

ISSN 0130-2221

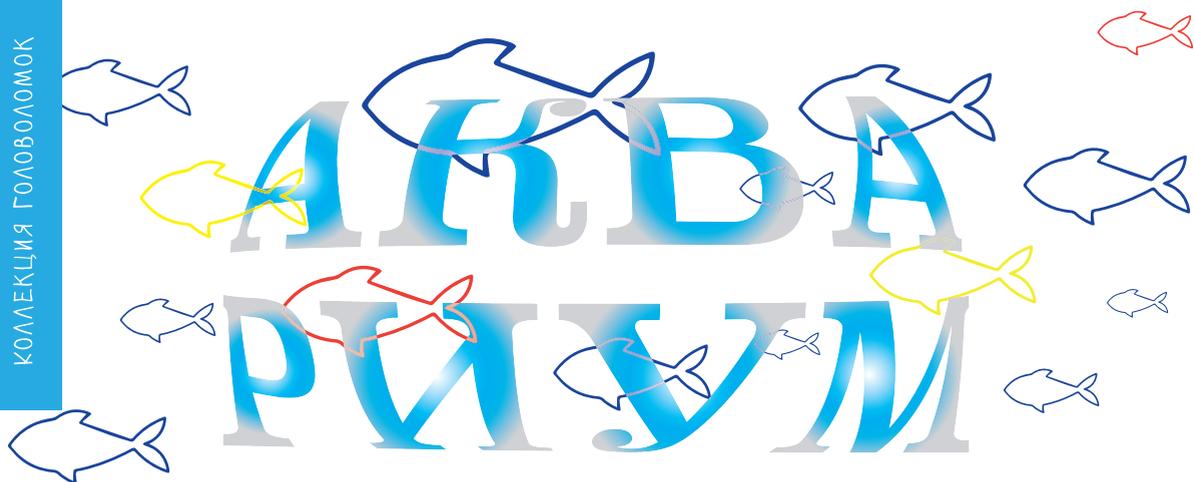
2023 · №6

ИЮНЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



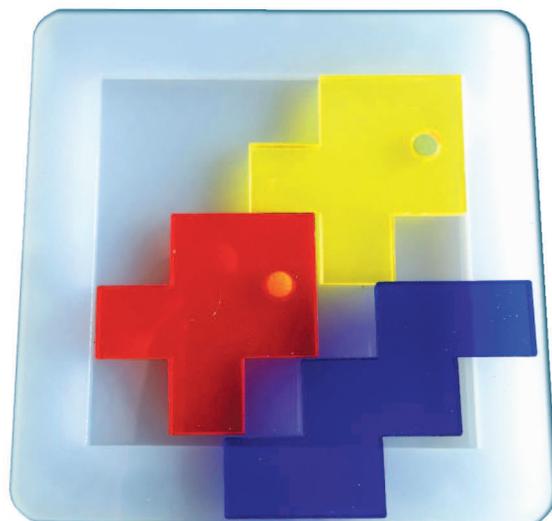


Изобретатель из Сингапура Гох Пит Хиам (Goh Pit Khiam) придумал не один десяток головоломок. Многие из них хороши тем, что их несложно изготовить в домашних условиях. Еще одним несомненным достоинством его изобретений является их обманчивая простота: на первый взгляд обычно кажется, что задача простая, но когда начинаешь решать, понимаешь, что все не так уж просто!

В головоломке «Аквариум» (Fish tank) всего три детали, которые надо поместить в рамку – «аквариум» размером 5×5. Все детали составлены из трехклеточных уголков: две «рыбки» получаются, если один уголок вложить во второй, а «вода» получается, если составить два уголка лесенкой. Чтобы порешать головоломку дома, детали можно вырезать из картона, а рамку просто нарисовать на листе бумаге.

Желаем успеха!

Е.Епифанов



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт

Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Курчатов и советский атомный проект.
Л.Белопухов
- 15 Плотные упаковки шаров в пространстве.
Н.Долбилин

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Разумное моделирование. *С.Дворянинов*
- 25 Задачи

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 26 Задачи M2750–M2753, Ф2757–Ф2760
- 27 Решения задач M2738–M2741, Ф2745–Ф2748

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика + медицина

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 36 Лунная лыжня? *Е.Германюк*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 40 Конфигурационное и импульсное
пространства. *А.Бычков*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 45 Метод стирания точек. *М.Дидин*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

- 49 В погоне за красотой геометрии

ОЛИМПИАДЫ

- 51 Заключительный этап XLIX Всероссийской
олимпиады школьников по математике

- 54 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к Калейдоскопу «Кванта»*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

Курчатов и советский атомный проект

(к 120-летию со дня рождения И.В.Курчатова и 80-летию атомного проекта)

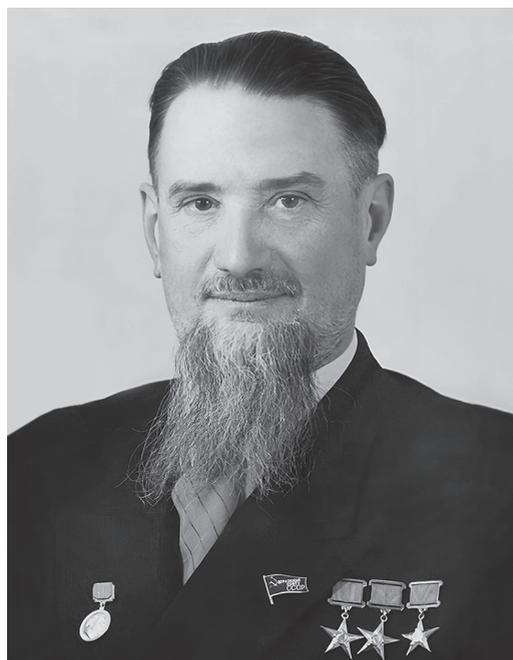
Л. БЕЛОПУХОВ

ШЕСТЬДЕСЯТ ЛЕТ НАЗАД ВСЯ наша страна знала два имени советских ученых – Курчатов и Королев. Первый – «главный по бомбе», второй – «главный по ракетам». На самом деле рядом с этими именами стояли по 4–5 почти равных им по заслугам (и по наградам). Главными создателями ядерного оружия (атомной и водородной бомб) кроме Курчатова были Главные конструкторы и Главные теоретики Ю.Б.Харитон, Я.Б.Зельдович, К.И.Щёлкин, Н.Л.Духов и А.Д.Сахаров. Все шестеро были удостоены самых высоких наград страны – они были трижды Героями Социалистического Труда. Но если завеса строжайшей секретности над Курчатовым была чуть-чуть приподнята (как депутат Верховного Совета, он должен был выступать на сессиях с сообщениями об успехах советской науки), то имена пяти его ближайших соратников в то время оставались совершенно неизвестными. Рассекречивание их имен и всех работ по атомному проекту произошло только в начале этого века, через несколько десятков лет после самих работ. Изданная 20 лет назад книжка Ф.Щёлкина с рассказом об этих ученых носит многозначительное название «Апостолы атомного века».

Создатели ядерного оружия были и многократными лауреатами Государственных (Сталинских) премий, и лауреатами Ленинской премии (у Курчатова – удостове-

рение № 0001 о присвоении этого звания). Во всех списках награжденных первым значился И.В.Курчатов – главный научный руководитель по созданию атомной бомбы и атомных реакторов.

Игорь Васильевич Курчатов родился 12 января 1903 года в маленьком заводском поселке Сим Уфимской губернии в семье землемера и помощника лесничего и учительницы начальных классов. От отца он унаследовал трудолюбие, добросовестность и аккуратность в работе, от матери –



И.В.Курчатов в 50-е годы. Три звезды Героя Социалистического Труда

твердость и решительность характера. В 1908 году семья перебралась в Симбирск, а в 1912 году переехала в Крым – у дочери, старшего ребенка в семье, обнаружился туберкулез легких, от которого она так и не излечилась в Крыму. У Игоря остался младший брат Борис (тоже будущий ученый, физик и радиохимик).

Курчатовы жили на окраине Симферополя, неподалеку от гимназии, в которой стали учиться оба брата. В здании этой гимназии сейчас находится Симферопольская гимназия № 1 имени И.В.Курчатова. Отец ездил по Крыму, выполняя землемерные работы, и на каникулах брал с собой сыновей – в качестве своих помощников. Материальное положение семьи было трудным, особенно после начала мировой войны. Игорь старался хоть что-нибудь заработать и головой – репетиторством, и руками – в слесарной мастерской. Он стал готовить себя к инженерной деятельности. Учитель математики прочил ему большое будущее, но и преподаватель словесности поощрял его гуманитарные склонности.

В Крыму менялась обстановка – то красные, то белые, то опять красные, то опять белые. Но при этом жизнь в Симферополе шла своим чередом. В 1918 году, в «красный» период, в Симферополе был создан



И.В.Курчатов в молодости (еще без бороды)

Таврический университет, где стали преподавать многие замечательные ученые. Дело в том, что в Крым в это время переехало из столиц много ученых, артистов, литераторов, спасавшихся от московского и петроградского голода и холода. Первым ректором университета был великий В.И.Вернадский, его сменил крупный химик академик А.А.Байков.

В 1920 году Игорь Курчатов закончил гимназию с золотой медалью (правда, золота на медаль не нашлось, и он получил только свидетельство о награждении). Он поступил на физико-математический факультет университета. Там тогда преподавали физику академик А.Ф.Иоффе и его ученик И.Е.Тамм. За три года Курчатов проходит весь университетский курс и защищает дипломную работу. Но он пока мечтает не о физике, а о кораблестроении – он полюбил корабли, бывая с отцом на крымских берегах. Курчатов хочет стать корабелом и едет в Петроград. Его принимают на третий курс кораблестроительного факультета Политехнического института.

Для заработка он устраивается на работу в метеорологическую лабораторию в Павловске и выполняет здесь свою первую научную работу «О радиоактивности снега». Он проявил при этом стремление делать измерения с предельно возможной точностью и надежностью результатов. Уж не эта ли работа определила его грядущий путь – стать физиком-ядерщиком? Но до этого еще далеко. А пока приходится оставить учебу в институте (вышло решение о запрете второго высшего образования). Курчатов приезжает к родителям в Крым, где его бывший профессор физики уговаривает ехать вместе с ним в Баку – ассистентом на кафедру физики Азербайджанского политехнического института.

С сентября 1924 года Курчатов – в Баку. Ему уже нет надобности искать побочные заработки. Зарплаты ассистента хватает и на жизнь, и на книги, и на приличную одежду. Все свободное от педагогической работы время он отдает научной работе. Теперь он занимается физикой, электролизом в твердых телах, твердотельной диффузией. И приходит увлечение таинствен-

ными атомными процессами, стремлением понять, что же там происходит внутри вещества, невидимое непосредственному наблюдению, но доступное приборам.

На его научные статьи сразу обращает внимание академик А.Ф.Иоффе, руководитель научного Ленинградского физико-технического института. Оказалось, он запомнил талантливого первокурсника, когда преподавал в Таврическом университете, и приглашает 22-летнего Курчатова научным сотрудником в свой институт. Молодость – не препятствие для этого. Недаром институт иронически называли «детским садом».

Сегнетоэлектричество

Курчатов с головой погружается в работу. Самыми важными работами в институте тогда были исследования диэлектрических материалов. Для осуществления государственного плана электрификации всей страны (ГОЭЛРО) отчаянно не хватало знаний о свойствах высоковольтных изоляторов и механизме их пробоя. На электростанциях одна за другой происходили аварии.

И Курчатов начинает заниматься особым видом диэлектриков – *сегнетоэлектриками*. Именно ему принадлежит и этот термин, и термин *сегнетоэлектричество*. До него просто говорили, что есть особые электрические свойства у одного вещества, так называемой сегнетовой соли ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, тетрагидрат двойной натриево-калиевой соли виннокислотной кислоты), синтезированной еще в XVII веке французским аптекарем Пьером Сегнетом и применявшейся в качестве слабительного лекарства. В конце XIX века выявились особые электрические свойства этого вещества.

Кристаллы сегнетовой соли являются необычайно сильным диэлектриком – в десятки раз более сильным, чем фарфор или стекло. Правда, необычно сильно изолирующее свойство существует у этих кристаллов только в узком температурном интервале. Другое особое свойство сегнетовой соли – сильная пьезоэлектрическая способность. Это интересное свойство зак-

лючается в том, что под действием механических деформаций на поверхностях кристалла появляются электрические заряды и наоборот – под действием электрического поля в кристалле возникают деформации. Вообще говоря, это свойство должно быть у всех диэлектриков. Но обычно оно не играет роли. А у сегнетовой соли оно достаточно сильное для того, чтобы иметь практическое значение, правда была совершенно непонятна физическая природа явления.

Нечто похожее происходит и в магнетизме с некоторыми веществами, главным образом с теми, которые содержат железо. Поэтому такие вещества были названы ферромагнетиками, а само явление – ферромагнетизмом. И Курчатов аналогично называет сегнетову соль сегнетоэлектриком, а само явление – сегнетоэлектричеством. Он интуитивно чувствует, что когда будет создана теория сегнетоэлектричества, то можно будет на ее основе получать другие похожие диэлектрики, более подходящие для практического применения. Курчатов считает, что теорию сегнетоэлектричества удастся создать по аналогии с теорией ферромагнетизма. И он не ошибается.

По аналогии с причиной ферромагнетизма, Курчатов объясняет сегнетоэлектричество природной электрической организацией больших групп молекул, возможно даже целого кристалла. И на электрическое поле реагируют не отдельные молекулы вразнобой, а вся уже от природы организованная группа. На основе обширных экспериментальных исследований Курчатов создает теорию сегнетоэлектричества. Через несколько лет эта теория позволила кристаллографам получать большие кристаллы сегнетовой соли для использования в радиотехнике и в приборах, измеряющих деформации и нагрузки. В Институте кристаллографии в Москве организовали промышленное производство этих кристаллов. А в 40-е годы были найдены и другие сегнетоэлектрики, получившие широкое применение в радиоэлектронике.

В 1933 году Курчатов завершает свою работу в этом направлении и издает монографию «Сегнетоэлектрики». Она была

сразу же переведена на французский и английский языки – так велик был интерес к этой теме у физиков и электротехников. Высокий научный уровень работ Курчатова произвел большое впечатление на научную общественность.

Работы Курчатова были высоко оценены и в Советском Союзе. Когда в 1934 году были вновь введены ученые степени кандидата и доктора наук, отмененные в 1918 году, Игорь Васильевич Курчатов стал одним из первых докторов физико-математических наук. Ему присваивают ученое звание профессора. В Политехническом институте будущим электротехникам и радиофизикам он читает курс «Теория диэлектриков». А молодому профессору и доктору наук всего лишь 31 год!

У Курчатова много друзей. Его открытый характер, остроумие, внимательность и забота в отношениях со своими коллегами привлекает к нему людей. Еще в 1927 году он соединяет свою судьбу с Мариной Дмитриевной Синельниковой, сестрой своего лучшего друга еще с гимназической юности, с которой он прожил в мире и согласии тридцать три года и три дня. Оба любившие искусство, они отметили первые дни семейной жизни посещениями оперного театра – слушали «Евгения Онегина» и «Пиковую даму». Вскоре они сколотили группу молодежи и стали проводить свои отпуска в путешествиях, пеших и водных.

Через несколько лет Курчатов, как заведующий отделом и доктор наук, получает отдельную квартиру. И вместе с ним и его женой теперь живут отец и мать Игоря Васильевича.

Ядерная физика

1932-33 годы становятся рубежными в судьбе Курчатова. Он решает прекратить свои «диэлектрические» работы и передает их в руки своих коллег. Он чувствует, что главным в его судьбе должно быть другое – ядерная физика. Интерес к физике атомного ядра нарастал у Курчатова как следствие все возраставшего у него интереса к физике микромира, к электронам и атомам проводников и диэлектри-

ков, к тем неожиданностям, которые заложены в самой структуре микромира. Повидимому, он интуитивно чувствовал, что главным источником энергии будущего станет не энергия взаимодействия электронных оболочек атомов (в частности, химическая энергия горения топлива). Гораздо большая энергия таится в самой сердцевине атомов, в атомном ядре.

Кстати отметим, что во всем мире эту энергию уже много лет называют ядерной и первоначальные термины (атомная энергия, атомная бомба и др.), возникшие в широкой прессе, по неоднократным настояниям физиков были заменены на более отвечающие сути дела термины с определением *ядерный*. В нашей стране этого не произошло. Несколько лет назад на сайте «Русский язык» была дискуссия по этому вопросу. Физики в этой дискуссии участия не принимали, им вопрос был ясен. Филологи, возможно так и не разобравшиеся в сути дела, предлагали слова *атомный* и *ядерный* считать синонимами в применении к энергии, оружию, электростанции и т.д. Может быть, они и правы. Конечно, в этой статье терминология будет физически обоснованной (за исключением цитирования исторических документов, как это сделано, например, в заголовке статьи).

1932 год был переломным в становлении ядерной физики. Вернее, она родилась в этом году как важнейшая отрасль физической науки. Учеником Резерфорда Джеймсом Чедвиком был открыт нейтрон, появилась гипотеза о протонно-нейтронном строении ядра (В.Гейзенберг, Д.Иваненко), теория альфа-распада (Г. Гамов), гипотеза о нейтрино и первая теория бета-распада (В.Паули, Э.Ферми).

И «главный физик страны» А.Ф. Иоффе принимает решение – расширить фронт исследований атомного ядра. Фактически нужно было не расширять фронт, а начинать эти исследования. Атомным ядром в институте пока еще почти никто не интересуется. И Курчатов прежде всего открывает просветительский «фронт работ». С ноября 1932 года он организует ядерный семинар – каждый четвертый день шестидневки (тогда отмененная ранее семиднев-

ная неделя еще не вернулась в страну). Он регулярно выступает на этом семинаре, рассказывая обо всех новых открытиях в физике атомного ядра.

Уже через год в Физико-техническом институте состоялась первая Всесоюзная конференция по атомному ядру. Ее председателем был И.В.Курчатов. В заключительном слове А.Ф.Иоффе сказал: «В качестве основной проблемы на вторую пятилетку мы намечаем также проблему ядра атома». Но прежде всего нужно было создать машины для ускорения протонов (ускорители) и приборы для регистрации продуктов бомбардировки ядер и их излучений. Курчатов возглавляет и эти направления работ в Ленинграде и Харькове. Начинается проектирование строительства мощных циклотронов.

А когда во Франции (Ирен и Фредерик Жолио-Кюри) и в Италии (Энрико Ферми) развернулись исследования результатов взаимодействия нейтронов с атомными ядрами, группа Курчатова включила в свои планы и эти исследования. Но, к сожалению, их размах был невелик. Главной причиной этого была ограниченность доступа к радио – в стране был всего один грамм этого драгоценного металла и хранился он в подвалах Центрального банка. «Аренда» этого грамма на некоторое время была связана с длительными бюрократическими процедурами. А радий был необходим для получения нейтронов – единственным их источником была ядерная реакция взаимодействия бериллия с альфа-частицами, образующимися при радиоактивном распаде радия. Поэтому нейтронные эксперименты в группе Курчатова шли от случая к случаю.

Но кое-что все-таки удалось сделать. Курчатов с сотрудниками открывают новое явление – изомерию атомных ядер. Это интересное явление заключается в том, что некоторые продукты взаимодействия ядер с нейтронами имеют несколько путей своего радиоактивного превращения, т.е. несколько разных периодов полураспада. Значит, это чем-то различающиеся ядра, хотя и представляют один и тот же изотоп (одно и то же число протонов и

нейтронов в ядре). Открыть это явление было непросто – для этого требовалось особенно тщательно проводить исследования и фиксировать их результаты.

В 1938 году молодые сотрудники лаборатории атомного ядра Георгий Флёрв и Константин Петржак начали заниматься нейтронным облучением урана. В ходе этих работ с участием Курчатова было открыто явление самопроизвольного деления ядер урана.

Но в отличие от зарубежных работ главным направлением исследований в курчатовской лаборатории оставалась бомбардировка ядер протонами, для чего требовались мощные ускорители. Строительство первого циклотрона потребовало решения многих научно-технических и организационных задач. А ведь стране не до этого – все усилия направлены на укрепление ее обороноспособности. Ядерная физика пока представляется чисто научной задачей. И только преодолевая все препятствия энергия Курчатова позволяет все-таки наметить пуск мощного циклотрона на 1 января 1942 года.

Защита кораблей от мин

Однако грянула Отечественная война. Ленинград в опасности. Физико-технический институт вместе с большинством научных учреждений города эвакуируется в Казань, молодые научные сотрудники мобилизуются или уходят добровольцами на фронт. А.П.Александров (будущий президент Академии наук СССР) и И.В.Курчатов мобилизованы для работ по защите военных кораблей от немецких мин нового типа, реагирующих на искажение земного магнетизма магнитным полем стального корпуса корабля. За время второй мировой войны немцами было установлено больше 100 тысяч таких мин (вернее, они не ставились, а сбрасывались с самолетов и автоматически оставались в плавающем подводном положении). Огромные потери нес английский флот. В 1939-41 годах А.П.Александровым с сотрудниками в обстановке глубокой секретности был разработан способ защиты от таких мин. А Курчатов еще

помнил свою первую любовь – корабли. И эта работа была как раз в его духе. Она требовала и расчетов магнитных полей, и точных измерений, и инженерной смекалки по установке защитных магнитных устройств (проводов и катушек).

Когда вскоре стало ясно, что Курчатов полностью овладел новой для него работой, Александрова переводят для этих работ на Северный флот, а Курчатов остается во главе работ на Черноморском флоте, в Севастополе. Под его руководством были созданы две мастерские, в которые вводили корабли для установки на них магнитных устройств, и специальная станция для контроля отсутствия искажений поля земного магнетизма. Согласно строгому приказу командующего флотом, ни один корабль не мог выйти в море, не пройдя контрольных измерений.

Курчатов не только руководил всеми работами. Он не гнушался и черновой работы по проверке приборов и установке магнитных устройств на кораблях. Это давало ему право требовать напряженной и ответственной работы от всех ее участников. Моряки и те физики, которые мало знали Курчатова, поражались его активности, организаторским способностям и внимательностью к людям. У него установились отличные отношения с командованием флотом, что было очень важным для успешной работы. В Севастополе однажды появилась группа британских морских офицеров для передачи своего опыта – в Англии подобные работы начались раньше. Но наоборот – им пришлось перенимать опыт курчатовской группы. Они были поражены научными и инженерными успехами русских ученых.

В начале ноября 1941 года немцы вплотную подошли к Севастополю. После девятилетнего перерыва началась вторая осада этого города. Стало ясно, что город придется оставить. И 4 ноября группа Курчатова со всем своим оборудованием эвакуируется из горящего Севастополя на плавучей базе подводных лодок. Полное драматических событий плавание закончилось благополучно, несмотря на все попытки немцев найти в море эту базу. В

Поти Курчатов развертывает размагничивающие работы кавказской флотилии в мастерской, подобной севастопольской. Он получает задание развернуть такие же работы в Баку для Каспийской и Волжской флотилий.

Но в Баку Курчатов получает приказ срочно прибыть в Казань. Кончилась его «противоминная война». Восемь ученых и инженеров, в том числе А.П.Александров и И.В.Курчатов, становятся лауреатами Сталинской премии первой степени. Конечно, сведения об этом награждении нигде не публикуются.

Главная судьба жизни

В Казани Курчатова ждала другая судьба, определившая всю его последующую жизнь. Но он еще ничего не знает об этом. Догадывается только один человек – «папа Иоффе», который уже назвал имя Курчатова в секретном разговоре на самом верхнем эшелоне власти.

Курчатов намечал поездку в блокадный Ленинград, чтобы вывезти оттуда не только оставшиеся детали циклотрона, но и своих родителей, которым он в заботах о



И.В.Курчатов в 40-е годы. Еще без орденов и медалей, но уже с красивой черной бородой. Начало работы над бомбой

вывозе оборудования накануне блокады не смог помочь с эвакуацией. Но поездка не состоялась. Курчатов прилетел в Казань уже в тифозной горячке и длительное время провел на больничной койке – сначала сыпняк, потом воспаление легких, затем нелады с сердцем. Все эти месяцы он не брился, и у него появилась замечательная борода «лопатовой», которая тогда имела интенсивно черный цвет. С этого времени заочным «именем» Курчатова стало *Борода*. Так его уважительно и одновременно любовно впоследствии называли все – от рядовых сотрудников до маршалов и наркомов. Во время болезни ему пришлось узнать горестную весть. В блокадном Ленинграде умер его отец, а мать, эвакуированная по «Ледовой дороге», скончалась от сердечного приступа в Вологде.

Выздоравливающий Курчатов подключается к военным заданиям, руководит работами по созданию брони нового типа (слоистой, или, как стали ее для секретности называть, «конструктивной»). Его требует к себе и военно-морской флот, и военная авиация. Но Иоффе не отпускает его из Казани, и Курчатов уже понимает причину этого. В институтском журнале регистрации командировок 9 января 1943 года появляется лаконичная запись: «Заведующего лабораторией И.В. Курчатова и члена-корреспондента АН СССР А.И.Алиханова полагать в командировке». Срок командировки, ее назначение и место не указаны.

Началась новая жизнь Игоря Васильевича Курчатова. Прочитаем Я.Голованова, автора замечательных биографий ученых: «Как мог понять он тогда, что станет ученым совершенно нового типа, склада характера и практики работы? Никто до него не объединял в себе, вернее, не сплавливал в себе воедино ученого, политика, государственного деятеля. Ни один физик до него не пользовался такой властью и не нес такую ответственность. Подобно древним полководцам, он основал огромную империю. Но символом ее был не меч, а щит. Это была атомная империя».

В 1941-42 годах прекрасно работавший научный отдел управления внешней раз-

ведки получил подробные материалы о разворачивании атомных (ядерных) работ в США и Великобритании. Эти материалы легли на стол руководителя государственной безопасности страны Л.П.Берии. Вначале он не придавал им значения, но все же доложил о них И.В.Сталину, председателю Государственного комитета обороны (ГОКО) – высшего государственного органа во время войны). В это же время Сталин получил еще одно известие, не связанное с ведомством Берии.

Сотрудник Курчатова, Георгий Николаевич Флёрв, был мобилизован в начале войны на курсы Военно-воздушной академии и на фронте стал инженером авиационного полка по срочному ремонту поврежденных самолетов. Один из открывателей явления самопроизвольного деления урана, он чувствовал, что урановая проблема должна приобрести важнейшее значение, и писал об этом своим коллегам и друзьям. В 1942 году полк был отозван на переформирование в Воронеж, который еще не был захвачен немцами. И там первым делом Флёрв отправился в университет и стал просматривать научные журналы последних лет, имевшиеся в университетской библиотеке. И его поразило, что начиная с осени 1940 года ни одной научной статьи по ядерной физике в английских и американских научных журналах нет. Флёрв понимает, что прекратиться ядерные работы не могли. Значит, дело в другом – ядерная физика приобрела военное значение. Учитывая, что ядерная реакция деления урана была открыта немецкими радиохимиками, Флёрву стало ясно, что американские и английские физики договорились не печатать статей о своих работах, в которых они наверняка достигли каких-то успехов, чтобы скрыть их от немецких ученых. И он начинает писать письма о необходимости развертывания работ по ядерной физике и по урану. Пишет уже не только своим коллегам, но и в Президиум Академии наук, в правительство и, наконец, в Государственный комитет обороны. Уполномоченный ГОКО, отвечающий за научные работы для военных целей, председатель Всесоюзного ко-

митета по делам высшей школы С.В.Кафтанов передает письма непосредственно И.В.Сталину.

И 28 сентября 1942 года, несмотря на тяжелейшую военную обстановку на юге страны, Сталин подписывает распоряжение ГОКО №2352сс («сс» означает «совершенно секретно») «Организация работ по урану». Оно начинается так:

«Обязать Академию наук СССР (академик Иоффе) возобновить работы по исследованию осуществления использования атомной энергии путем расщепления ядра урана и представить Государственному комитету обороны к 1 апреля 1943 года доклад о возможности создания атомной бомбы или уранового топлива.

Для этой цели:

1. Президиуму Академии наук СССР:

а) организовать при Академии наук специальную лабораторию атомного ядра...».

Характерно, что другие пункты Распоряжения обязывают ряд учреждений и предприятий организовать совершенно конкретные работы, связанные с получением изотопа урана-235 из природного урана различными методами. Совершенно ясно, что эти методы стали известны по данным разведки, а Кафтанов, изучивший материалы разведки, привлек Иоффе к подготовке Распоряжения и предложил Иоффе возглавить научное руководство урановой проблемой. Но Иоффе отказался. «Я уже стар для этого», – сказал он. И предложил вместо себя кандидатуру Игоря Васильевича Курчатова.

Но высшее руководство страны о Курчатове еще почти ничего не знало, и вопрос о его назначении научным руководителем урановой проблемы был решен только в самом конце 1942 года. И только тогда (после выздоровления Курчатова) появляется приказ по казанской группе Ленинградского физико-технического института о создании «специальной», т.е. глубоко засекреченной лаборатории. Ее заведующий – И.В.Курчатов. В лабораторию входят А.И.Алиханов, Г.Н.Флёров и другие сотрудники Курчатова, с которыми он работал до войны в Ленинграде. Январь

1943 года и стал фактическим началом героической атомной эпопеи.

Бомба

Изучив материалы разведки о ходе работ по урану в США и Великобритании, Курчатов понял, что для подготовки к 1 апреля 1943 года доклада Государственному комитету обороны о «возможности создания атомной бомбы или уранового топлива» времени уже не остается. А самое главное, он убежден, что обсуждать саму возможность этого уже незачем, она очевидна. Задача столь грандиозна, что для ее решения понадобится не просто возобновить научные работы по ядерной физике, а создать совершенно новую мощную отрасль науки и технологии, которая потребует огромных государственных усилий. Ему удается убедить в этом руководство страны. И он готовит распоряжение ГОКО от 11 февраля 1943 года, в котором «работы по урану» обретают уже статус важнейших работ государственного значения. Называются имена ответственных за эти работы: от Правительства – нарком М.Г.Первухин, от ГОКО – С.В.Кафтанов, от Академии наук – И.В.Курчатов. Это первое официальное признание Курчатова как научного руководителя проблемы.

Для подготовки самых первых необходимых научно-технологических проектов (по добыче урановых руд, получению из них чистейшего урана и разделению его изотопов) лаборатория Курчатова расширяется в несколько раз. Она переезжает в Москву, в помещения одного из геологических академических институтов в Пыжевском переулке. Вместо наименования «специальной», что прямо указывало на ее секретность, лаборатория получает название «Лаборатория №2 АН СССР». И хотя лаборатории №1 в природе не существовало, вскоре рождаются лаборатории с номерами от третьего до шестого. Все они в научном обиходе именовались попросту «двойка», «тройка» и т.д. Вскоре все они стали крупными секретными институтами Академии наук. А «двойка», их прародительница, стала, в конце концов, Институтом атомной энергии, которым Курчатов

руководил до конца жизни. Сегодня это крупнейшее научное учреждение, и называется оно Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».

Дальнейший путь И.В.Курчатова так тесно связан с советским атомным проектом, что трудно отделить вехи этого Проекта от деятельности его научного руководителя. На первой стадии Проекта решающими были даже не сами научные вопросы, а организация работ по всем направлениям.

Основными направлениями работ были:

- создание специальных геологических управлений для поисков урановых руд и организация работ по добыче этих руд на открываемых месторождениях;
- создание технологий получения сверхчистого урана и постройка химических комбинатов для этой очистки;
- научная разработка нескольких технологий извлечения из природного урана изотопа урана-235 и постройка комбинатов для этой цели;
- создание технологии получения из природного урана искусственного делящегося элемента (плутония) и постройка соответствующих комбинатов;
- создание специального конструкторского бюро для научных и технических работ по изготовлению самих «изделий», как во всех секретных документах стали именовать атомные (ядерные) бомбы;
- создание специальной измерительной аппаратуры и полигона для испытаний ядерного оружия.

По всем этим направлениям Курчатов подбирал наиболее компетентных и деятельных руководителей, административных и научных. И сам он стал не только физиком, но и геологом, и химиком, и строителем. Его слово было решающим при определении сроков выполнения работ и необходимости материальных и финансовых затрат. А затраты эти были необычно велики. Сверхвысокая степень очистки урана и плутония, малое содержание необходимого изотопа в природном уране требовали многократного (тысячекратного) повторения одних и тех же технологических операций. Заводские ли-



И.В.Курчатов и Н.Л.Духов

нии каждой операции на комбинатах могли иметь километровую длину.

Именно это предвидел Нильс Бор, когда в 1940 году считал неосуществимыми ядерные бомбы и ядерные электростанции. Но тем не менее, военно-промышленный потенциал и уровень развития науки в США смогли обеспечить преодоление этих трудностей. И этот факт, о котором Курчатов знал из данных разведки, поддерживал его веру в конечный успех.

Приходится иной раз слышать о том, что «бомбу» сделали американцы, а Советский Союз украл секрет и скопировал ее. При этом ссылаются на интервью 1994 года с одним из создателей ядерного оружия Главным конструктором Ядерного центра с 1946 по 2001 год Ю.Б.Харитоновом. Это было первое рассекречивание его имени и самого Центра, тогда называвшегося КБ-11, а ныне это Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики. В интервью Харитон сказал: «Да, это была копия американской бомбы». Формально, с точки зрения конструктора, это было верно. В КБ-11 в 1946-49 годах разрабатывались два варианта бомбы. Разработка одного, плутони-



Главный научный руководитель, Главный конструктор и Главный теоретик. Памятник И.В.Курчатову, Ю.Б.Харитону и Я.Б.Зельдовичу, разрывающим атом

евого варианта (РДС-1), опиралась на данные, полученные разведкой от английского физика Клауса Фукса, работавшего несколько лет в американском ядерном центре в Лос-Аламосе, и еще от нескольких американских физиков. Другой вариант, урановый (РДС-2), был целиком разработан в КБ-11. Оба варианта были готовы к осени 1949 года, но Сталин принял решение все-таки первым испытать американский вариант, чтобы понапрасну не рисковать.

Да, изделие РДС-1 было похоже на бомбу, уничтожившую 6 августа 1945 года Хиросиму. Но известен был только принцип и общая схема ее конструкции. Главный секрет, что такую бомбу можно сделать, перестал быть секретом в 1945 году. Но сотни секретов отдельных узлов конструкции требовали огромного труда для выполнения теоретических расчетов, инженерных проектов, создания макетов и их испытаний. Вот только один пример.

Было известно, что инициирование взрыва должно производиться с помощью сходящейся сферической ударной волны от взрыва химического взрывчатого вещества, облегающего плутониевый шар. Плутоний имеет вначале докритическую плотность. Это означает, что отдельные случайно появляющиеся нейтроны не могут начать лавинный («цепной») процесс де-

ления ядер плутония и вылетают за пределы активной зоны, ничего не совершив. Чтобы обеспечить начало и развитие цепной реакции, плутоний нужно сильно сжать, дабы увеличить вероятность встречи нейтронов с атомными ядрами.

В популярную литературу проник термин «критическая масса». А правильное говорить о критической плотности. Сжатие плутония до критической плотности и производится взрывом сферического слоя взрывчатки. Но чтобы обеспечить равномерное обжатие плутониевого заряда, ударная волна должна иметь идеальную сферическую форму. А как произвести подрыв, чтобы это произошло? Ведь никто никогда таких зарядов не взрывал. Из сообщений Фукса было известно, что для этого нужно произвести подрыв одновременно в 32 точках сферы. Не зная, как это было вычислено, решили взять 32 отдельные призмочки из взрывчатки, тесно расположив их в сферическом слое, и одновременно электродетонаторами произвести подрыв. Но очень долго ничего не получалось. Волна не получалась сферической и вместо равномерно обжатого макетного алюминиевого шара получались самые разнообразные формы, очень занятные с точки зрения абстрактного искусства, но совершенно не годящиеся для бомбы. На полигоне в КБ-11 гремели взрывы, их было сделано уже несколько сотен. Курчатов ежедневно получал сведения о результатах этих работ, вернее об отсутствии нужных результатов.

Руководитель этого направления И.А.Терлецкий, талантливый инженер из военного ведомства, придумал и просчитал оригинальную систему из 12 пятиугольных и 20 шестиугольных призм, составляющих общий сферический слой. И «юбилейный» тысячный взрыв показал — ударная волна получила наконец сферическую форму и макет плутониевого заряда после взрывного обжатия был идеальным шаром. Высшим шиком участников этих работ было прикурить от еще горячего после обжатия макета. И это только один эпизод из работы одной из 10 лабораторий КБ-11.

В другой лаборатории, например, бились над решением проблемы одновременности подрыва 32 зарядов с необходимой наносекундной точностью. Отметим кстати, что помещение электродетонаторов в заготовленные на корпусе бомбы отверстия было заключительной операцией после установки бомбы в точке предстоящего испытательного взрыва на Семипалатинском полигоне 29 августа 1949 года. Эту операцию выполнил (в полном одиночестве, за два часа до намеченного момента взрыва) один из Главных конструкторов атомного проекта Кирилл Иванович Щёлкин. Известен такой курьезный факт. Когда изделие РДС-1 прибыло спецрейсом на полигон, соответствующее ведомство (не знавшее о назначении этого наисекретнейшего предмета) потребовало от получателя расписки о его получении. К.И.Щёлкин поставил свою подпись. И долго потом с него требовали объяснения, куда он дел полученное *изделие*. А сказать правду он не мог из-за страшной секретности тогда всех атомных дел.

И, наконец, самое важное. По данным Фукса, делящимся материалом для первой американской бомбы был плутоний-94, которого в природе практически нет. Он может появиться в результате присоединения к ядру урана-238 нейтрона и двух последующих бета-распадов. Это может происходить в ядерном реакторе на медленных нейтронах, в котором применяется обогащенный уран (где содержание делящегося и дающего необходимый поток нейтронов изотопа урана-235 значительно по-

вышено). Эта идея появилась в США (Э.Лоуренс, Э.Ферми) и была осуществлена в конце 1942 года. Курчатов знал об этом – между прочим, ему, единственному физику, было позволено ознакомиться с данными разведки, полученными через Фукса. Но эти данные были слишком скудными. Курчатову пришлось самостоятельно полностью разработать всю идею получения плутония и принципы работы ядерного реактора. И в отличие от ученых США, он с самого начала разрабатывал идею ядерного реактора не только как источника плутония, но в первую очередь как идею «мирного атома», идею использования урана как топлива для получения энергии. И не случайно именно в нашей стране в подмосковном Обнинске заработала первая в мире атомная (ядерная) электростанция – 26 июня 1954 года состоялся промышленный запуск этой электростанции. Курчатов поздравил всех присутствовавших в зале управления электростанции шутливым «С легким паром, друзья!». А за семь с половиной лет до этого, 26 декабря 1946 года на окраине Москвы, на территории Лаборатории №2 его рукой был запущен опытный реактор для получения плутония.

Но, чтобы получить 20 кг плутония для первой бомбы, нужно было построить несколько грандиозных комбинатов. На одних заводах очищался и обогащался природный уран, на других сооружались реакторы для получения плутония. Это, пожалуй, стало главной заботой Курчатова на начальном этапе Атомного проекта. Важной задачей было и сооружение специального полигона для испытания бомбы и регистрирующих систем измерения всех видов излучений ядерного взрыва.

Когда в 1946 году в Великобритании начались работы по созданию собственной английской ядерной бомбы, то из Лос-Аламоса, американского ядерного центра, приехало 20 специалистов, в том числе и Клаус Фукс. И понадобилось целых 6 лет, чтобы состоялась испытание первой английской бомбы. А в Советском Союзе это было сделано за два с половиной года. Да, действительно передача Фуксом сведений об американской бомбе помогла сократить



И.В.Курчатов, Ю.Б.Харитон и К.И.Щёлкин

сроки создания бомбы. Но насколько? В литературе можно найти самые разные оценки сокращения сроков – от одного года до десяти лет. А когда встал вопрос об урановой бомбе, сброшенной 8 августа 1945 года на Нагасаки, то о ней уже не было никаких данных разведки. А в ней многое уже было другим, не похожим на плутониевую бомбу, не говоря уже о проблеме получения сверхчистого изотопа урана-235. Испытание урановой бомбы, изделия РДС-2, состоялось на Семипалатинском полигоне 24 сентября 1951 года. И это был первый в нашей стране сброс ядерной бомбы с самолета (только что созданного тогда бомбардировщика ТУ), готовая урановая бомба почти два года ждала своего носителя.

Так каково же все-таки в создании советского ядерного оружия значение сведений, полученных разведкой? Безусловно, некоторое время было сэкономлено. Но правдоподобно оценить это время нет никакой возможности. И думается, что главной помощью следует считать не сами отдельные детали, а сообщения о возникших огромных трудностях, как научно-технических, так и организационно-государственных, которые для решения проблемы необходимо было преодолеть. И то, что эти трудности были преодолены, вдохновляло Курчатова. А его горячая вера в успех дела заражала окружающих.

Ознакомиться с материалами Фукса из физиков-ядерщиков мог только Курчатов. И ему пришлось, не доказывая этого никому, принять единоличное решение об ускоренном сооружении ядерных реакторов (опытного и промышленных) для получения плутония, И нужно было создать новую отрасль химической и металлургической технологий.

Можно смело утверждать, что успех в этом был достигнут только благодаря воле и настойчивости Курчатова, благодаря его умению привлечь к руководству каждым направлением самых подходящих энергичных и знающих ученых, а также благодаря таланту и эрудиции самого Курчатова не только в физике, но и во многих областях химии и инженерного дела. Во время строительства атомных объектов его



И.В.Курчатов и А.Д.Сахаров

рабочее место перемещалось на стройки, где он вникал во все детали проектирования, строительства и монтажа. Не говоря уж об испытаниях «изделий», на которых он всегда был главным научным руководителем. А их при его жизни было больше 50.

Привлекая к проектированию водородной бомбы группу из Физического института АН СССР (И.Е. Тамм и А.Д. Сахаров), Курчатов уже тогда имел в виду будущее применение термоядерной реакции синтеза для получения электрической энергии, а не только для взрыва. Он организовал в Институте атомной энергии первые исследования в этом направлении (установка «Огра») и начал работы по созданию «Токамака». Эти работы были в 50-е годы строго засекречены. Но Курчатов возражал против этой секретности и добился разрешения в 1956 году выступить с докладом в Харуэлле (английском ядерном центре) о достижениях советских ученых в этом направлении. Этот доклад стал крупным событием не только в научном мире. Оказалось, что исследования в СССР намного опередили работы английских и американских ученых. Важным был поэтому и международный политический аспект этого раскритичивания.

Курчатов в конце 50-х годов лучше всех понимал, что главная политическая задача выполнена, что создание арсенала ядерного оружия в СССР – это надежная гарантия того, чтобы холодная война не переросла в горячую. И он уже мог переключиться почти целиком на решение задачи о «приручении» ядерной реакции синтеза гелия из изотопов водорода, созданию термоядерной электростанции. С самого

начала он добился того, что эти работы не были секретными, чтобы ученые всех стран смогли совместно решать эту труднейшую задачу, как это сейчас и делается в работе по созданию ИТЕР (международного термоядерного экспериментального реактора).

Все, кому повезло общаться с Курчатовым, запомнили его как деятельного, никогда не устающего ученого и руководителя, невероятно доброжелательного ко всем, с кем ему приходилось работать, – от простого слесаря до министров и генералов. С одинаковым приветствием «Физкульт-привет!» обращался он и к высокопоставленным участникам правительственных совещаний, и к коллегам. Даже, например, и к нам, «зеленым» научным сотрудникам, только что с вузовской скамьи, когда общался с нами на испытательном ядерном полигоне под Семипалатинском. Вот несколько штрихов.

Полигон, воскресный день, перерыв в испытаниях. Мы идем после завтрака в гостиницу. А навстречу нам стремительно идет, почти бежит Борода (так называли Курчатова заочно все). Он спешит на очередное совещание, несмотря на воскресное утро. «Физкульт-привет, мальчишки!» – бросает он нам на ходу. И нам становится неловко за наше намерение в выходной день пойти прогуляться по зеленым плавням Иртыша.

Научный центр полигона, наше рабочее место, где мы анализируем результаты ядерных испытаний. В сопровождении генералов и нашего научного руководителя входит Борода. Он в это время озабочен проблемой распознавания ядерных взрывов по их сейсмическому воздействию на земные недра – можно ли отличить это воздействие от природных землетрясений. А наша группа как раз этим занимается и в Москве, и на полигоне в период между испытаниями «изделий РДС». Несколько часов Курчатов без усталости беседует с нами, знакомясь с результатами наших работ. И нас поражает, как быстро он вникает в самую суть наших изысканий, как мгновенно оценивает то, на что у нас уходило немало времени. И при этом не только не «возвышается» над нами, а каким-то не-

уловимым образом показывает, что мы его мысли и без него уже знали, а ему нужно лишь наше подтверждение.

Вот эту необычайную доброжелательность к людям, особенно к молодым ученым, воспринимали от него и другие руководители Атомного проекта.

Курчатов ушел из жизни 7 февраля 1960 года после третьего инсульта. Одной из причин трагедии стала, конечно, огромная интегральная доза радиации, которую он получил в своем общении с ураном, плутонием и радиоактивными продуктами их распада. Впрочем, тогда еще и не умели толком определять биологические дозы получаемой радиации. Другой причиной стали его разногласия с руководством страны по поводу увеличения энергии водородных бомб на испытаниях на Новоземельском ядерном полигоне. А Курчатов спешил с исследованиями по мирному использованию энергии термоядерной реакции синтеза водородных ядер. Одну из первых конструкций он назвал «ДОУ-3», что расшифровывалось «до третьего удара», поскольку два инсульта уже состоялись. Не успел.

Прах Курчатова захоронен в Кремлевской стене. Его имя носят площади и улицы во многих городах России. Памятники ему установлены не только на родине, в городке Сим, или в Москве, но и во многих иных городах России и других стран, около ядерных электростанций. Город, возникший в казахстанской степи около Семипалатинска, бывший когда-то научным центром и штабом ядерных испытаний, носит гордое имя – город Курчатов. Сегодня там размещаются институты Казахстанского ядерного научного центра. В городе есть интереснейший музей истории ядерных испытаний на семипалатинском полигоне, в котором с уважением и любовью воссоздан кабинет, где Курчатов работал в периоды испытаний. Есть город Курчатов и в России – в Курской области, где работает одна из самых крупных в стране ядерных электростанций.

В веках останется память об ученом, отдавшем жизнь созданию ядерного щита Родины, который спас в те годы мир от угрозы ядерной войны.

Плотные упаковки шаров в пространстве

Н.ДОЛБИЛИН

НАУКА О ПЛОТНЫХ УПАКОВКАХ пространства равными шарами – одна из восхитительных математических теорий, находящаяся на стыке геометрии и теории чисел. Наиболее знаменитая задача этой теории – доказать, что пирамиды, составленные из одинаковых пушечных ядер, зачастую являющиеся фрагментами монументальных композиций, представляют собой наиболее плотное расположение равных шаров в пространстве, – на протяжении четырех веков оставалась нерешенной проблемой. Эта проблема, известная как гипотеза Кеплера, была впервые опубликована в небольшой книге Иоганна Кеплера «О шестиугольных снежинках» (1611). В отличие от знаменитых «законов Кеплера», первооткрывателем которых он был сам, о задаче о плотнейшей упаковке шаров Кеплер узнал от Томаса Хэрриота, английского математика и астронома.

Любое расположение равных попарно не перекрывающихся шаров называется *упаковкой шаров*. Если радиус шаров положить равным r , то, чтобы шары не перекрывались, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между центрами любых двух шаров было не меньше $2r$.

Плотность упаковки – это доля объема той части пространства, которая занята шарами. Определение плотности для произвольной упаковки технически сложное. В случае особых, регулярных упаковок определение плотности прозрачно. Если под регулярной мы будем понимать такую упаковку, в которой каждый шар содержится в ячейке одной и той же формы, то плотность упаковки естественно равна отношению объема шара к объему ячейки.

Примером регулярной упаковки является гексагональная упаковка на плоскости, в которой каждый круг касается шести соседей. В статье мы

– объясним, почему гексагональная упаковка является плотнейшей упаковкой на плоскости; в действительности эта задача с казалось бы очевидным ответом была решена лишь в 1890 году А.Туэ;

– докажем, что гранецентрированная упаковка является плотнейшей в трехмерном пространстве среди так называемых решетчатых упаковок; эта задача была решена великим математиком К.Гауссом в 1831 году;

– постараемся объяснить, почему центрированная гиперкубическая упаковка D_4 – самая плотная решетчатая упаковка 4-мерных шаров в 4-мерном пространстве; этот результат, полученный в 1873 году А.Н.Коркиным и Е.И.Золотаревым, знаменитыми учениками П.Л.Чебышёва, опроверг существовавшую в то время гипотезу Эрмита о том, что плотнейшая решетчатая упаковка в пространстве любой размерности построена на правильном симплексе – многомерном аналоге правильного тетраэдра;

– познакомимся со знаменитой 8-мерной упаковкой Коркина–Золотарева E_8 ; недавно молодой математик М.Вязовская доказала, что упаковка E_8 является самой плотной упаковкой в 8-мерном пространстве, за эту выдающуюся работу Марине Вязовской была присуждена в 2022 году Филдсовская медаль.

Гексагональная упаковка кругов: почему самая плотная?

То, что гексагональная упаковка равных кругов – самая плотная упаковка на плос-

кости, не вызывает ни малейших сомнений. Однако провести аккуратные рассуждения, доказывающие этот очевидный факт, оказалось не очень просто.

Мы постараемся обойти стороной чисто техническую трудность, которую представляет собой математически корректное определение плотности произвольной упаковки равных кругов на плоскости, помня при этом, что смысл плотности упаковки – это доля площади плоскости, покрытой кругами.

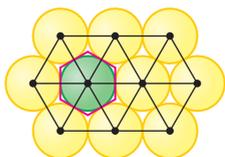


Рис. 1

Например, в гексагональной упаковке каждый круг лежит в правильном описанном шестиугольнике (рис. 1). Соответственно, плотность этой упаковки равна отношению площади круга к площади этого шестиугольника, а именно

$$\delta = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907.$$

Наша задача – показать, что при любом размещении попарно неперекрывающихся равных кругов на большом участке плоскости доля площади, покрытой кругами, не превышает δ .

Положим радиус круга равным $1/2$. Рассмотрим бесконечную упаковку кругов на плоскости, не обязательно плотнейшую. Если на плоскости остаются пустые места, в которые можно положить круг, не задевая кругов из упаковки, будем это делать до тех пор, пока упаковка не станет *насыщенной* – в том смысле, что к ней уже нельзя добавить новых кругов. Понятно, что плотнейшая упаковка обязана быть насыщенной.

Пусть \mathcal{X} – множество центров насыщенной упаковки. Так как круги не перекрываются, расстояние между любыми двумя точками из \mathcal{X} не меньше 1 (условие упаковки). В силу насыщенности упаковки, расстояние от любой точки плоскости до ближайшего центра меньше 1 (условие покры-

тия). Такие равномерно дискретные множества без больших пустот ввел в рассмотрение выдающийся геометр Борис Николаевич Делоне, и сейчас они называются в его честь *множествами Делоне*. По заданному множеству Делоне \mathcal{X} можно однозначно определить плитки (ячейки) Делоне, которыми замощается вся плоскость. Каждая *плитка Делоне* – это выпуклый многоугольник, такой, что

- 1) его вершины суть точки из \mathcal{X} ;
- 2) он вписан в окружность;

3) кроме вершин, других точек из \mathcal{X} ни на описанной окружности, ни внутри нее нет.

Например, в случае гексагональной упаковки кругов плитками Делоне являются правильные треугольники (см. рис. 1).

Плитки Делоне покрывают всю плоскость и попарно не перекрываются, образуя *разбиение Делоне* (рис. 2). Если все

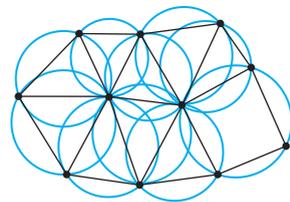


Рис. 2

плитки – треугольники, разбиение называют *триангуляцией Делоне* (подробнее о разбиениях Делоне см. статью «Многогранный Делоне» в «Кванте» №2 за 2010 г.).

Покажем, почему любая насыщенная упаковка имеет плотность, не превышающую плотность гексагональной упаковки. Напомним, что множество \mathcal{X} – это множество центров кругов радиуса $1/2$ насыщенной упаковки.

Лемма 1. *В разбиении Делоне для множества \mathcal{X} все стороны плиток не короче 1, а описанный радиус каждой плитки меньше 1.*

Это следует из того, что расстояние между центрами кругов упаковки не меньше 1, а сама упаковка предполагается насыщенной.

Лемма 2. *Каждый угол плитки меньше 120° .*

Предположим, что $\angle X_1 X_2 X_3 \geq 120^\circ$ (рис. 3). Тогда хотя бы один из двух углов $\angle O X_2 X_1$ или $\angle O X_2 X_3$ не меньше 60° , где O –

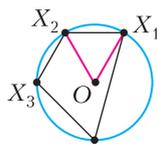


Рис. 3

центр окружности, описанной около плитки. Пусть $\angle OX_2X_1 \geq 60^\circ$. Отсюда следует неравенство $OX_1 = OX_2 \geq X_1X_2 \geq 1$, что невозможно по лемме 1.

Из леммы 2 следует, что каждая плитка в разбиении Делоне для множества центров кругов упаковки X имеет не более 5 сторон.

Впредь в этой статье будем круг (или шар) упаковки с центром Y будем именовать короче: круг (или шар) Y .

Из леммы 1 вытекает лемма 3.

Лемма 3. Сектор круга X_2 , вырезаемый углом $\angle X_1X_2X_3$, целиком расположен в треугольнике $X_1X_2X_3$ (рис. 4).

Действительно, по лемме 2 расстояние

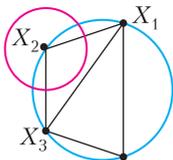


Рис. 4

от X_2 до прямой X_1X_3 больше $\cos 60^\circ = 1/2$, окружность радиуса $1/2$ не пересекает прямую X_1X_3 .

Итак, в случае насыщенной упаковки плитками Делоне могут быть треугольники, четырехугольники и пятиугольники, у которых все стороны не короче 1, а все углы меньше 120° .

Каждый четырехугольник и пятиугольник можно подразбить диагоналями на треугольники, в которых стороны не меньше 1, а все углы меньше 120° .

Лемма 4. Обозначим через S площадь треугольника Δ , у которого все стороны не меньше 1 и все углы меньше 120° . Тогда $S \geq \sqrt{3}/4$. Причем равенство достигается лишь тогда, когда треугольник Δ есть правильный треугольник со стороной 1.

В треугольнике Δ есть хотя бы один угол, обозначим его через α , удовлетворяющий неравенствам $60^\circ \leq \alpha < 120^\circ$. Площадь такого треугольника больше или равна $1/2 \cdot 1 \cdot 1 \sin \alpha \geq 1/2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}/4$.

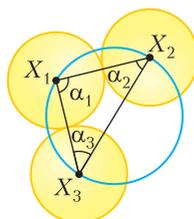


Рис. 5

Лемма 5. С треугольной плиткой $X_1X_2X_3$ пересекаются лишь три круга X_1, X_2, X_3 (рис. 5). Площадь области треугольника, которая занята кругами, равна $\frac{\pi}{8}$.

Действительно, то, что область треугольника, покрытая кругами упаковки, состоит из трех секторов кругов, центрированных в вершинах данного треугольника, и только из них, следует из леммы 3. Так как радиус круга равен $1/2$, площадь кругового сектора с углом α (радианная мера) равна $1/4 \cdot \alpha/2$. Поэтому суммарная площадь секторов в любом треугольнике Δ равна

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, площадь области, занятой единичными кругами, в каждом треугольнике равна $\frac{\pi}{8}$.

Следовательно, доля $\delta_i = \frac{\pi}{8S_i}$ участка в данном треугольнике Δ_i , покрытого кругами, зависит от площади S_i и всегда $\delta_i \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Теперь нетрудно оценить долю площади в любой сколь угодно большой области K , составленной из N таких треугольных плиток (рис. 6). На каждый треугольник Δ_i площади S_i приходится $\pi/8$ площади, покрытой кругами. Следовательно, доля

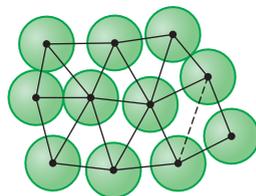


Рис. 6

покрытой площади во всей фигуре K равна

$$\frac{N \frac{\pi}{8}}{S_1 + S_2 + \dots + S_N} = \frac{N}{\frac{8S_1}{\pi} + \frac{8S_2}{\pi} + \dots + \frac{8S_N}{\pi}} \leq \frac{N}{N \frac{2\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Таким образом, доля площади, покрытой кругами, в фигуре K любой упаковки не превосходит плотности шестиугольной упаковки.

Решетчатые упаковки

Решение проблемы Кеплера о плотнейшей упаковке шаров в трехмерном пространстве очень сложное и основано на трудных и громоздких вычислениях. Лишь несколько специалистов в мире имеют полное представление о деталях доказательства.

Здесь уместно вспомнить, как Б.Н. Делоне, рассказывая о плотнейших упаковках шаров, каждый раз приводил один старый анекдот.

Конец XIX века, Петербург, зимний вечер, Сенатская площадь, почтенный господин что-то ищет на снегу под фонарем. Подходит полицейский, спрашивает в чем дело, может ли помочь.

Ищут вместе, долго, безрезультатно.

– Ваше благородие, может вы уронили алтын не здесь?

– Да, конечно, не здесь. Потерял-то я его во-о-он там, но там темно.

Б.Н. Делоне здесь имел в виду, что математики, начиная с Лагранжа и Гаусса, искали в первую очередь не плотнейшую упаковку шаров вообще, а упаковку, плотнейшую среди так называемых решетчатых упаковок. Поиск «под фонарем», т.е. задача о плотнейшей решетчатой упаковке, значительно проще общей задачи. Она полностью решена, например, для пространств всех размерностей, не превышающих 8. Более того, Г.Ф. Вороной предложил метод нахождения плотнейших решетчатых упаковок в пространстве любой данной размерности. Однако

нарастающие при повышении размерности трудности делают этот метод неосуществимым.

Решетчатая упаковка – это упаковка шаров, центры которых составляют решетку. А что такое решетка?

Решетка на прямой – это множество точек – концов векторов $m\vec{a}$, где \vec{a} – вектор, m – любое целое число (рис. 7).

Чтобы получить решетку на плоскости, нужно взять два неколлинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} с общим началом и рассмотреть все возможные их суммы с целыми коэффициентами m и n :

$$m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Решетка на плоскости – это множество концов этих векторов (рис. 8): Пара век-

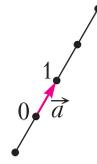


Рис. 7

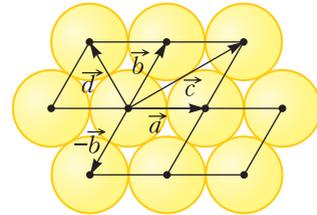


Рис. 8

торов \vec{a} и \vec{b} есть *базис* решетки. Параллелограмм, построенный на векторах базиса \vec{a} и \vec{b} , называется *основным* параллелограммом решетки. Понятно, что точки основного параллелограмма, у которого обе координаты целые, это четыре вершины $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и других точек решетки в основном параллелограмме нет.

Как базис решетки, так и основной параллелограмм можно выбрать неограниченным числом способов. Назовем лишь несколько базисов для гексагональной решетки, показанной на рисунке 8. Это – пары векторов (\vec{a}, \vec{b}) , (\vec{a}, \vec{d}) , (\vec{c}, \vec{b}) , $(\vec{c}, -\vec{b})$.

Трехмерная решетка в пространстве порождается тройкой некопланарных, т.е. не лежащих ни в какой одной плоскости, векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ с общим началом.

Трехмерная решетка Λ с базисом $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – это совокупность всех точек пространства, которые имеют целые координаты относительно этого базиса. Параллеле-

лепипед, построенный на векторах базиса, называется *основным*.

Решетки и упаковки: примеры

Рассмотрим трехмерную решетку Λ и обозначим через $2r$ минимальное расстояние между точками решетки Λ . Тогда шары радиуса r с центрами в точках решетки попарно не перекрываются и образуют упаковку. Максимальное значение r радиуса шара упаковки для решетки называется ее *радиусом упаковки*.

Естественно считать *плотностью* решетчатой упаковки Λ отношение

$$\delta_\Lambda = \frac{V(r)}{V_\Lambda},$$

где $V(r)$ – объем шара радиуса r и V_Λ – объем основного параллелепипеда решетки Λ .

Рассмотрим несколько примеров трехмерных решеток и соответствующих упаковок.

Кубическая решетка K_3 . Векторы базиса $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ направлены по ребрам единичного куба (рис. 9).

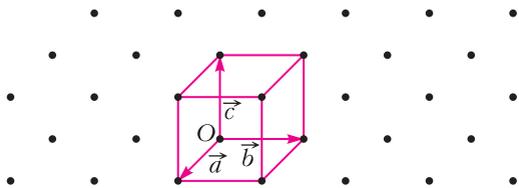


Рис. 9

Подсчитаем плотность упаковки шаров для кубической решетки. Длина ребра куба равна 1, радиус упаковки $1/2$, объем V_{K_3} основного параллелепипеда (в данном случае куба) равен 1. Объем шара

$$V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}.$$

Плотность кубической упаковки

$$\delta_{K_3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,524.$$

Гранецентрированная кубическая решетка (ГЦК-решетка). ГЦК-решетка – это решетка, построенная на векторах-ребрах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правильного тетраэдра (рис. 10).

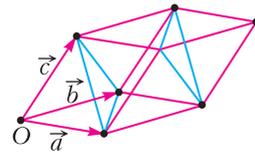


Рис. 10

Параллелепипед, построенный на правильном тетраэдре, называют *ромбоэдром*. Ромбоэдр – любопытный объект: посредством двух сечений (по синим отрезкам на рисунке 10) его можно разрезать на три правильных многогранника: два тетраэдра и октаэдр. Отсюда следует, что двугранный угол тетраэдра и двугранный угол октаэдра в сумме равны π .

Естественный вопрос: почему решетка, построенная на ромбоэдре, называется гранецентрированной кубической? Рассмотрим кубическую решетку K_3 (на рисунке 11 это совокупность вершин куба).

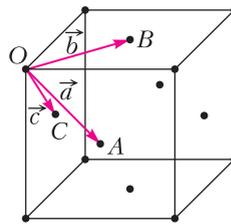


Рис. 11

Рассмотрим центры граней основного куба этой решетки и пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – векторы, идущие из некоторой вершины O куба в центры его граней, сходящихся в этой вершине.

Обозначим через $K_3 + \vec{a}$ решетку, полученную из K_3 сдвигом на вектор \vec{a} . Нетрудно проверить, что множество, которое есть объединение четырех кубических решеток

$$K_3 \cup (K_3 + \vec{a}) \cup (K_3 + \vec{b}) \cup (K_3 + \vec{c}),$$

само является решеткой, построенной на базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Легко убедиться в том, что параллелепипед, построенный на этом базисе, является ромбоэдром (рис. 12). Этот ромбоэдр вписан в куб решетки K_3 так, что пара его противоположных «остроугольных» вершин O, D – это противоположные вершины куба. А три другие пары вершин ромбоэдра расположены в цент-

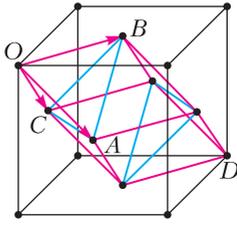


Рис. 12

рах всех 6 граней куба. Это те вершины, которые образуют правильный октаэдр, содержащийся в ромбоэдре.

Найдем плотность ГЦК-упаковки. Пусть ребро ромбоэдра равно 1, тогда радиус ГЦК-упаковки равен $\frac{1}{2}$. Объем ромбоэдра

ГЦК-решетки $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и, наконец, плотность

$$\delta = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2^3 \cdot \sqrt{2}} \pi = \pi \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0,7405.$$

ГЦК-упаковка плотнее кубической решетки. Ниже мы покажем, что она плотнейшая среди решетчатых трехмерных упаковок. ГЦК-упаковки помогут также понять, как устроена плотнейшая решетчатая упаковка в 4-мерном пространстве.

Треугольная пирамида или квадратная: какая упаковка плотнее?

При укладке пушечных ядер первый слой укладывали как в треугольную, так и в квадратную рамку. В одном случае получается треугольная пирамида, во втором – квадратная (рис. 13). Какая из этих упаковок плотнее?

При укладывании ядер в треугольную рамку первый слой является двумерной гексагональной упаковкой (рис. 14). Затем в лунки между шарами укладывают



Рис. 13

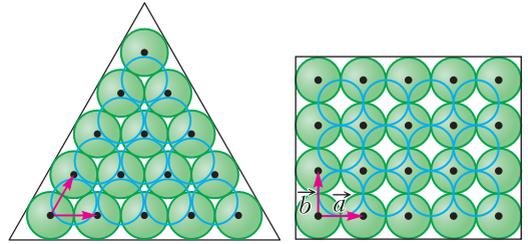


Рис. 14

Рис. 15

второй слой, в лунки между шарами второго слоя – шары третьего и т.д. В результате получаем фрагмент ГЦК-упаковки.

При использовании квадратной рамки первый слой представляет более рыхлую двумерную квадратную упаковку (рис. 15), в лунки которой кладутся такие же шары. Мы получаем фрагмент решетчатой упаковки с базисом $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, где векторы базиса идут из центра некоторого шара в центры касающихся с ним шаров. В прямоугольной системе координат, связанной с квадратной решеткой, легко записать координаты базиса решетки:

$$\vec{a}(1,0,0), \vec{b}(0,1,0), \vec{c}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Объем основного параллелепипеда, построенного на этом базисе, равен $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. объем тот же, что и у ромбоэдра – основного параллелепипеда в ГЦК-решетке. Следовательно, и плотность упаковки с квадратной основой та же, что и плотность ГЦК-упаковки.

Решетка, казалось бы, другая, а плотность упаковки та же. На самом деле эта решетка – это та же ГЦК-решетка, но увиденная «под другим углом зрения». Действительно, в решетке, построенной на базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, т.е. на квадратной основе, легко увидеть октаэдр $OABCDE$ (рис. 16).

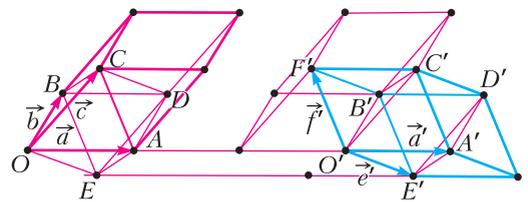


Рис. 16

Приславляя к нему два правильных тетраэдра (с вершинами из решетки), получаем ромбоэдр $O'A'B'C'D'E'$ – основной параллелепипед ГЦК-решетки, построенной на базисе $(\vec{a}', \vec{e}', \vec{f}')$. Этот ромбоэдр изображен синим цветом на рисунке 16.

Приведенный базис

У любой решетки различных базисов бесконечно много. Однако для работы с той или иной решеткой удобны лишь некоторые из них. Например, для квадратной решетки (рис. 17,а) из двух базисов (\vec{a}, \vec{b}) и (\vec{a}', \vec{b}') естественно выбрать первый.

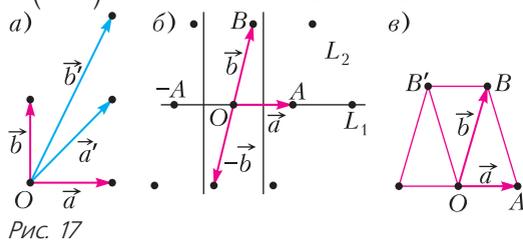


Рис. 17

В любой решетке среди различных ее базисов всегда можно выделить наиболее подходящий, так называемый *приведенный базис*. Приведенный базис строится в три этапа.

1-й этап. Обозначим произвольную точку в решетке Λ через O , и пусть $A \in \Lambda$ – одна из ближайших к O точек из Λ , неважно какая (рис. 17,б). Кратчайший вектор $\vec{a} = \vec{OA}$ в решетке, а часто и его длину, т.е. минимальное расстояние между точками решетки, называют *минимумом решетки*. Минимум \vec{a} порождает одномерную решетку $\mathcal{A} \subset \Lambda$ точек, лежащих на некоторой прямой L_1 .

2-й этап. Пусть точка $B \in \Lambda \setminus \mathcal{A}$ – ближайшая к O среди всех точек из Λ , не принадлежащих одномерной решетке \mathcal{A} . Часто вектор \vec{b} , кратчайший среди векторов, неколлинеарных минимуму \vec{a} , называют *вторым минимумом* решетки, хотя, заметим, в одномерной решетке \mathcal{A} может быть очень много векторов короче \vec{b} . В силу этого выбора точки B выполняются неравенства $|OA| \leq |OB| \leq |AB|$ и $|OB| \leq |(-A)B|$. Отсюда следует $60^\circ \leq \angle AOB \leq 120^\circ$.

Векторы \vec{a} и \vec{b} порождают двумерную решетку $\mathcal{B} \subset \Lambda$, лежащую в некоторой плоскости L_2 :

$$\mathcal{B} = \{k\vec{a} + l\vec{b}, k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

При этом не исключается, что в плоскости L_2 наряду с B может находиться еще одна ближайшая к O точка B' помимо точки, симметричной относительно O (рис. 17,в).

3-й этап. На этом этапе среди точек решетки Λ , не принадлежащих плоскости L_2 и, следовательно, не принадлежащих двумерной решетке \mathcal{B} , выбирается ближайшая к O точка $C \in (\Lambda \setminus \mathcal{B})$ и соответствующий вектор $\vec{c} = \vec{OC}$ («третий минимум»).

В силу выбора точки C , углы между вектором \vec{c} и векторами \vec{a} и \vec{b} удовлетворяют, как и раньше, неравенствам

$$60^\circ \leq \angle AOC \leq 120^\circ, \quad 60^\circ \leq \angle BOC \leq 120^\circ.$$

Покажем, что три «последовательных минимума» $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис решетки Λ . Для этого нужно убедиться в том, что в параллелепипеде Π , построенном на этой тройке векторов, помимо его вершин других точек решетки Λ нет. Почему это так, следует из утверждения, которое несложно доказать самостоятельно.

Утверждение. а) *Расстояние от произвольной точки параллелограмма со сторонами a, b до ближайшей к ней вершины не превосходит $\sqrt{a^2 + b^2}/2$.*

б) *Расстояние от произвольной точки параллелепипеда с ребрами a, b, c до ближайшей вершины не превосходит $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}/2$.*

Действительно, из утверждения следует, что расстояние от любой точки параллелограмма до ближайшей к ней вершины не больше $b \frac{\sqrt{2}}{2} < b$, где b – длина большей стороны параллелограмма. А расстояние от произвольной точки параллелепипеда до ближайшей вершины не больше $c\sqrt{3}/2 < c$, где c – длина наибольшего ребра параллелепипеда. Поэтому параллелепипед, построенный на трех последовательных минимумах, не может кроме вершин содержать других точек решетки.

Таким образом, тройка последовательных минимумов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является базисом решетки, который называется *приведенным* базисом.

В поисках плотнейшей упаковки «под фонарем»

Из соображений подобия плотнейшую решетчатую упаковку шаров можно искать среди всех решеток с минимумом 1. При этом условии радиус шаров упаковки равен $1/2$, а плотнейшая решетчатая упаковка достигается на решетке с минимально возможным объемом основного параллелепипеда.

В 1831 году Карл Гаусс доказал следующую теорему.

Теорема 1. *ГЦК-упаковка шаров является плотнейшей среди трехмерных решетчатых упаковок.*

Мы приведем геометрическое доказательство, из которого следует не только то, что ГЦК-решетка – плотнейшая упаковка, но и то, что любую решетчатую упаковку, отличную от ГЦК, можно непрерывной деформацией перевести в ГЦК, при этом постоянно уплотняя упаковку. Отсюда следует, что среди трехмерных решеток нет, кроме ГЦК, других даже *локально плотнейших* решеток.

Итак, мы будем рассматривать только решетки с минимумом 1. Пусть решетка Λ – одна из них и $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – ее приведенный базис, $a = 1 \leq b \leq c$. Предполагая, что $1 = a < b$ (вектор \vec{b} длиннее вектора \vec{a}), при помощи непрерывной деформации решетки придем сначала к промежуточной решетке Λ_1 с приведенным базисом $(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$ с условием $1 = a_1 = b_1 \leq c_1$. Далее, если $b_1 < c_1$, будем непрерывно изменять решетку Λ_1 до тех пор, пока не получим новую решетку Λ_2 , в приведенном базисе которой $(\vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{c}_2)$ все векторы – единичные: $1 = a_2 = b_2 = c_2$. Дальнейшая деформация решетки Λ_2 , которая приводит к ГЦК-решетке, осуществляется так называемым методом наката слоев.

Пусть \mathcal{A} – одномерная решетка в решетке Λ , порожденная вектором \vec{a} (рис. 18). Совокупность шаров радиуса $1/2$ с цент-

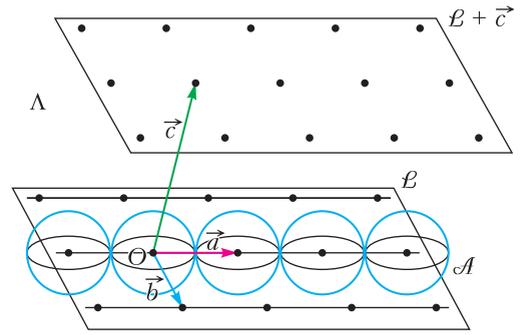


Рис. 18

рами в \mathcal{A} представляет собой прямолинейный бесконечный в обе стороны ряд последовательно касающихся между собой шаров, похожий на туго натянутую нитку бус. Вся же упаковка Λ состоит из бесконечного числа параллельных друг другу рядов. Ряды шаров, которые лежат в плоскости векторов \vec{a} и \vec{b} , образуют двумерную *слоевую* упаковку $\mathcal{L} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A} + m\vec{b})$. Тогда

$$\Lambda = \bigcup_{m,n=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A} + m\vec{b} + n\vec{c}) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L} + n\vec{c}).$$

Будем непрерывно деформировать решетку Λ , оставляя неизменными векторы \vec{a} и \vec{c} и уменьшая вектор \vec{b} :

$$\vec{a}(t) \equiv \vec{a}, \vec{b}(t) = t\vec{b}, \vec{c}(t) \equiv \vec{c}, 0 < t \leq 1.$$

Понятно, что соседние ряды \mathcal{A} и $\mathcal{A} + t\vec{b}$ при уменьшении t сближаются и при $t = 1/b$ шары с центрами O и $\frac{1}{b}\vec{b}$ касаются друг друга. В силу того, что исходный базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ приведенный, при такой деформации решетки первый контакт шаров между собой происходит при $t = 1/b$.

Однако вместо того, чтобы доказывать это, мы допустим, что первый контакт между шарами происходит не обязательно при $t = 1/b$, а в некоторый момент t_1 , где $1/b \leq t_1 < 1$. Так как в решетчатой упаковке все шары окружены другими совершенно одинаково, первый контакт между шарами при $t = t_1$ происходит у всех шаров одновременно. В том числе и у шара O , который соприкасается с некоторым шаром с

центром B_1 , причем этот центр, отметим, не обязательно конец вектора $t_1\vec{b}$.

Полученная решетка Λ_1 с базисом $(\vec{a}, t_1\vec{b}, \vec{c})$, очевидно, плотнее, чем Λ , и ее минимум по-прежнему равен 1. Но этот базис, вообще говоря, не является приведенным, так как новый (контактный) вектор \vec{b}_1 может оказаться короче вектора $t_1\vec{b}$ из прежнего базиса. Построим по той же схеме приведенный базис решетки Λ_1 , включив в него кратчайший единичный вектор \vec{a} , $a = 1$, затем кратчайший, неколлинеарный с \vec{a} , тоже единичный вектор \vec{b}_1 . Кратчайший вектор в Λ_1 , не лежащий в плоскости векторов \vec{a} и \vec{b}_1 , обозначим через \vec{c}_1 . Он, вообще говоря, тоже может отличаться от вектора \vec{c} , входившего в прежний базис решетки Λ .

Дальше, если длина $c_1 > 1$, то, сохраняя векторы \vec{a} и \vec{b}_1 , будем непрерывно уменьшать вектор \vec{c}_1 , $\vec{c}_1(t) = t\vec{c}_1$, до тех пор, пока шар O не коснется еще одного шара – C_2 . Получившаяся в этот момент решетка Λ_2 имеет три некопланарных единичных вектора $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}_2$ и плотнее всех предыдущих решеток.

Метод наката слоев, с помощью которого осуществляется дальнейшее уплотнение упаковки, описан в книге Б.Н.Делоне «Петербургская школа теории чисел». Он очень важен при нахождении плотнейших решетчатых упаковок в пространствах 4, 5, 6, 7 и 8.

Подробнее о методе наката слоев будет рассказано во второй части статьи.

(Продолжение следует)

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Разумное моделирование

С.ДВОРЯНИНОВ

*Единица – вздор,
единица – ноль,
один –
даже если
очень важный –
не подымет
простое
пятивершковое бревно,
тем более
дом пятиэтажный.*

В.В. Маяковский

В ПЕРВОМ КЛАССЕ ТОЛИК ВТУЛкин учился неплохо. Можно сказать, хорошо. Даже очень хорошо. По всем предметам, а особенно по математике. Целые числа он умножал и делил быстрее

всех. Порой во втором классе ему становилось скучно решать обычные задачи по программе. И вот однажды он взял в руки учебник арифметики для 5 класса, а там была такая задача.

Задача 1. *Первая бригада может выполнить задание за 36 часов, а вторая бригада может выполнить то же задание за 18 часов. За сколько часов это задание выполнят две бригады при совместной работе?*

Условие задачи простое, и Толик сразу начал представлять, каким может быть это задание. В чем состоит работа, о которой идет речь в задаче?

Здесь может быть много вариантов: бригады должны вспахать поле, на мебельной фабрике надо изготовить стулья или столы, в кондитерском цехе надо испечь пряники. А какое поле? Сколько столов надо сделать и сколько испечь пряников?

Пусть надо изготовить 100 столов. Удобно нам использовать это число – 100? Сколько столов делает при этом первая бригада за один час? Нет, число 100 не подходит, 100 не делится нацело на 36. Предположим, что столов надо сделать 36. Тогда первая бригада делает 1 стол за час,

а вторая бригада – 2 стола за час. Если они работает вместе, одновременно, то за каждый час делают 3 стола. На изготовление 36 столов у них уйдет $36 : 3 = 12$ часов. Задача решена.

Толик посмотрел ответ в учебнике – задачу он решил верно. А раз так, то почему бы не решить еще задачу? Азарт!

Задача 2. *Вода из первой трубы заполняет бассейн за 20 часов, вода из второй трубы – за 30 часов. За сколько часов заполнит бассейн вода, вытекающая одновременно из обеих труб?*

– Так, есть бассейн, в нем вода, – начал размышлять Толик. – А какой бассейн – большой, маленький? Сколько литров вмещает? Пусть литров... Толик задумался.

– Хорошо будет, если число литров разделится нацело и на 20, и на 30. Есть такое число, пусть бассейн вмещает 60 литров. Мало? Пусть это будет не бассейн, а аквариум, нет разницы, что заполнять. Тогда первая труба дает $60 : 20 = 3$ литра воды в час, вторая $60 : 30 = 2$ литра. Через обе трубы за час в бассейн попадают $3 + 2 = 5$ литров воды. А полностью бассейн заполнится за $60 : 5 = 12$ часов. И эту задачу Толик решил верно.

Тут пришло ему время удивиться. Что же получается? Он – второклассник, а умеет решать задачи за 5 класс! Он попытался прочитать то, что написано о решенных им задачах в учебнике. Но понять ничего не смог. Там были какие-то неизвестные ему дроби, а в первой задаче вся работа принималась за единицу...

Когда Толик рассказал свои решения нашему учителю Ивану Петровичу, то получил задание сделать доклад на эту тему. Потом Иван Петрович пояснил, как довести решения Толика до совершенства, чтобы к решениям не было никаких претензий и замечаний.

В первой задаче про две бригады все задание (или всю работу) надо разделить на 36 равных частей. Тогда первая бригада за час выполняет 1 часть этого задания, вторая – 2 части. При совместной работе они выполняют за один час 3 части задания. Всего частей работы 36, делим 36 на 3 и получаем 12 часов.

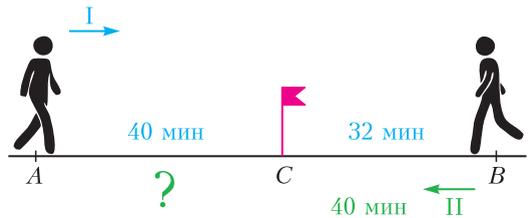
Для чисел 36 и 18 число 36 является наименьшим общим кратным, обозначает-

ся НОК (36, 18). Это – наименьшее число, которое делится и на 36, и на 18. Во второй задаче объем бассейна мысленно надо разделить на 60 равных частей. Здесь число 60 – это НОК (20, 30).

Школьные учебники учат в подобных задачах всю работу (или объем бассейна, или расстояние) принимать за единицу. Но такое математическое моделирование работы или объема неразумно, поскольку дальше школьникам приходится мучиться с обыкновенными дробями. Работу и объем следует делить на подходящее число частей. Именно так чаще всего поступают физики. Такой подход применим к задачам на работу, на бассейны, на движение.

Задача 3. *Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Они встретились через 40 минут после выхода. Через 32 минуты после встречи первый пришел в В. Через сколько минут после встречи второй пешеход пришел в А?*

Первый (I) пешеход прошел отрезок СВ за 32 минуты, второй (II) пешеход – за 40 минут (см рисунок). Выберем подходящее



число для моделирования этого отрезка СВ. Такое число – это НОК $(40, 32) = 160$. Будем считать, что отрезок СВ состоит из 160 (ста шестидесяти) равных кусочков (слово *кусочек* используем вместо слова *часть*). Тогда скорости пешеходов выражаются целыми числами. Скорость первого равна $160 : 32 = 5$ кусочков в минуту, скорость второго $160 : 40 = 4$ кусочка в минуту.

Расстояние от А до места встречи первый пешеход проходит за 40 мин, и оно равно $5 \text{ кус/мин} \cdot 40 \text{ мин} = 200 \text{ кус}$.

Теперь находим, за какое время проходит это расстояние второй пешеход:

$$200 \text{ кус} : 4 \text{ кус/мин} = 50 \text{ мин.}$$

И эту задачу мы решили, используя только целые числа. Мы обошлись без дробей.

Задачи

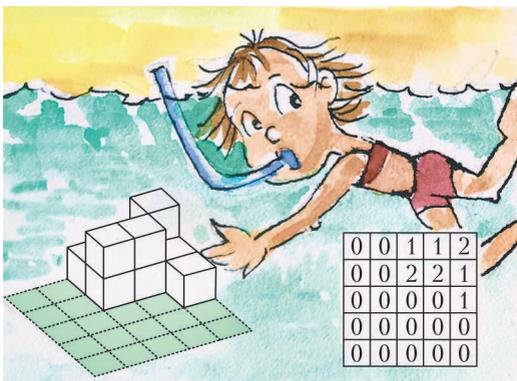
1. Дети посетили дельфинарий. Катя запомнила, что там было ровно 7 то ли выдр, то ли тюленей; Юра — что там было ровно 6 то ли морских котиков, то ли тюленей; Игорь — что там было ровно 5 то ли выдр,



то ли морских котиков; Сережа — что меньше всего там было то ли тюленей, то ли выдр. Никто из них не ошибся. Сколько выдр, тюленей и морских котиков было в дельфинарии?

Т.Казицына

2. Посреди пустого бассейна стоит квадратная платформа 50×50 сантиметров, расчерченная на клеточки 10×10 см. На клетки платформы Лена ставит башенки из кубиков $10 \times 10 \times 10$ см. Потом Таня включает воду. Если высоты башенок были такие, как в таблице на рисунке, то при уровне воды 5 см был 1 остров, при уровне



Задачи 1 и 2 предлагались на Математическом празднике, задачи 3 и 4 — на Московской устной олимпиаде.

воды 15 см было два острова (если острова «граничат по углу», то считаются отдельными островами), а при уровне воды 25 см все башенки оказались закрыты водой и стало 0 островов. Придумайте, какие башенки из кубиков можно поставить, чтобы количество островов было следующим:

Уровень воды (см)	5	15	25	35	45
Количество островов	2	5	2	5	0

В ответе напишите в каждой клетке квадрата 5 на 5 , сколько кубиков на ней стоит.

Т.Голенищева-Кутузова, И.Яценко

3. Сережа выписал все натуральные числа от 1 до N и заметил, что ровно 40% из них



начинаются с единицы. Докажите, что и N начинается с единицы.

С.Губанов

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB , BC и CD , а угол D равен сумме углов A и C . Чему равен угол $DAС$?

М. Евдокимов



Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2751–M2753 предлагались на заключительном этапе XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2757–Ф2760 предлагались на Инженерной олимпиаде школьников 2022/23 учебного года. Автор задач – С.Муравьев.

Задачи M2750–M2753, Ф2757–Ф2760

M2750. Пусть D, E, F – середины сторон BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC (рис.1), а H_a, H_b, H_c – ортоцентры

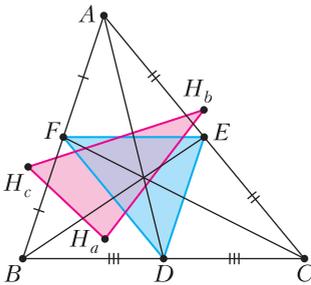


Рис. 1

треугольников ABD, BCE, CAF соответственно. Докажите, что треугольники $H_a H_b H_c$ и DEF – равновеликие.

Чан Куанг Хунг (Вьетнам)

M2751. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел – синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1?

С.Берлов

M2752. Квадрат 100×100 разбит на квадраты 2×2 . Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1). Какое наименьшее количество доминошек

могло оказаться внутри квадратов разбиения?

С.Берлов

M2753. В каждой строке таблицы $n \times 100$ (n строк и 100 столбцов) в некотором порядке стоят числа $1, 2, 3, \dots, 100$. Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

М.Антипов

Ф2757. На дороге лежит бревно радиусом r . Перпендикулярно бревну едет автомобиль (рис. 2), колеса которого имеют радиус R . Считая, что

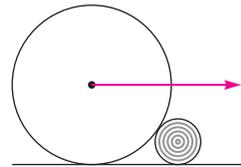


Рис. 2

коэффициенты трения колеса автомобиля о бревно и бревна о дорогу одинаковы, найдите, при каких значениях этого коэффициента колеса автомобиля смогут медленно переехать бревно. Весом бревна пренебречь.

Ф2758. С одноатомным идеальным газом происходит процесс $a-b-c-d-e$, для которого дан график зависимости изменения внутренней энергии газа с начала процесса

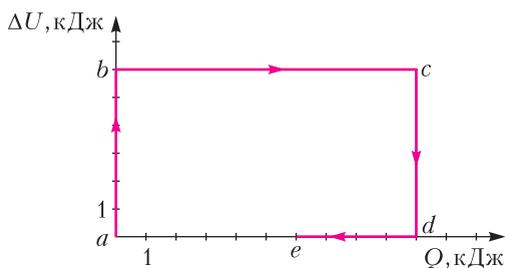


Рис. 3

от количества теплоты, сообщенного газу с начала процесса (рис. 3; единицы на осях показывают принятые для осей масштабы). Известно, что максимальная температура газа в течение всего процесса составляла $T_{\max} = 1000$ К, минимальная температура была $T_{\min} = 500$ К. Постройте качественный график зависимости давления газа от его объема в этом процессе и обоснуйте построение. Количество вещества газа не менялось.

Ф2759. К источнику электрического напряжения подключили 2023 конденсатора, соединенных параллельно. Затем источник отключили. Придумайте простейшее механическое устройство, которое меняло бы соединение всех конденсаторов на последовательное при одном переключении (с сохранением заряда каждого конденсатора). Опишите конструкцию этого устройства и принцип его работы. Как изменится при таком переключении напряжение на батарее конденсаторов и ее энергия?

Ф2760. Для предотвращения столкновений судов с землей в ночное время суток на берегу моря ставят маяки, которые должны предупредить корабли об опасном приближении к суше. Наиболее эффективно такие маяки работают, если они дают прерывистый световой сигнал. Рассмотрите следующую модель источника света для такого маяка (рис. 4). Неподвижный точечный источник света S находится на расстоянии $d = 50$ см от зеркала AB . Зеркало враща-

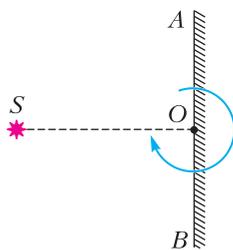


Рис. 4

ется с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через середину зеркала (через точку O на рисунке). По какой траектории движется изображение источника? Найдите скорость и ускорение изображения источника в зеркале.

Решения задачи М2738–М2741, Ф2745–Ф2748

М2738. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b . Оказалось, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = b$$

имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3 . Найдите корни уравнения

$$(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) = b.$$

Ответ: $-a_1, -a_2, -a_3$.

Так как многочлен $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1, c_2, c_3 , то он раскладывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b &= \\ &= (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3). \end{aligned}$$

Подставим $-x$ в последнее равенство вместо x , получим

$$\begin{aligned} (-x - a_1)(-x - a_2)(-x - a_3) - b &= \\ = (-x - c_1)(-x - c_2)(-x - c_3), \end{aligned}$$

что равносильно

$$\begin{aligned} (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) - b &= \\ = (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3). \end{aligned}$$

Полученное равенство многочленов означает, что тремя корнями многочлена $(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) - b$ (т.е. корнями уравнения $(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) = b$) являются числа $-a_1, -a_2, -a_3$. Задача решена. Несколько другое решение можно получить, применяя формулы Виета. Из условия следует

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 &= a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1, \\ c_1c_2c_3 &= a_1a_2a_3 + b, \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} (-a_1) + (-a_2) + (-a_3) &= (-c_1) + (-c_2) + (-c_3), \\ a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 &= c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1, \\ -a_1a_2a_3 &= -c_1c_2c_3 - b, \end{aligned}$$

из чего следует, что числа $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$ являются корнями многочлена

$$\begin{aligned} x^2 + (c_1 + c_2 + c_3)x^2 + (c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1)x + \\ + (c_1c_2c_3 - b) = (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) - b. \end{aligned}$$

А.Антропов, К.Сухов

M2739. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB < BC$ (рис. 1). Пусть M и N – середины сторон AB и AC

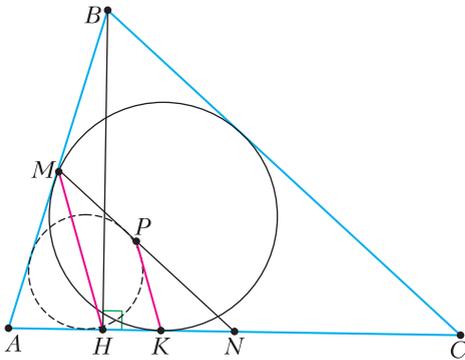


Рис. 1

соответственно, а H – основание высоты, опущенной из вершины B . Вписанная окружность касается стороны AC в точке K . Прямая, проходящая через K и параллельная MN , пересекает отрезок MN в точке P . Докажите, что в четырехугольнике $AMPK$ можно вписать окружность.

Совершим гомотегию с центром A и коэффициентом 2. При этой гомотегии точки M и N переходят в B и C соответственно; пусть точки K и P переходят соответственно в K' и P' (рис. 2). Тогда достаточно доказать, что четырехугольник $ABP'K'$ описан. Мы докажем, что он описан около вписанной окружности ω треугольника ABC . Три стороны четырехугольника уже касаются ω , поэтому достаточно доказать, что ее касается $P'K'$.

Пусть I – центр ω . Тогда $KK' = AK$, поэтому A и K' симметричны относительно KI . Далее заметим, что $\angle P'K'A = \angle PKA =$

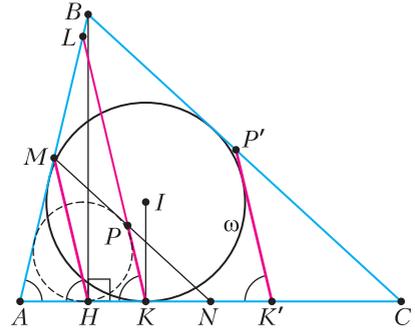


Рис. 2

$= \angle MHA$. Но MH – медиана в прямоугольном треугольнике AHB , поэтому $\angle MHA = \angle MAC$. Значит, $\angle P'K'A = \angle BAC$. Следовательно, и прямые AB и $K'P'$ также симметричны относительно KI ; поскольку одна из них касается ω , то и другая тоже. Это и требовалось доказать.

Приведем схему другого возможного решения, не использующего гомотегию. Если прямая PK пересекает прямую AB в точке L , то, как и в решении выше, получаем, что $\angle AKL = \angle AHM = \angle LAK$, откуда $LA = LK$. Далее несложным счетом в отрезках можно доказать равенство $ML - KL = KN - MN$, которое, как известно, эквивалентно условию «описанности» самопересекающегося четырехугольника $KLMN$.

П.Бибииков

M2740. Даны натуральные числа a, b, c такие, что $a > 1, b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a .

Из условия следует, что $(abc + 1) - (ab - b + 1) = abc - ab + b = b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$. Заметим, что b и $ab - b + 1 = (a - 1)b + 1$ взаимно просты, отсюда получаем, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$.

Далее замечаем, что $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1)$. Действительно, $2(ab - b + 1) = (2a - 2)b + 2 > (2a - 2)c + 2 = ac + (a - 2)c + 2 \geq ac + 2 > ac - a + 1$.

Значит, делимость $ac - a + 1$ на $ab - b + 1$ возможна только в случае равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$.

Имеем $ac - a = ab - b$, откуда $b = ab - ac + a = a(b - c + 1)$, значит, b делится на a . Задача решена.

В дополнение отметим, что из решения несложно получить полное описание всех троек, удовлетворяющих условию: $(a, b, c) = (a, ma, (a - 1)m + 1)$, где $a > 1$, $m > 1$ — произвольные натуральные числа.

М.Антипов

М2741. Дано натуральное число k . Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться?

Ответ: $3k - 1$.

Пронумеруем столбы от 1 до n вдоль дороги и примем за 1 расстояние между соседними столбами. Пару одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, будем называть хорошей.

Оценка. Пусть n столбов покрашены так, что условие задачи выполнено. Пусть n_i — количество столбов i -го цвета (далее считаем, что $n_i \geq 1$, т.е. все цвета присутствуют, иначе можно увеличить n , добавив столб нового цвета в конец). Пусть a_i и b_i — номера первого и последнего столбов i -го цвета.

Всего у нас есть $t = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k = n - k$ хороших пар столбов. Поскольку все расстояния между столбами в хороших парах различны, наименьшее из этих расстояний не меньше 1, следующее — не меньше 2 и т.д. Так, для суммы S расстояний во всех хороших парах мы получаем оценку $S \geq 1 + 2 + \dots + t = t(t + 1)/2$.

С другой стороны, сумма всех расстояний для i -го цвета равна $b_i - a_i$. Поэтому $S = (b_1 + \dots + b_k) - (a_1 + \dots + a_k)$. Сумма $b_1 + \dots + b_k$ не превышает суммы k самых больших среди номеров $1, 2, \dots, n$, а сумма $a_1 + \dots + a_k$ не меньше, чем сумма k наименьших среди номеров $1, 2, \dots, n$, поэтому

$$S \leq (n + (n - 1) + \dots + (n - k + 1)) - (1 + 2 + \dots + k) = k(n - k) = kt.$$

Итак, $t(t + 1)/2 \leq S \leq kt$, откуда $t \leq 2k - 1$ и $n = k + t \leq 3k - 1$.

Пример. Годится, например, покраска $1, 2, \dots, k - 1, k, k, k - 1, \dots, 2, 1, 2, 3, \dots, k - 1, k$. Здесь для цвета 1 есть единственная хорошая пара, и расстояние между столбами в ней равно $2k - 1$. Для всех остальных цветов есть две хорошие пары, при этом для цвета 2 имеем расстояния $2k - 3$ и 2, для цвета 3 — расстояния $2k - 5$ и 4 и т.д., для цвета k — расстояния 1 и $2k - 2$. Задача решена.

Отметим, что существуют и другие, более сложные примеры. Так, можно первые k столбов покрасить в цвета 1, 2, ..., k , а дальше столб с номером $k + s$, где $s = 2^p(2q - 1)$, окрасить в цвет q . Скажем, для $k = 8$ покраска будет выглядеть так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8.

М.Тихомиров, Ф.Петров

Ф2745. На отдельно стоящих роликовых легких опорах, оси которых находятся на расстоянии $l = 9$ м, лежит однородный рельс постоянного сечения. Ролики начинают вращаться, в результате чего рельс движется горизонтально с некоторой постоянной скоростью, как показано на рисунке 1 (масштаб не выдержан). Под



Рис. 1

опорами находятся динамометры. Зависимости показаний F динамометров от времени t для каждой из опор сняли и решили построить их графики. Однако лаборант, который должен был это сделать, случайно пролил на таблицы с данными кофе и смог восстановить только три точки (они показаны на рисунке 2). Помогите лаборанту восстановить графики. Определите массу рельса m . Найдите скорость рельса v . Какую минимальную длину L_{\min} мог иметь рельс?

Для начала определимся с тем, как будут меняться во времени силы реакции опор

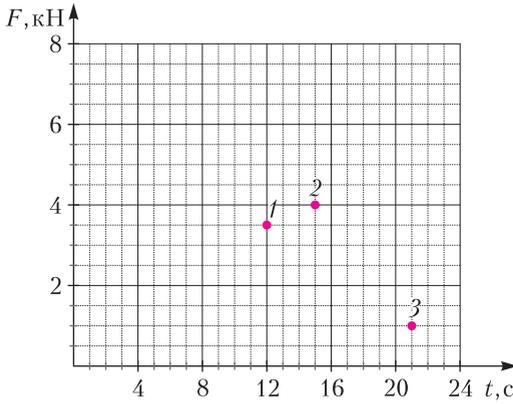


Рис. 2

(которые численно равны показаниям динамометров). Очевидно, что центр масс рельса на старте находится посередине между опорами. Пусть x – это расстояние от левой опоры до центра масс в начальный момент времени, F_1 и F_2 – показания левого и правого динамометров соответственно. Тогда через время t получим

$$F_1 l = mg(l - x - vt),$$

$$F_2 l = mg(x + vt),$$

откуда

$$F_1(t) = mg - \frac{mgx}{l} - \frac{mgv}{l}t,$$

$$F_2(t) = \frac{mgx}{l} + \frac{mgv}{l}t.$$

Видно, что в обоих случаях зависимость сил от времени линейная. В первом – убывающая, а во втором – возрастающая, причем коэффициенты при t отличаются только знаком. Кроме того, в любой момент времени

$$F_1 + F_2 = mg.$$

Очевидно, что из трех точек какие-то две принадлежат одному графику, а оставшаяся – другому. Возможны три варианта. Однако точки 2 и 3, а также точки 1 и 3 не могут лежать на одной прямой. В этом случае второй график пересечет ось x позже, чем начнется движение (а такого быть не может – рельс бы опрокинулся еще до старта). Покажем это аналитически.

Предположим, что точки 2 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравне-

ние прямой будет таким: $F_1(t) = -0,5t + 11,5$ (Н). В момент времени $t_1 = 12$ с из графика находим $F_2(t_1) = 3,5$ Н и, с учетом полученного уравнения прямой, $F_1(t_1) = 5,5$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ находим $F_1(t_0) = 11,5$ Н. А так как сумма показаний динамометров не изменяется, то $F_2(t_0) = -2,5$ Н < 0. Значит, наше предположение неверно.

Предположим теперь, что точки 1 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой будет иметь вид $F_1(t) = -\frac{5}{18}t + \frac{41}{6}$ (Н). В момент времени $t_2 = 15$ с из графика получаем $F_2(t_2) = 4$ Н и, с учетом полученного уравнения прямой, $F_1(t_2) = \frac{8}{3}$ Н $\approx 2,67$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ находим $F_1(t_0) = \frac{41}{6}$ Н $\approx 6,83$ Н. А так как сумма показаний динамометров не изменяется, то $F_2(t_0) = -\frac{1}{6}$ Н $\approx -0,17$ Н < 0. Следовательно, это предположение тоже неверно.

Значит, одному графику принадлежат точки 1 и 2. Тогда графики должны выглядеть так, как показано на рисунке 3.

Сразу оговоримся, что поведение графиков нам точно известно только до 21-й секунды. Время движения рельса будет зависеть от его длины. По графикам несложно определить, что $mg = 6$ кН, откуда $m = 600$ кг. Если мысленно продлить гра-

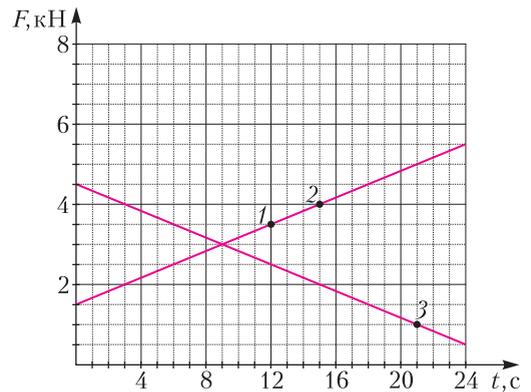


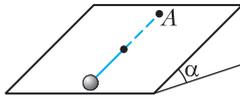
Рис. 3

фики до пересечения с осью x , то можно заметить, что расстояние l рельс проехал бы за 36 секунд. Значит, его скорость $v = 0,25$ м/с.

Что же касается минимальной длины рельса, то при ее оценке мы можем отгаликовать только от известных нам крайних положений. В начальный момент времени расстояние от центра масс до дальней (правой) опоры составляет 6,75 м, а в последний доподлинно известный нам момент (точка 3) расстояние от центра масс до дальней (левой) опоры равно 7,5 м. Отсюда можно сделать вывод, что длина рельса не меньше $L_{\min} = 15$ м

А. Евсеев

Ф2746. Жесткий невесомый стержень длиной L лежит на шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (см. рисунок). Один конец стержня шарнирно прикреплен к плоскости, а ко второму концу присоединен небольшой массивный груз.



Изначально стержень расположен так, что груз находится в самой нижней точке. Какую минимальную скорость v_1 , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он, двигаясь вместе со стержнем, смог оказаться в точке, диаметрально противоположной начальной (в точке А)? Какую минимальную скорость v_2 , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он смог вернуться в исходную точку после одного полного оборота стержня? Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $\mu = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$, трение между стержнем и плоскостью и трение в шарнире отсутствуют.

Так как стержень жесткий и изначальная скорость сообщена вдоль наклонной плоскости, то тело будет двигаться по окружности радиусом L .

При движении на груз действуют четыре силы: потенциальная сила тяжести и непотенциальные силы трения и реакции опор

со стороны стержня и плоскости. Сила реакции со стороны стержня и сила реакции со стороны плоскости в любой момент времени направлены перпендикулярно скорости, поэтому их работа равна нулю. Сила трения постоянна по модулю и в любой момент направлена против скорости, поэтому работа силы трения будет равна $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}s$, где s – длина пути, пройденного телом. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную плоскости:

$$N - mg \cos \alpha = 0.$$

Так как тело скользит, то на него действует сила трения скольжения, равная

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

Пусть скорость груза в верхней точке равна нулю. Запишем связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg \cdot 2L \sin \alpha - 0) + \left(0 - \frac{mv_1^2}{2}\right) = -\mu mg \cos \alpha \cdot \pi L.$$

Тогда скорость v_1 будет равна

$$v_1 = \sqrt{gL(4 \sin \alpha + 2\mu \pi \cos \alpha)} = \sqrt{(4 + \pi)gL \sin \alpha} \approx \sqrt{7,14gL \sin \alpha}.$$

Рассмотрим в произвольный момент времени проекции сил, действующих на груз, на ось, сонаправленную скорости. Ненулевыми на эту ось будут только проекции силы тяжести и силы трения. Пока груз движется от нижней точки к самой верхней, обе проекции будут отрицательными, значит, модуль скорости груза будет уменьшаться. В процессе дальнейшего движения проекция силы тяжести станет положительной и будет постепенно возрастать от нулевого значения. Следовательно, скорость тела первое время продолжит уменьшаться и достигнет минимума в точке, когда проекция силы тяжести скомпенсирует проекцию силы трения:

$$mg \sin \alpha \sin \beta - \mu mg \cos \alpha = 0$$

(здесь β – угол между стержнем и «верти» (Продолжение см. на с. 34))

...пуская кровь на Яве новоприбывшим европейцам, я сделал наблюдение, что взятая из плечевой вены кровь имеет почти всегда поразительно яркую красную окраску. Это явление приковало все мое внимание.

Юлиус Майер

В моей книжке «О сохранении силы» я намеривался лишь дать критическую оценку и систематизировать факты в интересах физиологов...

Герман Гельмгольц

Сердце... сжимаясь и расширяясь поочередно для выгона и принятия крови, рождает пульс или бой, отзывающийся во всех боевых жилах тела.

Владимир Даль

Пожалуй, ни один метод изучения магнитных свойств вещества не давал еще такую богатую информацию, как найденный Завойским резонансный.

Петр Капица

Мы научились связывать технологии и биологию: искусственные слух и зрение – удел уже сотен тысяч людей.

Дэвид Иглмен

Можно ли будет оживить тех, кого уже заморозили?

Обри ди Грей

А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + МЕДИЦИНА?

Необычайно интенсивный прогресс медицины происходит на наших глазах, все более впитывая новейшие достижения не только цифровых технологий, но и фундаментальных физических открытий. Клиники порой напоминают интерьеры из фантастических фильмов о лабораториях будущего, поражая обилием диагностической и лечебной аппаратуры, а работающие с ней «люди в белых халатах» – ученых-исследователей. Рентгенография, лазерные скальпели, протонная терапия, УЗИ, МРТ... – этот список только пополняется, лишь подчеркивая возрастающую роль науки в благородном деле врачевания, сохранения здоровья и продления жизни человека.

Нам всем так или иначе приходилось (и приходится!) обращаться к медикам. Попробуем взглянуть на область нашего с ними взаимодействия со ступенек школьного курса физики.

Вопросы и задачи

1. Почему при порезе пальца кровь вытекает равномерно, а не толчками, в такт биениям сердца?
2. Отчего больных с высокой температурой при отсутствии лекарств раньше растирали водой, смешанной со спиртом, а не просто водой?

3. Почему нагретая медицинская банка «присасывается» к телу человека?

4. Даже здоровые зубы начинают болеть от холодного мороженого. Чем это объяснить?

5. Зачем стоматолог перед осмотром рта пациента прогревает зеркальце?

6. Зубные врачи не рекомендуют есть очень горячую пищу. Почему?

7. Почему мы дрожим от холода, а на коже появляются «мурашки»?

8. Для чего проводят электроантисептирование – на время погружают овощи и фрукты в электростатическое поле?

9. С какой целью пациентов некоторых клиник помещали внутрь клетки Фарадея – металлической сеточной конструкции, а сегодня ее используют для размещения магнитно-резонансного томографа?

10. Во время операций тень от рук хирурга частично закрывает операционное поле. Как устранить такое неудобство?

11. Какой физический смысл имеет выражение: «Из глаз посыпались искры»?

12. Меняется ли расстояние наилучшего зрения у близоруких людей после надевания выписанных им очков?



13. Как будут выглядеть на специальном экране в рентгеновском кабинете кости человека и внутренние полости?

14. Для получения рентгеновских лучей, применяемых в медицине, необходимо, чтобы поток электронов ударял в одну точку антикатада трубки, а не падал на него широким пучком. Почему?

Микроопыт

Из пузырька с широким горлышком капать лекарство неудобно. Попробуйте воспользоваться старой «хитростью»: вставьте в горлышко надломанную под прямым углом чистую (без головки) деревянную спичку. Получилось накапать? Как это объяснить?

Любопытно что...

... как минимум три тысячи лет назад появились искусственные части тела. На сегодня самая древняя известная из них – это протез стопы, сделанный из дерева и кожи и обнаруженный на древнеегипетской мумии.

... придворный врач английских королей Уильям Гарвей, открывший в начале XVII века кровообращение, уподоблял человека миниатюрной модели Вселенной. Кровь, как и планеты, должна двигаться по кругу, в центре которого, подобно Солнцу, расположено сердце.

... еще в середине XVIII века профессор физики Туринского и Парижского университетов аббат Нолле описывал интереснейший опыт: при малейшем повреждении кожи наэлектризованного человека из ранки начинала бить струйка мельчайших капелек крови. Осмыслить это явление удалось лишь через полтора столетия – после появления работы лорда Рэля об устойчивости сильно заряженной капли, подверженной действию сил поверхностного натяжения.

... многие известные физики были по образованию врачами. Например: один из создателей волновой теории света Томас Юнг; сформулировавшие закон сохранения энергии Юлиус Майер и Герман Гельмгольц; Жан Фуко, экспериментально доказавший вращение Земли вокруг своей оси...

... за обнаружением в 1944 году электронного парамагнитного резонанса (см. эпиграф) последовала цепочка открытий все новых разновидностей магнитных резонансов, что позволило получать трехмерное изображение, не нарушающее целостность объекта, и стало одним из важнейших методов диагностики в медицине.

... искусственный кардиостимулятор – электрический прибор, помогающий сердцу биться с нужной частотой, – был впервые установлен пациенту еще в 1958 году. Сейчас во всем мире ежегодно людям имплантируют более миллиона кардиостимуляторов.

... кальций, самый тяжелый из химических элементов, содержащихся в нашем организме, преимущественно локализуется в костях, что делает их ясно видимыми при рентгеновских исследованиях. Эта информация крайне важна для космонавтов, теряющих кальций в условиях невесомости, и для разработки для них специальных нагрузок на костную ткань.

... успехи физики низких температур и созданные на ее основе новые технологии уже позволяют продлевать сроки хранения предназначенных для трансплантации органов и замораживать репродуктивные клетки. Правда, проблема кристаллизации воды, разрывающей клеточные структуры при более глубокой заморозке, еще не поддается решению.

... недавно было изобретено «бионическое ухо», содержащее настроенную на радиоволны антенну, совмещенную с живыми клетками. Такое устройство не только расширяет слуховой диапазон, но и позволяет, например, проводить дистанционный контроль за состоянием протезов.

Что читать в «Кванте» о союзе физики и медицины (публикации последних лет)

1. «Физика звука» – 2018, №12, с. 8;
2. «На перекрестке идей: история открытия магнитного резонанса» – 2019, №12, с. 2;
3. «Вирус», «маска», «где гарантия?» – 2020, №11/12, с. 2;
4. «Коронавирус на звездолете» – 2022, №2, с. 43.

Материал подготовил А.Леонович



(Начало см. на с. 26)

калью», т.е. прямой, проходящей через верхнюю точку траектории груза и шарнир). Отсюда найдем

$$\sin \beta = \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Так как работа силы трения и изменение потенциальной энергии при перемещении в фиксированное положение не зависят от величины начальной скорости, то минимально значению скорости на старте соответствует нулевое значение минимальной скорости в процессе дальнейшего движения. Запишем опять связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg \cdot L \sin \alpha \cdot (1 + \cos \beta) - 0) + \left(0 - \frac{mv_2^2}{2} \right) = \\ = -\mu mg \cos \alpha \cdot (\pi + \beta) L.$$

Тогда

$$v_2^2 = 2gL \sin \alpha \cdot (1 + \cos \beta) + \\ + 2\mu g \cos \alpha \cdot (\pi + \beta) \cdot L = \\ = gL \sin \alpha \cdot \left(2 + \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6} \right),$$

откуда получаем

$$v_2 = \sqrt{\left(2 + \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6} \right) gL \sin \alpha} \approx \sqrt{7,40 gL \sin \alpha}.$$

А.Заяц

Ф2747. Ваня и Маша провели 2 эксперимента. В первом десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ($t_0 = 20^\circ\text{C}$), грели на плитке мощностью $P = 1,4 \text{ кВт}$ в течение $\tau = 10 \text{ мин}$. При этом через $\tau_1 = 5 \text{ мин}$ после начала эксперимента в кастрюлю, не снимая ее с плитки, долили некоторое количество воды комнатной температуры, а еще через $\tau_2 = 3 \text{ мин}$, также не снимая кастрюлю с плитки, из нее столько же воды отлили. Во втором эксперименте при тех же начальных условиях отлив и долив поменяли местами, не меняя общее время эксперимента, моменты манипуляций и количество доливаемой

и отливаемой воды. Конечные температуры воды в кастрюле в обоих экспериментах совпали. Какой была масса добавляемой в экспериментах воды? Какую температуру имела вода в кастрюле в конце экспериментов? Какого максимального значения достигала температура воды в кастрюле в каждом из проведенных экспериментов? Считайте, что долив и отлив воды происходят очень быстро. Тепловые потери и теплоемкость кастрюли пренебрежимо малы, а вода в процессе экспериментов не закипала. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Ситуация, описанная в задаче, может произойти только при условии, что отлив воды в обоих экспериментах происходит при одинаковой температуре. Действительно, при отливе вода забирает с собой часть тепла, переданного плиткой, равную $c\Delta m(t_x - t_0)$, где t_x — температура, при которой воду выливают из кастрюли. А поскольку общее количество теплоты, переданное воде плиткой, в обоих случаях одинаково, то и t_x должно быть одинаковым. Найдем температуру, при которой происходит отлив воды во втором эксперименте:

$$t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40^\circ\text{C}.$$

Здесь и далее M — масса воды в кастрюле в начале эксперимента (5 кг). Эту же температуру должна иметь вода в первом эксперименте через время $\tau_1 + \tau_2$ после его начала, т.е.

$$t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)},$$

откуда находим

$$\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M = 3 \text{ кг}.$$

Тогда конечная температура в каждом из экспериментов будет равна

$$t_k = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM} = 48^\circ\text{C}.$$

Причем для первого случая эта температура одновременно является максимально

возможной по ходу всего эксперимента (поскольку она больше t_x). Во втором случае максимального значения температура может достигать либо в конце эксперимента, либо непосредственно перед доливом воды (через время $\tau_1 + \tau_2$ от начала нагрева). При проверке выясняется, что реализовался второй сценарий, поэтому

$$t_{\max 2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)} = 70 \text{ }^\circ\text{C}.$$

А.Евсеев

Ф2748. В поле тяжести на двух невесомых нерастяжимых нитях к горизонтальному стержню CD подвешена планка AB массой m и длиной L . Нити прикреплены к концам планки и располага-

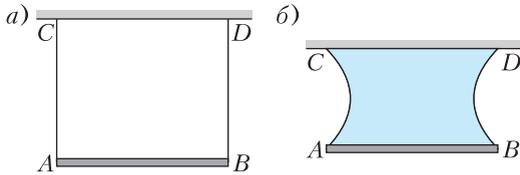


Рис. 1

ются вертикально (рис. 1, а). После погружения системы в неизвестную жидкость и последующего извлечения ее из жидкости в пространстве между нитями, планкой и стержнем сформировалась пленка жидкости, а сама система приобрела вид, представленный на рисунке 1, б. При этом минимальное расстояние между нитями оказалось равным d , а расстояние между планкой и стержнем равным h . Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ . Вычислите величину σ при $L = 10$ см, $m = 2$ г, $d = 5$ см, $h = 8,7$ см.

Так как нить невесома и сила поверхностного натяжения везде перпендикулярна нити, сила натяжения нити постоянна: $T = \text{const}$. Если взять участок нити длины dl и пренебречь действием силы тяжести, то на него действуют только силы натяжения нити $T_1 = T_2 = T$ и сила поверхностного натяжения dF (рис. 2). Заменим участок нити дугой окружности некоторого радиуса R . Тогда $dF = 2\sigma dl = 4\sigma R d\alpha$ (с учетом

того, что у пленки две поверхности). В радиальной проекции условие равновесия имеет вид $2T \sin d\alpha = dF$. Отсюда $R = T/(2\sigma)$, и таким образом $R = \text{const}$, т.е. вся

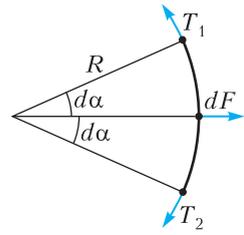


Рис. 2

нить имеет форму дуги окружности. Поскольку отрезки AB и CD равны (см. рис. 1), минимальное расстояние между нитями достигается на середине высоты. Из рисунка 3 следует

$$AC = h, EK = \frac{(L - d)}{2},$$

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{L - d}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R = \frac{(L - d)^2 + h^2}{4(L - d)}.$$

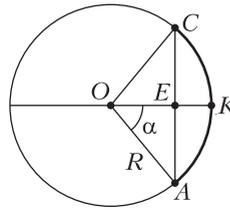


Рис. 3

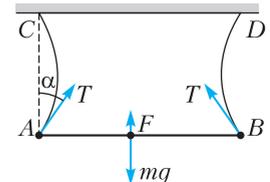


Рис. 4

Рассмотрим часть системы, находящуюся ниже средней линии, и запишем для нее условие равновесия:

$$2T + 2\sigma d = mg, \text{ или } 4\sigma R + 2\sigma d = mg.$$

(Либо можно рассмотреть силы, действующие непосредственно на планку (рис. 4):

$$2T \cos \alpha + 2\sigma L = mg.$$

Также в этом случае понадобится найти, под каким углом нить подходит к планке: $\sin \alpha = h/(2R)$.) Подставляя из найденного ранее радиус нити, получаем

$$\sigma = \frac{mg(L - d)}{h^2 + L^2 - d^2} = 0,066 \text{ Н/м}.$$

А.Аполонский

Лунная лыжня?

Е. ГЕРМАНИЮК

ВОЗМОЖНО, МНОГИЕ ИЗ НАС зимой хотя бы раз катались на лыжах, саях или сноуборде. Но, как выяснилось, кататься можно не только по снегу, но и по песку в жаркой пустыне. Тому подтверждением большое количество слайдов и видеороликов с лыжниками где-нибудь в пустыне Саудовской Аравии или каком-нибудь другом месте. Правда, это не спуск со снежных склонов. Но у многих получается это вполне удачно (рис. 1, 2).

Глядя на все это, можно задаться вопросом: «А возможно ли такое, скажем, на Луне?» Ну, конечно, не съехать с высокой горы, а просто прокатиться на саях с лун-

ной горки – такое возможно? Давайте порассуждаем, какие «за» и «против» есть в нашем распоряжении.

Можно сказать, что лунные пейзажи чем-то напоминают песчаные барханы в пустыне. Судя по фотоснимкам, сделанным астронавтами «Аполлонов», а также нашими «Луноходами» и луноходами других стран, есть много мест на поверхности Луны, где почти не встречаются крупные камни (рис. 3, 4). И если убрать с предполагаемого места спуска относительно крупные и мелкие камни, то сани, возможно, смогут ехать. Еще одно обстоятельство «за» – на Луне сила тяжести в 6 раз меньше, чем на Земле, а значит, сила трения в 6 раз меньше. Правда, при этом и скатывающая сила тоже меньше.

Есть и неприятные моменты. Во-первых, лунный грунт, или реголит, абразивен. Это связано с формой мелких частиц реголита



Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3

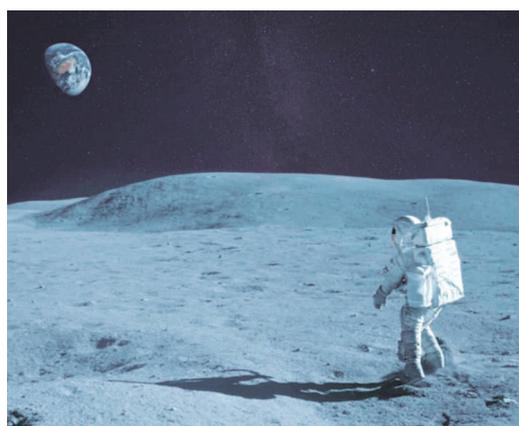


Рис. 4

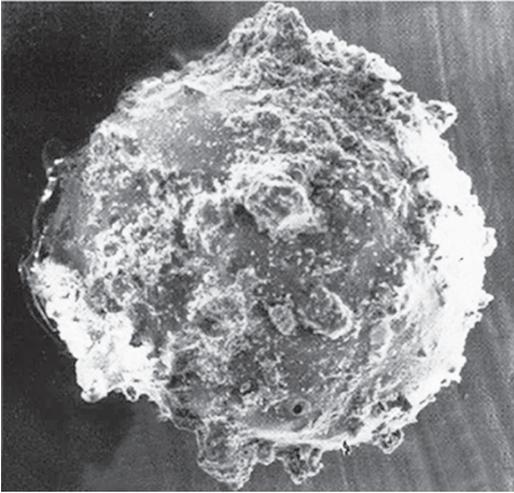


Рис. 5



Рис. 6

(рис. 5, 6) и твердостью минералов, из которых он состоит. Советские ученые под руководством академика А.Виноградова выяснили, что лунный грунт состоит в основном из двуокси кремния окиси титана, алюминия, железа, магния и кальция. Твердость же лунного грунта близка к его земному аналогу – андезито-базальтовому песку. Тем не менее, надо сказать, что износ (стирание) материала конструкций (полозьев саней) при скольжении по лунному реголиту на Луне будет происходить медленнее, чем если бы мы скользили по тому же лунному реголиту, но на Земле. Это связано с тем, что давление на грунт будет меньше земного опять же из-за меньшей силы тяжести. (Это

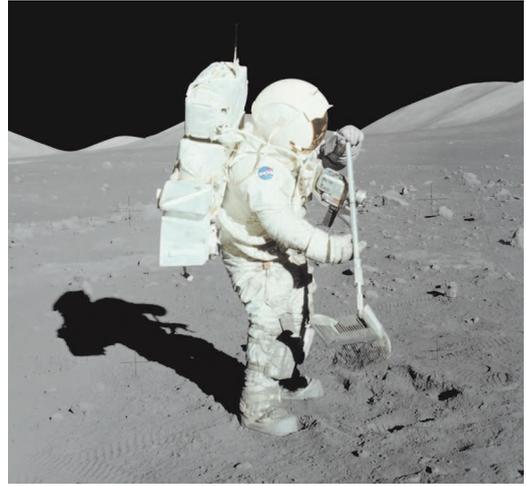


Рис. 7

легко можно доказать на практическом примере. Если точить топориче на точильном станке и при этом слабо прижимать его к абразивному диску, то точить топор мы будем дольше, чем если бы мы прижимали топориче плотней.)

Во-вторых, еще одним неудобным моментом является то, что люди на Луне находятся в массивных неповоротливых скафандрах. (рис. 7). Так, общая масса скафандра для астронавтов «Аполлона» составляла более 90 кг. Вес человека в скафандре на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле, но тем не менее массу и инерцию никто не отменял. Упадешь – встать будет не очень просто. Кроме того, центр тяжести человека в скафандре смещен относительно центра тяжести человека без скафандра. В результате этого космонавту приходится стоять с небольшим наклоном к поверхности Луны.

Все это делает перемещение космонавта на лыжах практически невозможным и даже опасным. Хотя попробовать было бы интересно. А вот съехать с какого-то специально оборудованного склона на санях специальной конструкции, думается, вполне возможно, хотя и тоже небезопасно. Конструкция саней могла бы быть, например, такой, как на рисунке 8. Для того чтобы съехать с лунной горки (склона) на санях, космонавту, стоящему сзади, необходимо, как и на Земле, столкнуть сани с места (придать саням первоначальную скорость). При этом разгоняться сани будут значительно медленнее, чем на Земле, опять же из-за меньшей

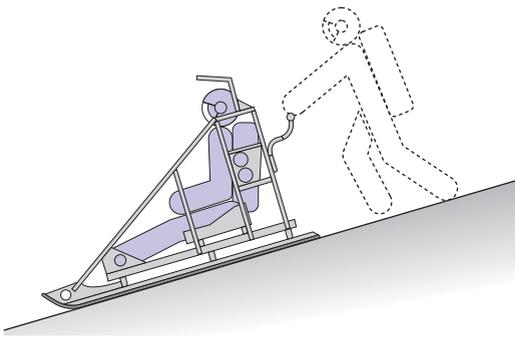


Рис. 8

силы тяжести. В связи с этим склоны для спуска необходимо выбирать покруче. (Исходя из прикидочных расчетов, угол наклона спускаемой поверхности к плоскости горизонта должен быть более 20° .) При этом длина склона не должна быть большой во избежание набора большой скорости при спуске. В виду того что сила тяжести в шесть раз меньше, чем на Земле, тормозной путь соответственно будет в шесть раз больше земного. Тормозной путь рассчитывается по формуле $s = \frac{v^2}{2\mu g}$, где v – скорость тела в момент начала торможения, μ – коэффициент трения скольжения тормозящегося тела

(полозьев) о поверхность, g – ускорение свободного падения.

Теперь попробуем решить простую задачу. Определим угол наклона поверхности, при котором тело массой $m = 1$ кг начнет скользить по наклонной плоскости. При этом рассмотрим два случая. В первом случае тело из титанового сплава высокой жесткости скользит по уплотненному лунному реголиту. Во втором тело из дерева с обработанной поверхностью скользит по снегу, спрессованному ветром. Коэффициент трения скольжения во втором случае равен $\mu = 0,2$. Что касается первого случая, то можно считать, что коэффициент трения для титанового сплава по лунному реголиту равен $\mu = 0,35$. Данный показатель взят из книги «Автоматические станции для изучения поверхностного покрова Луны» (издательство «Машиностроение», 1976), авторы книги А.Л. Кемурджиан, В.В. Громов, И.И. Черкасов, В.В. Шварев. В книге есть таблица, в которой приводятся коэффициенты трения для различных материалов (контртел) по лунному реголиту, а также его аналогам. Данные получены (как сообщается в книге) с использованием лунного грунта, доставленного станцией «Луна-16». Испытания проводились в вакууме.

Контртело	Коэффициент трения			Примечание
	Лунный грунт (проба взята «Луной-16»)	Аналоги		
		Базальт дробленый	Песок андезитобазальтовый	
Резина натуральная	0,50	0,50	0,65	Виден износ
Капроновая ткань, эластик	0,40	0,40	0,55	Интенсивно изнашивается
Фенилон	0,50	0,45	0,60	То же
Резина натуральная 30РП	0,55	0,50	0,60	Видны следы износа
Силиконовая резина	0,55	0,50	0,60	Износа нет
Кожа натуральная	0,40	0,50	0,45	Виден износ
Магниевый сплав	0,30	0,20	0,30	Интенсивно изнашивается
Дуралюмин	0,45	0,25	0,40	Видны следы износа
Титановый сплав	0,35	0,30	0,30	Износа нет
Нержавеющая сталь	0,25	0,25	0,25	То же
Конструкционная сталь	0,30	0,25	0,30	То же

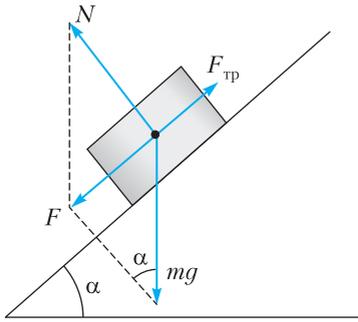


Рис. 9

Итак, решаем задачу.

Тело массой m начнет скользить по поверхности, если будет выполняться следующее неравенство (рис. 9):

$$F - F_{\text{тр}} > 0.$$

Здесь F – равнодействующая силы тяжести mg и силы реакции опоры N . Она равна $F = mg \sin \alpha$. А $F_{\text{тр}}$ – это сила трения. Ее можно выразить следующим образом: $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$.

Таким образом, условие начала скольжения принимает вид

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha > 0.$$

Найдем, при каких значениях α это условие выполняется. Решая неравенство для сил, получим

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \mu, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha > \mu.$$

В первом случае, подставляя вместо μ значение 0,35, найдем $\alpha > 19,3^\circ$. Таким образом, тело из титанового сплава массой m начнет скользить по поверхности Луны при угле наклона поверхности больше $19,3^\circ$. Если значение μ уменьшить за счет использования какого-то другого сплава или материала, скользящего по лунному реголиту (например, нержавеющей стали), то и начальная величина угла наклона, при котором тело начало бы скользить, уменьшится.

Во втором случае, когда $\mu = 0,2$, получим, $\alpha > 11,4^\circ$. Отсюда следует, что на Земле тело массой m из дерева с обработанной поверхностью начнет скользить по наклонной плоскости, покрытой спрессованным ветром снегом, при угле наклона поверхности больше $11,4^\circ$.

Теперь найдем силу трения, возникающую при скольжении тела для первого и второго

случаев, увеличив незначительно значения полученных углов наклона – для каждого случая на $0,1$ градуса соответственно. (Тела и в том и в другом случае начнут скользить.) Тогда в случае Луны $\alpha = 19,3^\circ + 0,1^\circ = 19,4^\circ$, $\cos \alpha = 0,943$ и

$$F_{\text{тр}} = 0,35 \cdot 1 \text{ кг} \cdot 1,6 \text{ м/с}^2 \cdot 0,943 = 0,528 \text{ Н}.$$

В случае Земли $\alpha = 11,4^\circ + 0,1^\circ = 11,5^\circ$, $\cos \alpha = 0,980$ и

$$F_{\text{тр}} = 0,2 \cdot 1 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,980 = 1,921 \text{ Н}.$$

Таким образом, сила трения скольжения тела из дерева с обработанной поверхностью по наклонной плоскости на Земле, покрытой снегом, спрессованным ветром, более чем в три раза ($1,921/0,528 = 3,638$) больше силы трения скольжения тела из титанового сплава по наклонной плоскости на Луне, покрытой уплотненным лунным реголитом.

Расчеты, приведенные здесь, достаточно условные и не учитывают всех физических факторов, которые будут воздействовать на скользящее тело, тем более на сани, движущиеся по поверхности Луны. Кроме ряда силовых воздействий на полозья саней, будет происходить еще и разогрев конструкции саней за счет трения о поверхность, что также может стать проблемой. В частности, это может повлиять на коэффициент трения. Хочется еще добавить, что испытания лунного грунта все-таки проводились в земных условиях, а не на поверхности Луны, где условия отличаются от земных. Следовательно, будут отличаться и получаемые данные при измерениях, в том числе и коэффициент трения.

Итак, можно заключить следующее. Съехать на санях со склона на Луне, скорее всего, можно, но для этого необходимо, чтобы угол наклона склона к горизонту был более 20° . Саням необходимо придать начальную скорость (разогнать их). Длина спуска не должна быть слишком большой, иначе это может привести к набору большой скорости и созданию аварийной ситуации. Материал полозьев саней должен иметь высокую твердость поверхности, сравнимую с твердостью поверхности лунных минералов, входящих в состав лунного грунта, а также невысокий коэффициент трения скольжения по реголиту (желательно не более 0,35). Место спуска должно быть, конечно, подго-

товлено: убраны крупные и мелкие камни, выровнены и засыпаны неровности.

После всего сказанного естественно возникает вопрос: а зачем это нужно и где это можно использовать? Возможно, это будет нужно для развлечения будущих космических туристов, если они, конечно, там когда-нибудь появятся. А также для транспортировки грузов и самих космонавтов. Ведь сани можно прикрепить к луномобилю.

Так что не исключено, что на Луне когда-нибудь появятся свои «дровни», а может быть, сани на реактивной тяге.

В заключение рекомендуется посмотреть видеоролики по ссылкам:

<https://youtu.be/KXYMsDdHtAM>

<https://youtu.be/PH6u-T1Mml8>

<https://yandex.ru/video/preview/12197423759473780388>

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Конфигурационное и импульсное пространства

А. БЫЧКОВ

ТЕРМИН «ПРОСТРАНСТВО» ИГРАЕТ в науке важную роль. Нам всем знакомо трехмерное физическое пространство, в котором мы живем. Однако, существует множество других типов пространств. Например, физические процессы могут быть описаны в различных абстрактных пространствах – таких, как фазовое, цветовое, гильбертово, пространство состояний, пространство спинов и т.п. В данной статье вы познакомитесь с конфигурационным и импульсным пространствами на примере нескольких задач.

Конфигурационным называется абстрактное пространство, которое определяет конфигурацию системы, т.е. все возможные положения заданных объектов. Например, движение двух материальных точек по оси x может быть представлено как движение одной точки в конфигурационном пространстве, которое является плоскостью (x_1, x_2) , где x_1 и x_2 – координаты первой и второй точек соответственно. Если точки движутся по ограниченному участку прямой, то конфигурационное пространство будет представлять собой квадрат (рис. 1).

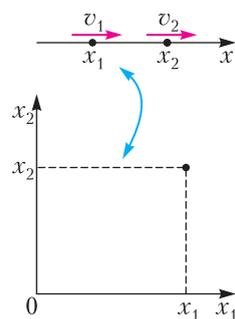


Рис. 1

Импульсное пространство, в свою очередь, определяет импульс системы и описывает все ее возможные движения. Так, движение материальной точки по плоскости xu описывается проекциями импульса p_x и p_y на оси координат, а значит, плоскость (p_x, p_y) является импульсным пространством.

Посмотрим, как введение конфигурационного и импульсного пространств помогает решению довольно сложных задач.

Задача 1 (Н. Константинов). *Из города А в город В ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из А в В и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из А в В, не порвав веревку. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых ваза с сеном радиусом l , центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?*

Решение. Положение машины x_1 на первой дороге можно определить как отношение расстояния от города А до машины к длине первой дороги. Аналогично определим положение x_2 второй машины. Таким образом,

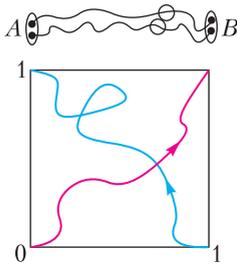


Рис. 2

множество состояний (конфигурационное пространство), которое нас интересует, описывается точками единичного квадрата (x_1, x_2) , где $0 \leq x_1 \leq 1$ и $0 \leq x_2 \leq 1$ (рис. 2). Начальное положение машин (в городе А) соответствует левому нижнему углу квадрата. Движение машин из А в В изображается кривой, ведущей в противоположный угол. Начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата, а их движение изображается кривой, уходящей в противоположный угол (левый верхний). Однако, любые две непрерывные кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда они займут положения, которые занимали машины в некоторый момент времени. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Следовательно, разъехаться им не удастся.

Теперь рассмотрим классическую задачу, которую можно найти во многих пособиях и задачниках курса физики. Обычно эта задача иллюстрирует важный метод – переход в систему отсчета, связанную с центром масс. Мы же решим эту задачу с помощью импульсного пространства.

Задача 2. Тяжелая частица массой M сталкивается с покоящейся легкой частицей массой m . На какой наибольший угол может отклониться тяжелая частица в результате упругого удара?

Решение. Зададим направление осей x и y таким образом, чтобы вектор \vec{v} имел проекции $v_x = v$ и $v_y = 0$. Тогда закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y , а также закон сохранения энергии примут следующий вид:

$$P_x + p_x = Mv, \quad P_y + p_y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{P_x^2 + P_y^2}{2M} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} = \frac{Mv^2}{2}, \quad (2)$$

где P_x, P_y, p_x и p_y – проекции импульсов тяжелой и легкой частиц соответственно после упругого столкновения. Поскольку нас интересует судьба только тяжелой частицы после соударения, рассмотрим импульсное пространство (P_x, P_y) . Подставим значения проекций импульса p_x и p_y из формул (1) в уравнение (2) и преобразуем его:

$$\left(P_x - \frac{M}{m}\mu v\right)^2 + P_y^2 = \mu^2 v^2,$$

где $\mu = \frac{mM}{m+M}$ – приведенная масса. Получим уравнение окружности (рис. 3). Каж-

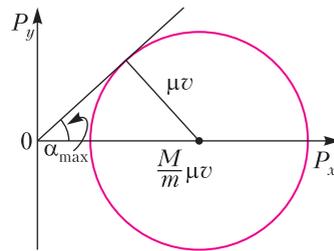


Рис. 3

дой точке этой окружности соответствует конкретный прицельный параметр. Угол отклонения тяжелой частицы в результате удара равен углу между вектором P и осью x . Максимальное значение этого угла достигается при максимальном значении отношения $\frac{P_y}{P_x}$. Проведем касательную к окружности, проходящую через начало координат в импульсном пространстве (P_x, P_y) , откуда находим

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{\mu v}{\frac{M}{m}\mu v} = \frac{m}{M}.$$

На Московской олимпиаде школьников по физике в 2023 году десятиклассникам была предложена следующая задача.

Задача 3. На гладком горизонтальном столе покоятся два маленьких бруска, массы которых равны $m_1 = 1 \text{ кг}$ и $m_2 = 10^N \text{ кг}$, где N – некоторая константа. В момент времени $t = 0$ второму бруску сообщают скорость v_0 (рис. 4). Столкновения брусков друг с другом и со стенкой в процессе дальнейшего движения считаются абсолютно упругими. Пусть ось x направлена вправо, координата стенки равна нулю. Про-

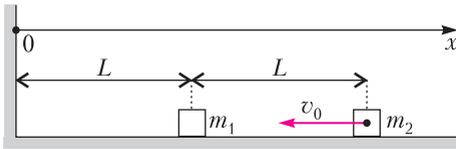


Рис. 4

следим за движением брусков, рассмотрев зависимость $x_2(x_1)$ – координаты второго бруска в некоторый момент времени от координаты первого в тот же момент. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2 , соответствует точка M с координатами (x_1, x_2) . Со временем координаты брусков изменяются, а точка M движется по плоскости x_1x_2 .

а) Найдите скорость точки M в момент, когда проекции скоростей брусков на ось x равны v_1 и v_2 соответственно. Какой угол составляет вектор скорости точки M с осью x_1 ? Нарисуйте траекторию движения точки M по плоскости x_1x_2 для значений масс $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$ ($N = 0$).

Введем в рассмотрение координаты $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, связанные с координатами (x_1, x_2) формулами $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}x_1$ и $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}x_2$. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2 , соответствует точка \tilde{M} с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ на плоскости $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$.

б) Воспользовавшись законом сохранения энергии, покажите, что величина скорости точки \tilde{M} сохраняется при абсолютно упругом ударе брусков.

Пусть за мгновение перед столкновением брусков острый угол между прямой, задаваемой уравнением $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$, и скоростью точки \tilde{M} равен α . Используя законы сохранения импульса и энергии, докажите, что после столкновения брусков острый угол между прямой $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$ и скоростью точки \tilde{M} также равен α .

в) На каком расстоянии от стенки произойдет пятое столкновение брусков, если параметр N равен 2?

г) Сколько раз столкнется брусок массой m_1 с бруском массой m_2 и стенкой при $N = 4$?

Указание. Может оказаться полезной приближенная формула $\text{tg } x \approx \sin x \approx x$, справедливая при малых x ($x \ll 1$).

Решение. а) Пусть в течение времени Δt бруски не сталкиваются друг с другом и со стенкой. Тогда точка M движется равномерно и прямолинейно по плоскости x_1x_2 , при этом проекции ее скоростей на оси системы координат равны $\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = v_1$ и $\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = v_2$. Абсолютная величина скорости точки M равна $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ и составляет с осью x_1 угол, тангенс которого равен $\frac{v_2}{v_1}$. На рисунке 5 представле-

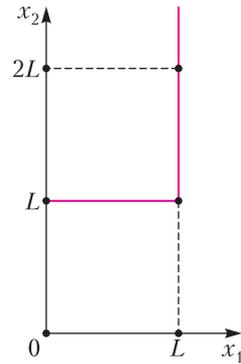


Рис. 5

на траектория движения точки M по плоскости x_1x_2 при $N = 0$. Сначала точка M движется параллельно оси x_2 от точки с координатами $(0, L)$ до точки с координатами $(0, 2L)$, затем параллельно оси x_1 от точки $(0, 2L)$ до точки $(L, 2L)$, затем параллельно оси x_2 от точки $(L, 2L)$ до точки (L, L) , затем параллельно оси x_1 от точки (L, L) до точки $(0, L)$, после возвращается в исходную точку по той же траектории и продолжает движение параллельно оси x_2 в положительном направлении.

б) Пусть проекции скоростей брусков на ось x до столкновения равны v_1 и v_2 , а после столкновения равны u_1 и u_2 соответственно. Тогда вектор скорости точки \tilde{M} при движении по плоскости $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ до столкновения брусков равен $\vec{v} = (v_1, v_2) = (\sqrt{m_1}v_1, \sqrt{m_2}v_2)$, а после столкновения равен $\vec{u} = (u_1, u_2) = (\sqrt{m_1}u_1, \sqrt{m_2}u_2)$. Из закона сохранения энергии

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$$

следует равенство $v^2 = u^2$, которое означает, что абсолютная величина скорости точки \tilde{M} сохраняется при столкновении брусков.

В момент столкновения координаты брусков сравниваются, поэтому точка \tilde{M} в этот момент попадает на прямую $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} \tilde{x}_1$.

Вектор $\vec{a} = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ направлен вдоль этой прямой. Закон сохранения импульса может быть записан в виде

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \vec{a}, \quad (3)$$

где точкой обозначается скалярное произведение векторов. В самом деле, скалярное произведение $\vec{v} \cdot \vec{a}$ равно

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \sqrt{m_1} \tilde{v}_1 + \sqrt{m_2} \tilde{v}_2 = m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2,$$

поэтому уравнение (3) действительно представляет собой закон сохранения импульса. Поскольку модули векторов \vec{v} и \vec{u} равны, то из равенства скалярных произведений (3) следует равенство углов, которые эти векторы составляют с вектором \vec{a} . При абсолютно упругом столкновении первого бруска со стенкой проекция скорости точки \tilde{M} на ось \tilde{x}_2 сохраняется, а проекция на ось \tilde{x}_1 меняет знак, поэтому скорость точки \tilde{M} после столкновения со стенкой составляет такой же угол с осью x_2 , что и до столкновения. Таким образом, движение точки \tilde{M} между прямыми $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} \tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_1 = 0$ подобно

распространению светового луча между двумя плоскими зеркалами, расположенными под углом друг к другу. На рисунке 6 показан фрагмент траектории луча, распространяющегося между двумя плоскими зеркалами. Обратите внимание на то, что расстояния от точки O до точек A и A_1 равны.

в) Задачу, поставленную в этом пункте, можно переформулировать следующим образом. Два плоских зеркала, одно из которых располагается вертикально, образуют угол α такой, что $\text{tg } \alpha = \frac{1}{10}$. Параллельно вертикальному зеркалу на расстоянии L от него распространяется лазерный луч. На каком расстоянии от линии пересечения плоскостей зеркал луч пятый раз попадет на наклонное зеркало?

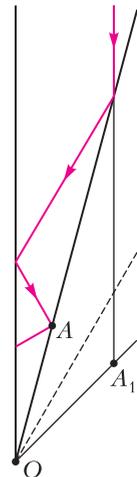


Рис. 6

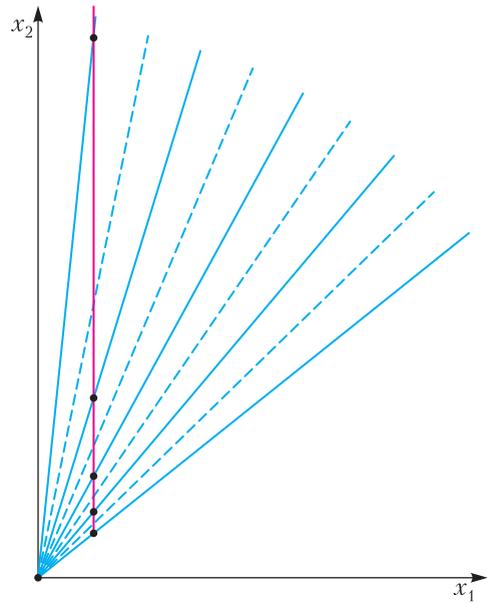


Рис. 7

При решении подобных задач часто применяют так называемый метод развертки. Чтобы лучше понять суть данного метода, можно обратиться к рисунку 7. Вместо того, чтобы рассматривать ломаную, образующуюся при отражении луча от зеркал, предлагается провести достаточное количество прямых из начала координат так, чтобы угол между соседними прямыми был равен α . Прямые, изображенные на рисунке пунктиром, – образы или изображения вертикального зеркала. Прямые, изображенные сплошными линиями, – образы наклонного зеркала. Отмеченные на рисунке точки пересечения вертикальной прямой с образами наклонного зеркала показывают, на каком расстоянии от линии пересечения зеркал луч попадает на наклонное зеркало.

Угол между соседними прямыми можно рассчитать приближенно:

$$\varphi \approx \text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}} = 0,1.$$

В момент пятого соударения брусков точка \tilde{M} будет находиться на расстоянии $\tilde{L}' = \frac{\sqrt{m_1}}{\sin 9\varphi} L$ от начала координат O , а ее координата по оси \tilde{x}_2 будет равна $\tilde{L}' \cos \varphi$,

откуда находим искомое расстояние:

$$L_5 = \frac{\tilde{L} \cos \varphi}{\sqrt{m_2}} \approx \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \frac{L}{\sin 9\varphi} = 0,13L.$$

г) В этом случае снова применим для расчета метод развертки. Тогда угол между соседними прямыми равен $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 0,01$, а количество столкновений равно

$$n = \left[\frac{\pi}{\varphi} \right] = 314.$$

Задача решена.

В книге [1] Г.А.Гальперин и А.Н.Земляков описали подход введения конфигурационного пространства (x_1, x_2) с последующим его растяжением для решения задачи 3. Вычисление числа π с любой заданной точностью при помощи подсчета числа соударений в простой динамической системе с двумя бильярдными шарами был предложен Г.А.Гальпериным (см. [2], [3]).

Грант Сандерсон в своем образовательном математическом YouTube-канале 3Blue1Brown предлагает альтернативный подход к исследованию задачи 3.

Рассмотрим импульсное пространство (p_{1x}, p_{2x}) , где p_{1x}, p_{2x} – проекции импульсов первого и второго тел соответственно. Исходя из закона сохранения энергии

$$\frac{p_{1x}^2}{2m_1} + \frac{p_{2x}^2}{2m_2} = \operatorname{const},$$

получаем, что множество состояний конкретной системы представляет собой точки на плоскости (p_{1x}, p_{2x}) , расположенные на эллипсе. Различным значениям суммарной кинетической энергии системы, которая не изменяется, соответствуют разные эллипсы. Если произвести растяжение координат p_{1x}, p_{2x} и рассмотреть импульсное пространство $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \left(\frac{p_{1x}}{\sqrt{m_1}}, \frac{p_{2x}}{\sqrt{m_2}} \right)$, то эллипс преобразуется в окружность.

Пусть окружность \tilde{O} в пространстве $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ соответствует кинетической энергии $\frac{1}{2} m_2 v_0^2$. Все возможные состояния нашей системы будут находиться на этой окружности. Сначала, когда второй брусок скользит влево, а первый покоится, система расположена в

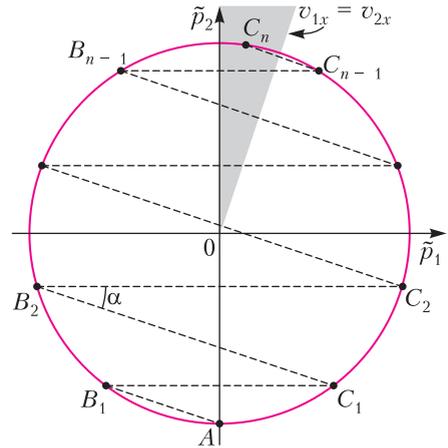


Рис. 8

точке A на окружности \tilde{O} (рис. 8). После первого соударения импульсы брусков изменятся, следовательно, система в импульсном пространстве переместится в другую точку – B_1 , тоже принадлежащую окружности \tilde{O} . Найдём положение точки B_1 . Из закона сохранения энергии

$$\sqrt{m_1} \tilde{p}_1 + \sqrt{m_2} \tilde{p}_2 = \operatorname{const}$$

следует, что в любой момент времени

$$\tilde{p}_2 = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \tilde{p}_1 + \operatorname{const}.$$

Проведем в импульсном пространстве прямую с коэффициентом наклона $-\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$, проходящую через точку A . Пересечение этой прямой с окружностью \tilde{O} и является точкой B_1 . Система находится в импульсном пространстве в точке B_1 , пока первый брусок не ударится о стенку. В результате удара проекция импульса первого бруска сохранит свой модуль, но изменит знак на противоположный, а проекция второго бруска останется неизменной. Следовательно, система переместится в импульсном пространстве в точку C_1 , которая является симметричной точке B_1 относительно нашей окружности. После второго соударения брусков система переместится в точку B_2 . Эта точка будет пересечением прямой, которая проходит через точку C_1 с коэффициентом наклона $-\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. После второго столкновения левого бруска

со стенкой система переместится из точки B_2 в симметричную точку C_2 . Подобные перемещения по импульсному пространству будут происходить до тех пор, пока система не достигнет точки, для которой справедливы следующие неравенства: $0 < v_{1x} < v_{2x}$. При выполнении данных условий оба бруска будет удаляться от стенки, причем второй брусок движется с большей скоростью. На рисунке это множество точек в импульсном пространстве изображено серым цветом.

Пусть произошло n соударений брусков и n ударов первого бруска о стенку.¹ Тогда общее количество ударов равно $2n$. Тангенс угла α равен $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. Из теоремы о вписанном угле следует, что дуги $AB_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$ и $AC_1, C_1C_2, \dots, C_{n-1}C_n$ равны 2α . Если $m_1 \ll m_2$, то

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 10^{-N/2}.$$

Сумма длин указанных дуг меньше 2π , но больше $2\pi - 2\alpha$, поскольку угол C_nOB_n не превосходит 2α . Стало быть,

$$2\pi - 2\alpha \leq 2n \cdot 2\alpha \leq 2\pi,$$

¹ В общем случае может возникнуть ситуация, когда бруски столкнулись на один раз больше, чем количество ударов первого бруска о стенку. Именно такой случай изображен на рисунке 8. При этом рассуждения сохраняют свою силу, и ответ остается неизменным.

$$2n = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil = \left\lceil \pi \cdot 10^{N/2} \right\rceil.$$

Отметим, что при чтении статьи мог возникнуть закономерный вопрос: «Что произойдет, если объединить информацию, содержащуюся и в конфигурационном, и в импульсном пространствах?» Тогда получится так называемое фазовое пространство – мощный инструмент при анализе эволюции сложных динамических систем и процессов (см. [4]). Но эта тема заслуживает отдельного обсуждения.

В заключение предлагаем читателям самостоятельно получить ответы на такие вопросы.

Что является конфигурационным пространством: а) круглого бильярда с одним шаром; б) трех точек, движущихся по прямой, из которых первые две не обгоняют третью; в) трех точек, движущихся по прямой, из которых первая всегда левее второй, а вторая левее третьей; г) двух точечных планет, движущихся вокруг Солнца по окружностям?

Литература

1. Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков. Математические бильярды. – Библиотечка «Квант», вып. 77.
2. Г.А.Гальперин. Бильярдная динамическая система для числа π . – Математическое просвещение, 2001, вып. 5, с. 137–138.
3. Г.А.Гальперин. Бильярдные шары вычисляются π . – Математическое просвещение, 2014, вып. 18, с. 180–204.
4. В.И.Арнольд. Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения. – «Квант», 1986, №2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Метод стирания точек

М.ДИДИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ ДОЛЖЕН начинаться через 5 часов. Капитаны команд только что получили условия: 10 задач на разные темы. Команде «Ластик» повез-

ло: двое из шести игроков хорошо знакомы с геометрией. Десятиклассник Дима, капитан и призер заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников, знает множество фактов и любит делать дополнительные построения. Девятиклассник Саша обладает хорошей интуицией, а также освоил так называемый метод стирания точек, однако не так хорошо подкован теоретически, как Дима.

Задача первая

Саша: Что сегодня с геометрией?

Дима: Как обычно, две задачи. Начал с той, которая выглядит попроще:

Из точки C проведены касательные CA и CB к окружности с центром O . Точки D, D' симметричны относительно O . Из точки C опущен перпендикуляр CH на прямую DO . Окружности DAN и $D'BH$ вторично пересекаются в точке Q . Докажите, что точки C, H, Q лежат на одной прямой.

Саша: Получилось нарисовать чертеж?

Дима: Да, но точка Q не влезает на картинку (рис. 1).

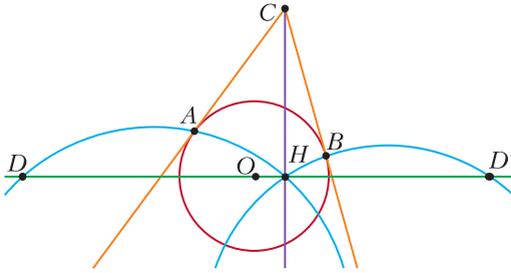


Рис. 1

Саша: Может, она и не нужна. Докажем, что $CH \dots$

Дима: Перпендикулярно линии центров синих окружностей. Или что центры синих окружностей равноудалены от зеленой прямой и лежат по одну сторону от нее.

Саша: Эх, центры отмечать... Давай сначала сотрем с картинке что-нибудь лишнее.

Дима: Что, кроме точки Q , тут лишнее?

Саша: Зачем, например, на картинке красная окружность?

Дима: Чтобы показать, что $AO = BO$, а углы CAO, CBO прямые.

Саша: Это можно и без окружности отметить. Кстати, не слишком ли много тут прямых углов: CAO, CBO, CHO . Это наводит на мысль...

Дима: Что стоит построить окружность с диаметром CO ?

Саша: А заодно стереть точку C и все выходящие из нее прямые (рис. 2).

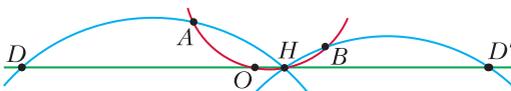


Рис. 2

Дима: Давай вспомним, что нам нужно было в задаче. Надо отметить центры синих окружностей T и T' . Чтобы построить T , нужны серединные перпендикуляры.

Саша: Достаточно двух из трех серединных перпендикуляров. Какой из трех лишний?

Дима: Серединный перпендикуляр к DH полезен, чтобы посчитать расстояние от T до DH . Серединный перпендикуляр к AH проходит через центр I красной окружности. А вот у серединного перпендикуляра к AD никаких интересных свойств я не вижу, его мы строить не будем. С точкой T' все аналогично.

Саша: Если центры T и T' уже построены (рис. 3), синие окружности не нужны. Еще сотрем A и B .

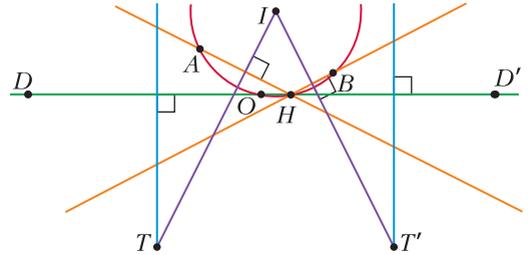


Рис. 3

Дима: Если стереть A и B , куда мы будем опускать перпендикуляры из I ?

Саша: A и B – произвольные точки на красной окружности, такие, что $AO = OB$.

Дима: Значит, оранжевые прямые симметричны относительно OD .¹ Получается, что перпендикуляры к ним образуют равные углы с OD .

Саша: Теперь спокойно стираем A и B вместе с оранжевыми прямыми. Заодно сотрем красную окружность, от нее нужно лишь равенство $IO = IH$ (рис. 4).

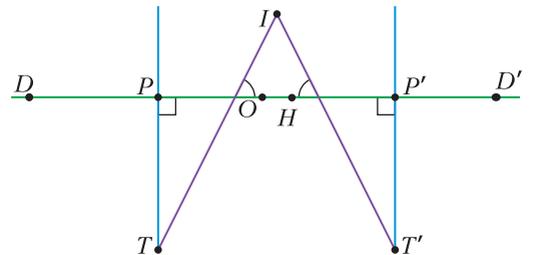


Рис. 4

Дима: Теперь видна осевая симметрия. Фиолетовые прямые симметричны относительно серединного перпендикуляра к OH . Достаточно доказать, что середины P, P' отрезков HD, HD' симметричны относительно середины M отрезка OH .

Саша: Значит, фиолетовые и синие прямые, а также точки I, T, T' стираем (рис. 5).



Рис. 5

Дима: А что останется? Это вообще геометрия или нет?

Саша: Остались равенства $OD = OD'$, $HP = DP$, $HP' = D'P'$, $OM = MH$ и нужно доказать, что $MP = MP'$.

Дима: Эту простую задачу по алгебре я могу дорешать у доски.²

Задача вторая

Как только друзья справились с первой задачей, они тут же взялись за следующую. Условие выглядело более сложным:

На дуге AC описанной окружности Γ треугольника ABC выбрана точка D . Точки I_A, I_C – центры вписанных окружностей треугольников BDC, ABD соответственно. Окружность W касается сторон AB и BC , а также окружности Γ в точке J . Докажите, что четырехугольник $DJI_C I_A$ – вписанный.

Саша: С чего начнем рисовать картинку?

Дима: Ясно, с окружности Γ . Отметим точки A, B, C, D . Потом проведем стороны...

Саша: Зачем проводить стороны?

Дима: Чтобы построить центры вписанных окружностей, нужны биссектрисы.

Саша: Чтобы построить биссектрисы, стороны не нужны.

Дима: Тогда отметим середины дуг. Мне нравятся середина E дуги AB и середина F дуги BC (рис. 6). Они не зависят от точки D . Зеленые прямые DE, DF будут биссектрисами углов ADB, BDC . Но какие еще биссектрисы провести?

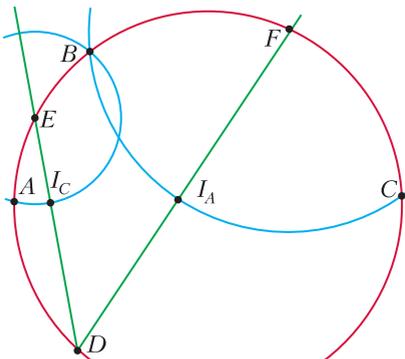


Рис. 6

Саша: Может, не стоит лишние биссектрисы проводить? Какие еще прямые или окружности проходят через центр вписанной окружности?

Дима: Мы можем применить лемму о трезубце.³ Чтобы провести синие окружности с центрами E, F , не нужно отмечать новые точки. Кроме того, синие окружности тоже не зависят от точки D .

Саша: Дальше нужно построить какую-то страшную окружность W .

Дима: Это полувписанная окружность.⁴ Я про нее многое знаю.

Саша: Но нам от нее нужна только точка касания J . Можно ли отметить J , не рисуя эту полувписанную окружность?

Дима: Нужно соединить центр вписанной окружности I треугольника ABC с серединой N дуги ABC . Оранжевая прямая пересечет описанную окружность Γ в точке J .⁵ Но как построить точку I ?

Саша: Она уже построена как точка пересечения синих окружностей (рис. 7).⁶

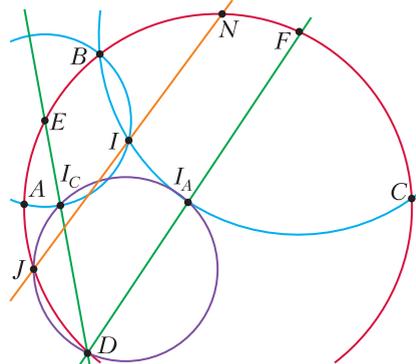


Рис. 7

Дима: Да, не такая уж сложная картинка.

Саша: Тут все равно много лишнего. Зачем нам точки A и C ?

Дима: Только для того, чтобы отметить точку N . Но N можно отметить из условия, что $EBNF$ – равнобокая трапеция.⁷ А начинать задачу будем с треугольника EBF .

Саша: Все равно громоздко выходит. Сначала достроили треугольник EBF до равнобокой трапеции $EBNF$, потом построили точку I отражением точки B относительно EF . Затем провели оранжевую прямую. И все это только для того, чтобы построить точку J .

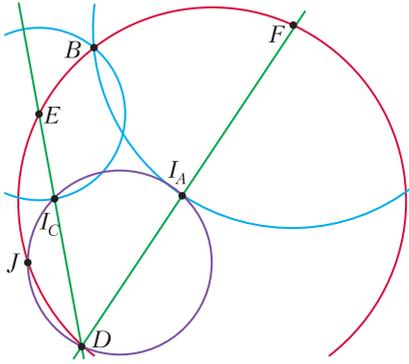


Рис. 8

Дима: Чтобы построить J быстрее, можно вместо медианы⁸ треугольника ENF взять симедиану⁹ треугольника EBF . Тогда точки I , N и оранжевая прямая не нужны (рис. 8)!

Саша: Как быстро построить симедиану?

Дима: Симедиана хорошо пересекается с описанной окружностью¹⁰:

$$\frac{JE}{BE} = \frac{JF}{BF}. \quad (1)$$

Саша: А что нам дают синие окружности и точка B ? Если заменить BE на $I_C E$ и BF на $I_A F$, останется лишь равенство

$$\frac{JE}{I_C E} = \frac{JF}{I_A F}. \quad (2)$$

Или есть еще какое-то условие?

Дима: Синие окружности пересекаются на красной. Стерев их, мы потеряем это условие.

Саша: Может, это условие лишнее? Смотри, из (2) и равенства углов $\angle JEI_C$ и $\angle JFI_A$ следует подобие треугольников $\triangle JEI_C$ и $\triangle JFI_A$ (рис. 9)!

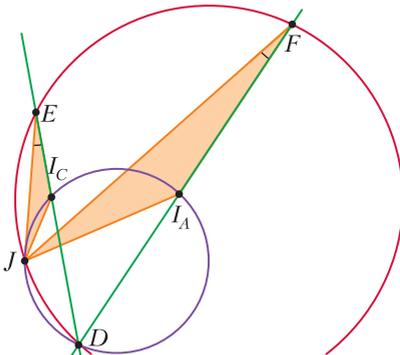


Рис. 9

Дима: Ясно. Четырехугольник $DJI_C I_A$ вписанный, поскольку углы $\angle JI_C D$ и $\angle JI_A D$ равны. Задача решена!

Саша: А не возникнет проблема с тем, что I_C окажется не на отрезке ED ?

Дима: Нет, с самого начала ясно, что обе точки I_A и I_C лежат внутри красной окружности.¹¹

Саша: Ура, задача решена!

Примечания

1. Доказательство этого несложного факта оставим в качестве упражнения.

2. Завершение решения оставим читателям в качестве упражнения.

3. Лемма о трезубце. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC (рис. 10).

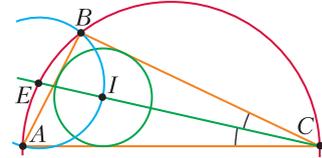


Рис. 10

Луч CI пересекает описанную окружность в точке E . Тогда E – центр описанной окружности треугольника ABI .

4. Полуовисанная, зеленая, окружность (рис. 11) касается отрезков AB и BC и описан-

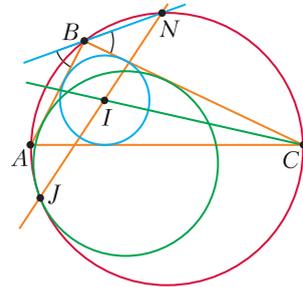


Рис. 11

ной окружности. Полуовисанная окружность лежит внутри описанной.

5. Середина N дуги ABC , центр вписанной окружности I и точка касания J полуовисанной и описанной окружностей лежат на одной прямой (см. рис. 11). Доказательство этого известного Диме, но неизвестного Саше факта будет сложным упражнением для читателей. Решение, а также большое количество родственных фактов, можно найти в сборнике «Математика в задачах» (М., МЦНМО, 2009, под ред. А.А.Заславского и др.).

6. Докажите, что синие окружности пересекаются в центре I вписанной окружности.

7. Докажите, что $EBNF$ – равнобокая трапеция.

8. Докажите, что оранжевая прямая содержит медиану треугольника ENF .

9. Симедиана треугольника – прямая, которая симметрична медиане относительно биссектрисы угла, проведенной из той же вершины. Докажите, что BJ – симедиана треугольника EBF (рис. 12).

10. Если симедиана треугольника EBF , проведенная из вершины B , пересекает описанную окружность в точке J (см. рис. 12), то выполняется равенство $\frac{JE}{BE} = \frac{JF}{BF}$. Этот нетривиаль-

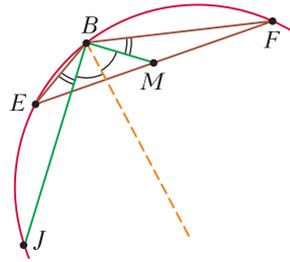


Рис. 12

ный факт известен Диме, но неизвестен Саше. Доказательство будет непростым упражнением для читателей.

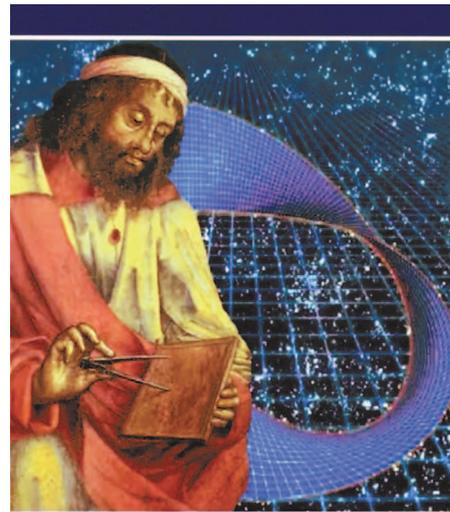
11. Докажите, что обе точки I_A и I_C лежат внутри красной окружности.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

В погоне за красотой геометрии

В школьных учебниках геометрия представляется иногда длинной вереницей теорем, размерно вытекающих одна из другой. Но из книги Вольдемара Петровича Смилга, известного советского физика-теоретика и популяризатора науки, мы узнаем совсем-совсем другую историю – настоящую.¹

В «Началах» Евклида оформился аксиоматический метод: в основании геометрии лежит набор аксиом и постулатов; все остальные факты из них следуют. Один из постулатов Евклида, пятый, выглядел неуклюже, и многим казалось, что с ним что-то не так. Казалось, что в эту компанию он затесался по ошибке, что его можно доказать, вывести из остальных. Постулат дразнил: было впечатление, что еще немного, ничтожная мелочь – и доказательство дастся в руки.



Вольдемар СМИЛГА

В ПОГОНЕ ЗА КРАСОТОЙ

Приключения пятого постулата Евклида

¹Вольдемар Смилга. В погоне за красотой. Приключения пятого постулата Евклида. – М.: Наука, 2019.

Но со временем возникло понимание, что в этой малости и заключается суть вопроса. Двигаясь зигзагами, история пятого постулата сделала крутой разворот. Николай Лобачев-

ский заменил его на противоположный и на этом пути пришел к созданию совсем другой геометрии. Поначалу она представлялась противоестественной. Но в XX веке стало ясно, что именно она описывает наш мир. Автор рассказывает нам и о роли неевклидовой геометрии в общей теории относительности – доступно и увлекательно

На страницах книги мы встречаем творцов этой истории – с их чаяниями, сомнениями, метаниями, разочарованиями и упорством. Их вело стремление к красоте и желание выяс-

нить, как устроен этот мир на самом деле. Если бы не такие люди, мы бы до сих пор вслед за халдейскими магами познавали мир по внутренностям жертвенных животных.

Первые книга была издана в 1965 году; Андрей Смилга (сын автора, тоже физик) помог подготовить новое издание и добавил примечания, отражающие современные научные представления. Неважно, считаете вы себя математиком или гуманитарием, – вы с удовольствием ее прочтете.

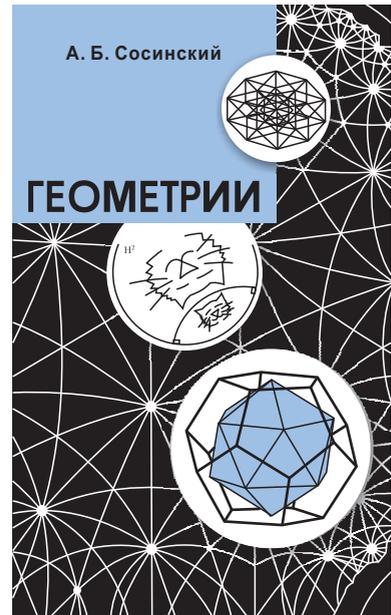


Евклидова геометрия царствовала в математике больше двух тысяч лет, но сейчас мы знаем: геометрий много. И дело даже не в том, что их много, – они составляют сообщество со сложными взаимоотношениями. Книга Алексея Брониславовича Сосинского, признанного популяризатора математики, как раз о том, как устроено это сообщество геометрий.²

В этой книге геометрия – это особый математический объект, представляющий собой множество элементов с действующими на них группами преобразований. Такой подход сформулировал Феликс Клейн в «Эрлангенской программе». В этом смысле наша школьная, евклидова геометрия – это плоскость (или пространство), а преобразования – симметрии, повороты, параллельные переносы.

Автор знакомит читателей с различными геометриями, обсуждает их устройство, но не только. Он показывает, как разные геометрии соотносятся друг с другом, в чем их родство и насколько оно близкое. Начинаящий математик увидит и влияние алгебры на геометрию: как язык морфизмов позволяет нам посмотреть на все геометрии с высоты птичьего полета. И вместе с тем получит вкус к геометрическому подходу в работе с алгебраическими объектами.

Как и положено учебной книге, все начинается с очень простых, игрушечных примеров, в которых можно познакомиться с основными понятиями на пальцах, поиграть с ними и привыкнуть к ним. После этого вводятся более формальные определения, и они сразу наполняются содержанием благодаря изученным примерам. Каждая глава завершается набором задач, чтобы читатель мог поработать самостоятельно. Это не набор упражнений на отработ-



ку типовых навыков, а творческие задачи – работа над ними научит читателя мыслить и работать как геометр.

К некоторым задачам даны ответы и указания, но не ко всем. В первой половине книги читатель найдет больше помощи, чем во второй, когда предпочтительнее уже самостоятельная работа.

Не только текст, но и рисунки в книге А.Б.Сосинского созданы мастерски и с любовью. Книга сначала появилась как записки лекций на английском языке для иностранных студентов НМУ, а на русский язык ее перевел Б.Р.Френкин. Большая часть книги доступна заинтересованному старшекласснику.

Н. Шихова

² А.Б.Сосинский. Геометрии. – М.: МЦНМО, 2017.

Заключительный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады прошел на федеральной территории «Сириус» с 21 по 27 апреля 2023 года. Олимпиада проводилась по традиционной схеме – в два дня, на решение 4 задач в каждом из двух дней отводилось 5 часов. В свободное от работы над задачами время участникам олимпиады была предложена интересная программа, включавшая в себя поездку на Красную Поляну, экскурсию по Университету «Сириус» и парку «Южные культуры», посещение научно-популярных лекций от ведущих математиков.

В олимпиаде приняли участие 480 юных математиков страны. Также по приглашению оргкомитета в «Сириус» прибыла делегация из Ирана: шестеро школьников этой страны, как и участники из России, очно участвовали в конкурсе. Традиционные гости олимпиады, команда Китая, а также команда из Таиланда, приняли участие в олимпиаде в режиме онлайн.

Успешность решения задач участниками (из России) отражена в таблицах (решившим задачу считается участник, набравший по этой задаче не меньше 5 баллов из 7 возможных):

9 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 159), решивших задачу	150	121	60	10	154	23	16	2

10 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 162), решивших задачу	120	100	64	0	136	80	30	0

11 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 159), решивших задачу	140	113	67	22	144	73	18	1

Традиционный опрос участников выявил наиболее красивые, по мнению школьников, задачи олимпиады. В параллелях 9, 10 и 11 классов лучшими оказались задачи 3 для девятого класса, 6 для десятого и 3 для одиннадцатого. Эти задачи включены в «Задачник «Кванта». Также в список задач-призеров попали задачи 2 для девятого класса, 3 и 8 для десятого и 6 и 4 для одиннадцатого.

Ниже приводятся условия задач и список победителей заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Условия задач

9 класс

1. Даны два приведенных квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трехчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) + g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трехчлена $f(x)$ равна разности корней трехчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трехчлена $f(x) + g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.)

И. Богданов

2. Изначально в строку выписывают 250 букв – 125 букв А и 125 букв Б в некотором порядке. Затем за одну операцию можно взять любой кусок из нескольких подряд стоящих букв, среди которых поровну букв А и Б, и переставить буквы в этом куске в

обратном порядке, поменяв в этом куске все буквы А на буквы Б и буквы Б на буквы А. (Например, из строки АБАББААБ можно одной операцией получить строку АББААБАБ.) Можно ли выписать исходную строку и совершить несколько операций так, чтобы в результате на доске оказалась та же строка, буквы которой записаны в обратном порядке?

С.Берлов

3. См. задачу M2751 «Задачника «Кванта»».

4. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

Д.Бродский

5. На столе лежит несколько кучек камней. Считается, что на столе *много камней*, если можно найти 50 кучек и пронумеровать их числами от 1 до 50 так, что в первой кучке есть хотя бы один камень, во второй – хотя бы два камня, ..., в пятидесятой – хотя бы пятьдесят камней. Пусть исходно на столе лежат 100 кучек по 100 камней в каждой. Найдите наибольшее $n \leq 10000$ такое, что после удаления из исходных кучек любых n камней на столе все равно останется много камней. (При удалении камней кучка не распадается на несколько.)

Д.Храмцов

6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифры 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифры 1, 4 и 7.

И.Ефремов

7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G . Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD , пересекаются в точке E . Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD , пересекаются в точке F . Докажите, что точки E , F и G лежат на одной прямой.

А.Кузнецов

8. У Пети есть 10000 гирь, среди них нет двух гирь равного веса. Также у него есть чудо-прибор: если положить в него 10 гирь, он сообщит сумму весов каких-то двух из них (при этом неизвестно, каких именно). Докажите, что Петя может использовать чудо-прибор так, чтобы через некоторое время указать на одну из гирь и точно назвать ее вес. (В чудо-прибор нельзя класть другое количество гирь.)

С.Берлов, Т.Коротченко

10 класс

1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T , покрасили в красный, зеленый и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T .

Л.Емельянов

2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берет сверху из получившейся стопки по одной карточке и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остается одна карточка, он возвращает карточки в стопку, а далее все то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.

А.Грибалко

3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geq 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

Т.Коротченко

4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой – из n мальчиков. И девочки, и мальчики

пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встает в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечетно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечетными номерами.

А.Грибалко

5. Найдите наибольшее натуральное число n , для которого произведение чисел $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 20$ делится на квадрат какого-то одного из них.

А.Храбров

6. См. задачу M2752 «Задачника «Кванта»».

7. См. задачу 7 для 9 класса.

8. Дано число $a \in (0; 1)$. Положительные числа x_0, x_1, \dots, x_n удовлетворяют условиям $x_0 + x_1 + \dots + x_n = n + a$ и $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{a}$. Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$.

А.Храбров

11 класс

1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ – рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Н.Агаханов

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. См. задачу M2753 «Задачника «Кванта»».

4. Окружность ω описана около треугольника ABC , в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MN . Прямые MN, BI и AB ограничивают треугольник T_b , а прямые MN, CI и AC ограничивают треугольник T_c . Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$.

А.Кузнецов

5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?

Г.Никитин

6. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках X, Y, Z и T соответственно. Оказалось, что точки Y и T лежат на окружности ω , построенной на отрезке XZ как на диаметре. Точка P отмечена в плоскости α так, что прямые PY и PT касаются окружности ω . Докажите, что середины ребер AB, BC, CD, DA и точка P лежат в одной плоскости.

А.Кузнецов

7. Назовем многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ – целые при любом целом k . Пусть $P(x)$ – бицелозначный многочлен степени d , и пусть N_d – произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ – целый.

И.Богданов, Г.Челмоков

8. В стране N городов. В ней действует $N(N - 1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из X в Y для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена ее обслуживания. Для данного $k = 1, \dots, N$ рассмотрим все способы выделить k городов и $N - k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовем *k-оптимальной*. Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до N так, что при каждом $k = 1, 2, \dots, N$ существует k -оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \dots, k$.

В.Буслов

Победители олимпиады*9 класс*

Воинов Григорий – Санкт-Петербург,
 Кравченко Роман – Новороссийск, 8 кл.,
 Прозоров Роман – Москва,
 Большаков Максим – Казань, 8 кл.,
 Власов Алексей – Челябинск,
 Дмитриев Лев – Санкт-Петербург,
 Замоторин Илья – Санкт-Петербург,
 Белоцерковцев Александр – Санкт-Петербург;

10 класс

Пистунов Григорий – Москва,
 Булгаков Дмитрий – Санкт-Петербург,
 Никитин Федор – Санкт-Петербург,
 Уткин Евгений – Саратов,
 Ким Петр – Москва, 7 кл.,
 Сырцов Степан – Санкт-Петербург,
 Ленская Наталия – Москва,
 Бакаев Артемий – Москва,

Смирнов Илья – Ярославль,
 Черепанов Георгий – Вологда;

11 класс

Гнусов Александр – Киров,
 Аккая Тимур – Санкт-Петербург,
 Згонник Илья – Санкт-Петербург, 10 кл.,
 Коптилин Ратибор – Новосибирск, 9 кл.,
 Кузнецов Роман – Санкт-Петербург,
 Постнов Иван – Москва,
 Хисамутдинов Эльдар – Санкт-Петербург,
 Мякутин Иван – Москва,
 Югов Михаил – Санкт-Петербург, 10 кл.,
 Климчук Александр – Москва,
 Харко Николай – Челябинск,
 Червоненкис Борис – Москва,
 Бойко Артем – Санкт-Петербург,
 Кузнецов Никифор – Москва,
 Ананьев Дмитрий – Санкт-Петербург,
 Харитонов Михаил – Москва.

Публикацию подготовили Н.Агаханов,
 И.Богданов, П.Кожевников, А.Кузнецов,
 О.Подлипский, К.Сухов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**«Квант» для младших школьников**

(см. «Квант» №5)

1. Рыбку 4×5 клеток.

Раз за полминуты кот съел полрыбки, то за минуту он съест эту рыбку целиком. В маленькой рыбе 3 клетки, значит, за каждую минуту кот съедает по 3 клетки. За целое число минут будет съедено кратное трем число клеток. Суммарно во всех рыбках $3 + 4 + 16 + 12 + 13 + 20 = 68$ клеток. Это число при делении на 3 дает остаток 2. Значит, после целого числа минут останется рыбка, количество клеток в которой при делении на 3 дает остаток 2. Такая рыбка всего одна – это рыбка с туловищем 4×5 клеток. Она и не будет съедена.

2. Возможны разные варианты, например:

$$\begin{aligned} 2/4 + 79/158 &= 1, \\ 6/8 + 35/140 &= 1, \\ 4/5 + 72/360 &= 1. \end{aligned}$$

3. 90° .

Рассмотрим треугольники AKS и LKS . Они равны по трем сторонам. Значит, равны углы KAS и KLS .

В равнобедренном треугольнике ABC равны углы BAC и ACB . Прямые KL и AC параллельны, значит, равны углы ACB и KLB как соответ-

ственные. Тогда

$$\begin{aligned} \angle SLB &= \angle SLK + \angle KLB = \angle KAS + \angle ACB = \\ &= \angle KAS + \angle BAC = \angle KAM = 90^\circ. \end{aligned}$$

4. Да, может.

Заметим, что если взять из каждого мешка по монете, то их суммарная масса будет равна $7 + 8 + \dots + 13 = 70$ граммов. Назовем такой набор монет *комплект*.

Пусть в указанном царем мешке массы монет по x граммов каждая. Если взять 70 таких монет, то их масса равна $70x$ – такая же, как у x комплектов. Тем самым, если мудрец узнает, сколько комплектов нужно, чтобы урівновесить эти 70 монет, он ответит на вопрос царя.

Пускай первым взвешиванием мудрец сравнит эти 70 монет и 10 комплектов. Если весы в равновесии, то $x = 10$ и задача решена, если монеты перевесили, то $x > 10$, если перевесили комплекты, то $x < 10$.

Если мудрец знает, что $x > 10$, то за одно взвешивание он легко выяснит, равна ли масса монеты 11, 12 или 13 г. Действительно, теперь можно сравнить 70 монет и 12 комплектов. Если монеты перевесили, то $x = 13$, если весы в равновесии, то $x = 12$, если комплекты перевесили, то $x = 11$.

Аналогичным образом мудрец может поступить в случае $x < 10$: массы монет тогда могут быть по 7, 8 или 9 г, так что осталось сравнить 70 монет и 8 комплектов.

Отметим, что при каждом взвешивании мудрец использует не более чем $70 + 12$ монет из мешка, на который указал царь, и не более чем по 12 монет из остальных мешков. Так что монет в мешках ему хватит.

Комментарии.

1. Если снять с обеих чашек весов одинаковый набор монет, то результат взвешивания не изменится. Пользуясь этим соображением, мудрец сможет решить задачу и когда в каждом мешке хотя бы по $70 - 8 = 62$ монеты.

2. В решении используется лишь суммарная масса 7 монет. Поэтому аналогичным образом можно решить задачу не только для монет массой 7, 8, ..., 13 граммов, но и для любого другого набора из семи различных масс (при достаточном количестве монет в мешках).

Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №4)

29. 1:2.

Обозначим точки, как показано на рисунке 1. Продлим луч AM и сторону DC до пересечения в точке E . Тогда треугольники ABM и ECM рав-

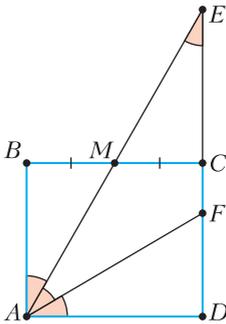


Рис. 1

ны, поэтому $EC = AB = CD$, а также $\angle CEM = \angle MAB = \angle MAF$. Значит, треугольник AEF равнобедренный, $AF = EF$. С другой стороны, в прямоугольном треугольнике AFD катет FD лежит против угла в $90^\circ : 3 = 30^\circ$, значит, гипотенуза AF в два раза больше катета FD . Тогда $2FD = AF = EF = EC + CF = CD + CF = FD + 2CF$, откуда $FD = 2CF$.

30. Можно взять числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Это 10 чисел последовательности Фибоначчи: очередное число получается как сумма двух предыдущих. Фокусник сможет отгадать числа с карточек зрителя, если любые две раз-

ные пары чисел дают разные суммы. Но для чисел Фибоначчи это так: среди четырех чисел этих двух пар есть наибольшее, оно уже не меньше суммы двух чисел другой пары, а вместе со вторым числом в своей паре – больше.

Равенства $a + b = c + d$ и $a - c = d - b$ равносильны, поэтому уникальность всех попарных сумм будет следовать из уникальности всех попарных разностей (отметим, что так как в пару берутся две разные карточки, то на суммы есть еще дополнительное ограничение $a \neq b, c \neq d$). Множество целых чисел, в котором все попарные разности уникальны, называют *линейкой Големба* – см., например, Википедию.

31. Да во всех пунктах.

Примеры приведены на рисунках 2–4.

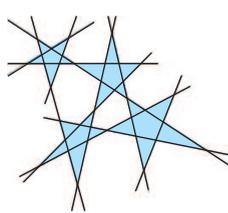


Рис. 2. $k = 4, n = 11$

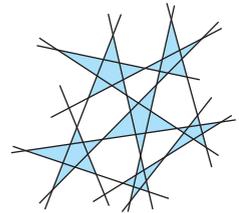


Рис. 3. $k = 6, n = 13$

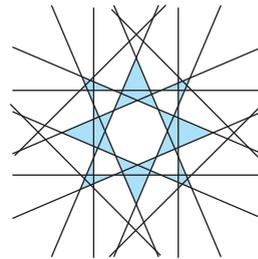


Рис. 4. $k = 8, n = 16$

Конструкцию на рисунке 4 предложил В.Корсуков. Если в ней убрать одну из прямых, образующих с горизонталью угол 45° , то получим конструкцию с 7 звездами и 15 прямыми. Если, наоборот, добавить одну вертикальную или горизонтальную прямую (красную), то появится новая 9-я звезда (зеленая). Добавлять прямую можно четырежды, каждый раз появляется новая зеленая звезда (рис. 5).

На рисунке 6 показано, как с помощью 16 прямых получить 11 звезд.

В «Кванте» №4 за 2005 год в «Конкурсе имени А.П.Савина» была опубликована родственная задача: существует ли такая конфигурация прямых, в которой звезд получится больше, чем проведено прямых?

В Энциклопедии целочисленных последовательностей (OEIS) опубликована последовательность

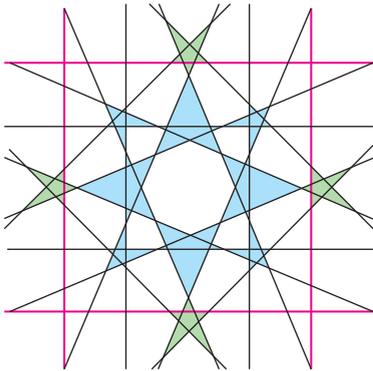


Рис. 5. $k = 8 + 4, n = 16 + 4$

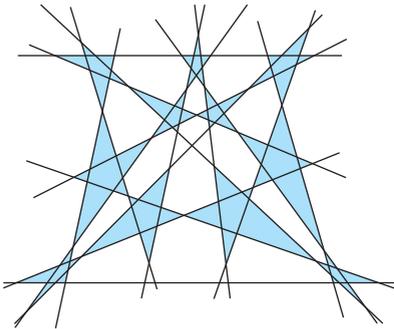


Рис. 6. $k = 11, n = 16$

<https://oeis.org/A356252> о связи n и k . На данный момент найдены только первые 6 членов последовательности.

32. 8.

Если одно число в таблице равно 0, то и все остальные равны 0, поэтому будем считать, что все числа ненулевые. Рассмотрим произвольную таблицу 1, удовлетворяющую условию. Пусть числа около левого верхнего угла это x и y , тогда в углу стоит xy .

Мы найдем общее правило, по которому устроены все такие таблицы, и это даст ответ на задачу. Для начала мы покажем, как «упростить» произвольную таблицу. Рассмотрим таблицы 2 и 3. Они удовлетворяют условию задачи (друг от друга они отличаются только поворотом и заменой x на y). Заметим, что если две таблицы,

xy	x		
y			

$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
1	x	x	1
1	x	x	1
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$

$\frac{1}{y}$	1	1	$\frac{1}{y}$
$\frac{1}{y}$	y	y	$\frac{1}{y}$
$\frac{1}{y}$	y	y	$\frac{1}{y}$
$\frac{1}{y}$	1	1	$\frac{1}{y}$

удовлетворяющие условию задачи, перемножить (т.е. перемножить числа в одинаково расположенных ячейках), то и получившаяся таблица будет удовлетворять условию.

Перемножив таблицы 1, 2 и 3, получим таблицу 4, в которой в левом верхнем углу и соседних с ним клетках стоят единицы. Пусть в оставшихся клетках первой строки оказались числа a и b . Найдем ограничения на a и b .

Таблица 4

1	1	a	b
1			

Таблица 5

1	1	a	b
1	a^{-1}	ab^{-1}	$a^{-1}b$
a	$a^{-2}b$	a^2b^{-2}	$a^{-2}b$
a^3b^{-1}	$a^{-4}b^3$	a^5b^{-3}	$a^{-3}b^2$

По первой строке все числа в таблице можно однозначно восстановить, найдя сначала числа второй строки, потом третьей и затем последней (табл. 5). Записав условия на то, что в последней строке числа тоже должны быть равны произведениям чисел в соседних клетках, получим равенства $a^6 = b^4$ и $a^{10} = b^6$, откуда можно получить, что $a^2 = b^2 = 1$. Используя это, можно упростить выражения в таблице 5 – получим таблицу 6.

Итак, чтобы получить исходную таблицу 1, надо полученную таблицу 6 обратно разделить на таблицы 2 и 3, т.е. умножить на таблицу 7.

Таблица 6

1	1	a	b
1	a	ab	ab
a	b	1	b
ab	b	ab	a

Таблица 7

xy	x	x	xy
y	$\frac{1}{xy}$	$\frac{1}{xy}$	y
y	$\frac{1}{xy}$	$\frac{1}{xy}$	y
xy	x	x	xy

Таблица 8

6	2	-2	6
3	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	-3
-3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	3
-6	2	-2	-6

Заметим, что таблицы 6 и 7 устроены так, что 16 чисел, которые получатся в произведении, – это все попарные произведения чисел набора 1, a, b, ab на числа набора $x, y, xy, \frac{1}{xy}$. Из-за того, что $a^2 = b^2 = 1$, в первом наборе не более двух различных чисел. Поэтому среди получившихся 16 чисел будет не более 8 различных. При этом 8 различных чисел вполне может быть: достаточно взять $a = -1, b = 1$, а числа x, y взять такие, чтобы $x, y, xy, \frac{1}{xy}$ были различными положительными, например, $x = 2, y = 3$ (табл. 8).

Калейдоскоп «Кванта»**Вопросы и задачи**

1. При протекании крови по сосудам ее движение из-за трения о стенки усредняется и становится равномерным. При ранении крупных артерий, близких к сердцу, кровь, конечно, будет выплескиваться толчками.
2. Спирт испаряется гораздо быстрее воды, поэтому охлаждение чувствуется быстрее. Разбавляли же его водой во избежание ожогов.
3. Введенный внутрь банки нагретый воздух охлаждается, соприкасаясь с ее стенками. Его давление становится меньше атмосферного, и банка «присасывается» к телу.
4. Твердый материал зуба при охлаждении сжимается, каналы в нем сужаются и зажимают проходящие в них нервные волокна.
5. Холодное зеркальце «запотевает», так как на нем конденсируются водяные пары, выдыхаемые пациентом. Если зеркальце нагрето до температуры не меньше, чем температура тела, то пары конденсироваться не будут.
6. Различные части зуба имеют разные коэффициенты теплового расширения. При резком нагревании зуба в нем возникают напряжения, которые могут вызвать трещины в эмали.
7. Когда мы дрожим от холода, наши мышцы беспорядочно сокращаются, их деформации неупругие и они снабжают нас теплом. А при появлении «мурашек» волоски на теле встают, утолщая слой неподвижного воздуха, являющегося хорошим теплоизолятором.
8. Электростатическое поле губительно действует на микроорганизмы, вызываящие гниение продуктов, и тем самым значительно увеличивает срок их хранения.
9. Клетка Фарадея создает внутри себя область пространства, где отсутствует электрическое поле, тем самым предохраняя от воздействия внешних электромагнитных полей как людей, так и чувствительные приборы.
10. Для этого в операционной устанавливаются несколько ламп.
11. Раздражение зрительного нерва при любом способе воздействия вызывает ощущение света.
12. Да, поскольку без очков оно меньше 25 сантиметров, а после надевания очков становится таким же, как и у людей с нормальным зрением.
13. Яркость изображения на специальном экране пропорциональна интенсивности падающих на него рентгеновских лучей. Поэтому кости, в большей степени поглощающие эти лучи, выглядят более светлыми, а полости – более темными по сравнению с окружающими тканями.

14. Чтобы получить точечный источник рентгеновских лучей, дающих на экране резкие очертания просвечиваемых тел.

Микроопыт

Лекарство смачивает поверхность дерева и по ней медленно вытекает из пузырька, капая с наружного конца спички.

84-я Московская олимпиада школьников по физике

(с.м. «Квант» №5)

3. Поскольку нагрев происходит медленно, в любой момент времени во всех точках внутри цилиндра тепловой поток одинаков, следовательно, изменение температуры dT на любом участке длиной dx не зависит от координаты этого участка, распределение температуры по координате линейное:

$$T(x) = T_0 + \frac{L-x}{L} \Delta T.$$

3а. Давление во всех точках сосуда должно быть одинаковым. Подставим в уравнение состояния идеального газа температуру, получим зависимость плотности от координаты:

$$\rho(x) = \frac{pM}{T_0} \frac{1}{1 + \frac{L-x}{L} \delta T}.$$

Применяя приближенную формулу, данную в условии, приводим эту зависимость к виду

$$\rho(x) = \frac{pM}{T_0} \left(1 - \frac{L-x}{L} \delta T \right).$$

Плотность распределена линейно по x , поэтому массу газа можно вычислить как произведение средней его плотности на объем баллона. Тогда

$$m = \pi r^2 L \frac{pM}{T_0} \left(1 - \frac{1}{2} \delta T \right).$$

После приближенных преобразований, сохраняя только линейные по малому параметру слагаемые, получим искомое распределение плотности:

$$\rho(x) = \frac{m}{\pi r^2 L} \left(1 + \frac{2x-L}{2L} \delta T \right).$$

3б. Координата центра масс газа в баллоне дается соотношением

$$x_{\text{цм}} = \int_0^L \left(1 + \frac{2x-L}{2L} \delta T \right) x dx,$$

вычисляя интеграл, получаем

$$x_{\text{цм}} = \frac{L}{2} + \frac{L}{12}.$$

Внешние силы на систему, состоящую из тележки с баллоном и газа, не действуют, поэтому ее центр масс должен оставаться неподвижным. Пусть тележка смещается на расстояние d от начального положения в процессе нагрева одного из оснований цилиндра. Условие неподвижности центра масс имеет вид

$$-Md + m\left(-d + x_{\text{цм}} - \frac{L}{2}\right) = 0.$$

Отсюда после преобразований получаем ответ:

$$d = \frac{m}{M+m} \frac{L}{12} \delta T.$$

4. 4а. Пусть человек различает глазом смещение столба ртути в горизонтальной трубке на величину Δl , численно равную одной линии (0,254 мм) или половине линии. Изучив условие, можно сделать вывод о том, что при изменении высоты, на которой находится прибор, параметры воздуха в маленьком шаре и в трубке меняются изотермически. В изотермическом процессе малые относительные изменения давления и объема связаны соотношением

$$\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p} = 0.$$

Давление воздуха имеет порядок нормального атмосферного давления и равно давлению столба ртути в правом колене прибора, поскольку давление паров пренебрежимо мало. Тогда изменение давления может быть обусловлено изменением высоты столба, а также изменением ускорения свободного падения:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Справедливо соотношение

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l S_0}{\frac{l S_0}{2} + \frac{\pi D_1^3}{6}} = \frac{2\Delta l}{l} \frac{1}{1 + \frac{\pi D_1^3}{3l S_0}},$$

в котором l – длина горизонтальной трубки (один фут), S_0 – площадь поперечного сечения горизонтальной трубки, D_1 – диаметр меньшего шара (1 дюйм). Расчет дает

$$\frac{1}{1 + \frac{\pi D_1^3}{3l S_0}} \approx 5,6 \cdot 10^{-3}.$$

Далее,

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta l S_0}{S h} = \frac{\Delta l}{l} \frac{S_0}{S h},$$

где S – площадь поверхности ртути в большом шаре. Вычисляя, получим

$$\frac{\Delta h}{h} \approx \frac{\Delta l}{l} \cdot 3 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, для относительного изменения ускорения свободного падения имеем приближенную формулу

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| \approx \frac{\Delta l}{l} \cdot (11,2 + 0,3) \cdot 10^{-3} = \frac{\Delta l}{l} \cdot 1,15 \cdot 10^{-2}.$$

В случае если величина Δl считается равной 1 линии, находим

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| \approx 10^{-4}.$$

4б. При увеличении высоты над поверхностью Земли на H относительное изменение ускорения свободного падения равно

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta \left(\frac{1}{R} \right)^2}{\frac{1}{R_0^2}} \approx -2 \frac{H}{R_0}.$$

Считая погрешностью половину цены деления линейки, определяем, что погрешности не более 20% соответствует отклонение хотя бы в 3 линии. Тогда

$$H = R_0 \cdot \frac{3 \cdot 1,15}{2 \cdot 120} \cdot 10^{-2} \approx 900 \text{ м}.$$

5. Пусть стержень сместился из положения равновесия на небольшое расстояние x . Тогда сила взаимодействия кольца и стержня равна силе взаимодействия кольца и участка стержня длиной $2x$, середина которого располагается на расстоянии L от кольца:

$$F(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 x}{(L^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Зависимость силы от координаты линейная, поэтому электрическое взаимодействие цилиндра с кольцом и стержня эквивалентно взаимодействию двух грузов, связанных пружиной, жесткость которой равна

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(L^2 + R^2)^{3/2}}.$$

5а. На основании закона сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$v = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} = x_0 \sqrt{\frac{q^2}{m(L^2 + R^2)^{3/2}}}.$$

5б. Ответ может быть записан сразу, если вы знакомы с понятием приведенной массы. В про-

тивном случае из закона сохранения импульса и равенства масс цилиндра и стержня следует равенство абсолютных величин скоростей цилиндра и стержня в любой момент времени, поэтому

$$mv^2 = \frac{kx_0^2}{2},$$

откуда следует, что искомая скорость в этом случае в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости, найденной в предыдущем пункте.

11 класс, тур 1

1. 1а. Изменение состояния газа слева и справа от перегородки происходит таким образом, что температура обеих порций остается одинаковой. Газ, располагающийся слева от перегородки, сжимается, поскольку его температура уменьшается при постоянном давлении, отдавая при изменении температуры на dT количество теплоты

$$\delta Q = c_p dT,$$

где $dT < 0$ и $\delta Q < 0$. Это тепло отдается порции газа в правом отсеке, которая получает количество теплоты, равное $-\delta Q = -c_p dT$ только от газа в левом отсеке, поэтому теплоемкость этой порции в любой момент в процессе охлаждения равна

$$c = \frac{-c_p dT}{dT} = -c_p = -\frac{5R}{2}.$$

1б. С газом в правом отсеке совершается политропический процесс с показателем политропы

$$n = \frac{c - c_p}{c - c_v} = \frac{5R}{4R} = \frac{5}{4}.$$

Работа газа, находящегося в правом отсеке, может быть найдена из первого начала термодинамики:

$$A_r = Q - \Delta U = -c_p \Delta T - c_v \Delta T \approx 1000 \text{ Дж},$$

где $\Delta T = -30 \text{ К}$. Для того чтобы вычислить работу внешней силы, определим сначала конечный объем порции газа, расположенной справа от перегородки. Это можно сделать, используя уравнение политропического процесса $pV^n = \text{const}$, а также уравнение состояния идеального газа. Имеем $T^4 V = \text{const}$, откуда следует формула для объема в конце процесса охлаждения:

$$V_1 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4.$$

Теперь можно перейти к определению работы внешней силы. Поскольку правый поршень перемещается очень медленно, суммарная работа всех сил, действующих на него, равна нулю:

$$A_r + A_F - p_0 (V_1 - V_0) = 0.$$

Окончательно получаем

$$A_F = RT_0 \left(\left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4 - 1 \right) - A_r \approx 300 \text{ Дж}.$$

2. 2а. При повороте в плоскости рисунка вокруг оси соленоида на угол, кратный 90° (в любую сторону), схема переходит сама в себя. Отсюда следует, что по проводникам центральной ячейки текут одинаковые токи, или, другими словами, по проводникам центральной ячейки циркулирует ток i_1 . Для определения этого тока можно записать закон электромагнитной индукции только для центральной ячейки, как будто всей остальной сетки не существует, тогда направление тока i_1 – против часовой стрелки (следует из правила Ленца), а его величина $i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$. В каждом узле, лежащем в вершине центральной ячейки, соединяются 4 перемычки, по двум из которых текут токи i_1 , причем один из них втекает в узел, а другой вытекает. Следовательно, по двум другим перемычкам тоже текут одинаковые токи, один из которых втекает в узел, а второй вытекает. Обозначим эти одинаковые токи i_2 . Сделаем рисунок (рис. 7), на котором укажем направ-

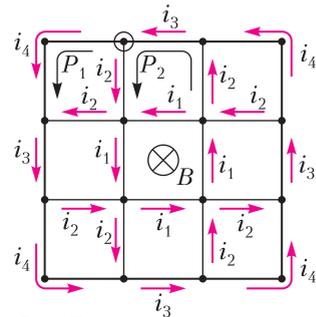


Рис. 7

ления токов в перемычках сетки, используя соображения «поворотной симметрии»: при повороте вокруг оси соленоида на угол, кратный 90° , картина распределения токов не должна измениться. В результате имеем 3 неизвестных тока: i_2, i_3, i_4 . Вообще говоря, направления этих токов могут быть выбраны произвольно. Если в процессе решения значение какого-либо из токов окажется отрицательным, это будет означать, что истинное направление этого тока противоположно указанному на рисунке. Записывая второе правило Кирхгофа для контуров, состоящих из ячеек сетки, выберем направление обхода против часовой стрелки (в ячейках, обозначенных P_1 и P_2 на рисунке, направление обхода указано черными стрелками). Как следует из правила Ленца, при таком выборе направления

обхода ЭДС индукции в правой части уравнений, отражающих второе правило Кирхгофа, будет иметь положительное значение.

Перейдем к расчету токов. Запишем, для узла, помеченного окружностью на рисунке, первое правило Кирхгофа:

$$i_4 = i_3 - i_2.$$

Тогда второе правило Кирхгофа для контура P_1 дает

$$i_3 - 2i_2 = \frac{2\mathcal{E}_0}{r}.$$

Аналогично, второе правило Кирхгофа для контура P_2 дает

$$i_3 + 2i_2 - i_1 = \frac{4\mathcal{E}_0}{r}.$$

Из системы полученных уравнений находим

$$i_2 = \frac{3\mathcal{E}_0}{4r}, \quad i_3 = \frac{7\mathcal{E}_0}{2r}, \quad i_4 = \frac{11\mathcal{E}_0}{4r}.$$

2b. После замены переключателей на границе на конденсаторы ток течет только по проводникам центральной ячейки, этот ток равен $i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$. Будем считать полярность зарядов на обкладках конденсаторов такой, как обозначено на рисунке 8.

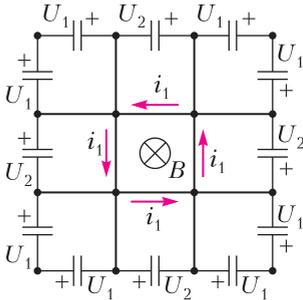


Рис. 8

Если для напряжения на каком-либо конденсаторе получится отрицательное значение, то это будет означать, что на самом деле помеченная «+» обкладка заряжена отрицательно.

Напряжения на конденсаторах, располагающихся в угловых ячейках, одинаковы и равны $U_1 = 2\mathcal{E}_0$, поскольку сумма напряжений на этих конденсаторах должна быть равна (с точностью до знака) скорости изменения магнитного потока через ячейку. Сумма напряжений на всех конденсаторах должна быть равна абсолютной величине скорости изменения магнитного потока через все ячейки сетки. Таким образом, для определения напряжения U_2 имеем уравнение

$$8U_1 + 4U_2 = 9 \cdot 4\mathcal{E}_0, \text{ откуда } U_2 = 5\mathcal{E}_0.$$

3. Пусть предмет находится на расстоянии $x \rightarrow 0$ от правой линзы, проще говоря, вблизи оптического центра правой линзы. Тогда правая линза формирует мнимое изображение предмета, располагающееся также вблизи оптического центра правой линзы, при этом предмет изображается в линзе с поперечным увеличением $\Gamma_1 = \frac{f}{f-x}$, примерно равным 1. Изображение предмета в правой линзе является фиктивным предметом для второй линзы. Он располагается на расстоянии L от левой линзы и, как следует из данного графика, изображается с увеличением $\Gamma_2 = 3$ в этой линзе. Отсюда следует уравнение

$$\left| \frac{f}{f-L} \right| = 3,$$

которое имеет два решения: $L = \frac{4f}{3}$ и $L = \frac{2f}{3}$.

Рассмотрим первое решение. Пусть расстояние до предмета меньше фокусного расстояния линзы: $x < f$. Тогда правая линза дает мнимое изображение, располагающееся на расстоянии $y_1 = \frac{fx}{f-x}$, увеличение этого изображения равно

$$\Gamma_1 = \frac{f}{f-x}.$$

Расстояние от фиктивного предмета до левой линзы равно

$$x_1 = \frac{xf}{f-x} + \frac{4f}{3} = \frac{f(4f-x)}{3(f-x)}.$$

Подставляя значение x_1 в формулу линзы, находим расстояние до изображения во второй линзе:

$$y_1 = \frac{f(4f-x)}{f+2x}$$

и увеличение, с которым изображается фиктивный предмет во второй линзе:

$$\Gamma_2 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{3(f-x)}{f+2x}.$$

Перемножая увеличения, находим увеличение системы:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \frac{3f}{f+2x}.$$

Из полученной формулы следует, что при изменении x от 0 до f увеличение уменьшается, что не соответствует графику, представленному в условии. Таким образом, значение $L = \frac{4f}{3}$ не подходит.

Исследуем значение $L = \frac{2f}{3}$. В этом случае, счи-

тая $x < f$ и рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем

$$\Gamma_2 = \left| \frac{3(f-x)}{f-4x} \right|, \Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \left| \frac{3f}{f-4x} \right|.$$

Легко видеть, что вторая формула соответствует приведенному в условии графику при $f = 60$ см. Расстояние между линзами, очевидно, равно

$$L = \frac{2f}{3} = 40 \text{ см.}$$

4. 4а. В условии сказано, что параметры F_0 и ϵ остаются для любого куска пружины такими же, как для всей пружины, поэтому

$$y = \Delta L \left(1 + \frac{F - F_0}{kL_0} \right).$$

4б. В условиях этого пункта ($\mu > f_0$) любой элемент пружины деформируется под нагрузкой. Разделим всю недеформированную пружину на участки небольшой длины ΔL , пусть общее количество таких участков $N \gg 1$, а участок с номером 1 будет самым верхним. Тогда участок с номером n растягивается силой

$$F_n = Mg \left(\mu + \frac{L_0 - x_n}{L_0} \right), \text{ где } x_n = n\Delta L,$$

поэтому

$$dy = dx \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{\mu - \frac{x}{L_0} - \frac{f_0}{\gamma}}{\gamma} \right).$$

Поскольку $\gamma = 1$, определение длины пружины под нагрузкой сводится к интегрированию:

$$L_1 = \int_0^{L_0} \left(2 + \mu - \frac{x}{L_0} - f_0 \right) dx = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0 \right) L_0.$$

4с. В этом пункте часть пружины не растягивается, на нее действует сила, меньшая F_0 . Длина этого участка пружины равна $L' = L_0 f_0$. В этом случае

$$F = Mg \left(1 - \frac{x}{L_0} \right),$$

а длина растягивающейся части пружины равна

$$L'_2 = \int_0^{L_0(1-f_0)} \left(1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{x}{\gamma L_0} - \frac{f_0}{\gamma} \right) dx.$$

Вычисляя интеграл и прибавляя длину нерастягивающейся части пружины, получаем

$$L_2 = L' + L'_2 = L_0 \left(1 + \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma} \right).$$

4д. Изучив данную таблицу, заметим, что при значениях относительной массы груза $\mu \geq 0,8$ зависимость $\delta L(\mu)$ линейная. Это означает, что при достаточно больших относительных массах груза все участки пружины удлиняются под нагрузкой. Рассуждая, как в пункте 4б, получим соотношение

$$\gamma = \frac{\delta L(\mu_2) - \delta L(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1},$$

из которого следует ответ: $\gamma = 2$. Для определения относительной силы поджатия f_0 используем результат предыдущего пункта. При $\mu = 0$ из формулы для L_2 следует

$$\delta L(0) = \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma}.$$

Подставив сюда $\gamma = 2$ и $\delta L(0) = 0,01$, находим

$$f_0 = 0,8.$$

5. Решение этой задачи будет опубликовано позже.

11 класс, тур 2

1. Пусть собственная индуктивность половины катушки равна L , тогда индуктивность всей катушки равна $4L$, поскольку индуктивность пропорциональна квадрату количества витков. Таким образом, во втором случае амперметр переменного тока показывает

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 + 16(\omega L)^2}},$$

где U_0 – амплитудное значение напряжения источника, ω – частота переменных токов и напряжений, R – сопротивление резистора. Пусть в первом случае токи, текущие через амперметры, направлены одинаково. Магнитный поток через витки левой (по рисунку) половины катушки создается магнитным полем самой этой половины, а также магнитным полем правой половины катушки. Оба магнитных потока пропорциональны токам с одинаковым коэффициентом L . Справедлива формула $\Phi_1 = Li_1 + Li_2$, где i_1 и i_2 – мгновенные значения токов. Такой же магнитный поток создается и через витки правой половины катушки, иначе говоря, $\Phi_1 = \Phi_2$. Система уравнений, описывающая схему, имеет вид

$$U_0 \cos \omega t - L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$-i_2 R - L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} = 0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем равенство $U_0 \cos \omega t + i_2 R = 0$, из которого следу-

ет, что действующее значение тока i_2 (которое и регистрирует амперметр переменного тока) равно

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}R}.$$

Из первого же уравнения системы следует (после подстановки и дифференцирования тока i_2) соотношение

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{U_0}{L} \cos \omega t - \frac{U_0 \omega}{R} \sin \omega t.$$

Здесь складываются две гармонические функции одинаковой частоты, одна из которых сдвинута по фазе относительно другой на $\frac{\pi}{2}$. Амплитудное значение производной, таким образом, можно определить, используя векторную диаграмму. Получится равенство

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{\max} = \frac{U_0 \omega}{R} \sqrt{1 + \frac{R^2}{(L\omega)^2}},$$

из которого для действующего значения тока i_1 имеем

$$I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{2}R} \sqrt{1 + \frac{R^2}{(L\omega)^2}}.$$

Окончательно получим

$$I = I_2 \sqrt{\frac{I_1^2 - I_2^2}{I_1^2 + 15I_2^2}}.$$

2. 2а. Основными в системе СИ являются единицы измерения заряда, массы, длины и времени. Выразим размерности мощности и электрической постоянной ϵ_0 через основные единицы:

$$[P] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}, \quad [\epsilon_0] = \left[\frac{q^2}{Fr^2} \right] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}.$$

Поскольку «килограммы» не входят в размерности скорости и ускорения, а входят только в размерности электрической постоянной и мощности, можно сразу установить, что $\gamma = -1$. «Кулоны» есть только в размерностях заряда и электрической постоянной, поэтому справедливо уравнение $\alpha + 2\gamma = 0$, из которого следует, что $\alpha = 2$. Для определения постоянных β и δ на основе соображений размерности составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \beta - 3\gamma + \delta &= 2, \\ -\beta + 2\gamma - 2\delta &= -3, \end{aligned}$$

откуда найдем $\beta = -3$, $\delta = 2$. Таким образом, для излучаемой мощности имеем

$$P = Ae^2 c^{-3} \epsilon_0^{-1} a^2.$$

2б. Электрон движется по траектории, близкой к круговой, поэтому его ускорение равно центростремительному ускорению $a = \frac{v^2}{r}$, где v – скорость движения электрона, r – расстояние от электрона до ядра. Подставляя ускорение в формулу для мощности, имеем

$$P = Ae^2 c^{-3} \epsilon_0^{-1} \cdot \frac{v^4}{R^2}.$$

Запишем второй закон Ньютона для кругового движения электрона:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m \frac{v^2}{R}.$$

Для полной механической энергии электрона имеем формулу

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

дифференцируя которую, получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} \frac{dR}{dt}.$$

Скорость изменения энергии электрона равна по абсолютной величине и противоположна по знаку мощности излучения:

$$\frac{dE}{dt} = -P.$$

Подставляем сюда выражения для мощности и скорости изменения энергии и после преобразований получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{Ae^4}{2\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2} \frac{1}{R^2}.$$

Из этого уравнения сразу следует ответ на первый вопрос:

$$\Delta t = \frac{2\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2}{Ae^4} R_0^2 \Delta R.$$

Интегрируя, получаем ответ и на второй вопрос:

$$t_{1/2} = \frac{7}{12} \frac{\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2}{Ae^4} R_0^3.$$

3. Важно понимать, что в двух первых пунктах задачи рассматривается стационарный режим, иначе говоря, с течением времени плотность заряда $\rho(x)$ и средняя скорость $v(x)$ не меняются:

$$\rho(x)v(x) = \text{const}.$$

3а. Проекция напряженности поля на ось x (перпендикулярную пластинам) зависит от координаты следующим образом:

$$E_x(x) = -\frac{dU}{dx} = -A\alpha x^{\alpha-1}.$$

Для зависимости скорости от времени имеем

$$v_x(x) = -\mu A \alpha x^{\alpha-1}.$$

Из теоремы Гаусса для слоя толщиной dx (или из теоремы Гаусса в дифференциальной форме), используя выражение для напряженности, для плотности заряда получаем

$$\rho(x) = \epsilon_0 \frac{dE_x}{dx} = -A \epsilon_0 \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha-2}.$$

Умножим плотность заряда на скорость, получится величина, пропорциональная $x^{2\alpha-3}$. С другой стороны, из условия стационарности следует, что рассматриваемое произведение ρv не должно зависеть от x . Это возможно, если показатель степени $2\alpha - 3$ равен нулю, т.е. $\alpha = \frac{3}{2}$. Поскольку известно значение потенциала в точке с координатой d , значение постоянной A теперь тоже легко находится из уравнения $A d^{3/2} = -U_0$. Таким образом, $A = -\frac{U_0}{d^{3/2}}$ и зависимость потенциала от координаты задается формулой

$$U(x) = -U_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{3/2}.$$

Полный ток в любой точке в пространстве между пластинами равен

$$I = \rho(x) v(x) S = \frac{9}{8} \frac{\mu \epsilon_0 S U_0^2}{d^3}.$$

3б. Из условия постоянства тока следует, что производная плотности заряда не зависит от координаты: $\frac{d\rho}{dx} = \text{const}$, следовательно, зависимость заряда от координаты линейная. Соотношение для плотности заряда справедливо и в этом пункте, поэтому показатель степени β находится из уравнения $\beta - 2 = 1$. Таким образом, $\beta = 3$. Постоянную B определяем по значению в крайней точке аналогично предыдущему пункту, получается $B = -\frac{U_0}{d^3}$. Закон изменения потенциала в этом случае имеет вид

$$U(x) = -U_0 \left(\frac{x}{d}\right)^3.$$

Ток I можно найти по формуле, заданной в условии. Действительно,

$$\frac{d\rho}{dx} = 6\epsilon_0 \frac{U_0}{d^3},$$

следовательно,

$$I = -\frac{6\epsilon_0 U_0 \mu k T S}{q d^3}.$$

3с. Искомое неравенство можно получить, оценив, при каком значении потенциала U_0^* абсолютное значение тока из пункта 3б равно току из пункта 3а, числовые множители при этом можно не учитывать. Таким образом,

$$\frac{\epsilon_0 U_0^* \mu k T S}{q d^3} = \frac{\mu \epsilon_0 S (U_0^*)^2}{d^3}, \quad U_0^* = \frac{kT}{q}.$$

Значение U_0^* условно разделяет два режима. Если $U \ll U_0^*$, то реализуется режим, при котором ток обусловлен диффузией. Искомое неравенство принимает вид

$$U_0 \ll \frac{kT}{q}.$$

4. 4а. Бесконечно малое изменение молярного объема в общем случае дается формулой

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_T dp.$$

В этой формуле $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ – это отношение бесконечно малого изменения молярного объема к бесконечно малому изменению температуры при постоянном давлении (частная производная). Из условия следует, что эта производная равна αV , а вторая частная производная равна $-\beta V$, поэтому

$$dV = \alpha V dT - \beta V dp.$$

4б. Поскольку процесс изохорный, $dV = 0$, т.е.

$$\alpha dT - \beta dp = 0.$$

В результате интегрирования получаем

$$p(T) = p_0 + \frac{\alpha}{\beta} (T - T_0).$$

4с. Рассмотрим бесконечно малое изменение внутренней энергии при постоянном объеме. Из данной в условии формулы следует соотношение

$$dU = A_1 dT + A_3 V dT - V dp,$$

подставляя в которое $dp = \frac{\alpha}{\beta} dT$ из предыдущего пункта, имеем

$$dU = A_1 dT + A_3 V dT - V \frac{\alpha}{\beta} dT.$$

Поскольку теплоемкость при постоянном объеме не меняется, $dU = c_V dT$ для любого значения объема. Отсюда следует, что

$$A_3 = \frac{\alpha}{\beta} \approx 6,8 \cdot 10^5 \text{ Па/К и } A_1 = c_V = 112 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

4д. Рассмотрим очень маленький цикл Карно, совершаемый с жидкостью. Пусть температуры на изотермах цикла равны T и $T + \Delta T$, тогда его

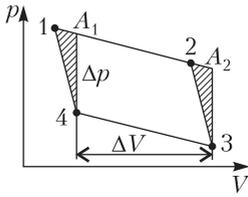


Рис. 9

КПД равен

$$\eta = \frac{\Delta T}{T}.$$

С другой стороны, КПД можно выразить через работу за цикл и количество теплоты, подводимое к жидкости на «горячей» изотерме. На рисунке 9 представлен схематично изображенный цикл Карно 1–2–3–4. Вообще говоря, работа за цикл равна площади параллелограмма 1234, однако эта площадь равна площади параллелограмма A_1A_234 . Другими словами, $\Delta A = \Delta p \Delta V$, где Δp – изменение давления на изохоре при изменении температуры на ΔT , а ΔV – изменение объема на изотерме. Изменение давления на изохоре равно $\Delta p = \frac{\alpha}{\beta} \Delta T$, поэтому для работы справедлива формула

$$\Delta A = \frac{\alpha}{\beta} \Delta V \Delta T.$$

Определим количество теплоты, подведенное на «горячей» изотерме. Справедливо соотношение $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p_1$. Здесь Δp_1 – изменение давления на изотерме, что отличается от величины Δp , показанной на рисунке. С учетом этого соотношения из первого начала термодинамики и формулы для внутренней энергии (данной в условии) имеем

$$\Delta Q = A_2 \Delta V + A_3 T \Delta V - V \Delta p_1.$$

Последнее слагаемое из этой формулы можно преобразовать так: $V \Delta p_1 = -\frac{\Delta V}{\beta}$ (как следует из условия), поэтому

$$\Delta Q = \left(A_2 + A_3 T + \frac{1}{\beta} \right) \Delta V.$$

Таким образом, для КПД цикла Карно имеем

$$\eta = \frac{\frac{\alpha}{\beta} \Delta T}{A_2 + A_3 T + \frac{1}{\beta}}.$$

Приравняв правые части формул для КПД, получим значение искомого коэффициента:

$$A_2 = -\frac{1}{\beta} = -1,1 \cdot 10^9 \text{ Па}^{-1}.$$

4е. При постоянном давлении количество теплоты, подведенное к жидкости, равно

$$\delta Q = A_1 dT + A_2 dV + A_3 V dT + A_3 T dV.$$

Отсюда находим

$$c_p = \frac{\delta Q}{dT} = \left(c_V + \frac{\alpha V}{\beta} \right) + \left(\frac{\alpha T}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right) \frac{dV}{dT}.$$

Производную объема по температуре при постоянном давлении можно выразить через данный в условии коэффициент: $\frac{dV}{dT} = \alpha V$. Тогда

$$c_p = c_V + \frac{\alpha^2 T_0 V_0}{\beta}.$$

5. Решение этой задачи будет опубликовано позже.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

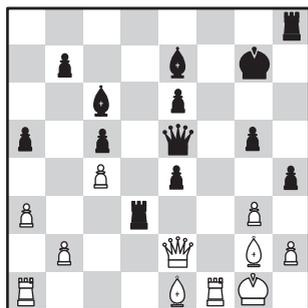
**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

ДВА БИЛЕТА

Российские шахматистки Екатерина Лагно и Александра Горячкина по итогам серии турниров Гран-при ФИДЕ завоевали право сыграть в турнире претенденток, который состоится в следующем году. Екатерина единолично победила на этапе в Астане, а Александра разделила 1–3 место на турнире в Нью-Дели, что позволило им при скромных результатах на последнем этапе серии в Никосии (5 и 6 место соответственно) опередить всех преследовательниц по сумме баллов, набранных за три турнира.

Д. Вагнер – Е. Лагно Астана, 2022

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. g3 ♘b4+ 5. ♘d2 ♘e7 6. ♘g2 ♘bd7 7. 0-0 c6 8. ♖c2 ♘e4 9. ♘f4 g5 10. ♘c1 h5 11. ♘c3 f5 12. ♘e4 de 13. ♘e5 ♘e5 14. de ♖c7 15. ♖c3 c5 16. a3 a5 17. ♘d2 ♘d7 18. ♘fd1 ♘f7 19. f3 ef 20. ♘f3 ♘c6 21. e4 fe 22. ♘g2 ♘ad8 23. ♖e3 ♘d3 24. ♘f1+ ♘g7 25. ♖e2 h4 26. ♘e1 ♖e5? За счет активных действий черные получили выигранную позицию, и должны были пожертвовать качество: 26...hg 27. hg ♘g3 28. ♘g3 ♖g3 с подавляющим преимуществом.

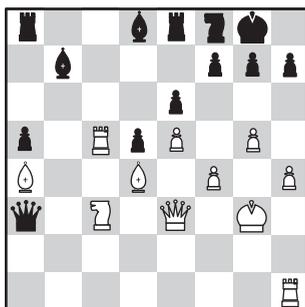


27. gh? Белые прошли мимо временной жертвы ферзя: 27. ♖d3! ed 28. ♘c3 с массовыми разменами и вероятной ничьей. 27...♘d6 28. ♘h1 ♖d4+ 29. ♘f2

e3 30. ♘e1 ♘d2 31. ♘d2 ed+ 32. ♘f2 ♘h2+! 33. ♘f1. Слона брать нельзя из-за мата: 33. ♘h2 ♖h4+ 34. ♘g1 ♖h1×. 33...♘h1 34. ♘d1 ♘g3, белые сдались.

Е. Лагно – Тань Чжунъи Астана, 2022

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. ♘e2 e6 7. ♘e3 ♘e7 8. g4 d5 9. e5 ♘fd7 10. f4 ♘c6 11. ♖d2 ♘h4+ 12. ♘f1 ♘e7 13. ♘g2 ♖c7. Здесь и на предыдущем ходу было возможно активное g5!? со вскрытием королевского фланга и сложной игрой. 14. ♘f3 ♘d4 15. ♘d4 b5 16. ♘e2 ♘b7 17. c3 0-0 18. ♖e3 ♘fe8 19. g5 a5 20. h4 b4 21. ♘ac1 ♖c4?! Безопаснее 21...♖d8, не попадая под преследование белых фигур. 22. cb ♖b4 23. ♘c7 ♘f8 24. a3 ♖b5 25. ♘c3! ♖b3 26. ♘d1 ♖b2+ 27. ♘e2 ♖b5 28. ♘c3 ♖b2+ 29. ♘g3 ♘d8 30. ♘c5 ♖a3 31. ♘a4.

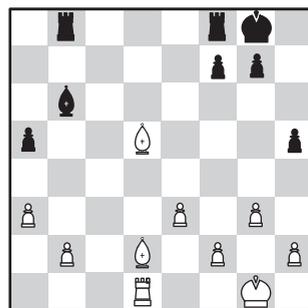


31...♘b6? Решающая ошибка в сложной позиции. Удержать равенство помогал красивый перевод коня на f5: 31...♘g6! 32. ♘e8 ♘e7 33. ♘b5 ♘f5! 34. ♘h3 ♖e3 35. ♘e3 ♘b6. 32. ♘b1 ♘c5 33. ♘c5 d4 34. ♘a3 de 35. ♘e8 ♘e8 36. ♘b7. У белых лишняя фигура, а черные пешки на линиях а и е обречены. 36...♖c8 37. ♘e2 h6 38. gh gh 39. h5, черные сдались.

А. Горячкина – Х. Дронавали Нью-Дели, 2023

1. d4 d5 2. c4 e6 3. ♘f3 ♘f6 4. g3 ♘b4+ 5. ♘d2 a5 6. ♘g2 0-0 7. ♖c2 c5 8. cd cd 9. ♘d4

♖b6 10. e3 ed 11. 0-0 ♘c6 12. ♘c6 bc 13. ♘c1 ♘b8 14. ♘c3 h5 15. a3 ♘e7 16. ♘a4 ♖c7 17. ♖c6 ♖c6 18. ♘c6 ♘d7 19. ♘c7 ♘d8 20. ♘d7 ♘d7 21. ♘d1 ♘b6 22. ♘b6 ♘b6 23. ♘d5. Черные грамотно разобрались в дебютных осложнениях, однако позиционная жертва качества сохраняется белым шансы на победу за счет активности пары слонов.



23...♘fc8 (точнее 23...h4, затрудняя белым координацию) 24. ♘c3 a4 25. ♘f3 ♘c5 26. ♘b4 ♘c2 27. ♘c3! Значительно сильнее, чем 27. ♘h5 ♘c5 28. ♘c3 ♘a3 с выгодными для черных упрощениями. 27...♘d8 28. ♘a1 g6 29. ♘c6! Ладья практически поймана, и черные вынуждены вернуть качество. 29...♖c3 30. bc ♘c5 31. ♘a4 ♘a8 32. ♘b3 ♘a3 33. ♘b1. Две лишние пешки – не гарантия победы в эндшпиле с разноцветными слонами, поэтому белые избегают размена ладей. 33...♘d6 34. ♘d5 ♘e5 35. ♘b6 ♘f8 36. c4 ♘a7 37. ♘g2 ♘e7 38. c5 ♘c7 39. ♘b2 ♘a5 40. ♘c2 g5 41. ♘f3 g4 42. ♘e4 ♘e6 43. ♘c4 ♘b5?! 44. ♘c6! ♘b2 45. ♘d4 ♘e5 46. ♘d7+ ♘e7 47. ♘d5 f6 48. ♘f5 ♘b5 49. ♘d7+. Используя принцип «двух слабостей», белые выигрывают пешки на королевском фланге и вместе с ними партию. 49...♘e8 50. c6 ♘c5 51. ♘h7 ♘f8 52. ♘h5 ♘c6 53. ♘g4 ♘c2 54. ♘f5 ♘b2 55. ♘h8+ ♘g7 56. ♘h7+ ♘g8 57. ♘d7 ♘c3 58. ♘f1 ♘b5 59. ♘d3 ♘a5 60. h4, черные сдались.

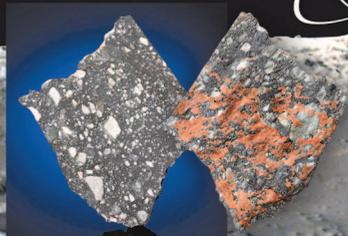
А. Русанов

Индекс 90964

ЛЫЖНЯ НА ЛУНЕ – ?!

Оказывается, кататься на лыжах можно не только по снегу, но и по песку.
И, возможно, даже на Луне.

Продукты с физикой



ISSN 0130-2221 23006

9 770130 222238

(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 36 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)