо величины $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ коллега Спрудль использовал величину $\frac{1}{2}ab$, которая в $\frac{1}{\sin \gamma} \approx 1,0025$ раз больше. Таким образом, его прибыль составляла около 1/4 процента.

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

Математика

9 класс

Вариант 1

1. $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Для того чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$, откуда $t^2 < 4$. По теореме Виета произведение корней равно $4t^2 - 4$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $4t^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Значит, $1 < t^2 < 4$, т.е. $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

2. (4; 36).

Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)(a - b + 15)$ – произведение чисел разной четности, следовательно, это число четное. Так как оно равно $17p^5$, число p также четное. Но по условию p – простое, значит, $p = 2$. Получаем уравнение $(a - b)^2 + 15(a - b) - 17 \cdot 32 = 0$, которое является квадратным относительно $a - b$. Его решения – это $a - b = -32$ и $a - b = 17$.

Так как в условии задано, что сумма $a + b$ равна 40, а числа $a + b$ и $a - b$ имеют одинаковую четность, подходит только случай $a - b = -32$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a = 4$, $b = 36$.

3. $4\sqrt{6}$.

Пусть E – точка пересечения AB и DM (рис.6). Поскольку $BM = MN = NC$, а $DM \parallel AN$, по

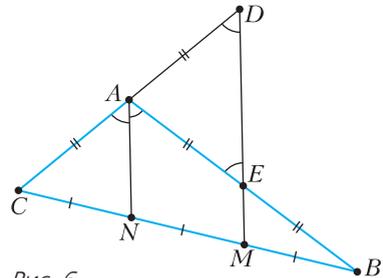


Рис. 6

теореме Фалеса $AC = AD$ и $AE = EB$. Из равенства $CD = AB$ следует, что $AC = DA = BE = AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a . Поскольку $AN \parallel EM$ и треугольник AED равнобедренный, $\angle CAN = \angle EDA = \angle AED = \angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC . Значит, $2\angle CAN = \angle CAB$. В треугольнике ABC имеем $BC = 12$, $CA = a$, $AB = 2a$, $\angle CAB = 2\angle CAN$. По теореме косинусов

$$144 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = 24.$$

Следовательно, $AB = 2a = 4\sqrt{6}$.

4. 6720.

Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остается пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{8!}{2!(3!)^2}$. (Например, это коли-

чество можно получить так: сначала выбираем трех человек из восьми, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем еще трех человек из оставшихся пяти для второго ряда. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$. Суммарно первых и третьих парт шесть, поэтому полученное число надо умножить на 6.

Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{8!}{(3!)^2}$. Вторых парт три, значит, потребуется умножение на 3.

Всего получаем $6 \cdot \frac{8!}{2! \cdot (3!)^2} + 3 \cdot \frac{8!}{(3!)^2} = 6 \cdot \frac{8!}{(3!)^2} = 6720$ различных рассадок.

Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается тремя способами. Для каждого из этих трех случаев между рядами школьники распределяются $C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом. Итого $3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 6720$ способов.

5. 10.

Так как четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет 180° , откуда следует, что $\angle EDO = 180^\circ - \angle ADO = \angle ABC$ (рис. 7). Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B . Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M . Треугольники DEO и BEM подобны по двум

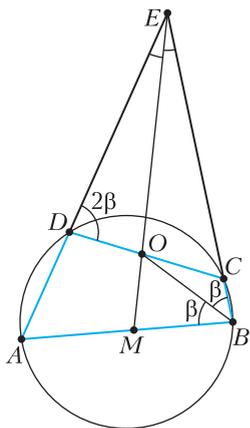


Рис. 7

углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$.

Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED + DO}{BE + BM} = \frac{EO}{EM}$,

следовательно,
 $ED + DO = \frac{(BE + BM) \cdot EO}{EM}$.

Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную

сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO , получаем $\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM + BE}$. Окончательно имеем $ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE$.

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 10.

6. 17.

Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 3, 4, 5 и 7, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.

Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество ребер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, т.е. $\frac{3 + 4 + 5 + 7 + x}{2} = \frac{19 + x}{2}$. С другой стороны, количество ребер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x + 4$, то ребер $x + 3$.

Получаем уравнение $\frac{19 + x}{2} = x + 3$, откуда находим, что $x = 13$. Значит, в дереве $x + 4 = 17$ вершин.

7. (0;1), (0;2), (1;0), (1;2), (2;0), (2;1).

Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 1 - |x + y - 2| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, \\ -1 \leq x + y - 2 \leq 1. \end{cases}$$

На плоскости Oxy неравенство (1) задает круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(1;1)$, а неравенство (2) – полосу между прямыми $x + y = 1$ и $x + y = 3$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: $(0;1)$, $(0;2)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(1;2)$, $(2;0)$ и $(2;1)$. В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертеж.

Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только одна из них – $(1;1)$ – ему не удовлетворяет. Остальные 6 пар являются решениями.

10 класс

Вариант 1

1. $x = -1, x = -1 \pm \sqrt{3}$.
 Числа A, B, C являются третьим, пятым и девятым членами арифметической прогрессии соот-

ответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B = 2A + C$ ($a_5 = a_3 + 2d$, $a_9 = a_3 + 6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3(x^2 + 2x)^2 = 3x^2 + 2(3x + 3)$. Сделав замену $t = x^2 + 2x$, получаем $3t^2 = 3t + 6$, т.е. $t^2 - t - 2 = 0$. Данное уравнение имеет корни $t = -1$ и $t = 2$. Далее находим значения x :

$$x^2 + 2x + 1 = 0, \text{ откуда } x = -1,$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0, \text{ откуда } x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

2. 11.

Данная система неравенств эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3, \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 \leq y \leq \frac{x}{3} + 1, \\ 3x - 1 \leq y \leq 3x + 1. \end{cases}$$

Первое неравенство задает полосу между параллельными прямыми $y = \frac{x}{3} - 1$ и $y = \frac{x}{3} + 1$, а второе – полосу между прямыми $y = 3x - 1$ и $y = 3x + 1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0; -1)$, $Q(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$, $R(0; 1)$, $S(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $4y + 8x = C$, где C – некоторая константа. Оно задает прямую на плоскости, причем в любой точке прямой значение выражения $4y + 8x$ постоянно и равно C . Если изменить значение C , получится некоторая другая прямая, на которой выражение $4y + 8x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C , при котором прямая $4y + 8x = C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, а самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S .

Это значение равно $4 \cdot \frac{3}{4} + 8 \cdot \frac{5}{4} = 11$.

3. (3; 10), (10; 3).

Число A представимо в виде $A = (m + n)(m + n - 9)$. Так как множители имеют разную четность, A – четное число. Рассмотрим два случая.

- Если $A = 75q^2$, то так как A четное, q также должно быть четным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q = 2$. Отсюда получаем $(m + n)^2 - 9(m + n) - 300 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $m + n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.
- Следовательно, $A = 13p^2$, и тогда по условию $B = 75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что $p = 2$. Тогда $(m + n)^2 - 9(m + n) - 52 = 0$,

откуда $m + n = -4$ или $m + n = 13$. Подходит только $m + n = 13$, так как числа m и n положительны. Перейдем ко второму равенству $mn(m + n) - 3mn = 75q^2$. Так как $m + n = 13$, оно упрощается и принимает вид $2mn = 15q^2$. Отсюда q – четное число, поэтому $q = 2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

$$\begin{cases} m + n = 13, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Ее решениями являются пары чисел $(3; 10)$, $(10; 3)$. **4. $8\sqrt{21}$.**

Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$ (рис. 8); за счет параллельности AX и MY полу-

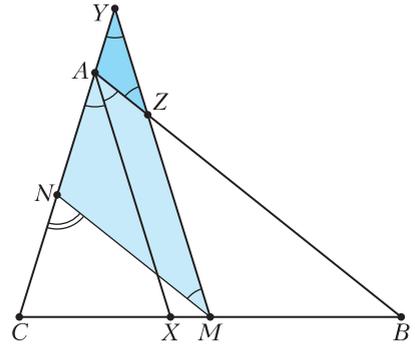


Рис. 8

чаем $\angle AYZ = \angle CAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle BAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB . Тогда $\angle NMY = \angle AZY = \alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α . Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos \alpha = \frac{YZ}{2AZ} = \frac{2}{3}$.

Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN = \frac{1}{2} AC = 9$; $MN = NY = AN + AY = \frac{AC}{2} + AZ = 15$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 336.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{21}$.

5. $(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2})$.

Запишем второе уравнение системы в виде $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$. Введя функцию $f(t) = t^4 + 5t^2 + \sqrt{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго возрастает на всей своей области определения (как сумма трех возрастающих при $t \geq 0$ функций). Отсюда следует, что каждое свое значение она

принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем

$$t^2 = x+1 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 6-x,$$

откуда $2\sqrt{6+5x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$.

Если $t = 1$, то $\sqrt{6-x} + 1 = \sqrt{x+1}$; возводя в квадрат и приводя подобные, получаем $\sqrt{6-x} = x-3$, откуда

$$\begin{cases} 6-x = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0 \end{cases}, \text{ и } x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{6-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geq 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{1} + 2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{6}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

6. 820.

Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180° , но не на 90° , т. е. все такие раскраски разбиваются на пары, считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение раскраски с самой собой при поворотах на 90° , 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а все множество раскрасок во втором случае разбивается на четверки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{81-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определен однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{81}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю,

т. е. $C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно

$$\frac{1}{4}\left(C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{81-1}{2}\right) = 820.$$

7. $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$.

Пусть T – точка пересечения AM и CL , O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно (рис. 9).

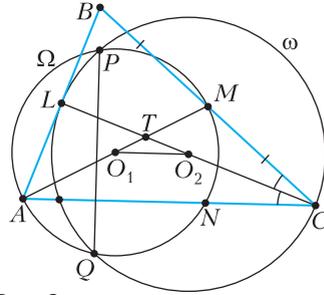


Рис. 9

Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам.

Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда

$TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL , $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$ и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB , отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC вторично пересекает в точке V (рис. 10). Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL . Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{5}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда

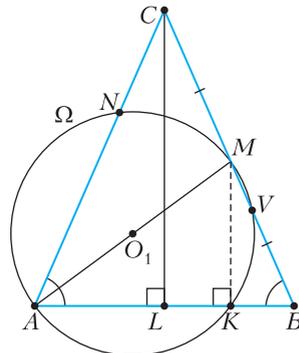


Рис. 10

$CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \Leftrightarrow (c+t) \cdot c = (2c-8) \cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \Leftrightarrow (c-t) \cdot c = \frac{5}{2} \cdot 10.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(16-2c) \cdot c = 25 \Leftrightarrow c = \frac{8 \pm \sqrt{14}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 8 \pm \sqrt{14}$. Но так как $AC > AN = 8$, подходит только $BC = AC = 8 + \sqrt{14}$.

11 класс

Вариант 1

1. $x = 18, x = 0$.

Пусть b_1, b_2, b_3, \dots – данная геометрическая прогрессия, а q – ее знаменатель. Тогда $b_7 = b_1 q^6$, $b_9 = b_1 q^8$, $b_{15} = b_1 q^{14}$, откуда следует, что $b_9^4 = b_7^3 b_{15}$, а b_7, b_9 и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+3)^4 = \left(\sqrt{(25x-9)(x-6)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2.$$

Отсюда $(x^2 + 6x + 9)^2 = (25x - 9)^2$, т.е. $x^2 + 6x + 9 = \pm(25x - 9)$, и получаем $x = 1, 18, -31, 0$. Значение $x = 1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x = -31$ не подходит, так как при этом $b_7 > 0, b_9 < 0, b_{15} > 0$, что невозможно.

2. $(-2 - 2\sqrt{2}; 5; 0), \left(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0\right)$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y , а правая только от z . Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{81 - z^2}$ является отрезок $[0; 9]$. Пусть $h(y) = |y+4| + 4|y-5|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y . В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскрывается второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geq 5$ и убывает при $y \leq 5$. Отсюда следует, что $y = 5$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(5) = 9$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 9$, из второго уравнения находим, что $f(z) = 9 \Leftrightarrow z = 0$ и $h(y) = 9 \Leftrightarrow y = 5$.

Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем

$$t^2 = x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x,$$

откуда $2\sqrt{5-4x-x^2} = 6 - t^2$. Уравнение принимает вид $t+4 = 6 - t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$.

Если $t = 1$, то $\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1$; возведя в квадрат и приведя подобные, получим $2x+3 = 2\sqrt{1-x}$, что равносильно системе

$$\begin{cases} (2x+3)^2 = 4(1-x), \\ 2x+3 \geq 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\sqrt{11}-4}{2}$.

При $t = -2$ имеем $\sqrt{x+5} + 2 = \sqrt{1-x}$, откуда получаем $x = -2 - 2\sqrt{2}$.

Тем самым, система имеет два решения.

3. Решения есть при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$. Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приведем уравнение к виду $pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3 + (t-1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно уравнению $(t\sqrt[3]{p-1})^3 = (1-t)^3$, откуда $t\sqrt[3]{p-1} = 1-t$ и $t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$. Ввиду ограниченности косинуса, откуда получаем неравенство $\left|\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right| \leq 1$, решая которое, находим $p \leq -7$ или $p \geq 1$.

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD (рис. 11). По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD . Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$.

Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окруж-

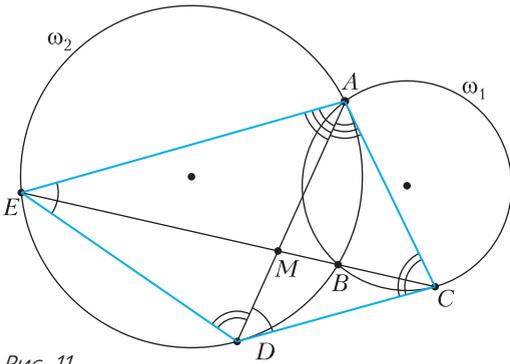


Рис. 11

ность и опирается на дугу AC , не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (т.е. AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}.$$

$$\text{Отсюда } \left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}.$$

Обозначим точку пересечения диагоналей четырехугольника $ACDE$ через M . Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE .

По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит,

$$\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

5. $3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$.

Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки l_1 и l_2 – его средние линии; для определенности считаем, что средняя линия l_1 горизонтальна, а l_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно l_1 , через A_1 , относительно l_2 – через A_2 , относительно O – через B . Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1 , достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше l_1), после чего клетки в нижней половине получают симметрией четырех выбранных клеток относительно l_1 . Так как в верхней половине прямоугольника всего 20000 клеток, $|A_1| = C_{20000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить, выбрав 4 клетки из 20000 в левой половине прямо-

угольника (нужно отразить их относительно l_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C_{20000}^4$. Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше l_1 и левее l_2). Отражая две клетки относительно l_1 , получаем множество из четырех закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно l_2 , получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C_{10000}^2$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap B| = C_{10000}^2$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$.

6. $(26; 34; 35), (26; 34; 25), (-27; -19; -18), (-27; -19; -28)$.

Так как $(a-c)(b-c) = p^2$, где p – простое, а $a-c < b-c$ (за счет того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a-c=1, \\ b-c=p^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a-c=-p^2, \\ b-c=-1. \end{cases} \quad (*)$$

Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b-a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 - 2k)$ делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$ также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$ и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b-a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b-a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 710$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b . Решая ее, находим $a = 26, b = 34$ или $a = -27, b = -19$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c . Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.

Итого есть 4 тройки $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(26; 34; 35), (26; 34; 25), (-27; -19; -18), (-27; -19; -28)$.

7. $\sqrt[4]{3}$.

Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все ее боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1, его сторона равна $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 3. Эти грани имеют равные пло-

щад, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1K и A_1M этих граней равны между собой. Пусть A_1A' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC . Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC (рис. 12). По теореме о трех перпендикулярах

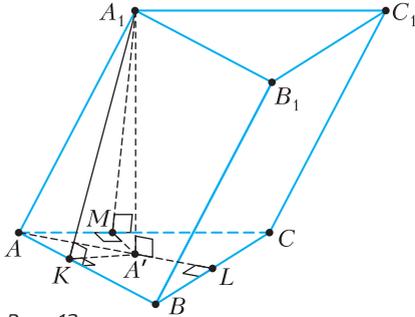


Рис. 12

$AA' \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, т.е. грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что

$$2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$$

– противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC

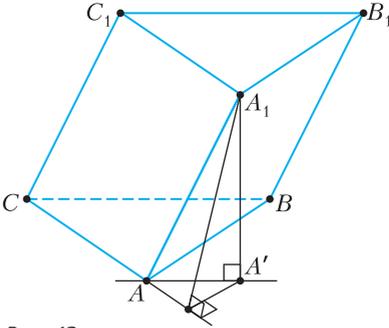


Рис. 13

(рис. 13). Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{2}{a} = \sqrt[4]{3}$. Так как площадь основания призмы равна 1, ее объем есть $\sqrt[4]{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

Вариант 2

1. 18.

Сумма углов n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$. С другой стороны, по формуле суммы арифметической прогрессии она же равна

$\frac{n}{2}(2 \cdot 143^\circ + (n - 1) \cdot 2^\circ)$. Приравняв эти выражения, получаем $180(n - 2) = n(n + 142)$, что равносильно уравнению $(n - 18)(n - 20) = 0$, откуда $n = 18$ либо $n = 20$. Остается заметить, что значение $n = 20$ не подходит, поскольку в этом случае наибольший угол был бы равен 181° , что невозможно для выпуклого многоугольника.

2. 6.

Данное равенство можно записать в виде

$$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z) = \ln 6 \Leftrightarrow 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3.$$

Так как x, y, z – целые числа, можно приравнять показатели степеней двойки и тройки в левой и правой частях равенства, откуда $4x + 3y + 3z = 1, z = 1$. Подставляя z в первое уравнение, получаем

$$4x + 3y = 2. \text{ Отсюда } y = -x - \frac{x+2}{3}. \text{ Так как } x \text{ и } y \text{ – целые числа, это означает, что дробь } \frac{x+2}{3} \text{ также}$$

должна принимать целое значение. Пусть $\frac{x+2}{3} = k$.

Тогда $x = 3k - 2, y = 2 - 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Значит, $x^2 + y^2 + z^2 = 25k^2 - 28k + 9$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Вершина параболы имеет абсциссу $k_0 = \frac{14}{25}$. С учетом того, что k может принимать только целочисленные значения, минимум функции достигается в точке, ближайшей к вершине параболы, т.е. при $k = 1$. Минимальное значение равно 6.

3. {30, 31, 32, 33, 34, 35, 36}. Пусть данные 7 чисел – это $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5, a + 6$. Их сумма равна $7a + 21$. Сумма шести чисел из этого набора может принимать следующие значения: $6a + 15, 6a + 16, 6a + 17, 6a + 18, 6a + 19, 6a + 20, 6a + 21$. Из них простыми могут быть только $6a + 17$ и $6a + 19$. Таким образом, $(6a + 19)^2 - (6a + 17)^2 = 792$. Отсюда $a = 30$. Значит, $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$. Непосредственным подсчетом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

4. $\frac{\sqrt{79}}{3}$.

Треугольники BCM и DAM подобны по двум углам, а коэффициент подобия равен $\frac{BC}{AD} = 2$ (рис. 14). Пусть r – радиус окружности ω_1 . Тогда из подобия следует, что радиус окружности ω_2 равен $\frac{r}{2}$. Также из подобия следует, что

$$\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}.$$

Также из подобия следует, что

$$\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}.$$

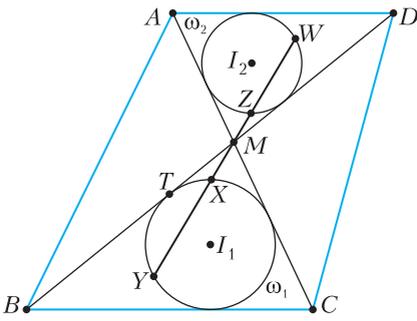


Рис. 14

Отсюда $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}MX \cdot MY$. По теореме о касательной и секущей $MX \cdot MY = MT^2$. По теореме Пифагора для треугольника I_1MT получаем $MT^2 = MI_1^2 - r^2$. Так как отношение отрезков MI_1 и MI_2 равно коэффициенту подобия треугольников, отсюда следует, что $MI_1 = \frac{2}{3}I_1I_2$. Используя все полученные выше соотношения, имеем

$$MZ \cdot MY = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} I_1 I_2^2 - r^2 \right),$$

откуда следует, что

$$r^2 = \frac{4}{9} I_1 I_2^2 - 2 \cdot MZ \cdot MY = \frac{79}{9}.$$

5. Первое число больше.

Чтобы сравнить два числа, рассмотрим их разность

$$\Delta = \left(5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \right) - \left(4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14} \right).$$

Обозначая $-\frac{\pi}{14} = x$, можем переписать

$$\Delta = 4 \sin 3x + 5 - 4 \cos 2x - 5 \sin x.$$

С помощью формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла эту разность можно привести к виду

$$4 \sin 3x + 5 - 4 \cos 2x - 5 \sin x = -16 \sin^3 x + 8 \sin^2 x + 7 \sin x + 1.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и докажем, что функция $f(t) = -16t^3 + 8t^2 + 7t + 1$ неотрицательна на отрезке $[-1; 1]$. В самом деле, $f(-1) > 0$, $f(1) = 0$, а производная $f'(t) = -48t^2 + 16t + 7$ равна нулю в точках $t = \frac{7}{12}$ и $t = -\frac{1}{4}$, причем $t = \frac{7}{12}$ — точка максимума, а $t = -\frac{1}{4}$ — точка минимума, в которой принимается значение $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$. Так как

значение $\sin \frac{-\pi}{14}$ отлично от 1 и от $-\frac{1}{4}$, получаем, что $\Delta > 0$, поэтому первое число больше второго.

6. 780.

Если пирамида является тетраэдром, то достаточно выбрать любые 4 точки, не лежащие в

одной плоскости. Это можно сделать $C_{12}^4 - C_7^4 = 495 - 35 = 460$ способами (вычитаются случаи, когда все 4 точки лежат в плоскости α). Если в основании пирамиды лежит многоугольник, имеющий хотя бы 4 вершины, то это основание лежит в плоскости α . Количество способов выбрать такой многоугольник равно количеству способов выбрать любое подмножество из заданных точек плоскости α , состоящее хотя бы из четырех элементов, т.е. $C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$. Вершину можно выбрать 5 способами, поэтому количество таких пирамид есть $5 \cdot 64 = 320$.

В итоге получаем $460 + 320 = 780$ способов.

7. $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Пусть сторона основания пирамиды равна a , боковое ребро равно b , а $\angle SAB = \alpha$ (рис. 15). Проводя высоту равнобедренного треугольника ABS на основание AB , находим, что $\cos \alpha = \frac{AB}{2AS} = \frac{a}{2b}$. Отсюда

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{a}{2b} \right)^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4b^2}, \text{ и } \sin \alpha = \frac{1}{2b} \sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Спроецируем прямые AD и SF на плоскость SAB параллельно прямой AD (рис. 16). Так как отрезок $X'Y'$ параллелен плоскости проекции, длина его проекции $X'Y'$ равна длине отрезка $X'Y$. Задача свелась к нахождению расстояния ρ от точки Y' до прямой SF' , где F' — проекция точки F . Получаем

$$\rho = \frac{2S_{FY'S}}{F'S};$$

$$F'S^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{a}{2b} = 2a^2 + b^2;$$

$$2S_{FY'S} = ab \sin \alpha = \frac{a}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Значит, $\rho = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{2a^2 + b^2}}$. Подставляя сюда $a = 2$,

$b = 4$, находим, что $\rho = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

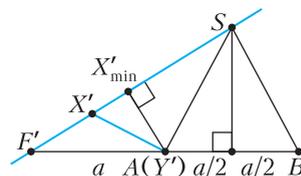
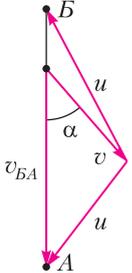


Рис. 16

Физика
9 класс

1. 1) $u = \frac{s}{T_0} = 24 \text{ м/с.}$

2) Геометрия абсолютных, переносной и относительных скоростей на пути «туда» и «обратно» представлена на рисунке 17. По закону сложения скоростей находим время полета из А в Б:



$$T_1 = \frac{s}{\sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha} - v \cos \alpha} \approx 1044 \text{ с.}$$

3) Продолжительность полета по маршруту $A \rightarrow B \rightarrow A$ равна

$$T_2 = 2s \frac{\sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha}}{u^2 - v^2},$$

Рис. 17

T_2 максимально при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$.

4) $T_{2\text{max}} = 2 \frac{s}{u} \frac{u^2}{u^2 - v^2} = 2T_0 \frac{u^2}{u^2 - v^2} = 1440 \text{ с.}$

2. Мяч движется по параболе.

1) Вследствие симметрии продолжительность полета $T = t_1 + t_2 = 3 \text{ с.}$

2) Максимальная высота полета $H = \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2} \right)^2 = 12 \text{ м.}$ Из условия следует, что равнобедренный треугольник скоростей $\vec{v}(t_2) = \vec{v}(t_1) + \vec{g}(t_2 - t_1)$ – равносторонний. Тогда $v(t_1) = v(t_2) = 10 \text{ м/с.}$ В полете горизонтальная составляющая скорости

$$v_{0x} = v(t_1) \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} g(t_2 - t_1). \text{ Дальность полета}$$

$$L = v_{0x} T = \frac{\sqrt{3}}{2} g(t_2^2 - t_1^2) \approx 26 \text{ м.}$$

3) В момент времени t_1 проекция ускорения на нормаль к траектории $a_n = g \cos \beta = \frac{|v(t_1)|^2}{R}$.

Отсюда находим радиус кривизны траектории в малой окрестности рассматриваемой точки траектории:

$$R = \frac{g(t_2 - t_1)^2}{\cos \beta} \approx 11,5 \text{ м.}$$

3. 1) На рисунке 18 показаны силы, действующие на шар и клин в состоянии покоя. Очевидно,

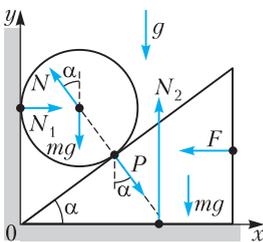


Рис. 18

$$N \cos \alpha = mg, \\ P = N = \frac{mg}{\cos \alpha}, \\ F = P \sin \alpha = mgtg\alpha \approx 5,8 \text{ Н.}$$

2) В процессе движения перемещения, скорости и ускорения шара и клина связаны. Так, $v_{\text{ш}} = v_{\text{к}} \text{tg} \alpha$.

Введем обозначение $v_{\text{ш}} = v$. Потерь энергии нет. Приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной: $\frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha} \right) = mgH$. Перемещение шара до первой остановки

$$h = \frac{H}{1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}} = H \sin^2 \alpha = 0,2 \text{ м.}$$

3) Из закона сохранения энергии $v^2 = 2(g \sin^2 \alpha)H$ находим ускорение шара: $a_{\text{ш}} = g \sin^2 \alpha$. Тогда ускорение клина

$$a = \frac{a_{\text{ш}}}{\text{tg} \alpha} = g \sin \alpha \cos \alpha \approx 4,33 \text{ м/с}^2.$$

4) Ускорение клина максимальное при $\alpha = 45^\circ$.

5) $a_{\text{max}} = 0,5g = 5 \text{ м/с}^2$.

4. 1) $V(t) = \frac{m}{\rho} \left(1 + (\beta - 1) \frac{t - t_0}{t_{100} - t_0} \right)$.

2) $\Delta V = \frac{m}{\rho} (\beta - 1) \frac{t_2 - t_1}{t_{100} - t_0} \approx 1,85 \cdot 10^{-1} \text{ мм}^3$.

3) $S = \frac{\Delta V}{L} \approx 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2$.

5. 1) Введем обозначения $R_1 = r, R_2 = 4r, R_3 = 2r, R_4 = 1,2r$, где $r = 5 \text{ Ом}$. Сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, эквивалентное сопротивление $R_{12} = 0,8r$; этот резистор соединен последовательно с R_4 , эквивалентное сопротивление такой цепочки $R_{124} = R_{12} + R_4 = 0,8r + 1,2r = 2r$. Сопротивления $R_{124} = 2r$ и $R_3 = 2r$ соединены параллельно. Эквивалентное сопротивление цепи

$$R_{\text{экр}} = \frac{R_{124} R_3}{R_{124} + R_3} = r = 5 \text{ Ом.}$$

2) $P = \frac{U^2}{R_{\text{экр}}} = \frac{U^2}{r} = 20 \text{ Вт.}$

3) Наименьшая мощность рассеивается на резисторе R_2 . Напряжение на этом резисторе $0,4U$, наименьшая мощность

$$P_{\text{min}} = \frac{(0,4U)^2}{4r} = 0,04 \frac{U^2}{r} = 0,8 \text{ Вт.}$$

(Продолжение следует)

Олимпиада
«Покори Воробьевы горы!»

(с.м. «Квант» №10)

Физика

Отборочный этап

11 класс

1. Рассмотрим бесконечно малый интервал времени dt в процессе погони. Изменение расстояния между Уоллесом и Громитом за этот промежуток времени равно $dL = (v_2 \cos \alpha - v_1) dt$. Как

видно, L уменьшается с постоянной скоростью. Суммируя изменения расстояния и времени в ходе погони, находим искомое время:

$$L_0 = (v_1 - v_2 \cos \alpha)t, \quad t = \frac{L_0}{v_1 - v_2 \cos \alpha} = 50 \text{ с.}$$

Ясно, что расстояние между участниками погони изменяется по закону $L(t) = L_0 - (v_1 - v_2 \cos \alpha)t$. За время dt вектор скорости Уоллеса поворачивается (вместе с направлением на Громита) на

$$d\varphi = \omega dt = \frac{v_2 \sin \alpha \cdot dt}{L(t)},$$

откуда

$$\omega(t) = \frac{v_2 \sin \alpha}{L_0 - (v_1 - v_2 \cos \alpha)t}.$$

Мы нашли закон изменения угловой скорости Уоллеса, но ясно, что у Громита она точно такая же. Удобно связать угол поворота с изменением расстояния. Поскольку $dL = -(v_1 - v_2 \cos \alpha)dt$, то

$$d\varphi = -\frac{v_2 \sin \alpha}{v_1 - v_2 \cos \alpha} \frac{dL}{L}, \quad \varphi = \frac{v_2 \sin \alpha}{v_1 - v_2 \cos \alpha} \ln \frac{L_0}{L}.$$

Таким образом, с учетом равенства модулей скоростей, угол поворота векторов скоростей обоих участников погони к моменту, когда расстояние между ними уменьшится в 4 раза, будет

$$\varphi_4 = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \ln 4 = \sqrt{3} \ln 4 \text{ рад} \approx 2,401 \text{ рад} \approx 137,6^\circ.$$

В дальнейшем будем обозначать $\frac{v_2 \sin \alpha}{v_1 - v_2 \cos \alpha} = k = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $L(\varphi) = L_0 e^{-k\varphi}$. К окончанию погони Уоллес и Громит должны оказаться практически в одной точке, поэтому будем далее следить только за движением Уоллеса. Совместим начало координат с точкой его старта, направление на Громита выберем направлением оси y , направив ось x перпендикулярно ей в сторону смещения Громита. Поскольку величина скорости Уоллеса постоянна, то проекции его скоростей

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_1 \sin \varphi, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_1 \cos \varphi.$$

Тогда

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{v_1}{\omega} \sin \varphi = \frac{v_1 L}{v_2 \sin \alpha} \sin \varphi = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin \alpha} e^{-k\varphi} \sin \varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{v_1}{\omega} \cos \varphi = \frac{v_1 L}{v_2 \sin \alpha} \cos \varphi = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin \alpha} e^{-k\varphi} \cos \varphi.$$

Полный угол поворота за все время погони очень велик (при $L \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow \infty$), поэтому конечные координаты Уоллеса (и Громита) можно найти с

использованием математической подсказки в условии. Получим

$$x_k = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin \alpha} \frac{1}{1+k^2} = \frac{v_1 (v_1 - v_2 \cos \alpha)^2}{v_2 \sin \alpha (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha)} L_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} L_0,$$

$$y_k = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin \alpha} \frac{k}{1+k^2} = \frac{v_1 (v_1 - v_2 \cos \alpha)}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha} L_0 = \frac{1}{2} L_0.$$

Значит, к окончанию погони Уоллес окажется от своей стартовой точки (начала координат) на расстоянии

$$r_y = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} = L_0 = 100 \text{ м.}$$

Стартовая точка Громита имеет координаты $(0; L_0)$, так что модуль его перемещения в процессе погони точно такой же:

$$r_r = \sqrt{x_k^2 + (y_k - L_0)^2} = L_0 = 100 \text{ м.}$$

Чтобы изобразить картину, выложенную камешками Уоллеса, достаточно проанализировать ситуацию качественно. Поскольку модуль его скорости остается постоянным, а угловая скорость монотонно растет, то радиус кривизны его траектории $R(t) = \frac{v}{\omega(t)}$ монотонно уменьшается. Поэтому ясно, что траектория имеет вид скручивающейся спирали (рис. 19), выходящей из начала

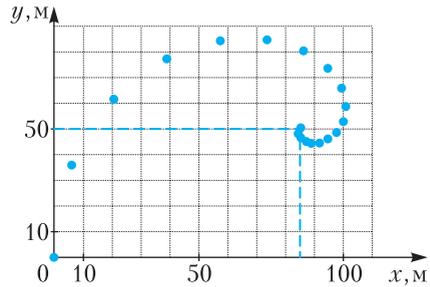


Рис. 19

координат вдоль оси y и «наматывающейся» на конечную точку $(x_k; y_k)$. Можно выполнить построение и строго (предоставляем это читателям сделать самостоятельно).

2. Сразу отметим, что характерные скорости частицы не превышают 50 м/с, так что решение задачи можно провести в рамках ньютоновской механики. Изучим движение заряженной частицы в поле тяжести при наличии горизонтального магнитного поля. Как известно, общее движение в скрещенных полях состоит из дрейфа и вращения. Выделим недрейфовое движение путем перехода в систему отсчета, движущуюся со скоростью дрейфа v_d . Эта скорость перпендикулярна и \vec{g} , и \vec{B} , а ее модуль равен $v_d = \frac{mg}{qB}$. Далее будем называть такую систему отсчета дрейфующей. В

самом деле, уравнение движения частицы с массой m и зарядом q в однородном поле тяжести \vec{g} и в перпендикулярном ему магнитном поле \vec{B}

$$m\vec{a} = q[\vec{v} \times \vec{B}] + m\vec{g}$$

после перехода в дрейфующую систему, где $\vec{a}' = \vec{a}$, $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_d$, принимает вид

$$m\vec{a}' = q[\vec{v}' \times \vec{B}] + q[\vec{v}_d \times \vec{B}] + m\vec{g} = q[\vec{v}' \times \vec{B}].$$

Иными словами, становится уравнением движения в одном только магнитном поле – поле тяжести исчезает, поскольку скорость дрейфа подобрана именно так, чтобы $q[\vec{v}_d \times \vec{B}] + m\vec{g} = 0$. Как видно из описания эксперимента, начальная скорость частицы всегда была направлена параллельно горизонтальной оси, будем далее считать ее осью x , идущей в направлении \vec{v}_d . Тут возможны два случая.

а) Скорость \vec{v}_0 сонаправлена с \vec{v}_d . При $v_0 < v_d$ в дрейфующей системе частица стартует против оси x' со скоростью $V = v_d - v_0$. Направим ось y вертикально вверх. Ясно, что при движении со скоростью дрейфа сила Лоренца направлена вертикально вверх, в данном случае она на начальном участке траектории (на окружности радиусом $R = \frac{mV}{qB}$) направлена вниз. Таким образом, закон движения частицы в этой системе отсчета принимает вид

$$\begin{aligned} x'(t) &= -R \sin \omega t, \\ y'(t) &= H - R + R \cos \omega t \end{aligned}$$

(где H – начальная высота, частота $\omega = \frac{qB}{m}$), а в связанной с планетой системе отсчета –

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) + v_d t = R \left(\frac{\omega t}{1-z} - \sin \omega t \right), \\ y(t) &= y'(t) = H - R(1 - \cos \omega t). \end{aligned}$$

Здесь введена безразмерная переменная $z = v_0/v_d$. Отметим, что для анализа зависимости дальности полета от величины начальной скорости удобно записать радиус R через неизменные для данного опыта величины и эту безразмерную переменную:

$$R = \frac{m^2 g}{q^2 B^2} - \frac{m v_0}{q B} = \frac{q}{\omega^2} \left(1 - \frac{v_0}{v_d} \right) = \frac{g}{\omega^2} (1 - z).$$

Другая удобная безразмерная переменная – это $h = \frac{H}{R} = \frac{\omega^2 H}{q(1-z)}$. Как видно, частица попадает на поверхность планеты только при $h \leq 2$, в момент падения t_n

$$\cos \omega t_n = \cos \varphi = 1 - h, \quad \sin \varphi = \sqrt{h(2-h)},$$

а диапазон возможных значений $0 < \varphi \leq \pi$. Значит, координата точки падения

$$x(t_n) = \frac{g}{\omega^2} (\varphi - (1-z) \sin \varphi).$$

Эта функция монотонно растет при увеличении φ , а максимальная дальность полета достигается на краю интервала – при $\varphi = \pi$, т.е. каждый раз нужно выбирать $H = 2R$. Итак, при $0 \leq v_{0x} < v_d$

$$L_{\max} = \pi \frac{g}{\omega^2}.$$

Если $v_{0x} > v_d$, то в дрейфовой системе сила Лоренца на начальном этапе движения направлена вверх, т.е. частица в ходе вращения заворачивает выше начального положения (при $v_{0x} = v_d$ вращения вообще нет – частица движется по прямой). Это означает, что при любом $H > 0$ частица на «пол» не падает.

б) Скорость \vec{v}_0 направлена противоположно \vec{v}_d . В этом случае в дрейфующей системе частица стартует против оси x' со скоростью $V = v_0 + v_d$. Законы движения частицы и в дрейфующей системе, и в неподвижной остаются аналогичны предыдущему пункту:

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) + v_d t = R \left(\frac{\omega t}{1+z} - \sin \omega t \right), \\ y(t) &= y'(t) = H - R(1 - \cos \omega t) \end{aligned}$$

и

$$R = \frac{m v_0}{q B} + \frac{m^2 g}{q^2 B^2} = \frac{g}{\omega^2} \left(1 + \frac{v_0}{v_d} \right) = \frac{g}{\omega^2} (1 + z).$$

Как и в случае а),

$$\cos \omega t_n = \cos \varphi = 1 - h, \quad \sin \varphi = \sqrt{h(2-h)}, \quad 0 < \varphi \leq \pi.$$

Однако в случае б)

$$x(t_n) = \frac{g}{\omega^2} (\varphi - (1+z) \sin \varphi),$$

и мы обнаруживаем, что сначала удаление частицы по оси x от точки запуска растет в область отрицательных x , достигает максимума при $\cos \varphi = (1+z)^{-1}$, а затем уменьшается до нуля и снова растет – уже в области положительных x . Максимальное отклонение частицы в области отрицательных x составляет

$$(-x)_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \left(\sqrt{z(2+z)} - \arccos \frac{1}{1+z} \right).$$

Максимальное отклонение в области положительных x отвечает $\varphi = \pi$ и равно

$$x_{\max} = \pi \frac{g}{\omega^2}.$$

Для обеспечения максимальной дальности полета нужно выбрать H , отвечающее большему из этих значений. Анализируя поведение функции в выражении для $(-x)_{\max}$, устанавливаем, что при небольших z выгоднее выбирать $H = 2R$, а при $z > z_k$ выгодно запустить частицу с высоты $H = \frac{g}{\omega^2} z$. «Критическое» значение скорости отвечает z_k , являющемуся корнем уравнения

$$\sqrt{z(2+z)} - \arccos \frac{1}{1+z} = \pi.$$

Численное решение (например, с помощью таблицы Excel или пакета математических расчетов) дает $z_k \approx 3,603339$. Итак, аналитическая формула для графика Громита имеет вид

$$L_{\max}(v_{0x}) = \begin{cases} \frac{g}{\omega^2} \left(\sqrt{z(2+z)} - \arccos \frac{1}{1+z} \right), & v_{0x} < -z_k v_d, \\ \pi \frac{g}{\omega^2}, & -z_k v_d \leq v_{0x} < +v_d, \end{cases}$$

где $z = |v_{0x}|/v_d$. При $v_{0x} \geq +v_d$ частица не падает на «пол» камеры.

Из сопоставления формулы с графиком обнаруживаем, что положительные значения v_0 на графике отвечают отрицательным значениям v_{0x} в аналитической форме (именно в области $v_{0x} < 0$ на графике появляется точка излома). Кроме того, такое сопоставление позволяет найти

$$v_d = \frac{g}{\omega} = \frac{39,64}{z_k} \text{ м/с} \approx 11,00 \text{ м/с}, \quad L = \pi \frac{g}{\omega^2} \approx 2,00 \text{ м}.$$

Тогда

$$\omega = \frac{gB}{m} \approx \frac{11\pi}{2} \text{ с}^{-1}, \quad B \approx 0,1100 \text{ Тл}, \quad g \approx 190,1 \text{ м/с}^2.$$

Это явно не Земля.

3. Рассмотрим сначала состояние схемы при нахождении переключателя в положении 1. Ясно, что при этом потенциал внешней сферы $\phi_3 = 0$ и потенциал внутренней $\phi_1 = -\mathcal{E}$. Следовательно, заряды этих сфер удовлетворяли уравнениям

$$q_1 + q_3 = 0, \quad \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{12\pi\epsilon_0 a} = -\mathcal{E},$$

откуда

$$q_1 = -6\pi\epsilon_0 a \mathcal{E}, \quad q_3 = +6\pi\epsilon_0 a \mathcal{E} \approx 0,367 \text{ нКл}.$$

В этом состоянии потенциал средней сферы относительно бесконечности отрицателен, так что после переключения на нее с «земли» натекает заряд q'_2 . Сумма зарядов внутренней и внешней сфер остается равной нулю, но для поддержания разности потенциалов источник перемещает между ними заряд Δq . Таким образом, новые заряды сфер определяются уравнениями

$$\begin{aligned} q'_1 + q'_3 &= 0, \\ \frac{q'_1}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_3}{12\pi\epsilon_0 a} &= 0, \\ \frac{q'_1 + q'_2 + q'_3}{12\pi\epsilon_0 a} - \left(\frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_3}{12\pi\epsilon_0 a} \right) &= \mathcal{E}, \end{aligned}$$

откуда

$$q'_1 = -\frac{72}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E} \approx -0,400 \text{ нКл},$$

$$q'_2 = +\frac{24}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E} \approx +0,133 \text{ нКл},$$

$$q'_3 = +\frac{72}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E} \approx +0,400 \text{ нКл}.$$

Отметим, что $\Delta q = q'_3 - q_3 = \frac{6}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E}$, т.е. источник после переключения совершает работу

$$A = \mathcal{E} \Delta q = \frac{6}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E}^2.$$

Для анализа изменения энергии конденсаторов проще представить систему проводящих тел, состоящую из трех сфер и «земли», которую мы тоже можем считать сферой, но бесконечного радиуса, как соединение трех сферических конденсаторов: образованный внутренней и средней сферами, образованный средней и внешней сферами и образованный внешней сферой и «землей». Используя формулу $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ для емкости сферического конденсатора с радиусами обкладок r_1 и r_2 , определяем емкости конденсаторов:

$$C_{12} = 8\pi\epsilon_0 a, \quad C_{23} = 24\pi\epsilon_0 a, \quad C_{34} = 12\pi\epsilon_0 a.$$

До переключения $q_{12} = q_{23} = 6\pi\epsilon_0 a \mathcal{E}$, $q_{34} = 0$ и энергия этой системы конденсаторов

$$W = \frac{q_{12}^2}{2C_{12}} + \frac{q_{23}^2}{2C_{23}} = 3\pi\epsilon_0 a \mathcal{E}^2.$$

После переключения $q'_{12} = \frac{72}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E}$, $q'_{23} = \frac{48}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E}$, $q'_{34} = \frac{24}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E}$ и энергия системы конденсаторов

$$W' = \frac{q'^2_{12}}{2C_{12}} + \frac{q'^2_{23}}{2C_{23}} + \frac{q'^2_{34}}{2C_{23}} = \frac{36}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E}^2.$$

Из уравнения энергетического баланса находим количество теплоты, выделившееся в схеме после переключения:

$$Q = A - \Delta W = \frac{3}{11} \pi\epsilon_0 a \mathcal{E}^2 \approx 0,334 \text{ нДж}.$$

4. Длительность импульсов в таком сигнале $\tau \approx 10^{-17}$ с. Максимальная энергия электрона к моменту возвращения к атому определяется амплитудой изменения напряженности электрического поля волны: $W \approx \frac{e^2 E_m^2}{2m\Omega^2}$, где Ω – циклическая частот возбуждающей волны.

10 класс

1. В начальный момент вес поршня уравновешивался разностью давлений азота и водорода:

$$Mg = pS = \frac{2RT}{h}.$$

Из-за диффузии водорода поршень начнет смещаться вверх, где количество газа уменьшается. Пусть x – расстояние, на которое он сместится, а y – количество молей водорода, перешедших в нижнюю половину. Тогда, с одной стороны, концентрации водорода должны выровняться:

$$\frac{y}{1-y} = \frac{h+x}{h-x}, \quad \frac{x}{h} = 2y - 1,$$

а с другой (в соответствии с условием равновесия поршня),

$$Mg = \frac{(3+y)RT}{h+x} - \frac{(1-y)RT}{h-x}.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{1}{2}h = 18 \text{ см.}$$

2. $\alpha \approx (70,5 \pm 0,3)^\circ$, $v_0 \approx (9,81 \pm 0,05) \text{ м/с}$, $r \approx (5,66 \pm 0,06) \text{ м}$.

7–9 классы

1. Поскольку система находится при нормальном атмосферном давлении, то температура мокрого снега $t_0 = 0^\circ\text{C}$, а температура кипятка $t_k = 100^\circ\text{C}$. Поначалу температура не изменялась, потому что в термосе еще был лед, который таял за счет остывания кипятка. Кипяток подают «очень медленно», поэтому можно считать, что в каждый момент времени содержимое термоса находится практически в равновесном состоянии. Тогда, используя уравнение теплового баланса, найдем

$$\Delta t = \frac{31}{24} \tau_1 = 31 \text{ с}; t = 0,3t_k + 0,7t_0 = 30^\circ\text{C}.$$

2. Используя законы изменения векторов скорости и перемещения, получаем

$$\alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70,5^\circ; v_0 = \frac{gt_0}{\sqrt{2}} \approx 6,48 \text{ м/с}.$$

Заключительный этап

11 класс

1. Участники олимпиады придерживались двух принципиально разных трактовок условия задачи:

- резинки подчиняются закону Гука как при растяжении, так и при сжатии;
- резинки подчиняются закону Гука только при растяжении, а при сжатии они провисают и не влияют на движение шайбы.

В случае а) получаем

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,785 \text{ с} \text{ и } t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k+k'}} \approx 0,262 \text{ с},$$

$$v_1 = s \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,024 \text{ м/с} \text{ и } v_2 = s \sqrt{\frac{k+k'}{m}} = 0,072 \text{ м/с}.$$

2. $h_2 \approx 2h_0 - h_1 = 31 \text{ см}$.

3. $s = \frac{R_0}{2\rho} (e^{2\rho s_0/R_0} - 1) = (e - 1) \frac{R_0}{2\rho} \approx 137,5 \text{ м}$.

4. $D = \frac{21}{10s} = 3 \text{ дптр}$ (линза собирающая, оба изображения действительные).

НАПЕЧАТАНО В 2024 ГОДУ

№ журнала с.

№ журнала с.

Памяти С.П.Новикова 7 15

Статьи по математике

Волшебная арифметика хорд. К.Кохась 3 13

Друзья и незнакомцы на цикле. К.Кохась 8 2

Зонгоны. А.Устинов 9 12

– " – 10 7

История криптосистемы RSA.

Ю.Шустрова 2 15

Корни многочленов и касательные

к окружностям. А.Рябичев, К.Щербаков 1 7

Минимальные жесткие укладки домино.

Д.Ефимов 4 2

Нужно больше золота! А.Оноприенко 11-12 10

Пересечения и раскраски.

А.Райгородский 5-6 8

Приложения теоремы Больцано-Коши.

Д.Баврин 7 11

Статьи по физике

Вечна ли «вечная мерзлота»? С.Варламов 10 2

Как физики рисуют графики. Л.Ашкинази 8 9

Кинематика случайного блуждания
и освоение человечеством Галактики.

М.Никитин, А.Тепляков, А.Львова 1 2

Кто нас хранит. Л.Ашкинази 5-6 2

Межзвездные полеты: мечты и реалии.

М.Никитин 7 2

Неожиданное решение Нобелевского
комитета. Л.Белопухов 11-12 2

О природе электрического тока в метал-
лических проводниках. Л.Белопухов 9 2

Открытые и замкнутые.... А.Минеев 4 8

Юлий Борисович Харитон (к 120-летию

со дня рождения). Л.Белопухов 2 2

– " – 3 2

Из истории науки

Винтовые линии, спирали и физические
методы. В.Птушенко 3 24

Математический мир

Морис Крайчик. К.Кноп 4 24

Теоретическая физика и современная
математика. С.Новиков 7 16

	№ журнала	с.		№ журнала	с.
Ученые размышляют					
Физика и метафизика Вселенной. <i>А. Стасенко</i>	5-6	13	Мы и модели. <i>Л. Ашкинази</i>	4	28
Задача с историей			Ньютон, модели Вселенной и постоянная Хаббла. <i>А. Кулаков</i>	3	44
Задача о разбиении прямоугольников на полоски. <i>А. Климов</i>	10	23	Поток импульса. <i>П. Крюков</i>	2	41
Задачник «Кванта»			Математический кружок		
Задачи М2778–М2825, Ф2785–Ф2832	1–12		«Легкое решение одной трудной геометрической задачи». <i>К. Козеренко, А. Герасимова, А. Лузгина</i>	7	31
Решения задач М2762– М2809, Ф2769– Ф2816	1–12		«На круги свои...». <i>А. Белов, М. Сапир</i>	2	31
Вариации на тему одной геометрической задачи. <i>Н. Николов, А. Иванов</i>	11-12	28	– " –	3	36
Задача о замкнутой ломаной. <i>Е. Бакаев, Д. Магжанов</i>	5-6	25	Об одной задаче LXV Международной математической олимпиады. <i>Н. Пантонин</i>	8	39
О неравенстве Чебышёва для сумм. <i>А. Антропов</i>	8	29	Обрученные многогранники. <i>Н. Даурцева, К. Сторожук</i>	1	30
Про треугольник $A_2B_2C_2$. <i>А. Терёшин</i>	4	22	Трисекция угла и другие классические задачи. <i>А. Заславский, С. Маркелов</i>	9	35
«Квант» для младших школьников			Шалтай, Болтай и Брокер. <i>А. Заславский</i>	8	37
Задачи	1–12		Лаборатория «Кванта»		
Статьи по математике			Токи Фуко и гравитация. <i>С. Герасимов</i>	7	36
71 узелок. <i>К. Кохась</i>	11-12	34	Я поведу тебя в музей. <i>С. Дворянинов</i>	9	29
Конкурс имени А.П.Савина			Наши наблюдения		
Задачи	1–4, 9–12		Про барометры и не только. <i>С. Дворянинов</i>	11-12	40
Итоги конкурса 2023/24 учебного года	7	29	Практикум абитуриента		
Калейдоскоп «Кванта»			Гравитация внутри Земли и ее физические характеристики. <i>Б. Мукушев</i>	1	36
М а т е м а т и к а			Как найти ошибку. <i>М. Бондаров</i>	9	44
Когда фигурные числа совпадают	1	32	Физический смысл уравнений, характеризующих механические процессы. <i>Б. Мукушев</i>	5-6	44
Несколько игр из книги Мориса Крайчика	4		Олимпиады		
Почти целое	9		Заключительный этап L Всероссийской олимпиады школьников по математике	7	40
Ф и з и к а			LXV Международная математическая олимпиада	8	47
Координаты	5-6	“	Заключительный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике	8	49
Теория относительности	2	“	Избранные задачи XXIX Турнира имени А.П.Савина	9	41
Траектории	7	“	20-я Международная естественно-научная олимпиада юниоров	2	51
Физика + интеграл	10	“	Международная физическая олимпиада 2023 года	1	41
Физика + производная	8	“	85-я Московская олимпиады школьников по физике	4	36
Школа в «Кванте»			Региональный этап L Всероссийской олимпиады школьников по математике	3	51
М а т е м а т и к а			Региональный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике	5-6	37
Четырехугольник с тремя равными сторонами. <i>Е. Бакаев</i>	10	26	XLV Турнир городов. Задачи весеннего тура	4	31
Ф и з и к а					
Воздушный шар. <i>А. Либерман</i>	5-6	35			
Из Антарктики в Арктику – самолетом. <i>А. Стасенко</i>	2	30			
Как на льдине чай вскипятить. <i>А. Стасенко</i>	9	43			
Как Студент о ледяном дожде размышлял. <i>А. Стасенко</i>	8	35			
Физический факультатив					
Диэлектрический гистерезис. <i>П. Крюков</i>	3	53			
Задача Капицы о протеле цилиндра через соленойд. <i>И. Кравченко</i>	11-12	36			
Коники в задачах по физике. <i>А. Бычков</i>	10	29			

<i>№ журнала</i>	<i>с.</i>	<i>№ журнала</i>	<i>с.</i>				
	XLV Турнир городов. Задачи осеннего тура	2	49		Самый молодой претендент	4	“
	Экзаменационные материалы				Юниоры бьют рекорды	5-6	“
	ЕГЭ по физике 2024 года	10	39		Прогулки с физикой		
	Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова. Физика	9	55		«А шарик вернулся, а он голубой»	5-6	4-я с. обл
	Национальный исследовательский университет «МИЭТ»	7	43		«Вечная мерзлота»	10	“
	Новосибирский государственный университет. Физика	10	43		Ледяной дождь	8	“
	Олимпиада «Ломоносов». Физика	3	55		Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать	9	“
	Олимпиада «Покори Воробьевы горы!». Математика	9	54		Различные траектории материальных тел	7	“
	Физика	10	46		Случайные блуждания	1	“
	Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого	5-6	42		Сосудистая система человека и дерева	4	“
	Физико-математическая олимпиада «Физтех» 2023 года. Физика	1	49		Структура ДНК и ... математические курьезы	3	“
	Физико-математическая олимпиада «Физтех» 2024 года	11-12	42		Только самолетом	2	“
	Информация				Барометр и «все оттенки смысла»	11-12	“
	Фестиваль Кирхгоффа	8	42				
	«Квант» улыбается						
	Ландау на экзамене	10	22				
	Смешивание красок	8	13				
	Вниманию наших читателей						
	Любопытно, что...	1	10				
	Признак делимости на графе	5-6	12				
	Коллекция головоломок						
	Календарь головоломок	1	2-я с. обл				
	Кубик с начинкой	11-12	“				
	Симметрикс из трапеции	3	“				
	Слоеный пирог	8	“				
	Трехслойный пирог из пентамино	9	“				
	Фестивальный цветок	7	“				
	Лингвистические задачи						
	Крылатая латынь	10	2-я с. обл				
	Монгольское письмо	5-6	“				
	Немного географии	4	“				
	Португальские слова	2					
	Шахматная страничка						
	В духе старинных мастеров	1	3-я с. обл.				
	Гонка в Шимкенте	10	“				
	Дорогу молодым	2	“				
	Золотой дубль	9	“				
	Кубок Синкфилда	8	“				
	Навстречу реваншу	7	“				
	Новый чемпион	11-12	“				
	Прорыв в десятку	3	“				

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

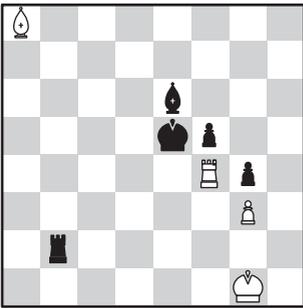
Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

Новый ЧЕМПИОН

18-летний Гукеш Доммарадж из Индии стал восемнадцатым чемпионом мира по шахматам, одолев Дин Лижэня. Титульный матч оставил противоречивое впечатление у любителей шахмат – действующий чемпион признался в интервью, что сейчас борется с депрессией и поэтому не смог должным образом подготовиться к матчу. Это привело к тому, что практически в каждой партии он попадал в цейтнот и зачастую стремился избегать осложнений. Юный претендент, вероятно, испытывал очень серьезное волнение и несколько раз упустил шанс наказать своего оппонента за неточности. В итоге судьбу титула решил невероятный зевок в решающей партии.

**Дин Лижэнь – Д. Гукеш
Сингапур, 2024, 14 партия**



К этой позиции пришла последняя партия в матче, и белые умудрились сделать практически единственный проигрывающий ход: **55. ♔f2???**. Вероятно, Дин зевнул, что после размена ферзей черные форсируют и размен слонов, переходя в выигранный пешечный эндшпиль. **55... ♗f2 56. ♔f2 ♕d5 57. ♕d5 ♕d5 58. ♖e3 ♗e5**, черный король занял оппозицию, и позиция теоретически выиграна, поэтому **белые сдались**.

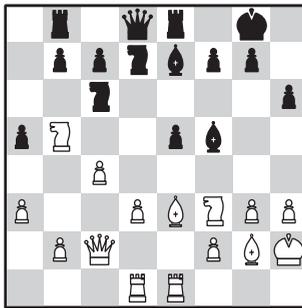
Такой развязки в титульном матче не было с 1892 года, когда

в решающей партии Михаил Чигорин, тоже играя белыми фигурами, в выигранной позиции зевнул мат в два хода Вильгельму Стейницу.

По качеству игры в шахматном плане в матче особняком стоит 12 партия, когда после поражения накануне Дин вопреки ожиданиям многих экспертов смог собраться и показать настоящую чемпионскую игру, сравнив счет.

**Дин Лижэнь – Д. Гукеш
Сингапур, 2024, 12 партия**

1. c4 e6 2. g3 d5 3. ♕g2 ♕f6 4. ♕f3 d4 (4... ♕e7 или 4...dc ведут к более спокойным позициям, но Гукеш решил продемонстрировать уверенность в себе) **5. 0-0 ♗c6 6. e3 ♕e7 (гораздо чаще встречается 6...e5) 7. d3 de 8. ♕e3 e5 9. ♕c3 0-0 10. ♗e1 h6 11. a3 a5 12. h3 ♕e6 13. ♗h2!? ♗b8?!** (бесполезный ход, сильнее 13... ♗e8 с идеей ♕f8) **14. ♗c2 ♗e8 15. ♕b5 ♕f5 16. ♗ad1 ♕d7?!** (и вновь сильнее 16... ♕f8).

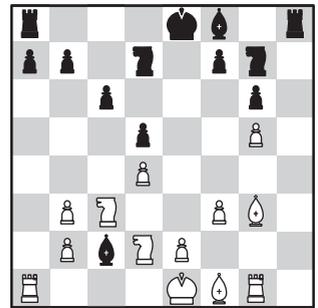


17. ♗d2! ♕g6? Черные дрогнули, а идея предыдущего хода белых проявляется в варианте **17... ♗c5 18. d4 ♕d3 19. d5 ♕e1 20. ♗e1 ♕d4 21. ♕d4 ed 22. ♕d4 ♕g6 23. ♗a5**, и у белых две пешки за качество в перспективной позиции. **18. d4 e4 19. ♕g1 ♗b6 20. ♗c3 ♕f6?** (необходимо **20...f5**, активизируя белопольного слона) **21. ♗c2 a4 22. ♕e2 ♕g5 23. ♕f4 ♕f4 24. ♕f4 ♗c8 25. ♗c3! ♗b8? 26. d5 (26. ♕a7** сразу выигрывало качество, но

позиция черных после ряда ошибок уже безнадежна) **♗d7 27. d6 c5 28. ♕c7 ♗f8 29. ♕e4 ♗c6 30. ♕g2 ♗cd8 31. ♕d5 ♕d5 32. cd ♗b8 33. ♗c5 ♗c8 34. ♗d4 ♗a6 35. ♗e7 ♗b5 36. d7 ♗c4 37. ♗e3 ♗c2 38. ♕d6 f6 39. ♕g7+**, белые ставят форсированный мат в 7 ходов, поэтому **черные сдались**.

**Д. Гукеш – Дин Лижэнь
Сингапур, 2024, 3 партия**

1. d4 ♗f6 2. ♕f3 d5 3. c4 e6 4. cd ed 5. ♗c3 c6 6. ♗c2 g6 7. h3 ♕f5 8. ♗b3 ♗b6 9. g4 ♗b3 10. ab ♕c2 11. ♕f4 h5 12. ♗g1 hg 13. hg ♗bd7!? (подготавливая ♗g8 и g5 для возвращения слона с c2) **14. ♕d2 ♗g8! 15. g5?!** (ослабляя пункт h5, теперь инициатива переходит к черным) **♗h5 16. ♗h2 ♗h8 17. f3 ♕g7 18. ♕g3.**



18... ♗h5? Черные прекрасно разыграли дебют и после **18... ♕e7! 19. e4 ♕g5 20. ed ♗f5 21. dc bc** вполне могли претендовать на победу. Вместо этого следует серия ошибок. **19. e4! de? 20. fe ♕e6 21. ♗c1 ♕d4 22. ♕f2 ♕g7 23. ♕e2!** Именно этот ход просмотрели черные в расчетах. После размена на e2 слону некуда отступить. **23... ♗b3 24. ♗c2 ♕d2 25. ♗d2.** У белых лишняя фигура, остальное – дело техники. **25... ♗e5 26. ♕d4 ♗d8 27. ♖e2 ♗h2 28. ♕g2 a6 29. b3 ♗d7 30. ♗cc1 ♕e7 31. ♗cd1 ♗e8 32. ♕g3 ♗h5 33. ♕f3 ♗f3 34. ♗f3 ♕d4 35. ♗h1 ♗g5 36. ♗h3 f5 37. ♕f4 ♗h5**, черные просрочили время.

А. Русанов

Индекс 90964

Уроки с разницей

БАРОМЕТР И «ВСЕ ОТТЕНКИ СМЫСЛА»

Какова роль чисел
в жизни человека и при чем
тут барометр?



ISSN 0130-2221 24011



9 770130 222245

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 40 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)