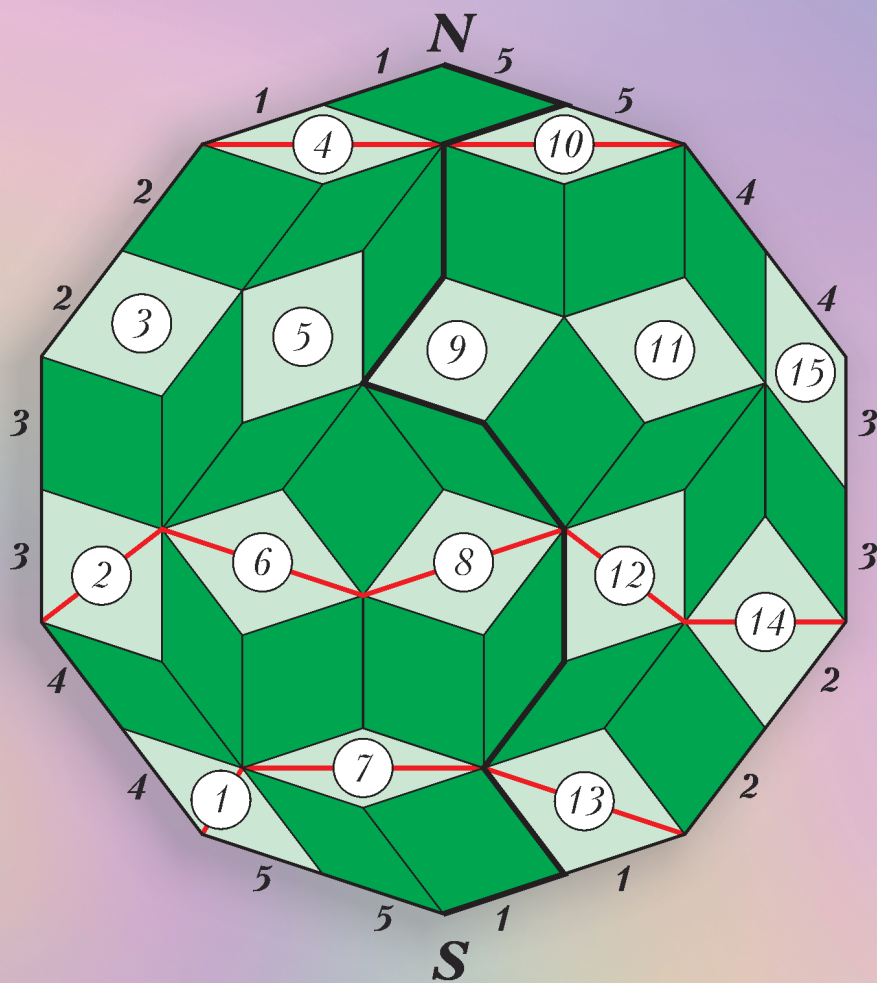


НОЯБРЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КРЫЛАТАЯ ЛАТЫНЬ

Даны латинские крылатые выражения с их переводами на русский язык. В некоторых латинских фразах имеются пропуски, которым соответствуют выделенные курсивом слова в русских переводах.

- (1) OMNIA VINCIT AMOR, ET NOS CEDAMUS AMORI!
– Все побеждает любовь, пусть и мы покоримся любви!
- (2) VALE ET ME AMA! – Прощай и люби меня!
- (3) VIVAT, CRESCAT, FLOREAT! – Да живет, растет, процветает!
- (4) DUM VIVIMUS, VIVAMUS! – Пока мы живем, будем жить!
- (5) FACILE OMNES, CUM VALEMUS, CONSILIA AEGROTIS DAMUS.
– Мы все, когда бываем здоровы, легко даем советы больным.
- (6) DI TIBI DENT QUOD OPTAS! – Боги тебе пусть дадут, что ты желаешь!
- (7) AMENUS PATRIAM! – Будем любить отечество!
- (8) CURA, UT VALEAS! – Заботься о своем здоровье!
- (9) QUANTUM PLACET. – Сколько угодно.
- (10) NE DIFFICILIA OPTEMUS! – Не будем желать трудного!
- (11) PLACEAT DEIS! – Да будет угодно богам!
- (12) DIVIDE ET <...>! – Разделяй и властвуй!
- (13) DIVIDE, UT IMPERES! – Разделяй, чтобы властвовать!
- (14) VALEANT CIVES MEI! – Да будут здоровы мои сограждане!
- (15) EDIMUS, UT VIVAMUS, NON <...>. – Мы едим, чтобы жить, а не живем, чтобы есть.
- (16) VIVAT ACADEMIA, VIVANT PROFESSORES!
– Да здравствует академия, да здравствуют профессора!
- (17) BIS <...>, QUI CITO <...>. – Вдвойне *дает* тот, кто *дает* скоро.

ЗАДАНИЕ 1. Заполните пропуски.

ЗАДАНИЕ 2. Дайте более буквальный перевод предложений 2,8, 9, 13 и 16.

ЗАДАНИЕ 3. Переведите на латынь:

- | | |
|--------------------|--|
| 1) Ты процветаешь. | 4) Да победишь! |
| 2) Он покоряется. | 5) Они властвуют. |
| 3) Мы растем. | 6) Ты заботишься, чтобы мы были здоровы. |

(Из книги «Задачи лингвистических олимпиад»)

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Вечна ли «вечная мерзлота»? *С.Варламов*
7 Зонагоны (окончание). *А.Устинов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи M2814–M2817, Ф2821–Ф2824
15 Решения задач M2802–M2805, Ф2809–Ф2812

ЗАДАЧА С ИСТОРИЕЙ

- 23 Задача о разбиении прямоугольников
на полоски. *А.Климов*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 26 Четырехугольник с тремя равными сторонами.
Е.Бакаев

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 28 Задачи 5–8

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 Коники в задачах по физике. *А.Бычков*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика + интеграл

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 39 ЕГЭ по физике 2024 года
43 Новосибирский государственный университет.
Физика
46 Олимпиада «Покори «Воробьевы горы!».
Физика
50 Ответы, указания, решения
«Квант» улыбается (с. 22)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Устинова*
II *Лингвистические задачи*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Вечна ли «вечная мерзлота»?

С.ВАРЛАМОВ

ВНУТРИ ЗЕМЛИ ОЧЕНЬ ГОРЯЧО – по оценкам физиков, в центре Земли температура достигает примерно 6000 градусов, и в какой температурной шкале Цельсия или Кельвина приводится это значение, понятное дело, неважно, поскольку разница шкал (273°) составляет малую величину в сравнении с самим значением. Согласно результатам измерений, полученным при бурении на большие глубины, рост температуры составляет примерно $\alpha = 3$ градуса на каждые 100 метров. Это соответствует тому, что изнутри Земли к ее поверхности идет поток тепловой энергии, причем в разных местах на глубинах порядка нескольких сотен метров величина этого потока колеблется в пределах $W = 0,03 - 0,05$ Вт/м². Величина потока зависит и от места (географических координат), и от состава пород, но практически не зависит от среднегодовой температуры на поверхности.

Действительно, если на глубине 10 км температура равна 300°C , а в разных местах на поверхности Земли (например, в России) среднегодовая температура изменяется от $+10^\circ\text{C}$ до -10°C , то градиент температуры, которым определяется величина теплового потока, отличается в этих местах всего на 3%. Исходя из значений потока и градиента температуры, можно оценить теплопроводность пород, из которых составлена верхняя часть Земли:

$$\lambda = \frac{W}{\alpha} = 1,0 - 1,7 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}).$$

В приведенной ниже таблице указаны удельные теплоемкости различных горных пород, коэффициенты теплопроводности и плотности материалов. Величина теплоемкости этих пород, приходящаяся на единицу объема, зависит, конечно, от

состава породы, но значения попадают в диапазон $C = 1,5 - 2,5$ МДж/(К · м³).

Будем оперировать средними значениями, которые примем равными $W = 0,04$ Вт/м², $\lambda = 1,5$ Вт/(К · м), $C = 2$ МДж/(К · м³), и рассмотрим несколько конкретных вопросов.

Если среднегодовая температура в Московской, Тульской, Рязанской областях составляет $t_0 = +8^\circ\text{C}$, то какая в этих местах температура под землей на глубине $h = 10$ м? Ответ:

$$t_{10} = t_0 + h \frac{W}{\lambda} = +8,26^\circ\text{C}.$$

Если среднегодовая температура в Якутии составляет $t_0 = -8^\circ\text{C}$, то на какой глубине температура будет 0°C ? Иными словами, какова толщина H слоя «вечной мерзлоты»? Из уравнения

$$H \frac{W}{\lambda} - 8^\circ\text{C} = 0$$

получаем $H = 300$ м.

Если среднесуточные температуры в Московской, Тульской, Рязанской областях изменяются от $+20,6^\circ\text{C}$ летом до $-7,4^\circ\text{C}$ зимой, то какова средняя глубина L промерзания почвы за зимний период? Будем считать, что от среднего значения температуры $+8^\circ\text{C}$ до среднего значения между $-7,4^\circ\text{C}$ и 0°C почва отдает тепловую мощность

$$\frac{S\lambda(8+7,4)^\circ\text{C}}{2L} = \frac{SC\lambda(8+7,4/2)^\circ\text{C}}{t},$$

где S – площадь, $t \approx 2$ месяца – длительность холодного периода. Отсюда находим

$$L \approx 1,3 \text{ м}.$$

Если среднесуточные температуры в Якутии изменяются от $+25^\circ\text{C}$ летом до -30°C зимой, то какова средняя глубина L оттаивания почвы за летний период? Полагаем,

что теплый летний период длится 2 месяца и от среднего значения температуры $-8\text{ }^{\circ}\text{C}$ до среднего значения между $-7,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $+25\text{ }^{\circ}\text{C}$ почва получает тепловую мощность

$$\frac{SL(25+8)^{\circ}\text{C}}{2L} = \frac{SC\lambda(8+25/2)^{\circ}\text{C}}{t},$$

откуда следует

$$L \approx 1,8 \text{ м.}$$

Полученные ответы по порядку величин вполне соответствуют реально наблюдаемым значениям. Теперь понятно, почему в Московской и соседних областях глубина фундаментов зданий и сооружений выбирается не меньше 1,5 м, а в Якутии высотные здания ставятся на фундамент, основой которого являются заглубленные на 5 и более метров в грунт сваи. Это делается для того, чтобы температуры самых нижних частей фундаментов не проходили в течение года через значение $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, т.е. через температуру, при которой жидкая вода превращается в лед. В одном случае они выше $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, а в другом случае они ниже $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

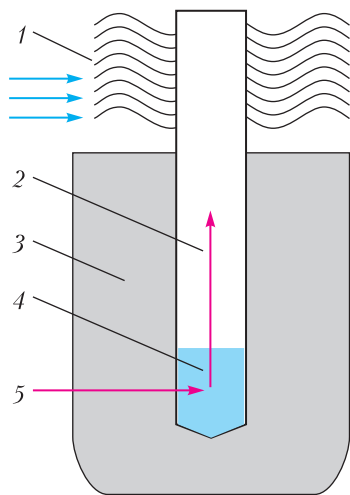
Поскольку здания, в которых находятся люди, внутри теплые, то это обстоятельство обеспечивает прогрев грунта под такими зданиями. Поэтому в средней полосе России устраивают закрытые фундаментные и подвальные помещения, а в Якутии,

наоборот, между зданием, стоящим на опорах-сваях, и грунтом оставляют открытым промежуток, в котором свободно «гуляет» зимний очень холодный воздух. И это предотвращает оттаивание грунта под зданием в зимний период.

Кстати, в Якутии используется и такой способ «замораживания» грунта на глубине вокруг фундаментных бетонных свай. Рядом с фундаментом в грунт погружаются стальные сваи-трубы. Внутрь полых свай-трубы с прочными стенками, закрытой герметично сверху и снизу, заливается, например, керосин, который не твердеет даже при температурах ниже $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ и у которого плотность зависит от температуры линейно. Это в отличие от воды, у которой плотность имеет экстремум при $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Поэтому керосин, находящийся в верхней части сваи-трубы, в зимний период сильно охлаждается и опускается в нижнюю часть предоставленного ему объема. Там он нагревается за счет окружающего сваю грунта, который промерзает, обеспечивая прочность сцепления сваи с окружающим ее грунтом. Летом же керосин, находящийся в верхней части трубы, прогревается, однако его теплопроводность весьма мала, а конвекция жидкости между нижней частью объема и верхней частью не возникает.

Горные породы	Объемная масса (плотность) ρ , кг/м^3	Удельная теплоемкость c , $\text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$	Теплопроводность λ , $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$
Песчаник (средней величины)	2500	0,835	2,56
Глинистый и песчано-глинистый сланец	2450	0,92	1,73
Мрамор	2700	0,419	1,28
Гранит, гнейс и базальт	2700	0,92	2,21
Известняк плотный тонкозернистый органогенный	2700	0,92	2,56
Доломит	2650	0,92	1,75
Гипс	2350	1,47	1,16
Ангидрит	2400	1,67	1,16
Ракушечник	1800	0,835	0,7
	1400	0,836	0,465

Конечно, керосин в нашем описании использован только для упрощения объяснения механизма работы такого устройства. На самом деле в современном строительстве используются устройства с хладагентами, аналогичными тем, которые имеются в современных холодильниках. На рисунке (взятом из интернета) схематически показано устройство, которое в нижней своей части обеспечивает замораживание грунта вокруг себя в зимнее время.



Стандартная схема работы термостабилизатора грунта (ТСТ): 1 — воздушный конденсатор, 2 — испаритель (зона испарения хладагента), 3 — грунт, 4 — хладагент, 5 — тепловой поток от охлаждаемого грунта

Вот и настал момент, когда нужно разобраться с вопросом, который вынесен в название статьи: Вечна ли «вечная мерзлота»? С этим вопросом связан по смыслу и такой вопрос: в течение какого промежутка времени при смене климата с «теплого» на «ледниковый» или наоборот устанавливается стационарная толщина слоя «вечной мерзлоты»?

Предположим, что среднегодовая температура на территории Якутии в течение длительного теплого периода была $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ и никакой вечной мерзлоты не было. На глубине порядка 1 км температура была $+30\text{ }^{\circ}\text{C}$. И вот наступил ледниковый период со среднегодовой температурой $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Решать уравнение теплопроводности мы не ста-

нем, а будем работать с модельной упрощенной ситуацией.

Рассмотрим простую версию роста толщины слоя мерзлоты: от поверхности, где температура $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$, до места, где температура $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, распределение температуры линейное и поток тепла приводит к тому, что запас внутренней энергии этого слоя уменьшатся. А поток тепла изнутри Земли к слою мерзлоты считается малым и не влияет на распределение температуры. В этом случае получается уравнение с простым решением при малых значениях x в сравнении с величиной L :

$$dt \frac{S\lambda T}{x} - dt \frac{S\lambda T}{L-x} = dx \frac{SCT}{2}, t = \frac{C}{4\lambda} x^2.$$

Подставив $x = 300$ м, получим промежуток времени $t_{300} \approx 960$ лет. Поскольку в Якутии имеются места, в которых толщина слоя вечной мерзлоты достигает 1,5 км, то соответствующий промежуток времени будет в 25 раз продолжительнее, т.е. ледниковый период длился более 20 тысяч лет.

В рассмотренной модели совсем не учитывалось, что в состав грунта в верхних его слоях входит вода, которая при температурах ниже $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ превращается в лед. Это упрощение справедливо, если массовая доля воды в грунте очень мала. А как изменится модель и будет ли она способной объяснить тепловые явления на поверхности глубокого и широкого водоема (озера, моря или океана)?

Оказывается, в этом случае модель теряет свою однозначность. Дело в том, что пресная вода в проточных озерах (Байкале, Ладожском, Онежском и бесчисленном множестве менее крупных озер) или недостаточно соленая вода в некоторых морях (Азовском, Балтийском и Каспийском) имеет особенность — плотность воды достигает максимума при температуре около $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Это приводит к тому, что в холодные сезоны (когда температура воздуха опускается ниже $0\text{ }^{\circ}\text{C}$) вода с максимальной плотностью скапливается вблизи дна водоема и до того момента, пока вся вода в водоеме не приобретет такую температуру, заморзания воды на поверхности

не происходит. В ситуации с пресной водой нужно учитывать, что за время теплого сезона вода до некоторой глубины прогревается. И эта максимальная глубина прогрева может быть больше или меньше глубины водоема. А при наступлении холодного сезона сначала в этом прогретом слое вода охлаждается до $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$ и только после этого начинает замерзать сверху.

Состав солей в морской/океанской воде практически одинаков во всех океанах, поскольку вода перемешивается за счет океанских течений, а соленость бывает разной. Связано это с тем, что в моря впадают пресные воды рек и это понижает их соленость, и с тем, что вода с поверхности морей и океанов испаряется, а это наоборот увеличивает соленость. Если плотность воды при температуре $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$ и атмосферном внешнем давлении 10^5 Па равна $(1000 + x)\text{ кг/м}^3$, то соленостью принято называть число x , выраженное в килограммах. Когда плотность соленой воды становится равной 1030 кг/м^3 , соленость равна 30, и при этом значении пропадает особенность пресной воды, связанная с наличием максимума на графике зависимости плотности от температуры. А при значениях солености больше 30 плотность соленой воды с ростом температуры убывает.

В открытых (сообщающихся с океанами) морях и в самих океанах соленость воды равна 32–35. В таких водоемах в холодные сезоны конвекция воды приводит к тому, что практически вся ее масса, находящаяся ниже возникшего на поверхности слоя льда, участвует в процессе теплообмена за счет механизма конвекции. Кроме того, как хорошо известно, в океанах существуют круглогодичные, т.е. не зависящие от времени года, теплые и холодные течения. Наверное, самым известным из теплых течений является Гольфстрим. Наличие таких течений и их устойчивость определяется среднегодовыми температурами разных мест на поверхности Земли, глубинами морей и океанов, формами континентов и проливами, соединяющими моря и океаны.

И для пресноводных водоемов, и для водоемов с соленой водой толщина слоя прогреваемой воды в теплые сезоны определяется не только температурой воздуха, прозрачностью и теплопроводностью воды, но и ветрами (бурями и штормами) над поверхностью воды. При этом поток тепловой энергии изнутри Земли к ее поверхности продолжается, только выше дна моря или океана уже греется не твердый грунт, а жидкая вода.

Все перечисленное, касающееся водной части поверхности Земли, делает невозможным создание простой (на школьном уровне) и однозначной модели. Поэтому из всей широкой палитры возможностей выберем те ситуации, которые все-таки можно описать в рамках простых моделей.

Рассмотрим ситуацию с озером Байкал. Вода в Байкале имеет минерализацию примерно 0,1. Слово «соленость» употреблять в данном случае некорректно, поскольку состав солей в Байкале не такой, как в морской воде. Среднегодовая температура на поверхности близка к нулю (от $-0,7\text{ }^{\circ}\text{C}$ на юге, до $-3,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ на северной части). Летом средняя температура воздуха над озером $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$, а зимой, соответственно, $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Вода в озере прозрачная – летом сверху видны детали на дне до глубины 5–8 метров. Зимой прозрачность воды вырастает до 30–40 метров. За зимний сезон нарастает слой льда толщиной 100–120 см. Известно также, что $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$ – температура воды в глубинных слоях озера. А средняя температура воды поверхностных слоев в открытом озере приблизительно $+8\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Будем считать, что за счет ветров температура над всей поверхностью воды одинаковая, но эти ветры не заставляют воду перемешиваться, т.е. холодная вода в теплое время года после того, как лед растаял, прогревается только за счет механизма теплопроводности. Соответственно, в холодное время года, когда вода вплоть до самой поверхности приобрела температуру $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$, вода замерзает при отсутствии конвекции воды под слоем льда. Поток тепла изнутри Земли учитывать не будем. Плотность льда, равная 916 кг/м^3 , немного меньше плотности жидкой воды, поэто-

му лед не тонет. Теплоемкость льда меньше, чем у воды, и составляет

$$C_{\text{льда}} = 1,92 \text{ МДж}/(\text{К} \cdot \text{м}^3) \approx \\ \approx 2 \text{ МДж}/(\text{К} \cdot \text{м}^3).$$

А теплопроводность больше, чем у воды:

$$\lambda_{\text{льда}} = 2,2 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}).$$

Оценим толщину слоя льда, возникшего за зимний сезон (2 месяца при температуре -20°C). Один кубометр воды при охлаждении от $+4^\circ\text{C}$ до 0°C отдает количество теплоты $\Delta Q = 16,8 \text{ МДж}/\text{м}^3$, а при затвердевании (превращении в лед) отдает $L = 340 \text{ МДж}/\text{м}^3$, т.е. примерно в 20 раз больше. Следовательно, можно в первом приближении не учитывать охлаждение воды от $+4^\circ\text{C}$ до 0°C подо льдом. Уравнение (упрощенное), описывающее рост толщины слоя льда, имеет вид

$$dt \frac{T}{x} \lambda_{\text{льда}} = dx \left(C_{\text{льда}} \frac{T}{2} + L \right),$$

где T – температура на поверхности, равная (почти) температуре воздуха надо льдом (-20°C). Подставим числовые значения (время выражается в секундах, а толщина в метрах):

$$dt = d \left(x^2 \right) \frac{\left(C_{\text{льда}} \frac{T}{2} + L \right)}{2\lambda T}, \\ t = x^2 \frac{20 + 340}{2 \cdot 20 \cdot 2,2} \cdot 10^6.$$

Для промежутка времени холодного периода 2 месяца по 30 суток в каждом при температуре -20°C получим толщину слоя льда $x = 1,126 \text{ м}$. Результат вычислений попал в диапазон экспериментальных значений 1,0–1,2 м.

Теплоемкость воды $C_{\text{воды}} = 4,2 \text{ МДж}/(\text{К} \cdot \text{м}^3)$, теплопроводность $\lambda_{\text{воды}} = 0,6 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м})$. В летний период температура поверхности воды за счет испарения воды и отвода тепла в глубину немного меньше температуры воздуха. Например, известно, что при влажности воздуха 50% температуре сухого термометра психрометра $+20^\circ\text{C}$ соответствует температура влажного термометра $+14^\circ\text{C}$. Оценим глубину

прогрева воды за летний период (2 месяца) от температуры 0°C до средней температуры между $+14^\circ\text{C}$ и $+4^\circ\text{C}$ *только за счет работы механизма теплопроводности:*

$$dt \frac{\lambda_{\text{воды}} (T - 0^\circ\text{C})}{x} = dx \frac{C_{\text{воды}} (T - 0^\circ\text{C})}{2}, \\ t = \frac{C_{\text{воды}}}{4\lambda_{\text{воды}}} x^2.$$

Получается, что толщина слоя воды, у которой на поверхности температура $+14^\circ\text{C}$, а внизу 0°C , равна примерно 1,72 м.

Однако по результатам измерений известно, что амплитуды колебаний температуры воды на различных глубинах в Байкале различны и доходят до $10 - 16^\circ\text{C}$ на глубине до 6 м, до 8°C на глубине до 15 м, до 5°C на глубине до 33 м, до 1°C на глубине до 160 м. Это различие связано с наличием механизмов, которые отличаются от механизма теплопроводности.

Первый механизм, работающий на увеличение толщины слоя, в котором прогревается вода, связан с прозрачностью воды. Видимый свет в дневное время проникает на большую глубину, как раз равную толщине слоя прозрачности, т.е. на 5–8 метров. Второй механизм связан с тем, что ветры над поверхностью воды обеспечивают эффективное перемешивание воды в верхних слоях. При сильном постоянном по направлению ветре амплитуда волн на открытой поверхности вдали от берегов может достигать 1 м и более. А еще возникает явление «нагона», вследствие которого уровни воды вблизи противоположных берегов различаются и появляется конвекция, вовлекающая в движение воду на достаточно большой глубине. Однако для этих явлений не так-то просто составить модель, которая давала бы предсказания, согласные с экспериментальными данными.

Так что рассмотренная простая модель «работает» с вечной мерзлотой и с твердым льдом, т.е. хороша для твердых веществ, а для жидкостей она не подходит.

ЗОНОГОНЫ

А. УСТИНОВ

Разбиения зоногонов на параллелограммы

Рассмотрим $2n$ -угольник, являющийся зононом. Если применить к нему процедуру, использованную при доказательстве предложения 2, то он разобьется на параллелограммы. Первая цепочка будет состоять из $n-1$ параллелограммов, вторая – из $n-2$ и т. д. Поэтому в разбиении будет всего $n(n-1)/2$ параллелограммов. Обозначим множество полученных параллелограммов через Π_n . Параллелограммы будем считать равными, если их можно совместить параллельным переносом.

Предложение 4. *Набор Π_n состоит из $C_n^2 = n(n-1)/2$ попарно различных параллелограммов.*

Доказательство. Пусть $a_1 \dots a_n \tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n$ – данный $2n$ -угольник (см. рис. 3). Можно считать, что в первой цепочке все параллелограммы имели одну сторону, параллельную a_n , а вторая сторона в k -м параллелограмме цепочки была сонаправлена с a_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Вторую цепочку можно построить так, что параллелограммы в ней будут иметь одну сторону, параллельную a_{n-1} , а вторая сторона в k -м параллелограмме этой цепочки будет сонаправлена с a_k ($k = 1, 2, \dots, n-2$) и т. д. (см. доказательство предложения 2). Значит, все параллелограммы различны: для любой пары чисел (i, k) найдется ровно один параллелограмм со сторонами, параллельными a_i и a_k . Предложение доказано.

Предложение 5. *В любом замощении данного зонона параллелограммами из набора Π_n каждый из C_n^2 параллелограммов участвует ровно один раз.*

Доказательство. Пусть a и \tilde{a} – пара противоположных сторон данного $2n$ -уголь-

ника. Их соединяет цепочка де Брёйна $Z(a) = Z(\tilde{a})$. Две цепочки де Брёйна, построенные по разным парам сторон a и b , пересекаются по ромбу, стороны которого параллельны отрезкам a и b . Поэтому в разбиении будет по крайней мере C_n^2 ромбов (по одному для каждой пары направлений). Тот же самый набор ромбов получится, если мы будем разбивать данный $2n$ -угольник, пользуясь алгоритмом из доказательства предложения 2. Значит, суммарная площадь такого набора ромбов совпадает с площадью данного $2n$ -угольника. Отсюда следует, что цепочки $Z(a)$ и $Z(b)$ (рис. 26) не могут пересечься повтор-

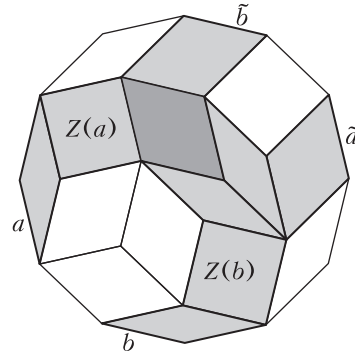


Рис. 26

но и общее число ромбов в разбиении должно быть равно C_n^2 . Что и требовалось.

Перестановки и транспозиции

Определение 5. Пусть X – конечное множество из n элементов. Удобно всегда считать, что $X = \{1, 2, \dots, n\}$. *Перестановками* называются взаимно однозначные отображения множества X в себя.

Перестановки обычно записываются в виде

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

где k_1, \dots, k_n – различные числа от 1 до n , являющиеся образами чисел $1, \dots, n: \pi(i) = k_i$ ($1 \leq i \leq n$). Другими словами,

$$1 \rightarrow k_1, \quad 2 \rightarrow k_2, \quad \dots, \quad n \rightarrow k_n.$$

Тождественная перестановка e переводит каждый элемент множества X в себя:

$e(x) = x$. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ – это тождественная перестановка на множестве из 4 элементов.

Всего на множестве из n элементов существует $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ различных перестановок.

Каждой перестановке можно поставить в соответствие *граф перестановки*. Это двудольный граф, в котором ребра соединяют числа и их образы (рис.27).

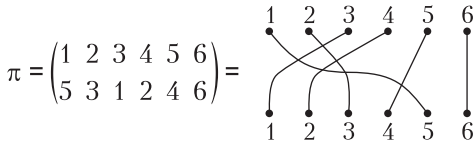


Рис. 27

Инверсией в перестановке π называется всякая пара индексов i, j такая, что $1 \leq i < j \leq n$ и $\pi(i) > \pi(j)$. Каждая инверсия на графе перестановки видна как точка пересечения ребер (поэтому ребра обычно изображают так, чтобы в каждой точке пересекались только два ребра). Например, для перестановки, изображенной на рисунке 27, $\pi(1) = 5 > \pi(3) = 1$. Следовательно, ребра, выходящие из вершин 1 и 3, пересекутся.

Наибольшее число инверсий может получиться, если числа $1, \dots, n$ переставить в противоположном порядке:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае каждая пара индексов i, j такая, что $1 \leq i < j \leq n$, будет давать инверсию, и общее число инверсий будет равно $C_n^2 = n(n-1)/2$.

Перестановки бывают *четными* и *нечетными*. Четность перестановки определяется как четность числа инверсий. Так, в перестановке, изображенной на рисунке 27, есть 6 инверсий (ребра пересекаются в 6 точках), значит, π – четная перестановка.

Перестановки можно перемножать, применяя их последовательно друг за другом. Они перемножаются в соответствии с правилом композиции отображений (т.е. применяются справа налево): $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$.

Например, если

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Определение 6. *Транспозицией* называется перестановка, которая меняет места два элемента.

Предложение 6. *Каждая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций.*

Доказательство. Предположим, что дана перестановка вида (1). Будем интерпретировать ее как перестановку набора из n шаров с номерами от 1 до n . Тем самым, шары лежат в порядке (k_1, \dots, k_n) , и с помощью транспозиций (перестановок пар шаров) необходимо добиться того, чтобы набор стал упорядоченным, т.е. чтобы шары лежали в порядке $(1, \dots, n)$.

Доказательство проведем индукцией по числу инверсий в данной перестановке. Мы докажем, что перестановка может быть разложена в произведение транспозиций, количество которых равно числу инверсий. Если инверсий нет, то шары упорядочены изначально и ничего делать не надо (тождественная перестановка – это произведение нулевого числа транспозиций).

Предположим, что произвольную перестановку σ с k инверсиями ($k \geq 0$) мы можем представить в виде $\sigma = \tau_k \dots \tau_2 \tau_1$, где τ_1, \dots, τ_k – транспозиции. Рассмотрим перестановку σ' с $k + 1$ инверсиями. В ней найдется пара соседних шаров, неупорядоченных по возрастанию номеров. Переставив эти шары между собой с помощью транспозиции τ_{k+1} , мы уменьшим число

инверсий на единицу. Тогда, по предположению индукции, для полученной перестановки $\tau_{k+1}\sigma'$ утверждение верно, и $\tau_{k+1}\sigma' = \tau_k \dots \tau_2 \tau_1$. Значит, $\sigma' = \tau_{k+1}\tau_k \dots \tau_2 \tau_1$, что и требовалось.

Отметим, что разложение перестановки в максимально короткое произведение транспозиций может быть не единственным. Например,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (43)(42)(32)(14)(13)(12) = \\ = (23)(13)(12)(41)(42)(43). \quad (2)$$

Процесс разложения данной перестановки в произведение транспозиций можно изображать как граф перестановки, разбитый на уровни. На каждом уровне у него находится ровно одна точка пересечения путей, соединяющих числа и их образы. Каждой такой точке мы присваиваем метку, равную номеру соответствующей транспозиции в разложении перестановки (нумерация транспозиций идет справа налево). Будем называть такие графы *размеченными перестановками*. На рисунке 28 изображены две размеченные перестановки, построенные по разложениям (2).

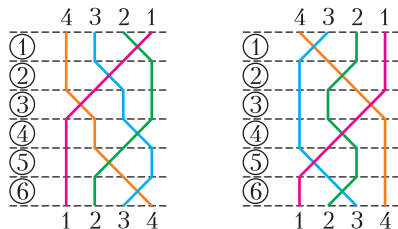


Рис. 28

ражены две размеченные перестановки, построенные по разложениям (2).

Перестановки и зононы

Пусть выпуклый $2n$ -угольник разбит на параллелограммы так, что стороны параллелограммов равны и параллельны сторонам многоугольника. Зафиксируем две противоположные вершины многоугольника и назовем их северным и южным полюсами (N и S). Занумеруем стороны данного $2n$ -угольника числами от 1 до n , двигаясь против часовой стрелки от северного полюса к южному. Всем отрезкам, параллельным k -й стороне, также присвоим номер k . В частности, противоположные стороны многоугольника будут иметь

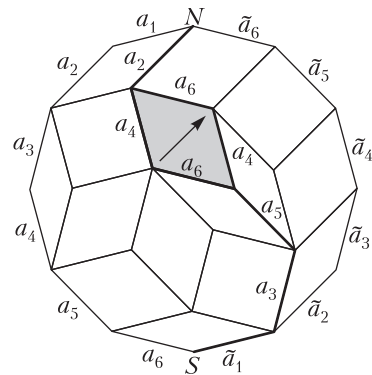


Рис. 29

одинаковые номера. Рассмотрим ломаную, идущую по сторонам многоугольника вдоль левой границы от N к S , звенья которой – отрезки $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ (рис. 29). Будем последовательно превращать ее в ломаную $\tilde{a}_n, \tilde{a}_{n-1}, \dots, \tilde{a}_2, \tilde{a}_1$, идущую от N к S по часовой стрелке вдоль правой границы многоугольника. Концы ломаной остаются зафиксированными в полюсах. На каждом шаге два соседних звена, являющихся сторонами параллелограмма разбиения, будем менять на два других звена – две другие стороны того же параллелограмма. Отрезок a_k при этом будет находиться на одном из отрезков, помеченных числом k . Утверждается, что это всегда можно сделать.

Предложение 7. Если ломаная, соединяющая полюса N и S , не совпадает с правой границей многоугольника $\tilde{a}_n, \tilde{a}_{n-1}, \dots, \tilde{a}_2, \tilde{a}_1$, то найдется параллелограмм разбиения, который касается ломаной справа двумя своими сторонами.

Доказательство. Предположим, что это не так. Дополнительно можно считать, что первое и последнее звенья ломаной не совпадают со сторонами зонона, так как в противном случае задача сводится к зонону с меньшим числом сторон. Рассмотрим $2n$ -угольник, образованный ломаной и правой границей многоугольника, соединяющей полюса N и S (рис. 30). Оценим сумму углов этого многоугольника. К каждому из n звеньев ломаной

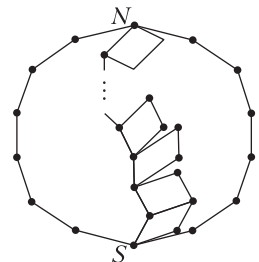


Рис. 30

примыкает по одному параллелограмму, и, в соответствии с предположением, все эти параллелограммы разные. Значит, сумма углов при вершинах ломаной, включая полюса N и S , не меньше $n\pi$. Из симметричности зоногона следует, что сумма углов при оставшихся вершинах равна $(n - 1)\pi - \varphi$, где φ — угол в полюсах. Поэтому сумма всех углов рассматриваемого $2n$ -угольника не меньше чем $(2n - 1)\pi - \varphi$. Но это невозможно, поскольку эта сумма равна $(2n - 2)\pi$. Предложение доказано.

Таким образом, процесс превращения ломаной $a_1 \dots a_n$ в ломаную $\tilde{a}_n \dots \tilde{a}_1$ можно понимать как последовательное разложение перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

в произведение транспозиций. Этот процесс можно также понимать как сортировку шаров с номерами от 1 до n , находящихся в n корзинах. Порядок векторов в ломаной, идущей от S к N , задает порядок размещения шаров: номер первого звена ломаной — номер шара в первой корзине и т. д. Таким образом, сначала шар с номером k лежит в корзине с номером $n - k + 1$. В конце каждый шар должен оказаться в корзине со своим номером. На каждом шаге сортировки можно менять местами два шара, лежащие в соседних корзинах, что на геометрическом языке означает перестановку соседних звеньев ломаной. Например, шаг, изображенный на рисунке 29 (перестановка отрезков a_4 и a_6 в ломаной), означает перестановку шаров с номерами 4 и 6 и переход от набора (1, 3, 5, 4, 6, 2) к более упорядоченному набору (1, 3, 5, 6, 4, 2).

Каждому параллелограмму разбиения можно поставить в соответствие число — номер шага, на котором ломаная через него переходит. Результатом будет упорядоченное разбиение зоногона.

На рисунках 31 и 32 представлены два варианта сортировки набора из четырех шаров. Слева они изображены как помеченные перестановки, а справа — как упорядоченные разбиения. Каждая из разноцветных линий изображает путь соответствующего ей шара. Набор всех линий в

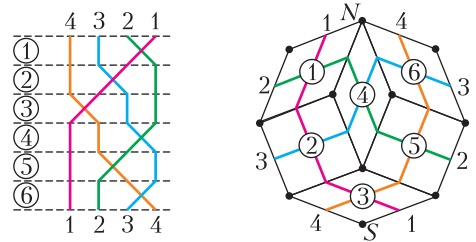


Рис. 31

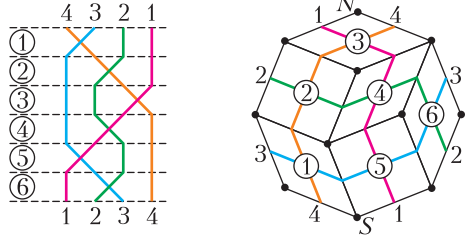


Рис. 32

совокупности представляет собой конфигурацию псевдопрямых. Среди них нет параллельных: в каждой паре на каком-то шаге шары переставляются друг с другом.

Предложение 8. *Существует взаимно однозначное соответствие между размеченными перестановками и регулярными упорядоченными разбиениями $2n$ -угольного зоногона.*

Доказательство. Каждая размеченная перестановка позволяет построить упорядоченное разбиение, добавляя один за другим параллелограммы, стороны которых имеют те же номера, что и числа в соответствующей транспозиции. Наоборот, каждое упорядоченное разбиение в явном виде задает разложение перестановки (3) в произведение транспозиций, т.е. размеченную перестановку. Что и требовалось.

Замечание 5. В заключение отметим, что зоногону могут порой появляться в самых неожиданных местах. Например, о применении зоногонов в математике выборов см. статью [1].

Сортировка двойного набора шаров

Следующая задача взята из книги [2] из раздела «Нерешенные головоломки». Мы обсудим то, что известно на сегодняшний день.

Задача 3. *В ряд стоят n корзинок с двумя шарами в каждой, причем на шарах*

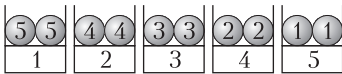


Рис. 33

в i -й корзинке написан номер $n + 1 - i$. За один ход разрешается поменять два шара в соседних корзинках. Сколько ходов необходимо для того, чтобы каждый шар попал в корзинку со своим номером?

Если в корзинках лежит по одному шару, то задача решается просто. Мы имеем дело с перестановкой (3), которая содержит $C_n^2 = n(n-1)/2$ инверсий. Поэтому процесс сортировки потребует $n(n-1)/2$ шагов.

На первый взгляд кажется, что те же рассуждения дают правильный ответ и в том случае, когда в корзинках лежит по два шара. Можно сказать, что у нас есть по n шаров двух цветов, красных и зеленых, и шары каждого цвета пронумерованы от 1 до n . Можно подумать, что нет ничего лучше, чем сортировать каждый цвет по отдельности, а значит, понадобится вдвое больше операций, чем для одного набора шаров, т. е. $2C_n^2 = n(n-1)$ шагов. На самом деле необходимое число шагов существенно меньше.

Например, если $n = 5$, то шары чудесным образом упорядочиваются всего за 15 перекладываний вместо 20. Объяснить это можно следующим образом: два шара, оказавшиеся в одной корзинке, мы можем переставить «бесплатно». Проследите за тем,

как это происходит на рисунке 34. Например, после первого шага одна пара шаров 4 и 5 «бесплатно» переставляются в первой корзинке, а другая пара – во второй.

Меньше чем за 15 шагов упорядочить двойной набор из 5 шаров нельзя. Этот факт является частным случаем следующего более общего утверждения.

Предложение 9. Пусть $n \geq 2$. Тогда для упорядочивания двойного набора шаров в n корзинках требуется не менее $\lceil n(2n-1)/3 \rceil$ перекладываний.

Доказательство. Будем считать, что в каждой корзинке шары упорядочены (один из них левый, а второй – правый). Как и для перестановок из n элементов, будем следить за числом инверсий в наборе. Точно так же количество инверсий – это число пар шаров, в которых шар с большим номером находится левее. Заметим, что в первоначальном наборе шаров имеется $4C_n^2 = 2n(n-1)$ инверсий (каждая пара номеров дает четыре инверсии). За один шаг количество инверсий можно уменьшить на 3: два шара перекладываются между соседними корзинками, после чего в каждой из этих корзинок шары тоже можно поменять местами.

Однако есть такие перекладывания, после которых в корзинке оказываются два шара с равными номерами. Для каждого номера k такая ситуация возникнет хотя бы один раз, когда второй шар с номером k займет свое место. Значит, необходимое число перекладываний – не меньше чем

$$(2n(n-1) + n)/3 = n(2n-1)/3 = C_{2n}^2/3,$$

что и требовалось доказать.

Процесс перекладывания шаров можно представить более наглядно, если воспользоваться геометрической интерпретацией перестановок, описанной выше. Точно так же начальную и конечную комбинации мы представляем как наборы отрезков на сторонах правильного $2n$ -угольника. Единственное отличие будет заключаться в том, что каждая сторона $2n$ -угольника будет разбита на два равных отрезка, соответствующих двум одинаковым шарам. Точно так же каждое перекладывание будет изображаться как преобразование ломан-

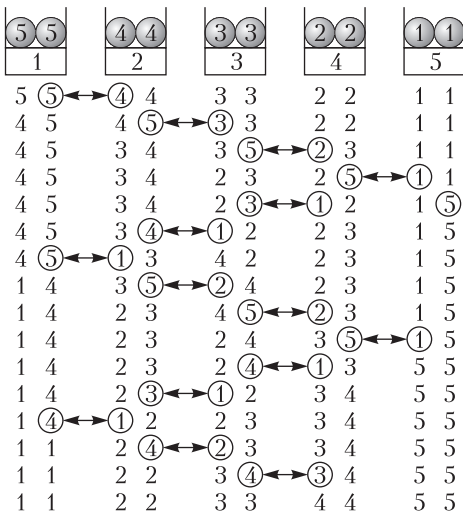


Рис. 34

ной, соединяющей полюса N и S , при котором пара сторон ромба разбиения заменяется парой других сторон того же ромба. Например, сортировка двойного набора из 5 шаров, приведенная на рисунке 34, будет выглядеть следующим образом (рис. 35).

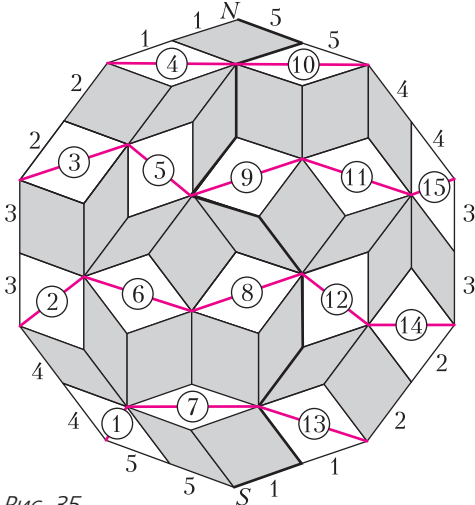


Рис. 35

Белые ромбы изображают перекладывания между соседними корзинками (они пронумерованы соответственно числами от 1 до 15). Серые ромбы – это «бесплатные» перекладывания в пределах одной корзинки. Красные линии обозначают границы между корзинками. Путь каждого шара – это цепочка де Брёйна. Жирная ломаная, соединяющая полюса S и N , описывает расположение шаров перед 9-м ходом, на котором поменяются местами шары с номерами 5 и 2.

Замечание 6. Оценка, доказанная в предложении 9, показывает, что двойной набор из 5 шаров нельзя отсортировать меньше чем за 15 шагов. В статье [3] предложен алгоритм, который выполняет сортировку двойного набора из n шаров за $\lfloor 2n^2/3 \rfloor$ шагов. Если $n = 2^k + 1$, то этот алгоритм работает оптимально и требует лишь $n(2n - 1)/3$ шагов. Кроме того, авторы этой статьи проделали компьютерные эксперименты и выяснили, что при $n \leq 20$, за исключением случая $n = 6$, сортировку двойного набора из n шаров действительно можно сделать за $\lfloor n(2n - 1)/3 \rfloor$ перекладываний.

При этом сортировка происходит, вообще говоря, уже не так, как это было в случае $n = 5$. Если $n = 6$, то нужно на одно перекладывание больше, чем этого требует нижняя оценка (23 вместо 22). Существуют также верхние и нижние оценки для случая, когда есть k шаров каждого типа, см. [4].

Для дальнейшего изучения обсуждаемых вопросов рекомендуем читателям статьи [5, 6] и следующие задачи.

Задачи

4. Выпуклый многоугольник разрезан на зононы. Докажите, что он сам является зононом.

5. Рассмотрим шестиугольник, в котором каждый угол равен 120° , а длины сторон равны a_1, \dots, a_6 (рис. 36). Для каких значений a_1, \dots, a_6 данный шестиугольник можно разбить на ромбы трех возможных ориентаций, как в задаче 1? Сколько ромбов каждого направления будет содержать полученное разбиение?

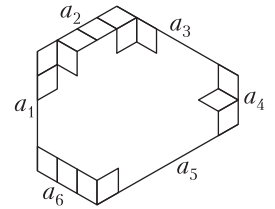


Рис. 36

6 (В.Произволов, XLIX Ленинградская олимпиада, IV Турнир городов; см. также задачу M820). Правильный $4k$ -угольник разрезан на параллелограммы. Докажите, что среди них не менее k прямоугольников. Найдите их общую площадь, если длина стороны $4k$ -угольника равна a .

7 (М.Смуров, Всероссийская олимпиада, 1998). Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем хорошей. Докажите, что хороших вершин не менее трех.

8 (А.Юран, Московская математическая олимпиада, 2023). Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

9. Докажите, что площадь правильного 360-угольника со стороной 1 равна

$$(\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 179^\circ) \cdot 90.$$

10. На плоскости расположен выпуклый центрально-симметричный 100-угольник с вершинами в целых точках. Докажите, что его площадь не меньше 99×50 .

11 (Конкурс имени А.П.Савина, 2024). Правильный 100-угольник со стороной 1 разбит на

k правильных 10-угольников со стороной 1 и ромбы со стороной 1. Найдите наибольшее возможное значение k .

12 (USAMO-2022). Пусть $b \geq 2$ и $w \geq 2$ – целые числа, и $n = b + w$. Даны $2b$ одинаковых черных стержней и $2w$ одинаковых белых стержней, длина каждого из которых равна 1. Из этих стержней составляется правильный $2n$ -угольник так, что параллельные стороны имеют один цвет. После этого выпуклый $2b$ -угольник B образуется параллельным переносом черных стержней, а выпуклый $2w$ -угольник W составляется аналогичным образом из белых стержней. На рисунке 37 показан пример

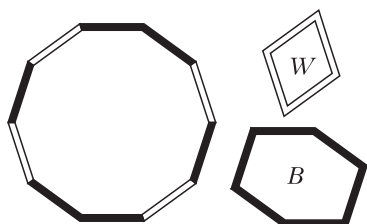


Рис. 37

многоугольников B и W в случае, когда $b = 3$ и $w = 2$. Докажите, что разность площадей B и W зависит только от чисел b и w , а не от того, как именно черные и белые отрезки выбирают-ся на сторонах $2n$ -угольника.

13 (Ю.Базлов, Санкт-Петербургская олимпиада, 2018). Правильный шестиугольник разбит на равные ромбы со сторонами, параллельными сторонам шестиугольника. На трех сторонах шестиугольника, среди которых нет соседних, задали направления в порядке обхода шестиугольника против часовой стрелки. Затем на каждой стороне ромба поставили стрелку, направленную так же, как параллельная этой стороне сторона шестиугольника. Докажите, что не существует замкнутого пути, идущего по стрелкам.

14 (А.Устинов, А.Юран, Московская математическая олимпиада, 2024). Плоскость разбита на части несколькими прямыми, среди которых есть не параллельные (рис.38). Те части, граница которых состоит из двух лучей,

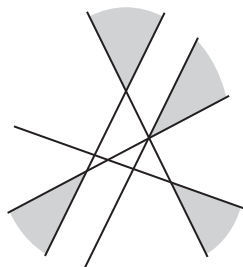


Рис. 38

закрасили. После этого проведена еще одна прямая. Докажите, что, независимо от положения новой прямой, по обе стороны от нее найдутся закрашенные точки.

15 (Г.С.М.Коксетер, [7]). Докажите следующие две теоремы аффинной трехмерной геометрии.

а) Если все грани выпуклого многогранника – параллелограммы, то их число равно произведению двух последовательных чисел.

б) Если каждая грань выпуклого многогранника обладает центром симметрии, то и весь многогранник обладает центром симметрии.

16. В ряд стоят три коробки, в каждой из которых лежит по n шаров. В первой коробке лежат шары, помеченные цифрой 3, во второй – цифрой 2, а в третьей – цифрой 1. За один ход разрешается поменять пару шаров в соседних коробках. Какое наименьшее число ходов потребуется, чтобы отсортировать шары: в первой коробке должны оказаться шары с цифрой 1, во второй – с цифрой 2, а в третьей – с цифрой 3?

17. Докажите, что двойной набор из $n = 2^m + 1$ шаров ($m \geq 1$) можно упорядочить за $n(2n - 1)/3$ перекладываний.

Литература

1. В.И.Данилов, А.В.Карзанов, Г.А.Кошевой. Области Кондорсе и ромбические паркетты. – Экономика и математические методы, 2010, т.46, №4, с.55-68.
2. П.Уинклер. Математические головоломки. Коллекция гурмана. – М.: МЦНМО, 2024.
3. Ito Hiro, Teruyama Junichi, Yoshida Yuichi. An almost optimal algorithm for Winkler's sorting pairs in bins. – Progress in Informatics, 2012, №9, p.3–7.
4. Atsuki Nagao, Kazuhisa Seto, Junichi Teruyama. Efficient algorithms for sorting k -sets in bins. – Algorithms and Computation, Lecture Notes in Computer Science, 2014, vol. 8344, p.225–236.
5. S.Elnitsky. Rhombic tilings of polygons and classes of reduced words in Coxeter groups. – Journal of Combinatorial Theory, ser. A, 1997, vol. 77, №2, p.193–221.
6. R.Kenyon. Tiling a polygon with parallelograms. – Algorithmica, 1993, vol. 9, №4, p.382–397.
7. Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly». – М.: «Мир», 1977.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Автор задач Ф2821–Ф2824 — А.Власов.

Задачи М2814–М2817, Ф2821–Ф2824

М2814. Положительные числа a, b, c таковы, что $b + c = a^2$. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{c}}}{\sqrt{a - \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{c}}}.$$

Фольклор

М2815. Имеется набор из $2n$ фишек n различных цветов, по две фишки каждого цвета. Фишки выкладывают случайным образом в ряд. Докажите, что вероятность того, что в ряду найдутся две соседние фишки одного цвета, больше $1/2$.

Фольклор

М2816. Выясните, для каких натуральных чисел m можно подобрать такое натуральное l , что сумма $n + n^2 + n^3 + \dots + n^l$ будет делиться на m при любом натуральном n .

А.Скабелин

М2817*. Даны фиксированные окружности Ω и γ такие, что существует шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в Ω и описанный вокруг γ . (Отметим, что тогда, в силу теоремы Понселе, есть бесконечное семейство таких шестиугольников.) Докажите, что величина $\frac{S_{ABCDEF}}{AD + BE + CF}$ не зависит от выбора шестиугольника $ABCDEF$.

А.Заславский, Чан Куанг Хунг
(Вьетнам)

Ф2821. Равноплечный двухзвенный маятник удерживают в неподвижном положении,

показанном на рисунке 1. В некоторый момент времени систему освобождают и маятник приходит в движение. Опре-

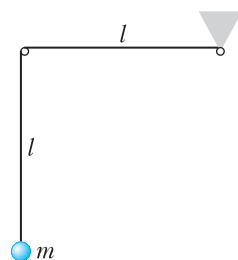


Рис. 1

делите максимальную величину натяжения стержней (после переходного процесса). Известны l — длина одного стержня, m — масса шарика, g — ускорение свободного падения. Считайте стержни невесомыми,

радиус шарика малым по сравнению с длиной стержня. Трения в невесомом шарнире, соединяющем стержни, нет.

Ф2822. Конец лежащей на горизонтальной поверхности выпрямленной однородной цепи длиной L и линейной плотностью ρ поднимают от самой поверхности вдоль вертикальной линии. Определите минимальную работу для полного поднятия цепи (цепь принимает вертикальное положение, верхний ее конец находится на уровне L) для двух значений коэффициента трения между поверхностью звеньев цепи и поверхностью плоскости $\mu_0 = 0$ и $\mu = 1$. Какова величина отношения этих работ?

Ф2823. На горизонтальной поверхности разлита жидкость, не смачивающая эту поверхность и образующая большую круглую лужу с начальным радиусом R_0 , который во много раз больше глубины лужи. Дует слабый ветер и жидкость медленно

испаряется. Удельная скорость испарения $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t} \frac{1}{\Delta S}$ (это величина испарившейся массы с единицы площади за единицу времени) не зависит от радиуса лужи. Определите время, за которое радиус лужи уменьшится в 2 раза. Известны ρ – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, g – ускорение свободного падения.

Ф2824. Тонкостенный стеклянный сосуд с полусферическим дном радиусом R частично заполнен водой (рис. 2). На вертикальной оси симметрии сосуда над поверхностью воды на совсем небольшой высоте «парит» маленький светлячок. Уровень воды очень медленно опускается из-за утечки через небольшое отверстие в стенке сосуда. Расход воды постоянный (так устроено отверстие) и равен $\frac{dm}{dt} = -\mu$. На сосуд смотрят снизу вдоль его оси симметрии. Определите координату изображения светлячка и его скорость движения в момент, когда уровень воды совпадет с плоскостью полусферы (будет находится на расстоянии R от дна сосуда). Плотность воды ρ , показатель преломления $n = 4/3$.

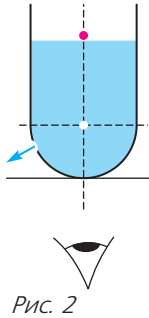


Рис. 2

Решения задачи M2802–M2805, Ф2809–Ф2812

M2802. По кругу расставлены положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ в указанном порядке по часовой стрелке. Пусть A_i – среднее арифметическое числа a_i и нескольких следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что наибольшее из чисел $A_1, A_2, \dots, A_{2024}$ не меньше среднего арифметического всех чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$.

Положим $n = 2024$ и пусть среднее арифметическое всех чисел $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ равно a . Разделим окружность на дуги точками K_1, K_2, \dots, K_n и будем считать, что число a_i стоит на дуге между K_i и K_{i+1} (здесь и далее считаем, что $K_j = K_{j+n}$).

Если в числе A_i берется среднее арифметическое чисел $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+t}$, будем называть этот набор $\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+t}\}$ *i-й колбаской*. В этой «колбасной» терминологии нам нужно доказать, что среднее арифметическое чисел в какой-то колбаске не меньше a . Для каждого $i = 1, \dots, n$ проведем стрелку по дуге от K_i до K_{i+t+1} по часовой стрелке (так что стрелка «накрывает» в точности числа i -й колбаски). Тогда у нас есть набор из n стрелок, причем из каждой точки K_1, K_2, \dots, K_n выходит ровно одна стрелка. Ясно, что в таком ориентированном графе есть цикл (чтобы его найти, можно пойти по стрелкам, начиная с какой-то точки, пока повторно не посетим какую-то точку). Рассмотрим стрелки, входящие в этот цикл. Колбаски, соответствующие этим стрелкам, покрывают каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_n одинаковое количество раз. Обозначим средние арифметические в этих колбасках как S_1, S_2, \dots, S_k , а количества чисел в них как t_1, t_2, \dots, t_k . С одной стороны, сумма всех чисел в колбасках равна

$$S_1 t_1 + S_2 t_2 + \dots + S_k t_k.$$

С другой стороны, все числа в колбаски входят одинаковое количество раз, а именно по $\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_k}{n}$ раз. Поэтому сумма чисел в колбасках равна

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_k}{n} \cdot na.$$

Мы получили равенство

$$S_1 t_1 + S_2 t_2 + \dots + S_k t_k = (t_1 + t_2 + \dots + t_k) a.$$

Если бы все S_i были меньше a , то левая часть была бы меньше правой. Значит, какое-то из S_i не меньше a , что и требовалось доказать.

Д.Белов, К.Сухов

M2803. Кимия взяла натуральные числа a и b , а затем вытисала в строку в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 2024$ так, чтобы для любой пары соседних чисел оказалось выполнено хотя бы одно из двух условий:

- (1) их сумма равна a ;
 - (2) их разность (при вычитании из большего числа меньшего) равна b .
- Найдите все возможные значения b .

Для $b = 1$ работает пример: 1, 2, 3, ..., 2024. Для $b = 2$ годится 1, 3, 5, ..., 2023, 2, 4, 6, ..., 2024 (при этом $a = 2023 + 2$).

Предположим, что x_1, x_2, \dots, x_n (где $n = 2024$) – перестановка чисел 1, 2, ..., 2024, удовлетворяющая условию. Покажем, что среди чисел x_i встретится не более двух остатков при делении на b . Отсюда будет следовать, что при $b \geq 3$ в строчке не могут присутствовать одновременно числа 1, 2, 3, т.е. нужных примеров при $b \geq 3$ не существует.

Заметим, что если $x_i \equiv r \pmod{b}$, то либо $x_{i+1} \equiv r \pmod{b}$ (в случае $|x_i - x_{i+1}| = b$), либо $x_{i+1} \equiv a - r \pmod{b}$ (в случае $x_i + x_{i+1} = a$). И аналогично, если $x_i \equiv a - r \pmod{b}$, то либо $x_{i+1} \equiv a - r \pmod{b}$ (в случае $|x_i - x_{i+1}| = b$), либо $x_{i+1} \equiv r \pmod{b}$ (в случае $x_i + x_{i+1} = a$). Последовательно применяя это соображение для $i = 1, 2, \dots$, понимаем, что в самом деле среди чисел x_i встретится не более двух остатков при делении на b .

М. Сагафян

M2804. *Внутри треугольника ABC со стороной BC = 6 расположены две равные окружности радиуса 1, которые касаются друг друга, одна вписана в угол B, другая вписана в угол C (рис. 1).*

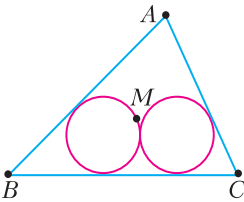


Рис. 1

а) Докажите, что точка M пересечения медиан треугольника ABC не лежит внутри ни одной из данных окружностей.

б) Докажите, что если M лежит на одной из окружностей, то треугольник ABC равнобедренный.

Мы будем использовать следующее известное описание точки M. Пусть треугольник разбит прямыми, параллельными сторонам, на 9 равных

треугольников (рис. 2). Тогда единственный узел разбиения, находящийся внутри треугольника ABC, – это M. (Это описание не-

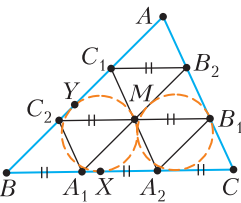


Рис. 2

сложно вывести из того, что медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.)

Договоримся считать направление BC горизонтальным, так что окружности получаются друг из друга сдвигом на 2 по горизонтали.

а) Прямая AC касается правой окружности. Прямая C_1A_2 получается из нее сдвигом на 2 влево, значит, она касается левой окружности (иначе говоря, левая окружность – вписанная в треугольник BC_1A_2). Тем самым, ни одна точка прямой C_1A_2 не лежит внутри левой окружности. В частности, M не лежит внутри левой окружности. Аналогично, она не лежит и внутри правой окружности.

б) Еще раз используя, что C_1A_2 касается левой окружности, понимаем, что M лежит на левой окружности только в случае, если M – точка касания. И так, пусть левая окружность (вписанная в треугольник BC_1A_2) касается его сторон C_1A_2, BA_2, BC_1 в точках M, X, Y соответственно. Мы знаем (из разбиения на 9 равных треугольников), что $MA_2 = MC_1$. Тогда из равенств соответствующих отрезков касательных имеем

$$\begin{aligned} BC_1 &= BY + YC_1 = BY + C_1M = \\ &= BX + A_2M = BX + A_2X = BA_2. \end{aligned}$$

Получили, что треугольник BC_1A_2 равнобедренный: $BC_1 = BA_2$. Тогда и треугольник ABC равнобедренный:

$$BA = \frac{3BC_1}{2} = \frac{3BA_2}{2} = BC.$$

Пункт б) решен.

Отметим, что пункт а) можно доказать и другим рассуждением. Предположим, что M лежит внутри правой окружности. Так как C_2 получается из M сдвигом на 2 влево, то C_2 должна оказаться внутри левой окружности – противоречие.

Отметим, что это рассуждение работает и в более общей ситуации: можно заменить два условия « $BC = 6$ и M – точка пересечения медиан» на одно условие «M – середина отрезка длины 4, параллельного BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC».

Е. Бакаев, П. Кожевников

M2805. Конечное множество A вещественных чисел назовем значимым, если для любых двух различных чисел из A можно подобрать третье число из A так, чтобы одно из этих трех чисел было равно среднему арифметическому двух других. При каком наибольшем n существует значимое множество, состоящее из n чисел?

Пример: $A = \{0, 2, 3, 4, 6\}$. Легко проверить, что условие значимости выполняется.

Предположим, есть значимое множество A такое, что $n = |A| > 5$. Не умаляя общности, можно считать, что 1 и -1 — это наибольшее и наименьшее числа из A (к этой ситуации можно прийти, выбрав на числовой прямой новое начало отсчета и единичный отрезок; ясно, что условие задачи от этого не поменяется). Таким образом, все числа множества A лежат на отрезке $[-1; 1]$.

Далее, пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ — все числа множества A из интервала $(-1; 0)$, аналогично, пусть $b_1 < b_2 < \dots < b_l$ — все числа множества A из интервала $(0; 1)$. Применяя условие к числам -1 и b_i , получаем,

что число $b'_i = \frac{-1+b_i}{2}$ лежит в A , поскольку два других возможных числа находятся вне $[-1; 1]$ (в самом деле, $2b_i - (-1) > 1$ и $2 \cdot (-1) - b_i < -1$). При этом $b'_1 < b'_2 < \dots < b'_l$ — различные числа из интервала $(-1; 0)$. Значит, каждое b'_i должно совпадать с каким-то a_j , при этом последовательно получаем, что $b'_1 \geq a_1, b'_2 \geq a_2, \dots, b'_l \geq a_l$, в частности, видим, что $l \geq k$. Аналогично, применив условие к числам a_i и 1 , получаем, что $a'_i = \frac{a_i+1}{2} \in A$. При этом $a'_1 < a'_2 < \dots < a'_k$ — числа из интервала $(0; 1)$, совпадающие с какими-то b_j . Последовательно получаем, что $a'_1 \geq b_1, a'_2 \geq b_2, \dots, a'_k \geq b_k$, в частности, видим, что $k \geq l$.

Сравнивая два вывода, получаем, что обязательно $k = l$ и все полученные неравенства должны обращаться в равенства: $b'_i = a_i$ и $a'_i = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Подставляя выражения для b'_i и a'_i , получаем систему уравнений относительно a_i и b_i :

$$\frac{-1+b_i}{2} = a_i, \quad \frac{a_i+1}{2} = b_i.$$

Решая эту систему, получаем, что $a_i = -\frac{1}{3}$, $b_i = \frac{1}{3}$. Значит, никакие числа интервалов $(-1; 0)$ и $(0; 1)$, за исключением точек $\pm \frac{1}{3}$, не могут принадлежать множеству A . Следовательно, $A \subset \left\{-1, 1, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, значит, $|A| \leq 5$, и задача решена.

Предложим другой возможный путь доказательства оценки. Снова пусть $-1, 1 \in A$, причем -1 и 1 — это минимальное и максимальное числа из A . Предположим, что в множестве A есть число x , отличное от $\pm 1, 0, \pm \frac{1}{3}$. Не умаляя общности, пусть $x > 0$; положим $x = \frac{1}{3} + d$. Применяя условие к -1 и x , получаем, что

$$y = \frac{-1+x}{2} = \frac{-1}{3} + \frac{d}{2} \in A,$$

при этом $y \in (-1; 0)$. Затем, применяя условие к y и 1 , получаем, что

$$z = \frac{y+1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{d}{4} \in A.$$

Мы видим, что z , так же, как и x , лежит в интервале $(0; 1)$ и не равно $\frac{1}{3}$. Но z находится ближе к $\frac{1}{3}$, чем x . Продолжая так далее, мы получим бесконечную последовательность чисел из A . Противоречие. (Противоречие можно получить и сразу на первом шаге, если выбрать $x \in A \cap (0; 1)$, не равное $\frac{1}{3}$ и ближайшее к $\frac{1}{3}$ среди таких чисел.)

М. Сагафян, П. Кожевников

Ф2809. Длительность T суток, т.е. промежутка времени от одного восхода Солнца до следующего восхода, на экваторе очень мало зависит от того, в каком месяце этот промежуток измеряется. Однако известно, что расстояние от Земли до Солнца самое большое в июне, оно равно 152 млн км, а самое маленькое, равное 147 млн км, в январе. Оцените разницу длительностей суток на экваторе Земли в январе и в июне.

Если считать, что расстояние от Земли до Солнца постоянно и равно 150 млн км, то скорость движения центра Земли в системе отсчета Коперника равна 29,88 км/с. На самом деле расстояние от Земли до Солнца во второй половине июня равно $L_{\text{и}} = 152$ млн км, а во второй половине января $L_{\text{я}} = 147$ млн км. Поэтому скорости движения Земли в той же системе отсчета в отмеченные промежутки времени различаются. В январе скорость равна примерно $v_{\text{я}} = 30,489$ км/с, а в июне $v_{\text{и}} = 29,487$ км/с. Это связано с тем, что сохраняется момент количества движения (момент импульса) Земли при ее движении вокруг Солнца. Скорости отличаются примерно на 1 км/с. Вследствие этого промежутков времени между двумя последовательными восходами Солнца на экваторе Земли в январе больше, чем в июне. В сутках $T = 24 \cdot 3600$ с. За этот промежуток времени Земля успевает переместиться по орбите на расстояние, равное произведению скорости движения на длительность суток. Следовательно, для вычисления длительности промежутка времени между двумя последовательными восходами Солнца нужно учитывать, что по отношению к звездам Земля поворачивается вокруг оси, направленной на северную Полярную звезду, на угол больше 2π . За счет того, что расстояния от Земли до Солнца разные и скорости движения Земли по орбите тоже разные, эти добавочные повороты различаются – для января они больше, чем для июня. Формула для оценки разницы длительностей суток такова:

$$\Delta T = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{T v_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} - \frac{T v_{\text{и}}}{L_{\text{и}}} \right) = 15,9 \text{ с} \approx 16 \text{ с}.$$

Э. Суткин

Ф2810. Маятник OP состоит из массивной точки-гаечки P массой m и невесомой нерастяжимой тонкой нити длиной l (рис. 1). Точка O прикреплена с помощью шарнира к шероховатой наклонной плоскости так, что гаечка P может скользить по плоскости, но не может по ней катиться. Угол наклона плоскости к горизонту равен θ . Коэффициент трения гаечки о плоскость $\mu = \tan \alpha$, где α – угол

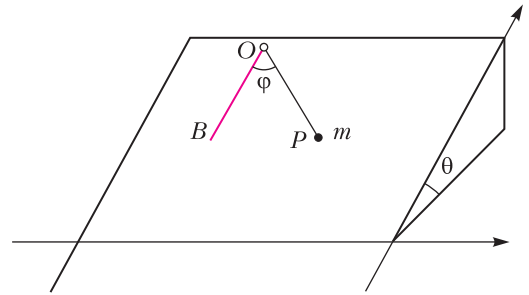


Рис. 1

трения (т.е. угол наклона, при котором начинается скольжение). Находящуюся в плоскости гаечку P отклоняют от линии OB , называемой линией наибольшего ската или линией наибольшего уклона, и отпускают без начальной скорости. На какой максимальный угол φ_{max} можно отклонить гаечку от линии наибольшего ската так, чтобы она не начала двигаться после того, как ее отпустят?

Пусть φ – угол между маятником OP и линией наибольшего ската OB , а C – расположенный в наклонной плоскости круг с центром в точке O и радиусом l . Прежде всего заметим, что если угол трения больше угла наклона плоскости: $\alpha > \theta$, то гаечка P не начнет скольжение, в какой бы точке круга ее не отпустили. В этом случае угол φ может быть любым, т.е. $\varphi_{\text{max}} = \pi$.

Далее, пусть $\vec{T} = (-T \sin \varphi, T \cos \varphi)$ – сила натяжения нити, $\vec{R} = (R_x, R_y)$ – сила трения (рис. 2). Здесь и далее силы заданы в

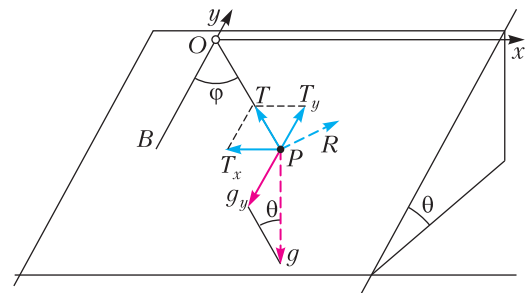


Рис. 2

проекциях на оси системы отсчета xy , начало которой совпадает с точкой O подвеса маятника, ось x горизонтальна и также располагается в плоскости, ось y направлена вверх вдоль плоскости.

Так как величина силы нормальной реакции плоскости составляет $N = mg \cos \theta$, то в равновесии должно выполняться условие Кулона–Амонтона¹

$$R_x^2 + R_y^2 \leq \mu^2 N^2 = \mu^2 m^2 g^2 \cos^2 \theta.$$

Из условий равенства нулю суммы сил в проекциях на оси x и y имеем

$$\begin{aligned} -T \sin \varphi + R_x &= 0, \\ -mg \sin \theta + T \cos \varphi + R_y &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим компоненты силы трения и подставляем в условие равновесия:

$$\begin{aligned} (T \sin \varphi)^2 + (mg \sin \theta - T \cos \varphi)^2 &\leq \\ &\leq \mu^2 m^2 g^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Начало скольжения имеет место в случае, когда это выражение обращается в равенство

$$\begin{aligned} T^2 - 2mgT \sin \theta \cos \varphi + \\ + m^2 g^2 (\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta) &= 0, \end{aligned}$$

которое будем рассматривать как уравнение относительно T . Если ввести безразмерную переменную T' , т.е. положить $T = mgT'$, то имеем

$$T' = \sin \theta \sin \varphi \pm \sqrt{D/4},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - (\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta) = \\ &= \mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Для существования решений дискриминант D должен быть неотрицательным, т.е. должно выполняться условие

$$\mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \geq 0,$$

$$\text{или } \sin^2 \varphi \leq \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \theta}.$$

¹ В школе закон Кулона–Амонтона в используемых обозначениях обычно записывают как

$$R \leq \mu N, \text{ или } R - \mu N \leq 0.$$

Умножая левую и правую части этого неравенства на неотрицательную величину $R + \mu N$, с помощью формулы разности квадратов приходим к соотношению вида

$$R^2 - \mu^2 N^2 \leq 0, \text{ или } (\overline{R\overline{R}}) - \mu^2 (\overline{N\overline{N}}) \leq 0,$$

где в левой части стоят скалярные квадраты векторов, задающих силу трения и силу нормальной реакции.

Понятно, что при выполнении обсуждавшегося выше условия $\alpha > \theta$ полученное неравенство справедливо для любого φ .

Пусть теперь

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \theta} < 1 \text{ и } \varphi_* = \arcsin \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \theta}.$$

Поскольку маятник реализован с помощью нити, то множество равновесий состоит из одной компоненты:

$$-\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_*.$$

Речь идет о нижней, красной компоненте на рисунке 3.

Если вместо нити взять тонкий невесомый нерастяжимый стержень, скользящий по плоскости без трения, то ко множеству равновесий для нити добавилось бы еще множество равновесий

$$\pi - \varphi_* \leq \varphi \leq \pi + \varphi_*,$$

соответствующих голубой компоненте на рисунке 3.

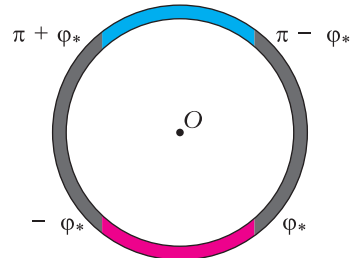


Рис. 3

Упражнение. Пусть в начальный момент времени гайка P находилась на линии наименьшего ската и ей была придана некоторая скорость $v_0 > 0$, перпендикулярная этой линии и вращающая маятник против часовой стрелки. Каково наименьшее значение этой скорости, при котором гайка остановится в предельном положении $\varphi = \varphi_*$?

Решение. В тот миг, когда гайке была придана скорость v_0 , у нее появилась кинетическая энергия $E_k = \frac{mv_0^2}{2}$. По условию задачи и по теореме об изменении кинетической энергии ее начальный запас был полностью израсходован на работу силы тяжести A_T и на работу силы трения $A_{тр}$, где

$$A_T = -mg \sin \theta \cdot l(1 - \cos \varphi_*),$$

$$A_{тр} = -\mu mg \cos \theta \cdot l\varphi_*.$$

Таким образом,

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = A_t + A_{тр},$$

$$v_0^2 = 2(g \sin \theta \cdot l(1 - \cos \varphi_*) + \mu g \cos \theta \cdot l \varphi_*),$$

$$v_0 = \sqrt{2gl(\sin \theta(1 - \cos \varphi_*) + \mu \cos \theta \cdot \varphi_*)}.$$

Остается заметить, что гаечка также может попасть в требуемую точку, совершив несколько оборотов. Каждому числу оборотов будет отвечать свое значение начальной скорости.

А. Буров

Ф2811. Если при комнатной температуре (+20 °С) накачать в бутылку с прозрачными мокрыми изнутри стенками наружный воздух до давления, например, 2,33 атм, подождать некоторое время, чтобы внутри установились температура и давление насыщенного пара воды (2,33 кПа при 20 °С), а затем открыть бутылку, то в ней сразу после вылета пробки и части содержимого появляется туман. Какая в этот момент будет температура содержимого (в центре бутылки)? Необходимые данные о воде, в частности о зависимости давления насыщенного пара воды от температуры, можно найти в физических справочниках.

Понятно, что давление внутри становится равным давлению снаружи $p_a = 1$ атм и от общего количества имевшихся в бутылке молекул воды, составляющих насыщенный водяной пар, некая доля молекул воды, такая же, как и доля молекул кислорода и азота, покидает бутылку. Эта доля будет явно меньше половины, поскольку температура содержимого уменьшается. Теплообменом содержимого с окружением (со стенками бутылки) за короткое время установления давления, конечно, можно пренебречь. Иными словами, процесс расширения той части содержимого, которая остается в бутылке, следует называть адиабатическим. Однако уравнение адиабаты для газа в данном случае не описывает правильно наблюдаемый процесс, т.е. пользоваться уравнением адиабаты можно, но результаты вычислений не совпадут с экспериментом. Связано это с тем, что при образовании капелек тумана из моле-

кул воды, находившейся в состоянии пара, выделяется теплота, которая достается не только молекулам воды, объединившимся в капельки, но и тем молекулам воды и воздуха, которые окружают капельки. Размеры капелек и промежутков между ними весьма малы, поэтому такой «внутренний» теплообмен происходит достаточно быстро. Давление насыщенных паров воды при 20 °С примерно в сто раз меньше суммарного давления содержимого в бутылке. Следовательно, в такое же количество раз отличаются в единице объема количество молекул воды и суммарное количество молекул азота и кислорода. А при меньшей температуре оно еще меньше. Тогда можно считать, что основную составляющую давления создают кислород и азот, которые в процессе расширения получают теплоту от «внутреннего» источника – за счет частичной конденсации водяного пара. В приведенной таблице указаны в гектопаскалях (10^2 Па) значения давления насыщенного водяного пара над жидкой водой (переохлажденной) и над льдом при разных низких температурах:

Давление насыщения над водой (p_v) и над льдом (p_l) при различной температуре t , гПа

t , °С	p_v	p_l	$p_v - p_l$
-50	0,064	0,039	0,024
-40	0,189	0,128	0,061
-30	0,509	0,380	0,129
-20	1,254	1,032	0,222
-12	2,441	2,172	0,269
-10	2,863	2,597	0,266
-5	4,215	4,015	0,200
-0	6,107	6,107	0

Если бы водяных паров в бутылке не было, а был бы только сухой воздух, то при уменьшении давления от 2,33 атм до 1 атм температура сразу после вылета пробки из горлышка бутылки и установления давления была бы равной 230 К = -43 °С. Находится эта величина из уравнения адиабаты для двухатомного газа (воздуха)

$$T^{C_p/C_v} p^{1-(C_p/C_v)} = \text{const.}$$

Таким образом, температура понижается на 63 градуса. Конечно, при такой низкой

температуре давление насыщенных водяных паров очень мало – в несколько тысяч раз меньше 1 атм. Поэтому можно считать, что практически весь водяной пар превратился в капельки. При этом давление не изменилось, т.е. можно рассматривать процесс установления температуры как два последовательных шага: сначала в адиабатическом процессе устанавливается давление, а затем при постоянном давлении устанавливается температура. В результате практически вся выделившаяся при конденсации водяного пара теплота достается молекулам воздуха, поскольку доля молекул воды очень мала. Молярная теплота конденсации водяного пара при температуре около нуля градусов по Цельсию равна примерно 50 кДж/моль. Каждый моль воздуха получает, следовательно, 0,5 кДж энергии и нагревается в процессе с постоянным давлением от температуры 230 К до установившейся температуры. Оценим рост температуры:

$$C_p (T_k - T_n) = 0,5 \text{ кДж},$$

$$C_p = 3R \approx 25 \text{ Дж/К},$$

$$T_k - T_n \approx 20 \text{ К},$$

т.е. температура вырастает примерно на 20 градусов. В результате в бутылке все равно температура будет весьма низкой: 250 К. При такой температуре давление насыщенных паров воды действительно весьма мало: около 100 Па. Это означает, что наше предположение о том, что большая часть водяных паров конденсируется, справедливо: в виде пара осталась лишь 1/23 часть, или около 4,5%, а 95,5% собрались в капельки.

Итак, ответ на поставленный в условии задачи вопрос такой: температура равна примерно минус 23 °С.

Обратим внимание на то, что капельки тумана состоят из переохлажденной воды. Если учесть и это явление, то следует найти дополнительное количество теплоты, которое выделяется при охлаждении воды от 0 °С до –23 °С. Молярная теплоемкость жидкой воды равна 75 Дж/(моль·К). Следовательно, дополнительное количество теплоты (в добавок к уже оцененному

0,5 кДж) составит $23 \cdot 0,75 \text{ Дж} \approx 17 \text{ Дж}$. Этой величине соответствует дополнительный нагрев на $(17/25)^\circ \approx 0,7^\circ$. Если учесть и эту поправку, то температура, которую мы ищем, будет немного выше: минус 22,3 °С.

Б.Туманов

Ф2812. Трехфазный трансформатор имеет Φ -образный железный сердечник и три одинаковые обмотки с одинаковым количеством витков. Железо сердечника не насыщается и обладает очень большой и постоянной магнитной восприимчивостью. Если подать переменное напряжение с амплитудой U_0 на ту обмотку, которая охватывает срединный магнитопровод, то с любой другой обмотки снимается напряжение половинной амплитуды. Если же подать такое же напряжение на одну из боковых обмоток, то на срединной обмотке напряжение будет равно $0,55U_0$.

1) На одну из обмоток подали напряжение $U \sin \omega t$, а на другую $2U \cos \omega t$. Какое напряжение снимается с третьей обмотки? (Вариантов несколько, укажите все возможные.)

2) Если с помощью этого трансформатора попытаться получить максимальное по амплитуде напряжение при наличии источника переменного напряжения с амплитудой U_0 , то какой будет амплитуда этого напряжения? Нарисуйте схему подключения трансформатора к источнику и выводам напряжения.

3) С помощью этого же трансформатора и того же источника переменного напряжения нужно получить переменное напряжение с амплитудой, не равной нулю, но возможно меньшей в сравнении с U_0 . Каково это минимальное по амплитуде напряжение?

1) Поскольку суммарный магнитный поток в трех магнитопроводах, вычисленный с учетом знаков, равен нулю, а фаза напряжения на выходной обмотке может быть φ или $\varphi + \pi$, то мы найдем амплитуду выходного напряжения и сдвиг фазы по отношению к величине $U \sin \omega t$. Таким образом,

будем искать ответ в виде $V \sin(\omega t + \varphi)$. Учтем, что $\cos \omega t = \sin(\omega t + \pi/2)$. Амплитуда напряжения V на третьей обмотке найдется из теоремы Пифагора:

$$V \cdot V = U \cdot U + 4U \cdot U, \text{ откуда } V = U\sqrt{5}.$$

А вот сдвиг фаз φ может быть как плюс так и минус $\arctg 2$. Итого, возможны четыре варианта выходного напряжения:

$$\begin{aligned} &V \sin(\omega t + \arctg 2), \\ &V \sin(\omega t - \arctg 2), \\ &V \sin(\omega t + \arctg 2 + \pi), \\ &V \sin(\omega t - \arctg 2 + \pi). \end{aligned}$$

2) Можно подключить к источнику переменного напряжения U_0 параллельно две любые обмотки так, чтобы их потоки, сложившись, прошли через третью обмотку. В таком случае на ее выводах будет напряжение $2U_0$. Соединив теперь один из

выводов третьей обмотки с одним из выводов обмоток, подключенных к источнику (например, одной первой обмотки), можно получить между другими выводами первой и третьей обмоток либо $(1+2)U_0$, либо $(1-2)U_0$. Максимальное по амплитуде напряжение, следовательно, будет равным $3U_0$.

3) Нужно подать напряжение от источника на одну из боковых обмоток, а снимать напряжение с выводов, включенных последовательно друг за дружкой второй боковой обмотки и срединной обмотки. При этом можно получить либо напряжение $(0,55 + 0,45)U_0$, либо напряжение $(0,55 - 0,45)U_0 = U_0/10$. Вот это и будет минимальная (но не равная нулю) амплитуда выходного напряжения.

С. Варламов

« К В А Н Т » У Л Ы Б А Е Т С Я

Ландау на экзамене

В самом начале 1950-х годов Ландау должен был принимать экзамены у одной группы на Физтехе. По-видимому, в тот момент у него не было никакого желания это делать, и он решил радикально упростить стандартную процедуру. Войдя в аудиторию, где его уж ждали студенты, он без предисловий сказал:

– Поднимите руки те, кто хочет получить за экзамен «три».

Поднялось несколько рук.

– Подойдите сюда, – сказал им Ландау и тут же поставил всем «тройки» в зачетки. Когда «счастливыцы» покинули аудиторию, он обратился к остальным:

– Теперь поднимите руки те, кто хочет получить «четыре».

Опять несколько человек подняли руки. Ситуация повторилась, и еще одна группа студентов ушла с желанными оценками в зачетках.

– Ну что же, – сказал Ландау, оглядев горстку оставшихся, – вы, стало быть, хотите получить «пять»?

Студенты скромно потупились.

– Ничего не поделаешь, – улыбнулся академик, – давайте ваши зачетки.

И он быстро проставил всем отличные оценки. Весь экзамен занял пять минут.

Эта удивительная история имела забавное продолжение. В начале 1970-х «способ Ландау» приема экзаменов решил возродить на Физтехе молодой доктор наук Г., впоследствии академик. Начиная экзамен в одной из групп, он точно так же обратился к студентам:

– Поднимите руки желающие получить «три».

И тут к его ужасу... вся группа подняла руки. В сильном смятении Г. побежал в учебную часть.

– У меня проблема с экзаменом, – взволнованно обратился он к заведующей. – Я не знаю, что делать.

И он пересказал ей ситуацию с экзаменом в своей группе.

– Ну что я могу сказать, – развела руками заведующая, – вы не Ландау...

Из книги

«Математики тоже шутят»

Задача о разбиении прямоугольника на полосы

А.КЛИМОВ

НА МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ олимпиаде 1974 года в двух старших классах была предложена следующая задача.

Прямоугольный лист бумаги размером $a \times b$ см разрезан на прямоугольные полосы, каждая из которых имеет сторону 1 см. Линии разрезов параллельны сторонам исходного листа. Докажите, что хотя бы одно из чисел a или b целое.

Интересна история ее появления.

Сначала сделаем небольшое отступление об обстоятельствах жизни тех лет. Тогда в Москве сносили много старых зданий, в которых много чего было ценного с точки зрения искусства. У Коли Константинова¹ (хорошо известного в олимпиадных кругах) был друг (вроде даже одноклассник) – художник Витя Галкин. Он был одержим идеей спасения и сохранения того ценного, что было в этих разрушаемых домах. Это не только предметы (как светильники или самовары), но также детали мебели и самих зданий – ручки, балясины, подоконники, панно и много чего еще. Коля ему содействовал, вдохновляя нас, студентов, в этом участвовать. Когда становилось известно, что через день-два будут разрушать какой-то замечательный дом, мы туда приезжали, иногда ночью, чтобы все, что еще оставалось ценного, вывешивать, отрывать, выдирать и грузить на машину. У Вити был довольно большой дом в деревне Грызлово, расположенной у реки Лопасня. В этом доме мы и складировали «добычу». А потом мы помогали ему все это сортировать и приводить в порядок.

¹ Николай Николаевич Константинов – выдающийся организатор математического образования. Читайте интервью с ним в «Кванте» №1 за 2010 год.

И вот как-то раз мне пришлось заняться кучей мелких квадратных плиток единого размера примерно 2×2 см. Надо было их поплотнее упаковать в деревянную коробку с размерами, разумеется, не кратными стороне плитки. Причем плитки были самой разной толщины – от 3 до 8 мм. Поэтому я решил ставить их на ребро в один слой, чтобы потом на них положить второй слой и т.д. Заканчивая слой, я увидел, что остается незаполненный кусочек, причем такой площади, что еще 1–2 плитки туда бы вошли. Я стал пытаться менять ориентацию плиток, но все было тщетно. Пришлось оставлять пустое место. И только на другой день, уже в Москве, я понял, что в этом скрыт некий математический факт. Так и появилась приведенная выше задача. Причем меня еще, конечно, интересовала минимальная площадь остатка при заданных нецелых a и b .

Предстояла очередная олимпиада, и это была бы хорошая задача для нее. Однако решить задачу долго не получалось. Наконец нашлось решение, довольно сложное, под которое ее были согласны принять. Я надеялся, что кто-то из участников сможет найти более простое решение. Но это ожидание не сбылось. Задачу дали в двух старших классах, 9 и 10. И насколько я помню, было лишь 2 или 3 работы, в которых можно было с большой натяжкой разглядеть прототип возможного доказательства.

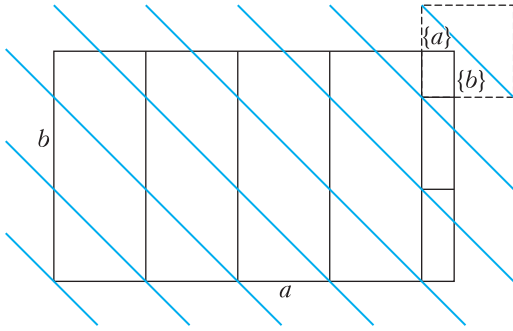
В одной из этих работ – ее писал Андрей Коробов из 10 класса 179-й математической школы – был набросок доказательства для случая, когда обе стороны листа рациональные, т.е. точно кратные $1/n$ для некоторого целого n . Размеры полосок тоже предполагались рациональными. Также предполагалось, что все разрезы идут по линиям сетки с шагом $1/n$. Были закрашены клетки на диагоналях, проведенных в исходном прямоугольнике с шагом в n клеток (т.е. 1 см). Получалось, что в каждой элементарной полоске размера $1 \times n$ клеток имеется ровно 1 закрашенная клетка при любом ее положении или любой ориентации. Поэтому в каждой полоске размера $m \times n$ (клеток) содержится ровно m закрашенных клеток, т.е. их количество строго пропорционально общему числу клеток в ней mn . Теперь оставалось убедиться, что если обе стороны исходного листа не кратны n (в смысле числа клеток),

то для площади всего листа эта пропорциональность не соблюдается.

Все, что теперь мне оставалось, — это как бы перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получить следующее элементарное (т.е. школьное, без бесконечностей) решение для любых a и b .

Будем решать задачу в более широкой постановке. Рассматривая любые *неполные* покрытия листа $a \times b$ без наложений прямоугольными полосками ширины 1 со сторонами, параллельными сторонам листа, докажем, что если a и b оба не целые, то всегда будет оставаться непокрытая часть листа. Также попытаемся оценить снизу размер остатка в зависимости от a и b .

Нанесем на исходный лист серию диагональных (под 45° к стороне) прямых линий одного направления (голубых линий на рисунке), отстоящих друг от друга на 1 см по



вертикали и по горизонтали. Будем называть их секущими. Всякая полоска размера $1 \times l$ накрывает фрагменты секущих суммарной длины $\sqrt{2}l$ или просто l , если измерять длины фрагментов по их проекциям на сторону l . Тем самым, эта условная «длина» равна площади полоски. (Действительно, ведь эти проекции точно покрывают сторону l без перекрытий.) Пусть L — сумма «длин» всех секущих на листе. При любом покрытии суммарная площадь полосок не может быть больше L . Пусть одна из секущих проходит через левый нижний угол листа, как на рисунке. Рассмотрим следующую эталонную нарезку-покрытие. Отрежем полные (от края до края) полоски ширины 1 слева по максимуму, а потом короткие полоски высоты 1 снизу, как показано на рисунке. Они покрывают весь лист за исключением небольшого прямоугольника справа сверху размера $\{a\} \times \{b\}$. Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x . Если сумма сторон этого прямоугольника

$\{a\} + \{b\}$ меньше (или равна) 1, то ни одного фрагмента секущей он не содержит, поскольку угол листа лежит ниже диагонали дополненного единичного квадрата (показанного пунктиром). В итоге отрезанными полосками покрыты все секущие, а значит, их суммарная площадь равна L . И если даже в этом случае остается непокрытым кусок площади $\{a\} \cdot \{b\}$, то и при любом другом покрытии останется не меньше. Далее, если $\{a\} + \{b\} > 1$, то длина проекции секущей в этом прямоугольнике будет $\{a\} + \{b\} - 1$, поэтому остаточная площадь при любом покрытии составит как минимум

$$\begin{aligned} \{a\} \cdot \{b\} - (\{a\} + \{b\} - 1) &= \\ &= (1 - \{a\}) \cdot (1 - \{b\}) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли нижнюю границу площади непокрытой части листа:

$$\min(\{a\} \cdot \{b\}, (1 - \{a\}) \cdot (1 - \{b\})).$$

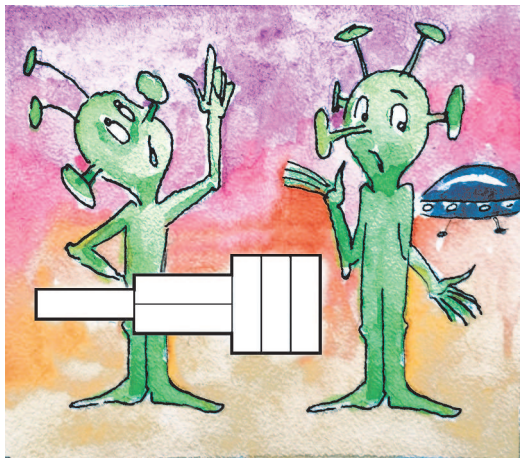
Это число, очевидно, больше 0, когда a и b оба не целые. При этом, когда $\{a\} + \{b\} < 1$, минимальным является первый аргумент минимума и наоборот.

Возникает вопрос, а достигается ли полученная нижняя граница при $\{a\} + \{b\} > 1$? Если одна из сторон листа меньше 1, то отрезать полоску шириной 1 можно только по другой стороне (если она больше 1), и потому остаток будет всегда $\{a\} \cdot \{b\}$. Но если обе стороны больше 1, то граница $(1 - \{a\}) \cdot (1 - \{b\})$ достижима.

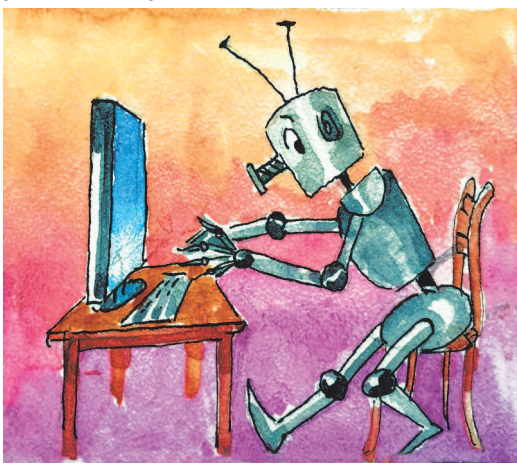
Предоставляем читателю найти соответствующую нарезку самому (например, когда $1 < a, b < 2$ и $a + b > 3$).

Задачи

1. Фигура на рисунке составлена из 6 одинаковых прямоугольников периметра 1. Чему равен ее периметр?



2. Робот Федя выполняет с числом следующие операции: если число меньше 10, то он его увеличивает на 3, а если число равно 10 или больше, то уменьшает его на 2. Он начал с числа 1 и сделал 2024 операции. Какое число у него получилось?



Задачи 1 и 2 предлагались на конкурсе «Смарт КЕНГУРУ». Задачи 3 и 4 предлагались на Московской устной олимпиаде.

3. Саша нашел одно из решений ребуса $ПО + СЧ = ИТ + АЙ = ЕЁ$. Чему может быть равно $ЕЁ$ в его решении?

А. Шаповалов, А. Заславский



4. Расположите на плоскости 11 непесекающихся равных квадратов так, чтобы для их правильной раскраски трех цветов было недостаточно. Раскраска называется правильной, если каждые два квадрата, имеющие общий отрезок границы, раскрашены в разные цвета.

Фольклор



Четырехугольник с тремя равными сторонами

Е. БАКАЕВ

Обсудим такую задачу М. Волчкевича. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB , BC , CD равны. Найдите углы A и D четырехугольника, если $\angle B = 108^\circ$, $\angle C = 48^\circ$ (рис. 1).

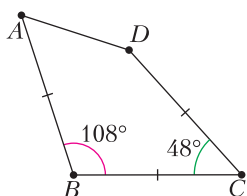


Рис. 1

Мы приведем разные дополнительные построения, которые помогают решить задачу. Вопрос, как о них догадаться... Общая идея в том, чтобы искать углы с хорошими свойствами: например, угол в 60° или два угла, один из которых в два раза больше другого.

Первый способ (равносторонний треугольник и трапеция). Посмотрим на числа в условии. Не приходит в голову, чем удобны углы в 108° и 48° , но вот $108^\circ - 48^\circ = 60^\circ$ – это уже замечательный угол! Отсюда можно додуматься до следующего дополнительного построения.

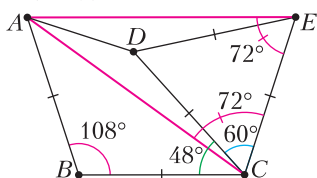


Рис. 2

Отметим точку E такую, что треугольник CDE – равносторонний и $\angle BCE = 108^\circ$ (рис. 2). Таким образом, мы как раз «прибавили» к углу в 48° угол в 60° и получили 108° . Важное свойство угла в 60° – что это часть равностороннего треугольника, поэтому надо вместе с углом 60° сразу достроить и весь треугольник.

Тогда в четырехугольнике $ABCE$ равны углы B и C и стороны AB и CE , а значит, это равнобокая трапеция. Можно доказать это так: продлим AB и CE до пересечения в точке X (рис. 3), тогда в треугольнике BXC равны углы и, значит, он равнобедренный. Поэтому $XB = XC$ и $XA = XE$, т.е. $\triangle AXE$ равнобедренный и $AE \parallel BC$.

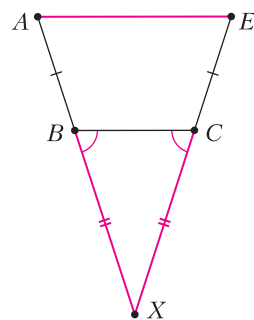


Рис. 3

Таким образом, $ABCE$ (см. рис. 2) – равнобокая трапеция, и мы знаем ее углы: $\angle A = \angle E = 180^\circ - \angle B = 72^\circ$. Треугольник ABC равнобедренный, в нем углы A и C равны $(180^\circ - 108^\circ)/2 = 36^\circ$, тогда

$$\angle ACE = \angle BCE - \angle BCA = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

Получается, что треугольник ACE равнобедренный, так как в нем углы C и E равны 72° . Поэтому точки A и D лежат на серединном перпендикуляре к CE , а значит, $\angle DAC = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Отсюда несложно получить ответ: углы в четырехугольнике $ABCD$ равны $\angle A = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$, $\angle D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Второй способ (ромб и биссектрисы).

Идея этого построения в следующем. Нам даны углы между первой и второй стороной и между второй и третьей стороной. Можно еще построить угол между первой и третьей стороной – надо параллельно перенести первую сторону к третьей. Иными словами, достроить треугольник ABC до параллелограмма. Так как в нем будут равны все стороны, то в данном случае он будет являться ромбом.

Скажем о свойствах ромба. Возьмем равнобедренный треугольник PQR и продлим в нем высоту QO , проведенную к основанию, на свою длину – получим точку S (рис. 4).

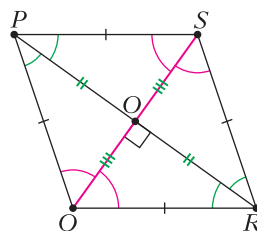


Рис. 4

Образовалось 4 равных треугольника, и тогда $PQRS$ – это ромб, так как в нем все стороны равны. Кроме того, $\angle P = \angle R$, $\angle Q = \angle S$, $\angle P + \angle Q = 180^\circ$.

Итак, построим $\triangle ABC$ до ромба $ABCK$ с углами 108° и 72° (рис. 5). Несложно посчи-

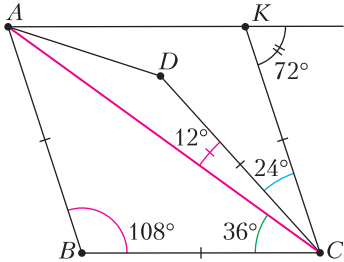


Рис. 5

тать, что $\angle ACD = 12^\circ$, $\angle DCK = 24^\circ$. Направляется такое дополнительное построение: провести биссектрису угла DCK , ведь $12 \cdot 2 = 24$. Проведем ее до пересечения с AK в точке F (рис. 6). Треугольники DFC и KFC

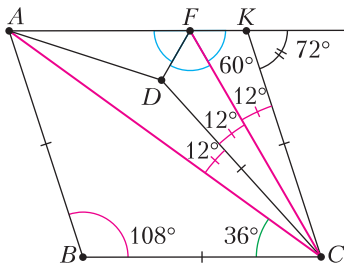


Рис. 6

равны по двум сторонам и углу между ними. Так как $72^\circ - 12^\circ = 60^\circ$, то $\angle KFC = \angle DFC = 60^\circ$, а тогда и $\angle AFD = 60^\circ$. В треугольнике AFC в точке D пересекаются две биссектрисы, а значит, и третья биссектриса тоже проходит через эту точку! Тогда $\angle CAD = \angle CAK/2 = 18^\circ$, и теперь уже легко посчитать углы четырехугольника $ABCD$.

Можно придумать аналогичное решение без ромба – отразим точку D относительно AC , и все наши построения внутри треугольника ACK вместо этого будем делать в треугольнике ACB .

Третий способ (правильный пятиугольник и симметрия). У самого по себе угла в 108° есть хорошие геометрические свойства. Заметим, что смежным ему является угол в 72° и $72^\circ \cdot 5 = 360^\circ$. Возьмем точку O и проведем из нее под равными углами равные отрезки в точки K, L, M, N, P (рис. 7). Тогда углы

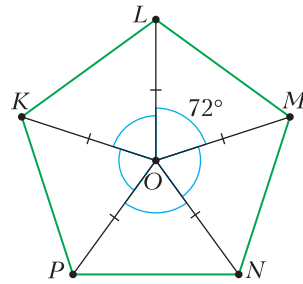


Рис. 7

между соседними отрезками как раз по 72° . Возникает 5 равных треугольников, поэтому в пятиугольнике $KLMNP$ равны все стороны и все углы – это правильный пятиугольник. Несложно посчитать, что все его углы равны по 108° .

Зная это, можно догадаться: надо построить четырехугольник $ABCD$ до правильного пятиугольника $ABCST$ (рис. 8). Тогда тре-

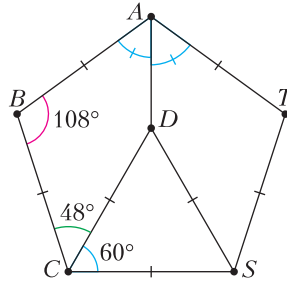


Рис. 8

угольник CDS равнобедренный с углом 60° , а поэтому равносторонний. Таким образом, наша конструкция состоит из правильного пятиугольника и равностороннего треугольника с общей стороной CS . Покажем, что эта конструкция симметрична относительно l – серединного перпендикуляра к CS . Для $\triangle CSD$ прямая l является осью симметрии. И для правильного пятиугольника это тоже так – l является его осью симметрии, что несложно понять из нашего способа построения правильного пятиугольника (см. рис. 7). А значит, и вся конструкция симметрична относительно l . Отсюда понятно, что $\angle DAB = 108^\circ/2 = 54^\circ$.

Задачи

1. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC, CD равны. Найдите углы четырехугольника, если
 - а) $\angle B = 80^\circ, \angle C = 80^\circ$;
 - б) $\angle B = 80^\circ, \angle C = 100^\circ$;
 - в) $\angle B = 60^\circ, \angle C = 80^\circ$;
 - г) (М.Волчкевич, Математический праздник, 2020) $\angle B = 90^\circ, \angle C = 150^\circ$;

- д) $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$;
 е) $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 170^\circ$;
 ё) $\angle B = 108^\circ$, $\angle C = 168^\circ$.

2* (М.Волчкевич, Математический праздник, 2022, 7 кл.). В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70^\circ$ и $\angle B = 100^\circ$. Чему могут быть равны углы C и D ?

3* (М.Евдокимов, Устная московская олимпиада, 2023, 7 кл.). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB , BC и CD , а угол D равен сумме углов A и C . Чему равен угол DAC ?

4* (М.Волчкевич, Московская математическая олимпиада, 2007, 8 кл.). В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB , BC и CD равны, точка M – середина стороны AD . Известно, что $\angle BMC = 90^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

5* (Турнир городов, 2004). На сторонах KB и KC треугольника KBC отметили соответственно точки A и D так, что $AB = BC = CD$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке N . Докажите, что $NI \perp BC$, где I – центр вписанной окружности KBC .

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

5. На острове 30 жителей, каждый либо правдолюб (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Каждый знает про всех, кто есть кто. Островитяне встали в круг, и каждый сказал про соседа справа, правдолюб он или лжец, а потом сказал это про соседа слева. Может ли быть, что никто не сказал дважды одно и то же?

Б.Френкин

6. Есть шахматная доска 8×8 . За один ход можно выбрать любой клетчатый квадрат 2×2 , 3×3 или 4×4 и изменить цвет четырех его угловых клеток на противоположный. Можно ли а) сделать доску полностью белой; б) сделать какие-то две соседние по стороне клетки черными, а остальные клетки – белыми? Приведите алгоритм действий или докажите, что такое невозможно.

М.Евдокимов

7. Найдите все углы α , $0 < \alpha < 180^\circ$, такие, что существует конечное множество точек плоскости (содержащее хотя бы две точки) со следующим свойством: для любых точек A и B множества существует точка C множества такая, что $\angle ACB = \alpha$.

Е.Бакаев

8. Клеточный прямоугольник по линиям сетки разрезан на полоски – прямоугольники шириной 1 и длиной больше 1. В каждой полоске две крайние клетки покрашены в красный цвет. Докажите, что от каждого угла прямоугольника есть путь по красным клеткам в какой-то другой угол (путь можно пройти, переходя из клетки в соседнюю с ней по стороне).

Е.Бакаев

Коники в задачах по физике

А. БЫЧКОВ

ДРЕВНИЕ ГРЕКИ УЖЕ БЫЛИ ЗНАКОМЫ с фигурами, которые мы сегодня называем кривыми второго порядка. Они называли их коническими сечениями¹ или кониками и посвящали им научные исследования. В XVII-XVIII веках эти кривые стали использоваться в механике: оказалось, что снаряды летят по параболической траектории, а планеты вращаются по эллиптическим орбитам. Позже, изучая движение тел в космосе, ученые установили, что скорость запуска объекта определяет его траекторию. Оказалось, что тело, запущенное с Земли с разной скоростью, может двигаться в космосе по различным кривым, которые относятся к кривым второго порядка: эллипс, парабола и гипербола.

Эта статья посвящена рассмотрению кривых второго порядка и их применения в задачах физики. Сначала напомним определения кривых второго порядка и некоторые их свойства с геометрической точки зрения.

Парабола представляет собой множество точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки F и данной прямой l (рис. 1). Точку F называют фокусом параболы, а линию l – директрисой.

Эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек A и B равна постоянной величине (рис. 2). Эти точки называют фокусами эллипса.

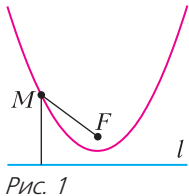


Рис. 1

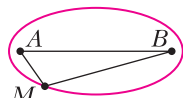


Рис. 2

¹ Конические сечения – линии, которые получаются сечениями поверхности прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину.

Гипербола – множество точек плоскости, разность расстояний от которой до двух данных точек A и B равна (по модулю) постоянной величине (рис. 3). Эти точки – фокусы гиперболы.

Фокальное свойство параболы. Пусть парабола имеет фокус F и директрису l , а X – какая-нибудь ее точка (рис. 4). Тогда прямая XF и перпендикуляр, опущенный из X на l , составляют равные углы с касательной

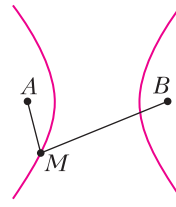


Рис. 3

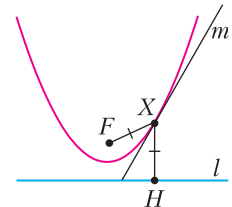


Рис. 4

m к параболе в точке X . Фокальное свойство параболы можно использовать следующим образом. Если сделать отражатель в форме параболоида и поместить лампочку в фокусе, то получится прожектор: все отраженные лучи будут параллельны оси параболоида.

Упражнение 1. Докажите фокальное свойство эллипса: отрезки, соединяющие точку эллипса с его фокусами, составляют равные углы с касательной к эллипсу в этой точке.

Упражнение 2. Докажите фокальное свойство гиперболы: отрезки, соединяющие точку X гиперболы с ее фокусами, составляют равные по величине углы с касательной в точке X .

Задача 1. *Человек хочет переплыть реку на весельной лодке в точку A , расположенную строго напротив точки отплытия B . Скорость течения реки постоянна и равна v . Лодочник гребет таким образом, что его скорость относительно воды всегда направлена к точке A и равна v . По какой траектории движется лодка?*

Обозначим ширину реки d и рассмотрим прямую l , перпендикулярную ее берегам и находящуюся на расстоянии d вниз по течению от отправной точки A лодки. Лодка первоначально находится на расстоянии d как от точки B на противоположном берегу, так и от линии l . Поскольку скорость воды и скорость лодки относительно воды одинаковы по модулю и равны v , то вода сносит лодку вниз по течению на то же расстояние, что проходит лодка в направлении к точке B .

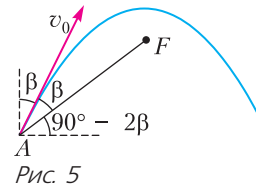
Это означает, что лодка всегда одинаково удалена от точки B и от линии l . Поэтому лодка движется по параболе, у которой B – фокус, а линия l – директриса.

Задача 2. Лиса бежит по прямой с постоянной скоростью v . Собака гонится за лисой с той же по модулю скоростью, причем бежит так, что видит лису все время перед собой (скорость собаки направлена на лису). В начальный момент времени лиса находилась в точке F_0 , а собака в точке D_0 . При каких положениях точки D_0 (относительно точки F_0) собака догонит лису?

Пусть лиса бежит вдоль оси x , а точка F_0 совпадает с началом координат O . Перейдем в систему отсчета, связанную с лисой. Собака в подвижной системе отсчета участвует в двух движениях: во-первых, равномерно движется против оси x с постоянной скоростью v , во-вторых, приближается с той же по модулю скоростью v к началу координат. Относительную скорость собаки можно найти, воспользовавшись теоремой о сложении скоростей. Если сложить векторы $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $-\vec{v}_{\text{пер}}$ по правилу параллелограмма, то относительная скорость собаки при любом ее положении будет являться биссектрисой угла, составленного этими векторами. Вспоминая про фокальное свойство параболы, заключаем, что в подвижной системе отсчета собака движется по параболе или прямой (вырожденный случай, когда D_0 лежит на оси x и имеет положительную координату).

Теперь легко ответить на вопрос задачи. Собака сможет догнать лису только в том случае, если точка D_0 лежит на оси x и имеет положительную координату. В любом другом случае собака побежит по параболе и через некоторое время пересечет ось, оказавшись позади лисы. В этот момент в подвижной системе отсчета собака останавливается, а в лабораторной системе отсчета, начиная с этого момента, собака и лиса движутся по одной прямой и расстояние между ними остается постоянным. Эта дистанция равна половине расстояния от фокуса F_0 параболы, по которой двигалась собака в подвижной системе отсчета, до ее директрисы.

Задача 3. Тело бросили под углом к горизонту со скоростью v_0 . На каком расстоянии от точки бросания расположен фокус параболы, вдоль которой движется тело?



Пусть β – угол между направлением начальной скорости тела \vec{v}_0 и вертикалью. Расстояние от точки бросания до фокуса параболы обозначим d . На рисунке 5 изображено фокальное свойство параболы, где A – точка бросания, F – фокус параболы (т.е. $AF = d$). Тогда проекция d на горизонтальное направление равна горизонтальной дальности от точки бросания до наивысшей точки траектории. Отсюда получаем

$$d \cos(90^\circ - 2\beta) = \frac{L}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2(90^\circ - \beta)}{2g}, \quad d = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Удивительно, но это факт – расстояние от точки броска до фокуса параболы не зависит от угла, под которым бросили тело! Запомним это.

Упражнение 3. Чему равно расстояние от фокуса до директрисы параболы, являющейся траекторией тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью v_0 ?

Задача 4. Камень бросают с башни высотой $H = 10$ м с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Под каким углом α к горизонту надо бросить камень, чтобы расстояние по горизонтали между начальной точкой и точкой падения камня на землю было максимальным? Чему равен угол между начальной скоростью камня и его конечной скоростью в этом случае?

Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Геометрическое место точек фокусов парабол, вдоль которых может лететь камень, – это окружность радиусом $\frac{v_0^2}{2g}$. При фиксированных значениях начальной скорости камня и высоты башни конечная скорость камня у поверхности земли будет тоже фиксирована и равна

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

Используем соображения обратимости времени и будем бросать из разных мест с поверхности земли под разными углами камень со скоростью v . В этом случае фокусы парабол, вдоль которых может лететь

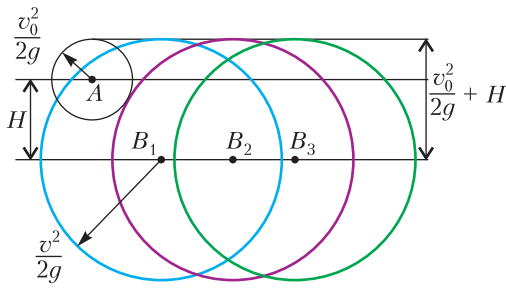


Рис. 6

камень, лежат на окружности радиусом $\frac{v^2}{2g}$. На рисунке 6 изображены три ситуации, которые могут реализоваться. 1) Окружности радиусами $\frac{v_0^2}{2g}$ и $\frac{v^2}{2g}$ пересекаются дважды (черная и синяя) – в точку B_1 можно попасть из точки A двумя способами (точки пересечения – фокусы параболических траекторий камня). 2) Окружности касаются (черная и фиолетовая) – в точку B_2 можно попасть из точки A единственным способом. 3) У окружностей нет точек пересечения (черная и зеленая) – в точку B_3 попасть из точки A невозможно.

Очевидно, что максимальной дальности соответствует вторая ситуация, когда окружности касаются. Из фокального свойства параболы следует, что вектор скорости \vec{v}_0 делит пополам угол, образованный вертикалью и AB_1 , а вектор скорости \vec{v} направлен вдоль биссектрисы угла AB_1D . Отсюда следует, что угол между начальной скоростью \vec{v}_0 камня и его конечной скоростью \vec{v} равен

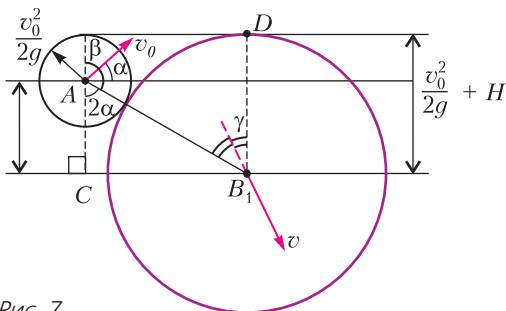


Рис. 7

$\pi - \beta - \gamma = \frac{\pi}{2}$ (рис. 7). Угол α находим, рассмотрев треугольник AB_1C :

$$\cos 2\alpha = \frac{H}{\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + H} = \frac{2gH}{2v_0^2 + 2gH}.$$

Задача 5. Зенитное орудие может сообщить снаряду начальную скорость v_0 в любом направлении одной вертикальной плоскости. Найдите зону поражения, т.е. границу простреливаемой области.

Граница зоны поражения представляет собой огибающую траекторий снаряда при различных направлениях начальной скорости и фиксированном ее значении v_0 . Фокусы всех параболических траекторий расположены на окружности радиусом $\frac{v_0^2}{2g}$ (рис. 8),

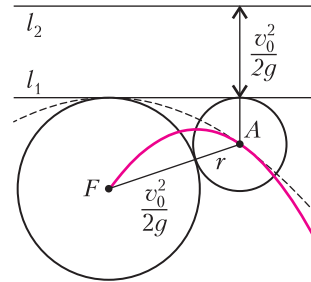


Рис. 8

центр которой совпадает с положением зенитного орудия (точка F). Точка F принадлежит каждой параболе семейства, поэтому горизонтальные директрисы всех парабол совпадают и расположены выше точки F . Обозначим l_1 линию, на которой лежат эти директрисы. Внутри зоны поражения находятся точки, куда орудие может попасть снарядом двумя различными способами: по настильной или навесной траекториям. Через каждую точку, принадлежащую границе простреливаемой области, проходит лишь одна траектория (парабола касается границы). Рассмотрим произвольную траекторию, касающуюся границы зоны поражения в точке A . Расстояние от точки A до линии l_1 обозначим через r . Тогда окружность радиусом r с центром в точке A должна касаться l_1 и окружности радиусом $\frac{v_0^2}{2g}$ (см. решение задачи 4). Проведем линию l_2 параллельно линии l_1 на расстоянии $\frac{v_0^2}{2g}$ выше нее. Точка A , принадлежащая огибающей, находится на одинаковом расстоянии от точки F и линии l_2 . Следовательно, граница зоны поражения представляет собой параболу, фокус которой расположен в точке F (месте расположения орудия), а линия l_2 является ее директрисой.

(Продолжение см. на с. 34)

...нельзя найти более трудных и глубоко-мысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед.

Плутарх

Пространства, проходимые падающим телом в одинаковые промежутки времени, относятся между собой как последовательные нечетные числа.

Галилео Галилей

...открытие исчисления бесконечно малых дало... возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям...

Жозеф Луи Лагранж

...потенциал... должен быть представлен как результат суммирования зарядов назлектризованных частиц, деленных на соответствующее расстояние от данной точки.

Джеймс Клерк Максвелл

...знак суммирования превращается в \int — искаженное большое S, первая буква латинского слова «Summa». Этот значок назван интегралом.

Ричард Фейнман

Математический анализ — это совершенно естественная, простая и элементарная наука, ничуть не более заумная, сложная или «высшая», чем, скажем, «элементарная геометрия».

Владимир Тихомиров

А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + ИНТЕГРАЛ?

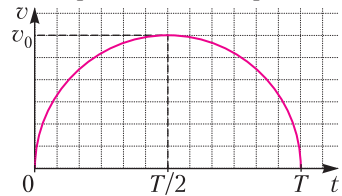
Производная, как и было обещано в нашем предыдущем выпуске, передает эстафетную палочку своему неразлучному партнеру — интегралу. Но чтобы отношения между ними стали сродни связи вычитания со сложением, должны были пройти века, в течение которых интегральное исчисление развивалось независимо от дифференциального. От Архимеда до Ньютона и Лейбница выдающиеся ученые, размышляя над практическими задачами, изобретали хитроумные способы нахождения площадей и объемов. Ими, кстати, и сейчас мы зачастую пользуемся, пытаясь «обмануть интеграл».

Вот и сегодня можно сравнить различные подходы к решению физических задач и оценить возможность и эффективность применения интеграла.

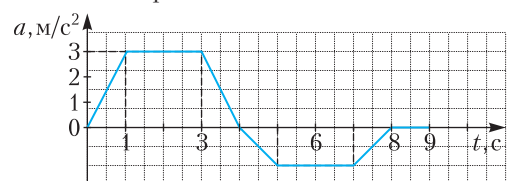
Вопросы и задачи

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Какой путь пройдет оно за $t = 2$ с полета?
2. На последнем километре тормозного пути скорость поезда при торможении с постоянным ускорением уменьшилась на 10 м/с. Определите время торможения, если скорость в начале тормозного пути была $v_0 = 72$ км/ч.
3. График зависимости скорости тела от времени имеет вид полуокружности. Максимальная скорость тела равна v_0 . Найдите среднюю скорость тела за время T .


4. Тело начинает двигаться вдоль оси x из состояния покоя. Ускорение тела задано графиком на рисунке. Чему равна максимальная скорость тела?



5. Муравей стартует со скоростью $v_0 = 2$ см/с и движется по некоторой траектории. За какое время он пройдет $s = 1$ м, если его скорость зависит от пройденного пути по закону $v(x) = \frac{v_0}{1+kx}$, где $k = 1$ м⁻¹?



6. Лодку массой m , стоящую в спокойной воде, толкнули со скоростью v_0 . Какой путь пройдет она до того, как остановится, если сила сопротивления движению пропорциональна скорости: $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$?
7. Однородный стержень массой m и длиной l вращается в горизонтальной плоско-



сти вокруг оси, проходящей через один из его концов, с постоянной угловой скоростью ω . Чему равна его кинетическая энергия?

8. Шарик массой m , прикрепленный к пружине жесткостью k , совершает гармонические колебания с амплитудой A . Какова энергия шарика?

9. Идеальный газ в количестве ν молей, находящийся при температуре T , изохорно охлаждается так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении до первоначальной температуры. Определите совершенную газом работу.

10. Газ, находящийся в цилиндре под поршнем, дважды сжимают до одинакового конечного объема: один раз медленно, другой раз быстро. В каком случае над газом совершается большая работа?

11. Чему равна электростатическая энергия уединенного проводника емкостью C , заряженного до заряда Q ? Потенциал поля на бесконечности считать равным нулю.

12. Проводящий контур сопротивлением R находится во внешнем магнитном поле. В течение некоторого времени магнитный поток изменился на $\Delta\Phi$. Найдите заряд, протекший через контур.

Микроопыт

Налейте в цилиндрический стакан воду примерно до половины его объема и разместите ее ложечкой. Убрав ложечку, какое-то время вы будете наблюдать воронку, образуемую вращающейся водой. Какова форма этой воронки?

Любопытно, что....

...предвосхищая будущие открытия, состоявшиеся через две тысячи лет, Архимед определил площади круга, поверхностей шара и сферического сегмента, вычислил объемы шара и эллипсоида... Примечательно, что площадь сегмента параболы он нашел при помощи им же установленного «закона рычага», так называемого механического интегрирования.

...в 1635 году ученик Галилея Бонавентура Кавальери развил новый метод определения площадей и объемов – принцип неделимых. Труды ученого сыграли большую роль в формировании исчисления бесконечно малых.

...возможно, еще Пьер Ферма знал, что «задачи на площади» и «задачи на касатель-

ные» являются взаимно обратными. Но доказать важнейшую теорему анализа – о взаимной обратности дифференцирования и интегрирования – удалось Торричелли, причем при решении физической задачи о движении материальной точки.

...форма обозначения интеграла (см. эпиграф Фейнмана) прошла своеобразную эволюцию. Первоначально Лейбниц заимствовал, сократив, используемое Торричелли выражение, затем, может быть, под влиянием Паскаля, перешел к слову «Summa» и, наконец, установил дошедший до нас привычный вид и ввел само название.

...проведенные Фарадеем опыты привели его к заключению о связи протекшего по цепи заряда с изменением пронизывающего контур магнитного потока – именно в такой форме он установил закон электромагнитной индукции.

...английский математик и физик Джордж Грин опубликовал в 1828 году свое главное сочинение, в котором ввел понятие потенциала и развил теорию электричества и магнетизма, опираясь на найденное им соотношение между интегралами по объему и по поверхности.

...интегрирование, по сути, это нахождение площади фигуры, если известна описывающая ее кривая...

...столетиями задача решения (интегрирования) дифференциальных уравнений, описывающих явления природы, была центральной во взаимодействии физики и математики. Значительная часть наиболее важных открытий в этих науках была сделана в процессе развития теории интегрируемых моделей, использование которых и в дальнейшем, по мнению ученых, послужит их взаимному обогащению.

Что читать в «Кванте» о физике и интеграле (публикации последних лет)

1. «Течение воды. История, которой 250 лет» – 2020, №3, с.26;
2. «Закон Архимеда и закон сохранения энергии» – 2021, №5, с. 41;
3. «Как частица к Солнцу стремилась» – 2023, №1, с.43;
4. «Гравитация внутри Земли и ее физические характеристики» – 2024, №1, с.36.

Материал подготовил А.Леонovic



(Начало см. на с. 29)

Задача 6. На склоне, составляющем угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, располагается маленькая игрушечная катапульта (точка А, рис. 9), которая запускает в цель (точка В), располагающуюся на расстоянии $s = 60$ м вдоль склона в направлении подножия, два снаряда с одинаковой начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с по навесной и настильной траекториям. На каком расстоянии друг от друга лежат фокусы навесной и настильной параболических траекторий?

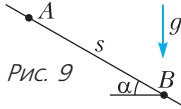


Рис. 9

Скорость снарядов перед попаданием в цель равна

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gS \sin \alpha} \approx 39 \text{ м/с.}$$

Изобразим окружности радиусами $\frac{v^2}{2g}$ и $\frac{v_0^2}{2g}$ с центрами в местах расположения пушки и цели соответственно (рис. 10). Точки пере-

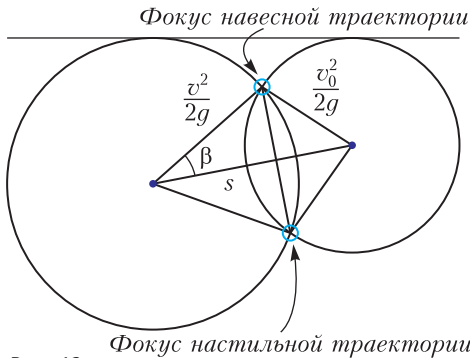


Рис. 10

сечения окружностей являются фокусами навесной и настильной траекторий снарядов. Найдем угол β , воспользовавшись теоремой косинусов:

$$\cos \beta = \frac{s^2 + \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2}{2s \frac{v^2}{2g}} = 0,8$$

и расстояние между фокусами парабол:

$$l = 2 \frac{v^2}{2g} \sin \beta = 90 \text{ м.}$$

Задача 7. Маленький упругий шарик падает из состояния покоя на гладкую наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом. В начальный момент времени расстояние по вертикали между шариком и плоскостью равно d . В дальнейшем траек-

тория движения шарика представляет собой совокупность дуг парабол. Покажите, что фокусы всех этих парабол лежат на хорошо знакомой вам линии. Что это за линия? Найдите ее уравнение $y(x)$ в системе координат, в которой ось x горизонтальна, ось y вертикальна и направлена вниз, а начало координат совпадает с начальным положением шарика. Соударения шарика с плоскостью считаются абсолютно упругими.

Рассмотрим фокусы F_i и F_{i+1} двух произвольных соседних парабол (рис. 11). Точка А

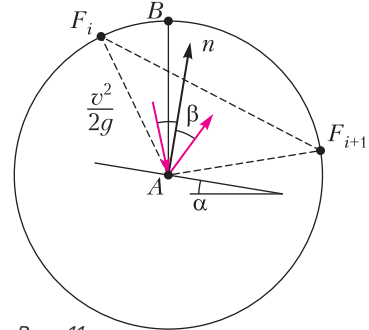


Рис. 11

удара шарика о плоскость, расположенная между вершинами этих парабол, принадлежит обоим параболам. Шарик упругий, следовательно, скорость шарика v непосредственно до удара равна скорости шарика сразу после удара, причем углы, которые составляют эти векторы скоростей с нормалью \vec{n} , возведенной к плоскости в точке А, равны, обозначим их β . Фокусы F_i и F_{i+1} расположены от точки А на

расстоянии $\frac{v^2}{2g}$. Так как угол между нормалью и вертикалью AB равен α и вектор скорости является биссектрисой угла BAF_{i+1} (фокальное свойство параболы), то $\angle BAF_{i+1} = 2(\alpha + \beta)$. Аналогично рассуждая, получаем, что $\angle BAF_i = 2(\beta - \alpha)$. Отсюда находим угол при основании равнобедренного треугольни-

ка AF_iF_{i+1} : $\angle AF_iF_{i+1} = \frac{\pi}{2} - 2\beta$. Стало быть, линия, соединяющая два соседних фокуса, составляет с горизонтом угол 2α и не зависит от того, какую пару соседних парабол мы рассматриваем. Это означает, что все фокусы парабол лежат на одной прямой, которая составляет с горизонтом угол 2α . Рассмотрев первый удар о плоскость, нетрудно показать, что направление, соединяющее начало координат и фокус первой параболы, состав-

ляет с горизонтом тоже угол 2α . Окончательно получаем, что линия, на которой лежат все фокусы парабол, описывается уравнением $y(x) = x \operatorname{tg} \alpha$.

Задача 8. Тяжелая бусинка нанизана на нить, которая прикреплена к двум точкам горизонтальной штанги (рис. 12). Бусинку

отводят в положение, при котором натянутая нить и штанга образуют прямоугольный треугольник с углом α , и отпускают. Определите вектор ускорения в начальный момент времени.

В процессе движения сумма расстояний от бусинки до точек подвеса останется постоянной, поскольку нить нерастяжима. Значит, движение будет происходить по дуге эллипса с фокусами в точках подвеса. Нормальная компонента ускорения пропорциональна квадрату скорости, поэтому ускорение бусинки в начальный момент имеет только тангенциальную компоненту a_τ , т.е. оно направлено по касательной к эллипсу. Обозначим точки подвеса F_1 и F_2 (рис. 13). Пусть φ_1 и

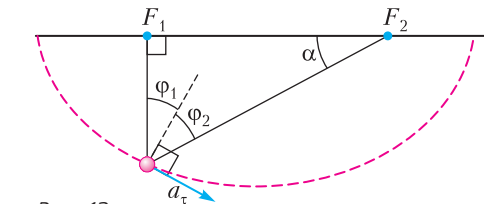


Рис. 13

φ_2 – углы между нормалью к эллипсу в точке нахождения бусинки и отрезками нити. Согласно оптическому свойству эллипса, $\varphi_1 = \varphi_2$. Введем обозначение $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$. Поскольку нить гладкая и нерастяжимая, сила ее натяжения T одинакова вдоль всей длины нити, а значит, проекции сил натяжения отрезков нитей на касательное направление ($T \sin \varphi$) равны по величине и противоположны по направлению. Стало быть, ускорение создается тангенциальной компонентой силы тяжести. Таким образом, модуль ускорения равен

$$a = a_\tau = g \sin \varphi = g \sin \frac{\pi/2 - \alpha}{2} = g \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Вектор ускорения направлен под углом $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ к горизонту.

Упражнение 4. Рассмотрим эллипс, у которого оси симметрии совпадают с осями x и y прямоугольной системы координат, а центр находится в начале координат. Получите уравнение этого эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – расстояния от его вершин, лежащих на осях x и y соответственно, до начала координат.

Задача 9. Если повесить картину на короткую веревку, закрепленную на одном гвозде, велика вероятность, что она со временем перекосятся. Из-за чего ее положение неустойчиво? Возможно ли как-то уравновесить картину, не привязывая ее к гвоздю и не используя два гвоздя, вбитых на некотором расстоянии друг от друга?

Рассмотрим прямоугольную картину шириной $2c$, центр масс которой расположен на пересечении диагоналей, а длина нити равна $2a$ (рис. 14). В положении равновесия,

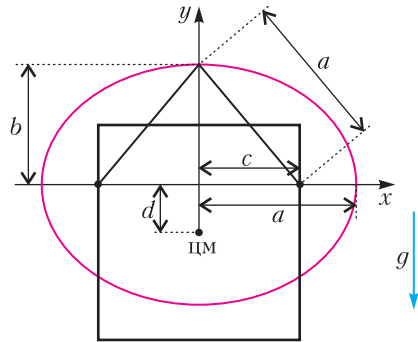


Рис. 14

когда картина висит вертикально, точка подвеса находится на расстоянии $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ выше горизонтальной линии, проходящей через концы нити. Центр масс картины расположен на расстоянии $h = b + d$ ниже точки подвеса. Если нить скользит по гвоздю, то точка подвеса лежит на эллипсе с большой полуосью a и малой полуосью b . Центр масс картины по-прежнему находится непосредственно под точкой подвеса на расстоянии h от нее. Система пребывает в неустойчивом состоянии, пока центр масс опускается при скольжении нити по гвоздю, т.е. если $h > b + d$. Уравнение эллипса выглядит следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рассмотрим случай, когда угол отклонения картины от вертикали мал. Тогда $x \ll a$ и новая координата y точки подвеса равна

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \approx b - \frac{bx^2}{2a^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h^2 &= x^2 + (y + d)^2 \approx x^2 + \left(d + b - \frac{bx^2}{2a^2}\right)^2 \approx \\ &\approx (b + d)^2 + x^2 \left(1 - \frac{b(b + d)}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Картина будет находиться в устойчивом положении равновесия при первоначальном подвешивании в том случае, если множитель при x^2 будет принимать отрицательные значения:

$$a^2 - b^2 = c^2 < bd.$$

Нередко точку опоры стремятся разместить за картиной, и в таких случаях величина b оказывается недостаточной для выполнения этого условия. В результате картина висит неровно.

Задача 10. Найдите радиус кривизны эллипса в его вершинах, если большая полуось равна a , малая равна b .

Рассмотрим окружность радиусом b с центром в начале отсчета прямоугольной системы координат xy . Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = b^2$. Произведем растяжение окружности в направлении оси x в k раз. Тогда точка A с координатами (x, y) , принадлежащая окружности, перейдет в точку A' с координатами $x' = kx, y' = y$. Пусть $k = \frac{a}{b} > 1$. Перепишем уравнение исходной окружности в виде

$$\left(\frac{b}{a}x'\right)^2 + y'^2 = b^2, \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Получился эллипс с большой полуосью a и малой полуосью b . Следовательно, эллипс – это кривая, которая получается при растяжении (или сжатии) некоторой окружности в некотором направлении.

Представим себе, что по окружности с постоянной по модулю скоростью v движется материальная точка. В это же время другая материальная точка движется по эллипсу. При этом линия, соединяющая эти две точки, всегда параллельна оси x (рис. 15). Рассмотрим бесконечно малую дугу CED на окружности. При растяжении она переходит в дугу $C'E'D'$ на эллипсе. Время движения точек вдоль этих дуг будет одно и то же.

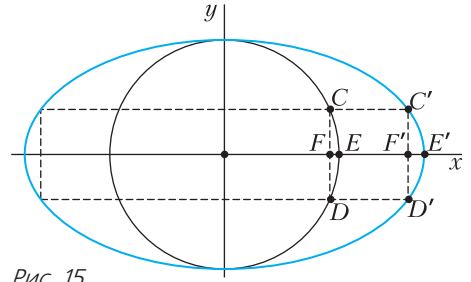


Рис. 15

Одинаковы будут и скорости точек в положениях E и E' . Однако нормальные смещения точек FE и $F'E'$ отличаются в k раз. В такое же число раз будут отличаться нормальные ускорения точек. В точке E' ускорение будет равно

$$a_n = \frac{v^2}{b} k = \frac{av^2}{b^2}.$$

Стало быть, радиус кривизны эллипса в точке E' равен

$$R_{кр} = \frac{v^2}{a_n} = \frac{b^2}{a}.$$

Аналогично рассуждая, можно получить, что в вершинах эллипса, лежащих на оси y , радиус кривизны равен $\frac{a^2}{b}$.

Задача 11. Найдите радиус кривизны гиперболы в ее вершине, если большая (действительная) полуось гиперболы равна a , малая (мнимая) полуось равна b .

Рассмотрим движение небесного тела, притягиваемого Солнцем. Согласно законам Кеплера, оно движется по конической орбите, в одном из фокусов которой (F) находится Солнце. Орбита тела может быть гиперболой, если его скорость на бесконечности v_0 больше нуля. Обозначим скорость тела в ближайшей к Солнцу точке (перигелии) через v_1 (рис. 16). Законы сохранения момента импульса и энергии можно записать следующим образом:

$$v_0 b = v_1 (c - a), \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - G \frac{mM}{c - a},$$

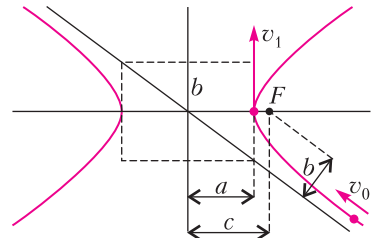


Рис. 16

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ – малая (мнимая) ось гиперболы. Из законов сохранения находим

$$v_1^2 = GM \frac{b^2}{a(c-a)^2}.$$

Согласно закону Ньютона, ускорение тела равно $\frac{GM}{(c-a)^2}$. Стало быть, радиус кривизны орбиты в вершине гиперболы равен

$$R_{кр} = \frac{v_1^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Задача 12. Монетку M , лежащую на горизонтальной поверхности, двигают с помощью легкой нерастяжимой нити, закрепленной в точке A и перекинутой через неподвижный блок B , как показано на рисунке 17 (вид сверху). Свободный конец

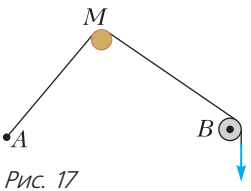


Рис. 17

нити тянут очень медленно, поэтому в процессе движения монетки сила реакции со стороны нити, действующая на нее, компенсируется силой трения. Считайте, что расстояние AB много больше радиуса блока.

Рис. 17

1) По какой траектории движется монетка?

2) На каком расстоянии от точки A окажется монетка, когда участок нити между точкой A и блоком B ($AB = d = 1,0$ м) распрямится?

3) Оцените работу силы трения, действующей на монетку в процессе движения, если в начальный момент времени монетка находилась в вершине C прямоугольного треугольника ABC , причем $AC = AB$. Масса монетки $m = 7,7$ г, коэффициент трения между монеткой и полом $\mu = 0,3$.

1) Сила реакции нити, действующая на монетку, направлена по биссектрисе угла AMC , вершиной которого является монетка, поскольку нить невесома. Сила трения, компенсирующая силу реакции нити, направлена противоположно скорости монетки. Значит, скорость монетки в процессе ее движения также направлена по биссектрисе угла AMC . Вектор скорости монетки имеет одинаковые составляющие на стороны угла AM и MC . Следовательно, участки нити AM и MC за одно и то же время укорачиваются на одинаковые величины, т.е. $MC - AM = \text{const}$.

Поэтому монетка движется по гиперболе, у которой A и C – фокусы.

2) Пусть x_1 и x_2 – расстояния от монетки до точек A и B соответственно в конечный момент времени ее движения. Тогда, с одной стороны, $x_1 + x_2 = d$, а с другой стороны, из определения гиперболы следует, что $\sqrt{2}d - d = x_2 - x_1$. Отсюда находим искомого расстояние x_1 :

$$x_1 = \left(1 - \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)d \approx 0,293 \text{ м}.$$

3) На рисунке 18 изображена траектория движения монетки. Она расположена между отрезком CL , длина которого равна

$$l_{\min} = \sqrt{x_1^2 + d^2} \approx 1,042 \text{ м},$$

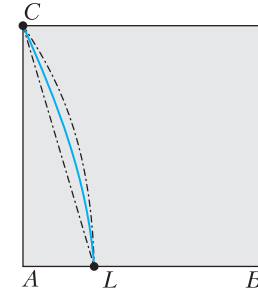


Рис. 18

и дугой окружности, проходящей через точки C и L , центр которой лежит на линии AB . Из геометрических соображений нетрудно найти радиус этой окружности:

$$R = \frac{x_1^2 + d^2}{2x_1} \approx 1,85 \text{ м},$$

а длина дуги окружности CL равна

$$l_{\max} = R \arcsin \frac{d}{R} \approx 1,06 \text{ м}.$$

Стало быть, абсолютное значение работы силы трения $A_{тр}$ лежит в интервале

$$\mu mg l_{\min} = 23,6 \text{ мДж} < A_{тр} = \mu mg l < \mu mg l_{\max} = 23,9 \text{ мДж},$$

где l – длина траектории движения монетки.

Задача 13. На плоскости вокруг двух фиксированных точек A и B с одинаковой угловой скоростью вращаются две прямые, проходящие через эти точки (рис. 19). Какую линию описывает точка M их пересечения, если прямые вращаются в разные стороны?

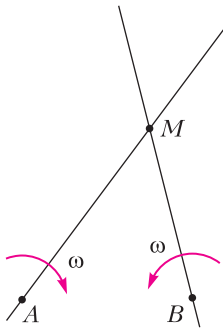


Рис. 19

Начало координат расположим в середине отрезка AB , а направление оси x выберем так, чтобы в некоторый момент времени обе вращающиеся прямые были параллельны x . Примем этот момент времени за начало отсчета $t = 0$. Пусть прямые вращаются с угловой скоростью ω . Тогда уравнения вращающихся прямых в параметрической форме будут выглядеть следующим образом:

$$y_A = -y_0 + (x + x_0) \operatorname{tg}(-\omega t),$$

$$y_B = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg}(\omega t),$$

где x_0 и y_0 – координаты точки B . Исключим из этих уравнений $\operatorname{tg}(\omega t)$ и учтем тот факт, что точка M принадлежит обеим прямым, т.е. $y_A = y_B = y$. Тогда получим уравнение вида

$$xy = x_0 y_0 = \operatorname{const}.$$

Стало быть, точка M движется либо по гиперболе, либо по оси y .

Упражнение 5. Вершина O шарнирного параллелограмма $OPMQ$ закреплена, а стороны OP и OQ вращаются с одинаковой по величине угловой скоростью в разные стороны (рис. 20). По какой линии движется вершина M ?

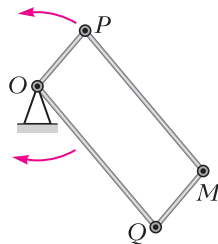


Рис. 20

Задача 14. Как можно с помощью трех приемников звукового сигнала определить местонахождение выстрела вражеского орудия?

Описанный ниже способ определения местонахождения объекта (вражеского орудия) применялся во время Второй мировой войны (метод гиперболических линий).

Известно, что скорость распространения звука в воздухе (при нормальных условиях) составляет примерно $c = 330$ м/с. Предположим, что два приемника сигнала, находящиеся в точках F_1 и F_2 , фиксируют звук одного и

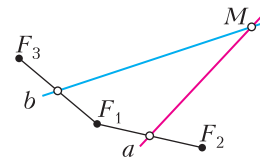


Рис. 21

того же выстрела вражеского орудия, находящегося в точке M (рис. 21). Если приемник F_1 зафиксировал звук на τ секунд позже, то разность расстояний $MF_1 - MF_2$ равна $c\tau$. Точка M находится на соответствующей гиперболе с фокусами в точках F_1 и F_2 (правая ветвь гиперболы). Поскольку на практике приемники сигналов располагаются на значительном удалении от вражеского орудия, то с высокой точностью можно считать, что искомая точка находится на асимптоте a , которая однозначно задается известными параметрами гиперболы. Расположив еще один приемник сигнала в некоторой точке F_3 , аналогично определяется еще одна асимптота b гиперболы с фокусами в точках F_1 и F_3 . Искомая точка M находится на пересечении прямых a и b .

Литература

1. Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер. Прямые и кривые. – М.: МЦНМО, 2016.
2. М. Гервер. Про лису и собаку. – «Квант», 1973, № 2.
3. Kirk T. McDonald. Why Doesn't a Picture Hang Straight?
4. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Т. I. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, издательство МФТИ, 2005, с. 560.

Крылатая латынь

(см. 2-ю страницу обложки)

В задаче представлены три спряжения глагола, по-разному образующих формы наклонений:

	1 спр.	2 спр.	3 спр.
изъявительное наклонение	-a-	-e-	-i-
повелительное наклонение	-a-	-e-	?
сослагательное наклонение	-e-	-ea-	-a-

Задание 1. (12) impera; (15) vivimus, ut edamus; (17) dat... dat.

Задание 2. (2) Будь здоров...; (8) ... чтобы ты был здоров!; (9) Сколько правится; (13) ... чтобы ты властвовал!; (16) Да живет ... да живут ...!

Задание 3. (1) Flores. (2) Cedit. (3) Crescimus. (4) Vincas! (5) Imperant. (6) Curas, ut valeamus.

ЕГЭ по физике 2024 года

В 2024 году вариант ЕГЭ по физике состоял из 26 заданий – 20 заданий в первой части (с кратким ответом) и 6 заданий во второй части (с развернутым ответом и решением). В первой части 11 заданий оценивались максимум в 1 балл, 9 – максимум в 2 балла. Из заданий второй части одно качественное (номер 21, максимум 3 балла), два средней сложности (22 и 23, максимум 2 балла), два повышенной сложности (24, 25, максимум 3 балла). За последнее 26-е задание можно было получить максимум 4 балла: 3 балла за решение и 1 балл за обоснование применимости физических законов и корректности написания формул.

Здесь приводится один из открытых вариантов 2024 года с ответами ко всем заданиям, требующих краткого ответа, и решениями всех задач, требующих развернутого ответа (решения даются в редакции, предложенной предметной комиссией).

Инструкцию по выполнению работы и необходимые справочные данные можно найти на сайте ФИПИ. Там же можно ознакомиться с демонстрационным вариантом ЕГЭ 2025 года, который мало чем отличается от вариантов 2024 года.

Желаем вам интересной и успешной подготовки к ЕГЭ!

Часть 1

1. На рисунке 1 показан график зависимости проекции v_x скорости тела от времени t .

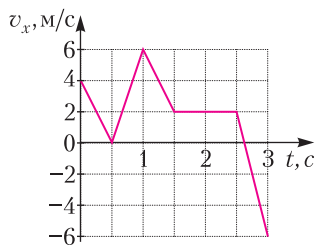


Рис. 1

Какова проекция a_x ускорения этого тела в момент времени 2 с?

2. В инерциальной системе отсчета сила величиной 70 Н сообщает телу массой 10 кг некоторое ускорение. Сила какой величины сообщит телу массой 9 кг в этой же системе отсчета такое же ускорение?

3. Отношение модуля импульса легкового автомобиля к модулю импульса мотоцикла $\frac{p_1}{p_2} = 6$. Каково отношение модулей их скоростей $\frac{v_1}{v_2}$, если отношение массы легкового автомобиля к массе мотоцикла $\frac{m_1}{m_2} = 2$?

4. Ученик выполнял лабораторную работу по исследованию условий равновесия рычага под действием двух сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , плечи которых равны l_1 и l_2 соответственно. Он внес результаты измерений в таблицу:

$F_1, \text{Н}$	$l_1, \text{м}$	$F_2, \text{Н}$	$l_2, \text{м}$
?	0,4	20	1,2

Определите модуль силы \vec{F}_1 , если рычаг находится в равновесии. Массой рычага пренебречь.

5. Небольшой груз, покоящийся на гладком горизонтальном столе, соединен пружиной со стенкой. Груз немного смещают от положения равновесия вдоль оси пружины и отпускают из состояния покоя, после чего он начинает колебаться, двигаясь вдоль оси пружины, по которой направлена ось x . В таблице приведены значения координаты груза x в различные моменты времени t :

$t, \text{с}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$x, \text{см}$	4,0	2,8	0,0	-2,8	-4,0	-2,8	0,0	2,8	4,0

Выберите все верные утверждения о результатах этого опыта на основании данных, содержащихся в таблице.

1) В момент времени 0,8 с модуль ускорения груза минимален.

2) Период колебаний груза равен 1,6 с.

3) Частота колебаний груза равна 0,25 Гц.

4) В момент времени 0,4 с кинетическая энергия груза максимальна.

5) Модули сил, с которыми пружина действует на груз, в момент времени 0,2 с и в момент времени 0,8 с равны.

6. Тело движется вдоль оси x , при этом его координата изменяется с течением времени в соответствии с уравнением $x(t) = 10 + 2t - 6t^2$ (все величины выражены в единицах СИ). Графики А и Б (рис. 2) представляют собой

зависимости физических величин, характеризующих движение этого тела, от времени t . Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимость которых от времени эти графики могут представлять.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

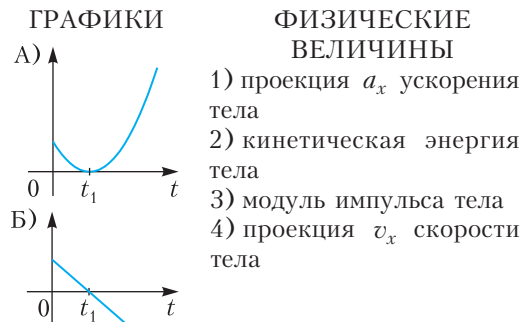


Рис. 2

7. Во сколько раз увеличится давление разреженного газа, если при увеличении концентрации молекул газа в 4,5 раза его абсолютная температура уменьшится в 1,5 раза?

8. Тепловая машина с КПД 40 % за цикл работы получает от нагревателя количество теплоты, равное 200 Дж. Какую работу машина совершает за цикл?

9. На рисунке 3 представлены графики зависимости температуры t двух тел одинаковой массы от отданного ими при остывании количества теплоты Q . Первоначально тела находились в жидком агрегатном состоянии. Используя данные графиков, выберите из предложенного перечня все верные утверждения.

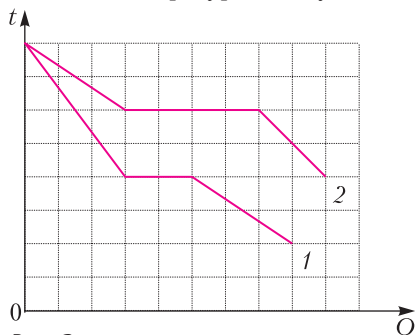


Рис. 3

наковой массы от отданного ими при остывании количества теплоты Q . Первоначально тела находились в жидком агрегатном состоянии. Используя данные графиков, выберите из предложенного перечня все верные утверждения.

1) Удельная теплота плавления второго тела в 2 раза меньше удельной теплоты плавления первого тела.

2) Температура плавления второго тела в 1,5 раза выше, чем температура плавления первого тела.

3) В твердом агрегатном состоянии удельная теплоемкость второго тела больше, чем первого.

4) Удельная теплоемкость первого тела в твердом агрегатном состоянии равна удельной теплоемкости второго тела в жидком агрегатном состоянии.

5) В жидком агрегатном состоянии удельная теплоемкость второго тела в 1,5 раза больше, чем первого.

10. Один моль идеального газа участвует в процессе $1-2-3$, график которого изображен на рисунке 4 в координатах $p-V$, где p – давление газа, V – объем газа. Как изменяются абсолютная температура газа T в ходе процесса $1-2$ и концентрация молекул газа n в ходе процесса $2-3$? Масса газа остается постоянной.

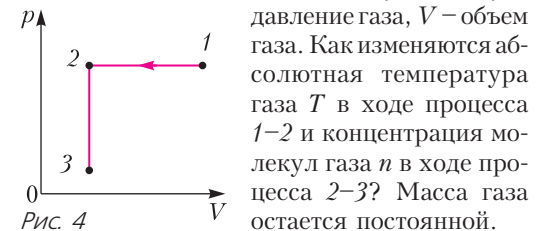


Рис. 4

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

11. Расстояние между двумя точечными электрическими зарядами увеличили в 2 раза, при этом один из зарядов увеличили в 6 раз. Во сколько раз увеличился модуль сил электростатического взаимодействия между зарядами?

12. Определите энергию магнитного поля катушки индуктивностью $3 \cdot 10^{-4}$ Гн, если сила тока в ней равна 1 А.

13. Точечный источник света находится на расстоянии 25 см от плоского зеркала. На сколько увеличится расстояние между источником и его изображением, если, не поворачивая зеркала, отодвинуть его от источника на 4 см?

14. Катушка № 1 включена в электрическую цепь, состоящую из источника постоянного напряжения и реостата. Катушка № 2 помещена внутри катушки № 1 и ее обмотка

замкнута. Вид схемы электрической цепи с торца катушек представлен на рисунке 5.

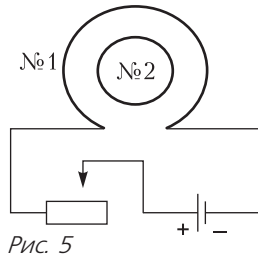


Рис. 5

Из приведенного ниже списка выберите все верные утверждения, характеризующие процессы,

которые происходят в цепи и катушках при перемещении ползунка реостата влево. ЭДС самоиндукции пренебечь.

- 1) Модуль вектора индукции магнитного поля, созданного катушкой № 1, увеличивается.
- 2) В катушке № 2 индукционный ток направлен по часовой стрелке.
- 3) Сила тока в катушке № 1 уменьшается.
- 4) Вектор индукции магнитного поля, созданного катушкой № 2 в ее центре, направлен от наблюдателя.
- 5) Модуль магнитного потока, созданного катушкой № 1 и пронизывающего катушку № 2, увеличивается.

15. На рисунке 6 показана схема электрической цепи постоянного тока, содержащей источник тока, ЭДС которого равна \mathcal{E} , и два резистора R_1 и R_2 . В начальный момент

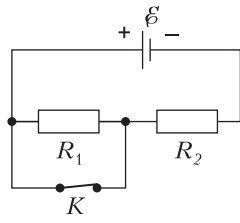


Рис. 6

времени ключ K замкнут. Как изменятся напряжение на резисторе R_1 и суммарная тепловая мощность, выделяющаяся во внешней цепи, если ключ K разомкнуть? Внутренним сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебечь.

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

16. Сколько нейтронов содержится в ядре изотопа галлия $^{69}_{31}\text{Ga}$?

17. Как изменятся при α -распаде радиоактивного изотопа висмута $^{212}_{83}\text{Bi}$ массовое число ядра и число протонов в ядре?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

18. Выберите все верные утверждения о физических явлениях, величинах и закономерностях. Запишите цифры, под которыми они указаны.

- 1) Модуль сил гравитационного взаимодействия двух тел прямо пропорционален квадрату расстояния между этими телами.
- 2) Теплопередача путем конвекции происходит за счет переноса энергии струями и потоками жидкости или газа.
- 3) Модуль сил взаимодействия двух неподвижных точечных заряженных тел не зависит от свойств среды между ними.
- 4) Период свободных колебаний в идеальном колебательном контуре увеличивается прямо пропорционально увеличению индуктивности катушки.
- 5) При α -распаде масса ядра уменьшается примерно на четыре атомные единицы массы.

19. Запишите показания вольтметра (рис. 7) с учетом абсолютной погрешности измерения

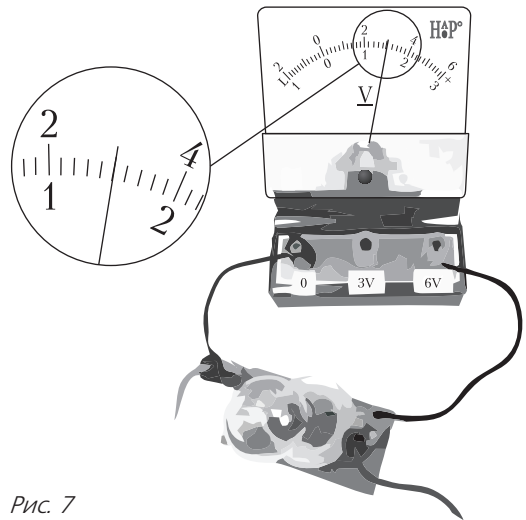


Рис. 7

ний. Абсолютная погрешность прямого измерения напряжения равна цене деления вольтметра.

20. Ученику необходимо на опыте обнаружить зависимость давления газа, находящегося в сосуде, от массы газа. У него имеются пять различных сосудов с манометрами. Сосуды наполнены аргоном разной массы при различных температурах (см. таблицу):

№ сосуда	Объем сосуда, л	Температура газа в сосуде, К	Масса газа в сосуде, г
1	6	320	10
2	4	350	6
3	6	320	8
4	4	340	6
5	5	300	10

Какие *два* сосуда необходимо взять ученику, чтобы провести исследование? Запишите номера выбранных сосудов.

21. На pT -диаграмме (рис. 8) показано, как изменялись давление и абсолютная тем-

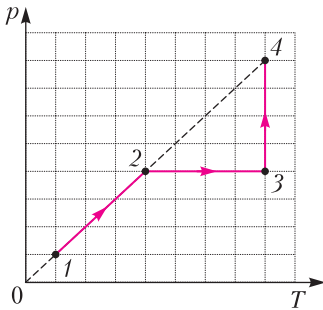


Рис. 8

пература некоторого постоянного количества одноатомного разреженного газа при его переходе из начального состояния 1 в состояние 4. Как при этом изменялись объем газа V и его внутренняя энергия U на каждом из трех участков 1–2, 2–3, 3–4 (увеличивались, уменьшались или же оставались постоянными)? Ответ поясните, указав, какие физические явления и законы Вы использовали для объяснения.

22. Однородный деревянный шар массой $m = 1,6$ кг лежит в сосуде с водой, касаясь дна и не касаясь стенок сосуда, так, что половина шара находится в воде. Определите плотность дерева, если шар давит на дно сосуда с силой $F = 6$ Н. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на шар.

23. По двум горизонтально расположенным параллельным проводящим рельсам с пренебрежимо малым сопротивлением, замкнутым на конденсатор электроемкостью

$C = 100$ мкФ, поступательно и равномерно скользит проводящий стержень (рис. 9, вид сверху). Расстояние между рельсами $l = 1$ м.

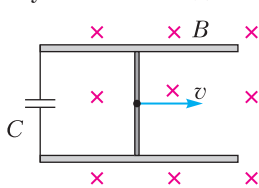


Рис. 9

Рельсы со стержнем находятся в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Энергия электрического поля конденсатора через достаточно большой промежуток времени от начала движения $W = 50$ мкДж. Какова скорость движения стержня? Рельсы закреплены на диэлектрической подложке.

24. Сосуд разделен тонкой перегородкой на две части, отношение объемов которых $\frac{V_2}{V_1} = 3$. В первой и второй частях сосуда находится воздух с относительной влажностью $\phi_1 = 60\%$ и $\phi_2 = 70\%$ соответственно. Какой будет относительная влажность воздуха в сосуде, если перегородку убрать? Считать, что температура воздуха в частях сосуда одинакова и не меняется до и после снятия перегородки.

25. Электрическая цепь состоит из источника тока и реостата. Внутреннее сопротивление источника $r = 2$ Ом. Сопротивление реостата можно изменять непрерывно в пределах от 1 до 5 Ом. Максимальная тепловая мощность тока P_{\max} , выделяемая на реостате, равна 4,5 Вт. Чему равна ЭДС источника?

26. На горизонтальном неподвижном столе лежит доска массой $M = 0,8$ кг (рис. 10).

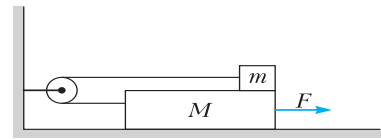


Рис. 10

На доске находится маленький брусок массой $m = 200$ г. Брусок и доска связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, закрепленный на стене (отрезки нити, не лежащие на блоке, горизонтальны). Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0,5$, между столом и доской $\mu_2 = 0,3$. Доску тянут вправо горизонтальной силой \vec{F} . Чему равен модуль этой силы, если модуль ускорения бруска относительно стола $a = 1$ м/с²? Трением в оси блока пренебречь. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на тела. Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Публикацию подготовили
М. Демидова, А. Черноуцан

Новосибирский государственный университет

Физика

Олимпиада «Твой путь в настоящую науку»

Заключительный этап

8 класс

1. Самолет, двигаясь по горизонтали с постоянной скоростью v , сбрасывает бомбу. Пилот услышал звук взрыва через время T после того, как увидел вспышку прямо под самолетом. На какой высоте летел самолет? Скорость звука много меньше скорости света и равна $v_{зв}$. Влиянием воздуха на движение бомбы пренебречь.

2. Из однородной проволоки сделали квадратную рамку со стороной a . Рамку подвесили в поле тяжести на нитке за середину одной из сторон и одну вертикальную сторону рамки удалили (рис. 1). На какое расстоя-

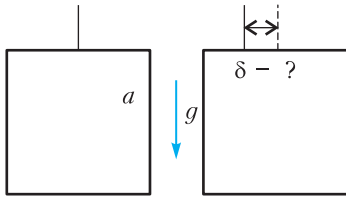


Рис. 1

ние δ нужно сместить точку подвеса, чтобы верхняя и нижняя стороны остались в горизонтальном положении?

3. К потолку прикреплены две последовательно соединенные невесомые пружины с коэффициентами жесткости, различающимися в два раза (рис. 2). С какой скоростью надо перемещать точку A нижней пружины вдоль оси y , чтобы скорость движения точки соединения пружин B равнялась v ?

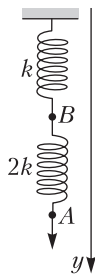


Рис. 2

4. Стрелок пытается попасть из ружья в тележку шириной l , которая с большой скоростью без трения двигается по горизонтальной поверхности, упруго взаимодействуя с вертикальными стенками (рис. 3). Расстояние между стенками L ($L > 2l$). Куда стрелку целиться, чтобы с максимальной

вероятностью попасть в тележку, если время взаимодействия тележки со стенкой соизмеримо со временем ее перемещения между

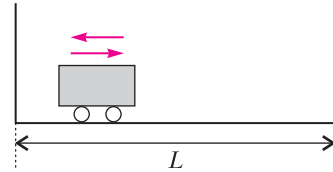


Рис. 3

стенками? Считать, что во время взаимодействия со стенкой тележка неподвижна.

9 класс

1. Шайбу кладут на начало движущейся ленты транспортера с нулевой начальной скоростью (рис. 4). При какой минимальной

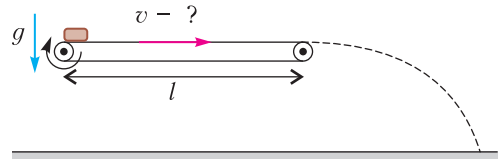


Рис. 4

скорости ленты дальность полета шайбы будет максимальной? Длина ленты l , ускорение свободного падения g , коэффициент трения шайбы о ленту μ .

2. На горке с углом наклона α удерживается небольшая шайба на высоте H (рис. 5). Коэффициент трения $\mu < \text{tg } \alpha$. Шайбу отпускают, она соскальзывает и внизу упруго ударяется о стенку, плоскость которой пер-

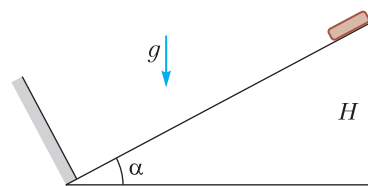


Рис. 5

пендикулярна плоскости горки. После удара шайба скользит вверх, останавливается, опять соскальзывает и т.д. Найдите путь, который пройдет шайба до полной остановки.

3. В вертикальный сосуд постоянного сечения S налили холодные воду плотностью $\rho_в$ и масло. Кроме этого туда опустили ледяной

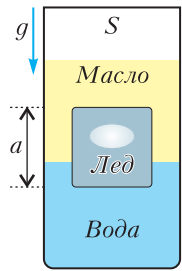


Рис. 6

кубик с длиной ребра a . Вначале ледяной кубик плавал, будучи частично погруженным в воду, причем внутри кубика был заморожен воздушный пузырь (рис. 6). Через некоторое время весь лед растаял и верхний уровень масла сдвинулся на H . Какой объем был у пузыря во льду? Считать, что лед имеет плотность ρ_l (плотность масла меньше, чем плотность льда, которая, в свою очередь, меньше плотности воды) и что масло и вода не смешиваются.

4. Гранату массой m бросили под углом α к горизонту со скоростью v . Известно, что в верхней точке своей траектории она взорвалась и разделилась на два равных осколка, которые в системе отсчета гранаты разлетелись в противоположные стороны по вертикали. Найдите изменение кинетической энергии каждого из осколков сразу после взрыва, если известно, что расстояние между точками падения осколков на землю равно s .

5. На длинном горизонтальном столе стоит большое количество одинаковых сосудов (рис. 7). Сосуды последовательно соедине-

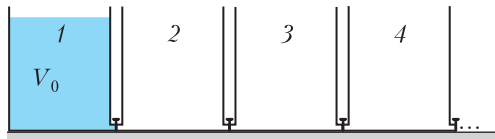


Рис. 7

ны очень тоненькими трубочками, на которых имеются вентили, позволяющие перекрывать их. Трубочки подсоединены к сосуду снизу. Для удобства сосуды пронумерованы. Вначале все вентили перекрываются, в первый сосуд налит объем V_0 воды, а остальные пусты. Вентиль между первым и вторым сосудами открывают, а когда уровни жидкости в сосудах выравниваются, вентиль закрывают. Затем открывают и после выравнивания уровней закрывают вентиль между вторым и третьим сосудами, затем между третьим и четвертым и т.д. Когда доходят до последнего сосуда, процедуру повторяют в обратном направлении: открывают и закрывают вентиль между последним и предпоследним сосудами, затем между предпоследним и предпредпоследним и т.д. до вентиль между первым и вторым. Какой объем воды окажется в первом сосуде?

10 класс

1. В сосуде, герметично закрытом массивным поршнем, находится ν_0 молей газа. Образовалось маленькое отверстие в поршне, и газ стал выходить наружу. После того, как отверстие заделали, сосуд с газом медленно нагрели на $\Delta T = 50\text{K}$ для того, чтобы поршень вернулся в исходное состояние. Сколько молей газа ν_x вышло из сосуда, если начальная температура равнялась $T_0 = 300\text{K}$? Трением поршня о стенку сосуда пренебречь.

2. Тележка прикрепена невесомой пружиной к стене и совершает колебания без трения, почти касаясь двух стен (рис. 8). В какой-то момент пружина оторвалась и тележка стала двигаться от стены к стене, упруго отражаясь от них. Оказалось, что период движения не изменился после отрыва пружины. Какая доля первоначальной энергии колебаний превратилась в тепло в результате отрыва пружины?

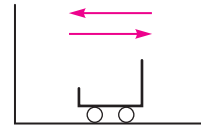
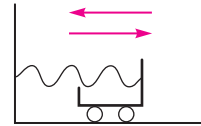


Рис. 8

3. Шар радиусом R и массой M лежит между двух однородных досок длиной l и массой m , опирающихся на пол в одной общей точке под центром шара и расположенных в одной вертикальной плоскости под углом α к вертикали (рис. 9). Концы

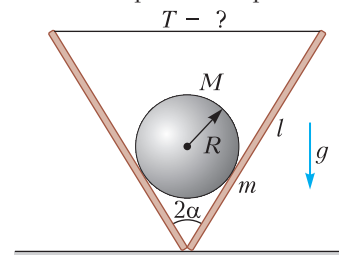


Рис. 9

досок связаны невесомой горизонтальной нитью. Найдите силу натяжения нити, когда система находится в равновесии. Ускорение свободного падения равно g .

4. На горизонтальную шероховатую спицу надеты две одинаковые бусинки с противоположными по знаку зарядами. Расстояние между бусинками L . Какую минимальную кинетическую энергию надо одновременно сообщить каждой из бусинок, чтобы они столкнулись, если максимальное значение силы трения, действующей на каждую из

бусинок, равно $F_{тр}$ и это значение больше, чем сила кулоновского взаимодействия бусинок F в начальном положении?

5. Из однородной проволоки сделали квадратную рамку и подвесили с помощью нити, прикрепив ее к середине одной из сторон (рис. 10). Найдите угол, на который повер-

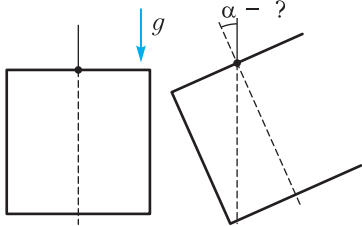


Рис. 10

нется подвешенный остаток рамки, если с помощью ножниц по металлу вырезать боковую сторону рамки.

11 класс

1. Два самолета одновременно стартовали с одного аэродрома и полетели вдоль экватора – один на восток, другой на запад. Один самолет облетел всю Землю и вернулся на аэродром через 40 часов, а другой – через 60 часов. Через сколько часов после взлета самолеты впервые встретились друг с другом, если они летели с постоянными скоростями?

2. Труба стоит вертикально, закрытая сверху поршнем на высоте H от дна. Под поршнем, помимо идеального газа, находятся насыщенный водяной пар и немного воды на дне трубы. Найдите давление насыщенного водяного пара, если при медленном подъеме поршня на H_1 давление под поршнем уменьшилось в два раза относительно начального, а вода при этом испарилась не вся. Температуру газа и пара считать постоянной, объемом воды пренебречь. Начальное давление газа под поршнем было p .

3. Из однородной проволоки сделали квадратную рамку. Получившуюся рамку подвесили с помощью нити, прикрепив ее к середине одной из сторон (рис. 11). Найдите

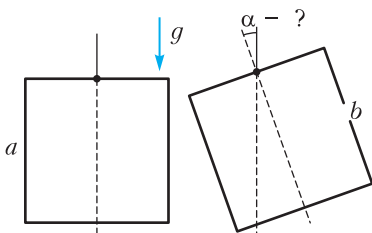


Рис. 11

угол α , на который повернется подвешенный остаток рамки, если с помощью ножниц по металлу удалить кусочек проволоки длиной b ($b < a$) в середине боковой стороны рамки.

4. На двух параллельных проводящих шинах, плоскость которых наклонена к горизонту под углом α , а расстояние между ними равно L_1 , перпендикулярно шинам лежит проводящая перемычка массой m с сопротивлением R . Коэффициент трения между перемычкой и шинами μ ($\mu > \text{tg } \alpha$). Ниже этой перемычки на расстоянии L_2 закреплена другая перемычка параллельно первой, которая соединяет между собой шины. Включается магнитное поле, которое линейно растет со временем по закону

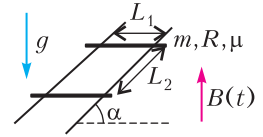


Рис. 12

$B(t) = B_0 t / \tau$. Направление магнитного поля перпендикулярно горизонтальной плоскости и направлено вверх. Ускорение свободного падения равно g . Через какое время перемычка начнет двигаться? Сопротивлением остальных участков цепи, кроме подвижной перемычки, пренебречь.

5. Оцените, на сколько оборотов больше сделает колесо вагона поезда зимой, чем летом, на пути из Москвы до Владивостока, если коэффициент теплового расширения стали $\beta = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

6. **Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). На горизонтальном столе находится цилиндр, на внутреннюю поверхность которого поставлена гиря (рис. 13). Сверху на цилиндре размещают неподвижно деревянный брусок. Если брусок отклонить, он качивается вместе с цилиндром, но не падает.

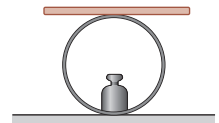


Рис. 13

Если же заменить гирю на более легкую, то в аналогичном эксперименте брусок при небольшом отклонении неизбежно падает на стол. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили В.Боровков, Е.Жданов, С.Лежнин, М.Махмудиан, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Физика

Отборочный этап

Творческие задачи

11 класс

Идеи Громита и разработки Уоллеса

1. Догонялки по правилам (20 баллов)

Уоллес и Громит полюбили игру в догонялки на большом пустыре с ровной поверхностью, правила которой придумал Громит. Один участник предлагал кривую, по которой он хотел бежать, а другой должен был изобрести правила погони, обеспечивающие первому такое движение. Затем они бежали в соответствии с предложенными правилами, причем первый отмечал траекторию своего движения камешками. После завершения погони участники поднимались на соседнее с пустырем здание и любовались получившейся кривой. В одном из вариантов предложенные Громитом правила были таковы: в стартовой позиции участники находились на расстоянии $L_0 = 100$ м и одновременно начинали бежать с равными по величине скоростями $v_1 = v_2 = 4$ м/с. Уоллес всегда бежал строго по направлению к Громиту, а Громит убежал в направлении, составляющим всегда один и тот же угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением от Уоллеса.

Определите с ошибкой не более секунды время, которое потребуется Уоллесу, чтобы догнать Громита. Найдите закон изменения угловой скорости вращения участников погони. На какой угол повернутся векторы скоростей участников погони от ее начала до момента времени, когда расстояние между ними уменьшится до $L = 25$ м? На каких расстояниях от своих точек старта окажутся Уоллес и Громит к окончанию погони (при вычислении этих расстояний размерами участников погони можно пренебречь)? Изобразите примерно кривую, которую образуют оставленные Уоллесом камушки.

Указание:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos \omega t \cdot dt = \frac{1}{1 + \omega^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sin \omega t \cdot dt = \frac{\omega}{1 + \omega^2}.$$

2. Эксперимент на неизвестной планете (20 баллов)

Однажды в ходе сканирования неба в поисках интересной информации Громит наткнулся на передачу, в которой было рассказано об эксперименте, поставленном неизвестными учеными. К счастью, все числовые данные в работе были выражены через известные константы (заряд и массу электрона, скорость света и постоянную Планка), поэтому Громиту удалось перевести их в «земные» единицы. Согласно полученной информации, эти ученые создали в вакуумной камере практически однородное магнитное поле, перпендикулярное полю тяжести, которое тоже можно считать однородным. В этой камере производились выстрелы сферическими наночастицами с удельным зарядом $\frac{q}{m} = +157,08$ Кл/кг в направлении горизонтальной оси, перпендикулярной обоим полям. Величина проекции начальной скорости на эту ось изменялась, и для каждого ее значения высота начальной точки над горизонтальным «полом» камеры подбиралась так, чтобы частица (если это возможно) попадала на «пол», причем дальность ее полета оказывалась максимально возможной. По полученным данным Громит построил график зависимости максимально возможной дальности полета L_{\max} от величины v_0 (рис. 1). Он особо отметил, что точка излома на графике соответствовала $v_0 \approx +39,64$ м/с. Познакомившись с графиком, Уоллес заметил, что интересно было бы узнать, каково на планете экспериментаторов ускорение свободного падения.

Получите аналитическую формулу, описывающую график Громита с достаточной

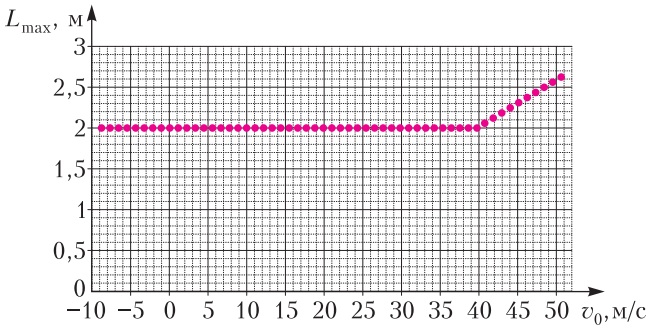


Рис. 1

точностью. Найдите индукцию магнитного поля B и ускорение свободного падения g в камере.

3. Такие разные заземления (17 баллов)

В одном из устройств Уоллеса использовался воздушный конденсатор из трех concentric проводящих сфер с радиусами a , $2a$ и $3a$ (рис. 2). Внешняя и внутренняя

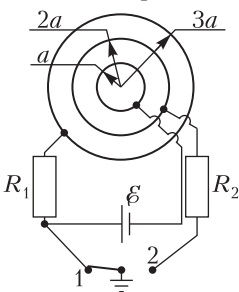


Рис. 2

(с помощью тонкого изолированного провода, продетого через маленькие отверстия во внешней и средней сферах) сферы подключались к источнику с ЭДС \mathcal{E} и внешнюю сферу можно было заземлять с помощью переключателя, который для этого нужно было перевести в положение 1. «А если создать возможность заземления и средней сферы?» – спросил Громит. Подумав, Уоллес добавил переключателю контакт 2, соединенный со средней сферой тонким изолированным проводом без контакта с внешней. В одном из опытов переключатель долго находился в положении 1 при незаряженной средней сфере, а затем Уоллес перевел его в положение 2.

Какой заряд был у внешней сферы до переключения? Какими стали заряды всех трех сфер после переключения? Какое количество теплоты выделилось в схеме после переключения?

Известны $a = 11$ см, $\mathcal{E} = 20$ В, электрическая постоянная $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

4. Ультракороткий импульс (18 баллов)

Для изучения динамики электронных состояний в сложных молекулах биомаркеров Уоллесу нужно было фиксировать длитель-

ность процессов в диапазоне сотен аттосекунд. «Для этого необходимо научиться генерировать электромагнитные импульсы еще меньшей длительности», – рассуждал он в присутствии Громита. Подумав, он продолжил: «Любой импульс, в котором зависимость изменяющейся величины от времени описывается функцией $f(t)$, можно представить как сумму гармонических колебаний с разными частотами (гармоник). Но в этой сумме нужно учитывать не только амплитуды гармоник, а еще и их фазовые сдвиги, и это удобнее делать с помощью метода комплексных амплитуд, в рамках которого разложение сигнала на гармоники записывается в виде интеграла $f(t) = \int a(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$, где интегрирование проводится по всем значениям частот в спектре сигнала». «Получается, что для создания коротких импульсов нужен набор гармоник со спектром в виде широкой почти равномерной гребенки», – подсказал Громит. Отметим, что из-за строения голосовых связок Громит не мог говорить по-человечески, но он в совершенстве владел телепатией.

Проверьте правильность подсказки Громита. Для этого изучите сигнал с таким гребенчатым спектром, состоящим из N одинаковых зубцов. В первом зубце амплитуда гармоник $a(\omega) = A$ в интервале частот от $\frac{\pi}{T}$ до $\frac{2\pi}{T}$, во втором – от $\frac{3\pi}{T}$ до $\frac{4\pi}{T}$ и так далее (рис. 3).

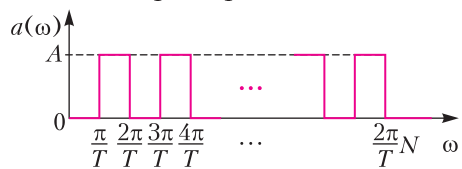


Рис. 3

Оцените длительность импульсов в этом сигнале, если $T = 10^{-14}$ с, а $N = 2000$.

Но как создать такой спектр? При таких масштабах времен излучение будет обладать квантовыми свойствами. Получается, нужно много фотонов с разными энергиями, и при этом они должны быть тщательно синхронизированы друг с другом по фазе своих волн вероятности. «Но фотону не обязательно находиться в состоянии с одной определенной энергией», – вновь вступил в «разговор»

Громит. «Он может находиться в состоянии квантовой суперпозиции, при которой фотон одновременно находится в состояниях с разными энергиями (а значит, и с разными частотами), которые автоматически синхронизированы друг с другом. Для такого состояния измерение энергии фотона выдавало бы разные значения с разными вероятностями. А частотный спектр такого фотона в точности соответствовал бы нужной нам гребенке», – подытожил он. Уоллес был очень взволнован: «Как можно такое сделать?» Громит задумался: «Очень тяжело, но можно попробовать. Согласно квантовой теории, фотоны рождаются при переходе атомных электронов из возбужденного состояния (с избыточной энергией) в основное (с минимальной энергией), и при этом получается фотон с почти точно определенной энергией. Сами электроны связаны в атоме и для их отрыва от атома нужна довольно большая энергия. К счастью для нас, электроны – тоже квантовые частицы, и они могут совершать туннельные переходы, т.е. преодолевать слишком высокие энергетические барьеры. Получается так: если поместить атом в поле волны мощного инфракрасного лазера, то длина волны излучения будет намного больше размеров атома, и можно считать, что атомный электрон, попавший в возбужденное состояние, будет находиться в гармоническом электрическом поле $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \sin \Omega t$. С точки зрения электрона, это поле изменяется очень медленно, и в некоторой части периода оно вытаскивает электрон из атома и может заставить его туннелировать наружу – так, что он окажется снаружи атома. Сначала поле будет разгонять электрон, заставляя его удаляться от атома, но затем оно поменяет знак, остановит электрон и направит его обратно к атому. При удачном стечении обстоятельств (а атомов в волну попадает много, и для некоторых из них обстоятельства могут сложиться удачно) он наберет энергию, ударит по атому, снова попадет в него и после этого совершит переход в основное состояние. Теперь он должен истратить набранную за время пребывания за пределами атома энергию на излучение фотонов. И тут возникает вероятность, что высветится он не многими фотонами, а одним фотоном в нужном нам состоянии квантовой суперпозиции. И это может происходить на каждом периоде инф-

ракрасного излучения, так что мы получим последовательность ультракоротких импульсов излучения!»

Проверьте одно из утверждений Громита. Для этого изучите движение электрона с зарядом $-e$ и массой m в электрическом поле волны. Считайте, что после туннелирования он оказался с почти нулевой скоростью в некоторой точке за пределами атома, где на него действует только поле волны. Пользуясь законами ньютоновской механики, оцените, с какой максимальной энергией электрон может вернуться в эту точку, двигаясь к атому (движение считайте одномерным).

Указание: перед решением задачи разберите (или вспомните), как работает метод комплексных амплитуд и что такое квантовые свойства фотонов.

10 класс (избранные задачи)

1. Диффузия водорода (17 баллов)

Жесткий вертикальный цилиндрический сосуд с гладкими стенками разделен на две части горизонтальным поршнем. В некоторый момент времени поршень покоился, и при этом под ним находилось 3 моля азота, над ним – 1 моль водорода, а расстояния от поршня до дна и до потолка сосуда были одинаковы и равны $h = 36$ см. Однако в дальнейшем поршень плавно перемещается из-за того, что молекулы водорода способны медленно диффундировать сквозь него (диффузия молекул азота пренебрежимо мала).

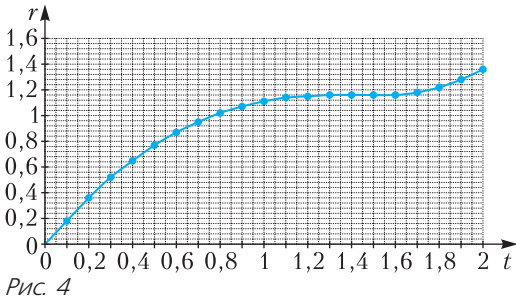
Куда и на какое расстояние сместится поршень за очень большое время? Температура содержимого сосуда все это время поддерживается постоянной.

2. График полета (17 баллов)

Из очень большой по размерам камеры с горизонтальным полом, расположенной на поверхности Земли, откачали почти весь воздух. В этой камере был произведен выстрел шариком из пневматического пистолета. С помощью лазерного дальномера был снят график зависимости величины перемещения шарика от стартовой точки от прошедшего времени (рис. 4). К сожалению, информация об использованных на нем масштабных единицах времени и длины оказалась утраченной.

Определите по графику, под каким углом к горизонту был произведен выстрел.

Впоследствии появилась новая информация о том, что по оси абсцисс отложено время



в секундах, а ускорение свободного падения в камере равно $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$.

Определите величину начальной скорости шарика. Постарайтесь обеспечить наиболее высокую (для имеющихся данных) точность результата. Найдите величину перемещения этого шарика к тому моменту, когда его скорость окажется перпендикулярна вектору перемещения. Оцените точность полученных результатов (т.е. определите величину возможной ошибки).

7–9 классы (избранные задачи)

1. Топка для снега (15 баллов)

Термос на половину своего объема заполнен мокрым снегом (т.е. смесью жидкой воды и ледяных кристаллов, находящейся в равновесии при нормальном атмосферном давлении). Туда очень медленно подают кипяток с постоянным расходом – за одинаковые промежутки времени в термос поступают одинаковые объемы кипятка. Поначалу температура содержимого термоса не изменялась, но спустя время $\tau_1 = 24 \text{ с}$ после начала подачи кипятка она начала расти, причем в этот момент термос был заполнен на 70% своего объема.

Через какое время после этого термос будет полностью заполнен? Какую температуру будет иметь содержимое термоса в этот момент времени? Считать точными следующие данные: плотность воды $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$, плотность льда $\rho = 0,9 \text{ г/см}^3$, удельную теплоемкость воды $c = 4,2 \text{ Дж/(г} \cdot \text{°C)}$, теплоту плавления льда $\lambda = 336 \text{ Дж/г}$.

2. График полета (17 баллов)

Из пружинной пушки, установленной на поверхности Луны, произвели выстрел маленьким камешком под углом к горизонту. Наблюдательная система фиксировала свет, отраженный от камешка, и по смещению его частоты измеряла радиальную компоненту

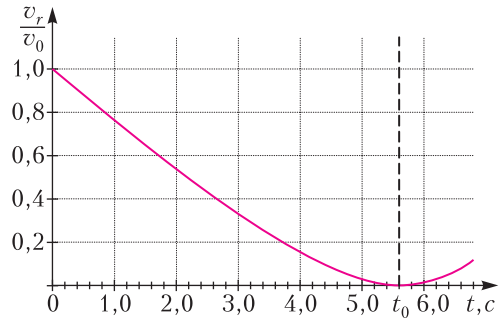


Рис. 5

скорости камешка v_r (т.е. проекцию вектора скорости на его радиус-вектор относительно точки старта). На графике (рис. 5) показана зависимость ее отношения к величине начальной скорости камешка от времени, прошедшего с момента выстрела. В момент времени $t_0 \approx 5,657 \text{ с}$ скорость v_r обращается в ноль.

Под каким углом к горизонту был произведен выстрел? Найдите величину начальной скорости. Ускорение свободного падения на Луне считать равным $g = 1,62 \text{ м/с}^2$. Атмосферы на Луне нет.

Заключительный этап

11 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности неподвижно закреплено кольцо, к трем точкам которого прикреплены концы трех упругих резинок, вторые концы резинок прикреплены к одной небольшой шайбе массой $m = 250 \text{ г}$. Длина всех трех резинок в ненапряженном состоянии одинакова и в точности равна радиусу кольца. В положении равновесия шайбы две резинки с одинаковыми коэффициентами жесткости $k = 1 \text{ Н/м}$ взаимно перпендикулярны, а третья с $k' = 8 \text{ Н/м}$ ориентирована вдоль биссектрисы угла между ними. Шайбу отвели на расстояние $s = 1,2 \text{ см}$ от этого положения и отпустили без начальной скорости. Оказалось, что шайба поехала по прямой и вернулась в положение равновесия за время t .

Найдите все возможные значения t и скорости шайбы в этот момент времени. Отметим, что s намного меньше радиуса кольца.

2. В цилиндрическом сосуде с гладкими теплоизолирующими вертикальными стенками под горизонтальным теплоизолирующим поршнем находится воздух. Изначально поршень пребывает в равновесии и расстояние между нижней поверхностью порш-

ня и дном сосуда равно $h_0 = 30$ см. На поршень аккуратно поставили небольшую гирьку, и поршень начал опускаться. В тот момент, когда он достиг наинизшего положения на высоте $h_1 = 29$ см над дном сосуда, гирьку так же аккуратно убрали.

До какой максимальной высоты h_2 поднимется поршень после этого? Вязкостью воздуха можно пренебречь, воздух можно считать двухатомным идеальным газом, происходящие с ним процессы – квазиравновесными, а изменениями внешнего атмосферного давления можно пренебречь.

Указание: при $|\alpha| \leq 1$ и $\varepsilon \ll 1$ с ошибкой порядка $|\varepsilon|^3$ справедлива приближенная формула $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}\varepsilon^2$.

3. В установке «рельсотрон» в качестве «снаряда» используется металлическая перемычка, которая может скользить, двигаясь поступательно, по двум очень длинным гладким горизонтальным параллельным рельсам (рис. 6). Сначала перемычку удерживают

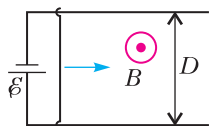


Рис. 6

вблизи одной пары их концов, к которым подключают источник постоянного напряжения. В области пространства, в которой проходят рельсы, включают вертикальное постоянное однородное магнитное поле и перемычку аккуратно освобождают. В первой серии опытов рельсы поддерживались в сверх-

проводящем состоянии, а суммарное сопротивление контура, по которому протекал ток (состоящее из сопротивления перемычки, внутреннего сопротивления источника и сопротивления контактов), было постоянно и равно $R_0 = 0,8$ Ом. При этом оказалось, что перемычка разгоняется до 95% от максимальной возможной (для этой установки) скорости, пройдя путь $s_0 = 80$ м. Во второй серии опытов сверхпроводящие рельсы заменили на рельсы с погонным сопротивлением $\rho = 5$ мОм/м.

Какой путь теперь потребуется перемычке для достижения той же скорости? Считайте, что сила сопротивления воздуха отсутствует, сумма сопротивлений перемычки, внутреннего сопротивления источника и сопротивления контактов не изменилась, длина начального участка рельсов (от края до линии старта перемычки) пренебрежимо мала по сравнению с s_0 .

4. При помощи тонкой линзы на экране создано изображение пламени свечи, расположенного на главной оптической оси линзы. При этом поперечное увеличение изображения было $|\Gamma| = 0,4$. Не двигая свечу, линзу переместили на расстояние $s = 70$ см вдоль главной оптической оси. После перемещения и подбора положения экрана поперечное увеличение стало $|\Gamma| = 2,5$.

Найдите оптическую силу линзы.

Публикацию подготовил К.Парфенов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №9)

1. 4.

Если заменить 5 на -5 , то результат будет больше 1, так как -5 возводится в четную степень. Если заменить 1 на -1 , 2 на -2 или 3 на -3 , то опять же получится результат больше 1, так как 5 возводится в положительную степень.

Если же заменить 4 на -4 , то получится, что -4 возводится в нечетную степень, а поэтому 5 возводится в отрицательную степень, и тогда результат будет меньше 1.

2. 7 рыб.

Оценка. При дележе на четверых не могло оказаться двоих, кому досталось по одной рыбе, поскольку массы всех рыб различны. Следова-

но, было поймано не меньше чем $1 + 2 + 2 + 2 = 7$ рыб.

Пример. Пусть массы пойманных рыб 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 кг. Тогда первый раз юнга мог разделить их на четыре равные по массе кучки так: $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$. А после того как матросы отдали ему килограммовую рыбу, оставшихся они могли поделить на троих так: $2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$.

3. 2101 см^2 .

Пусть по каждой стороне квадрата выкладывали n плиток, а оставшийся зазор имеет длину k см. Тогда площадь того, что замостили, равна $(20n)^2 \text{ см}^2$, а площадь всего куса стены равна $(20n + k)^2 \text{ см}^2$. Значит, площадь оставшейся части $201 = (20n + k)^2 - (20n)^2 = k(40n + k)$, где первый множитель меньше второго.

Существует только два варианта представить 201 в виде произведения двух натуральных множителей: $201 = 1 \cdot 201 = 3 \cdot 67$. Но второй вариант не подходит, так как уравнение $40n + 3 = 67$ не имеет натуральных решений. Следовательно, $k = 1$, тогда $n = 5$. Значит, длина куска стены равна $20 \cdot 5 + 1 = 101$ (см), поэтому более трех новых плиток в один ряд не поместится. Таким образом, площадь оставшейся части будет равна $101^2 - (3 \cdot 30)^2 = 11 \cdot 191 = 2101 \text{ см}^2$.

4. Не могло.

Рассмотрим произвольную вершину куба и три клетки, примыкающие к ней. Заметим, что даже если какие-то две из них накрыты одной полоской, то третья клетка накрыта другой полоской. Таким образом, какая-то полоска накрывает ровно одну из угловых клеток. Эта полоска расположена вдоль ребра куба, и через это ребро не могли перегнуть никакую полоску.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Время подъема $t_0 = \frac{v_{0y}}{g} = 1,5$ с. Скорость через время $t = 2$ с равна $v_y = v_{0y} - gt = -5$ м/с. Пройденный путь (заштрихованная площадь на рисунке 1)

$$s = \frac{v_{0y}t_0}{2} + \frac{|v_y|(t - t_0)}{2} = 12,5 \text{ м.}$$

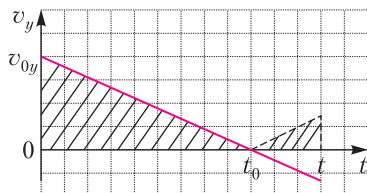


Рис. 1

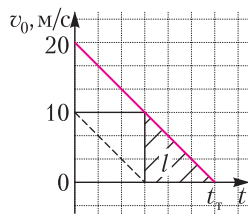


Рис. 2

2. Из графика (рис. 2) видно, что выделенная площадь ($l = 1$ км) в 4 раза меньше площади большого треугольника (закон нечетных чисел Галилея), равной всему тормозному пути. Тогда

$$s = \frac{v_0 t_\tau}{2}, t_\tau = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \cdot 4l}{v_0} = 400 \text{ с.}$$

3. Площадь квадрата со сторонами v_0 и $T/2$ равна R^2 , что соответствует пути $l = v_0 \frac{T}{2}$, а площадь полукруга, равная $\frac{\pi R^2}{2}$, соответствует всему пройденному пути s . Тогда

$$\frac{s}{l} = \frac{\pi R^2}{2R^2} = \frac{\pi}{2}, s = \frac{\pi l}{2} = \frac{\pi v_0 T}{2 \cdot 2}, v_{\text{ср}} = \frac{s}{T} = \frac{\pi v_0}{4}.$$

4. Максимальная скорость тела равна площади большей трапеции (см. рис. 2 в условии):

$$v_{\text{max}} = \frac{(4+2)}{2} \text{ с} \cdot 3 \text{ м/с}^2 = 9 \text{ м/с.}$$

5. Если построить график зависимости обратной скорости $\frac{1}{v}$ от x (рис. 3), то площадь под ним будет пропорциональна времени t . Тогда

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1+ks}{v_0} \right) s = \frac{s}{v_0} \left(1 + \frac{ks}{2} \right) = 75 \text{ с.}$$

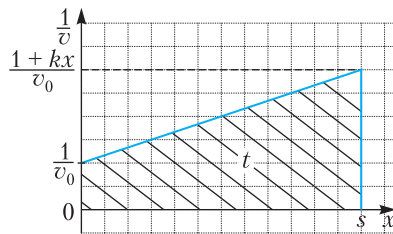


Рис. 3

6. По второму закону Ньютона $a_x = -\frac{\alpha}{m} v_x$. Домножив обе части уравнения на очень малое Δt , получим $a_x \Delta t = -\frac{\alpha}{m} v_x \Delta t$, или $\Delta v_x = -\frac{\alpha}{m} \Delta x$. За достаточно большое время торможения $\Delta v_x = 0 - v_0$ и $\Delta x = s$. В итоге $s = \frac{m}{\alpha} v_0$.

7. Сколь угодно малый элемент стержня длиной dx на расстоянии x от оси вращения имеет массу $dm = \frac{m}{l} dx$. Кинетическая энергия этого элемента $dE_k = \frac{dm v^2}{2} = \frac{dm (\omega x)^2}{2}$. Полная энергия

$$E_k = \int_0^l \frac{m \omega^2 x^2}{l \cdot 2} dx = \frac{m \omega^2}{2l} \int_0^l x^2 dx = \frac{m \omega^2 l^2}{6}.$$

8. При максимальном отклонении от положения равновесия энергия шарика равна потенциальной энергии пружины. По графику зависимости силы упругости от деформации ($F_x = -kx$) ее

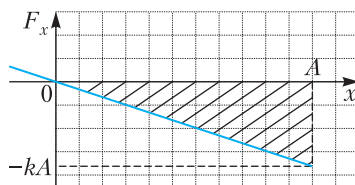


Рис. 4

можно найти как работу этой силы, взятой с обратным знаком (рис. 4):

$$E_{\text{п}} = -A_{\text{упр}} = -\left(\frac{-kA \cdot A}{2} \right) = \frac{kA^2}{2}.$$

9. На рисунке 5 показана pV -диаграмма процесса. Так как точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, то $p_0 V_0 = \frac{p_0}{n} V_1$, откуда $V_1 = n V_0$ и $\Delta V = V_1 - V_0 =$

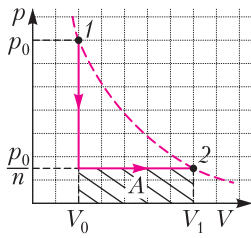


Рис. 5

$= (n - 1)V_0$. Газ совершил работу

$$A = \frac{p_0}{n} \Delta V = \frac{n-1}{n} p_0 V_0 = \frac{n-1}{n} \nu RT.$$

10. При медленном сжатии процесс можно считать изотермическим: теплообмен обеспечивает равенство температур газа и окружающей среды. Если процесс протекает достаточно быстро, теплообмен с окружающей средой практически отсутствует и процесс близок к адиабатному. Во втором случае

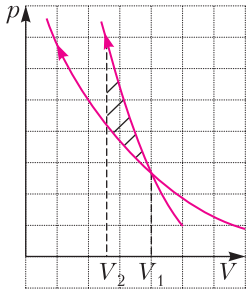


Рис. 6

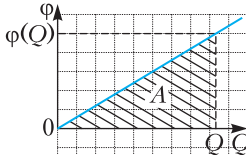


Рис. 7

совершаемая работа больше, чем в первом, на величину, равную выделенной на графике (рис. 6) площади.

11. Потенциал электростатического поля пропорционален величине создающего это поле заряда (рис. 7). Работа по последовательному переносу «долек» заряда из бесконечности на проводник, равная запасаемой им потенциальной энергии, будет заштрихованной на графике площадью:

$$A = W_{\text{и}} = \frac{1}{2} \Phi(Q) \cdot Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

12. За сколь угодно малый интервал времени Δt ток в контуре равен $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\Delta\Phi/\Delta t}{R}$, а переносимый заряд $\Delta q = I\Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{R}$. Просуммировав эти равенства за все время процесса, получим

$$q = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} = -\frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Микропыты

Свяжем систему координат xy с сечением воды вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения (рис. 8). На элемент воды массой Δm в точке (x, y) действуют две силы, создающие центростремительное ускорение a , причем $\text{tg} \varphi = \frac{\Delta m a}{\Delta m g} = \frac{\omega^2 x}{g}$, в то время как $\text{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$.

Отсюда $dy = \frac{\omega^2}{g} x dx$. Интегрируя это уравнение (с учетом $y(0) = 0$), получим искомую зави-

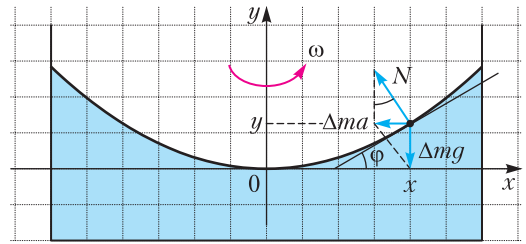


Рис. 8

симость: $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$. Итак, форма воронки – параболоид вращения.

Зонгоны

4. Воспользуемся предложением 2. Если многоугольник можно разрезать на выпуклые центрально симметричные многоугольники, то его можно разрезать и на параллелограммы. Поэтому данный многоугольник – зонгон.

5. С одной стороны, согласно предложению 2, разбиение на ромбы возможно только при условии, что $a_1 = a_4, a_2 = a_5$ и $a_3 = a_6$. С другой стороны, если это условие выполняется, то данный шестиугольник допускает каноническое разбиение, изображенное на рисунке 9.

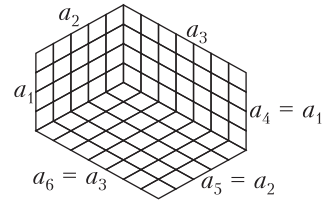


Рис. 9

Для подсчета ромбов фиксированной ориентации достаточно применить одну из тех идей, которые использовались при решении задачи 1. Ответом будут три числа: $a_1 a_2, a_2 a_3$ и $a_1 a_3$.

6. Рассмотрим некоторую сторону многоугольника. Будем считать ее вертикальной. Построим цепочку параллелограммов, в которой каждый следующий находится правее предыдущего и примыкает к нему по вертикальной стороне. Цепочка начинается на левой стороне многоугольника, а кончается на правой. Она обязана пересекаться с любой аналогичной цепочкой, соединяющей горизонтальные (верхнюю и нижнюю) стороны многоугольника. Общий элемент таких цепочек – прямоугольник. Каждой паре перпендикулярных направлений сторон многоугольника соответствует по крайней мере один такой прямоугольник.

Далее можно считать, что параллелограммы примыкают друг к другу целыми сторонами. В противном случае можно произвести дополнительное разрезание – параллелограмм Π режется на более мелкие, стороны которых параллельны

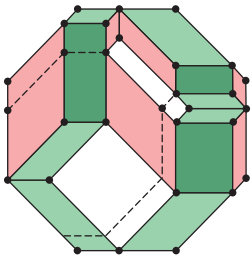


Рис. 10

сторонам Π ; в частности, все прямоугольники разрежутся на более мелкие и их суммарная площадь не изменится (на рисунке 10 дополнительные разрезы изображены штриховой линией). Теперь каждой паре вертикальной и горизонтальной цепочек соответствует ровно один прямоугольник (поскольку по прямоугольнику цепочки однозначно восстанавливаются), и его площадь равна произведению отрезков сторон многоугольника, породивших эти цепочки. Поэтому общая площадь вертикально-горизонтальных прямоугольников равна a^2 . То же верно для других пар перпендикулярных направлений сторон $4k$ -угольника. Всего получаем не менее k прямоугольников с суммой площадей ka^2 .

7. Отметим углы параллелограммов, являющиеся частью углов многоугольника. Пусть в многоугольнике n сторон. Тогда сумма отмеченных углов равна $180^\circ(n-2)$. К каждой стороне многоугольника примыкают стороной по два отмеченных угла (рис. 11), их сумма, очевидно, не

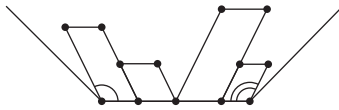


Рис. 11

менее 180° . Просуммировав такие пары по всем сторонам, получим не менее $180^\circ \cdot n$, т.е. по крайней мере на 360° больше, чем при подсчете другим способом. Избыток возникает за счет того, что некоторые углы посчитаны дважды, а именно те, которые примыкают сразу к двум сторонам. Поскольку каждый такой угол меньше 180° , то таких углов не менее трех. Но вершины таких углов как раз и являются хорошими вершинами многоугольника.

8. Для каждой фигуры, параллелограмма или треугольника, рассмотрим все вершины фигур на границе. Для каждой фигуры проведем между соседними точками на границе векторы так, чтобы их направление соответствовало обходу границы фигуры против часовой стрелки (рис. 12).

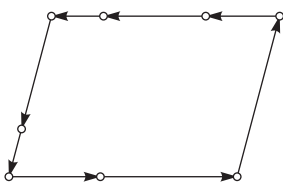


Рис. 12

Рассмотрим произвольную прямую l и все векторы, параллельные ей. Сумма этих векторов равна нулю. Действительно, к каждой линии разреза, параллельной l , примыкают наборы противоположных векторов. Если l параллельна какому-то сторонам 100-угольника, то сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам 100-угольника, также равна нулю, так как они будут направлены в противоположные стороны и равны по длине. С другой стороны, в каждом параллелограмме сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам, равна нулю. Следовательно, и в двух треугольниках сумма всех векторов, параллельных l , также будет нулевой. Выберем в качестве l прямую, параллельную какой-нибудь из сторон первого треугольника. Получим, что набор векторов второго треугольника, параллельных l , — это векторы, противоположные векторам первого треугольника. Аналогично для двух других сторон. Поэтому для каждой стороны первого треугольника существует параллельная и равная ей по длине сторона второго треугольника. Следовательно, треугольники равны.

9. Разрежем данный многоугольник на ромбы со стороной 1. Выберем одну полоску де Брёйна, которая соединяет пару противоположных сторон. Она состоит из 179 ромбов с углами от 1 до 179 градусов. Поэтому ее площадь будет равна

$$S = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 179^\circ.$$

Всего есть 180 полосок площади S каждая, причем объединение всех этих полосок покрывает данный многоугольник дважды. Значит, площадь многоугольника равна $90S$.

10. Разобьем данный 100-угольник на параллелограммы, как это было сделано в доказательстве предложения 2. Тогда общее число параллелограммов будет равно $100 \cdot 99/2 = 50 \cdot 99$, а площадь каждого из них не меньше 1. Значит, площадь данного 100-угольника не меньше $50 \cdot 99$.

11. Решение будет опубликовано позже вместе с решениями остальных задач Конкурса имени А.П.Савина.

12. Обозначим n последовательных сторон данного $2n$ -угольника в зависимости от цвета буквами b_i или w_i ($1 \leq i \leq n$), противоположные им стороны обозначим \tilde{b}_i или \tilde{w}_i соответственно (рис. 13). Пусть S_W и S_B — площади многоугольников W и B . Посмотрим, что произойдет с разностью $S_W - S_B$, если одну белую сторону, например w_1 , перекрасить в черный цвет. Раскрасим ромбы зоны $Z(w_1)$ в два цвета в зависимости от того, какой цвет имеют стороны многоугольника, параллельные сторонам ромбов. Площади в зависимости от цвета ромбов обозначим W_{i1} или B_{i1} . Тогда при перекрашивании стороны w_1 в черный цвет к S_B добавятся все площади b_{i1} (рис. 14, а), а

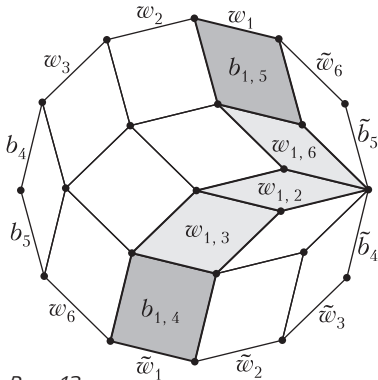


Рис. 13

из S_W вычтутся все площади w_{i1} (рис. 14,б). Поэтому разность $S_W - S_B$ уменьшится на площадь зоны $Z(w_1)$. Так как данный многоугольник правильный, то все его зоны имеют равные площади. Поэтому при перекрашивании пары черных отрезков в белый цвет разность $S_W - S_B$ останется прежней.

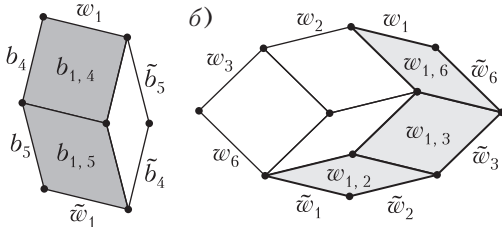


Рис. 14

13. Пусть в графе есть цикл и пусть он проходит по горизонтальному отрезку a_1 . Возьмем ромб, примыкающий к стороне a_1 , и отметим в нем параллельную сторону a_2 . Возьмем ромб, примыкающий к стороне a_2 , и отметим в нем параллельную сторону a_3 . И так далее. Такую же цепочку ромбов можно построить и в другом направлении. В итоге получится последовательность из ромбов, которая рассекает наш шестиугольник. Цикл должен пересечь эту полосу, проходя в разных направлениях, что невозможно.

14. Введем систему координат так, чтобы новая прямая была осью OY . Рассмотрим самую левую точку пересечения нескольких прямых.

Теперь посмотрим на лучи этих прямых, идущие от этой точки пересечения влево. Выберем какие-нибудь два соседних из них (рис. 15,а). Если через точку проходят всего две прямые и одна из них параллельна OY , то посмотрим на ее верхний луч (рис. 15,б). Заметим, что на этих лучах нет точек пересечения с другими прямыми (иначе бы нашлась точка пересечения левее нашей, либо с такой же координатой по OX , но выше). Значит, этот угол образован двумя лучами, т. е. все его точки закрашены.

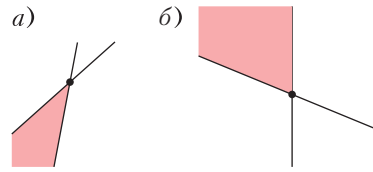


Рис. 15

Понятно, что этот угол уходит на бесконечность влево, поэтому, как бы ни была расположена ось OY , где-то слева от нее будут закрашенные точки. Аналогичные рассуждения можно проделать, рассмотрев самую верхнюю из самых правых точек пересечения прямых. Таким образом, по обе стороны от прямой OY найдутся закрашенные точки.

15. б) Разобьем каждую грань данного многогранника на параллелограммы. Каждое ребро многогранника определяет некий набор параллельных сторон и тем самым некий набор параллелограммов, который мы назовем зоной. Каждый параллелограмм определяет две зоны, идущие в разных направлениях по поверхности многогранника. Эти две зоны должны повторно пересекаться по другому параллелограмму, который мы назовем парным по отношению к первому.

Основной и парный параллелограммы равны и расположены в параллельных плоскостях, поскольку их стороны попарно равны и параллельны. Кроме того, плоскость любого параллелограмма не может быть параллельна плоскости более чем одного параллелограмма, поскольку в противном случае многогранник не был бы выпуклым. Остальные параллелограммы из разбиения той же грани F будут иметь парные параллелограммы, лежащие в одной плоскости, а значит, парные параллелограммы будут складываться в грань, равную и параллельную F (парную к F). Каждые две грани будут иметь точку симметрии, причем для соседних граней эти центры будут совпадать, потому что они должны быть центрами симметрии общего ребра. Так как, переходя от грани к соседней грани, мы можем пройти по всем граням данного многогранника, то центр симметрии будет общим для всех граней, а значит, он будет центром всего многогранника.

16. С одной стороны, потребуется не меньше $2n + 1$ шагов. Действительно, из симметричности ситуации следует, что на первом шаге можно поменять местами любые два шара. Допустим, что это были шары с номерами 1 и 2. После этого потребуется по крайней мере $2n$ шагов, чтобы переместить на места шары с номерами 3. С другой стороны, $2n + 1$ шагов достаточно, поскольку после перемещения шаров с номерами 3 на свои места все остальные шары также окажутся на своих местах.

17. Решение приведено в [3].

Четырехугольник с тремя равными сторонами

1. а) $\angle A = \angle D = 100^\circ$.

Указание. Это равнобокая трапеция.

б) $\angle A = 100^\circ, \angle D = 80^\circ$.

Указание. Это ромб.

в) $\angle A = 140^\circ, \angle D = 80^\circ$.

Указание. Треугольник ABC – равносторонний, треугольник ACD – равнобедренный.

г) $\angle A = 75^\circ, \angle D = 45^\circ$.

Указание. Отметим точку K такую, что $ABCK$ – квадрат. Тогда треугольник CKD – равносторонний, треугольник AKD – равнобедренный.

д) $\angle A = 15^\circ, \angle D = 225^\circ$.

Указание такое же, как в пункте г).

е) $\angle A = 85^\circ, \angle D = 35^\circ$.

Указание. Отметим точку K такую, что $ABCK$ – ромб. Тогда треугольник CKD – равносторонний, треугольник AKD – равнобедренный. (Сравните с указанием к пункту г).)

ё) $\angle A = 54^\circ, \angle D = 30^\circ$.

Указание. Отметим точки K и L такие, что $ABCKL$ – правильный пятиугольник. Тогда треугольник CKD – равносторонний.

2. $\angle C = 50^\circ, \angle D = 140^\circ$ или $\angle C = 60^\circ, \angle D = 130^\circ$.

Указание. Проведите отрезок BE так, что точка E лежит на AD , а угол ABE равен 40° . Докажите, что треугольник BCE равносторонний.

3. 30° .

Указание. Из вершины C опустите перпендикуляр CM на прямую AD , а из вершины B – перпендикуляр BN на прямую AC . Докажите, что треугольники ANB, CNB и CMD равны.

4. 30° .

Указание. Пусть O, K, L – середины отрезков BC, AC и BD соответственно. Докажите, что треугольники OMK и OML равносторонние.

5. Указание. Докажите, что $BI \perp CN, CI \perp BN$.

ЕГЭ по физике 2024 года

Ответы к заданиям 1–20

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	0	11	1,5
2	63	12	0,15
3	3	13	8
4	60	14	15
5	24	15	12
6	24	16	38
7	3	17	22
8	80	18	25
9	24	19	$3,0 \pm 0,2$
10	23	20	13

Решения задач 21–26

21. 1) Объем газа на участке 1–2 не изменялся, на участке 2–3 увеличивался, на участке 3–4 уменьшался. Внутренняя энергия газа на участках 1–2 и 2–3 увеличивалась, на участке 3–4 не изменялась.

2) Из уравнения Клапейрона–Менделеева $pV = \nu RT$ следует, что на участке 1–2 процесс является изохорным, поскольку график процесса 1–2 лежит на прямой, проходящей через начало координат $\left(\frac{p}{T} = \text{const}, \nu = \text{const}\right)$; следовательно, объем газа остается постоянным. На участке 2–3 процесс является изобарным ($p = \text{const}, \nu = \text{const}$). Так как абсолютная температура газа увеличивается, значит, и объем газа увеличивается. На участке 3–4 процесс является изотермическим ($T = \text{const}, \nu = \text{const}$). Давление газа увеличивается, значит, объем газа уменьшается.

3) Внутренняя энергия газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$ при $\nu = \text{const}$ на участках 1–2 и 2–3 увеличивалась, так как абсолютная температура газа увеличивалась, а на участке 3–4 не изменялась (абсолютная температура на этом участке является постоянной величиной).

22. 1) По третьему закону Ньютона $N = F$ (здесь \bar{N} – сила реакции опоры).

2) Запишем второй закон Ньютона для шара в проекции на ось x (рис. 16):

$$F_A + N - mg = 0,$$

$$m = \rho V, F_A = \rho_B g \frac{V}{2} = \frac{\rho_B g m}{2\rho},$$

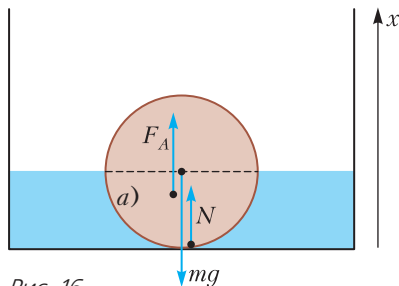


Рис. 16

где V – объем шара, ρ – плотность дерева, ρ_B – плотность воды. Получим

$$F = mg \left(1 - \frac{\rho_B}{2\rho}\right),$$

откуда

$$\rho = \frac{mg\rho_B}{2(mg - F)} = \frac{1,6 \cdot 10 \cdot 1000}{2(1,6 \cdot 10 - 6)} \text{ кг/м}^3 = 800 \text{ кг/м}^3.$$

23. 1) Модуль ЭДС индукции, возникающей в контуре при движении стержня,

$$|\mathcal{E}| = Bvl,$$

где B – модуль вектора магнитной индукции, v – скорость движения стержня, l – длина стержня.

2) Так как напряжение на конденсаторе U равно модулю ЭДС индукции, то энергия электрического поля конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{CB^2v^2l^2}{2}.$$

В итоге скорость стержня равна

$$v = \sqrt{\frac{2W}{CB^2l^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2 \cdot 1^2}} \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}.$$

24. 1) После снятия перегородки суммарная масса паров воды остается прежней:

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho (V_1 + V_2),$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотность паров воды в объемах V_1 и V_2 соответственно до снятия перегородки, ρ – плотность паров воды после устранения перегородки. Поделим все части этого уравнения на плотность насыщенных паров воды ρ_n при температуре воздуха в сосуде:

$$\frac{\rho_1}{\rho_n} V_1 + \frac{\rho_2}{\rho_n} V_2 = \frac{\rho}{\rho_n} (V_1 + V_2).$$

2) Согласно определению относительной влажности воздуха,

$$\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_n}, \quad \varphi_2 = \frac{\rho_2}{\rho_n}, \quad \varphi = \frac{\rho}{\rho_n},$$

так что имеем

$$\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2 = \varphi (V_1 + V_2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 \frac{V_2}{V_1}}{1 + \frac{V_2}{V_1}} = \\ &= \frac{0,6 + 0,7 \cdot 3}{1 + 3} = 0,675 = 67,5\%. \end{aligned}$$

25. Запишем законы Ома для полной цепи и участка цепи:

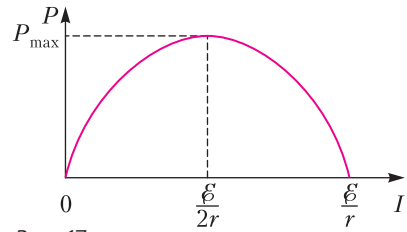
$$\mathcal{E} = I(R + r) = IR + Ir,$$

$$U = IR = \mathcal{E} - Ir,$$

где \mathcal{E} – ЭДС источника, I – сила тока в цепи, R – сопротивление реостата, r – внутреннее сопротивление источника, U – напряжение на реостате. Мощность, выделяемая на реостате, определяется формулой

$$P = IU = I(\mathcal{E} - Ir) = I\mathcal{E} - I^2r.$$

График зависимости $P(I)$ является параболой, ветви которой направлены вниз (рис. 17). Мощность, выделяемая на реостате, обращается в ноль при $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Поэтому максимум функции



$P(I)$ достигается при $I = \frac{\mathcal{E}}{2r}$ и $P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 4,5$ Вт. Отсюда

$$\mathcal{E}^2 = 4rP_{\max}, \quad \mathcal{E} = 2\sqrt{rP_{\max}} = 2\sqrt{2 \cdot 4,5} \text{ В} = 6 \text{ В}.$$

26. Обоснование

1) Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью стола.

2) Тела движутся поступательно, поэтому их можно описывать моделью материальной точки. Следовательно, можно использовать второй закон Ньютона, сформулированный для материальных точек. Силы, действующие на тела, постоянны, движение бруска и доски равноускоренное.

3) Поскольку нить нерастяжима, ускорения бруска и доски относительно стола равны по модулю и противоположны по направлению:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a, \quad \vec{a}_1 = -\vec{a}_2.$$

4) Так как блок и нити невесомы и трением в оси блока можно пренебречь, то силы натяжения нити, действующие на доску и брусок, одинаковы:

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T.$$

5) Силы трения, действующие на брусок и доску, по третьему закону Ньютона равны друг другу и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{\text{тр}1} = -\vec{F}_{\text{тр}2}.$$

6) Модули сил нормальной реакции доски \vec{N}_1 и давления бруска на доску \vec{P} также равны друг другу по третьему закону Ньютона:

$$N_1 = P.$$

Решение

1) На рисунке 18 показаны силы, действующие на брусок и на доску. Запишем для них второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y выбранной системы координат:

$$Ma = F - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}3} - T,$$

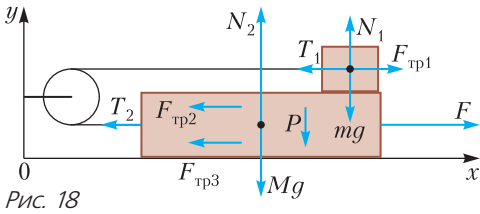
$$-ma = F_{\text{тр}1} - T,$$

$$N_1 = mg,$$

$$N_2 = Mg + P.$$

2) Вычитая второе уравнение из первого, найдем силу, действующую на доску:

$$F = (M + m)a + 2F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}3}.$$



3) Запишем выражения для сил трения:

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg, \quad F_{\text{тр}3} = \mu_2 N_2 = \mu_2 (M + m)g.$$

В итоге получаем

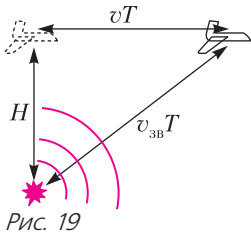
$$F = (M + m)(a + \mu_2 g) + 2\mu_1 mg = (0,8 + 0,2)(1 + 0,3 \cdot 10) \text{ Н} + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,2 \cdot 10 \text{ Н} = 6 \text{ Н}.$$

Новосибирский государственный университет

Физика

8 класс

1. За время T после вспышки самолет преодолел расстояние vT по горизонтали, а звук распространился на расстояние $v_{\text{зв}}T$ от вспышки (рис. 19). Точка вспышки, а также точки, в которых находился самолет в момент вспышки и в момент, когда пилот услышал звук взрыва, образуют прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора



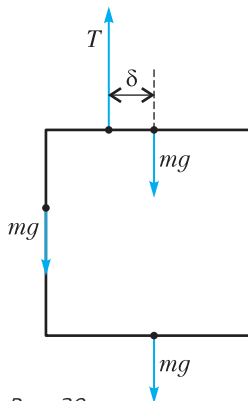
$$H = \sqrt{(v_{\text{зв}}T)^2 - (vT)^2} = T\sqrt{v_{\text{зв}}^2 - v^2}.$$

2. На конструкцию действуют сила натяжения нити и силы тяжести каждой из трех сторон проволоочной рамки (рис. 20). В равновесии сумма всех сил и моментов сил, приложенных к конструкции, равна нулю. Пусть m – масса одной из сторон. Запишем равенство моментов перечисленных сил относительно точки подвеса:

$$mg\delta + mg\delta = mg\left(\frac{a}{2} - \delta\right)$$

и найдем

$$\delta = \frac{1}{6}a.$$



3. Пусть v_A – скорость точки A . За время t точка A сместится на $\Delta x_A = v_A t$, а точка B – на $\Delta x_B = vt$. При этом пружина жесткостью k удли-

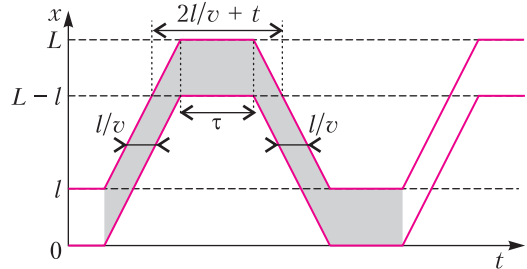
нится на Δx_B , а пружина жесткостью $2k$ – на $\Delta x_A - \Delta x_B$. Поскольку движение равномерное, а ускорения равны нулю, силы натяжения обеих пружин в каждый момент времени одинаковы:

$$k\Delta x_B = 2k(\Delta x_A - \Delta x_B),$$

откуда

$$v_A = \frac{3}{2}v.$$

4. Построим график зависимости координат переднего и заднего краев тележки от времени (рис. 21). Поскольку тележка совершает циклические



перемещения между стенками, график периодический. Расстояние между передним и задним краем тележки в любой момент времени равно l . График содержит наклонные участки, соответствующие движению тележки, а также горизонтальные участки длительностью τ , которые соответствуют остановкам тележки у стенок. Рассмотрим часть графика между двумя последовательными моментами отрыва тележки от одной из стенок (закрашена на рисунке), соответствующий одному периоду движения тележки. Заметим, что самые длительные по времени закрашенные участки графика соответствуют координаты l и $L - l$. Их длительность складывается из удвоенного времени $2l/v$ проезда тележки мимо этой точки и времени остановки τ . Таким образом, в процессе перемещения тележки между двумя стенками самое длительное время тележка проводит в точках с координатами l и $L - l$. Чтобы с максимальной вероятностью попасть в тележку, стрелку следует целиться именно в эти точки.

9 класс

1. Максимальная скорость, которую может достичь шайба, равна скорости ленты. Со стороны шайбы на ленту действует сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$. На шайбу со стороны ленты действует такая же по модулю сила, направленная в противоположную сторону. По второму закону Ньютона $ma = F_{\text{тр}}$, $a = \mu g$, где a – ускорение шайбы. Шайба будет проскальзывать, пока ее скорость не сравняется со скоростью ленты.

К этому моменту шайба должна быть на краю ленты, т.е. пройти расстояние $l = \frac{v^2}{2a}$. Отсюда

$$v = \sqrt{2\mu gl}.$$

2. По условию $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, поэтому шайба всегда будет скатываться вниз и остановится у стенки. Поскольку шайба ударяется о стенку упруго, то остановка произойдет, когда вся энергия шайбы будет потрачена на работу против силы трения: $mgH = F_{\text{тр}}s$, где s – искомый путь, $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Тогда

$$s = \frac{H}{\mu \cos \alpha}.$$

3. Пусть V – объем пузыря во льду. Изменение уровня жидкостей происходит за счет разности объема, занимаемого кубиком льда, и объема воды, получаемой при его таянии. Поэтому

$$SH = a^3 - V_{\text{в}}, \text{ где } V_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{л}}(a^3 - V)}{\rho_{\text{в}}}.$$

Отсюда найдем

$$V = SH \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} - a^3 \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}}.$$

4. Если t_1 и t_2 – промежутки времени после взрыва до падения первой и второй частей гранаты соответственно, то расстояние между точками падения осколков

$$s = s_2 - s_1 = v \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1),$$

$$\text{откуда } t_2 - t_1 = \frac{s}{v \cos \alpha}.$$

Пусть v_1 и v_2 – проекции скоростей вдоль оси y первого и второго осколка после взрыва гранаты соответственно. Для определенности v_2 направим вверх вдоль оси y , а v_1 – против, начало системы координат находится на поверхности земли. Запишем уравнения движения осколков:

$$0 = -v_1 t_1 - g \frac{t_1^2}{2} + h = v_2 t_2 - g \frac{t_2^2}{2} + h,$$

где h – высота, на которой произошел взрыв, и закон сохранения для компоненты импульса вдоль оси y :

$$\frac{m}{2} v_1 - \frac{m}{2} v_2 = 0, \text{ или } v_1 = v_2 = u.$$

Отсюда находим скорость u :

$$u = \frac{g}{2} \frac{s}{v \cos \alpha}$$

и искомое изменение кинетической энергии:

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{m}{2} \frac{v_1^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{v_2^2}{2} = \frac{mu^2}{4} = \frac{mg^2 s^2}{16v^2 \cos^2 \alpha}.$$

5. Пусть N – количество сосудов, $N \gg 1$. После открытия вентиля между первым и вторым сосудами в них окажется вода объемом $V_0/2$, у каждой последующей пары сосудов окажется воды в 2 раза меньше, чем у предыдущей. Таким образом, у последнего сосуда с номером N окажется

объем воды $V_0/2^{N-1}$. Обратная процедура начинается переключением вентиля между предпоследним и предпредпоследним сосудами. При этом в них окажется объемы воды

$$(V_0/2^{N-2} + V_0/2^{N-1})/2 = (2+1)V_0/2^N.$$

При переключении следующего вентиля получим объемы $(2^3 + 2 + 1)V_0/2^{N+1}$. И, наконец, на последнем этапе объем воды в первом сосуде будет

$$V_1 = (2^{2N-5} + \dots + 2^3 + 2 + 1)V_0/2^{2N-3} = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2N-6}} + \frac{1}{2^{2N-5}}\right)V_0/4.$$

При $N \gg 1$ последний член ряда в скобках стремится к нулю, а оставшаяся часть представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $4/3$. С учетом этого, получим

$$V_1 = V_0/3.$$

10 класс

1. Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для начального состояния газа:

$$p_0 V_0 = \nu_0 R T_0,$$

где p_0 и V_0 – начальные давление и объем газа соответственно, и для конечного состояния:

$$p_0 V_0 = (\nu_0 - \nu_x) R (T_0 + \Delta T).$$

Отсюда найдем

$$\nu_x = \nu_0 \frac{\Delta T}{T_0 + \Delta T} = \frac{1}{7} \nu_0.$$

2. В начальный момент времени период движения равен периоду колебаний тележки на пружине $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, где m – масса тележки, а k –

жесткость пружины. Энергия системы $W_1 = k \frac{x^2}{2}$, где x – амплитуда колебаний тележки на пружине. После отрыва пружины период движения не изменился, но теперь он определяется временем между столкновениями тележки с одной из стенок. Тележка ударяется о стенки упруго, поэтому скорость v в процессе движения не меняется. Так как до отрыва пружины тележка почти касалась стенок, то теперь между столкновениями с одной из стенок тележка проходит расстояние $4x$. Тогда период движения $T = \frac{4x}{v}$, а энергия системы, равная кинетической энергии тележки, $W_2 = m \frac{v^2}{2}$. Отсюда находим скорость тележки:

$$v = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и долю энергии, выделившейся в качестве тепла:

$$\alpha = \frac{W_1 - W_2}{W_1} = 1 - \frac{4}{\pi^2}.$$

3. На шар действуют силы реакции \vec{N}_1 со стороны досок и сила тяжести $M\vec{g}$. Сумма этих сил в проекции на вертикальную ось равна нулю, так как шар покоится:

$$Mg - 2N_1 \sin \alpha = 0.$$

На каждую доску действуют сила реакции со стороны шара $\vec{N}_2 = -\vec{N}_1$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Точка приложения силы тяжести находится посередине доски, а точка приложения силы реакции – на расстоянии $R \operatorname{ctg} \alpha$ от точки соприкосновения доски с полом. Сумма моментов сил, действующих на доску, относительно точки касания пола равна нулю, т.е.

$$T \cos \alpha \cdot l - N_1 R \operatorname{ctg} \alpha - mg \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{MgR}{2l \sin^2 \alpha}.$$

4. В начальном положении сила кулоновского взаимодействия равна $F = k \frac{q^2}{L^2}$, где k – коэффициент пропорциональности, q – заряд каждой из бусинок, а потенциальная энергия взаимодействия бусинок равна $U_1 = k \frac{q^2}{L} = FL$. Чтобы бусинки могли столкнуться, сила взаимодействия должна стать чуть больше, чем сила трения. Это произойдет, если расстояние между бусинками уменьшится до некоторого значения l такого, что $F_{\text{тр}} = k \frac{q^2}{l^2}$. Тогда потенциальная энергия взаимодействия бусинок в этом положении будет $U_2 = k \frac{q^2}{l} = F_{\text{тр}} l$. Запишем закон сохранения энергии для этих двух положений бусинок с учетом кинетической энергии T , сообщенной каждой из бусинок, и работы силы трения при перемещении между этими положениями:

$$U_1 + 2T = U_2 + F_{\text{тр}}(L - l),$$

откуда найдем

$$T = \frac{(F_{\text{тр}} - F)L}{2}.$$

5. На остаток рамки действуют сила натяжения нити и сила тяжести. Последнюю можно представить как векторную сумму силы тяжести целой рамки, равной Mg (здесь M – масса целой рамки), направленной вниз и приложенной к центру рамки, и силы тяжести вырезанного куска равной $1/4 Mg$, направленной вверх и приложенной к середине боковой стороны. Пусть сторона рамки равна a . Относительно точки подвеса плечо силы натяжения нити равно нулю, а плечи сил тяжести равны, соответственно, $\frac{a}{2} \sin \alpha$ и $\frac{a}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha)$.

Поэтому равенство моментов сил относительно точки подвеса запишется в виде

$$Mg \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{1}{4} Mg \frac{a}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha).$$

Отсюда $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, $\alpha = \operatorname{arctg} 3$.

11 класс

1. Обозначим $t_1 = 40$ ч, $t_2 = 60$ ч. Полный облет экватора в системе отсчета Земли соответствует углу 2π радиан и угловые скорости самолетов равны $\omega_1 = \frac{2\pi}{t_1}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{t_2}$. При движении в противоположных направлениях относительная угловая скорость равна сумме этих скоростей. Поэтому самолеты встретятся через время

$$t = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 24 \text{ ч.}$$

2. Давление под поршнем, согласно закону Дальтона, равно сумме парциальных давлений газа p и насыщенного водяного пара $p_{\text{н}}$. В начальный момент $p_0 = p + p_{\text{н}}$. После подъема поршня давление насыщенного водяного пара не изменилось, так как температура постоянна, а воды достаточно, чтобы поддерживать давление за счет испарения. При этом давление под поршнем уменьшилось вдвое. Поэтому $\frac{p_0}{2} = p_1 + p_{\text{н}}$, где p_1 – конечное давление газа. Отсюда найдем

$$p_{\text{н}} = p - 2p_1.$$

При постоянной температуре произведение давления газа на занимаемый им объем остается постоянным. В случае вертикальной трубы постоянного сечения занимаемый объем пропорционален высоте поршня, поэтому

$$pH = p_1 H_1.$$

Выразив отсюда p_1 и подставив в предыдущее уравнение, получим

$$p_{\text{н}} = \left(1 - \frac{H}{H_1}\right) p.$$

3. $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{4a}{b} - 1 \right)$ (подробнее см. решение задачи 5 для 10 класса).

4. Изменяющийся со временем магнитный поток Φ через контур, образованный перемычками и шинами, приводит к возникновению ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -L_1 L_2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -L_1 L_2 \frac{B_0}{\tau}$ и тока $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R}$. В магнитном поле, согласно закону Ампера, на перемычку, по которой течет этот ток, действует сила Ампера, равная $F = ILB$ и направленная вниз по шинам. Когда эта сила достигнет необходимого значения, верхняя перемычка начнет двигаться вниз по шинам. Отсюда получаем

$$F = \frac{L_1^2 L_2 B_0^2}{R \tau^2} t.$$

Помимо этой силы на перемычку действуют также сила тяжести, равная mg и направленная вниз, сила реакции, равная N и направленная перпендикулярно шинам, и сила трения, направленная вверх по шинам и в момент начала движения равная μN (рис. 22).

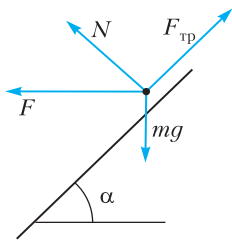


Рис. 22

Все эти силы лежат в плоскости, перпендикулярной перемычке. Запишем условие равновесия сил перед самым началом движения в проекции на ось, направленную вдоль шин: $\mu N = F \cos \alpha + mg \sin \alpha$ и перпендикулярно им (и перемычке): $N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha$, и найдем

$$F = \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} mg = \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} mg.$$

С другой стороны, в искомый момент t_x эта сила равна

$$F = \frac{L_1^2 L_2 B_0^2}{R \tau^2} t_x.$$

Отсюда получим

$$t_x = \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} mg \frac{R \tau^2}{B_0^2 L_1^2 L_2}.$$

5. Периметр колеса $l = \pi d$, где d – его диаметр. На пути длиной L от Москвы до Владивостока колесо совершит число оборотов $N = \frac{L}{l}$. При изменении периметра на Δl оно изменится на $\Delta N \approx \frac{L}{l^2} \Delta l$.

При изменении температуры на ΔT относительное изменение периметра колеса будет $\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T$. Отсюда получим

$$\Delta N \approx \alpha \frac{L}{l} \Delta T \approx \alpha \frac{L}{\pi d} \Delta T \approx 2000.$$

6. Возможны несколько способов рассуждения, приводящих к объяснению наблюдаемого явления. Рассмотрим два способа: один использует энергетические соображения, а другой – моменты сил.

Первый способ. Чтобы брусок упал, он должен отклониться от вертикали на достаточно большой угол, при котором сила трения не удержит его от соскальзывания вниз. Если бы цилиндр был неподвижен, то такого большого отклонения не могло бы произойти, так как при качении бруска середина его нижнего края смещается вверх, а значит, и центр масс бруска тоже смещается вверх (при условии, что брусок достаточно тонкий по сравнению с размером цилиндра). Следовательно, если бы цилиндр оставался неподвижным, то бруску не хватило бы энергии, чтобы поднять центр масс и отклониться на достаточно большой угол. В реальности цилиндр движется, катясь по поверхности стола. Когда цилиндр смещается отно-

сительно исходного положения, гиря поднимается вверх. Если гиря тяжелая, то для поднятия ее вверх потребуется слишком большой запас энергии, поэтому в эксперименте с тяжелой гирей смещение цилиндра невелико и брусок не падает. В случае легкой гири увеличение потенциальной энергии при поднятии ее вверх незначительно. Энергия на поднятие легкой гири берется за счет опускания центра масс бруска при повороте цилиндра. Поэтому в эксперименте с легкой гирей положение всей конструкции оказывается неустойчивым и брусок падает.

Второй способ. При наклоне бруска он создает момент силы, действующий на цилиндр, который стремится сдвинуть цилиндр из первоначального положения. При смещении цилиндра гиря создает момент силы, действующий на цилиндр и препятствующий его смещению. Если гиря достаточно тяжелая, то цилиндр практически не сместится. Между тем, для падения бруска требуется смещение цилиндра, поэтому брусок не упадет в эксперименте с тяжелой гирей. Если же гиря легкая, то создаваемый ею момент силы незначительный и не может препятствовать качению цилиндра из-за момента сил, действующего со стороны бруска. В результате цилиндр катится, брусок отклоняется на достаточно большой угол и падает.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

(см. «Квант» №9)

Профильный экзамен по физике

Механика

1. При движении шайбы по наклонной плоскости на нее действует сила трения скольжения, равная $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, где μ – коэффициент трения шайбы о наклонную плоскость. Эта сила совершает работу $A_{\text{тр}} = -\mu mgl \cos \alpha$ как при движении шайбы вверх, так и при движении шайбы вниз. Учитывая это, запишем закон изменения полной механической энергии для этих двух этапов движения:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \mu mgl \cos \alpha = mgl \sin \alpha,$$

$$mgl \sin \alpha - \mu mgl \cos \alpha = \frac{mv_1^2}{2}.$$

Здесь v_0 – начальная скорость шайбы на наклонной плоскости. Отсюда получим скорость шайбы после того, как она снова окажется на горизонтальной поверхности:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4\mu gl \cos \alpha}.$$

Для того чтобы найти v_0 и μ , рассмотрим отдельно движение шайбы вверх по наклонной

плоскости. Направим ось x вдоль наклонной плоскости вверх, а начало координат совместим с границей между горизонтальной поверхностью и наклонной плоскостью. Координата x и скорость тела v зависят от времени по законам $x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ и $v(t) = v_0 - at$ соответственно. В момент времени τ – момент остановки шайбы – можем записать

$$x(\tau) = v_0 \tau - \frac{a\tau^2}{2} = l, \quad v(\tau) = v_0 - a\tau = 0.$$

Решая эту систему уравнений, найдем начальную скорость шайбы: $v_0 = \frac{2l}{\tau}$ и ускорение, с которым она двигалась: $a = \frac{2l}{\tau^2}$. С другой стороны, используя второй закон Ньютона в проекции на ось x , а именно уравнение

$$-ma = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha,$$

получим

$$a = g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha.$$

Приравняв два выражения для ускорения a , найдем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{2l}{g\tau^2} - \sin \alpha \right)$$

и получим окончательно

$$v_1 = 2\sqrt{gl \sin \alpha - \frac{l^2}{\tau^2}} = 4\sqrt{6} \text{ м/с} \approx 10 \text{ м/с}.$$

2. Направим ось x системы координат вниз вдоль наклонной плоскости, начало координат свяжем с координатой нижнего края доски в положении равновесия. Положение равновесия характеризуется начальным сжатием пружины x_n , т.е. $(M + m)g \sin \alpha = kx_n$. По условию доску с кубиком смещают вниз вдоль наклонной плоскости, сжимая пружину, и отпускают с нулевой скоростью. Если после этого доска с кубиком совершает колебания, при которых кубик не скользит по доске, то эти колебания будут гармоническими, так как доска и кубик будут двигаться как одно целое. Уравнение движения доски с кубиком в проекции на ось x имеет вид

$$(M + m)x'' = (M + m)g \sin \alpha - k(x_n + x),$$

или $(M + m)x'' + kx = 0.$

Отсюда следует, что доска с кубиком совершает гармонические колебания с круговой частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + m}}$. Во время колебаний между доской и кубиком действует сила трения $F_{\text{тр}}$. Кубик движется в соответствии с уравнением $mx'' = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}(t)$. Сила трения в этом уравнении является возвращающей силой. Она зависит от времени и меняет знак при изменении направления движения доски. Максимальное значение сила

трения принимает в крайнем нижнем положении доски:

$$|F_{\text{тр}}^{\text{max}}| = mg \sin \alpha + m |x''_{\text{max}}|.$$

Здесь $|x''_{\text{max}}|$ – максимальное ускорение доски с кубиком, равное $\omega_0^2 A$, где A – искомое максимальное смещение доски (амплитуда колебаний). В то же время сила трения между кубиком и доской, если кубик не скользит по доске, не превышает значения силы трения скольжения, т.е. $|F_{\text{тр}}^{\text{max}}| \leq \mu mg \cos \alpha$. Таким образом, должно выполняться следующее неравенство:

$$mg \sin \alpha + m\omega_0^2 A \leq \mu mg \cos \alpha.$$

Это неравенство дает возможность найти максимальное смещение доски, при котором кубик не будет скользить по доске во время возникших в системе колебаний:

$$A = \frac{(m + M)g}{k} (\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \approx 0,15 \text{ м}.$$

Молекулярная физика и термодинамика

1. По условию задачи $V_2 = nV_1$, а $V_3 = kV_2 = nkV_1$. Используя уравнение процесса 1–2, получим $p_2 = np_1$, а так как $pV = \nu RT$, то $T_2 = n^2 T_1$. Аналогично, используя уравнение процесса 2–3, получим $T_3 = kT_2 = n^2 k T_1$. КПД цикла тепловой машины равен $\eta = \frac{A}{Q^+}$, где A – работа, совершенная газом за цикл, а Q^+ – полученное газом за цикл количество теплоты. Для данного цикла, используя полученные выше соотношения, имеем

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_2) = \frac{1}{2} p_1 V_1 n (n - 1)(k - 1),$$

$$Q^+ = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + A_{12} + Q_{23}.$$

Здесь изменение внутренней энергии газа на участке 1–2 равно

$$\Delta U_{12} = C_V (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \nu RT_1 (n^2 - 1),$$

работа газа на участке 1–2 равна

$$A_{12} = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2} p_1 V_1 (n^2 - 1),$$

количество теплоты, полученное газом на участке 2–3, равно

$$Q_{23} = C_p (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \nu RT_1 n^2 (k - 1).$$

Окончательно получим

$$Q^+ = 2\nu RT_1 (n^2 - 1) + \frac{5}{2} \nu RT_1 n^2 (k - 1),$$

$$\eta = \frac{n(n - 1)(k - 1)}{4(n^2 - 1) + 5n^2(k - 1)} = \frac{1}{13} \approx 0,077.$$

2. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа равна $U = \frac{3}{2} \nu RT$. По условию $U = \alpha V^2$, где

α – некоторый постоянный коэффициент. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона, $pV = \nu RT$, поэтому в данном процессе $p \sim V$. Работу, совершенную газом, можно найти, вычислив площадь под графиком зависимости p от V . Площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_2 - p_1V_1 + p_2V_2 - p_2V_1).$$

Поскольку $p \sim V$, то $p_1V_2 = p_2V_1$ и

$$A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{2}\nu R\Delta T.$$

Изменение внутренней энергии равно $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$.

Согласно первому закону термодинамики, $Q = \Delta U + A$. В данном процессе

$$Q = \Delta U + \frac{\Delta U}{3} = \frac{4}{3}\Delta U,$$

откуда

$$\Delta U = \frac{3}{4}Q = 15 \text{ Дж.}$$

Электродинамика

1. Запишем закон сохранения полной энергии системы из трех заряженных частиц для начального положения частиц и после уменьшения расстояний между соседними частицами вдвое:

$$3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} + 3 \frac{mv_0^2}{2} = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (l/2)} + 3 \frac{m(v_0/2)^2}{2}.$$

Аналогично, для начального и конечного положений частиц, учитывая что при наименьшем расстоянии скорость частиц обратится в ноль, запишем

$$3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} + 3 \frac{mv_0^2}{2} = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}.$$

Отсюда получим

$$r_{\min} = \frac{3}{7}l = 12 \text{ см.}$$

2. После подключения последовательно соединенных незаряженных конденсаторов к источнику (рис. 23,а) заряды конденсаторов становятся одинаковыми и равными $q_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U$, где U – ЭДС источника. После переключения конденсатора (рис. 23,б) заряды конденсаторов становятся равными q_1 и q_2 , для которых справедливы уравнения

$$-q_1 + q_2 = 2q_0 \text{ и } \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = U.$$

Отсюда находим

$$q_2 = \frac{C_1 C_2 (C_1 + 3C_2)}{(C_1 + C_2)^2} U \approx 19 \text{ мкКл.}$$

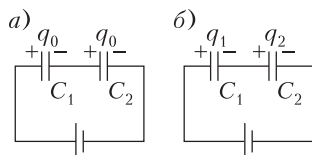


Рис. 23

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

(с.м. «Квант» №9)

Математика

Вариант 1

- 78.
- Таня, 30 минут.
- 24.11.24.
- Да; $22 + 979 = 1001$.
- 5.
- Верно.
- 2.

Если сторон длины 1 три или больше, то найдутся две, не имеющие общих вершин. Обозначим их AB и CD , пусть AC и BD пересекаются в точке E (рис. 24).

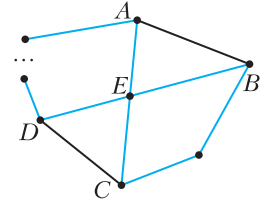


Рис. 24

По неравенству треугольника $AE + EB > AB = 1$, $CE + ED > CD = 1$. Сложив эти неравенства, получим $AC + BD > 2$. Но, по условию, сумма диагоналей $AC + BD \leq 2$. Противоречие.

Пример, когда две стороны равны 1: возьмем окружность радиуса $r = 1$ с центром в точке A_1 и на дуге $A_2 A_{2024} = 60^\circ$ выберем точки A_3, \dots, A_{2023} . Тогда $A_1 A_2 = A_1 A_{2024} = 1$, а все диагонали не превосходят 1 (рис. 25).

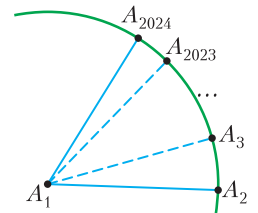


Рис. 25

8. 4754.

Обозначим $g(x) = f(x + 2023)$ – трехчлен с целыми коэффициентами и свободным членом, равным 2025^{24} .

У многочлена $g(x)$ есть

корни, значит, его можно представить в виде $g(x) = (x - a)(x - b)$, а раз $g(0) = 2025^{24}$, то и произведение его корней должно равняться 2025^{24} .

Так как $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, то $2025^{24} = 3^{96} \cdot 5^{48}$. У этого числа $(96 + 1)(48 + 1) = 4753$ натуральных делителей, их можно разбить на 2376 пар, произведение которых равно 2025^{24} , а делитель, равный $\sqrt{2025^{24}}$, не будет иметь пары. Всего получается 2377 вариантов с положительными корнями, к которым надо добавить столько же вариантов с отрицательными, итого 4754. Все эти варианты дают разные квадратные трехчлены $g(x)$ (так как корни разные), а значит, корни трехчлена $f(x)$ тоже будут разные.

$$9. S = \left(\frac{8}{3}\pi + 8 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) l^2.$$

вые, но равны между собой (тоже не наш случай). Если же прямая OH пересекает две стороны (рассмотренный выше случай), то одна из этих трех площадей (это может быть и OHG , и ONP , и OHV) является суммой двух других. Поэтому получаем либо $15 + 8 = x$, т.е. $x = 23$, либо $8 + x = 15$, т.е. $x = 7$, либо $15 + x = 8$, что невозможно.

$$6. 2\sqrt{4046} = 34\sqrt{14}.$$

Из условия вытекает, что $q \neq 0$. Если обозначить $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(0; q)$, $D(x; y)$, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Далее,

$$|DB|^2 = |DC^2| \Leftrightarrow (x - x_2)^2 + y^2 = x^2 + (y - q)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2qy = q^2 + 2xx_2 - x_2^2.$$

Так как $2x = x_1 + x_2$, то $2qy = q^2 + x_1x_2$. Поэтому с учетом теоремы Виета $x = -\frac{p}{2}$, $y = \frac{q+1}{2}$.

Тогда из условия задачи имеем уравнение $q - p = 2 \cdot (-2023) - 1 = 4047$. По формуле корней квадратного уравнения $|AB| = |x_2 - x_1| = \sqrt{D} = \sqrt{p^2 - 4q}$, откуда следует

$$|AB|^2 = p^2 - 4q = p^2 - 4p + 4 \cdot 4047 = \\ = (p - 2)^2 + 4 \cdot 4046 \geq 4 \cdot 4046.$$

Минимальное значение $|AB| = 2\sqrt{4046} = 34\sqrt{14}$, оно достигается при $p = 2$, $q = -4045$.

$$7. a \in [-\pi/4 + \pi n; \pi n] \cup [\arctg 5 + \pi n; \arctg 6 + \pi n], \\ n \in \mathbb{Z}.$$

Положим $b = [tg a]$. Тогда уравнение принимает вид $(|2b - 1|)^x = b^2 + 2$, $b \in \mathbb{Z}$, и нужно найти целочисленные значения b , при которых существует рациональное решение x .

При $b = 0$ решений нет. Рассмотрим случай $b > 0$, т.е. $b \in \mathbb{N}$. Поскольку при любом натуральном b

$$b^2 + 2 > 2b - 1 \geq 1,$$

то можем считать, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Значит, числа $b^2 + 2$ и $2b - 1$ имеют одни и те же простые делители.

Пусть p — общий простой делитель этих чисел, тогда

$$\begin{cases} b^2 + 2 = pN, \\ 2b - 1 = pM, \end{cases}$$

где N и M — натуральные. Исключая b из левых частей уравнений этой системы, получаем

$$9 = 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = (4N - (2b + 1)M)p.$$

Значит, $(4N - (2b + 1)M)$ — натуральное, а p — делитель 9, т.е. $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} b^2 + 2 = p^m, \\ 2b - 1 = p^k, \end{cases}$$

где m и k — натуральные и $m > k$.

Так как

$$9 = 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = \\ = 4 \cdot 3^{m-k} - (3^k + 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2),$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2$ не делится на 3, то $k = 2$ и $m = 3$, $b = 5$, $x = \frac{3}{2}$.

Для $b < 0$ решение проводится почти аналогично. Положим $c = -b$. Тогда исходное уравнение будет записываться в виде

$$(2c + 1)^x = c^2 + 2, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Случай $c = 1$ очевиден, поскольку решение $x = 1$. При $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$ натуральных решений нет (аналогично предыдущему).

Поэтому все решения описываются уравнениями $[tg a] = -1$ и $[tg a] = 5$, решив которые, приходим к ответу.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й адрес 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

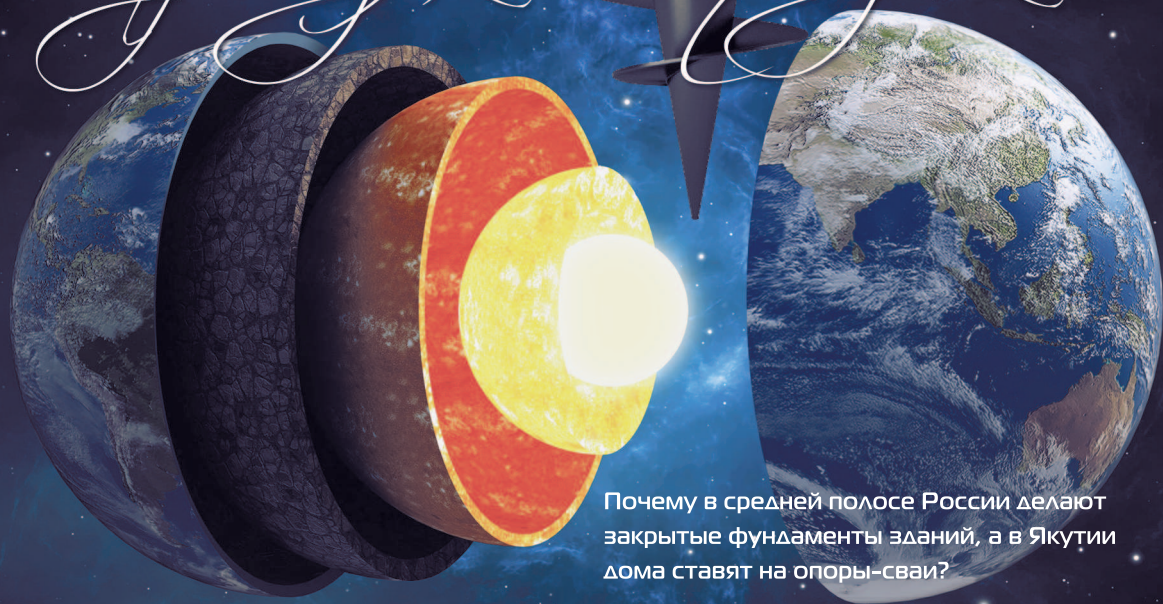
Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

Уроки с физикой



Почему в средней полосе России делают закрытые фундаменты зданий, а в Якутии дома ставят на опоры-сваи?



«ВЕЧНАЯ МЕРЗЛОТА»



(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 2 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)