

ISSN 0130-2221

2022 · № 8

АВГУСТ

КВАНТ

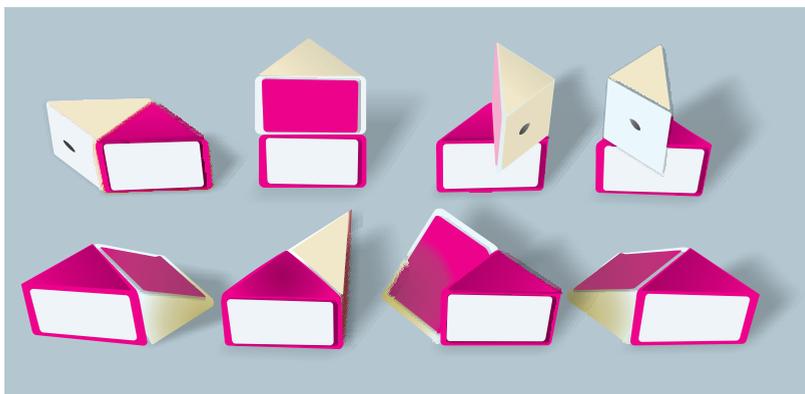
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



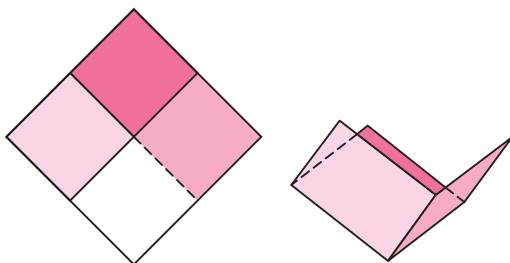
Если у вас сломалась головоломка «Змейка» – одно из творений знаменитого изобретателя Эрне Рубика, – то вместо того, чтобы чинить, можно сделать из нее новую головоломку. «Змейка» состоит из 24 равных треугольных призм, шарнирно соединенных между собой. Если убрать все шарниры, то змейка распадется на отдельные призмы, каждая из которых является половиной кубика, будем считать этот кубик единичным.



Шестнадцать таких половинок и станут деталями нашей новой головоломки, цель которой — сложить куб $2 \times 2 \times 2$. Но просто так складывать куб из полукубиков неинтересно, поэтому усложним себе задачу, склеив их парами, как показано на фотографии.



Чтобы было удобнее решать задачу, можно сделать лоток в форме трехгранного угла – он послужит основой для куба, который вы собираете. Для этого надо вырезать картонный квадрат 4×4 , согнуть его по средним линиям, сделать полуразрез и склеить два квадрата 2×2 между собой.



Задача не простая, сходу решить ее скорее всего не получится, но если проявить настойчивость, то успех обязательно придет. Удачи!

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Следы невидимого: от молекулярной физики к физике частиц высоких энергий. *С.Бозиев*
8 LTE-лемма и рекурренты. *П.Кожевников*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 13 XXIX Международный конгресс математиков
15 «Лилавати»
16 Троичные системы и самоподобные пирамиды. *А.Заболотский*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи M2710–M2713, Ф2717–Ф2720
21 Решения задач M2698–M2701, Ф2705–Ф2708

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 28 Задачи
29 Красота нашего мира и симметрия. *С.Салихов, Д.Ливанов*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 33 Как Студент в ужас пришел. *А.Стасенко*

ОЛИМПИАДЫ

- 35 LXIII Международная математическая олимпиада
37 Московская олимпиада школьников по физике 2022 года
46 Избранные задачи XXVII Турнира имени А.П.Савина

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 48 Новосибирский государственный университет. Физика
55 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (18, 64)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Следы невидимого...»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Следы невидимого: от молекулярной физики к физике частиц высоких энергий

С. БОЗИЕВ

Переход от идеального газа к реальному – мост в физику микромира

В молекулярной физике модель идеального газа представлена как совокупность упругих и точечных частиц, не взаимодействующих между собой на расстоянии. Состояние идеального газа описывается уравнением Менделеева–Клапейрона

$$pV = \nu RT,$$

где p – давление газа, T – его температура, V – объем сосуда, ν – количество вещества, R – универсальная газовая постоянная (равная $8,31$ Дж/(моль · К)). Уравнение состояния идеального газа было изначально получено французским физиком Б.Клапейроном в 1834 году как обобщение имеющихся экспериментальных законов и окончательно сформулировано для произвольного количества вещества русским ученым Д.И.Менделеевым в 1874 году.

Практически в то же время голландский физик И. Ван-дер-Ваальс опубликовал модернизированную двумя поправками формулу, получившую название уравнения состояния реального газа. Суть поправок состояла в следующем.

1) Учет реальных размеров молекул уменьшает доступный для их движения объем сосуда, что приводит в формуле к замене объема V на $(V - vb)$. Константа b равна объему, не доступному для движения одной молекулы газа.

2) В отличие от идеального газа модель реального газа учитывает взаимодействие

молекул на расстоянии. Это взаимодействие имеет электромагнитную природу и обуславливает возникновение сил притяжения между молекулами на расстояниях, существенно превышающих их размеры. Силы межмолекулярного притяжения приводят к уменьшению давления газа на стенки сосуда. Чем выше концентрация молекул, тем больше сил действуют на одну молекулу со стороны остальных. Если молекула находится вблизи стенки сосуда, то результирующая всех сил притяжения направлена преимущественно к центру сосуда и ослабляет ее взаимодействие со стенкой. С другой стороны, чем выше концентрация, тем больше молекул испытывают силу, направленную от стенки к центру сосуда. Следовательно, зависимость силы давления молекул газа на стенки сосуда от концентрации молекул становится квадратичной. Поскольку концентрация обратно пропорциональна объему сосуда, то поправка к давлению газа имеет

$$\text{вид } \Delta p = \frac{\nu^2 a}{V^2}.$$

В итоге уравнение состояния идеального газа переходит в уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT,$$

где a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, зависящие от типа газа. Из этого уравнения следует, например, что изотермы паров различных жидкостей могут существенно различаться. На рисунке 1 представлена изотерма для одного моля паров азота. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота: $a =$

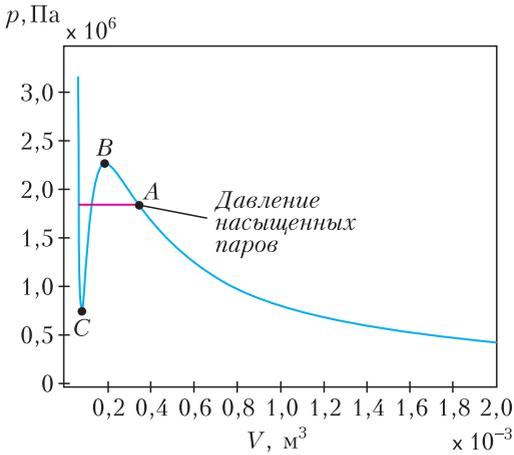


Рис. 1. Изотерма Ван-дер-Ваальса для азота при температуре 110 К

$= 0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$, $b = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$. Из рисунка видно, что кривая имеет физические особенности в точках A, B и C. При изотермическом сжатии азота первая капля жидкого азота выпадает в точке A, называемой точкой росы. В точке росы давление газа достигает наибольшего возможного значения для заданной температуры. Его называют давлением насыщенного пара. Сплошная красная линия на рисунке соответствует давлению насыщенных паров азота, равному примерно 1800 кПа. При дальнейшем сжатии давление за точкой росы не меняется и экспериментальная изотерма идет вдоль красной линии. На теоретической изотерме изображен участок AB, который может быть реализован в эксперименте. Здесь пар переходит в метастабильное состояние и получается так называемый пересыщенный пар. Его давление превышает давление насыщенных паров. В такое метастабильное состояние пар может быть переведен при резком изменении его давления в точке росы.

При прохождении через пересыщенный пар заряженной частицы вдоль ее траектории образуются ионы молекул пара, которые становятся центрами конденсации. При этом давление пара падает. Он переходит в устойчивое состояние насыщенного пара над сконденсировавшейся жидкостью и устанавливается динамическое

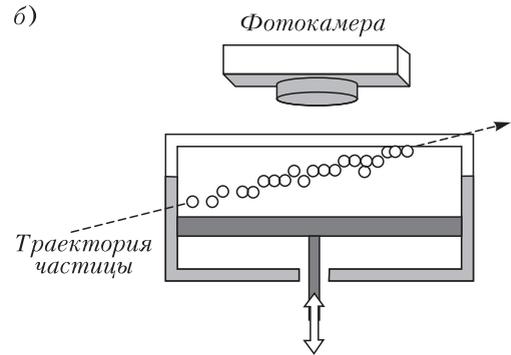
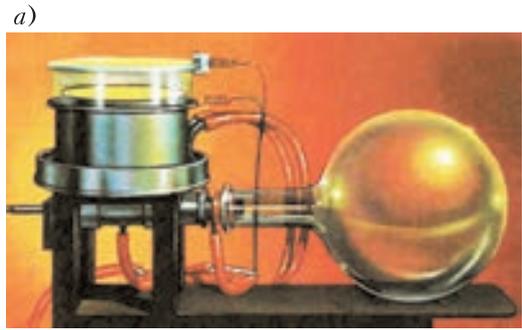


Рис. 2. Камера Вильсона

равновесие между жидкой и газообразной фазами. Размеры капель жидкости, образовавшихся вдоль траектория частицы, достигают 0,01 мм и могут быть сфотографированы. На этом явлении основан принцип работы камеры Вильсона — первого трекового детектора, позволившего идентифицировать траектории элементарных частиц.

Камера Вильсона была изобретена шотландским физиком Ч. Вильсоном в 1912 году. В отличие от электроскопов она позволила установить не только простой факт прохождения заряженной частицы через объем газа, но и увидеть ее траекторию. На рисунке 2 приводится общий вид камеры (а) и иллюстрация принципа ее работы (б).

Камера Вильсона — новый взгляд на физику космических лучей

В 1896 году французский физик А. Беккерель случайно открыл явление радиоактивности, после чего следы природной радиации стали искать везде, где предполагалось ее существование, в том числе и в земной

атмосфере. В 1911 году австрийский физик В. Гесс создал электроскоп, способный выдержать перепады атмосферного давления и температуры на больших высотах. В том же году он совершил полет на военном аэростате с целью обнаружения радиоактивного излучения в атмосфере. До высоты около 1100 м он не обнаружил существенного изменения интенсивности радиации по сравнению с полученными на поверхности земли данными. Однако все указывало на существование неизвестного источника радиации в атмосфере, дополняющего радиоактивные распады изотопов химических элементов в земной коре. Последующие полеты проводились на высотах до 2000 м. Все полученные результаты свидетельствовали о существовании радиации, имеющей неземное происхождение. Интенсивность этого излучения не зависела от времени суток, что исключало возможность того, что оно порождено Солнцем. Последующие независимые опыты подтвердили существование радиации в атмосфере, но первая мировая война прервала исследования в этом направлении.

В отличие от электроскопа камера Вильсона помимо фиксирования факта наличия источника радиации позволяет фотографировать траектории заряженных частиц, проникающих через камеру. Центры конденсации, появившиеся вдоль траектории частицы, образуют капли. В 1923 году



Академик Дмитрий Владимирович Скобельцын, 1956 год

советский физик-экспериментатор Д. В. Скобельцын провел первые опыты с камерой Вильсона, помещенной во внешнее магнитное поле. Попадая в камеру, заряженные частицы отклонялись под действием силы Лоренца, равной $F = qvB \sin \alpha$, где q – заряд частицы, v – ее скорость, B – индукция магнитного поля, α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} . Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки. Радиус кривизны R траектории нерелятивистской частицы можно найти из второго закона Ньютона $ma_{ц} = qvB \sin \alpha$, где $a_{ц} = \frac{v^2}{R}$ – центростремительное ускорение. Отсюда получается, что импульс частицы равен

$$p = qRB \sin \alpha.$$

Эта формула позволяет по наблюдаемому радиусу кривизны траектории частицы рассчитать ее импульс.

Из анализа траекторий частиц в опытах Скобельцына следовало, что регистрируются заряженные частицы и что среди них есть такие, импульсы которых превышают 20 МэВ/с. Если предположить, что наблюдаемые частицы являются электронами, то их полная энергия вычисляется по релятивистской формуле

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Для импульса электрона $p = 20$ МэВ/с и его энергии покоя $mc^2 = 0,511$ МэВ получается полная энергия $E = 20$ МэВ, которая в 39 раз превышает энергию покоя. Это означает, что электроны, зарегистрированные в опытах Скобельцына, были релятивистскими. Скорость электрона можно вычислить по формуле для релятивистского импульса:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ откуда } v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}.$$

Скорость электрона для

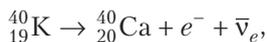
$$p = 20 \text{ МэВ/с} = \frac{20 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ Дж}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} =$$

$$= 1,067 \cdot 10^{-20} \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \text{ и } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

составляет $v = 0,9997 \cdot c$.

Опыты Скобельцына стали первыми, в которых были не просто зарегистрированы, но и идентифицированы энергии релятивистских электронов по искривлению их траектории магнитным полем. Для сравнения: максимальная кинетическая энергия электронов, образующихся при β -распаде изотопа калия в реакции



равна 1,3 МэВ. Такие электроны являются релятивистскими. Их кинетическая энергия более чем в 2 раза превышает энергию покоя, скорость равна $v = 0,7786 \cdot c$, а их полная энергия на порядок ниже энергии электронов, зарегистрированных в опытах Скобельцына. Стало очевидно, что события в камере Вильсона имеют нерадиоактивное происхождение, а атмосферное электричество, обнаруженное в опытах Гесса, было связано с существованием в атмосфере Земли высокоэнергичных электронов. После опытов Скобельцына релятивистские частицы в атмосфере стали называть космическими лучами и результаты их исследований публиковались не в геофизических, а в ядерно-физических журналах.

Говоря об опытах Д.В.Скобельцына с камерой Вильсона в магнитном поле, следует упомянуть класс событий, характерная фотография которых приведена на рисунке 3. Видно, что внутри камеры рождаются две частицы, которые разлетаются в разные стороны, и разумно предположить, что направления сил Лоренца, действующих на образовавшуюся пару частиц в магнитном поле, противоположны друг другу в начале их траекторий. Так как траектории частиц являются зеркальными, то частицы имеют одинаковые массы и одинаковые по величине, но противоположные по знаку электрические заряды. По таким фотографиям и был открыт позитрон – античастица электрона.

Впоследствии было обнаружено, что у каждой элементарной частицы есть своя



Рис. 3. Образование $e^{-}e^{+}$ -пары в камере Вильсона

античастица. Электрон-позитронная пара на рисунке 3 образовалась в результате распада гамма-кванта в электрическом поле атомного ядра одного из атомов насыщенного пара. Гамма-квант – нейтральная частица и поэтому не оставляет ионизационных следов в камере Вильсона. Следы появились только после его распада на заряженную частицу и античастицу. В архиве Д.В.Скобельцына были фотографии со следами от электрон-позитронных пар от распада гамма-квантов, и на международной конференции в Лондоне в 1928 году он доложил об электронах, имеющих «неправильный» заряд, но доклад не получил должного резонанса. В 1932 году американский физик-экспериментатор К.Андерсон по фотографиям, аналогичным фотографиям Д.В.Скобельцына в камере Вильсона, сообщил об открытии позитрона, за что в 1936 году совместно с В.Гессом был удостоен Нобелевской премии, а работы Д.В.Скобельцына не были оценены по достоинству.

Впоследствии в серии комплексных наземных экспериментов выяснилось, что высокоэнергичные электроны, зарегистрированные в опытах с камерой Вильсона, были «отголоском» ядерного каскада в земной атмосфере, инициированного высокоэнергичными атомными ядрами (преимущественно протонами), прилетающими из

космоса. В таких каскадах рождаются все известные элементарные частицы. Так, в опытах с космическими лучами были открыты мюоны, пионы, каоны и гипероны. Существенный вклад в эти исследования внесли коллеги и ученики Д.В.Скобельцына академики С.Н.Вернов, Г.Т.Зацепин, А.Е.Чудаков, Г.Б.Христиансен, Н.Л.Григорьев и другие известные ученые.

В частности, идея о генерации ядерного каскада в атмосфере высокоэнергичными протонами была впервые высказана Г.Т.Зацепиным. Им же был разработан первый аналитический метод расчета характеристик ядерного каскада в атмосфере и продуктов распада короткоживущих ядерно-активных частиц. Такие ливни назвали широкими атмосферными ливнями (ШАЛ). В личной беседе с автором этой статьи Георгий Тимофеевич вспоминал, что первый его доклад о том, что ШАЛ могут создаваться высокоэнергичными протонами из космоса, были встречены участниками научного семинара с иронией. Однако сразу после доклада к нему подошел будущий академик А.Д.Сахаров со словами: «И Вы им верите?», что вдохновило автора доклада на дальнейшее развитие идеи космического происхождения атмосферной радиации.

После того, как была установлена ядерная природа происхождения ШАЛ, космические лучи стали делить на первичные и вторичные. Первичные космические лучи – частицы, прилетающие из космоса и попадающие в земную атмосферу, а вторичные – частицы, образованные в атмосфере в результате взаимодействия первичных космических лучей с ядрами атомов воздуха. После открытия заряженных пионов в космических лучах стало понятно, что они могут играть значительную роль в формировании каскада в атмосфере, но их не хватало для объяснения большого количества электронов и фотонов в ШАЛ. В этой связи Г.Т.Зацепин предположил существование нейтральных пионов, способных распадаться на два фотона, которые, в свою очередь, распадаются на электрон-позитронную пару и дают начало электронно-фотонной компоненте ШАЛ. По воспоми-

ниям Георгия Тимофеевича: «Когда я выступил на научном семинаре ФИАНа, меня обсмеяли так, что я сломался. У меня пропало всякое желание развивать и отстаивать идею существования нейтральных пионов. Очень жаль, что Андрей Дмитриевич не был на этом семинаре, он бы поддержал...» Нейтральный пион был идентифицирован в циклотроне Калифорнийского университета в 1950 году по его распаду на два фотона. Так ускорители частиц постепенно стали серьезным источником данных о физике микромира и существенно дополняли результаты исследований по космическим лучам.

Со временем ШАЛ стали представлять интерес преимущественно в астрофизике высоких и сверхвысоких энергий, уступая первенство в исследованиях свойств элементарных частиц ускорителям. ШАЛ представлены вторичными частицами и исследуются наземными и подземными установками, а первичные космические лучи регистрируются в прямых исследованиях за пределами атмосферы. Первые внеатмосферные исследования по прямой регистрации первичных частиц на аппаратуре, установленной на искусственных спутниках Земли, были проведены под руководством академиков С.Н.Вернова и А.Е.Чудакова. В частности, в этих экспериментах впервые был обнаружен внутренний радиационный пояс Земли, расположенный на высоте порядка 4000 км и состоящий преимущественно из захваченных магнитным полем планеты протонов с энергией в десятки МэВ.

В настоящее время в нашей стране функционируют комплексные наземные, подземные и подводные установки для исследования космических лучей высоких и сверхвысоких энергий. Это – установка ШАЛ МГУ, Баксанская нейтринная обсерватория, Байкальский подводный нейтринный телескоп и Якутская установка ШАЛ. Они созданы во второй половине XX века и до сих пор дают качественный результат благодаря высокому профессионализму большого отряда создавших их ученых.

Расчетные значения максимальной энергии первичных протонов, породивших наблюдаемые на этих установках события,

достигают 10^{21} эВ. Сравним ее с суммарной энергией протонов и антипротонов в системе центра масс, равной в Большом адронном коллайдере $E_{\text{цм}} \approx 10^{13}$ эВ. Для этого нужно $E_{\text{цм}}$ пересчитать по отношению к энергии протона $E_{\text{лаб}}$ в лабораторной системе координат. Из формулы $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ следует, что квадрат энергии покоя релятивистской частицы равен $m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$. Если в лабораторной системе координат частица-мишень покоится, а в системе центра масс суммарный импульс сталкивающихся частиц равен нулю, то квадрат суммарной энергии покоя сталкивающихся частиц одинаков в лабораторной системе и в системе центра масс:

$$(E_{\text{лаб}} + mc^2)^2 - p_{\text{лаб}}^2 c^2 = E_{\text{цм}}^2.$$

В приближении $E_{\text{лаб}} \gg mc^2$ получим

$$E_{\text{лаб}} = \frac{E_{\text{цм}}^2}{2mc^2}.$$

Расчет по этой формуле дает $E_{\text{лаб}} = 5,3 \cdot 10^{16}$ эВ, где энергия покоя протона равна $mc^2 = 938$ МэВ. Видно, что максимальная энергия земных ускорителей уступает природным аналогам в $\frac{10^{21}}{5,3 \cdot 10^{16}} = 6667$ раз. В случае, когда протон сталкивается не с антипротоном, а с ядром молекулы воздуха, знаменатель правой части нашей формулы увеличивается примерно в 29 раз и, соответственно, уменьшается энергия протона в лабораторной системе: $E_{\text{лаб}} \approx 1,83 \cdot 10^{15}$ эВ.

Такое отставание земных ускорителей частиц от природных делает беспочвенными нередкие спекулятивные аргументы, появляющиеся в средствах массовой информации против создания мощных ускорителей, способных генерировать микроскопические черные дыры, которые со временем поглотят Землю. Факт существования нашей и других планет Солнечной системы опровергает данную гипотезу, так как гипотетические черные дыры от космических протонов сверхвысоких энергий за миллиарды лет представляли бы для небесных

тел несравнимо большую угрозу, чем сравнительно маломощные искусственные пучки протонов и антипротонов.

Говоря о космических лучах самых высоких энергий, следует упомянуть одно из последних открытий, связанных с наличием у большинства галактик так называемых активных галактических ядер – гигантских черных дыр с массами от миллионов до миллиарда масс Солнца. Ученые нанесли на карту неба направления, откуда пришли около сотни зарегистрированных ШАЛ, инициированных предположительно протонами, энергии которых превышают $4 \cdot 10^{19}$ эВ. Энергии протонов определялись по числу сгенерированных ими вторичных частиц в ШАЛ. Оказалось, что все они приходят преимущественно из центра нашей галактики, т.е. ускоряются они до сверхвысоких энергий в окрестности активных галактических ядер.

Из уравнения состояния реального газа следует возможность существования еще одного трекового детектора – пузырьковой камеры, которая широко используется в современной экспериментальной ядерной физике. Принцип ее работы основан на резком изотермическом понижении давления жидкости, которое изначально равно давлению насыщенного пара. Тогда в точке С на рисунке 1 жидкость становится перегретой, а в камере вдоль траектории заряженной частицы образуются пузырьки пара, которые фотографируются так же, как и в камере Вильсона. Пузырьковая камера была изобретена американским физиком Д.Глазером в 1952 году – существенно позже камеры Вильсона, служившей инструментом для пионерских исследований в физике микромира и представляющей в настоящее время лишь исторический интерес.

В современных экспериментах в физике высоких энергий используются более функциональные детекторы с различными физическими механизмами регистрации частиц. Тем не менее, камера Вильсона была первым трековым детектором, принцип работы которой основан на объективных законах молекулярной физики.

LTE-лемма и рекурренты

П. КОЖЕВНИКОВ

Рассмотрим формулировки трех классических задач.

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального k число $\underbrace{111\dots1}_{3^k \text{ единиц}}$ делится на 3^k .

Задача 2. Для каждого натурального n определите, на какую наибольшую степень двойки делится число $5^n - 3^n$.

Задача 3. Последовательность Фибоначчи определена условиями: $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ для $n \geq 2$. Докажите, что для каждого натурального k число f_n делится на 5^k тогда и только тогда, когда n делится на 5^k .

Сходство постановок просматривается: для разных целочисленных последовательностей нас интересует вопрос, на какую степень заданного простого числа делятся члены наших последовательностей.

Ниже для целого числа $a \neq 0$ и простого числа p будем обозначать через $v_p(a)$ степень вхождения простого числа p в разложение числа a , т.е. равенство $v_p(a) = \alpha$ будет означать, что $a : p^\alpha$, но $a \not\equiv p^{\alpha+1}$. В частности, условие $v_p(n) = 0$ эквивалентно тому, что n не делится на p . Также условимся считать, что $v_p(0) = \infty$.

В этой статье мы начнем с отдельного обсуждения каждой из приведенных задач, а затем разовьем небольшую теорию, объединяющую все эти задачи.

Упражнение 1. а) При каких k работает следующее «решение» задачи 1: «сумма цифр числа равна 3^k , поэтому и само число делится на 3^k »?

б) Используя равенство

$$\underbrace{1111\dots111}_{3t \text{ единиц}} = \underbrace{111\dots1}_{t \text{ единиц}} \cdot 100\dots0100\dots01,$$

докажите утверждение задачи 1 по индукции.

в) Отметим, что в задаче 1 утверждается, что $v_3\left(\underbrace{111\dots1}_{3^k \text{ единиц}}\right) \geq k$. С помощью рассуждения из

пункта б) получите (формально, используя индукцию по $v_3(n)$), что для любого натурального n выполнено $v_3\left(\underbrace{111\dots1}_n\right) = v_3(n)$.

Далее, в задаче 2 нас просят отыскать $v_2(5^n - 3^n)$.

Упражнение 2. а) Докажите, что при нечетном m выполнено $v_2(5^{km} - 3^{km}) = v_2(5^k - 3^k)$. Выведите отсюда, что при нечетном n выполнено $v_2(5^n - 3^n) = 1$.

Указание. Используйте формулу разности степеней.

б) Докажите, что при четном m выполнено $v_2(5^m + 3^m) = 1$.

в) Докажите, что если $v_2(n) \geq 1$, то $v_2(5^n - 3^n) = v_2(n) + 3$.

Как видим, с задачами 1 и 2 помогает справиться индукция.

Вернемся к обсуждению родства задач 1, 2, 3. Если уйти от десятичной записи в формулировке задачи 1, воспользовавшись тем, что $\underbrace{111\dots1}_n = \frac{10^n - 1}{9}$, условия задач 1 и 2 становятся совсем похожими.

Кажется, теперь уместно вспомнить следующее общее утверждение, широко известное в «узких олимпиадных кругах» как Lifting The Exponent Lemma (LTE-лемма).

Формулировка LTE-леммы

1) Случай $p > 2$. Пусть $p > 2$ – простое число. Пусть a и b – различные целые числа, не делящиеся на p и такие, что $a - b$ делится на p . Тогда для любого натурального n выполнено

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(n) + v_p(a - b).$$

2) Случай $p = 2$. Пусть a и b – различные целые нечетные числа такие, что $a - b$ делится на 4. Тогда для любого натурального n выполнено

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(n) + v_2(a - b).$$

Доказательство LTE-леммы можно провести индукцией по $v_p(n)$, как показано, например, в статье «Степени n и n -е степени» («Квант» №1 за 2012 г.). Здесь доказывать LTE-лемму не будем, так как ниже мы намерены доказать теорему, обобщающую LTE-лемму.

Видим, что задача 1 сводится к LTE-лемме для $p = 3, a = 10, b = 1$. Формально условие задачи 2 не удовлетворяет случаю $p = 2$ LTE-леммы. Но все равно LTE-лемма здесь почти все «решает». Для четного n в задаче 2 можно положить $p = 2, a = 25, b = 9$ и вывести результат напрямую из LTE-леммы. (Случай же нечетного n несложно разобрать отдельно.)

Таким образом, LTE-лемма для последовательностей $u_n = a^n - b^n$, удовлетворяющих особым условиям, дает результат: $v_p(u_n) = v_p(n) + \text{const}$.

Подумаем теперь, как связана формулировка задачи 3 с формулировками задач 1,2, ну или с LTE-леммой. Известно (и можно убедиться в этом, решив упражнение ниже), что последовательность $u_n = a^n - b^n$ так же, как, например, последовательность Фибоначчи, представляет собой линейную рекурренту второго порядка (т.е. каждый член последовательности выражается линейно через два предыдущих).

Упражнение 3. а) Проверьте, что каждая из последовательностей $\{a^n\}$ и $\{b^n\}$, $a \neq b$, удовлетворяет условию (линейной рекурренте)

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1}, \tag{1}$$

где $c = a + b, d = ab$, так что многочлен $x^2 - cx + d$ имеет различные корни a и b .

б) Наоборот, пусть многочлен $x^2 - cx + d$ имеет различные корни a и b . Тогда условию (1) удовлетворяет каждая последовательность вида $\{\lambda a^n + \mu b^n\}$, где λ и μ – фиксированные константы.

С рекуррентами, кажется, иметь дело сложнее, поскольку член последовательности выражен не явно, а через предыдущие. Явная формула для линейных рекуррент, в частности для чисел Фибоначчи, тоже существует, но она не такая простая, в ней фигурируют иррациональности, и можно усомниться, поможет ли такая формула...

В следующей лемме пока что вспомним, как для рекуррент, похожих на последовательность Фибоначчи, ведут себя остатки при делении на фиксированное число k .

Лемма. Пусть k – натуральное число, а u_0, u_1, \dots – такая последовательность целых чисел, что

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1}$$

для фиксированных целых c и d , где d взаимно просто с k . Кроме того, пусть u_0 и u_1 дают соответственно остатки 0 и 1 при делении на k . Пусть t – минимальное натуральное такое, что $u_t \equiv k$. Тогда $u_s \equiv k$ тогда и только тогда, когда номер $s \equiv t$.

Доказательство. Заметим, что u_{m+1} взаимно просто с k . Действительно, если предположить противное, u_{m+1} делится на некоторое простое q такое, что $k \equiv q$. Из (1) по цепочке мы получили бы, что $u_{m-1} \equiv q, u_{m-2} \equiv q, \dots, u_1 \equiv q$ – противоречие.

Положим $u_{m+1} \equiv t \pmod{k}$, где $\text{НОД}(t, k) = 1$. Имеем $u_m \equiv tu_0 \equiv 0 \pmod{p}$, $u_{m+1} \equiv tu_1 \equiv t \pmod{p}$. Видим, что остатки u_m и u_{m+1} по модулю p получаются, соответственно, из u_0 и u_1 домножением на t . Пользуясь рекуррентным соотношением $u_{n+1} = cu_n - du_{n-1}$, получаем последовательно, что $u_{l+m} \equiv tu_l \pmod{p}$ для всех натуральных $l = 1, 2, \dots$. Значит, $u_{m+l} \equiv k$ тогда и только тогда, когда $u_m \equiv k$. Отсюда получаем утверждение леммы.

(Отметим, что утверждение леммы не изменится, если условие $u_1 \equiv 1 \pmod{k}$ заменить на $u_1 \equiv s \pmod{k}$, где $\text{НОД}(s, k) = 1$.)

Упражнение 4. Рассмотрим последовательность остатков при делении на 5 членов последовательности Фибоначчи f_n . Она имеет вид:

1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, ... Докажите, что эта последовательность остатков имеет период длины 20, при этом f_n делится на 5 тогда и только тогда, когда n делится на 5. Как определить момент, с которого последовательность остатков начнет повторяться?

Оказывается, «регулярное» поведение последовательности $v_p(u_n)$ наблюдается не только у последовательностей, удовлетворяющих LTE-лемме, но и у более широкого класса линейных рекуррент второго порядка. Ниже сформулируем и докажем соответствующие теоремы.

Основная теорема для $p \geq 5$

Формулировка. Пусть $p \geq 5$ – простое число. Пусть c, d – целые числа, не делящиеся на p , для которых $D = c^2 - 4d$ не равно 0 и делится на p . Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1} \quad (1)$$

и начальными условиями $u_0 = 0, u_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$v_p(u_n) = v_p(u_1) + v_p(n). \quad (2)$$

Перед тем, как доказать эту теорему, сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Нам потребуется как данное равенство (1), так и приведенная ниже явная формула (3), задающая u_n из условия теоремы:

$$u_n = \frac{u_1}{\sqrt{D}} \left(\left(\frac{c + \sqrt{D}}{2} \right)^n - \left(\frac{c - \sqrt{D}}{2} \right)^n \right) \quad (3)$$

(здесь при $D < 0$ число \sqrt{D} – комплексное чисто мнимое).

Не будем останавливаться на выводе формулы (3), полагая, что читатель либо может вывести ее сам (для линейных рекуррент на этот счет есть соответствующая теория), либо убедиться в правильности этой формулы непосредственно, проверив, что явное выражение из (3) удовлетворяет и рекурренте (1) и начальным условиям.

Замечание 2. Теорему будем доказывать в случае $u_1 = 1$. Этого достаточно, так как общий случай сводится к этому частному случаю домножением всей последовательности на константу.

Упражнения

5. Проверьте, что утверждение LTE-леммы для $p \geq 5$ является частным случаем нашей теоремы.

Указание. Положите $c = a + b, d = ab$ и проверьте все условия теоремы: покажите, что из условий LTE-леммы следует, что c и d не делятся на p , а D делится на p (и даже на p^2).

6. Проверьте, что задача 3 про числа Фибоначчи является частным случаем теоремы.

Доказательство теоремы. Далее, в силу замечания 2, будем рассматривать лишь случай $u_1 = 1$. Применим (как и для решения наших вводных задач) индукцию по $v_p(n)$.

Переход: $n \rightarrow np$. Наша цель – показать, что при любом натуральном n выполнено $v_p(u_{np}) = v_p(u_n) + 1$.

Положим $(c + \sqrt{D})^n = x_n + y_n\sqrt{D}$, где $x_n = c^n + C_n^2 \cdot c^{n-2}D + \dots$ – сумма слагаемых бинома, взятых через один, а $y_n\sqrt{D}$ – сумма остальных слагаемых бинома. Ясно, что $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$. При этом так как c не делится на p , а D делится на p , то x_n не делится на p . Далее, имеем $(c - \sqrt{D})^n = x_n - y_n\sqrt{D}$, поэтому из явной формулы (3) следует, что

$$u_n = \frac{y_n}{2^{n-1}}.$$

Запишем

$$\begin{aligned} u_{np} &= \frac{1}{2^{np} \cdot \sqrt{D}} \left(\left((c + \sqrt{D})^n \right)^p - \left((c - \sqrt{D})^n \right)^p \right) = \\ &= \frac{1}{2^{np} \cdot \sqrt{D}} \left((x_n + y_n\sqrt{D})^p - (x_n - y_n\sqrt{D})^p \right) = \\ &= \frac{2}{2^{np} \cdot \sqrt{D}} \left(C_p^1 x_n^{p-1} y_n \sqrt{D} + C_p^3 x_n^{p-3} y_n^3 (\sqrt{D})^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + y_n^p (\sqrt{D})^p \right) = \\ &= \frac{y_n}{2^{np-1}} \left(p x_n^{p-1} + C_p^3 x_n^{p-3} y_n^2 D + C_p^5 x_n^{p-5} y_n^4 D^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + y_n^{p-1} D^{\frac{p-1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Обозначим последнюю скобку через S . Видим, что в этой скобке для первого

слагаемого $v_p(px_n^{p-1}) = 1$, второе слагаемое делится на p^2 , так как C_p^3 и D делятся на p ; остальные же слагаемые в скобке S делятся на D^2 и, следовательно, на p^2 . Таким образом, $v_p(S) = 1$, а значит,

$$v_p(u_{np}) = v_p(y_n) + 1 = v_p(u_n) + 1.$$

Доказательство перехода завершено.

База: $n = 0$. Наша цель – показать, что если $v_p(n) = 0$, т.е. если n не делится на p , то и u_n не делится на p . Из перехода мы уже знаем, что при всех натуральных m , кратных p , выполнено $v_p(u_m) > 0$, т.е. $u_p, u_{2p}, u_{3p}, \dots$ делятся на p . Также по условию теоремы $u_0 = 0$ делится на p .

Используем доказанную выше лемму (проверьте, что все условия ее применения выполнены).

Пусть m – минимальное натуральное такое, что $u_m : p$. Мы знаем, что $1 < m \leq p$ (так как $u_1 = 1$ и $u_p : p$). Из леммы мы знаем, что $u_k : p$ тогда и только тогда, когда номер $k : m$. В частности, $p : m$, и поскольку p – простое число, имеем $m = p$. Окончательно, $u_k : p$ тогда и только тогда, когда $k : p$. В частности, это завершает доказательство базы.

Теперь теорема полностью доказана.

Основная теорема для $p = 3$

Следующее упражнение показывает, что дословно повторить условие нашей теоремы для $p = 3$ не получается.

Упражнение 7. Рассмотрите последовательность $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 2u_n + 5u_{n-1}$. Убедитесь, что условия, указанные в теореме для $p \geq 5$, оказываются выполненными при подстановке $p = 3$, однако $v_3(u_3) \neq 1$.

Приведем верную формулировку для $p = 3$.

Формулировка. Пусть c, d – целые числа, не делящиеся на 3, для которых $D = c^2 - 4d$ не равно 0 и делится на 3. Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1} \quad (1)$$

и начальными условиями $u_0 = 0, u_1 \in \mathbb{Z}$.

Если $v_3(n) = 0$, то $v_3(u_n) = v_3(u_1)$.

Если же $v_3(n) \geq 1$, то

$$v_3(u_n) = v_3(u_1) + v_3(n) + v_3(c^2 - d) - 1. \quad (2')$$

Таким образом, для n , делящихся на 3, выполнено $v_3(u_n) = v_3(n) + \text{const}$, только константа здесь не обязательно нулевая. Видим, в частности, что если $c^2 - d = 0$, то все члены с номерами, кратными 3, будут равны 0.

Упражнение 8. Убедитесь, что LTE-лемма для $p = 3$ является частным случаем основной теоремы.

Далее полагаем $u_1 = 1$. Основные шаги в доказательстве теоремы будут схожи со случаем $p \geq 5$, поэтому приводим схему доказательства в виде упражнений. Для доказательства достаточно:

- сделать *переход*, т.е. показать, что при любом натуральном n , кратном 3, выполнено $v_3(u_{3n}) = v_3(u_n) + 1$;
- рассмотреть *базу* $v_3(n) = 0$, т.е. показать, что в этом случае u_n не делится на 3;
- показать, что при $v_3(n) = 1$ выполнено $v_3(u_n) = v_3(c^2 - d)$.

Упражнения

9. а) Убедитесь, что все рассуждения в переходе $n \rightarrow 3n$, кроме последнего вывода о $v_3(S) = 1$, где $S = 3x_n^2 + y_n^2 \cdot D$, остаются в силе. Покажите, что тем самым верно неравенство $v_3(S) \geq 1$, а вместе с ним и $v_3(u_{3n}) \geq v_3(u_n) + 1$. В частности, видим, что $v_3(u_n) \geq 1$ при $v_3(n) \geq 1$.

б) Докажите, что имеет место равенство $v_3(S) = 1$, а вместе с ним и вывод $v_3(u_{3n}) = v_3(u_n) + 1$, если $u_n : 3$.

10. Убедитесь, что все рассуждения в базе $v_3(n) = 0$ остаются в силе. При этом базу можно доказать и проще, непосредственно изучив остатки по модулю 3. Действительно, последовательность остатков по модулю 3 имеет вид 0, 1, $c, c^2 - d, \dots$

11. Пусть $v_3(n) = 1$, т.е. $n = 3s$, где s не делится на 3. Пусть $t = v_3(u_3) = v_3(c^2 - d)$. Рассмотрим последовательность остатков u_n при делении на 3^t . Из леммы мы знаем, что $u_n : 3^t$ тогда и только тогда, когда $n : 3$. Остается выяснить, что $u_n \not\equiv 3^{t+1}$ при $v_3(n) = 1$.

Из перехода знаем, что $v_3(u_9) = v_3(u_3) + 1$, значит, $u_9 : 3^{t+1}$. Докажите, что $m = 9$ – минимальное натуральное такое, что $u_m : 3^{t+1}$. Отсюда следует, что $u_n : 3^{t+1}$ тогда и только тогда, когда $n : 9$, т.е. при $v_3(u_n) \geq 2$.

Основная теорема для $p = 2$

Формулировка. Пусть c, d – целые числа, при этом $v_2(c) = 1$, d не делится на 2, $D = c^2 - 4d$ не равно 0 (нетрудно показать, что при данных условиях автоматически D делится на 8). Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1} \quad (1)$$

и начальными условиями $u_0 = 0$, $u_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$v_2(u_n) = v_2(u_1) + v_2(n). \quad (2')$$

Упражнение 12. Проверьте, что утверждение LTE-леммы для $p = 2$ является частным случаем нашей теоремы.

Как и ранее, считаем, что $u_1 = 1$. Нам потребуется явная формула, которая имеет вид

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{D'}} \left((c' + \sqrt{2D'})^n - (c' - \sqrt{2D'})^n \right), \quad (3'')$$

где $c' = c/2$ и $D' = D/8$.

Доказательство теоремы. Переход: $n \rightarrow 2n$. Наша цель – показать, что при любом натуральном n выполнено $v_2(u_{2n}) = v_2(u_n) + 1$.

Здесь переход сделать проще, чем в случае $p > 2$: достаточно, пользуясь формулой разности квадратов, записать

$$\begin{aligned} u_{2n} &= u_n \cdot \left((c' + \sqrt{2D'})^n + (c' - \sqrt{2D'})^n \right) = \\ &= 2u_n (c'^n + C_n^2 c'^{n-2} (2D') + \dots). \end{aligned}$$

Так как в последней скобке первое слагаемое нечетно, а остальные четны, то вся скобка нечетна, и переход доказан.

База: $n = 0$. Наша цель – показать, что при нечетном n число u_n также нечетно.

Так как c четно, а d нечетно, легко (индукцией по n) восстанавливается четность членов u_n : остатки при делении на 2 будут просто чередоваться.

Теорема доказана.

Упражнение 13. Последовательность $\{u_n\}$ задана условиями: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ при $n \geq 2$. Докажите, что для любого натурального n выполнено

$$v_2(u_n) = v_2(n).$$

Заключение

В завершение укажем еще направления, в которых можно обобщать данный сюжет.

Во-первых, отметим, что можно распространять теорию на рекурренты, состоящие из рациональных чисел. Для этого представим рациональное число r в виде $r = p^\alpha \cdot \frac{m}{n}$, где α, m, n – целые числа, причем m и n не делятся на p . Показатель α можно обозначить $v_p(r)$, в согласии с нашим обозначением для целых r . Отметим, что эти приготовления являются введением в красивую и содержательную теорию p -адических чисел; число $\|r\|_p = p^{-v_p(r)}$ называют p -адической нормой числа r .

Нашу основную теорему для $p \geq 5$ можно обобщить так:

Пусть $p \geq 5$ – простое число. Пусть A, B, C – целые числа, не делящиеся на p , для которых $D = B^2 - 4AC$ не равно 0 и делится на p . Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = 0 \quad (1')$$

и начальным условием $u_0 = 0$. Тогда

$$v_p(u_n) = v_p(u_1) + v_p(n).$$

Ее доказательство можно свести к доказательству «целочисленного» варианта теоремы, используя несложное соображение о том, что из рациональных чисел можно получить целые числа домножением на знаменатель. В формулировке можно допустить рациональность коэффициентов A, B, C , но домножение на общий знаменатель сводит этот случай к случаю целых коэффициентов.

Во-вторых, формула (1') позволяет продолжить нашу последовательность до бесконечной в обе стороны последовательности рациональных чисел

$$\dots, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots$$

Утверждение теоремы в таком случае продолжит быть верным (на самом деле формула (1') задает также рекурренту, выражающую член последовательности через два последующих).

(Окончание см. на с. 18)

XXIX Международный конгресс математиков

МЕЖДУНАРОДНЫЙ КОНГРЕСС математиков – центральное мероприятие математического мира, проводимое один раз в четыре года. В России конгресс проводился только однажды – в 1966 году, в Москве.

На открытии конгресса традиционно вручаются премии Международного математического союза (IMU). Самой престижной премией является медаль Филдса. Первым российским математиком, получившим премию Филдса в 1970 году, был С.П. Новиков, ныне академик, член редакционного совета журнала «Квант». С тех пор премии удостаивались Г.А. Маргулис (1978), В.Г. Дринфельд (1990), Е.И. Зельманов (1994), М.Л. Концевич (1998), В.А. Воеводский (2002), А.Ю. Окуньков (2006), Г.Я. Перельман (2006, отказался), С.К. Смирнов (2010).

Историю премий, имена лауреатов и членов комитетов по присуждению медалей можно посмотреть на сайте IMU (<http://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal>) и сайте Math.Ru (<http://www.math.ru/history/fields/>).

В этом году медали Филдса получили следующие ученые:

Юго Дюминиль-Копен (Hugo Duminil-Copin), «За решение давно стоявших задач вероятностной теории фазовых переходов в статистической физике, особенно в размерностях 3 и 4»;

Джун Ха (June Huh), «За привнесение идей теории Ходжа в комбинаторику, доказательство гипотезы Доулинга-Уилсона для геометрических решеток, доказательство гипотезы Герона-Роты-Уэлша для матроидов, развитие теории полиномов Лоренца и доказательство сильной гипотезы Мейсона»;

Джеймс Мейнард (James Maynard), «За вклад в аналитическую теорию чисел, который привел к значительным продвижениям в понимании структуры простых чисел и диофантовых приближений»;

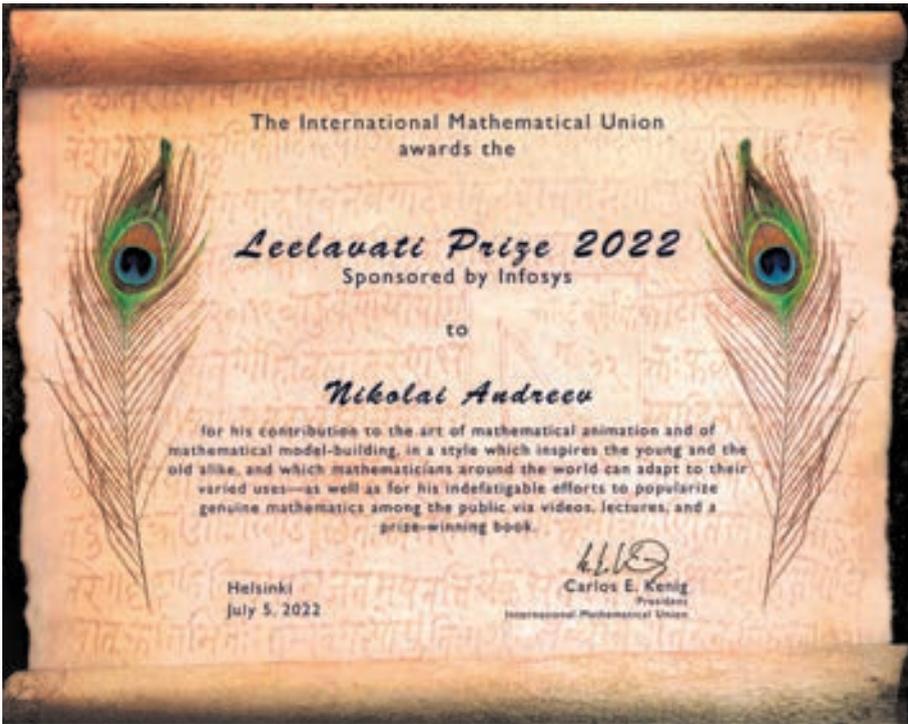
Марина Вязовская (Maryna Viazovska), «За доказательство того, что решетка E8 является плотнейшей упаковкой сфер в восьмерном пространстве, а также за вклад в смежные экстремальные задачи и интерполяционные задачи анализа Фурье».

Ознакомиться с достижениями лауреатов 2022 года можно, изучив научно-популярные статьи А. Окунькова на сайте IMU. Кроме того, интересно посмотреть и видеозаписи так называемого «laudation» лауреатов с церемонии награждения. Дополнительную информацию можно найти в записях докладов математического факультета ВШЭ «Филдсовские медали», статью М. Королева «Удивляющая простота. О достижениях Джеймса Мейнарда».

Кроме филдсовских медалей также вручаются премия Гаусса (с 2006 года), медаль Черна (с 2010 года), премия Неванлинны (с 1982 года, с 2022 года переименована в Медаль Абака). Единственный российский лауреат – Александр Разборов (премия Неванлинны, 1990).

С 2010 года Международный математический союз вручает премию Лилавати¹ (Leelavati Prize, <https://www.mathunion.org/imu-awards/leelavati-prize>) за выдающиеся заслуги в популяризации математики. Лауреатом премии 2022 года стал заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математическо-

¹ О происхождении названия премии читайте ниже.



го института им. В.А. Стеклова РАН Николай Николаевич Андреев. Премия присуждена «За его вклад в искусство математической анимации и создания математических моделей, которые вдохновляют и детей и взрослых и которые могут использовать математики всего мира; а также за его неустанные усилия по популяризации подлинной математики среди публики созданием фильмов, чтением лекций, публикацией отмеченной премиями книги²» («For his contribution to the art of mathematical animation and of mathematical model-building, in a style which inspires the young and the old alike, and which mathematicians around the world can adapt to their varied uses—as well as for his indefatigable efforts to popularize genuine mathematics among the public via videos, lectures, and a prize-winning book»). Поздравляем члена редколлегии нашего журнала!

По инициативе России в 2022 году впервые вручена медаль Ольги Александровны Ладыженской. Медаль вручается за «революционные результаты в математической физике и ее приложениях». Этой медали удостоилась Светлана Житомирская.

Кроме премий IMU, безусловным признанием достижений математика является приглашенный доклад на конгрессе. Доклады на конгрессе во многом определяют дальнейшее развитие математики. Напомним, что в 1900 году на втором Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт представил свои знаменитые 23 проблемы. Среди россиян право сделать пленарные доклады на ICM-2022 получили Н.Н.Андреев, И.М.Кричевер, А.Г.Кузнецов, секционные – А.И.Ефимов, П.Г.Зограф, Р.В.Михайлов, А.И.Назаров, Ю.Г.Прохоров, И.А.Тайманов, Е.Б.Фейгин.

² Речь идет о книге «Математическая составляющая».

«Лилавати»

ПРЕМИЯ ЛИЛАВАТИ — ПРЕМИЯ Международного математического союза за выдающийся вклад в популяризацию математики (outstanding contributions for increasing public awareness of mathematics as an intellectual discipline and the crucial role it plays in diverse human endeavors). Впервые премия была вручена в 2010 году на Международном конгрессе математиков, проходившем в Индии. Название премии повторяет название первой из четырех частей трактата «Сиддханта-Широмани» («Венец учения»), написанного индийским математиком Бхаскарой II около 1150 года.

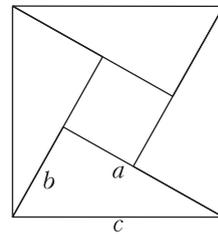
Бхаскара II, родившийся в 1114 году, являлся крупнейшим индийским математиком и астрономом XII века. По легенде, Бхаскара пообещал своей дочери, носившей имя Лилавати, написать книгу и назвать в ее честь. Свой труд он написал в возрасте 36 лет (возраст он указал в тексте).

Первая часть трактата, «Лилавати», рассказывающая об искусстве арифметики, была переведена на персидский и служила главным учебником как в Индии, так и на Ближнем востоке вплоть до XX века.

Книга состоит из 13 глав, содержащих 277 стихов. Будучи учебником, книга начинается с самых простых вещей — правил сложения и вычитания, умножения и деления. Но приводятся и сведения об арифметической и геометрической прогрессиях, нетривиальные сведения по комбинаторике. В ней, в частности, впервые появляется общий метод решения уравнения Пелля. Интересна подоплека появления комбинаторики. Дело в том, что ритмы санскритской поэзии сложны и многообразны. И при изучении композиции стиха индусы хорошо продвинулись в познании этого раздела математики.

Вторая книга трактата, «Биджаганита», посвящена алгебре. Бхаскара II отмечает, что «искусство вычисления с неизвестными величинами есть источник искусства вычисления с известными величинами. Алгебра аналогична арифметике в отношении основных операций, но отличается, поскольку является неопределенной. Но она не неопределенна для острого ума. Математики провозгласили алгебру, чтобы вычисления сопровождалось доказательством». И действительно, если в «Лилавати» приводятся правила, как нужно действовать, то во второй книге встречаются и доказательства того времени. Интересно и точка зрения Бхаскары на доказательства: «метод доказательства всегда должен быть двух видов — один геометрический, другой аналитический». Он отмечает, что употребление геометрических методов для доказательства алгебраических правил встречается у древних учителей (см, например, книгу А.И.Володарского «Очерки истории средневековой индийской математики». — М.: Наука, 1977).

Третья книга трактата, «Голанхайя», посвящена сферической геометрии, а четвертая, «Гранхаганита», — теории планетных движений.



В заключение отметим, что легенда об индусских доказательствах типа «Смотри!» связана как раз с трудом Бхаскары II. Вот чертеж, который Бхаскара приводит в качестве доказательства теоремы Пифагора.

Троичные системы и самоподобные пирамиды

А.ЗАБОЛОТСКИЙ

ПРОДОЛЖИМ РАССКАЗ ОБ ИНТЕРЕСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИЗ ОНЛАЙН-ЭНЦИКЛОПЕДИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ – OEIS (начало рассказа – в предыдущем номере журнала).

Целые неотрицательные числа можно записывать не только в привычной нам системе счисления с основанием 10 (десятичной), используя цифры 0, 1, ..., 9, но и в системах счисления с основаниями 2 (двоичная, используются только цифры 0, 1), 3 (троичная, используются цифры 0, 1, 2) и другими. Например (нижний индекс указывает, что число записано в системе счисления с основанием, отличным от 10):

$$50 = 110010_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + \\ + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0,$$

$$50 = 1212_3 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0.$$

Двоичное, троичное и т.д. разложение (т.е. запись в виде последовательности цифр соответствующей системы счисления) каждого натурального числа уникально и однозначно.

Чтобы записать отрицательное целое число в любой из этих систем, приходится использовать специальный знак, не являющийся цифрой, – минус. Есть изящный способ этого избежать: использовать *уравновешенную троичную* систему счисления. Ее основание равно 3, но вместо цифр 0, 1, 2 в ней используются цифры 0, 1, T,

где T значит –1 (этот же символ в нижнем индексе будет обозначать запись числа в уравновешенной троичной системе):

$$50 = 1T0TT_T = 1 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + \\ + 0 \cdot 3^2 + (-1) \cdot 3^1 + (1) \cdot 3^0.$$

Так, $0 = 0_T$, $1 = 1_T$, $2 = 1T_T$, $3 = 10_T$, $4 = 11_T$, $5 = 1TT_T$ и т.д. В OEIS список уравновешенных троичных разложений натуральных чисел приведен в последовательности A059095.

Замечательно то, что уравновешенная троичная система позволяет уникально и однозначно записать любое целое число без использования специального знака для отрицательных чисел: $-1 = T_T$, $-2 = T1_T$, $-3 = T0_T$, $-4 = TT_T$, $-5 = T11_T$ и т.д. Подробнее про уравновешенную троичную систему счисления и ее многочисленные приложения было рассказано в статье Д.Златопольского «Бывают ли отрицательные цифры?» («Квант», 2021, №4).

Помимо прочего, уравновешенная троичная система позволяет установить одно довольно естественное взаимно однозначное соответствие между множествами всех целых и неотрицательных целых чисел. Это делается так: для целого неотрицательного числа n запишем его разложение в обычной троичной системе; заменим все цифры 2 на T; интерпретируем получившуюся строку из нулей, единиц и T как уравновешенное троичное разложение некоего целого числа $z(n)$. Например, $50 = 1212_3 \mapsto z(50) = 1T1T_T = 20$. В обратную сторону этот алгоритм тоже работает. Последовательность чисел $z(n)$, полученных по вышеописанному алгоритму, для всех натуральных n носит номер A117966.

Построим график этой последовательности, т.е. нанесем на координатную плоскость точки с координатами $(n; z(n))$ для всех n в определенном диапазоне (рис.1). Получается интересное изображение: оно состоит из наклонных треугольников, которые разделяются на меньшие треугольни-

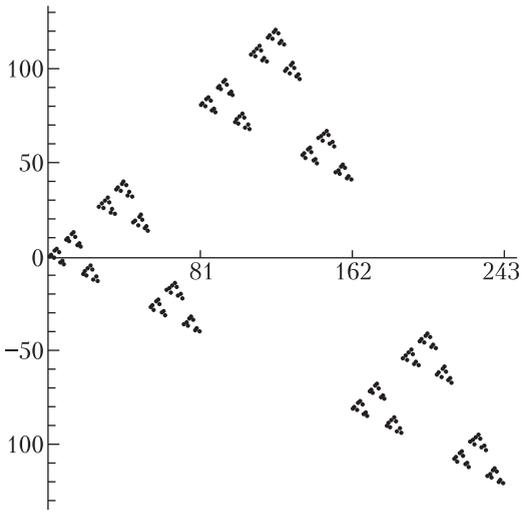


Рис. 1. График последовательности A117966

ки той же формы.

Откуда берется наклон в отрицательную область? Из вклада цифр Т в $z(n)$, которые соответствуют двойкам в n . Попробуем заменять двойки в троичном разложении n не на Т, а на нули. Получится последовательность A244042. Ее график (рис.2,а) уже состоит из самоподобных треугольников с горизонтальным основанием.

Почему это так? Возьмем для какого-нибудь k любое число n из интервала $[0; 3^k)$. Числа $n_1 = n + 3^k$ и $n_2 = n + 2 \cdot 3^k$ отличаются от n в точности старшей цифрой в троичной записи (1 или 2 соответственно), так что если результат замены двоек на нули в троичной записи числа n обозначить $y(n)$, то $y(n_2) = y(n)$, $y(n_1) = y(n) + 3^k$. Поскольку это справедливо для любого $n \in [0; 3^k)$, то графики последовательности на интервалах $[0; 3^k)$, $[3^k; 2 \cdot 3^k)$, $[2 \cdot 3^k; 3^{k+1})$ выглядят одинаково, только в среднем интервале график приподнят на 3^k . Эти три фрагмента графика – неприподнятый, приподнятый, снова неприподнятый – образуют треугольник (при $k = 0$ он состоит всего из трех точек, а при $k > 0$ из трех более сложных фигур, связанных параллельными переносами). Повторение этого рассуждения

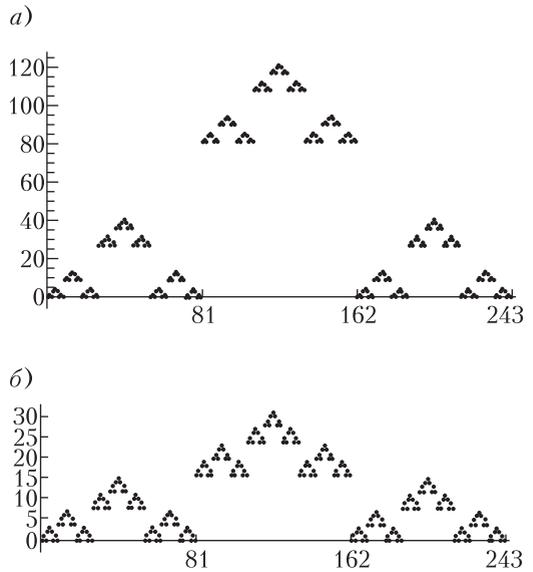


Рис. 2. Горизонтальные самоподобные треугольники: а) график последовательности A244042; б) график последовательности A289813 (масштаб по оси ординат увеличен для наглядности)

для каждого масштаба k приводит к самоподобию: треугольники побольше образуются треугольниками поменьше. Красота!

Однако треугольники получились разреженными, между ними много пустого места по вертикали. Естественно: в этой последовательности могут возникнуть только такие значения, которые в троичной (или уравновешенной троичной) системе записываются только нулями и единицами, а это далеко не все неотрицательные целые числа.

Если же интерпретировать строку из нулей и единиц, получающуюся при замене двоек на нули в троичном разложении числа n , не как троичное или уравновешенное троичное разложение, а как двоичное разложение, получится последовательность A289813. На ее графике (рис.2,б) лишнего свободного пространства по вертикали нет, а треугольники и самоподобие сохранились.

Отметим, что эта последовательность полностью задается простыми рекуррентными соотношениями: $a(0) = 0$, $a(3n) =$

$= a(3n+2) = 2a(n)$, $a(3n+1) = 2a(n) + 1$. В самом деле: числа $3n$, $3n+1$ и $3n+2$ отличаются лишь последней цифрой в троичной записи; двойка меняется на 0, а единица сохраняется и далее, будучи на последней позиции в записи числа, дает число на 1 большее, чем число с цифрой 0 на той же позиции, поэтому $a(3n+2) = a(3n)$ и $a(3n+1) = a(n) + 1$; наконец, число $3n$ отличается от n лишь дописыванием нуля к троичной записи, что при переинтерпретации троичного разложения как двоичного соответствует удвоению, отсюда $a(n) = 2a(n)$. Для последователь-

ностей $z(n)$ и $y(n)$ существуют похожие формулы – попробуйте адаптировать это рассуждение для них.

Для полноты картины добавим, что если заменять в троичном разложении числа n двойки на Т (с чего мы начали), но читать результат как разложение по основанию 2 (чем мы закончили), то получится последовательность А328749, но с противоположными знаками всех элементов.

В OEIS любят и ценят последовательности с красивыми графиками.

(Начало см. на с. 8)

Наконец, еще несколько слов, за которые автор благодарит Алексея Устинова, о том, как наш сюжет естественно погружается в серьезную области науки, p -адический анализ.

Посмотрим, например, на степенную функцию $n \mapsto 7^n$ (определенную на \mathbb{Z}). Можно понять, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ и заданного $\varepsilon > 0$ неравенство $\|7^m - 7^n\|_3 < \varepsilon$ выполнено при достаточно малой разности $\|m - n\|_3$. (Читатель может «дешифровать» это утверждение и вывести его в элементарных терминах из LTE-леммы.) Тем самым, получается непрерывность функции $n \mapsto 7^n$, определенной на множестве целых чисел в метрике, индуцированной 3-адической нормой, т.е. когда расстояние между числами a и b задается равенством $d(a, b) = \|a - b\|_3$.

Есть другие нетривиальные последовательности (более сложные, чем степенные функции и линейные рекурренты), для которых близость номеров в p -адической норме влечет и p -адическую близость элементов последовательности, т.е. мы имеем p -адически непрерывную функцию, заданную на целых числах. В таком случае по непрерывности эту функцию можно доопределить до функции, заданной на кольце целых p -адических чисел. Такая процедура называется p -адической интер-

поляцией. Читателю, желающему серьезно погрузиться в эту теорию, можно рекомендовать, например, книгу Н.Коблица « p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции».

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ
1957

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ

- Интернет-магазин
www.bgshop.ru
- Кафе
- Клубные (дисконтные)
карты и акции
- Подарочные карты
- Предварительные
заказы на книги
- Встречи с авторами
- Читательские клубы
по интересам
- Индивидуальное
обслуживание
- Подарочная упаковка
- Доставка книг из-за рубежа
- Выставки-продажи

АССОРТИМЕНТ

- Книги
- Аудиокниги
- Антиквариат
и предметы
коллекционирования
- Фильмы, музыка,
игры, софт
- Канцелярские
и офисные товары
- Цветы
- Сувениры

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача М2713 предлагалась на Санкт-Петербургской городской математической олимпиаде школьников 2022 года.

Задачи Ф2717–Ф2720 предлагались на Московской физической олимпиаде 2022 года.

Задачи М2710–М2713, Ф2717–Ф2720

М2710. Дано натуральное число n и дана клетчатая доска $(n^2 - 1) \times (n^2 - 1)$. Назовем n -элементное подмножество множества клеток *прогрессивным*, если центры этих клеток лежат на одной прямой через $n - 1$ равных промежутков. Найдите количество прогрессивных подмножеств.

П. Кожевников

М2711. Даны три окружности ω_1 , ω_2 и ω_3 , попарно касающиеся в точках K_{12} , K_{23} , K_{31} (рис. 1). Выбираем точку A_1 на окружности ω_1 . Пусть прямая A_1K_{12} пересекает вторично ω_2 в точке A_2 , прямая A_2K_{23}

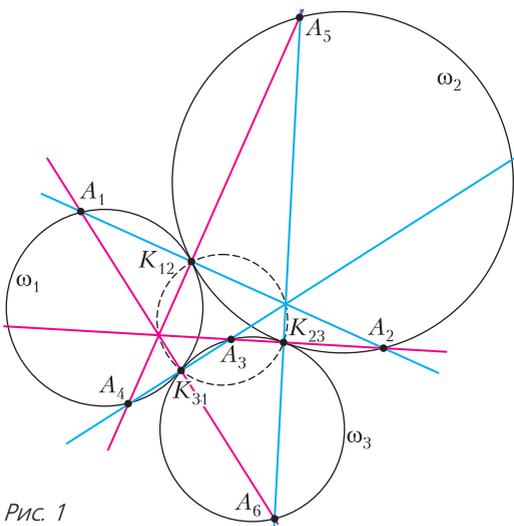


Рис. 1

пересекает вторично ω_3 в точке A_3 , прямая A_3K_{31} пересекает вторично ω_1 в точке A_4 и т.д. Докажите, что

а) через шесть шагов процесс заикнется, т.е. $A_7 = A_1$;

б) прямые A_1A_2 и A_4A_5 перпендикулярны;
в) тройки прямых A_1A_2 , A_3A_4 , A_5A_6 и A_2A_3 , A_4A_5 , A_6A_1 пересекаются в двух диаметрально противоположных точках окружности $(K_{12}K_{23}K_{31})$.

Е. Морозов

М2712. Дан треугольник ABC , в котором $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \\ + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Р. Регимов (Азербайджан)

М2713*. Питерский бизнес-клуб «Эльдорадо» был основан много лет назад знаменитым миллионером Пафнутием Копейко, который вначале был его единственным членом. Потом клуб только расширялся, но по правилам каждый новый эльдорадец должен быть личным другом ровно одного из старых членов клуба. Бизнесмена называют *неудачником*, если его состояние не превосходит среднего арифметического состояний всех его друзей в клубе,

увеличенного на 1 биткойн. Сегодня оказалось, что в клубе $n + 1$ членов, все они неудачники, а сам Пафнутий вообще полностью разорен. Докажите, что состояние любого члена клуба не превосходит n^2 биткойнов.

Д. Фомин, А. Кириченко

Ф2717. Команда из двух спортсменов участвует в мультиспортивной гонке, состоящей из трех этапов: бега, велогонки и плавания. По условиям соревнований требуется сначала преодолеть 43 км (суммарно) бегом и на велосипеде, а в конце проплыть 1 км, при этом на старте команде выдается один велосипед, а зачетное время команды фиксируется по времени участника, пришедшего к финишу вторым. Первый спортсмен в среднем пробегает 24 км за 2 часа, проезжает на велосипеде 27 км за час и проплывает 1200 м за 30 мин. Средняя скорость бега второго спортсмена 9 км/ч, езды на велосипеде 24 км/ч, а плавает он со скоростью 3 км/ч. Чему равно минимальное зачетное время, которое может показать эта команда при наилучшей тактике прохождения дистанции?

А. Бычков

Ф2718. В схеме, изображенной на рисунке 2, все приборы идеальные. Батарейка, напряжение между выводами которой равно $U = 6$ В, тоже идеальная. Сопротивление любого проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно 200 Ом. Сопротивление подводных проводов, изображаемых тонкими линиями черного цвета, равно нулю. Найдите показания приборов.

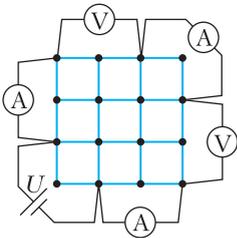


Рис. 2

Рис. 2

П. Крюков

Ф2719. На грани правильного тетраэдра, изготовленного из пенопласта (диэлектрическая проницаемость равна 1), наклеены одинаковые тонкие металлические пластины в форме правильных треугольников, почти совпадающие по размерам с гранями тетраэдра. Электрического контакта меж-

ду пластинами нет. Заряд любой пластины изначально равен нулю. Если одной пластине сообщить заряд Q , то ее потенциал будет равен $\frac{Q}{C_0}$. Если теперь заземлить любую незаряженную пластину, то потенциал заряженной окажется равен $\frac{Q}{C_1}$. Найдите разность потенциалов двух пластин, если на одну из них нанесен заряд Q , а заряд второй равен $-Q$, при условии, что другие две пластины не заряжены. Чему равна емкость конденсатора, одной обкладкой которого является любая пластина тетраэдра, а другой – три оставшиеся пластины, соединенные друг с другом идеальным проводником?

П. Крюков, А. Бычков

Ф2720. На графике, приведенном на рисунке 3, можно видеть вольт-амперную характеристику специального источника напряжения – зависимость силы тока I через этот источник от разности потенциалов U положительного и отрицательного полюсов. ВАХ источника, изображенная на графике, похожа на ВАХ солнечной батареи, поэтому далее мы называем этот источник солнечным, а на рисунке 4 слева обозначаем его батарейкой в круге. Другой источник напряжения, далее называем его обычным, состоит из идеальной бата-

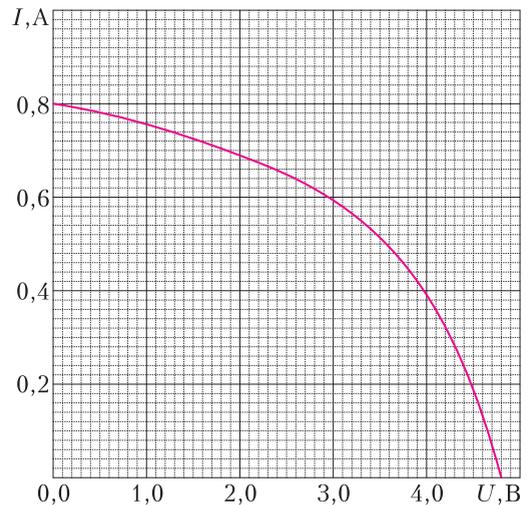


Рис. 3

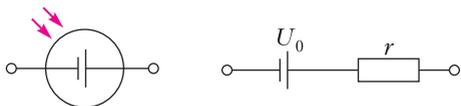


Рис. 4

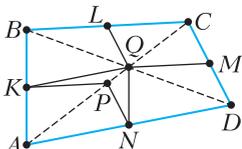
рейки с напряжением $U_0 = 2,4$ В между выводами и резистора сопротивлением $r = 3$ Ом, как показано на рисунке 4 справа. Солнечный и обычный источники можно соединить параллельно или последовательно (разными способами), тогда получится новый источник напряжения. Чему равен ток короткого замыкания этого нового источника? Если к нему подключить резистор сопротивлением $R = 1$ кОм, то чему будет равно напряжение на этом резисторе? Рассмотрите все возможные случаи.

П.Крюков

Решения задач M2698¹–M2701, Ф2705–Ф2708

M2698. Докажите, что из любого выпуклого четырехугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера.

Можно считать, что в четырехугольнике $ABCD$ и сумма углов A и B , и сумма углов A и D не больше 180° . Пусть K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно, а P и Q – середины диагоналей AC и BD соответственно. Тогда $AKPN, KBLQ$ и $NQMD$ – копии $ABCD$, а условие на углы обеспечивает то, что четырехугольник $AKPN$ не пересекается ни с $KBLQ$, ни с $NQMD$, а четырехугольники $KBLQ$ и $NQMD$ не пересекаются друг с другом, так как совмещаются параллельным переносом на вектор



А.Юран

M2699. По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый ее ход был на соседнюю по стороне клетку. Клетки занумерованы целыми числами от 1 до n^2 в порядке прохождения

ладьи. Пусть M – наибольшая разность между номерами соседних по стороне клеток. Каково наименьшее возможное значение M ?

Ответ: $2n - 1$.

Пример. Пусть ладья прошла «змейкой»: сначала по всей нижней горизонтали, потом по следующей (в обратную сторону) и т.д. Наибольшая разность номеров соседних клеток достигается между клетками $2n$ и $1, 3n$ и $n + 1$ и т.д.

Оценка. Первый способ. Предположим противное: $M < 2n - 1$. Рассмотрим числа верхней строки. Поскольку разность между любыми соседними числами в этой строке не больше $2n - 2$, ладья дошла от меньшего из них к большему, не заходя в нижнюю строку (ведь чтобы достичь нижней строки, надо сделать минимум $n - 1$ ход, чтобы вернуться – тоже минимум $n - 1$, плюс еще хотя бы один ход нужно сделать собственно в нижней строке).

Тогда все числа верхней строки ладья обошла, не заходя в нижнюю строку. Аналогично, все числа нижней строки ладья обошла, не заходя в верхнюю строку. Это значит, что все числа верхней строки больше (или все меньше), чем числа в нижней строке.

Аналогично, все числа левого столбца больше (или все меньше) чисел правого столбца.

Не теряя общности, пусть числа левого столбца больше чисел правого и числа нижней строки больше чисел верхней. Рассмотрим число A в левом верхнем углу и число B в правом нижнем. С одной стороны, $A > B$ (по столбцам), а с другой $A < B$ (по строкам). Противоречие.

Второй способ. Надо доказать, что найдутся соседние клетки, разность номеров которых не меньше $2n - 1$. Пусть доска – это квадрат $ABCD$, этими же буквами обозначим номера соответствующих угловых клеток. Можно считать, что A – наименьший из угловых номеров, а $B < D$. Все клетки при стороне AD разобьются на два непустых множества, в одном номера меньше B , а в другом – больше. Найдется пара соседних по стороне клеток из раз-

¹ Решение задачи M2697 будет опубликовано позже.

ных множеств, пусть их номера $X < Y$. Ладье понадобился хотя бы $n - 1$ ход, чтобы добраться от X до стороны BC , хотя бы один ход вдоль BC и еще не менее $n - 1$ хода, чтобы дойти до Y . Поэтому $Y - X \geq 2n - 1$.

Б. Френкин

M2700. Дан приведенный многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0;1)$?

Ответ: 2021 корень.

Оценка. Если многочлен имеет 2022 корня, то их произведение – целое число, поэтому хотя бы один корень равен нулю или по модулю не меньше 1.

Пример. Выберем рациональные числа

$$0 = b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_{2021} < b_{2021} = 1.$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2021});$$

его коэффициенты рациональны, пусть k – произведение их знаменателей. Знаки чисел $Q(b_0), Q(b_1), \dots, Q(b_{2021})$ чередуются, пусть m – минимум их модулей. Выберем натуральное n , которое кратно k и больше $1/m$. Приведенный многочлен $P(x) = x^{2022} + nQ(x)$ – искомый. Действительно, все его коэффициенты целые; знаки чисел $P(b_i)$ и $Q(b_i)$ совпадают, поэтому $P(x)$ имеет корень на каждом из интервалов $(b_i; b_{i+1})$ при i от 0 до 2020, т.е. 2021 корень на интервале $(0;1)$.

А. Канель-Белов

M2701. Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причем если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, то все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться дейст-

вовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

Ответ: могут.

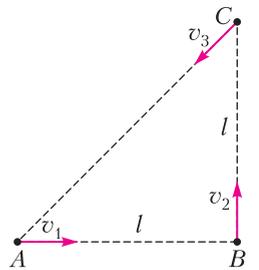
Поскольку $300 = 0 + 1 + 2 + \dots + 24$, один из цветов не использован, другой использован один раз, ..., последний – 24 раза. Занумеруем цвета числами от 0 до 24 и рассмотрим перестановку $(c_0, c_1, \dots, c_{24})$ чисел $(0, 1, \dots, 24)$, где c_i – номер цвета, который встречается i раз. Каждый мудрец, на котором надет колпак цвета c_i , знает перестановку с точностью до замены c_i на c_{i-1} (шапки обоих цветов он видит в количестве $i - 1$). Эти две перестановки отличаются четностью.

Изначально мудрецы делятся на две равные группы: «четных» и «нечетных». «Четные» мудрецы называют свой цвет так, чтобы перестановка получилась четной, а «нечетные» – чтобы она получилась нечетной. В результате ровно половина мудрецов восстановит правильную перестановку, т.е. правильно назовет свой цвет.

А. Грибалко

Ф2705. Три черепахи, движущиеся с постоянными по модулю скоростями и все время поддерживающие курс одна на другую, в момент запуска секундомера находились в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с катетами длиной l (рис. 1). Скорость первой черепахи равна $v_1 = v$, где v – известная величина, а скорости второй и третьей черепах v_2 и v_3 таковы, что в процессе их движения углы в треугольнике, образованном черепахами, не изменяются. Найдите:

Рис. 1



- 1) время t , через которое черепахи встретятся;
- 2) модули скоростей v_2 и v_3 второй и третьей черепах;
- 3) ускорения черепах в начальный момент времени;

4) на каком расстоянии s от места старта первой черепахи произойдет их встреча.

1) Поскольку скорости черепах все время направлены от одной черепахи к другой и постоянны по модулю, расстояния между ними уменьшаются с постоянными скоростями. Обозначим скорости изменения расстояний AB , BC и AC через v_{AB} , v_{BC} и v_{AC} . Они равны, соответственно,

$$v_{AB} = v_1 = v, v_{BC} = v_2 + \frac{v_3}{\sqrt{2}}, v_{AC} = v_3 + \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда находим

$$t = \frac{l}{v}.$$

2) Так как углы в треугольнике ABC остаются постоянными, сохраняются и соотношения между его сторонами. Это означает, что скорости изменений сторон треугольника пропорциональны их длинам:

$$\frac{v_{AB}}{AB} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{v_{AC}}{AC}.$$

Отсюда найдем v_3 :

$$\frac{v}{l} = \frac{v/\sqrt{2} + v_3}{l\sqrt{2}}, v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

и v_2 :

$$\frac{v}{l} = \frac{v_2 + v/2}{l}, v_2 = \frac{v}{2}.$$

3) Ускорения черепах имеют только нормальную компоненту. Заметим, что в любой момент векторы скоростей черепах вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, равными угловой скорости ω вращения треугольника. Найдем эту угловую скорость, рассматривая движение второй черепахи относительно первой:

$$\omega = \frac{v_2}{AB} = \frac{v}{2AB}.$$

В начальный момент $\omega_0 = \frac{v}{2l}$. Тогда для ускорений в начальный момент получим

$$a_1 = \omega_0 v_1, a_2 = \omega_0 v_2, a_3 = \omega_0 v_3,$$

откуда

$$a_1 = \frac{v^2}{2l}, a_2 = \frac{v^2}{4l}, a_3 = \frac{v^2}{2\sqrt{2}l}.$$

4) Модуль вектора скорости второй черепахи всегда вдвое меньше модуля вектора

скорости первой черепахи, а направления этих скоростей взаимно перпендикулярны, значит, таким же будет соотношение между векторами их перемещений \vec{s}_1 и \vec{s}_2 . Так как черепахи встретились (рис. 2), то

$$\vec{s}_1 = \overline{AB} + \vec{s}_2, s = s_1 = \frac{2l}{\sqrt{5}}.$$

А.Уймин

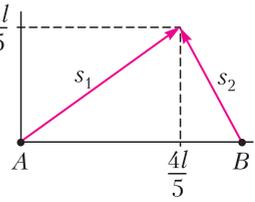


Рис. 2

Ф2706. В атмосфере с давлением $p_0 = 10^5$ Па расположен вертикальный цилиндрический сосуд сечением $S = 0,01$ м² и высотой $2H$ ($H = 1$ м). Вдоль стенок сосуда может перемещаться без трения герметичный поршень (рис. 1). Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Изначально поршень покоится на небольших опорах, расположенных на высоте H над дном сосуда. Изпод

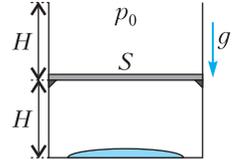


Рис. 1

поршня выкачивают весь воздух и помещают туда некоторое количество жидкости. После установления термодинамического равновесия температура содержимого сосуда оказалась равной $T_0 = 350$ К. Затем включают нагреватель, и через дно сосуда содержимое под поршнем медленно нагревается. В процессе нагрева измеряют температуру и давление под поршнем. Когда низ поршня достигает отметки $2H$, нагрев прекращают. График полученной зависимости от начала нагрева и до его окончания представлен на рисунке 2. Удельная теплота парообразования жидкости при температуре $1,1T_0$ равна $L = 2,2$ МДж/кг. Молярная масса жидкости $M = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Пар жидкости можно считать идеальным многоатомным газом. Объем жидкости много меньше SH . Определите:

1) массу M поршня;

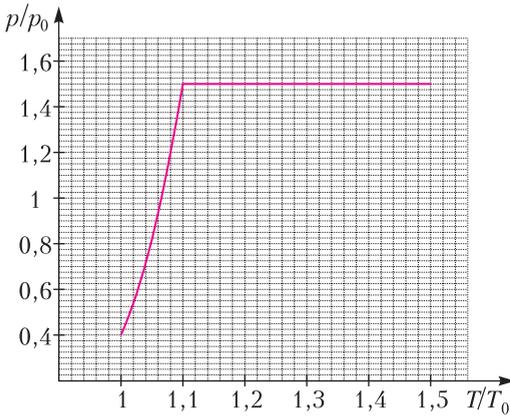


Рис. 2

2) массу m_0 содержимого под поршнем (суммарно во всех агрегатных состояниях);

3) количество теплоты Q , подведенное к сосуду начиная с момента отрыва поршня от опор и до момента окончания нагрева.

1) Из условия следует, что поршень оторвался от опор и поднялся на высоту $2H$. Если поршень не лежит на опорах, то на него действуют только три силы: сила тяжести, сила атмосферного давления и сила давления паров жидкости. Так как первые две силы постоянны, то и третья будет постоянной. На графике мы видим конечный участок нагрева, на котором давление паров постоянно, следовательно, на этом участке поршень не лежит на опорах. Запишем условие его равновесия:

$$1,5p_0S = Mg + p_0S,$$

откуда находим

$$M = \frac{p_0S}{2g} = 51 \text{ кг.}$$

2) По условию изначально под поршнем была только жидкость, а затем установилось термодинамическое равновесие. Значит, возможны два варианта: либо под поршнем теперь находится только пар, либо смесь жидкости и ее насыщенного пара. Если бы к окончанию процесса нагрева жидкость испарилась не полностью, то при постоянном давлении содержимого (равном давлению насыщенного пара жидкости) была бы постоянна и его температу-

ра. Из графика видно, что температура содержимого на последнем этапе возрастала при постоянном давлении. Следовательно, к моменту достижения поршнем высоты $2H$ вся жидкость испарилась. Запишем уравнение состояния пара в момент достижения поршнем высоты $2H$:

$$1,5p_0 \cdot 2SH = \frac{m_0R \cdot 1,5T_0}{M}$$

и найдем

$$m_0 = \frac{2Mp_0SH}{RT_0} = 12,4 \text{ г.}$$

3) Из уравнения состояния найдем массу пара m_{n1} под поршнем в момент его отрыва от опор:

$$m_{n1} = \frac{1,5p_0SHM}{1,1T_0R} = 8,4 \text{ г.}$$

Заметим, что $m_{n1} < m_0$, это означает, что процесс подъема поршня можно разделить на два этапа. На первом этапе под поршнем при постоянной температуре находится насыщенный пар и жидкость продолжает испаряться. На втором этапе все содержимое цилиндра оказывается в газообразном состоянии и происходит изобарическое расширение с увеличением температуры. Первый этап представлен на графике одной точкой с координатами $(1,1T_0; 1,5p_0)$, а второй – горизонтальным отрезком.

Рассмотрим, на что расходуется энергия на первом этапе. Жидкость испаряется, при этом часть энергии тратится на разрушение энергии связей между молекулами жидкости $\Delta U_{ж}$, а часть – на работу по расширению образовавшегося пара в окружающую среду $A_1 = p(V_{г} - V_{ж})$. Величина $\Delta U_{ж}$ зависит от температуры, при которой происходит фазовый переход. Покажем, что если объемом вещества в жидком состоянии можно пренебречь по сравнению с объемом в газообразном состоянии, то величина A_1 также определяется температурой и не зависит от внешнего давления. Действительно, в условиях приближения $A_1 = pV_{г} = \nu_{г}RT$, где $\nu_{г}$ – количество испарившегося вещества. По определению удельная теплота парообразования включает в себя как затраты энергии на разрыв связей между молекулами, так и затраты энергии на совершение работы

по расширению в атмосферу. Поэтому количество теплоты Q_1 , подведенное на первом этапе, равно

$$Q_1 = L(m_0 - m_{п1}).$$

На втором этапе происходит изобарический нагрев пара от температуры $1,1 T_0$ до $1,5 T_0$. Так как пар можно считать многоатомным газом, то его молярная теплоемкость в данном процессе равна $C_p = 4R$. Тогда количество теплоты, подведенное на втором этапе, равно

$$Q_2 = \frac{c_p m_0 (1,5 T_0 - 1,1 T_0)}{M} = \frac{16}{5} p_0 S H,$$

а общее количество теплоты, подведенное в процессе подъема поршня, будет равно

$$Q = Q_1 + Q_2 = p_0 S H \left(\frac{7ML}{11RT_0} + \frac{16}{5} \right) = 11,9 \text{ кДж.}$$

А. Уймин

Ф2707. Бесконечно длинный незаряженный металлический цилиндр радиусом R расположен в однородном электрическом поле \vec{E}_0 . Ось цилиндра и вектор напряженности поля горизонтальны и взаимно перпендикулярны (рис. 1). Напряженность поля направлена вправо. На поверхности цилиндра установилось некоторое распределение индуцированных зарядов.

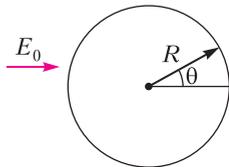


Рис. 1

Далее рассмотрим бесконечно длинный тонкостенный непроводящий цилиндр такого же радиуса R вне поля \vec{E}_0 вдали от первого (проводящего) цилиндра. Поместим на его поверхность заряды так, чтобы зависимость плотности заряда от угла θ к горизонту совпала для обоих цилиндров. Непроводящий цилиндр расположен горизонтально в поле тяжести. Ускорение свободного падения равно g . Поместим внутрь непроводящего цилиндра гладкий точечный положительный заряд q массой m .

1) Определите изменение суммарной потенциальной энергии точечного заряда (энергии в поле тяжести и в электрическом поле) при перемещении его из крайнего левого положения в крайнее правое.

2) Точечный заряд помещают в самое нижнее положение и сообщают ему начальную скорость v_0 , направленную влево перпендикулярно оси цилиндра (рис. 2). Найдите максимальную скорость заряда v_{\max} в процессе дальнейшего движения.

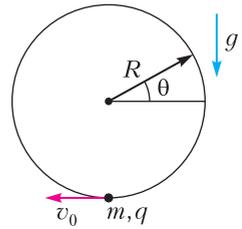


Рис. 2

3) При каких значениях v_0 точечный заряд совершит полный оборот?

1) Электрическое поле внутри металлического цилиндра равняется нулю. Значит, заряды распределились по его поверхности так, что создаваемое ими внутри цилиндра электрическое поле равно $\vec{E} = -\vec{E}_0$. Так как распределение зарядов на поверхности второго цилиндра такое же, как на первом, то внутри него создано однородное электрическое поле с напряженностью $-\vec{E}_0$. При перемещении точечного заряда из левой точки в правую сила тяжести не совершит работу. Изменение потенциальной энергии будет равно минус работе электрического поля:

$$\Delta W_{\text{пот}} = -A_E = 2qE_0R.$$

2) Введем декартову систему координат, связанную с центром цилиндра. Ось x направим горизонтально вправо, а ось y — вертикально вверх. Запишем функцию зависимости потенциальной энергии от угла θ :

$$W_{\text{пот}}(\theta) = mgR \sin \theta + E_0 q R \cos \theta.$$

Обозначим $A = R\sqrt{(mg)^2 + (E_0 q)^2}$, тогда

$$W_{\text{пот}}(\theta) = A \left(\frac{mgR}{A} \sin \theta + \frac{E_0 q R}{A} \cos \theta \right).$$

Введем угол $\alpha = \arcsin \frac{mgR}{A}$. Легко заметить, что $\cos \alpha = \frac{E_0 q R}{A}$, тогда выражение для потенциальной энергии примет вид

$$W_{\text{пот}}(\theta) = A \cos(\theta - \alpha).$$

Скорость будет максимальной в точке, где эта энергия минимальна. Минимум потенциальной энергии равен $W_{\min} = -A$. На-

чальная потенциальная энергия равна $W_0 = -mgR$. Запишем закон сохранения энергии:

$$W_0 + \frac{mv_0^2}{2} = W_{\min} + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + 2R \left(\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE_0}{m} \right)^2} - g \right)}.$$

3) Чтобы точечный заряд мог совершить полный оборот, его скорость в любой точке должна быть больше нуля и сила реакции опоры со стороны оболочки также должна быть больше нуля. Так как заряд находится в однородном поле, являющемся суммой поля тяжести и электрического поля, то максимум потенциальной энергии достигается в точке, где результирующая сила, действующая со стороны поля, перпендикулярна поверхности цилиндра. Запишем условие отсутствия отрыва:

$$ma_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{R} > \sqrt{(mg)^2 + (E_0q)^2}.$$

Выразим кинетическую энергию в этой точке:

$$W_{\min} = \frac{mv^2}{2} > \frac{A}{2}.$$

Запишем закон сохранения энергии:

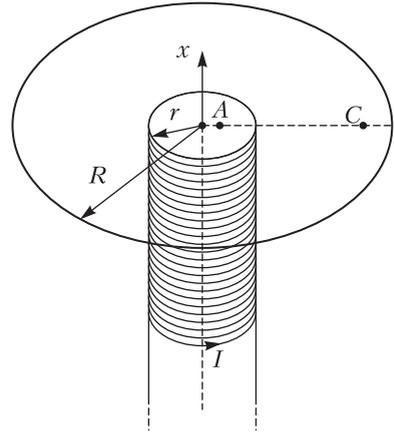
$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = W_{\min} + A,$$

откуда найдем

$$v_0 > \sqrt{\frac{2R}{m} \left(\frac{3}{2} \sqrt{(mg)^2 + (E_0q)^2} + mg \right)}.$$

М.Карманов

Ф2708. Полубесконечный соленоид с радиусом витков r и плотностью намотки n (число витков на единицу длины) расположен соосно круговому сверхпроводящему витку радиусом R так, что его основание находится в плоскости витка (см. рисунок). Известно, что $r \ll R$. Изначально ток в витке отсутствовал. Индуктивность витка равна L . Силу тока в соленоиде медленно увеличивают от нуля до I и далее поддерживают постоянной. Провода, подводящие ток к соленоиду, расположены таким образом, что их магнитным полем и взаимодействием с другими эле-



ментами можно пренебречь. Направим ось x так, как показано на рисунке.

1) Точки A и C расположены в плоскости витка на расстояниях $r/3$ и $3r$ соответственно от оси симметрии системы. Найдите проекции индукции B_{Ax} и B_{Cx} магнитного поля, создаваемого соленоидом в точках A и C соответственно.

2) Найдите силу тока I_B в витке. Укажите, как он направлен.

3) Найдите величину и направление силы магнитного взаимодействия, действующей на соленоид со стороны витка.

Примечание. Для бесконечного соленоида поле внутри соленоида однородное, вектор магнитной индукции направлен параллельно оси и его величина определяется формулой $B_0 = \mu_0 nI$. Снаружи бесконечного соленоида $\vec{B} = 0$.

Используем теорему о телесном угле для магнитного поля. Если по плоскому слою течет ток линейной плотностью \vec{i} , то в точке O компонента магнитного поля, направленная вдоль слоя перпендикулярно \vec{i} , равна

$$B_{O\parallel} = \frac{\mu_0 i \Omega_O}{4\pi},$$

где Ω_O – телесный угол, под которым виден слой из точки O . Применяя теорему о телесном угле к осевой компоненте магнитного поля соленоида, получим

$$B_x = \frac{\mu_0 n I \Omega_{\text{бок}}}{4\pi},$$

где $\Omega_{\text{бок}}$ – телесный угол, под которым видна боковая поверхность соленоида (с

учетом знака данная величина может быть и отрицательна). Отметим, что утверждения, данные в примечании к условию задачи, могут быть получены с помощью этой теоремы. В точках, принадлежащих основанию, боковая поверхность соленоида видна под телесным углом $\Omega_{\text{бок}} = 2\pi$, а в точках, лежащих в плоскости основания и не принадлежащих ему, боковая поверхность соленоида видна под нулевым телесным углом. Отсюда получим ответы:

$$B_{Ax} = \frac{\mu_0 n I}{2}, \quad B_{Cx} = 0.$$

2) Поскольку виток сверхпроводящий, магнитный поток, пронизывающий его, должен оставаться постоянным и равным нулю. Пусть Φ_c – магнитный поток через виток от соленоида. Выберем положительное направление силы тока в витке такое, как и в соленоиде, тогда

$$\Phi_c + LI_B = 0.$$

Осевая компонента магнитного поля в плоскости витка на расстояниях меньше r постоянна и равна $\frac{B_0}{2}$, а на расстояниях больше r равна нулю. Поэтому поток магнитного поля соленоида через виток равен $\Phi_c = \frac{B_0 S}{2}$, где $S = \pi r^2$ – площадь основания соленоида, или

$$\Phi_c = \frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2}.$$

Получаем ответ на второй вопрос:

$$I_B = -\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2L},$$

ток в витке направлен против тока в обмотке соленоида.

3) Обозначим взаимную индуктивность соленоида и витка через $L_{B3} = \frac{\Phi_c}{I}$. В рассматриваемом положении она равна $\frac{\mu_0 n S}{2}$. Если обозначить индуктивность соленоида L_1 , то энергия системы равна

$$E = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L I_B^2}{2} + L_{B3} I I_B,$$

или, с учетом соотношения $L_{B3} I + L I_B = 0$,

$$E = \frac{L_1 I^2}{2} - \frac{L_{B3}^2 I^2}{2L}.$$

Изменение энергии системы равно

$$dE = -\frac{I^2 L_{B3} dL_{B3}}{L}.$$

При движении соленоида в нем возникает ЭДС индукции. Поскольку сила тока в соленоиде остается постоянной, источник, подключенный к соленоиду, компенсирует ЭДС индукции, а значит, совершает работу. Поток магнитного поля витка через соленоид равен

$$\Phi_1 = L_{B3} I_B = -\frac{L_{B3}^2 I}{L},$$

поэтому работа источника равна

$$\begin{aligned} dA_{\text{ист}} &= -\int_0^t \mathcal{E}_{\text{инд}} I dt = I d\Phi_1 = \\ &= -\frac{2I^2 L_{B3} dL_{B3}}{L} = -2dE. \end{aligned}$$

Пусть F_x – сила, действующая на соленоид со стороны витка. Тогда внешняя сила, действующая на соленоид для поддержания его в равновесии, равна $-F_x$. При сдвиге соленоида на dx изменение энергии системы равно

$$dA_{\text{ист}} - F_x dx = dE,$$

откуда

$$F_x = \frac{dE}{dx} = -\frac{I^2 L_{B3}}{L} \frac{dL_{B3}}{dx}.$$

Найдем изменение взаимной индуктивности dL_{B3} при сдвиге соленоида на расстояние dx вдоль оси симметрии. Сдвиг эквивалентен наращиванию еще $dN = ndx$ витков соленоида вблизи торца. Тогда сверхпроводящий виток начинает создавать дополнительный поток $d\Phi_2 = B_{B3} S dN$ через соленоид, а значит, изменение L_{B3} составит

$$dL_{B3} = d\left(\frac{\Phi_2}{I_B}\right) = \frac{\mu_0 S n dx}{2R}.$$

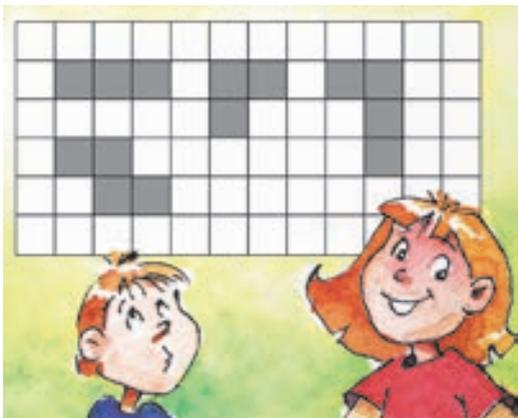
В последнем выражении мы воспользовались магнитным полем витка в его центре. Подставляя L_{B3} и dL_{B3} в выражение для F_x , находим

$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2}\right)^2.$$

А.Уймин

Задачи

1. Составьте из данных четырех фигур на клетчатой бумаге многоугольник, у которого есть ось симметрии, а



периметр равен 16 клеткам. (Фигуры можно поворачивать и переворачивать.)

М.Волчкевич

2. Как, используя не более четырех различных цифр (каждую не более одного раза) и какие-то знаки арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление), составить выражение, значение которого равно 2022? Возведение в степень использовать можно, а скобки нельзя.

М.Евдокимов



Эти задачи предлагались XXVII Турнире ма-

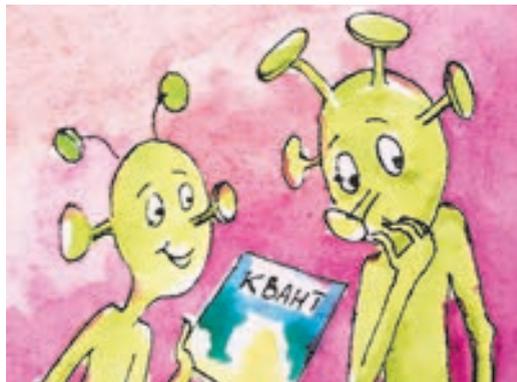
3. В тесном кругу за столом сидят повара, каждый из них либо полный, либо худой. Повар огорчен, если сидит между двумя полными, и рад, если между двумя худыми. Полных и худых поровну. Огорченных нет. А есть ли радующиеся?

А.Шаповалов



4. Назовем *зигзагом* любую трехзвенную незамкнутую ломаную со звеньями равной длины, не имеющую самопересечений. Можно ли изобразить четырехугольник с двумя диагоналями, используя какие-нибудь два зигзага?

А.Пешнин



Красота нашего мира и симметрия

С. САЛИХОВ, Д. ЛИВАНОВ

ЕСТЬ ЛИ СВЯЗЬ МЕЖДУ БАБОЧКОЙ, снежинкой, Тадж-Махалом и автомобилем? Есть – все перечисленное связывает слово «симметрия».

Говоря о симметрии, мы внутренне подразумеваем красоту, гармонию. Но не только. Каждый раз, когда мы употребляем слово «симметрично», то, как правило, предполагаем возможность что-то изменить, получая в результате то же самое, с чего мы начинали.

Если мы хотим расположить кресла симметрично относительно дивана, то это означает, что мы хотим поставить их на одинаковом расстоянии от дивана. То же самое и с новогодней елкой. Мы стремимся

поставить елку в комнате так, чтобы она выглядела симметричной, т.е. чтобы она имела одинаковый вид, если смотреть на нее с разных сторон.

А самый впечатляющий пример симметрии – переместительный закон умножения $ab = ba$: от перестановки сомножителей произведение не меняется. В каком бы порядке ни поставить a и b , результат будет один и тот же. Математики в таких случаях гордо говорят: операция умножения симметрична по отношению к перестановке сомножителей.

Когда мы говорим о симметричном расположении или о симметричном теле, почти всегда это означает возможность совместить разные части этого тела путем различных манипуляций. Так, например, если вырезать из бумаги снежинку и сложить ее вдоль какой-то лучевой линии, то в результате обе части точно совместятся. Но вовсе не обязательно складывать снежинку – можно мысленно совместить две ее части. А еще интереснее подставить к лучевой линии зеркало, и тогда в зеркале «дорисуется» вторая половина снежинки. В этом случае ученые говорят, что фигура



Мавзолей-мечеть Тадж-Махал (Индия, город Агра, 17 век)



Шестилучевая снежинка

зеркально симметрична (конечно же, относительно указанной линии). Зеркально симметричных тел вокруг нас видимо-невидимо. Симметрично тело человека, зеркальной симметрией обладают и большинство животных, например бабочки.

Подглядев у природы принцип зеркальной симметрии, человек стал использовать его в архитектуре, живописи, музыке и даже в поэзии. Практически все выдающиеся архитектурные сооружения построены по принципу зеркальной симметрии: мавзолей Тадж-Махал в Индии, площадь перед собором Святого Петра в Риме, здание Кунсткамеры в Санкт-Петербурге.

Возвращаясь к самому совершенному с точки зрения симметрии объекту – снежинке, мы при внимательном рассмотре-



Бабочка – классический пример симметрии в природе



Эти цветы симметричны относительно поворота на угол $72^\circ = 360^\circ/5$. Иначе говоря, симметричны относительно поворотов 5-го порядка

нии обнаружим, что ее симметрия (т.е. возможность совмещать разные части) удивительно богата. Таких линий, относительно которых снежинка симметрична, не одна, а шесть. Но на этом не заканчиваются сюрпризы, которые дарит нам снежинка. Есть еще один способ совместить части снежинки. Если вращать снежинку вокруг ее центра, то при каждом повороте на 60° градусов она будет выглядеть точно так же, как первоначально. А за полный поворот так произойдет шесть раз. Получается, что снежинка симметрична и относительно поворотов. Поворотной симметрией обладают также цветы, лопасти вентилятора или известной детской вертушки.

Но все же безусловными лидерами в области симметрии являются кристаллы. Симметрию кристалла определяет упорядоченное расположение атомов. Но в зависимости от внешних условий в кристаллах может наблюдаться то или иное отклонение от симметрии. Прежде всего это происходит потому, что на кристалл при росте действует сила тяжести. Кроме того, заправка природного кристалла, как правило, находится на какой-либо плоскости. Например, на дне пещеры. В этом случае у растущего кристалла развиваются (растут) только боковые и верхние грани. В результате, если посмотреть на друзы (сростки) природных кристаллов, то все они имеют определенную особенность в симметрии – а именно, верх и низ кристалла



Аметистовая друза

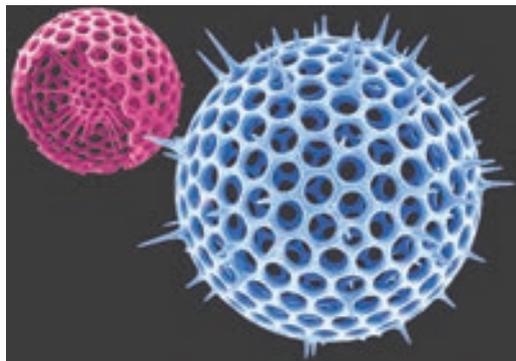
не могут быть совмещены никаким преобразованием. Верхняя часть кристалла обычно имеет форму пирамиды, а нижняя, откуда он растет, плоская и прикреплена к основанию друзы. Но ведь именно эта особенность и соответствует симметрии силы тяжести, которая действует на все предметы и направлена строго вниз, к центру Земли.

Конечно, можно создать условия, уменьшающие этот фактор для получения идеально или почти идеально симметричных кристаллов. Например, зародыш кристалла можно подвязывать на тонкой нити и постоянно перемешивать раствор. Эти и разные другие ухищрения применяют кристаллографы, выращивая искусственные кристаллы. Но самую гениальную идею подсказала кристаллографам опять же снежинка. Рост снежинки происходит в условиях свободного падения в облаке, т.е. в невесомости. И сейчас на МКС космонавты проводят эксперименты по выращиванию кристаллов в условиях невесомости. Эти условия позволяют в некоторых случаях получать совершенные кристаллы. Причем в первую очередь речь идет о выращивании кристаллов белков, необходимых для создания новых лекарств. Ведь получая совершенные кристаллы, мы можем достоверно определить структуру молекул белков.

Но симметричны не только кристаллы. Живые организмы также проявляют сим-

метрию. Только вызвана эта симметрия уже не внутренним строением (оно как раз часто далеко от симметрии), а действием различных внешних факторов. И прежде всего – силы тяжести.

Наивысшую симметрию среди живых организмов показывают простейшие живые организмы. Например, формы радиолярий (радиолярии – одноклеточные план-



Симметричные красавицы радиолярии, существующие на Земле как минимум 600 млн лет

ктонные организмы, обитающие преимущественно в теплых океанических водах) поражают своим сходством с правильными геометрическими многогранниками. Однородно развитые, торчащие в различных направлениях иглы подтверждают нашу догадку о появлении и жизни этих организмов во взвешенном состоянии без какого-либо выделенного направления движения.

Для многих обитателей моря становится существенным различие верх-низ, но при этом они способны перемещаться без заданной направленности. Изумительные по красоте морские звезды и ежи также демонстрируют в своем строении такую симметрию. Но хотя при полном повороте вокруг центра морская звезда совместится сама с собой пять раз, у нее различны верхняя и нижняя части тела, так что никаким преобразованием их совместить не удастся.

Если есть необходимость различать не только верх и низ, но и двигаться вперед-назад, то в этом случае обязательно проявляется плоскость симметрии, вдоль которой и движется тело. Такой симметрией обладают человек и все позвоночные жи-



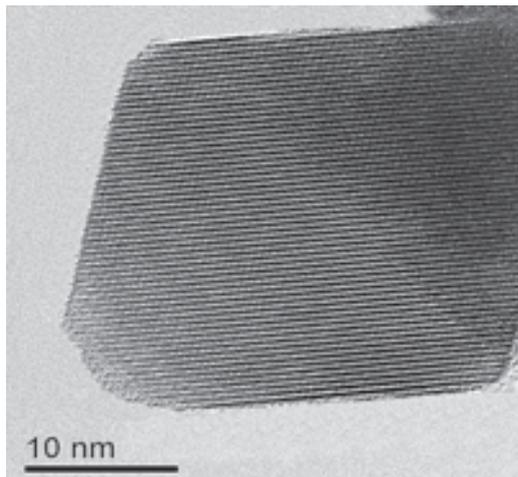
Морская звезда — пример симметрии 5-го порядка

вотные. И не только. Такую же симметрию имеют и автомобили, и самолеты, да и вообще вся техника, которая должна без проблем двигаться в одном направлении и различать верх и низ. Совершенно понятно, что если одно крыло самолета было бы короче другого, то такой самолет вряд ли смог бы лететь по прямой. Каждый автомобилист замечал, что если колеса накачены неодинаково, т.е. нарушается симметрия относительно продольной плоскости, то машину «ведет» в ту или иную сторону. Надо ехать на сервис и подкачивать шины.

Очень интересно сравнивать симметрию животных и растений и симметрию кристаллов. В основе форм кристаллов лежат такие геометрические фигуры, как прямо-



Седмичник — единственный цветок с симметрией 7-го порядка



Электронно-микроскопическое изображение наночастицы магнетита

угольник, треугольник, квадрат и шестиугольник. Но вам никогда не удастся найти кристалл с осью симметрии, при повороте вокруг которой кристалл совместится с собой пять, семь или более раз. Однако в живой природе таких примеров сколько угодно: морская звезда совмещается с собой пять раз, цветок седмичника европейского — семь.

Почему так происходит? Что, кристалл совершеннее, чем морская звезда? Утверждать так — смело и неправильно, а объясняется различие живого и кристаллического вот чем. Симметрию кристалла определяет внутренний узор из атомов. В кристаллах атомы расположены строго упорядоченно, повторяя свое расположение через одинаковые промежутки. Оказывается, что всех возможных поворотов, совмещающих такой строй атомов, может быть только пять. Это повороты на 360, 180, 120, 90 и 60 градусов. Повороты на другие углы не могут совместить атомы в кристаллическом строю друг с другом. А вот живые организмы — могут, поскольку не подчиняются таким строгим геометрическим закономерностям расположения атомов.

Статья представляет собой главу из книги С.В.Салихова и Д.В.Ливанова «Физика всего на свете без формул», которая планируется к выходу в издательстве «Бомбора» в конце 2022 года.

Как Студент в ужас пришел

А. СТАСЕНКО

Конечно, ваша теория безумна, но достаточно ли она безумна, чтобы быть истиной?

Нильс Бор

Как-то довелось Студенту, бегущему по горизонтальной плоскости, преодолеть небольшой уступ высотой h . И тут он с ужасом вспомнил, что каждой частице, обладающей импульсом $p = mv$, можно сопоставить волну длиной $\lambda = \frac{h}{p}$ – согласно Луи де Бройлю (1892–1987). А ведь любая волна, преодолевая уступ, проходит не только вперед, но и частично отражается назад. «Что же получается, – подумал Студент, – поскольку я обладаю импульсом, часть меня должна побежать в обратную сторону!?» И, как бывает в мгновенья отчаяния, пока Студент преодолевал уступ, перед ним пронесся вихрь мыслей, нахлынули воспоминания.

Если речь идет о недеформируемом теле, двигающемся со скоростью v до уступа и оказавшемся на высоте h (рис. 1), то, соглас-

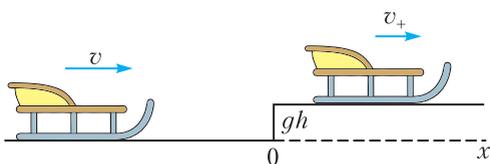


Рис. 1. Классическая частица преодолевает барьер, теряя кинетическую энергию

но классической механике, его скорость можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_+^2}{2} + gh, \text{ или } \left(\frac{v_+}{v}\right)^2 = 1 - \frac{2gh}{v^2}.$$

Последнее выражение можно назвать энергетическим коэффициентом прохождения барьера T . При $h = 0$ (нет никакого уступа)

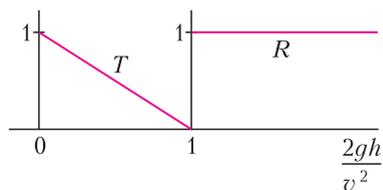


Рис. 2. Коэффициенты прохождения T и отражения R частицы

энергия частицы сохраняется полностью, $T = 1$; при $h \geq \frac{v^2}{2g}$ частица отражается назад, коэффициент прохождения $T = 0$, а коэффициент отражения $R = 1 - T = 1$ (рис. 2).

Другое дело – волна на поверхности воды. Бегущая волна имеет и кинетическую и потенциальную энергию, причем удельные энергии этих двух видов (в расчете на единицу массы) одинаковы. Следовательно, объемная плотность полной энергии волны равна, например, удвоенной кинетической энергии ρv_m^2 (ее размерность Дж/м³), где ρ – плотность воды. Если скорость бегущей волны равна c , то плотность потока энергии равна $\rho v_m^2 c$ (ее размерность Дж/(м² · с)).

Но как описать поведение волны, встретившей уступ? Конечно, при помощи законов сохранения. Первый из них – закон непрерывности среды: в точке $x = 0$ сумма смещений элементов жидкости справа и слева от плоскости $x = 0$ должна равняться их смещению слева, также как и значения скоростей этих смещений:

$$v + v_- = v_+.$$

Индекс «+» относится к прошедшей волне, индекс «-» – к отраженной.

Далее, плотности потоков энергий прошедшей и отраженной волн должны равняться плотности потока падающей волны (тут сократится ρ , поскольку плотность жидкости принята постоянной):

$$v_+^2 c_+ + v_-^2 c_- = v^2 c_-.$$

Из этой системы двух уравнений находим

$$\frac{v_-}{v} = \frac{1 - \frac{c_+}{c_-}}{1 + \frac{c_+}{c_-}}.$$

Здесь также учтено, что численные значения скоростей падающей и отраженной волн,

распространяющихся в одной и той же среде, одинаковы. Квадрат полученного выражения и есть коэффициент отражения:

$$R = \left(\frac{v_-}{v} \right)^2 = \left(\frac{c_- - c_+}{c_- + c_+} \right)^2.$$

А какова скорость волны на поверхности жидкости глубиной H ? Если рассматривать волну, вызванную силой тяжести, легко сообразить, что вполне подходит такое выражение нужной размерности:

$$c = \sqrt{gH}, \quad [c] = \text{м/с}.$$

Оказывается, это и точное выражение, полученное в теоретической гидродинамике – в так называемой теории мелкой воды. Что значит *мелкой*? Это когда длина волны много больше глубины, $\lambda \gg H$. Например, для волны цунами длиной порядка 10–100 километров даже океан представляется мелкой лужей. Теперь для коэффициента отражения получим

$$R = \left(\frac{\sqrt{H} - \sqrt{H-h}}{\sqrt{H} + \sqrt{H-h}} \right)^2.$$

Напомним, что сюда входят удельные потенциальные энергии gH и $g(H-h)$, а постоянная тяготения g сократилась.

А что же волна де Бройля? В квантовой механике частице сопоставляется так называемая волновая функция ψ . Важнейшую роль тут играет квадрат модуля этой функции, характеризующий вероятность состояния частицы. Так что судьба частицы с энергией E , встретившей на пути потенци-

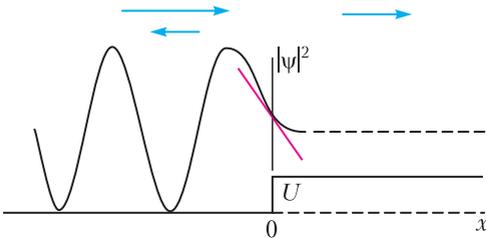


Рис. 3. Характерный вид пространственного распределения вероятности обнаружения частицы. Наклонная (красная) линия иллюстрирует тот факт, что при $x = 0$ равны не только значения вероятностей, но и их производные (аналогично законам непрерывности потока и сохранения энергии)

альный барьер $U < E$ (рис. 3), описывается так же тремя «волнами вероятности» – падающей, прошедшей и отраженной. И в сечении $x = 0$ так же можно выписать условия, соответствующее законам сохранения. И так же найти коэффициент отражения:

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{v^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2gh}{v^2}}} \right)^2,$$

очень напоминающий записанное выше выражение для R .

И тут вспоминается, что возникновение трех ψ – функций (рис. 4) вовсе не требует

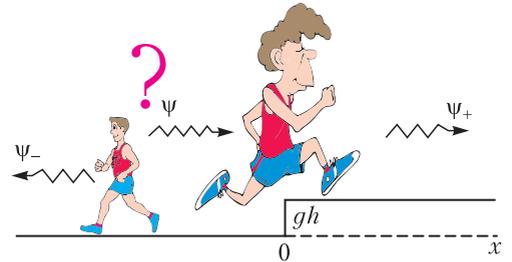


Рис. 4. Возможно ли отражение части классического объекта, уподобляемого волне де Бройля?

расчленения частицы на три части, а лишь иллюстрирует вероятность реализации одного из трех состояний. Материальная частица остается неделимой. Значит, из попыток преодолеть стенку успешно может осуществиться только одна? А в остальных случаях произойдет отражение?

И вспомнились слова того же Нильса Хенрика Давида Бора (1885–1962): «Если квантовая теория не потрясла тебя – ты ее еще не понял».

Однако, скорее всего, квантовая механика имеет границы применимости. С этим надо капитально разобраться, подумал Студент, и он решил исправно ходить на лекции.

О Л И М П И А Д Ы

LXIII Международная математическая олимпиада

Главное математическое соревнование школьников, международная математическая олимпиада (ИМО), состоялось в июле 2022 года в Осло (Норвегия). В олимпиаде приняли участие 589 юных математиков из 105 стран. Школьники из России приняли участие в олимпиаде дистанционно, написав два тура олимпиады в Санкт-Петербурге, в РГПУ имени А.И.Герцена. В этом году, успешно преодолев все этапы отбора, право участвовать в ИМО добились:

Иван Бахарев (11 класс, Санкт-Петербург),
Таисия Коротченко (11 класс, Санкт-Петербург),
Роман Кузнецов (10 класс, Санкт-Петербург),
Денис Мустафин (11 класс, Москва),
Галия Шарафетдинова (11 класс, Казань),
Максим Туревский (11 класс, Санкт-Петербург).

	Задача						Итог	Награда
	1	2	3	4	5	6		
Шарафетдинова Галия	7	7	7	7	7	7	42	золотая медаль
Бахарев Иван	7	7	7	7	7	4	39	золотая медаль
Туревский Максим	7	7	7	7	7	4	39	золотая медаль
Коротченко Таисия	7	7	5	7	7	0	33	серебряная медаль
Кузнецов Роман	7	7	5	7	6	1	33	серебряная медаль
Мустафин Денис	7	7	2	7	7	1	31	серебряная медаль

Наши школьники завоевали 3 золотые и 3 серебряные медали и стали вторыми в общекомандном рейтинге по сумме баллов, пропустив вперед лишь сборную Китая. Особо отметим успех Галии Шарафетдиновой, сумевшей полностью решить все задачи олимпиады и набрать максимальный балл. Интересно, что в команде России не было девушек с 2011 года, а максимальный балл на ИМО российский участник набирал в последний раз в 2006 году. Баллы, полученные нашими участниками по каждой задаче, показаны в таблице. Подробные результаты можно найти на официальном сайте <https://www.imo-official.org/олимпиады>.

Большой вклад в подготовку сборной внесли математики и педагоги: К.Сухов (руководил процессом подготовки), И.Богданов, В.Брагин, П.Кожевников, А.Кушнир, Ф.Петров, Б.Баев, С.Берлов, Н.Власова, П.Козлов, А.Кузнецов, М.Прагусевич, а также Н.Иванина, А.Сухова. Отметим с благодарностью большую помощь и поддержку в организационных и содержательных вопросах подготовки команды, которую оказали Образовательный центр «Си-



Слева направо: Р.Кузнецов, Д.Мустафин, М.Туревский, И.Бахарев, Г.Шарафетдинова, Т.Коротченко

риус» (Сочи), РГПУ имени А.И.Герцена, Президентский физико-математический лицей № 239 (Санкт-Петербург).

Задачи олимпиады

1. Банк Осло выпускает монеты двух видов: алюминиевые, обозначим их буквой A , и бронзовые, обозначим их буквой B . Мария выложила в ряд в некотором порядке n алюминиевых и n бронзовых монет. *Цепью* назовем любую последовательность подряд идущих монет одного вида. Для заданного целого положительного числа $k \leq 2n$ Мария последовательно повторяет следующую операцию: она выбирает цепь наибольшей длины, содержащую k -ю слева монету, и перемещает все монеты этой цепи в левый край ряда. Например, если $n = 4$ и $k = 4$, то для начального ряда $AABVBAVA$ процесс будет иметь вид

$$\begin{aligned} AABVBAVA &\rightarrow BVBAABVA \rightarrow \\ &\rightarrow AAABVBBVA \rightarrow BVBBVA AAA \rightarrow \\ &\rightarrow BVBBVA AAA \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Найдите все пары (n, k) , где $1 \leq k \leq 2n$, такие, что для любого начального ряда найдется момент времени такой, что n левых монет ряда будут одного вида.

Франция

2. Через \mathbb{R}^+ обозначим множество всех положительных вещественных чисел. Найдите все функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что для каждого $x \in \mathbb{R}^+$ существует ровно одно число $y \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющее неравенству

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Нидерланды

3. Пусть k – целое положительное число, а S – конечное множество, состоящее из нечетных простых чисел. Докажите, что существует не более одного способа (с точностью до поворотов и отражений) расположить все элементы множества S по кругу так, чтобы произведение любых двух соседних чисел имело вид $x^2 + x + k$, где x – целое положительное число.

США

4. Пусть $ABCDE$ – выпуклый пятиугольник, в котором $BC = DE$. Внутри пятиугольника $ABCDE$ найдась точка T такая, что $TB = TD$, $TC = TE$ и $\angle ABT = \angle TEA$. Прямая AB пересекает прямые CD и CT в точках P и Q соответственно. Предположим, что точки P, B, A, Q расположены на прямой в указанном порядке. Прямая AE пересекает прямые CD и DT в точках R и S соответственно. Предположим, что точки R, E, A, S расположены на прямой в указанном порядке. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

Словакия

5. Найдите все тройки (a, b, p) целых положительных чисел такие, что число p простое и

$$a^p = b! + p.$$

Бельгия

6. Пусть n – целое положительное число. *Нордическим* квадратом будем называть любую таблицу $n \times n$, клетки которой заполнены числами от 1 до n^2 так, что каждое число использовано по одному разу и в каждой клетке записано ровно одно число. Две клетки назовем соседними, если у них есть общая сторона. *Долиной* назовем любую клетку такую, что во всех соседних с ней клетках записаны числа, большие чем в ней. *Подъемом* назовем последовательность, состоящую из не менее чем одной клетки, такую, что

1) первая клетка в последовательности – долина;

2) каждая следующая клетка последовательности является соседней с предыдущей;

3) числа, записанные в клетках последовательности, расположены в порядке возрастания.

Для каждого заданного n найдите наименьшее возможное количество всех подъемов в нордическом квадрате.

Сербия

Публикацию подготовили К.Сухов, И.Богданов, П.Кожевников

Московская олимпиада школьников по физике 2022 года

7 класс

1. Уголок (8 баллов)

Уголок состоит из двух однородных прямых стержней AO и BO одинакового сечения, жестко соединенных в точке O (рис. 1). Уголок подвешивают за нитку, привязанную к его концам, на гладком гвозде, вбитом в стену. В положении равновесия уголок располагается так, как показано на рисунке. Масса уголка 440 г. Нить можно считать невесомой.

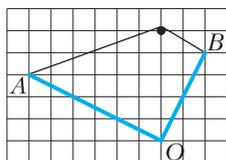


Рис. 1

А. Найдите массы стержней.
В. Чему равна средняя плотность уголка, если плотность стержня AO равна 2700 кг/м^3 ?

А.Бычков

2. См. задачу Ф2717 «Задачника «Кванта» (9 баллов).

3. Пластиковое полотно (6 баллов)

Большое количество полосок из пластика шириной $2d$ и толщиной $0,02d$ переплели между собой так, что получилось пластиковое полотно, небольшой фрагмент которого показан на рисунке 2. Ширина промежутка между любыми двумя параллельными полосками равна d .

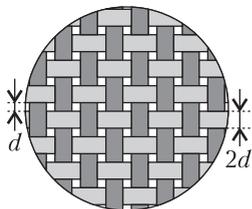


Рис. 2

А. Как изменится поверхностная плотность полотна, если все линейные размеры (полосок и промежутков) станут в два раза меньше?

В. Во сколько раз изменится поверхностная плотность полотна, если ширина промежутков между полосками станет равна $0,5d$?

А.Бычков

4. Бракованный термометр (7 баллов)

Колбочка в нижней части спиртового термометра, изображенного на рисунке 3, соединена с трубкой. Колбочка и часть трубки

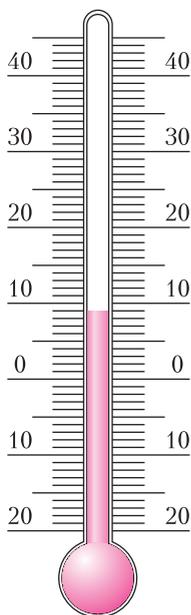


Рис. 3

заполнены подкрашенным спиртом. Работа термометра основана на явлении теплового расширения тел при нагревании. Если при некоторой температуре t_0 объем спирта равен V_0 , то при другой температуре t объем спирта дается формулой $V = V_0(1 + k(t - t_0))$, где k – коэффициент, который в условиях задачи можно считать постоянным и равным $0,001$ обратных градусов Цельсия.

Однажды на заводе был изготовлен бракованный термометр, в котором масса спирта составляла 98% от той массы, которая должна быть в исправном термометре. Из-за этого бракованный термометр показывает заниженную температуру. Какова истинная температура в комнате, если бракованный термометр показывает 0°C ? Какими будут показания бракованного термометра, если температура в комнате опустится до 0°C ?

М.Ромашка

8 класс

1. См. задачу Ф2717 «Задачника «Кванта» (8 баллов).

2. Гравиметр Ломоносова (6 баллов)

На рисунке 4 показан прибор, придуманный М.В.Ломоносовым для измерения ускорения свободного падения. Два цилиндрических сосуда 1 и 2 соединены тонкой стеклянной трубкой $ABCE$ постоянного сечения. Часть герметичного сосуда 1 и часть трубки заполнены ртутью, а остальная часть этой системы заполнена газами (воздухом и парами ртути). Сосуд 2 сообщается с атмосферой. Температура сосудов поддерживается постоянной. Диаметр сосуда 1 равен $D = 90 \text{ мм}$, а внутренний диаметр трубки $d = 0,64 \text{ мм}$. Около горизонтального участка трубки BC

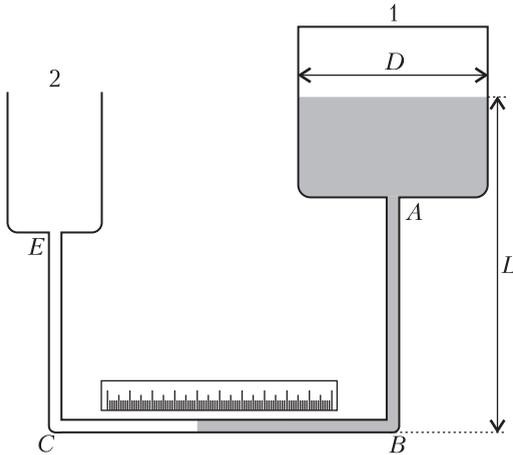


Рис. 4

расположена линейка для измерения положения левой границы ртути.

Одно из назначений этого прибора – измерение высот. Известно, что зависимость ускорения свободного падения g от высоты h над поверхностью Земли описывается формулой $g(h) = g_0 - kh$, где $g_0 = 9,8 \text{ Н/кг}$, $k = 3,07 \cdot 10^{-6} \text{ Н/(кг} \cdot \text{м)}$. Пусть на первом этаже некоторого здания высота уровня ртути в сосуде 1 равна $L = 50 \text{ см}$. Когда прибор подняли на крышу здания, граница ртути и воздуха в горизонтальной трубке сместилась на $x = 10 \text{ см}$. Определите высоту здания. Считайте, что изменение давления газов в первом сосуде пренебрежимо мало. Изменением атмосферного давления с высотой можно пренебречь.

М.Ромашка

3. Грузовая марка (10 баллов)

Грузовая марка (Plimsoll line) – это отметка на борту торгового судна, показывающая, до какого уровня судно может погружаться в различные воды при максимальной загрузке. На рисунке 5 приведен пример грузовой марки некоторого судна и обозначены расстояния между отметками марки. Верхняя линия TF указывает предельную осадку на

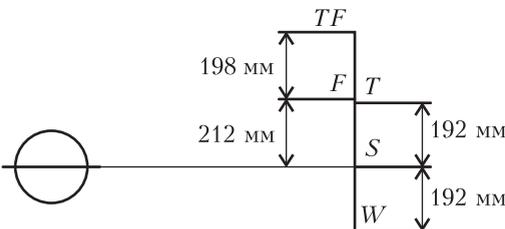


Рис. 5

груженого судна в пресной воде в тропиках, плотность которой 994 кг/м^3 . Ниже расположена линия F , соответствующая осадке в пресной воде в умеренных широтах (плотность 998 кг/м^3). Площадь сечения корпуса судна на уровне воды вблизи марки можно считать постоянной.

А. Какова плотность зимней морской воды, которой соответствует линия W на грузовой марке?

В. Используя данные задачи, найдите разность температур пресной воды в тропиках и умеренных широтах, если коэффициент теплового расширения воды $3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Коэффициент теплового расширения равен относительному увеличению объема тела при изменении его температуры на один градус.

А.Бычков

4. Пружины и нити (10 баллов)

На рисунке 6 изображена схема механической системы, которая состоит из двух одинаковых пружин жесткостью k и длиной L в недеформированном состоянии, одной нити длиной L_1 (которая в исходном состоянии натянута), двух одинаковых нитей длиной L_2 (провисающих в исходном состоянии) и груза массой m . Список оборудования содержит: четыре груза разной массы, четыре комплекта пружин (по две одинаковые пружины в каждом комплекте) и четыре комплекта нитей, в каждом из которых есть две одинаковые длинные нити и одна короткая.

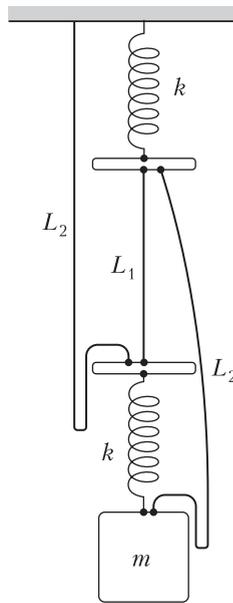


Рис. 6

Параметры изделий в каждом комплекте представлены в таблице:

№	1	2	3	4
$m, \text{ кг}$	1,0	1,5	2,0	4,0
$L_1, \text{ см}; L_2, \text{ см}$	10; 50	10; 45	20; 35	21; 50
$k, \text{ Н/м}; L, \text{ см}$	600; 20	700; 15	30; 10	1000; 15

Укажите номера грузов, комплектов пружин и нитей, которые следует выбрать при сборке системы, чтобы после пережигания короткой нити положение равновесия груза оказалось выше, чем до пережигания. Подходящие элементы необязательно расположены в одном столбце таблицы. Сочетать нити из разных комплектов запрещается. При анализе задачи можно считать, что масса пружин пренебрежимо мала, а нити невесомые и нерастяжимые. Ускорение свободного падения считайте равным 10 Н/кг .

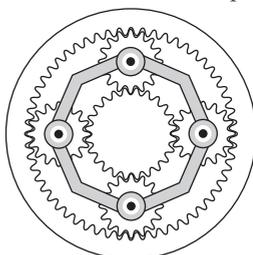
А.Бычков

9 класс

1. Планетарная передача (8 баллов)

Внешняя шестерня планетарной передачи (рис. 7; из «Википедии») называется коронной, внутренняя –

солнечной, жесткое подвижное звено, на котором закреплены оси маленьких планетарных шестеренок, называется водилом.



А. Если водило

Рис. 7

неподвижно, а солнечная шестерня вращается с частотой n оборотов в секунду, то с какой частотой вращается коронная шестерня?

В. Пусть солнечная и коронная шестерни вращаются в одну сторону, делая n и N оборотов в секунду соответственно. Чему равна частота вращения водила?

П.Крюков

2. Падение аппарата (9 баллов)

В поле тяжести Земли вниз по вертикали из состояния покоя движется летательный аппарат, на который кроме силы тяжести может действовать только подъемная сила, создаваемая двигателем, направленная вертикально и сложным образом меняющаяся со временем. На рисунке 8 представлен график зависимости квадрата скорости аппарата от пройденного расстояния на начальном участке его движения длиной L . Числовые значения цены деления сетки по каждой из осей неизвестны. В нулевой момент времени двигатель аппарата не работает. Известно, что если бы двигатель вообще не включался, то аппарат прошел бы расстояние L за время, равное $7,75 \text{ с}$. Можно считать, что на

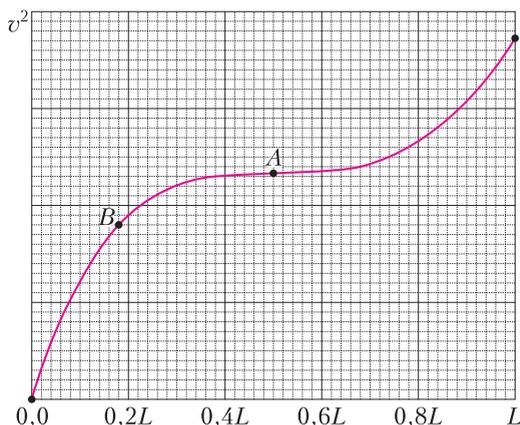


Рис. 8

рассматриваемом участке ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 , а сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала. Найдите скорость и ускорение аппарата при его движении с включенным двигателем в моменты времени, соответствующие точкам A и B графика.

П.Крюков

3. См. задачу Ф2718 «Задачника «Кванта» (10 баллов).

4. Камера-люцида (7 баллов)

А. Два плоских зеркала M_1O и M_2O образуют двугранный угол (рис. 9), при этом

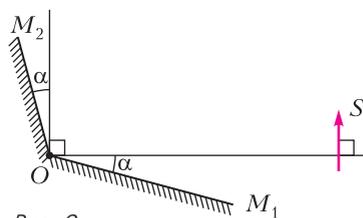


Рис. 9

плоскость зеркала M_1O составляет неизвестный угол α с горизонтальной прямой, а плоскость зеркала M_2O – такой же угол α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$) с вертикальной прямой. Найдите такое значение (или значения, если их несколько) угла α , что изображение плоского предмета S , располагающегося вертикально, лежит в горизонтальной плоскости.

В. На рисунке 10 изображена оптическая схема камеры-люциды – устройства, которое раньше применялось для перерисовывания предметов, людей, пейзажей с натуры. Размеры на схеме непропорционально изме-

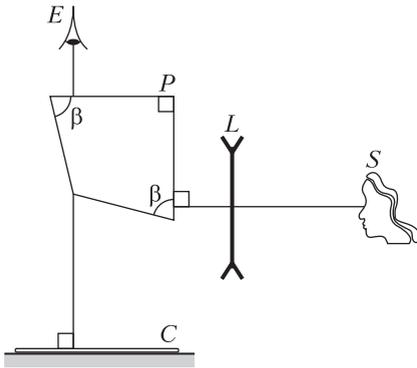


Рис. 10

нены. Глаз рисовальщика обозначен на схеме буквой E , а перерисовываемый объект – буквой S . В устройстве используется рассеивающая линза L , а также призма P из стекла с показателем преломления $n = 3/2$, имеющая в сечении четырехугольник с одним прямым углом и двумя одинаковыми острыми углами, равными β . Рисовальщик смотрит вертикально вниз на лист бумаги C (на котором рисует). Считайте, что расстояние от линзы L до изображаемого объекта S значительно больше, чем расстояние между E и C . Линейные размеры призмы существенно меньше расстояния от L до S и расстояния от глаза рисовальщика до листа.

Объясните, как работает это устройство. Чему равен угол β призмы, которая использовалась в этом устройстве, по вашему мнению? Какую роль играет рассеивающая линза?

П. Крюков

5. Клин и стержень (9 баллов)

Верхняя грань клина массой $m = 3$ кг составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом, клин снабжен легкими колесиками и стоит на горизонтальной поверхности (рис. 11). Стержень массой m , расположенный вертикально,

может двигаться только вверх-вниз вдоль вертикальных направляющих, не испытывая трения. Между стержнем и клином имеется трение, характеризующееся неизвестным коэффициентом μ . Если на клин действуют горизонтальной

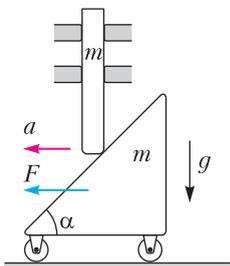


Рис. 11

силой $F = 102$ Н (как показано на рисунке), то клин и стержень движутся так, что касаются друг друга; ускорение клина сонаправлено силе и равно $a = 1$ м/с². Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с².

А. Найдите коэффициент трения μ .

В. Какую горизонтальную силу нужно прикладывать к клину, чтобы он двигался с ускорением a в противоположную сторону?

С. Варламов

10 класс

1. Модель слинки (10 баллов)

Несколько $(2N + 1)$ одинаковых маленьких шариков соединены одинаковыми невесомыми пружинками в цепочку (рис. 12;



Рис. 12

$N = 3$). Пусть длина одной пружинки в недеформированном состоянии равна нулю, диаметр шарика пренебрежимо мал, а $N \gg 1$, тогда такая модельная конфигурация неплохо описывает некоторые свойства успокаивающей игрушки-пружинки «слинки». Известно, что если цепочка шариков с пружинками ($N \gg 1$) располагается на гладкой горизонтальной поверхности, один из крайних шариков удерживается, а на другой крайний шарик действует горизонтальная сила, равная силе тяжести цепочки, то длина цепочки оказывается равна L_0 . Здесь и далее речь идет о статическом состоянии цепочки, при котором все шарики цепочки не движутся.

А. Чему будет равна длина цепочки, если ее подвесить к потолку за один из концов?

В. На каком расстоянии от потолка будет располагаться нижняя точка цепочки, если оба ее конца закрепить на потолке на расстоянии D друг от друга? Какую форму примет цепочка? Назовите вид кривой.

Фольклор

2. КПД автомобиля (7 баллов)

На рисунке 13 вы видите фрагмент модельной зависимости расхода топлива μ (измеряемого в единицах объема на единицу пройденного пути) некоторого особого автомобиля с двигателем внутреннего сгорания от квадрата его скорости. Расположение оси абсцисс, по которой откладывается величина v^2 , неизвестно. Известно только, что она перпендикулярна оси ординат и направлена

вправо по рисунку. Масштаб по оси ординат неизвестен, известно только ее расположение. КПД автомобиля, движущегося с некоторой постоянной скоростью, соответствующей точке A на графике, равен 6%, а КПД автомобиля, движущегося с другой скоростью, соответствующей точке B , равен 18%. Определите максимально возможный КПД автомобиля в диапазоне скоростей, для которых построен график. Можно считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля и направлена против скорости, трение качения пренебрежимо мало, колеса автомобиля по дороге не проскальзывают. Коэффициент полезного действия в этой задаче мы называем долей энергии сгоревшего топлива (в процентах), которая расходуется на поддержание постоянной скорости автомобиля при движении по горизонтальной дороге.

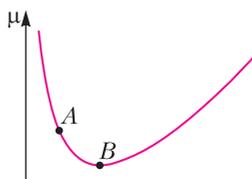


Рис. 13

А.Бычков, П.Крюков

3. Модель миража (9 баллов)

Нижний мираж — это оптическое явление в атмосфере, при котором мнимое изображение неба и облаков наблюдается ниже поверхности земли, как бы отражаясь от расположенного на горизонтальной поверхности зеркала. Например, в солнечный день нагретая поверхность горизонтальной асфальтовой дороги на некотором расстоянии от наблюдателя может казаться покрытой лужами (в которых отражается небо и окружающий пейзаж), тогда как на самом деле дорога сухая. Это явление объясняется искривлением световых лучей в неравномерно нагретом воздухе вблизи дороги.

В этой задаче можно считать, что вблизи поверхности асфальта лучи распространяются по дугам парабол, как показано на рисунке 14. Предполагая, что отклонение показателя преломления воздуха n от единицы на высоте h над дорогой пропорционально концентрации воздуха $N(h)$ на этой высоте:



Рис. 14

те: $n(h) - 1 \sim N(h)$, определите, на каком расстоянии от себя наблюдатель видит область «мокрого» асфальта. В задаче предлагается считать, что температура воздуха уменьшается линейно с высотой от 50°C у поверхности дороги до 20°C на высоте 2 м. Глаза наблюдателя находятся на высоте 1,7 м. При температуре 20°C показатель преломления воздуха отличается от единицы на величину $\Delta n = 4 \cdot 10^{-4}$.

П.Крюков, А.Бычков

4. Сжатие, расширение (7 баллов)

В вертикальном цилиндре, закрытом поршнем, находится некоторое количество идеального газа, молярная теплоемкость которого при постоянном объеме c_V в условиях этой задачи равна $5R/2$. Конструктивные особенности цилиндра таковы, что поршень может удерживаться неподвижно специальными защелками в двух положениях 1 и 2, при этом в положении 1 объем газа под поршнем на 1% больше, чем в положении 2. Сначала поршень находится в положении 1, температура газа в цилиндре равна температуре окружающей среды. Поршень быстро (так что теплообмен с окружающей средой не успевает произойти) сдвигают в положение 2, в котором поршень фиксируется защелками. После этого в течение некоторого времени происходит выравнивание температур газа и окружающей среды, а по окончании этого процесса поршень так же быстро, как при сжатии газа, возвращается в положение 1, в котором он опять фиксируется защелками, после чего некоторое время происходит теплообмен с окружающей средой и выравнивание температур. В итоге газ под поршнем возвращается в исходное состояние: его температура и объем становятся такие же, как в начале процесса. Эта последовательность (иначе говоря, цикл) процессов, которые предлагается считать квазистатическими, повторяется многократно. Температуру окружающей среды можно считать почти постоянной в течение одного цикла.

А. Охладится или нагреется воздух, окружающий цилиндр, после многократного повторения описанного цикла?

В. Для одного цикла определите отношение абсолютной величины работы, совершенной газом, к количеству теплоты, которое газ отдает окружающей среде на участке

охлаждения.

Указание. Для малых изменений параметров идеального газа (T, p, V) из уравнения состояния следует формула $\nu R \Delta T = V \Delta p + p \Delta V$, где ν – количество вещества, а R – универсальная газовая постоянная.

П. Крюков

5. См. задачу Ф2720 «Задачника «Кванта» (8 баллов).

11 класс, тур 1

1. Явления при размыкании (6 баллов)

В цепях с большой индуктивной нагрузкой ключ часто шунтируют конденсатором (подключают его параллельно ключу), подобно тому, как это схематично показано на рисунке 15. Предлагается рассмотреть две цепи, собранные по схеме, приведенной на рисунке: в первой ключ зашунтирован, а во второй – нет. В обеих цепях изначально ключ замкнут, токи установились. Численные значения параметров цепей следующие: $\mathcal{E} = 10$ В, $R = 100$ Ом, $R_L = 10$ Ом (сопротивление провода, которым намотана катушка), $L = 0,1$ Гн, $C = 1$ мкФ. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

Рис. 15

А. Определите отношение U_1/U_2 напряжений на резисторе сразу после размыкания ключа в первой и второй цепи.

В. Найдите количество теплоты Q_1 , выделяющееся после размыкания ключа в первой цепи, и количество теплоты Q_2 , которое выделяется на резисторе R после размыкания ключа во второй цепи.

П. Крюков

2. Очки составителя (7 баллов)

Один из составителей заданий олимпиады носит очки в очень тонкой оправе, оптическая сила линз которых равна +2 дптр. Если эти очки снять с составителя и расположить их под светодиодной лампочкой, закрепленной на потолке комнаты, так, чтобы плоскости линз были параллельны полу, то на полу можно будет наблюдать резкую тень от оправы и линз, а также две ярко освещенные области в центрах теней линз (рис. 16; обработанный фрагмент фотографии). Считая лампочку точечным источником света, опре-



Рис. 16

делите, на каком расстоянии от пола следует держать очки, чтобы диаметр светлого пятна в середине тени одной из линз был примерно в два раза меньше диаметра тени линзы. Высота потолка в комнате равна 3 м. Считайте, что линия, соединяющая лампочку и оптический центр линзы, перпендикулярна полу. Учтите, что искомое расстояние не должно быть больше 1 м.

П. Крюков

3. Расчет цикла (8 баллов)

С одним молем идеального газа, молярная теплоемкость которого при постоянном объеме c_V равна $2R$, где R – универсальная газовая постоянная, проводится циклический процесс $1-2-3-1$, график которого в логарифмических координатах ($x = \ln \frac{V}{V_0}$, $y = \ln \frac{p}{p_0}$, где p_0 и V_0 – некоторые неизвестные постоянные) имеет форму треугольника с углами $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\beta = \arctg \frac{3}{2}$ (рис. 17). Отно-

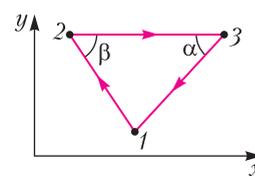


Рис. 17

шение максимального давления газа к минимальному в этом процессе равно n .

А. Считая известной температуру T_1 в точке 1, найдите температуры T_2 и T_3 в точках 2 и 3.

В. Определите КПД η цикла.

П. Крюков

4. Вынуждают колебаться! (10 баллов)

К одному концу невесомой нити, перекинутой через идеальный блок, присоединен пружинный маятник, состоящий из легкой пружины с тяжелым шариком. Собственная частота колебаний маятника (в отсутствие затухания) равна ω_0 . На другой конец нити действует такая внешняя сила, что начиная с нулевого момента времени его координата по вертикали меняется по закону $x_1(t) = A \sin \Omega t$ (рис. 18). В

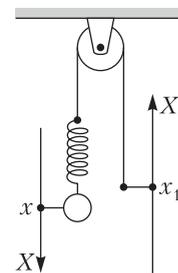


Рис. 18

нулевой момент времени маятник находится в положении равновесия и не движется. В обеих частях задачи считается, что нить при колебаниях ни в один из моментов времени не провисает. Шарик движется только по вертикали и не раскачивается.

А. В этой части предлагается пренебречь всеми силами сопротивления. Тогда движение шарика будет представлять собой суперпозицию колебаний с частотами Ω и ω_0 :

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t + \varphi) + C_2 \sin \Omega t,$$

где $x(t)$ – отклонение шарика от положения равновесия, C_1, C_2, φ – неизвестные постоянные. Определите максимально возможное отклонение шарика от положения равновесия в следующих случаях:

1) $\Omega \gg \omega_0$; 2) $\Omega \ll \omega_0$.

В. В этой части предлагается учесть слабое затухание колебаний маятника. Предположим, что затухание обусловлено силой, пропорциональной скорости шарика и направленной против скорости. Тогда через некоторое время после начала процесса координата шарика будет изменяться периодически по гармоническому закону с частотой Ω . Однако колебания шарика будут сдвинуты по фазе относительно колебаний конца нити, к которому прикладывается внешняя сила, на ф:

$$x(t) = C \sin(\Omega t + \varphi).$$

Определите абсолютное значение сдвига фаз φ при следующих значениях частоты Ω :

1) $\Omega \gg \omega_0, \Omega \ll \omega_0$; 2) $\Omega = \omega_0$.

Фольклор

5. Ловушка Пеннинга (14 баллов)

Ловушкой Пеннинга называется один из типов ионных ловушек – устройств, используемых в экспериментах по ядерной физике для удержания заряженных частиц и ядер в некоторой ограниченной области пространства в течение длительного (по меркам микромира) времени. В этой ловушке мощным электромагнитом создается однородное магнитное поле B , которое можно считать направленным против оси z системы координат с началом в центре ловушки ($B_x = 0, B_y = 0, B_z = -B$); кроме того, системой металлических электродов создается электрическое поле с потенциалом

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U_0}{2r_0^2} (-a(x^2 + y^2) + bz^2),$$

где U_0 и r_0 – известные постоянные, a и b – неизвестные безразмерные константы, причем $a > 0$. Оказывается, в полях такого вида положительно заряженная частица движется сложным образом. Вдоль оси z частица совершает гармонические колебания с некоторой частотой Ω_z около начала координат. Проекция траектории частицы на плоскость xu представляет собой *эпитрохоиду*. Это линия, которую описывает точка, движущаяся по окружности радиусом r с постоянной угловой скоростью ω^+ , при том что центр этой окружности движется по окружности большего радиуса R ($R > r$) с меньшей угловой скоростью ω^- . Здесь и далее имеются в виду угловые скорости относительно лабораторной (!) системы отсчета. Примеры эпитрохоид, для которых центр большей окружности находится в начале координат, можно видеть на рисунке 19. Далее везде

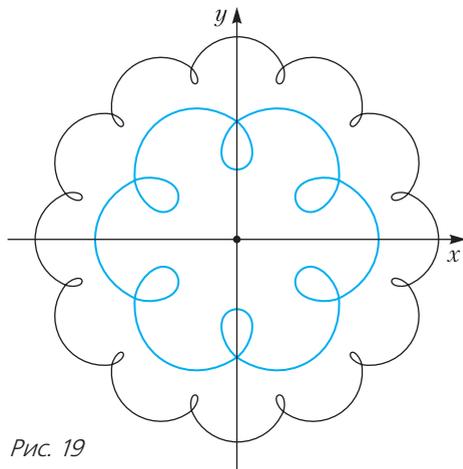


Рис. 19

речь идет о движении частицы с известными массой m и положительным зарядом q . Параметры U_0, r_0 и B также считаются известными во всех частях задачи, кроме части С.

А. Получите формулы для проекций E_x, E_y и E_z вектора напряженности электрического поля на оси системы координат и найдите отношение $\frac{b}{a}$.

Внимание. Если вы не получили в части А отношение $\frac{b}{a}$, можете приступить к решению части С, считая это отношение известным параметром.

В. Пусть задан коэффициент b . Определите частоту колебаний Ω_z , а также циклотрон-

ную частоту Ω_0 вращения частицы в магнитном поле при отсутствии электрического.

С. Выразите угловые скорости вращения частицы ω^+ и ω^- по окружностям, дающим траекторию в виде эпитрохоиды, через параметры Ω_z и Ω_0 ($\sqrt{2}\Omega_z < \Omega_0$). Радиусы окружностей r и R неизвестны. На рисунке 19 ось z направлена на читателя, движение по обеим окружностям происходит в направлении против часовой стрелки.

Д. Для траектории в виде большей эпитрохоиды на рисунке 19 (линия черного цвета), используя результаты предыдущих частей, определите безразмерные коэффициенты a и b в выражении для потенциала электростатического поля.

М.Ромашка

11 класс, тур 2

1. Бильярд на льду (8 баллов)

На ровную горизонтальную поверхность ледяного катка положили однородный тонкий обруч радиусом R и массой m . В точку, лежащую на диаметре обруча AB , на неизвестном расстоянии h от центра обруча поместили шайбу массой m и сообщили ей скорость v , направленную перпендикулярно AB (рис. 20). Взаимодействие между шайбой и обручем абсолютно упругое. После столкновения с обручем шайба и обруч движутся так, что в следующий раз шайба попадает в точку B обруча. Радиус шайбы пренебрежимо мал, трения нет, обруч можно считать абсолютно твердым телом. Определите расстояние h .

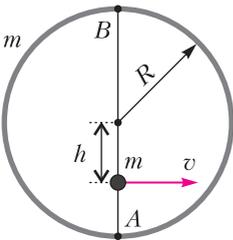


Рис. 20

Рис. 20

М.Ромашка

2. См. задачу Ф2719 «Задачника «Кванта» (10 баллов).

3. В сосуде (9 баллов)

В невесомости в высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания $0,05 \text{ м}^2$ находится вода массой m в жидком состоянии и влажный воздух, давление которого в любой точке сосуда равно внешнему давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, а температура равна температуре воды $t = 65 \text{ }^\circ\text{C}$. Сосуд открыт сверху,

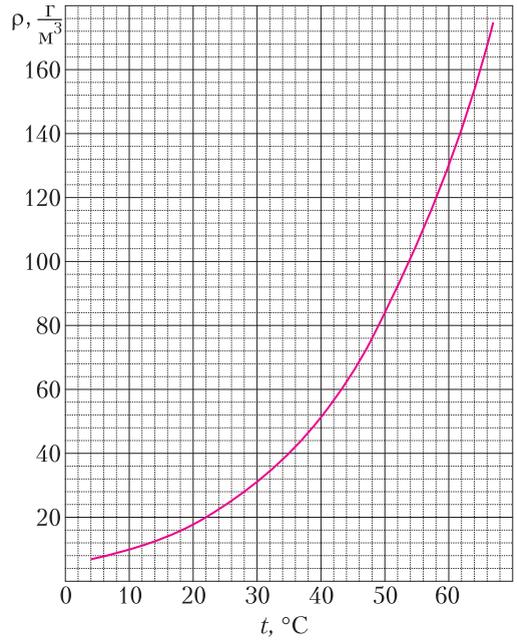


Рис. 21

поэтому относительная влажность воздуха в сосуде вследствие диффузии меняется линейно в зависимости от расстояния x до его дна, покрытого водой. Можно считать, что вблизи дна влажность равна 100%, а на расстоянии $H = 1 \text{ м}$ от дна она уменьшается до 20%. График зависимости плотности насыщенных паров воды от температуры показан на рисунке 21. Молярные массы сухого воздуха и воды равны 29 г/моль и 18 г/моль соответственно. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

А. Пусть в начальный момент масса воды в жидком состоянии равна $m_1 = 32 \text{ г}$. Сосуд герметизируют, устанавливая специальную тонкую жесткую задвижку на высоте $H = 1 \text{ м}$. После этого температуру в сосуде медленно увеличивают до $100 \text{ }^\circ\text{C}$. Найдите давление в сосуде в конечном состоянии.

В. В этом случае начальная масса жидкости в сосуде равна $m_2 = 1,2 \text{ г}$. На расстоянии H от дна сосуда устанавливают поршень, который может скользить без трения вдоль оси сосуда. После этого температуру в сосуде начинают медленно уменьшать. Найдите расстояние от дна сосуда до поршня при температуре $60 \text{ }^\circ\text{C}$ и $10 \text{ }^\circ\text{C}$.

П.Крюков

4. Через шар (14 баллов)

В этой задаче предлагается проанализировать изображения плоских предметов в прозрачном шаре радиусом R , изготовленном из стекла с показателем преломления $n = \frac{3}{2}$. Во

всех частях задачи можно считать линию зрения перпендикулярной плоскости предмета, а центр шара – лежащим на линии зрения, как показано на схематичном рисунке 22. Предлагается рассматривать только те

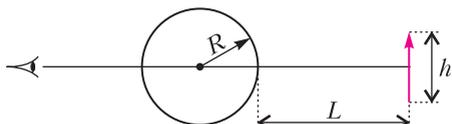


Рис. 22

изображения, которые формируются параксиальными (приосевыми) лучами. Линейным увеличением β назовем отношение перпендикулярного линии зрения размера изображения h' к соответствующему размеру предмета h .

А. В шаре наблюдают изображение удаленного предмета размером h . Расстояние от шара до предмета равно L , причем $L \gg R$, $L \gg h$. Определите зависимость $\beta(L)$.

В. Шар прислонили к поверхности экрана компьютерного монитора. С каким увеличением β можно видеть буквы (и отдельные пиксели) на экране в этом случае?

С. На фрагменте фотографии экрана компьютерного монитора, к которому прижат стеклянный шар, наблюдается увеличенное в шаре изображение пикселей (рис. 23).

рислонили к поверхности экрана. С какими увеличенными буквами на экране в этом случае? Линия зрения перпендикулярна экрану, центр шара находится на линии



Рис. 23

Пусть шар радиусом $R = 2$ см прижали к экрану монитора и сфотографировали с расстояния $s = 1$ м, при этом центр шара находился вблизи оптической оси объектива, перпендикулярной плоскости экрана. Разрешение монитора составляло 2560×1440 пикселей, а длина диагонали экрана 32 дюйма. Размеры светочувствительной матрицы фотоаппарата были равны $23,5 \times 15,6$ мм. Оказалось, что изображение в шаре горизонтального отрезка экрана из 20 пикселей занимает на фотографии чуть больше 100

точек при размере длинной стороны фотографии 3000 точек. Определите по этим данным фокусное расстояние F объектива фотоаппарата. Учтите, что $F \ll s$, 1 дюйм $\approx 2,54$ см.

П. Крюков

5. Аналогии (14 баллов)

А. В вакууме, в области, где нет зарядов и токов, электрическое и магнитное поля описываются одинаковыми с математической точки зрения дифференциальными уравнениями (с точностью до знаков и постоянных множителей), поэтому картины линий этих полей вдали от источников очень похожи. Например, напряженность поля точечного электрического диполя ($\vec{p} = q\vec{l}$ – дипольный момент диполя) в точке с радиус-вектором \vec{r} дается формулой

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right),$$

которая превращается в формулу для индукции магнитного поля витка с током (магнитного диполя) при замене $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$, где $\vec{\mu} = IS\vec{n}$ – магнитный момент витка площадью S с током I , \vec{n} – вектор единичной нормали к плоскости витка.

Рассмотрим соленоид с количеством витков N ($N \gg 1$) длиной L , намотанный достаточно тонким проводом виток к витку на полой цилиндрический немагнитный сердечник с радиусом основания R ($R \ll L$). По виткам соленоида течет ток I .

1) На большом расстоянии от витков соленоида его поле эквивалентно полю двух фиктивных магнитных зарядов, расположенных на торцах соленоида. Найдите модуль магнитного заряда Q_M любого из торцов соленоида.

2) Чему равна индукция магнитного поля соленоида в точке A (рис. 24) на расстоянии b ($b \gg R$, $b \ll L$) от его оси?

3) Найдите индукцию магнитного поля соленоида в точке, лежащей вне соленоида

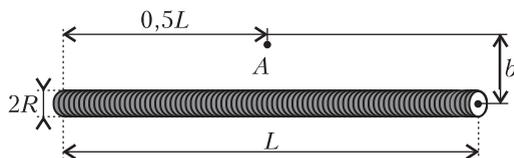


Рис. 24

на его оси на расстоянии h ($R \ll h \ll L$) от его торца.

В. Аналогию можно развить, обратив внимание на то, что напряженность вихревого электрического поля, порождаемого изменяющимся магнитным полем бесконечного соленоида, на расстоянии, много большем радиуса соленоида, описывается соотношением, очень похожим на формулу $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ для индукции магнитного поля прямолинейного провода с током I на расстоянии r от него.

1) Найдите напряженность вихревого электрического поля на расстоянии b от оси очень длинного цилиндрического соленоида радиусом a ($b > a$), магнитное поле в котором изменяется с известной скоростью $\frac{dB}{dt}$.

Тонкую цилиндрическую трубку с радиусом основания r и длиной $2\pi R$ ($R \gg r$) из немагнитного материала согнули в кольцо, на которое после намотали N ($N \gg 1$) витков тонкого провода виток к витку, так что получилась тороидальная катушка. Выводы катушки подключили к специальному источнику напряжения, в итоге ток в катушке в зависимости от времени начал изменяться по закону $I(t) = kt$, где k – известная постоянная.

2) Определите напряженность вихревого электрического поля в центре тора.

3) На главной оси тора на расстоянии h от него ($h \gg R$) располагается точечный заряд q . Какая сила действует на заряд со стороны вихревого электрического поля?

П. Крюков

Публикацию подготовил П. Крюков

Избранные задачи XXVII Турнира имени А.П.Савина

1 (6–8 класс). На доске записано несколько чисел, не обязательно различных. Сима записала всевозможные попарные суммы чисел с доски, а Роза – всевозможные модули разностей двух чисел. Каждое число, которое записала Сима, есть и у Розы. Верно ли, что каждое число, записанное Розой, есть и у Симы?

Б. Френкин

2 (7 класс). В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы A, C, E прямые. На стороне AE выбрана точка M так, что $\angle ABM + 90^\circ = \angle CBM$ и $\angle EDM + 90^\circ = \angle CDM$. Докажите, что прямая CM делит периметр пятиугольника $ABCDE$ пополам.

Е. Бакаев

3 (7 класс). В каждой клетке на поверхности кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ и на каждой из сторон клеток записаны натуральные числа так, что каждое число на стороне клетки делится на число в клетке. Сумма всех чисел на сторонах в 5 раз больше суммы всех чисел

в клетках. Докажите, что найдутся стороны с одинаковыми числами на них.

А. Шаповалов

4 (7–8 класс). Прямоугольник разрезали на полоски $1 \times n$. Докажите, что количество горизонтальных или количество вертикальных полосок делится на n .

А. Грибалко

5 (6–8 класс). Король решил устроить тест своему придворному мудрецу. Мудрецу нужно написать на доске 10-значное число, после чего король назовет какое-нибудь свое натуральное число от 1 до 100. Если мудрец сможет поставить знаки $+$, $-$, \times между некоторыми цифрами числа на доске так, чтобы результат был равен числу короля, то он пройдет тест. Какое число может написать мудрец, чтобы гарантированно справиться с заданием короля?

М. Евдокимов

6 (7 класс). На медиане BM треугольника ABC выбрана точка K так, что $CK = CM$.

Известно, что $\angle CBM = 2\angle ABM$. Докажите, что $BC = MK$.

Е.Бакаев

7 (7–8 класс). Рассматриваются всевозможные разбиения клетчатого прямоугольника на двухклеточные доминошки. Будем называть *удачным* разбиение, в котором каждый квадрат 2×2 содержит целиком хотя бы одну доминошку. А разбиение, где в каждой доминошке можно провести по одной диагонали, никакие две из которых не имеют общих концов, назовем *красивым*. Докажите, что разбиение удачное тогда и только тогда, когда оно красивое.

А.Грибалко

8 (8 класс). Учитель нарисовал в своей тетрадке треугольник с целочисленными сторонами и сказал об этом трем ученикам математического класса. Кроме того, каждому из них он сообщил длину одной из сторон треугольника (разным ученикам – длины разных сторон). После этого между учениками состоялся следующий разговор.

Петя: «Я знаю, это этот треугольник непрямоугольный».

Вася: «Если бы я знал, что он неравобедренный, то знал бы все его стороны».

Толя: «Треугольник действительно неравобедренный».

Чему равны стороны нарисованного учителем треугольника?

А.Грибалко

9 (7–8 класс). В каждой клетке прямоугольника 11×22 живет гном. Каждые два гнома, живущие в одной строке или в одном столбце, дружат. В некоторый момент каждый гном поссорился с двумя своими друзьями. Докажите, что теперь найдутся два гнома, у которых нет общих друзей.

А.Грибалко

10 (7–8 класс). При каких N найдется треугольник, который можно разрезать на N прямоугольных треугольников с гипотенузой 1?

А.Шаповалов

11 (8 класс). У Коли есть 1000 единичных белых кубиков. Восемь из них он покрасил в черный цвет и составил из всех кубиков куб

$10 \times 10 \times 10$, в котором черные кубики образуют куб $2 \times 2 \times 2$. Дима не видит куб, но за один вопрос может назвать Коле любой набор кубиков и узнать, сколько среди них черных. За какое наименьшее число вопросов Дима может узнать, где расположены черные кубики?

А.Грибалко

12 (8 класс). В выпуклом 999-угольнике проводятся по одной диагонали. Каждая новая диагональ должна пересекать во внутренних точках четное число уже проведенных диагоналей (возможно, ни одной). Докажите, что в итоге по крайней мере две диагонали не будут проведены.

А.Грибалко

13 (8 класс). Вписанная окружность треугольника ABC с углом B , равным 60° , касается сторон AB и BC в точках A_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов A и C пересекают (первый раз) вписанную окружность в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников AA_0A_1 и CC_0C_1 равноудалены от середины стороны AC .

Д.Швецов

14 (8 класс). Жюри задумало одну из цифр от 1 до 9. Разрешено задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет». Жюри при этом имеет право один раз соврать, сказав «да» вместо «нет». За какое наименьшее число вопросов можно наверняка узнать задуманную цифру?

С.Токарев

15 (8 класс). Семь гномов, работая на руднике, добыли 1000 золотых самородков массой 1 г, 2 г, ..., 1000 г. Гномы хотят поделить все золото так, чтобы ни у одного из них не было двух самородков, один из которых вдвое тяжелее другого, и не было трех самородков, масса одного из которых равна сумме масс двух остальных. Есть ли у гномов способ справиться с этой задачей?

А.Грибалко

Подробную информацию о турнире можно найти на сайте tursavin.ru

Публикацию подготовил А.Грибалко

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Олимпиада

«Твой путь в настоящую науку»

I (отборочный) этап

Вариант 1 (устный тур)

8 класс

1. В два разных широких цилиндрических сосуда налили одинаковое количество воды при комнатной температуре. Затем измерили время t_1 , за которое полностью испарилась вода из 1-го сосуда, но забыли измерить время t_2 , за которое полностью испарилась вода из 2-го сосуда. После этого в каждый сосуд снова налили такое же количество воды и соединили сосуды снизу тонкой трубкой. Сосуды опустели за время $t_{\text{общ}}$. Считая $t_{\text{общ}}$ и t_1 известными, определите t_2 .

2. Два тела нагревают от температуры T_1 до температуры T_2 , подводя к ним одинаковую постоянную мощность. Первое тело нагрелось за время τ_1 , а второе – за время τ_2 . Какую температуру будут иметь оба тела, если привести в контакт первое тело при температуре T_1 и второе при температуре T_2 и дождаться установления теплового равновесия? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

3. Цилиндрический грузик подвешен на пружинке. Пружинку берут за свободный конец и погружают грузик в жидкость. Когда грузик погрузился на $1/3$ своего объема, пружинка была растянута. Когда грузик погрузили на $2/3$ его объема, растяжение пружинки уменьшилось втрое. Найдите плотность материала грузика, если плотность жидкости ρ_0 .

4. Шарик плотностью ρ плавает на границе раздела двух жидкостей, имеющих плотности ρ_1 и ρ_2 . Найдите отношение объемов шарика, которые находятся в верхней и нижней жидкости соответственно.

9 класс

1. В два разных широких цилиндрических сосуда налили одинаковое количество воды

при комнатной температуре. Затем измерили время t_1 , за которое полностью испарилась вода из 1-го сосуда, но забыли измерить время t_2 , за которое полностью испарилась вода из 2-го сосуда. После этого в каждый сосуд налили такое же количество воды, а в процессе испарения несколько раз переливали воду из сосуда в сосуд так, что до того, как оба сосуда опустели, ни один из них не был пустым. Измерили, что при таком процессе сосуды опустели за время $t_{\text{общ}}$. Считая $t_{\text{общ}}$ и t_1 известными, определите t_2 .

2. На тонкостенный тяжелый стакан положили две одинаковые тонкие однородные палочки, как показано на рисунке 1: первая опирается на края стакана, а вторую палочку подсунули под первую. Какова максимально возможная длина l выступающей за края стакана части второй палочки? Первая палочка всегда касается стакана в двух точках, а вторая – только в одной. Радиус стакана $R = 4$ см, длина каждой палочки $L = 12$ см.

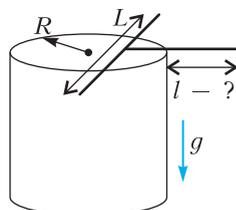


Рис. 1

Первая палочка всегда касается стакана в двух точках, а вторая – только в одной. Радиус стакана $R = 4$ см, длина каждой палочки $L = 12$ см.

3. По горизонтальной поверхности движутся небольшая легкая шайба и массивная плита (рис. 2). Начальная скорость шайбы u

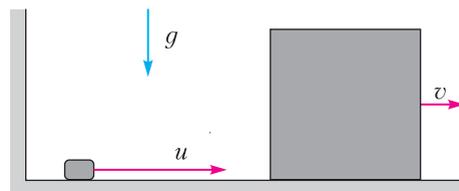


Рис. 2

в 12,5 раз больше скорости плиты v . Сколько всего ударов о плиту совершит шайба? Удары о плиту и вертикальную стенку абсолютно упругие. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Толя наблюдает за мячиком, который скачет вверх-вниз внутри неподвижно зак-

репленного ящика (рис. 3), абсолютно упруго отражаясь от его верхней и нижней стенок. Верхняя треть боковой стенки ящика открыта, что позволяет Толе проводить измерения. Полный период движения мячика оказался равным T , а время нахождения мячика в верхней трети ящика в течение одного периода равно τ . Чему равна высота h ящика? Ускорение свободного падения равно g . Соппротивлением воздуха, толщиной стенок и размером мячика пренебречь.

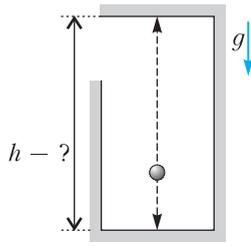


Рис. 3

10 класс

1. Бусинка висит на тонкой нити и совершает небольшие колебания, поднимаясь на высоту H от нижнего положения (рис. 4). Когда бусинка проходила положение равновесия, точку подвеса начали двигать горизонтально в противоположную сторону с постоянной скоростью, равной скорости бусинки в этот момент. Найдите максимальную высоту подъема бусинки.

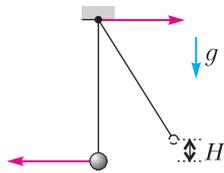


Рис. 4

2. Два больших одинаковых бака закреплены на разных высотах (рис. 5). Баки соединены трубой, которая вначале перекрыта вентилем. Оба бака открыты, при этом нижний пуст, а верхний полностью заполнен водой. Затем нижний (пустой) бак герметично закрывают и открывают вентиль. Вода из верхнего бака начинает медленно поступать в нижний. При этом воздух из нижнего бака в трубу не выходит. Поступление воды в нижний бак самопроизвольно прекращается (при открытом вентиле), когда нижний бак оказывается на треть заполненным водой. Чему равен перепад высот H ? Высота баков h , плотность воды ρ , уско-

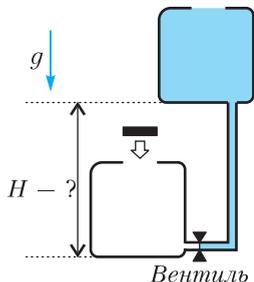


Рис. 5

рение свободного падения g , атмосферное давление p_a . Объем соединительной трубы много меньше объема бака. Температура в процессе не изменяется.

3. Твердый маленький шарик массой M лежит на закрепленном кольце (рис. 6). Снизу вертикально вверх в шарик влетает пуля массой m , имеющая скорость v , пробивает шарик насквозь и, вылетая, поднимается на высоту H над кольцом. На какую высоту подпрыгнет шарик? Ускорение свободного падения равно g .

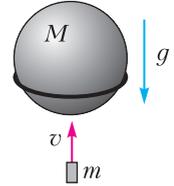


Рис. 6

4. Два конца легкой эластичной резинки закреплены в неподвижных точках, различных на некоторое расстояние друг от друга по горизонтали. Резинка не провисает, но и не натянута. Когда к середине резинки прикрепили грузик некоторой массы, угол между двумя отрезками резинки составил $\alpha_1 = 120^\circ$ (рис. 7). Во сколько раз необходимо увеличить массу грузика, чтобы угол стал равным $\alpha_2 = 60^\circ$?

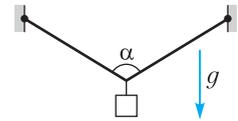


Рис. 7

11 класс

1. В стенку вставлены два жестких параллельных горизонтальных стержня (рис. 8). Точки крепления стержней находятся на одной вертикали. На верхний стержень надета бусинка, прикрепленная к двум одинаковым пружинам жесткостью $k = 40$ Н/м. Другой конец горизонтальной пружины прикреплен к стенке, а вертикальной пружины – к нижнему стержню. Оказалось, что пружины вначале не деформированы. Какую работу надо совершить, чтобы медленно сместить бусинку вправо на $l = 40$ см? Трением между бусинкой и стержнем пренебречь. Расстояние между стержнями $L = 30$ см.

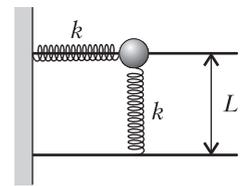


Рис. 8

2. Два одинаковых однородных стержня массой m соединены шарнирно друг с другом и подвешены к потолку нерастяжимыми невесомыми нитями (рис. 9). Каждый стержень удерживается в горизонтальном поло-

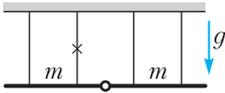


Рис. 9

жении двумя вертикальными нитями, прикрепленными к нему на расстоянии $1/4$ длины стержня от концов стержня.

Одна из ближних к центру нитей порвалась. Найдите натяжения оставшихся трех нитей. Ускорение свободного падения равно g .

3. Некое тело удерживают на высоте H от массивной горизонтальной покоящейся плиты. Известно, что после «частично неупругого» удара тела об эту плиту оно теряет k -ю часть кинетической энергии. Тело отпустили. Какую скорость u необходимо мгновенно сообщить плите перед самым ударом о нее тела, чтобы тело снова поднялось на высоту H ? Ускорение свободного падения равно g . Сопротивлением воздуха пренебречь. Решите задачу для $k = 0,36$.

4. На длинную неподвижную горизонтальную спицу наизана бусинка массой m и зарядом Q , которая может перемещаться. Другой неподвижный точечный заряд q того же знака закреплен на спице на расстоянии L от бусинки. На какое расстояние сдвинется бусинка, если ее отпустить? Коэффициент трения между бусинкой и спицей равен μ . Ускорение свободного падения равно g .

Вариант 2 (интернет-тур)

8 класс

1. Толя и Поля вышли из одного и того же дома и пошли в школу вместе. В какой-то момент Толя вспомнил, что забыл дома сменную обувь. Он побежал обратно домой и, схватив пакет с обувью, побежал в школу. Скорость бега Толи была в два раза больше скорости, с которой они шли с Полей до этого. Поля продолжила путь в школу с прежней скоростью. Какую часть пути прошли Толя и Поля вместе, если известно, что они прибыли в школу одновременно?

2. См. задачу 2 для 8 класса из варианта 1.

3. Цилиндрический грузик подвешен на пружинке. Пружинку берут за свободный конец и погружают грузик в жидкость. Когда грузик погрузился на $3/10$ своего объема, пружинка была растянута. Когда грузик погрузили на $6/10$ его объема, пружинка сжалась. Найдите плотность материала грузика, если плотность жидкости ρ_0 , а сжатие пружинки во втором случае (относительно

длины нерастянутой пружинки) в 2 раза больше ее растяжения в первом случае.

4. На дне озера лежит однородная прямая балка. Балку вытаскивают из воды с помощью троса, прикрепив его к одному из ее концов (рис. 10). Когда трос начали тянуть,

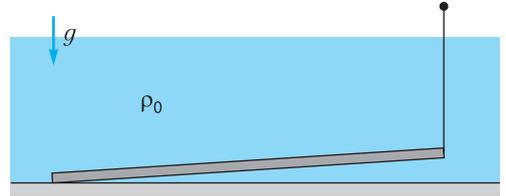


Рис. 10

он был натянут с силой F_1 , а когда балку полностью извлекли из воды, трос был натянут с силой F_2 . Определите плотность материала балки, если плотность воды ρ_0 .

9 класс

1. Цилиндрический грузик подвешен на пружинке. Пружинку берут за свободный конец и погружают грузик в жидкость. Когда грузик погрузился на $1/3$ своего объема, пружинка была растянута. Когда грузик погрузили на $7/12$ его объема, пружинка сжалась. Найдите плотность материала грузика, если плотность жидкости ρ_0 , а сжатие пружинки во втором случае (относительно длины нерастянутой пружинки) в 2 раза больше ее растяжения в первом случае.

2. Два паровоза едут со скоростями v и $\sqrt{2}v$ по разным железнодорожным путям. Дует постоянный ветер со скоростью $2v$. Оказалось, что дымовой шлейф из трубы каждого паровоза перпендикулярен направлению движения этого же паровоза. Найдите возможные углы между направлениями движения паровозов.

3. Составной частью экспериментальной установки для моделирования аварий на ядерных реакторах является цилиндр, к которому подают напряжение. Цилиндр состоит из вольфрамовой проволоки, окруженной прессованным порошком окисла алюминия Al_2O_3 , к торцам которого присоединены цилиндры из молибдена (рис. 11). Известны

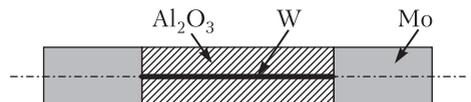


Рис. 11

удельные сопротивления материалов: $\rho_W = 27 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_{Mo} = 22 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_{Al_2O_3} = 3 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Найдите отношение джоулева тепла, выделяющегося в проволоке, к полному джоулеву теплу, если известно, что диаметр проволоки в 10 раз меньше диаметра молибденовых цилиндров, а длина проволоки равна суммарной длине цилиндров. Ответ получите с точностью до одной десятой процента.

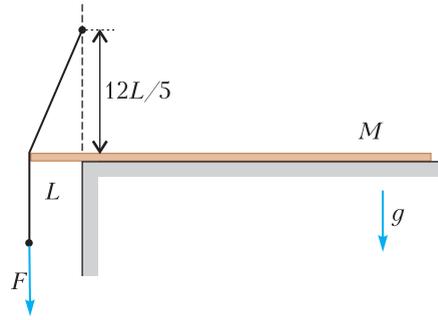


Рис. 13

4. Маленький шарик скачет вверх-вниз между двумя горизонтальными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстояние h . Период его движения (т.е. время между последовательными столкновениями с верхней плоскостью) равен T_0 . Во сколько раз увеличится этот период, если в некоторый момент, пока шарик находится в воздухе, нижнюю плоскость резко опустить вниз так, что расстояние между плоскостями увеличится вдвое? Ускорение свободного падения равно g . Столкновения упругие. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. На горизонтальном гладком столе лежит длинная тонкая доска массой M , часть которой длины L выступает за край стола (рис. 13). Над краем стола на высоте $12L/5$ привязана длинная веревка, перекинутая через край доски. Веревку начали тянуть вниз с постоянной силой F . С какой установившейся скоростью будет двигаться доска по столу, если веревка скользит по краю доски без трения?

10 класс

1. На горизонтальном столе находятся $N = 7$ одинаковых брусков, последовательно соединенных между собой с помощью одинаковых пружинок (рис. 12). Первый брусок равномерно перемещают по столу, в результате чего все бруски движутся с одинаковыми скоростями. Найдите силу натяжения пружины, соединяющей 1-й и 2-й бруски, если известно, что разница сил натяжения пружины, соединяющей 4-й и 5-й бруски, и пружины, соединяющей 5-й и 6-й бруски, составляет $\Delta T = 337 \text{ Н}$.

4. Два больших одинаковых бака расположены на разных высотах (рис. 14). Дно верхнего бака находится на H выше дна нижнего бака. Нижний бак полностью заполнен водой, а верхний пуст. Необходимо с помощью насоса перекачать всю воду из нижнего бака в верхний за время T . Какую минимальную механическую мощность должен при этом развивать насос? Вода откачивается из нижней части нижнего бака и закачивается в верхнюю часть верхнего бака. Высота баков h , объем каждого V , плотность воды ρ , сечение трубы насоса S , ускорение свободного падения g . Воду считать идеальной жидкостью, трением пренебречь.

Рис. 14

2. Толя и Поля играют в снежки. Толя кинул свой снежок со скоростью u под углом α к горизонту. После этого Поля, находящаяся на расстоянии L от Толи, подождала время T и бросила свой снежок вертикально вверх. С какой скоростью Поля бросила снежок, если известно, что она попала в снежок Толи? Ускорением свободного падения равно g . Сопротивлением воздуха, размерами снежков и высотой Толи и Поли пренебречь.

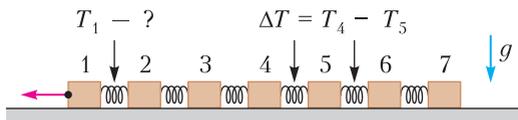


Рис. 12

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.
 2. Квадрат со стороной a сделан из трубки, которая заполнена двумя жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно, и лежит на горизонтальном столе. Квадрат осторожно ставят в вертикальную плоскость так, что в начальный момент более плотная жидкость с плотностью ρ_2 оказалась сверху. Найдите максималь-

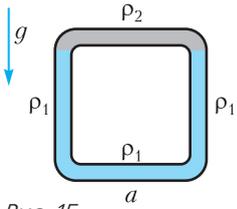


Рис. 15

ную скорость жидкости, если три стороны квадрата заполнены жидкостью с плотностью ρ_1 и одна с плотностью ρ_2 (рис. 15). Ускорение свободного падения равно g .

3. На катере нужно пересечь реку с постоянной скоростью u , двигаясь строго перпендикулярно берегам. Скорость течения реки равна v . Какую минимальную механическую мощность должен при этом вырабатывать двигатель катера? Известно, что сила сопротивления при движении катера в спокойной воде (озере) пропорциональна квадрату скорости. При движении катера по озеру со скоростью u сила сопротивления воды равна F_0 . Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Три одинаковые бусинки с зарядом q и массой m каждая надеты на горизонтальную непроводящую спицу. Две крайние бусинки закреплены на расстоянии a друг от друга, а средняя может скользить по спице без трения. Какой будет максимальная скорость средней бусинки, если одну из крайних резко сдвинуть дальше от оставшихся на расстояние b и закрепить в этом положении?

II (заключительный) этап

8 класс

1. Катер курсирует между точками A и B , расположенными на противоположных берегах реки на расстоянии $L = 1$ км так, что

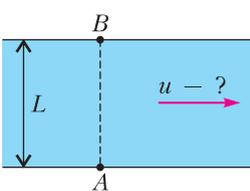


Рис. 16

отрезок AB перпендикулярен течению реки (рис. 16). Катер, двигаясь по прямой, преодолевает путь из точки A в точку B за $t_1 = 5$ мин.

Определите скорость течения реки u , если известно, что в отсутствие течения катер преодолел бы тот же путь за $t_2 = 4$ мин.

2. На края невесомых неравноплечих весов поставили по невесомой одинаковой широкой коробке (рис. 17). В правые края коробок положили по грузу массами m_1 и m_2 соответственно, и весы оказались в равновесии. Затем грузы поменяли местами, после чего груз массой m_1 переместили на другой

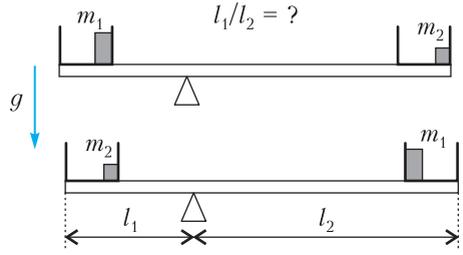


Рис. 17

край коробки, и весы снова оказались в равновесии. Найдите отношение плеч весов. Размерами грузов пренебречь.

3. В кастрюлю с 1 л воды поместили небольшой кипятыльник мощностью 100 Вт, включили его и оставили на очень долгое время. Вода так и не закипела. Кипятыльник вытащили. За какое время после этого температура воды понизится на небольшую величину в 1°C ? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К). Испарением воды пренебречь.

4. Пустой шприц массой $M = 10$ г состоит из цилиндра и поршня одинаковой длины. Шприц на $2/3$ своего объема заполнили однородной жидкостью. Затем шприц подвесили на горизонтальном положении, прикрепив его противоположные крайние точки с помощью нитей к двум динамометрам (рис. 18). Показания динамометров равны

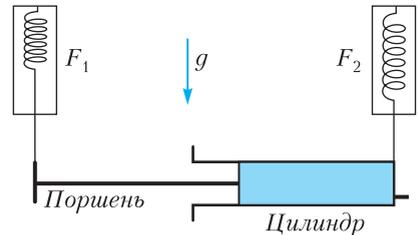


Рис. 18

$F_1 = 60$ мН и $F_2 = 90$ мН. Найдите массу поршня $m_{\text{п}}$ и массу цилиндра $m_{\text{ц}}$, если известно, что центры тяжести цилиндра и поршня находятся в их серединах. Массой наконечника пренебречь. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с².

9 класс

1. Несколько одинаковых тонких прямоугольных брусков лежат горизонтально на полу. Из двух таких брусков создали конструкцию, показанную на рисунке 19 слева, совершив при этом работу A . Какую

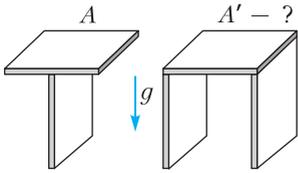


Рис. 19

работу A' необходимо совершить, чтобы создать конструкцию из трех брусков, показанную на рисунке справа?

2. См. задачу 3 для 8 класса.
3. См. задачу 4 для 8 класса.
4. К пружине с неизвестной жесткостью прикрепили маленький грузик и подвесили ее. Грузик потянули вертикально вниз, отпустили, и он начал совершать колебательные движения. Оказалось, что в момент, когда грузик находится в самой нижней точке, длина пружины в два раза больше длины недеформированной пружины, а когда в верхней точке – в два раза меньше длины недеформированной пружины. Чему равен период колебаний? Длина недеформированной пружины L , ускорение свободного падения g .
5. Две длинные доски сложили вместе и запустили со скоростью u по скользкой горизонтальной поверхности (трением между нижней доской и скользкой поверхностью можно пренебречь). Конструкция из досок наезжает на шероховатый участок (рис. 20).

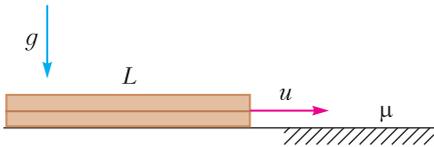


Рис. 20

При каком минимальном коэффициенте трения μ_{\min} между досками верхняя доска не сдвинется относительно нижней при торможении? Длина досок L , коэффициент трения между нижней доской и шероховатой поверхностью μ , ускорение свободного падения g .

10 класс

1. Однородные бусы полностью заполняют невысокую цилиндрическую емкость. Бусы медленно вытягивают вертикально вверх. Чтобы вытянуть третью часть бус, потребовалось совершить работу A . Какую еще работу A' нужно совершить, чтобы вытянуть бусы полностью? Работой сил трения пренебречь.

2. См. задачу 4 для 9 класса.
3. В стоящий на горизонтальной подставке открытый сверху цилиндрический сосуд засыпали мелких жестких стеклянных шариков. Высота засыпки h . Затем сверху опустили массивный герметичный поршень. Поршень остановился на высоте $2h$ от дна сосуда (рис. 21). Начальная температура сосуда с поршнем T_0 . Потом температуру системы понизили до $0,6T_0$. Поршень при этом опустился еще на $h/2$. Чему равна масса засыпки из шариков? Плотность стекла ρ , площадь сечения сосуда S . Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

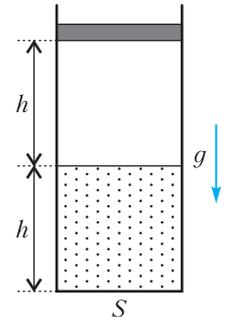


Рис. 21

4. «Однажды Лебедь, Рак да Щука везли с поклажей воз взялись». Лебедь тянет с силой $F_L = 130$ Н, Щука – с силой $F_{Щ} = 150$ Н, угол α между веревкой, которую тянет Лебедь, и продолжением веревки, которую тянет Рак, такой, что $\cos \alpha = 5/13$ (рис. 22). Найдите, с какой силой F_R тянет Рак, если известно, что «воз и ныне там». Массой, а также трением воза о землю пренебречь.

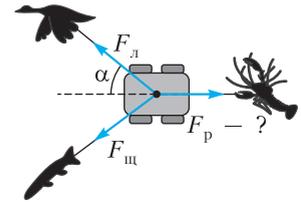


Рис. 22

11 класс

1. Несколько одинаковых тонких прямоугольных брусков расположены на большом расстоянии друг от друга. В центре каждого из брусков находится одинаковый заряд. Из двух таких брусков создали конструкцию, показанную на рисунке 23 слева, совершив при этом работу A . После чего бруски опять

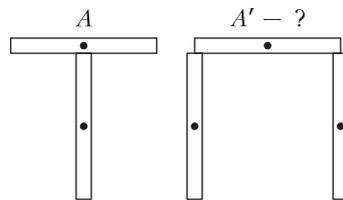


Рис. 23

удалили на большое расстояние друг от друга. Какую работу A' необходимо совершить, чтобы создать конструкцию, показанную на рисунке справа, из трех брусков? Силы тяжести нет.

2. Два поршня делят закрытый цилиндрический сосуд, лежащий на горизонтальном столе, на три части (рис. 24). Между порш-

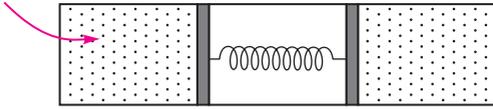


Рис. 24

нями расположена пружина. Между поршнями газа нет (вакуум), в остальных частях – идеальный газ. Система находится в равновесии. В левой части сосуда увеличили количество молей газа в два раза, после чего сжатие пружины увеличилось на 20%. Определите, во сколько раз увеличился объем, занимаемый газом в левой части сосуда, после установления равновесия. Температуру считать постоянной, трением пренебречь.

3. На спицу надели две одинаковые бусинки, каждую из которых при помощи одинаковых невесомых стержней длиной R шарнирно соединили с грузиком массой m (рис. 25). И грузик и бусинки зарядили до одинакового заряда Q . Система пришла в равновесие. Найдите, при какой угловой частоте вращения ω грузика расстояние между бусинками уменьшится в два раза по сравнению со случаем неподвижного грузика. Силы тяжести нет, трением пренебречь.

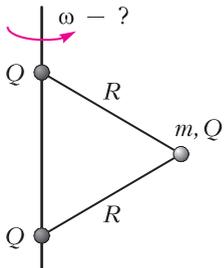


Рис. 25

4. На центр небольшой тарелки с плоскими краями, стоящей на пружинных весах, из

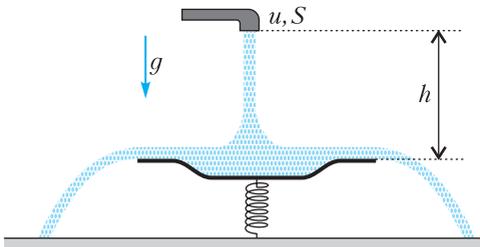


Рис. 26

трубки направили тонкую струю жидкости (рис. 26). Трубка находится на расстоянии h от тарелки. Течение установилось (сколько жидкости поступает в единицу времени из трубки, столько же стекает по краям тарелки). Найдите массу жидкости, которая в данный момент находится на тарелке. Показания весов P . Массой тарелки пренебречь. Внутреннее сечение трубки S , скорость жидкости на выходе из трубки u , плотность жидкости ρ , ускорение свободного падения g .

5. Две параллельные проводящие шины замыкаются двумя проводящими перемишками массами m_1 и m_2 и сопротивлениями R_1 и R_2 , расстояние между которыми пренебрежимо мало. Перпендикулярно плоскости приложено магнитное поле с индукцией B . Правой перемишке сообщили скорость v . Найдите расстояние между перемишками через большой промежуток времени. Расстояние между шинами L . Трения нет.

6. **Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). При скатывании с наклонной горки трех одинаковых бутылок с различным содержимым (рис. 27) бутылка с



Рис. 27

водой обгоняет бутылку с водой и кусками поролона, а та, в свою очередь, обгоняет бутылку со льдом. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили В.Боровков, Е.Жданов, С.Лежнин, М.Махмудиан, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №7)

1. Квадрат со стороной 4 клетки.

Квадрат 4×4 можно разбить на 4 прямоугольника 1×3 и квадрат 2×2 (периметр каждого равен 8, рис. 1,а), либо на 2 прямоугольника 2×3 и один

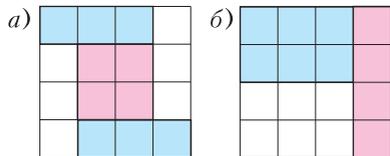


Рис. 1

прямоугольник 1×4 (периметр каждого равен 10, рис. 1,б). Меньший квадрат разбить в соответствии с условием невозможно. Действительно, периметр прямоугольников разбиения должен быть четным числом, которое не меньше 4. Но клетчатый прямоугольник периметра 4 – это квадрат со стороной 1, а клетчатый прямоугольник периметра 6 – это прямоугольник 1×2 , поэтому требуемое разбиение квадратов со стороной 1 или 2 невозможно. Существует ровно два вида клетчатых прямоугольников периметра 8, и они указаны выше. Но квадрат со стороной 3 на них разбить нельзя, так как его площадь равна 9, а сумма площадей прямоугольника 1×3 и квадрата 2×2 равна 7. А из прямоугольников периметра 10 в квадрате со стороной 3 помещается только один прямоугольник 2×3 .

2. Приведа обе части равенства к общему знаменателю, получим

$$\frac{ad - bc}{bd} = \frac{bc - ad}{cd}.$$

Так как числители дробей противоположны, то равенство возможно только в случае, когда $ad = bc$. Значит, $abcd = (ad)^2 = (bc)^2$, что и требовалось.

3. 2^{19} .

Из полосок каждого набора можно сложить «лесенку» высоты 10, а из двух таких «лесенок» – прямоугольник размером 10×11 . Следовательно, при сложении указанного квадрата не используется ровно 10 клеток. При этом невозможно использовать обе самые длинные полоски, так как они пересекутся. Получается, что неиспользованные клетки – это одна из полосок длины 10. Пусть мы не использовали синюю полоску длины 10 (этот выбор определяется двумя способами). Тогда красная полоска длины 10 должна покрывать или самую верхнюю строку квадрата, или самую нижнюю (иначе не удастся разместить синюю полоску длины 9). Это два варианта. Для синей полоски длины 9 также есть два варианта размещения (из-за красной полоски длины 9). Продолжая эти рассуждения, получим, что для

каждой из используемых 19 полосок, кроме последней, есть два варианта, а для последней – один. Следовательно, всего вариантов 2^{19} .

4. 45° .

Точку линии сгиба, лежащую на стороне AD , обозначим через K , тогда из условия следует, что $AK = MK$. Проведа отрезок AM , получим $\angle MAK =$

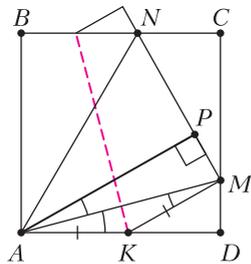


Рис. 2

$= \angle AMK$ (рис. 2). Опустим перпендикуляр AP на прямую MN . Так как $\angle KMN = \angle KAB = 90^\circ$, то $AP \parallel KM$, поэтому $\angle PAM = \angle AMK$. Таким образом, $\angle PAM = \angle DAM$, откуда следует равенство прямоугольных треугольников PAM и DAM (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AP = AD = AB$. Тогда, проведя отрезок AN , получим равенство прямоугольных треугольников ABN и APN (по гипотенузе и катету), откуда следует, что $\angle PAN = \angle BAN$. Таким образом, $\angle MAN = 0,5\angle BAD = 45^\circ$. Из доказанного также следует, что точка A является центром вневписанной окружности треугольника MCN , а полупериметр этого треугольника равен стороне квадрата.

LXIII Международная математическая олимпиада

Публикуем решения наших участников олимпиады.

1 (Р. Кузнецов). $n \leq k \leq 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Покажем, что при $k < n$ и $k > 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ утверждение задачи неверно.

1) При $k < n$. Пусть монеты изначально стоят так:

$$\underbrace{A \dots A}_k \underbrace{B \dots B}_n \underbrace{A \dots A}_{n-k}.$$

Тогда операции не меняют расстановку. Значит, и требуемую мы никогда не получим.

2) При $k > 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ изначально поставим монеты так:

$$\underbrace{A \dots A}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underbrace{A \dots A}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underbrace{B \dots B}_{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underbrace{A \dots A}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underbrace{B \dots B}_{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

После каждой операции последняя цепь становится первой, а остальные сдвигаются по циклу, так как длины всех цепей не меньше $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (каждый раз k -я монета будет находиться в последней цепи). Итого, каждый раз мы будем проделывать такую операцию, и количество цепей не уменьшится.

Теперь покажем, что при $n \leq k \leq 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ с какого-то момента останется всего 2 цепи. Докажем от противного.

Заметим, что количество цепей не увеличивается, значит, оно будет фиксировано с какого-то момента. Пусть это количество равно m , а k -я монета находится в i -й цепи.

1°. $i = 1$. Тогда k -я монета находится в первой цепи. Значит, так как $n \leq k$, в первой цепи не меньше n монет. Получается, что всего есть 2 цепи. Противоречие, ведь мы решаем от противного.

2°. $1 < i < m$. После перестановки i -й цепи в начало объединятся цепи с номерами $i - 1$ и $i + 1$. Значит, количество цепей уменьшится. Противоречие.

3°. $i = m$. Так как мы решаем от противного, первые два случая невозможны, значит, каждая последующая операция будет проходить с последней цепью. Если $m \neq 2$, то последняя и первая цепи будут состоять из одинаковых монет, следовательно, после операции они склеятся в одну цепь, т.е. количество цепей уменьшится, что невозможно.

Итого, $m : 2$, $2 \leq m \Rightarrow 4 \leq m$. Значит, найдется цепь длины не более $\left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ монет. В какой-то момент эта цепь станет последней, потому что номер цепи с каждой операцией увеличивается. Но тогда k -я монета не будет находиться в последнем блоке, так как $k \leq n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, а последняя цепь будет иметь длину не более $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ по нашему выбору. Противоречие.

2 (Т.Коротченко). $f(x) = \frac{1}{x}$.

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет условию. Действительно, $xf(y) + yf(x) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, причем равенство достигается только при $y = x$.

Пусть теперь f — функция, удовлетворяющая условию. Если положительному числу a соответствует единственное число b такое, что

$af(b) + bf(a) \leq 2$, будем писать $a \mapsto b$. Из симметричности выражения $af(b) + bf(a)$ относительно a и b следует, что если $a \mapsto b$, то $b \mapsto a$. Таким образом, некоторые числа могут соответствовать сами себе, а остальные числа разбиваются на пары соответствующих.

Рассмотрим множество $A = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) \leq \frac{1}{x} \right\}$ и дополнение множества A — множество $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) > \frac{1}{x} \right\}$. Для $a \in A$ выполнено $a \mapsto a$.

Действительно, $af(a) + af(a) \leq 2a \cdot \frac{1}{a} = 2$. Значит, если $b \in B$ и $b \mapsto c$, то c тоже принадлежит B . Но тогда $2 \geq bf(c) + cf(b) > b \cdot \frac{1}{c} + c \cdot \frac{1}{b} \geq 2$ — противоречие. Значит, B — пустое множество, поэтому для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$ имеем $f(x) \leq \frac{1}{x}$ и $xf(y) + yf(x) > 2$ при $x \neq y$.

Предположим, наша функция отлична от функции из ответа, тогда найдется $t \in \mathbb{R}^+$ такое, что $f(t) < \frac{1}{t}$. Зафиксируем это t и положим $s = tf(t) < 1$. Для положительного ε имеем $2 < tf(t + \varepsilon) + (t + \varepsilon)f(t) \leq t \cdot \frac{1}{t + \varepsilon} + s + \varepsilon f(t) \leq 1 + s + \varepsilon f(t)$. Видим, что при малом ε , таком что $\varepsilon f(t) < 1 - s$ неравенство $2 < 1 + s + \varepsilon f(t)$ нарушается. Получаем противоречие, завершающее решение.

3 (М.Туревский). Будем доказывать более сильное утверждение про представление в виде $x^2 + x + k$ для целых неотрицательных x . Будем вести индукцию по размеру множества S .

База: $|S| \leq 3$, тогда с точностью до повторов и отражений есть всего один способ расставить элементы S в цикл, он может подходить или не подходить.

Переход: $(|S| - 1) \rightarrow |S|$.

Рассмотрим некоторый цикл, удовлетворяющий условию, и докажем его единственность.

Пусть p — максимальное число в множестве S , и пусть соседи p в каком-то подходящем нам цикле — это q и r . Тогда $pq = x^2 + x + k$ и $pr = y^2 + y + k$. Причем так как $q < p$ и $r < p$, то $x^2 + x + k = pq < p^2$ и $y^2 + y + k = pr < p^2$, тогда $x < p$ и $y < p$. Если $x^2 + x + k : p$ и $y^2 + y + k : p$, $0 \leq x < p$, $0 \leq y < p$, то $(x - y)(x + y + 1) = x^2 + x + k - y^2 - y - k : p$, тогда либо $x = y$, либо $x + y + 1 = p$. Значит, для p у нас всего не более двух значений $x < p$ таких, что $x^2 + x + k : p$, причем если есть два таких значения, то их сумма

равна $p-1$. Получается, что у нас для любого цикла $x+y=p-1$, $pq=x^2+x+k$, $pr=y^2+y+k$, тем самым, соседи у числа p в любом цикле одни и те же.

Теперь посчитаем qr :

$$\begin{aligned} qr &= \frac{q(y^2+y+k)}{p} = \frac{q((p-x-1)^2+(p-x-1)+k)}{p} = \\ &= \frac{q(x^2+x+k-p(2x+1)+p^2)}{p} = \\ &= q(q-(2x+1)+p) = q^2-(2x+1)q+pq = \\ &= q^2-(2x+1)q+x^2+x+k = (q-x)(q-x-1)+k. \end{aligned}$$

Видим, что qr тоже имеет вид t^2+t+k , правда, возможно, для отрицательного t . Но в этом случае вместо t можно взять целое неотрицательное $-1-t$: $t^2+t+k = (-1-t)^2+(-1-t)+k$. Таким образом, $qr = t^2+t+k$ для некоторого целого неотрицательного t .

Значит, если выкинуть из цикла p и соединить соседей p , то получится цикл, удовлетворяющий условию задачи для множества $S \setminus \{p\}$. Но по предположению индукции полученный цикл единственный с точностью до поворотов и отражений. Как мы знаем, построить по этому циклу цикл для множества S можно также единственным способом – только поставив p между q и r . Тем самым, индукционный переход сделан.

4 (Д.Мустафин). Рассмотрим $\angle CPQ$. Его стороны – это стороны заданного пятиугольника, значит, весь пятиугольник лежит внутри этого угла. Точка T лежит внутри пятиугольника, а следовательно, и внутри угла. Точки C и Q лежат на сторонах угла; T лежит на прямой CQ , поэтому T лежит между C и Q . Аналогично, T лежит между S и D . Значит, расположение точек – как на рисунке 3.

Имеем $TC=TE$, $TB=TD$, $BC=DE$, отсюда $\triangle TCD = \triangle TED$. Значит, $\angle CTB = \angle ETD$, следо-

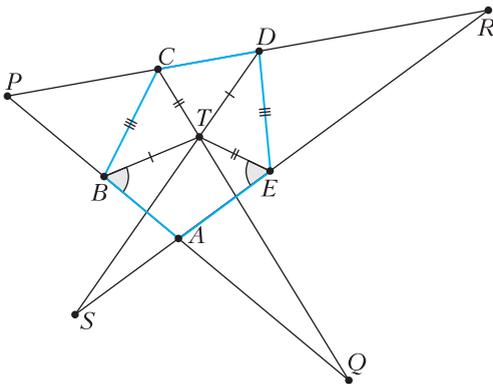


Рис. 3

вательно, $\angle BTQ = \angle ETS$. Также $\angle TBQ = \angle TES$ по условию. Отсюда $\triangle TES \sim \triangle TBQ$, откуда $\frac{TS}{TQ} = \frac{TE}{TB} = \frac{TC}{TD}$, $TS \cdot TD = TQ \cdot TC$, поэтому четырехугольник $CDQS$ – вписанный, и прямые CD и SQ антипараллельны относительно $\angle CTD$, т.е. прямые PR и SQ антипараллельны относительно $\angle CTD$. Антипараллельность двух прямых относительно угла означает, что при симметрии одной из них относительно биссектрисы этого угла (не важно, внутренней или внешней) получается прямая, параллельная второй. Тем самым, чтобы понять, что прямые PR и SQ антипараллельны относительно $\angle BAE$, достаточно понять, что биссектрисы углов $\angle CTD$ и $\angle BAE$ параллельны. Имеем $\angle CTB = \angle DTE$, значит, $\angle BTE$ получается из $\angle CTD$ поворотом сторон угла на один и тот же угол в разные стороны, поэтому биссектрисы этих углов параллельны. Далее, $\angle TBA = \angle TEA$, значит, $\angle BAE$ получается из $\angle BTE$ поворотом сторон угла на один и тот же угол в разные стороны, следовательно, биссектрисы этих углов параллельны. Получаем, что биссектрисы углов $\angle CTD$ и $\angle BAE$ параллельны, значит, прямые PR и SQ антипараллельны относительно $\angle BAE$. Отсюда $PRQS$ – вписанный, что и требовалось.

5 (И.Бахарев). (2, 2, 2), (3, 4, 3).

Разберем несколько случаев.

1) $b \geq 2p$.

Тогда в произведении $b! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b$ есть множители p , $2p$. Значит, $b!$ делится на p^2 . Тогда правая часть исходного равенства делится на p (так как оба слагаемых делятся на p), но не делится на p^2 (так как p не делится на p^2). Но в левой части неравенства стоит степень натурального числа a^p , которая не может делиться ровно на первую степень p . Получаем противоречие.

2) $b < p$.

Докажем, что $a > b$. Пусть это не так и $a \leq b$. Тогда a^p делится на a , $b!$ делится на a (так как в $b!$ есть множитель a). Чтобы получить противоречие, достаточно проверить, что p не делится на a . Тогда получится, что в исходном равенстве все слагаемые, кроме одного, делятся на a , что невозможно. Единственные делители p – это само p и 1. Но $a \neq 1$, так как левая часть не меньше 2, и $a \neq p$, так как $a \leq b < p$.

Таким образом, $a > b$, значит, $a \geq b+1$. Докажем, что левая часть больше правой. Из этого немедленно следует противоречие. Имеем $a^p \geq (b+1)^p = b^p + pb^{p-1} + \dots$, что больше чем $b! + p$, поскольку $b^p = \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_p \geq 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b = b!$, а также $pb^{p-1} \geq p$.

3) $p \leq b < 2p$.

В $b!$ есть множитель p , тогда $b!$ делится на p . Правая часть делится на p , так как оба слагаемых делятся на p . Тогда и левая часть тоже: a^p делится на p , значит, a делится на p .

Пусть $a = pa_1$. Снова разбираем случаи.

3.1) $a_1 \geq p$.

Докажем, что тогда левая часть больше правой. Действительно,

$$b! \leq (2p-1)! = \underbrace{(1 \cdot (2p-1)) \cdot (2 \cdot (2p-2)) \cdot \dots \cdot ((p-1) \cdot (p+1))}_{p-1 \text{ множителей}} \cdot p < p^{2p-1}.$$

Последнее неравенство верно, так как каждый из множителей вида $k(2p-k)$ не превышает p^2 , причем равенство достигается только при $k=p$. Итак, $a^p \geq (p^2)^p = p \cdot p^{2p-1} \geq p(p^{2p-2} + 1) = p^{2p-1} + p > b! + p$, что и хотели доказать.

3.2) $1 < a_1 < p$.

Так как a делится на a_1 , a^p делится на a_1 . Далее, $b!$ делится на a_1 , так как $b \geq p > a_1$, а p не делится на a_1 . Тогда в исходном равенстве все слагаемые, кроме одного, делятся на a_1 , что невозможно.

3.3) $a_1 = 1$.

Тогда $a = p$ и исходное равенство принимает следующий вид:

$$p^p - p = b!.$$

Давайте посчитаем степень вхождения 2 в левую и правую части и поймем, что если $p \geq 19$, то степень вхождения в правую часть больше. Будем пользоваться обозначением $|x|_2$ – степень вхождения 2 в разложение числа x .

Очевидно, что $|x|_2 \leq \log_2 x$. Пусть целое k таково, что $2^k \leq p < 2^{k+1}$. Из $b \geq p$ следует, что $|b!|_2 \geq |p!|_2$. По формуле степени вхождения простого p в факториал:

$$|p!|_2 = \left[\frac{p}{2} \right] + \left[\frac{p}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{p}{2^k} \right] \geq \left(\frac{p}{2} - 1 \right) + \left(\frac{p}{2^2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{p}{2^k} - 1 \right) = p - \frac{p}{2^k} - k > p - 2 - k \geq p - 2 - \log_2 p.$$

Теперь разберемся с левой частью. Третье равенство ниже верно по лемме об уточнении показателя (LTE-лемма, формулировка приведена в конце решения):

$$\begin{aligned} |p^p - p|_2 &= |p^{p-1} - 1|_2 = \left| \left(p^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right|_2 = \\ &= |p^2 - 1|_2 + \left| \frac{p-1}{2} \right|_2 = |p-1|_2 + |p+1|_2 + (|p-1|_2 - 1) = \\ &= \left| (p-1)^2 (p+1) \right|_2 - 1 < \log_2 p^3 - 1 = 3 \log_2 p - 1. \end{aligned}$$

Нам достаточно показать, что

$$3 \log_2 p - 1 \leq p - 2 - \log_2 p \Leftrightarrow 4 \log_2 p \leq p - 1.$$

Нетрудно проверить, что последнее неравенство верно при $p=19$. А при увеличении p на 1 правая часть увеличивается в 2 раза, а левая –

максимум в $\left(\frac{20}{19} \right)^4 < 2$ раза. Поэтому последнее неравенство верно при всех $p \geq 19$.

В итоге мы свели задачу к перебору p не больших 17:

$p=2$ подходит и дает решение (2, 2, 2),

$p=3$ подходит и дает решение (3, 4, 3),

$p=5$ не подходит, так как $5^5 - 5 = 3120$ не факториал,

$p=7$ не подходит, так как $7^7 - 7$ не делится на 5, а из неравенства $b \geq p$ следует, что $b!$ делится на 5, $p=11$ не подходит, так как $11^{11} - 11$ не делится на 9, $p=13$ не подходит, так как $13^{13} - 13$ не делится на 11,

наконец, $p=17$ не подходит, так как $17^{17} - 17$ не делится на 7.

LTE-лемма. Пусть a, b – не делящиеся на простое $q \neq 2$ числа, причем $a-b$ делится на q . Тогда

$$|a^n - b^n|_q = |a-b|_q + |n|_q.$$

Чтобы лемма работала для $q=2$, необходимо дополнительное условие: $a-b$ делится на 4.

6 (Г.Шарафетдинова). $2n^2 - 2n + 1$.

Докажем, что всегда найдется хотя бы $2n^2 - 2n + 1$ подъем. Каждому подъему, состоящему из хотя бы 2 клеток, сопоставим неупорядоченную пару из 2 его последних клеток. Докажем, что каждой паре соседних клеток сопоставлен хотя бы 1 подъем. Будем строить последовательность клеток, сопоставленную конкретной паре соседних, следующим образом. На последнее место поставим клетку из пары, в которой написано большее число, на предпоследнее – клетку с меньшим числом. Затем, пока это возможно, перед первой клеткой в последовательности поставим одну из соседних с ней клеток с меньшим числом. Так как с каждой такой операцией число в первой клетке последовательности уменьшается, а клеток всего конечное число, то в какой-то момент процесс закончится. Тогда первая клетка последовательности является долиной, так как число в этой клетке меньше, чем каждое из чисел в соседних. Значит, последовательность клеток является подъемом по определению. Следовательно, подъемов, состоящих из не менее чем 2 клеток, хотя бы $2n(n-1)$, поскольку в каждом ряду $n-1$ пара соседних, а всего рядов $2n$: n строк и n столбцов. Число подъемов, состо-

ящих из 1 клетки, совпадает с количеством долин. Но так как клетка, в которой написано число 1, является долиной, то существует хотя бы 1 подъем длины 1. Итого общее количество подъемов не меньше $2n^2 - 2n + 1$.

Введем систему координат на клетчатой плоскости так, чтобы сторона клетки была равна 1, а центры клеток имели целые координаты. Координатами клетки будем называть координаты ее центра. Рассмотрим часть доски, образованную клетками с неотрицательными координатами, и покрасим некоторые ее клетки в черный цвет следующим образом (рис.4). Клетку с координатами

	0	1	2	3	4	5	6	7	...	Ox
0									...	
1									...	
2									...	
3									...	
4									...	
5									...	
6									...	
7									...	
8									...	
9									...	
10									...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
Oy										

Рис. 4

тами $(x; y)$ красим в черный, если выполняется одно из условий:

- $y = 6k + 3$, где $k = 0, 1, 2, \dots$,
- $x \neq 0$ и $y = 6k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$,
- $x = 0$ и $3 \nmid y$,
- $2 \nmid x$ и $y = 6k \pm 1$, где $k = 0, 1, 2, \dots$,
- $2 \mid x$, $x \neq 0$ и $y = 6k \pm 2$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Построим граф на черных клетках, в которых ребрами соединены пары вершин, соответствующих клеткам, соседним по стороне. В таком графе нет циклов. Теперь рассмотрим квадрат, верхний левый угол которого имеет координаты $(0; 0)$, если $3 \nmid n$, и $(0; 2)$, если $3 \mid n$. В графе, построенном на черных вершинах, попавших в квадрат, по-прежнему нет циклов. Каждая черная клетка типа 4 или 5 попадает в квадрат вместе со своим единственным соседом: это очевидно для клеток не в крайних строках выделенного квадрата и верно для клеток в крайних строках, так как координата верхней строки не

имеет вид $3k + 1$, а координата нижней строки не имеет вид $3k + 2$. Подграф на попавших в квадрат клетках типов 1, 2 или 3 всегда связан, так как квадрат содержит столбец с координатой 0. При этом в квадрате нет двух белых клеток, соседних по стороне.

Расставим числа следующим образом. В белых клетках расставим числа от $n^2 - m + 1$ до n^2 , где m – число белых клеток, попавших в квадрат. Из черных клеток выберем произвольную клетку A , которой соответствует вершина a в дереве. Подвесим дерево за эту вершину, пронумеруем ярусы (на ярусе с номером i находятся вершины на расстоянии i от вершины a , в частности, сама вершина a находится на нулевом ярусе). Расставим оставшиеся числа так, чтобы в клетках, соответствующих вершинам с большим номером яруса, стояли большие числа, т.е. чем больше номер яруса, тем больше число.

Заметим, что в такой расстановке чисел долина ровно одна – клетка A . У любой другой черной клетки есть соседняя с меньшим номером яруса, а значит, и с меньшим числом, а у белых клеток по построению все соседи черные, т.е. число в белой клетке больше всех соседних чисел. Тогда и количество подъемов длины 1 равно 1. Докажем, что в каждой паре клеток заканчивается ровно один подъем. Действительно, в любой паре соседних клеток клетка с меньшим числом окрашена в черный цвет, поскольку нет двух соседних белых и в белой клетке число больше всех соседних. Также у любой черной клетки, кроме a , есть ровно 1 соседняя клетка с меньшим числом, и она черная. Значит, по черной клетке в последовательности подъема восстанавливаются все предыдущие клетки и их количество. Тогда по двум последним клеткам всегда однозначно восстанавливается весь подъем, т.е. количество подъемов длины хотя бы 2 равно $2n(n - 1)$, что и требовалось доказать.

Московская олимпиада школьников по физике 2022 года

7 класс

- А.** $m_{AO} = 110$ г, $m_{BO} = 330$ г.
- В.** $\rho_{cp} = 2,4$ г/см³, $\rho_{AO} = 6480$ кг/м³.
- А.** Уменьшится вдвое.
- В.** Увеличится в 1,2 раза.
- А.** $t_1 = 20$ °С; $t_2 = -20,4$ °С.

8 класс

- В.** $h = \frac{g_0}{kL} \left(\frac{d}{D} \right)^2 x = 32,3$ м.
- А.** $\rho = 1006$ кг/м³.
- В.** $\Delta t \approx 13,4$ °С.

4. Груз №4 ($m = 4,0$ кг), комплект пружин №1 ($k = 600$ Н/м, $L = 20$ см), комплект нитей №4 ($L_1 = 21$ см, $L_2 = 50$ см).

9 класс

1. А. $N_A = \frac{3}{7}n$ (при этом солнечная и коронная шестерни вращаются в разные стороны).

В. $N_B = \frac{3n + 7N}{10}$.

2. $v_A \approx 30$ м/с, $a_A = 0$, $v_B \approx 27$ м/с, $a_B \approx 3,4$ м/с² (тангенс угла наклона касательной к данному в условии графику пропорционален ускорению аппарата; одно деление крупной сетки соответствует значению квадрата скорости, равному ≈ 400 м²/с²).

4. А. $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ (в системе зеркал может наблюдаться не более трех изображений данного предмета).

В. Рассеивающая линза создает уменьшенное изображение предмета вблизи фокальной плоскости. Грани призмы, составляющие тупой угол, играют роль зеркал, поворачивая изображение на угол $\frac{\pi}{2}$, так что человек видит это изображение на листе бумаги. При этом угол $\beta = \frac{3\pi}{8}$.

5. А. $\mu = \frac{F - mg - 2ma}{F + mg} = \frac{1}{2}$.

В. Сила \vec{F}_1 сонаправлена силе \vec{F} и равна

$$F_1 = \frac{mg - 4ma}{3} = 6 \text{ Н.}$$

10 класс

1. А. $L_A = \frac{L_0}{2}$.

В. $h_B = \frac{L_0}{8}$; цепочка примет форму параболы.

2. При сгорании топлива массой $dm = \mu dS$ автомобиль проходит расстояние dS . Если это происходит за время dt , то тепловая энергия, выделяющаяся при сгорании массы dm , равна $dQ = q\mu v dt$, где q – удельная теплота сгорания топлива. Абсолютная величина работы силы сопротивления воздуха за время dt равна $\delta A = kv^2 v dt$. Таким образом, на поддержание скорости автомобиля постоянной при его движении по горизонтальной дороге тратится часть энергии сгоревшего топлива, равная

$$\eta = \frac{\delta A}{dQ} = \frac{k v^2}{q \mu}.$$

Отсюда следует, что линии постоянного КПД на плоскости $(\mu; v^2)$ – это прямые, проходящие че-

рез начало отсчета, при этом величина КПД для любой такой прямой пропорциональна тангенсу угла между этой прямой и осью ординат. Максимальному КПД соответствует касательная к графику, проходящая через начало координат и составляющая наибольший возможный угол с осью ординат.

Построение начала координат может быть таким, как показано на рисунке 5. Из точки А

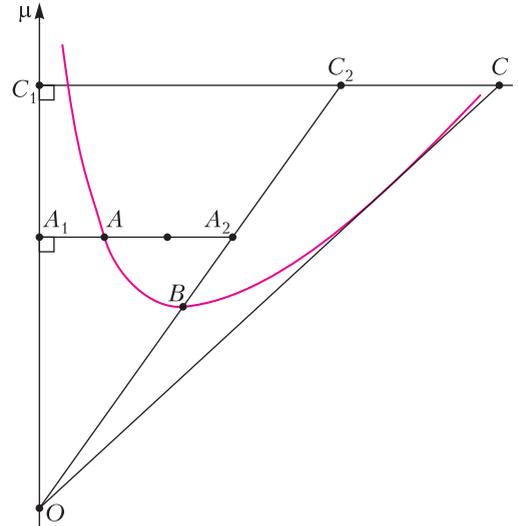


Рис. 5

опускается перпендикуляр AA_1 на ось ординат. Далее на этой прямой откладывается отрезок $AA_2 = 2AA_1$ в другую сторону от точки А. Прямая, проходящая через точки A_2 и B , пересекает ось ординат в начале координат. Действительно, тангенс угла A_1OA оказывается в три раза меньше тангенса угла A_1OA_2 .

После построения начала координат строится касательная. Далее выясняется, как связаны тангенсы углов, которые составляют линия с известным КПД и касательная с осью ординат. Можно сделать так: найдем точки пересечения касательной и линии, проходящей через начало координат и точку B , с некоторой горизонтальной прямой (точки C и C_2 на рисунке). Отношение длин $\frac{CC_1}{C_2C_1}$

равно отношению искомого максимального КПД к КПД, соответствующему точке B . Построение, сделанное таким образом одним из авторов задачи дало результат $\eta_{\max} \approx 25,5\%$.

3. Рассмотрим касающуюся дороги параболическую траекторию, вдоль которой распространяется луч. Введем систему координат, начало которой совпадает с точкой, в которой луч касается

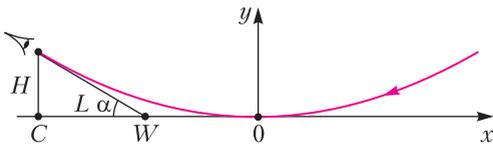


Рис. 6

дороги (рис. 6). Уравнение траектории луча в этой системе координат имеет вид $y = kx^2$, где k – неизвестный коэффициент. Человеку, располагающемуся в точке C , будет казаться, что лужа на асфальте находится в точке W (а не в точке O), поскольку мозг человека «привык» к прямолинейному ходу лучей света. Если H – высота, на которой располагаются глаза человека, то искомое расстояние равно $L = H \operatorname{ctg} \alpha$, где α – угол между касательной, проведенной к траектории луча на высоте глаз, и осью x . Из закона преломления следует, что показатель преломления $n(y)$ в точке с координатой y удовлетворяет соотношению $n(y) \cos \alpha(y) = n(0)$, где $\alpha(y)$ – угол наклона касательной, проведенной к траектории луча в точке с координатой y . Используя основное тригонометрическое тождество можно исключить угол. Тогда имеем

$$L = H \frac{n(0)}{\sqrt{n^2(H) - n^2(0)}}.$$

Эту формулу можно заменить приближенной, если вспомнить, что показатели преломления $n(H)$ и $n(0)$ крайне незначительно отличаются от единицы. Применив к разности квадратов под корнем в знаменателе формулу сокращенного умножения и заменив сумму показателей преломления на 2, получим

$$L = \frac{H}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n(H) - n(0)}}.$$

Давление воздуха у поверхности дороги и на высоте H от нее одинаковое, поэтому концентрация воздуха, а следовательно, и отклонение показателя преломления от единицы изменяются обратно пропорционально температуре. Справедливо соотношение

$$\frac{n(H) - n(0)}{\Delta n} = \frac{\frac{1}{T(H)} - \frac{1}{T(0)}}{\frac{1}{T_0}},$$

или

$$n(H) - n(0) = \Delta n \cdot \left(\frac{T_0}{T(H)} - \frac{T_0}{T(0)} \right),$$

где $T_0 = 293$ К, $T(0) = 323$ К, а температура воздуха на высоте глаз человека легко находится из условия линейности распределения температуры с высотой: $T(H) = T_0 + 30 \cdot \frac{0,3}{2}$ К = 297,5 К. Делая аккуратный расчет, находим $L \approx 216$ м.

4. А. Воздух, окружающий цилиндр, нагреется (мы имеем дело с тепловым двигателем наоборот, или с механическим нагревателем).

В. На pV -диаграмме график цикла близок к параллелограмму с основанием $|\Delta p_V|$ и высотой $|\Delta V|$. Поэтому $A = |\Delta p_V \Delta V|$, $Q = \nu c_V \Delta T = \frac{5}{2} V |\Delta p_V|$ и

$$\frac{A}{Q} = \frac{2 \Delta V}{5 V} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

11 класс, тур 1

1. А. $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}R/R_L} = \frac{R_L}{R} = 0,1.$

В. $Q_1 = A_{\mathcal{E}} - W_C + W_L = C\mathcal{E}^2 - \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} \approx 5 \cdot 10^{-2}$ Дж,

$Q_2 = W_L \frac{R}{R + R_L} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} \frac{R}{R + R_L} \approx 4,5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

2. $l = 27,5$ см.

3. А. $T_2 = T_1 n^{1/3}$, $T_3 = T_1 n^2$.

В. $\eta = 1 - \frac{5(n^2 - 1)}{6(n^2 - n^{1/3})}$.

4. А. 1) $x_{\max} = 0$; 2) $x_{\max} = A$.

В. 1) $\varphi = \pi$, $\varphi = 0$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (можно провести аналогию с электрическими колебаниями в цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора, катушки индуктивности и резистора, которые подключены к источнику периодического напряжения).

5. А. $E_x = \frac{aU_0 x}{r_0^2}$, $E_y = \frac{aU_0 y}{r_0^2}$, $E_z = -\frac{bU_0 z}{r_0^2}$, $\frac{b}{a} = 2$.

В. $\Omega_z = \sqrt{\frac{qbU_0}{m r_0^2}}$, $\Omega_0 = \frac{qB}{m}$.

С. $\omega^{\pm} = \frac{\Omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2 - 2\Omega_z^2}}{2}$ (можно, например, записать уравнение движения для двух точек траектории частиц, лежащих на расстояниях $R - r$ и $R + r$ от начала координат; в этих точках ско-

Вариант 2

8 класс

1. $\alpha = \frac{1}{3}$.

3. $\rho = \frac{3}{5}\rho_0$.

4. $\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{2F_1}{F_2}}$.

9 класс

1. $\rho = \frac{5}{12}\rho_0$.

2. Пусть скорость ветра направлена под углами α и β к скоростям паровозов. Тогда $|\alpha - \beta| \in [15^\circ; 105^\circ]$.

3. В вольфрамовой проволоке выделяется примерно 99,2% полного джоулева тепла (доля тепла, выделяемого в слабопроводящем порошке, в 10^5 раз меньше, чем выделяемого в проволоке, и им можно пренебречь).

4. $\frac{T}{T_0} = \frac{1 - \gamma + \sqrt{1 + 6\gamma + \gamma^2}}{2}$, где $\gamma = \frac{8h}{gT_0^2}$.

10 класс

1. $T_{12} = 6\Delta T = 2022$ Н.

2. $v = \frac{Lu \sin \alpha + \frac{gT^2}{2}u \cos \alpha - gLT}{L - Tu \cos \alpha}$.

3. $u = \sqrt{\frac{2FL}{5M}}$.

4. $N = \frac{\rho g V}{T} \left(H + \frac{h}{2} \right) + \frac{\rho V^3}{2S^2 T^3}$.

11 класс

2. $u = \sqrt{2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + 3\rho_1} ga}$.

3. $N = \frac{(v^2 + u^2)^{3/2}}{u^2} F_0$.

4. $u = 2\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)(a+2b)}} \frac{q}{\sqrt{m}}$.

II (заключительный) этап

8 класс

1. $u = L \sqrt{\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}} = 2,5$ м/с.

2. $\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_1^2}{m_1^2 + m_1 m_2 - m_2^2}$.

3. $\Delta t = \frac{c\rho V \Delta T}{P} = 42$ с.

4. $m_{и} = \frac{-8F_1 + 2F_2}{4g} + \frac{5M}{4} = 5$ г, $m_{и} = \frac{8F_1 - 2F_2}{4g} - \frac{M}{4} = 5$ г (запишите равенство моментов сил упругости пружин и сил тяжести поршня и цилиндра относительно центра тяжести жидкости).

9 класс

1. $A' = \frac{4}{3}A$.

4. $T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.

5. $\mu_{\min} = \mu \frac{u}{\sqrt{\mu g L}}$ при $\frac{u}{\sqrt{\mu g L}} < 1$, в противном случае $\mu_{\min} = \mu$.

10 класс

1. $A' = 8A$.

3. $M = \frac{3}{4}\rho h S$.

4. $F_P = 140$ Н.

11 класс

1. $A' = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}A$.

2. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{3}$.

3. $\omega = \sqrt{\frac{4kQ^2}{mR^3}}$.

4. $m = \frac{P - \rho S u \sqrt{u^2 + 2gh}}{g}$.

5. $l = \frac{(R_1 + R_2)m_1 m_2}{(BL)^2(m_1 + m_2)} v$.

6. При скатывании с наклонной горки бутылки вместе с их содержимым приобретают кинетическую энергию K за счет уменьшения потенциальной $U = mgh$, где m – масса содержимого бутылки (массой самой бутылки по сравнению с массой содержимого можно пренебречь), h – высота горки:

$$K = U = mgh.$$

Приобретаемая кинетическая энергия состоит из энергии поступательного движения $mv^2/2$ (v – поступательная скорость у дна горки) и энергии вращательного движения:

$$K = mgh = \frac{mv^2}{2} + K_{вр}.$$

Поскольку проскальзывание отсутствует, скорость вращения стенок бутылки равна поступательной. Скорость частичек содержимого пропорциональна этой скорости и, кроме того, зависит от расстояния до стенок и вида содержимого. Поэтому можно считать энергию вращения пропорциональной кинетической, а коэффициент пропорциональности α зависящим от содержимого:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \alpha \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\alpha}}.$$

Из полученного выражения видно, что конечная скорость, а с ней и время движения не зависят от общей массы содержимого и определяются коэффициентом α : чем он ниже, тем быстрее скатится бутылка. Сравним коэффициенты α для бутылок со льдом ($\alpha_{\text{л}}$), водой ($\alpha_{\text{в}}$) и поролоном с водой ($\alpha_{\text{пв}}$). Начнем с $\alpha_{\text{л}}$ и $\alpha_{\text{в}}$. Лед внутри бутылки со льдом вращается с той же угловой скоростью, что и стенки бутылки, так как частички льда жестко скреплены между собой и со стенками. В случае же с водой вращающимся стенкам бутылки не удастся сразу вовлечь всю воду во вращательное движение, так как частички жидкости не скреплены жестко между собой в отличие от частичек твердого тела. Поэтому частички воды вращаются медленнее частичек льда, находящихся на том же расстоянии от стенок. Значит,

$$\alpha_{\text{в}} < \alpha_{\text{л}}.$$

Бутылка с водой и поролоном занимает в этом отношении промежуточное положение между бутылками со льдом и с водой. Действительно, часть воды вне поролона ведет себя подобно бутылке с водой, но часть воды, впитавшаяся в поролон и удерживаемая им, ведет себя подобно бутылке со льдом, так как сам поролон вращается подобно льду с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения стенок бутылки. Таким образом,

$$\alpha_{\text{в}} < \alpha_{\text{пв}} < \alpha_{\text{л}},$$

что и объясняет результаты наблюдения.

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

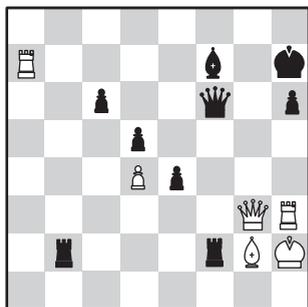
Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

Вам ПАТ!

Один из каверзных вопросов, которые задают тренеры начинающим ученикам: в каких случаях шахматная партия заканчивается вничью? Юные шахматисты обычно помнят про пат, вечный шах или голых королей, но забывают, что на ничью можно просто согласиться. При этом пат – частый гость на соревнованиях малышей: он возникает, когда один из соперников слишком увлекается, пытаясь поставить мат. Взрослые шахматисты чаще соглашаются на ничью. В соревнованиях квалифицированных игроков пат встречается крайне редко, однако его появление – это практически всегда произведение искусства. Патовая ловушка иногда может быть не замечена даже гроссмейстером, и поэтому мы решили сегодняшнюю заметку посвятить пату.

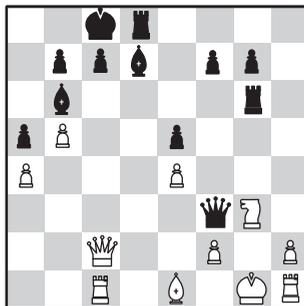
Ф.Юджин – Ж.-Л.Шабано, 2002



В этой практически безнадежной позиции белые сыграли **1. ♖h1**, поставив коварную ловушку. Французский гроссмейстер беззаботно ответил **1... ♗g2??** (к победе вел практически любой другой ход, например **1... ♗f1+2. ♖h2 ♗d4**, и белые вынуждены менять ферзей), и после **2. ♗f7! ♗f7 3. ♗h6! ♗h6 4. ♗g6!** на доске возникает **пат** вне

зависимости от того, какой фигурой черные съедят ферзя.

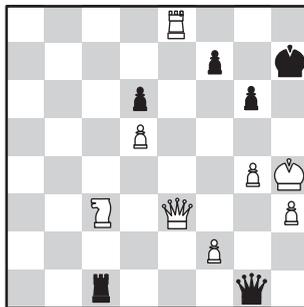
А.Троицкий – Фогт, 1896



Игравший белыми легендарный шахматный композитор Алексей Троицкий смог создать шедевр, достойный концовки этюда, прямо за доской. **1. ♗d1! ♗h3?** Казалось бы, защиты от мата нет, но **2. ♗d8! ♗d8 3. ♗d1!! ♗d1**, пат!

М.Найдорф – Куртич, 1986

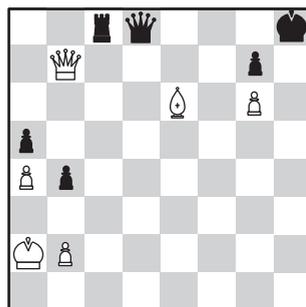
Попался в патовую ловушку и известный аргентинский гроссмейстер Мигель Найдорф, правда, в почтенном возрасте 74 лет.



1... ♗c3!? **2. ♗c3??** К победе вело **♗d4!**, и после нескольких шахов черные должны сдаться ввиду мата на h8. **2... ♗f2+ 3. ♗g5 f6+! 4. ♗f6 ♗h4+!! 5. ♗h4 g5+**, и **пат** вне зависимости от следующего хода.

Миниа – Кавич, 1989

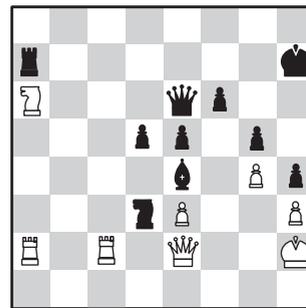
Позиция выглядит безнадежно для черных: единственная защита от шаха с h1, **1... ♗c1**, не



годится из-за **2. ♗f3** с угрозой мата с h5, однако черные находят красивое решение: **1... ♗c6! 2. ♗c6 ♗d5!! 3. ♗d5 b3+**, пат.

Пат может случиться не только вследствие недосмотра, но и при сильнейшей игре обоих соперников, о чем свидетельствует следующая гроссмейстерская партия.

Д.Божков – Ю.Борисек, 2005



1. ♗c5! ♗a2! Черные должны жертвовать ферзя, иначе теряется фигура на d3. **2. ♗e6 ♗a1!** (угроза мата) **3. ♗g5!** Эндшпиль без двух пешек после **3. ♗g2 ♗g2** безнадежен для белых. **3... fg 4. ♗c7+ ♗g8 5. ♗c8+ ♗f7 6. ♗f8+! ♗f8 (6... ♗e7 7. ♗f1, и побеждают уже белые) 7. ♗f1+! ♗f1**, пат.

А. Русанов

Индекс 90964

Продукты с физикой

Живые организмы или кристаллы – кто совершеннее?

ГАРМОНИЯ И СИММЕТРИЯ

ISSN 0130-2221 22008



(Подробнее – на с. 29 внутри журнала)