

ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

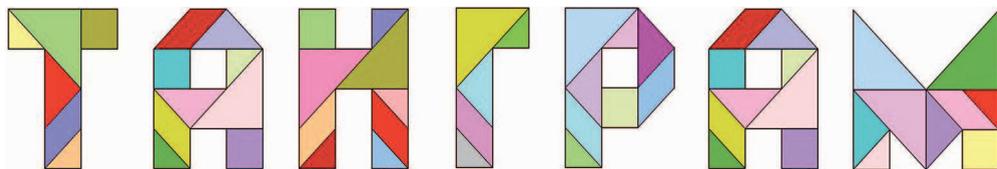
2022 · № 2

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

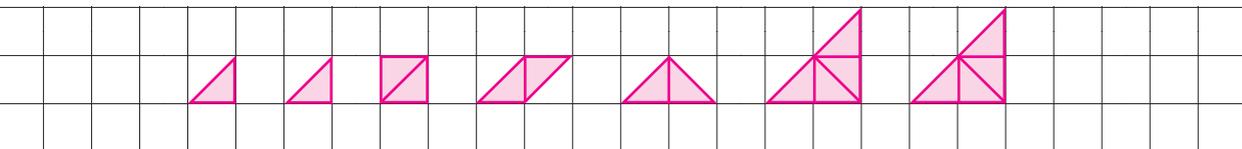


# Неисчерпаемый



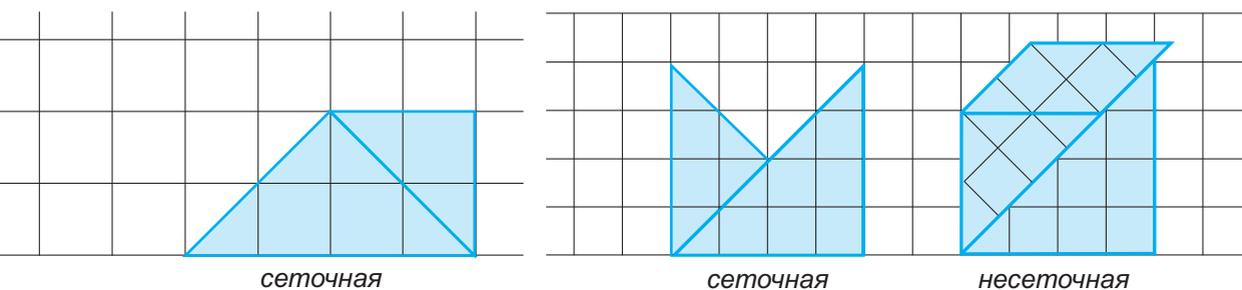
В придумывании заданий для танграма есть два направления: сеточные и произвольные фигуры. Сеточные фигуры можно нарисовать на клетчатой бумаге с вершинами в узлах сетки, они обычно симметричные. Произвольные фигуры часто похожи на что-то реальное — например, напоминают животное или растение.

Назовем элементы танграма танами. Особенность сеточных фигур, составленных из танов, в том, что они разбиваются на равнобедренные прямоугольные треугольники.



Как известно, сторона и диагональ квадрата несоизмеримы. Это означает, что не существует такого отрезка, который укладывается целое число раз и по стороне, и по диагонали квадрата.

Из этого факта следует, что, составляя сеточную фигуру, прикладывать таны можно только определенными сторонами. Например, если мы хотим приложить средний треугольник к большому, то гипотенузу среднего треугольника надо прикладывать только к катету большого либо катет среднего треугольника к гипотенузе большого, иначе мы получим «несеточную» фигуру.



Это наблюдение помогает собирать сеточные фигуры – мы сразу отсекаем варианты прикладывания танов несоизмеримыми сторонами.

(Продолжение см. на с. 27)

## В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ  
Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
А.А.Гайфуллин

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,  
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА  
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Аэродинамическая задача Ньютона и человек-невидимка (окончание). *А.Плахов, В.Протасов*  
12 Тепловые эффекты – квантовая природа. *С.Варламов*

### ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 22 Нобелиада-21. *Л.Белопухов*

### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 28 Задачи M2686–M2689, Ф2693–Ф2696  
30 Решения задач M2674–M2677, Ф2680–Ф2684

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физические принципы

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 39 Задачи  
40 Три истории про воду. *С.Дворянинов*

### КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 42 Задачи 21–24

### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 43 Коронавирус на звездолете. *А.Стасенко*

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 46 До финала. *А.Блинков*

### ОЛИМПИАДЫ

- 48 Региональный этап LVI Всероссийской олимпиады школьников по физике

### ИНФОРМАЦИЯ

- 53 Заочная физико-техническая школа при МФТИ  
54 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (11,64)

### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье С.Дворянинова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Аэродинамическая задача Ньютона и человек-невидимка

А. ПЛАХОВ, В. ПРОТАСОВ

## 7. Оптические свойства параболы.

### Поверхности малого сопротивления

Прием с рифлением очень хорош, но его возможности ограничены. Можно доказать, что он уменьшит сопротивление максимум вдвое. А вот следующий прием уменьшит его почти до нуля. Для этого мы не будем наносить бороздки на поверхность Ньютона, а придумаем новую поверхность, основанную на оптических свойствах параболы.

Что такое парабола? Это график квадратичной функции. Подходящим преобразованием подобия он всегда приводится к виду  $y = x^2$ . Поэтому все параболы подобны между собой. Есть у параболы и геометрическое определение:

*Парабола – геометрическое место точек, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).*

У параболы  $y = x^2$  фокус расположен в точке  $F = \left(0; \frac{1}{4}\right)$ , а директриса – это прямая  $y = -\frac{1}{4}$ . В самом деле, расстояние от

любой точки  $M(x; y)$  до фокуса  $F$  равно

$MF = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}$ , а расстояние до директрисы равно  $MH = y + \frac{1}{4}$ . Возводя в

квадрат и проводя упрощения, получим, что равенство  $MF = MH$  выполнено, когда  $y = x^2$ , т.е. когда точка лежит на параболе (рис. 13).

У параболы есть замечательное *оптическое свойство*: произвольный луч, выходящий из фокуса, отразившись от параболы,

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

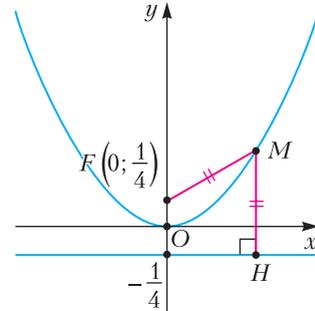


Рис. 13

идет параллельно оси. Докажем это. Для любой точки  $M$  параболы проведем прямую  $l$ , которая образует равные углы с отрезком  $FM$  и вертикальным лучом (рис. 14). По равенству вертикальных углов, прямая  $l$  является биссектрисой угла  $FMH$ . При этом, как мы знаем,  $FM = MH$ , поэтому  $l$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $FH$ . Значит, для любой точки  $K$  прямой  $l$  имеем  $KF = KH$ . Но если точка  $K$  отлична от  $M$ , то расстояние от нее до директрисы меньше, чем наклонная  $KH$ . Таким образом, расстояние от  $K$  до директрисы меньше, чем до фокуса. Это означает, что вся прямая  $l$ , за исключением точки  $M$ , лежит вне параболы. Следовательно,  $l$  – это касательная к параболе. Поэтому луч  $FM$ , отразившись от  $l$  (а значит, и от параболы), пойдет вертикально вверх.

Итак, пучок света, выходящий из фокуса параболы, отразившись от ее поверхно-

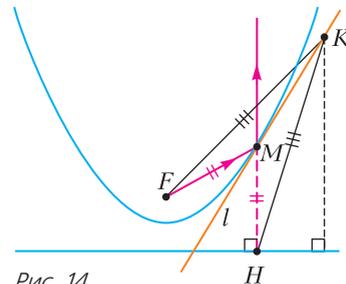


Рис. 14

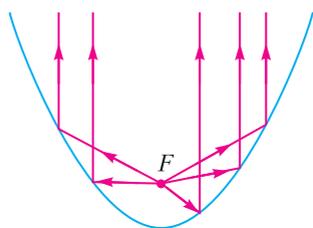


Рис. 15

сти, становится пучком параллельных лучей (рис. 15). Оптическое свойство параболы было открыто еще в Древней Греции одним из величайших математиков античности Аполлонием Пергским (262 до н.э. — 190 до н.э.). Ныне оно используется повсеместно. Параболическое зеркало в карманном фонарике создает узкий направленный световой луч. Для этого лампочку помещают в фокус. Принцип работы параболической антенны или параболического рефлектора в телескопе также основан на свойстве параболы превращать пучок параллельных лучей (а значит, и лучей, идущих от далекого источника) в пучок, сходящийся в одной точке.

Из параболы можно изготовить поверхность вращения со сколь угодно малым сопротивлением. Для этого возьмем дугу «перевернутой» параболы  $y = -x^2$  от ее вершины до точки, находящейся на уровне фокуса (рис. 16). Теперь сожмем эту дугу относительно точки  $F$  во много раз (т.е. сделаем гомотетию относительно  $F$ ) и отразим ее относительно точки  $F$ . Получили фигуру из двух дуг парабол — большой и маленькой. Они гомотетичны относительно их общего фокуса  $F$ .

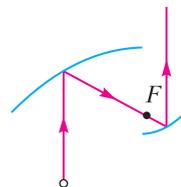


Рис. 16

Частица, летящая вверх, ударяется о большую дугу, далее, согласно оптическому свойству параболы, отражается и летит через фокус и, по тому же оптическому свойству, отразившись от маленькой дуги, летит вертикально вверх. Итак, после двух отражений от дуг парабол частица будет лететь в том же направлении и с той же скоростью, как раньше. Поэтому она не окажет никакого воздействия на фигуру из двух дуг парабол. Теперь закру-



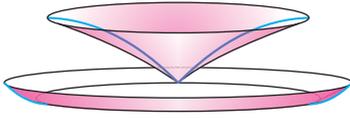


Рис. 17

тим эту фигуру относительно вертикальной прямой. Полученная поверхность (рис.17) состоит из двух частей. Верхняя часть, поверхность вращения дуги большой параболы, похожа на шляпку гриба. Нижняя — тонкое кольцо, полученное из маленькой дуги. Соединим шляпку с кольцом тонкими палочками. Все частицы, летящие вертикально вверх, отразятся от внутренней стороны шляпки, потом — от кольца, и продолжат движение вверх с той же скоростью. Поэтому их импульс не изменится, и суммарное воздействие со стороны этих частиц на поверхность будет равно нулю. Лишь частицы, столкнувшиеся напрямую с внешней стороной кольца или с соединительными палочками, окажут воздействие на поверхность. Но оно будет мало, поскольку и кольцо и палочки очень тонкие. Таким образом, построенная нами поверхность имеет очень малое сопротивление. Уменьшая размер маленькой дуги параболы, мы уменьшаем толщину кольца, а значит, можем сделать сопротивление сколь угодно малым!

Все сопротивление, оказываемое шляпкой, гасится тонким кольцом, и в результате сопротивление получается маленьким. Конечно же, кольцо надо сделать из сверхпрочного материала, поскольку на него приходится очень большое давление. Поверхность напоминает по форме летающую тарелку. Видимо, это просто совпадение. Хотя как знать...

### Упражнения

- Докажите, что из любой точки директрисы парабола видна под прямым углом.
- На плоскости дана прямая и точка  $A$ , не лежащая на ней. На прямой берется произвольная точка  $N$  и через нее проводится перпендикуляр к отрезку  $AN$ . Докажите, что все такие перпендикуляры для всевозможных точек  $N$  касаются одной параболы. Где расположены ее фокус и директриса?
- К параболе проведены три касательные. Докажите, что описанная окружность треуголь-

ника, образованного этими касательными, проходит через фокус, а точка пересечения высот этого треугольника лежит на директрисе.

### 8. Нулевое сопротивление возможно!

Итак, существуют поверхности сколь угодно малого сопротивления. Попробуем сделать следующий шаг и найти поверхность с сопротивлением, равным нулю. Задача кажется совершенно невыполнимой (если не сказать — сумасшедшей). Но и она разрешима!

Нам нужно придумать абсолютно обтекаемое тело, т.е. такое, которое при движении в среде испытывает нулевое сопротивление. Будучи один раз запущенным, такое тело будет двигаться бесконечно долгое время, не уменьшая скорости. Это, конечно, не будет вечным двигателем, поскольку поверхность не совершает полезной работы, но будет вечным движением — *perpetuum mobile*.

Построение абсолютно обтекаемой формы начнем с плоскости. Начертим два одинаковых равносторонних треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$  таким образом, чтобы вершина  $B$  находилась в середине отрезка  $A'C'$ , а вершина  $B'$  — в середине отрезка  $AC$  (рис. 18). Обозначим через  $M$  точку пересечения  $AB$  и  $A'B'$ , а через  $N$  — точку пересечения  $BC$  и  $B'C'$ . Рассмотрим

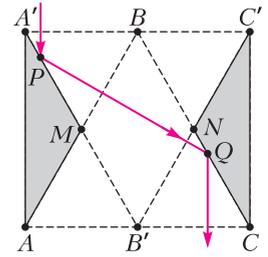


Рис. 18

конструкцию, состоящую из треугольников  $AA'M$  и  $CC'N$ . Пусть частица движется в направлении, параллельном  $AA'$ , и сталкивается с нашей конструкцией в точке  $P$ , а затем претерпевает отражения (по закону бильярда).

Предоставляем читателю самостоятельно проверить, что частица отразится во второй раз от отрезка  $NC$  и в дальнейшем будет двигаться с той же скоростью, что и первоначально, причем длины отрезков  $A'P$  и  $NQ$  равны, где  $P$  и  $Q$  обозначают точки отражений. Это означает, что сумма импульсов, переданных частицей паре треугольников в результате двух отражений,

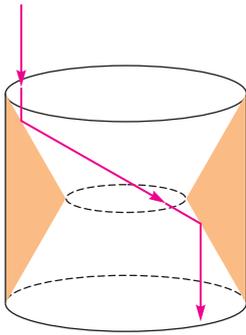


Рис. 19

равна нулю. Теперь рассмотрим фигуру вращения треугольников  $AA'M$  и  $CC'N$  вокруг оси  $BB'$ . Мы получим трехмерную поверхность в виде шайбы (рис. 19). Она обладает нулевым сопротивлением при движении в направлении  $A'A$ .

Можно изготовить поверхность нулевого сопротивления и другим способом. Рассмотрим призмы, в основании которых лежат треугольники  $AA'M$  и  $CC'N$ . Такая пара призм будет иметь нулевое сопротивление (рис. 20,а). Некоторое затруднение заключается в том, что эта конструкция не жесткая: поток частиц будет стремиться отодвинуть призмы друг от друга. Чтобы исключить такую возможность, соединим их двумя отрезками. (Отрезки имеют нулевую толщину, а значит, и нулевое сопротивление.) Но лучше сделаем по-

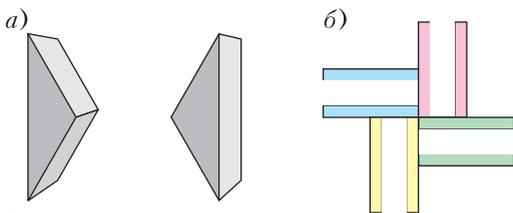


Рис. 20

другому. Склеим вместе 4 пары призм. Для того чтобы понять, как именно это сделать, рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную направлению потока. Проекция каждой призмы – прямоугольник. Проекция всех призм – 8 прямоугольников (рис. 20,б), все вместе они образуют жесткую конструкцию. Мы получили новый невидимый объект – многогранник, имеющий нулевое сопротивление. Подсчет числа граней, ребер и вершин

этого многогранника требует определенного пространственного воображения.

Читатель может попробовать найти другие многогранники нулевого сопротивления с числом граней (ребер, вершин) меньшим, чем у приведенного в нашем построении.

**Упражнение 7.** Треугольники  $AA'M$  и  $CC'N$  в описанном выше построении равнобедренные с углом  $30^\circ$  при основании. А можно ли найти пару равнобедренных треугольников, обладающую нулевым сопротивлением, с произвольным углом  $\alpha$  при основании ( $0 < \alpha < 45^\circ$ )? Почему угол должен быть меньше  $45^\circ$ ?

Процесс изготовления поверхности нулевого сопротивления можно представить себе следующим образом. В случае фигуры вращения (см. рис. 19) берем цилиндр, а затем вырезаем из его средней части и выкидываем два усеченных конуса. В случае двух призм (см. рис. 20,а) берем прямоугольный параллелепипед и из его середины вырезаем и выкидываем некоторую его часть (невыпуклый многогранник). Естественно стремиться к тому, чтобы относительный объем выкинутой части (т.е. отношение этого объема к объему исходного тела, цилиндра или параллелепипеда) был как можно меньше. Тогда в космическом корабле такой формы поместится больше груза. Какой из двух способов лучше? Сформулируем этот вопрос в виде упражнения.

**Упражнение 8.** Найдите значение относительного объема выкинутой части в случаях, приведенных выше (ответы, конечно, зависят от  $\alpha$ ).

Можно ли сделать так, чтобы относительный объем выкинутой части был сколь угодно мал? Оказывается, можно! Снова начнем с построений в плоскости. Рассмотрим объединение двух равнобедренных трапеций  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ , симметричных друг другу относительно вертикальной прямой (рис. 21). Обозначим  $r = |CC'|/|BB'|$  и  $\alpha = \angle ABC$  (следовательно,  $\alpha = \angle BAD = \angle A'B'C' = \angle B'A'D'$ ). Теперь выберем угол  $\alpha$ , равный  $\pi/m$ , где  $m$  – целое число, большее четырех. Проведем вспомогательное построение: отразим тра-

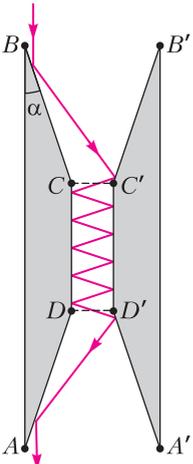


Рис. 21

трапецию  $BB'C'C$  относительно стороны  $BC$  – в результате получим трапецию  $B_1BCC_1$ . Эту трапецию теперь отразим относительно стороны  $B_1C_1$  и будем продолжать этот процесс отражений до тех пор, пока мы не вернемся к исходной трапеции  $BB'C'C$ . Образы отрезка  $C'C$  при этих отражениях складываются в границу правильного  $m$ -угольника (рис. 22,а). Подберем значение  $r$  таким образом, чтобы прямые  $AB$  и  $A'B'$  касались этого многоугольника, т.е. имели с ним непустое пересечение, но многоугольник находился бы целиком внутри полосы, образованной этими прямыми. Ясно, что  $r$  зависит от  $m$ . Читатель при желании легко выведет формулу этой зависимости. (Внимание: формулы будут разными для четных и нечетных  $m$ !) Из них будет следовать, что при возрастающем  $m$  величина  $r$  стремится к нулю.

Докажем, что любая частица, двигающаяся вертикально и отразившаяся, скажем, от стороны  $BC$ , в конечном счете пересечет линию  $CC'$  (и затем станет двигаться внутри прямоугольника  $CC'D'D$ , как показано на рисунке 21). Для доказательства мы применим так называемый метод развертывания траектории, весьма распространенный в теории бильярдов. Отразим трапецию  $BB'C'C$  вместе со вторым отрезком траектории относительно стороны  $BC$  – в результате получим два отрезка, лежащие

на одной прямой. Далее сделаем второе отражение вместе с третьим отрезком бильярдной траектории – и снова мы получим три отрезка на одной прямой. Поскольку в конечном итоге прямая пересекает наш многоугольник, мы заключаем, что исходная траектория пересекла отрезок  $C'C$ . После первого отражения частица движется под углом к вертикали  $2\alpha$ , после второго –  $4\alpha$ , после  $k$  отражений и пересечения линии  $C'C$  она движется под углом  $2k\alpha$ . В конце концов частица пересечет отрезок  $D'D$  (рис. 22,б), и затем угол к вертикали будет изменяться в обратном порядке: после первого отражения он станет равен  $2(k-1)\alpha$ , после второго  $2(k-2)\alpha$  и так далее. Нам нужно показать, что после всех отражений угол будет равняться нулю. Применим снова метод развертывания траектории, на этот раз в обратном направлении. Пусть последнее отражение произошло от стороны  $AD$ ; отразим трапецию  $ADD'A'$  от этой стороны, так что получится трапеция  $A_1D_1DA$ . Образ предпоследнего звена траектории вместе с (не отраженным) последним звеном лежат на одной линии. Продолжим этот процесс, отражая  $A_1D_1DA$  относительно стороны  $A_1D_1$  и получая трапецию  $A_2D_2D_1A_1$  вместе с находящимся внутри нее образом предпредпоследнего отрезка траектории. Закончим этот процесс, когда очередной образ отрезка пересечет наш многоугольник. Посмотрим, что у нас получилось (см.рис. 22,б). Образы отрезков траекторий, составленные вместе, выстроились в один луч, пересекающий как отрезок  $AA'$ , так и многоугольник (попаданиями в концы отрезков мы пренебрегаем). Отсюда следует, что угол, образованный этим лучом по отношению к вертикали, меньше  $2\alpha$  (почему?). Но мы уже знаем, что этот угол может принимать только значения, кратные  $2\alpha$ , а значит, он равен нулю. Таким образом, данная поверхность действительно имеет нулевое сопротивление.

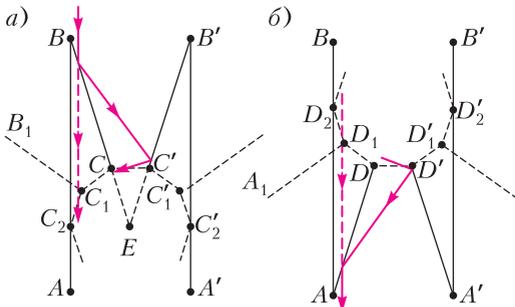


Рис. 22

на одной прямой. Далее сделаем второе отражение вместе с третьим отрезком бильярдной траектории – и снова мы получим три отрезка на одной прямой. Поскольку в конечном итоге прямая пересекает наш многоугольник, мы заключаем, что исходная траектория пересекла отрезок  $C'C$ . После первого отражения частица движется под углом к вертикали  $2\alpha$ , после второго –  $4\alpha$ , после  $k$  отражений и пересечения линии  $C'C$  она движется под углом  $2k\alpha$ . В конце концов частица пересечет отрезок  $D'D$  (рис. 22,б), и затем угол к вертикали будет изменяться в обратном порядке: после первого отражения он станет равен  $2(k-1)\alpha$ , после второго  $2(k-2)\alpha$  и так далее. Нам нужно показать, что после всех отражений угол будет равняться нулю. Применим снова метод развертывания траектории, на этот раз в обратном направлении. Пусть последнее отражение произошло от стороны  $AD$ ; отразим трапецию  $ADD'A'$  от этой стороны, так что получится трапеция  $A_1D_1DA$ . Образ предпоследнего звена траектории вместе с (не отраженным) последним звеном лежат на одной линии. Продолжим этот процесс, отражая  $A_1D_1DA$  относительно стороны  $A_1D_1$  и получая трапецию  $A_2D_2D_1A_1$  вместе с находящимся внутри нее образом предпредпоследнего отрезка траектории. Закончим этот процесс, когда очередной образ отрезка пересечет наш многоугольник. Посмотрим, что у нас получилось (см.рис. 22,б). Образы отрезков траекторий, составленные вместе, выстроились в один луч, пересекающий как отрезок  $AA'$ , так и многоугольник (попаданиями в концы отрезков мы пренебрегаем). Отсюда следует, что угол, образованный этим лучом по отношению к вертикали, меньше  $2\alpha$  (почему?). Но мы уже знаем, что этот угол может принимать только значения, кратные  $2\alpha$ , а значит, он равен нулю. Таким образом, данная поверхность действительно имеет нулевое сопротивление.

### 9. Немного критики

Итак, мы построили несколько поверхностей, которые, по крайней мере теорети-

чески, имеют нулевое сопротивление. К сожалению, ключевое слово в этой фразе – *теоретически*. Если сделать космический корабль в форме одной из этих поверхностей, то он будет двигаться без сопротивления только в одном направлении! Никакие повороты не допускаются. К тому же, наша математическая модель слишком идеализирована и не учитывает физических аспектов взаимодействия частиц среды с молекулами поверхности тела. Конечно же, это взаимодействие не будет полностью упругим, и часть механической энергии при столкновении будет неизбежно переходить в тепло. Кроме того, наша модель не учитывает теплового движения частиц среды, которое всегда так или иначе присутствует.

И все же, и все же... Хочется верить, что использование одной из приведенных форм может существенно уменьшить реальную силу сопротивления среды. А раз так, то их можно будет применить, например, при строительстве летательных аппаратов и космических кораблей.

Будем оптимистами! Ведь когда-то и многие привычные сегодня вещи считались абстракцией. Всего лет 30 назад математики пытались *теоретически* обосновать возможность компьютера распознавать рукописный текст и голосовые команды. Сейчас это умеет делать каждый смартфон.

**Упражнение 9.** Тело нулевого сопротивления, показанное на рисунке 19, с постоянной скоростью пролетает через облако, имеющее форму слоя между двумя плоскостями, перпендикулярными направлению движения. Какой станет форма облака после прохождения тела?

## 10. Невидимые поверхности

Нам остается один шаг до построения невидимых поверхностей. Только сначала договоримся о том, что такое «невидимость». Это понятие неоднозначно! Например, технологии стелс позволяют самолету быть невидимым для радаров. Он поглощает испускаемые радаром радиоволны и не отражает их. Но мы этот самолет видим. Поэтому мы договоримся

так: невидимый объект – это тот, который невидим невооруженному человеческому глазу, причем в рамках геометрической оптики. Таким образом, мы будем считать, что световые лучи распространяются по прямым и отражаются от зеркальных поверхностей по закону «угол падения равен углу отражения». Объект будем считать невидимым, если начальная прямая, по которой распространялся луч до встречи с объектом, совпадает с конечной прямой, вдоль которой он после встречи попадает в глаз. Сначала зададимся вопросом, существуют ли тела с зеркальной поверхностью, невидимые в одном направлении. Если на такое тело падает в данном направлении световой луч, то после нескольких отражений от тела он будет двигаться в том же самом направлении и вдоль той же прямой. Это напоминает свойство нулевого сопротивления, когда любая частица после всех отражений от поверхности сохраняет направление движения и, тем самым, сохраняет свой импульс. Невидимость – более сильное свойство! Каждый луч после отражений от поверхности не только сохраняет направление, но и лежит на той же самой прямой.

Итак, *если поверхность невидима, то она имеет нулевое сопротивление, но обратное может не выполняться*. И тем не менее, из поверхности нулевого сопротивления можно сделать невидимую, что мы сейчас и продемонстрируем.

Возьмем любую из поверхностей нулевого сопротивления, которые мы построили в разделе 8. Отразим ее зеркально относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения. Получится фигура из двух частей. Она является невидимой! Правда, не со всех сторон, а только вдоль направления движения. Ну и разумеется, если мы нанесем на поверхность зеркальное покрытие. На рисунке 23 изображена невидимая поверхность, обладающая вращательной симметрией. Любой луч, идущий вдоль оси симметрии, после четырех отражений оказывается на той же прямой. Таким образом, все лучи как бы «обходят» поверхность и возвращаются на свои прямые.

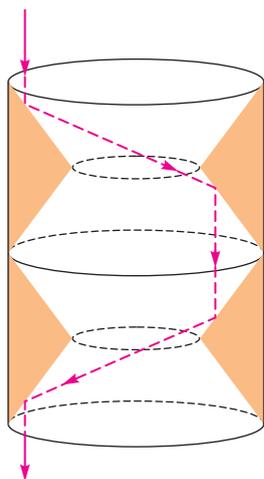


Рис. 23

К сожалению, эта поверхность невидима только в одном направлении. А можно ли сделать такую поверхность, которая была бы невидима отовсюду? Увы, было доказано, что таких поверхностей нет. Но можно, тем не менее, придумать поверхности, невидимые с нескольких направлений. Начнем с двух.

Покажем, как изготовить тело, невидимое в двух направлениях. Излагаемая ниже конструкция принадлежит В. Роциной. Как всегда, мы начнем с рисунка на плоскости. Рассмотрим произвольную параболу и отразим ее центральной симметрией относительно фокуса. Эти две параболы, исходная и отраженная, имеют общую ось симметрии. Проведем две прямые, параллельные этой оси и симметричные друг другу относительно нее. Рассмотрим два криволинейных треугольника, образованных отрезками этих прямых и дугами парабол (рис. 24,а). Объединение этих треугольников имеет нулевое сопротивление в направлении общей оси (почему?). Заметим, что объединение двух криволинейных

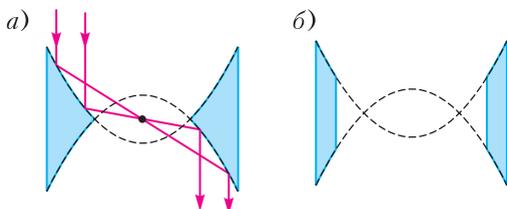


Рис. 24

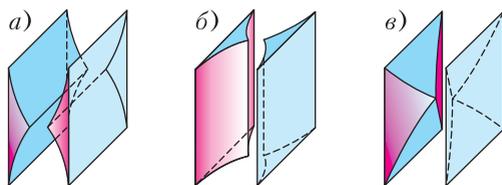


Рис. 25

трапеций, показанных на рисунке 24,б, также имеет нулевое сопротивление.

Теперь совершим параллельный перенос пары треугольников в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой они находятся, на расстояние, равное длине прямолинейной стороны (вертикальной на рисунке). Образуется пара криволинейных призм (рис. 25,а). Пересечем эту пару призм с парой, полученной из нее поворотом на  $90^\circ$  вокруг ее оси симметрии, параллельной плоскостям треугольников (рис. 25,б). Таким образом, мы построили новую фигуру – пару криволинейных четырехгранных пирамид (рис. 25,в). Она имеет нулевое сопротивление в двух направлениях, параллельных сторонам оснований пирамид. Теперь, чтобы получить невидимое в двух направлениях тело, дос-

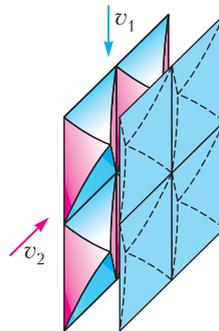


Рис. 26

точно учетверить конструкцию (рис. 26), направления невидимости –  $v_1$  и  $v_2$ .

### 11. Тело, невидимое из точки, или кое-что о «белой сферической лошади»

Один из авторов данной статьи, рассказывая на научном семинаре о невидимых поверхностях, упомянул, что сделать реальную модель такой поверхности непросто. В реальности она оказывается только «почти невидимой». Поверхность все-таки

немного искажает расположенную за ней картину, и это человеческий глаз сразу замечает. В чем дело? Один из слушателей сразу же нашел ответ. Ни качество изготовления поверхности, ни качество зеркального покрытия тут ни при чем. Причина кроется в самой конструкции. Поверхность будет невидимой только для параллельного пучка света, т.е. когда все лучи параллельны. Но мы смотрим не параллельным пучком: все лучи сходятся в одной точке – зрачке нашего глаза. Математики называют такой пучок *центральный* (центр – наш глаз). Только если центр пучка расположен очень далеко, пучок будет близок к параллельному. Поэтому эффект невидимости возникает, только если смотреть на поверхность из очень далекой точки (математик скажет – из бесконечно удаленной точки).

А можно ли построить поверхность, которая будет реально невидима, если смотреть на нее хотя бы из одной точки? Можно! Для этого нам понадобится один геометрический факт.

**Признак биссектрисы треугольника.**

*Отрезок BD* *есть биссектриса угла B* *в треугольнике ABC*, *если и только если выполнено равенство*  $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = f^2$  *(рис. 27).*

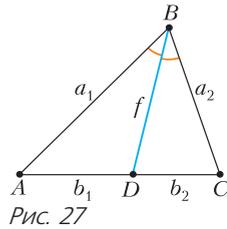


Рис. 27

Доказательство несложно, и мы оставляем его читателю. Напомним теперь определения эллипса и гиперболы, которые нам понадобятся в дальнейших построениях.

*Эллипсом* называется множество точек *M* на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек  $F_1, F_2$  постоянна. Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются *фокусами* эллипса. Эллипс имеет замечательное *оптическое свойство*: каждый луч света, исходящий из одного фокуса эллипса, после отражения от внутренней поверхности эллипса пройдет через другой фокус. Таким образом, если в одном фокусе поставить источник света, то все исходящие из него лучи после отражения от внутренней поверхности соберутся во втором фокусе.

*Гиперболой* называется множество точек *M* на плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек  $F_1, F_2$  постоянна по модулю. Точки  $F_1$  и  $F_2$  – *фокусы* гиперболы. У гиперболы тоже есть оптическое свойство, и оно похоже на свойство эллипса: каждый луч света, исходящий из одного фокуса, после отражения от гиперболы превращается в луч, продолжение которого проходит через второй фокус. Таким образом, если в одном фокусе поставить источник света, то все исходящие из него лучи после отражения от гиперболы не будут собираться в одной точке. Более того, они будут расходиться. Но зато их продолжения соберутся в одной точке – во втором фокусе.

Теперь мы готовы приступить к построению поверхности, невидимой из одной точки. Построим софокусные (т.е. имеющие общую пару фокусов  $F_1$  и  $F_2$ ) эллипс и гиперболу таким образом, чтобы отрезок  $H'H$ , соединяющий две точки их пересечения, содержал фокус  $F_2$  (рис. 28). Проведем луч из фокуса  $F_1$  таким образом, чтобы он проходил выше точки  $H$  и пересекал гиперболу, и обозначим  $A$  и  $B$  точки его пересечения с эллипсом и гиперболой. Далее рассмотрим луч, симметричный первому относительно прямой  $F_1F_2$ , и обозначим точки его пересечения с эллипсом и гиперболой  $A'$  и  $B'$ . Таким образом, мы получили два симметричных друг другу

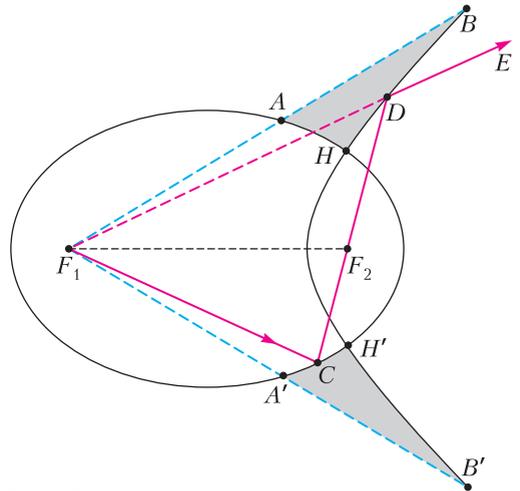


Рис. 28

криволинейных треугольника  $ABH$  и  $A'B'H'$ . А теперь рассмотрим частицу, вылетающую из фокуса  $F_1$  и отражающуюся от этой пары треугольников. Пусть она сначала отразится от некоторой точки  $C$  на дуге  $A'H'$ . Далее она проходит через фокус  $F_2$  и затем отражается от гиперболы в некоторой точке  $D$ . В силу определения эллипса,

$$F_1C + F_2C = F_1H + F_2H,$$

а из определения гиперболы,

$$F_1D - F_2D = F_1H - F_2H.$$

Перемножая левую и правую части этих равенств и учитывая перпендикулярность отрезков  $F_1F_2$  и  $F_2H$ , получаем

$$(F_1C + F_2C)(F_1D - F_2D) = F_1H^2 - F_2H^2 = F_1F_2^2.$$

Мы видим, что сформулированный выше признак биссектрисы применим к треугольнику  $CF_1D$ , таким образом,  $F_1F_2$  есть биссектриса этого треугольника, а значит,  $\angle CF_1F_2 = \angle DF_1F_2$ . Согласно оптическому свойству гиперболы, после отражения в точке  $D$  частица движется вдоль прямой  $DE$ , содержащей точку  $F_1$ . Теперь рассмотрим еще одну пару криволинейных треугольников, полученных из исходной гомотетией относительно точки  $F_1$ . Коэффициент гомотетии выберем таким образом, чтобы пересечение новой пары треугольников с парой исходных было парой точек (рис. 29). Частица, вылетающая из  $F_1$  вдоль некоторого луча  $F_1C$ , после двух отраже-

ний от пары треугольников движется вдоль луча  $F_1D$ , полученного отражением исходного относительно прямой  $F_1F_2$ . Продолжая движение, она совершает два отражения относительно другой пары треугольников, возвращается на луч  $F_1C$  и в дальнейшем движется свободно вдоль этого луча. Тем самым обеспечена невидимость из точки  $F_1$ . Разумеется, движение лучей света происходит в обратном направлении. Луч движется по направлению к точке, в которой расположен глаз, затем совершает 4 отражения от четверки треугольников и наконец попадает в глаз вдоль той же прямой, по которой двигался изначально. Вращением полученной конструкции вокруг прямой  $F_1F_2$  получаем поверхность, невидимую из одной точки  $F_1$ .

Таким образом, мы получили поверхность, которая действительно невидима. Правда, только из одной точки, из других точек она будет видимой. Более того, из этой точки нужно смотреть одним глазом, а другой прикрыть. Ведь второй глаз находится в другой точке! Итог нашей работы звучит не столь внушительно, как хотелось бы:

*Построенная поверхность невидима, если смотреть на нее одним глазом из заданной точки пространства.*

Да уж... Как тут не вспомнить известный анекдот про математика, которому поручили определить, какая лошадь самая быстрая. После долгих расчетов он вывел «уравнение движения белой сферической лошади в безвоздушном пространстве». И все-таки не будем забывать, что многие великие открытия начинались с вещей, которые казались совершенно абстрактными и неприменимыми в жизни. Постепенно, шаг за шагом, ученые и инженеры доводили эти идеи до практического использования (как говорят – «до железа»). В качестве маленького шага в этом направлении мы можем предъявить поверхность, невидимую из двух точек. В частности, она будет невидима, если смотреть на нее двумя глазами. Правда, ее построение уже значительно сложнее и выходит за рамки нашего рассказа.

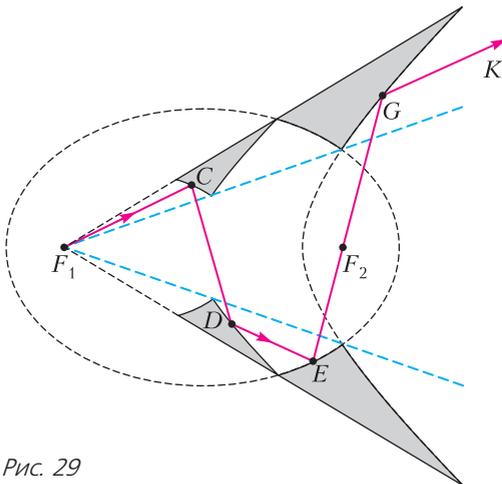


Рис. 29

### Упражнения

10. Покажите, что частицы, отражающиеся от невидимого многогранника, совершают всегда четное число отражений, не меньшее четырех.

11. Как вы думаете, почему при построении поверхности, невидимой в двух направлениях, не годится исходная конструкция из двух треугольников?

12. Докажите признак биссектрисы треугольника.

13. Докажите, что график функции  $y = \frac{1}{x}$  является гиперболой. Где расположены ее фокусы?

### 12. Послесловие. Человек-невидимка

В знаменитом романе английского писателя-фантаста Герберта Уэллса (1866–1946) молодой ученый Гриффин после четырех лет напряженного труда нашел способ делать предметы невидимыми. Для этого он создал специальный аппарат, который с помощью мощного излучения понижал коэффициент преломления материала. Любой предмет, помещенный в аппарат, через какое-то время становился невидимым. А человеку, чтобы сделаться невидимым, нужно было еще дополнительно принять некоторые снадобья, например опиум для обесцвечивания крови. На самом деле, как заметил еще Я.И.Перельман в книжке «Занимательная физика», такой способ не может сделать человека полностью невидимым – глаза всегда останутся видимыми. Ведь глаз устроен так, что он должен преломлять свет! В любом случае, способ, изобретенный в романе Гриффином, делал предметы невидимыми с помощью изменения структуры и свойств материала.

Невидимые поверхности используют совершенно другой принцип: не физико-химический, а геометрический. Мы не меняем свойств материала, из которого сделана поверхность. Мы придаем ей такую форму, при которой все лучи света огибают поверхность, отражаясь от нее конечное число раз. Человеческому телу вряд ли получится придать такую форму. Но человек может просто окружить себя такой поверхностью и, таким образом, стать невидимым. Так сказать, «надеть невидимый плащ». Такой способ, кстати, был бы совершенно безвреден для здоровья, в отличие от болезненной и опасной процедуры из романа Уэллса. Например, человек, находящийся внутри поверхности, построенной нами в разделе 10 (см. рис. 23), будет невидимым. Правда, увы, только из одной точки.

Удастся ли развить идеи с невидимыми поверхностями, чтобы разработать «невидимый плащ»? В данной теме вообще остается много вопросов, и не исключено, что читатель поучаствует в разрешении некоторых из них. Например, можно построить многогранники, невидимые в одном направлении. А каково наименьшее число граней (ребер, вершин) такого многогранника? Можно добиться невидимости в двух направлениях, поместив рядом два тела, но можно ли добиться этого эффекта посредством одного тела? В настоящее время имеются примеры объектов, невидимых в конечном числе направлений. Но эти объекты бесконечносвязные: они состоят из бесконечного числа отдельных кусочков. Можно ли придумать такой связный объект? Пока все эти вопросы остаются без ответа.

#### Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

# Тепловые эффекты — квантовая природа

**С. ВАРЛАМОВ**

*Совсем малая примесь углерода к мягкому железу делает из него твердую сталь.*

*Совсем малая примесь квантовой механики к молекулярной физике делает ее гораздо понятнее.*

В этой статье в совсем небольшой мере используются принципы, заложенные в основу квантового описания объектов микромира. Для качественного объяснения тепловых эффектов, связанных как с образованием самих атомов и молекул, так и с перестройкой структуры вещества, применяются соотношение Гейзенберга и правило Паули. Этих «двух вещей» в большинстве рассматриваемых случаев оказывается достаточно для проведения грубых количественных оценок. Считается, что читатели знакомы с этими двумя принципами.

## **Энергетические соотношения в термодинамике**

Сформулируем несколько вопросов, ответы на которые не удастся найти в учебниках по физике и химии.

- Почему существуют стабильные атомы и молекулы?

- В чем причина того, что при фазовых переходах веществ типа плавления/затвердевания и парообразования/конденсации поглощается/выделяется энергия?

- Почему при образовании сложных веществ из простых или при разложении сложных веществ на простые (т.е. при химических реакциях) выделяется или поглощается энергия?

При любых превращениях в физических системах суммарная энергия, как извест-

но, сохраняется. Какая из многочисленных составляющих энергии системы атомов или молекул уменьшается, когда в результате конденсации вещества образуется жидкость или твердое тело и при этом выделяется энергия в виде тепла? Совершенно аналогичный вопрос можно задать и про энергию системы атомов или молекул, в которой после проведения экзотермической химической реакции образуются новые молекулы и выделяется энергия в форме тепла или света, — где находится источник этой энергии?

В классической молекулярной физике специально оговаривают, что при одной и той же температуре средняя кинетическая энергия, связанная с поступательным движением, для молекул в составе пара, жидкости или твердого тела одинакова. Энергия, о которой идет речь в данном случае, связана в основном с механическим движением ядер атомов, поскольку практически вся масса атомов сосредоточена именно в их ядрах. Но это означает, что не механическое движение ядер ответственно за интересующие нас тепловые эффекты, а нечто другое. Что же остается? Остается энергия, связанная с движением электронов и с взаимным расположением отрицательно заряженных электронов и положительно заряженных ядер, т.е. ответы на интересующие нас вопросы кроются в устройстве атомов и молекул и изменениях этого устройства при химических реакциях и фазовых переходах. Другими словами, «собака зарыта» в структуре атомов и молекул.

Адекватно объяснить, почему вообще существуют атомы и молекулы и как они устроены, физики смогли только после создания квантовой теории. Эта теория

объясняет поведение микрообъектов, и хотя ее выводы справедливы и для крупных объектов, но именно для электронов и ядер, из которых состоят атомы и молекулы, они поражают воображение, так как не укладываются в рамки привычных представлений о поведении физических тел, получаемых из нашего повседневного опыта. Предсказания квантовой теории в точности описывают реальное поведение микрочастиц, и хотим мы этого или нет, но для объяснения интересующих нас явлений нужно опираться на квантовую теорию.

Поставим перед собой задачу получить ответы на заданные вопросы на качественном уровне (с грубыми количественными оценками). Это предполагает, что во всех рассматриваемых случаях мы будем конструировать *самые простые модели*, которые *только качественно* будут соответствовать реальным системам из микрочастиц. При этом полученные оценки и точные значения или справочные данные могут отличаться в несколько раз. Для нас важно только совпадение оценок и реальных значений по порядку величин.

### Атомы и их ионизация

Экспериментально установлено, что в состав атомов входят положительно заряженные и массивные ядра и легкие (в сравнении с ядрами) отрицательно заряженные электроны. Простейший атом – атом водорода – состоит из одного протона и одного электрона. Если мысленно выделить один из электронов внешней электронной оболочки любого нейтрального атома, то он, как и в случае атома водорода, движется в поле, созданном остатком атома с зарядом, равным по величине заряду электрона, только с другим знаком. Поэтому энергии связи этих «пар» и размеры области пространства, в которой они «проживают», имеют для всех атомов один и тот же порядок. Так, радиус атомов всех химических элементов порядка  $10^{-8}$  см (водорода  $0,53 \cdot 10^{-8}$  см, гелия  $1,05 \cdot 10^{-8}$  см, урана  $1,5 \cdot 10^{-8}$  см), радиус ядер порядка  $10^{-13}$  см (гелия  $2 \cdot 10^{-13}$  см, урана  $8,5 \cdot 10^{-13}$  см), а расстояние между ядрами атомов твердого

вещества порядка  $10^{-8}$  см. Иными словами, размеры могут отличаться в несколько раз, но не больше 10.

Энергия системы «протон – электрон» или «остаток атома – электрон» определяется их взаимным расположением и движением. В системе отсчета, связанной с центром масс этой системы, можно считать протон атома водорода или остаток любого другого атома покоящимся. Хорошей моделью описания такого взаимодействия является представление о том, что эти частицы точечные, а для точечных зарядов потенциальная энергия их взаимодействия зависит только от расстояния  $R$  между ними и от величин  $q_1$  и  $q_2$  самих зарядов:

$$U = k \frac{q_1 q_2}{R} + \text{const.}$$

Величина  $k$  равна  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{В} \cdot \text{м}}{\text{Кл}^2}$ , а константу по общей договоренности принимают равной нулю, тогда при бесконечно большом расстоянии между зарядами их потенциальная энергия равна нулю. В случае протона и электрона заряды имеют противоположные знаки, поэтому потенциальная энергия их взаимодействия отрицательна. Взаимодействие заряженных частиц имеет место при любом расстоянии между ними. Когда частицы с разными знаками зарядов объединились и образовали нейтральный атом, то в пространстве вокруг них электромагнитное поле стало существенно слабее, чем было вокруг каждой заряженной частицы. Заменяем зависимость типа  $1/R$  более простой:

$$U(R) = 0, \text{ если } R > D/2,$$

$$U(R) = -\frac{\alpha k q_1 q_2}{D}, \text{ если } |x|, |y|, |z| < D/2,$$

где  $\alpha$  – численный коэффициент, который нужно подобрать так, чтобы для большинства атомов получить правильный порядок величины энергии связи. Таким образом, плавную функцию мы заменяем кусочно-постоянной (рис. 1). При этом область пространства вблизи ядра, где потенциальная энергия отрицательна, имеет

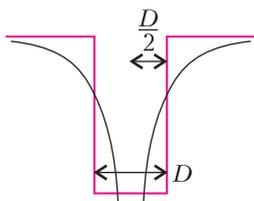


Рис. 1

форму куба. Это упрощенная модель существенно облегчает расчеты при сохранении качественного соответствия модели реальной ситуации.

Кинетическая энергия электрона в поле «остатка атома» не может быть равной нулю – он должен обязательно двигаться. Если электрон находится в ограниченной области пространства с размерами порядка  $D$ , то, в соответствии с неравенствами Гейзенберга,

$$\Delta p_x \cdot D \geq h, \Delta p_y \cdot D \geq h, \Delta p_z \cdot D \geq h,$$

и поэтому электрон должен иметь минимальную кинетическую энергию порядка

$$E_{\text{кин}} = \frac{3}{2} \frac{h^2}{m_e D^2}.$$

Здесь  $\Delta p_i$  – неопределенность проекции импульса частицы на ось координат  $i$ ;  $D$  – характерный размер атома (его диаметр),  $h$  – постоянная Планка,  $m_e$  – масса электрона. Будем считать, что кинетическая энергия электрона вблизи ядра не зависит от его местоположения.

Суммарная энергия системы включает в себя кинетическую и потенциальную энергии:

$$E_{\text{сум}} = U + E_{\text{кин}} = -k \frac{\alpha e^2}{D} + \frac{3}{2} \frac{h^2}{m_e D^2},$$

где  $e$  – заряд электрона. Будем теперь изменять параметр  $D$  так, чтобы получилась минимальная суммарная энергия. Она отрицательна, достигается при определенном диаметре атома

$$D_{\text{ат}} = \frac{3h^2}{k\alpha e^2 m_e}$$

и равна

$$E_{\text{мин}} = -\frac{\alpha k e^2}{2D_{\text{ат}}} = -\frac{\alpha^2 k^2 e^4 m_e}{6h^2} \approx -\alpha^2 \cdot 1,8 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} \approx -\alpha^2 \cdot 0,11 \text{ эВ}.$$

Кстати, эта энергия по величине равна кинетической энергии электронов, живущих на внешней электронной оболочке атома, т.е. отрицательная потенциальная энергия по величине вдвое больше, чем кинетическая энергия. Это правило выполняется во всех случаях стационарных движений связанных систем тел, когда потенциальная энергия их взаимодействия зависит от расстояния по закону  $1/R$ .

Если системе добавить такую же по величине  $|E_{\text{мин}}|$ , но положительную энергию, то вновь получатся разделенные большим расстоянием частицы: медленно движущиеся (почти покоящиеся) протон и электрон. Это произошло ионизация атома. Для большинства атомов химических элементов энергия ионизации находится в диапазоне 5–10 эВ. Если выбрать величину  $\alpha^2 \approx 70$ , то  $E_{\text{мин}} = -7,7$  эВ попадает примерно в середину указанного диапазона. Размеры одиночных атомов разных веществ отличаются от минимального для атома водорода (радиус 78 пм; 1 пм =  $10^{-12}$  м) до максимального для атома цезия (радиус 265 пм). Упрощенная до предела модель, примененная нами для оценки энергии ионизации атомов, естественно, не может объяснить различия в размерах атомов. Более точные расчеты дают для атома водорода коэффициент при буквенном выражении не  $\alpha^2/6$ , а  $(2\pi^2)$ . Энергия ионизации для атома водорода равна на самом деле  $2,2 \cdot 10^{-18}$  Дж или 13,6 эВ.

Для справки: самые большие энергии ионизации имеют атомы благородных газов. Например, для ионизации атома гелия (He) нужно 24,6 эВ.

### Энергия сродства к электрону

Нейтральные, т.е. незаряженные, тела (в том числе атомы и молекулы) и заряженные тела, как известно, притягиваются друг к другу. Для объяснения этого придумана идея о поляризации зарядов нейтральных тел во внешнем поле, созданном заряженными телами. Когда электрон, имевший малую (нулевую) начальную кинетическую энергию, «садится» на атом (рис. 2), то суммарная энергия иона (свя-

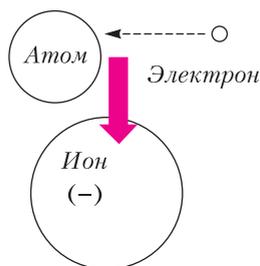


Рис. 2

занной системы электрон–атом) может измениться в сторону уменьшения по сравнению с энергией этих частиц, живших порознь. В этом случае избыток энергии выделяется, например, в форме излучения, которое затем превращается в тепловую энергию. Этот избыток энергии, отнесенный к определенному количеству атомов (одному атому или одному молю атомов), называют энергией сродства атома к электрону. Такая связанная система может существовать отдельно от других частиц.

Если атом не относится к благородным газам, т.е. внешняя электронная оболочка атома не заполнена электронами полностью, то в этом случае могут образовываться ионы с зарядом  $(-1)$ , и их размеры примерно вдвое больше, чем размеры нейтрального атома (по данным справочника). Большая энергия сродства к электрону у атомов галогенов (F, Cl, Br, I). Например, для хлора это  $349 \text{ кДж/моль} = 3,6 \text{ эВ/атом}$ , при этом энергия ионизации атома хлора равна  $1251 \text{ кДж/моль}$  или  $13 \text{ эВ}$ . Иными словами, энергия сродства по модулю примерно в 3,6 раз меньше энергии ионизации.

Это, с одной стороны, можно интерпретировать так, как будто для электроногостя атом хлора представляет собой точечную частицу с зарядом, равным части заряда электрона  $(0,7 e)$ . А с другой стороны, напрашивается и такое представление: два электрона (один из прежнего набора электронов атома и второй – электрон-гость) движутся синхронно вокруг остатка атома (положительного иона), находясь по разные стороны от центра атома. Рисунок 3 иллюстрирует эту идею. В этом случае потенциальная энергия системы из электронов и остатка атома равна

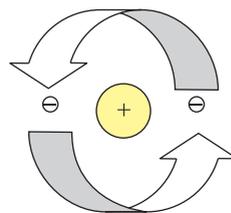


Рис. 3

$$U = -2 \frac{\alpha k e^2}{R} + \frac{\alpha k e^2}{2R} = -\frac{3\alpha k e^2}{2R}.$$

Расстояние  $R$ , как уже говорилось, равно примерно диаметру  $D_{\text{ат}}$  нейтрального атома. (Вспомним, что потенциальная энергия связанных стационарных состояний вдвое больше по модулю, чем соответствующая кинетическая энергия.) Формуле для потенциальной энергии можно по аналогии с предыдущими расчетами, выполненными с использованием простейшей модели, сопоставить минимальную энергию (энергию связи):

$$E_{\text{мин ион}} = U + E_{\text{кин}} = \frac{U}{2} = -\frac{3\alpha k e^2}{4D_{\text{ат}}}.$$

Отсюда энергия ионизации такого «образования», или энергия сродства атома к электрону, равна примерно

$$E_{\text{срод}} = E_{\text{ат}} - E_{\text{ион}} = \frac{\alpha k e^2}{4D_{\text{ат}}}.$$

Полученная оценка величины энергии сродства к электрону вдвое меньше, чем энергия ионизации. Вспомним, что для атома хлора отношение этих величин равно примерно 3,6.

Можно обратить внимание на то, что получено качественное соответствие и порядки величин совпали, но, в отличие от энергии ионизации, когда все атомы имеют примерно одинаковую ее величину, энергии сродства атомов к электрону расположены в широком диапазоне: от указанной величины  $349 \text{ кДж/моль}$  для атомов хлора до отрицательных величин для атомов благородных газов и некоторых других атомов. Для магния, например, это  $-21 \text{ кДж/моль}$ , для атома гелия энергия сродства к электрону равна нулю, а для атомов натрия и калия она примерно  $50 \text{ кДж/моль}$ . Резонный вопрос – а поче-

му же существуют ионы с отрицательной энергией сродства к электрону? Ответ очень прост: система частиц все равно остается связанной, так как сумма потенциальной и кинетической энергий частиц, входящих в состав этих ионов, остается отрицательной.

Простая модель не может объяснить такого большого разброса величин, поэтому придется довольствоваться только качественными соображениями, которые можно сформулировать так: каждый атом создает для электрона-гостя определенную по форме и глубине потенциальную яму. При этом его собственные электроны внешней оболочки, потеснившись, принимают гостя в свою компанию. Размеры области  $X$ , где потенциальная энергия отрицательна и яма имеет глубину  $U$ , составляющую, скажем, 50% от ее максимальной глубины, определяют минимальную кинетическую энергию электрона:  $E_{\text{кин}} = \frac{3}{2} \frac{h^2}{m_e X^2}$ . Если суммарная энергия  $E_{\text{кин}} + U$  отрицательна, то отрицательный ион может образоваться и существовать долгое время.

### Образование полярной химической связи

Некоторые атомы при химической реакции образуют новые химические соединения, в молекулах которых на части атомов наблюдается положительный заряд (недостаток электронов), а на других атомах, принадлежащих той же молекуле, наблюдается отрицательный заряд (избыток электронов). Говорят, что электроны могут частично или полностью переселяться с одного атома на другой. При этом *частичное* переселение можно интерпретировать как такое движение, при котором большую *часть* времени электрон находится в окрестностях одной из *частей* молекулы, а меньшую *часть* времени он находится в окрестностях другой *части* молекулы. Соединение разных атомов в одну молекулу при таком виде связи тоже приводит к изменению (уменьшению) суммарной энергии системы электронов и ядер.

Рассмотрим в качестве примера схематический процесс образования одной молекулы NaCl. Его можно разбить на несколько этапов: 1) ионизация атома натрия (-496 кДж/моль); 2) «посадка» электрона на атом хлора (+349 кДж/моль); 3) приближение иона натрия к иону хлора (+494 кДж/моль) с большого расстояния до расстояния, равного примерно сумме радиусов отрицательно заряженного иона хлора (181 пм) и положительно заряженного иона натрия (98 пм). На каждом этапе нужно учитывать энергетический эффект соответствующего процесса, в итоге получается +347 кДж/моль. Если считать, что электрон переселяется не полностью, а, например, только на 50%, то в этом случае энергия связи будет в четыре раза меньше.

Полученная величина – это грубая оценка для энергии связи только для объединения в «пару» одного атома натрия и одного атома хлора. А для оценки энергии, которая выделяется при образовании одного моля атомов натрия с одним молем атомов хлора, нужно учитывать, конечно, что каждый ион взаимодействует не с одним ионом противоположного знака, а со всеми своими ближайшими соседями и положительно и отрицательно заряженными.

Для характеристики способности атомов объединиться в молекулу химики говорят об энергетической «выгодности» или «невыгодности» перехода электрона от одного атома к другому или вводят такую характеристику атомов, как «электроотрицательность». При описании структуры молекул используются символические изображения атомов, соединенные черточками. Каждая черточка между ними символизирует связь между атомами. Каждой черточке нужно мысленно поставить в соответствие расстояние между ядрами и энергию связи. За этими образными словами о выгоды и невыгоды и за рисунками стоят физические характеристики взаимодействующих атомов, которые в итоге сводятся к потенциальной и кинетической энергии системы ядер и окружающих их электронов.

### Энергия связи конденсированных веществ и кинетическая энергия электронов

Присоединение к конденсированному веществу – металлу или неметаллу – очередной порции атомов или молекул, ранее существовавших в виде одиночных частиц, приводит к выделению теплоты, которую нужно отводить от системы для поддержания постоянной температуры. Изменение энергии системы атомов в этом случае объясняется тем, что при такой конденсации вещества кинетическая энергия части электронов становится меньше. Природа этого изменения энергии чисто квантовая. Связано оно с увеличением размеров области проживания электронов внешних и внутренних электронных оболочек атомов. Когда электроны внешней оболочки атома живут в уединенном атоме, то они (или он) вынуждены находиться в ограниченной области пространства с характерным размером порядка диаметра атома  $D$ . Электроны предпоследней (внутренней) оболочки живут в области с меньшими размерами, для следующей по глубине оболочки эта область еще меньше и так далее.

В соответствии с неравенствами Гейзенберга

$$\Delta p_x \cdot D \geq h, \quad \Delta p_y \cdot D \geq h, \quad \Delta p_z \cdot D \geq h,$$

каждый электрон на внешней оболочке должен иметь минимальную кинетическую энергию

$$E_{\text{кин}} = \frac{3}{2} \frac{h^2}{m_e D^2}.$$

После присоединения атомов друг к другу электроны их внешних оболочек коллективизируются и приобретают возможность двигаться в гораздо большем объеме. Суммарная кинетическая энергия электронов при этом становится меньше.

Для оценки средней кинетической энергии коллективизированных электронов внешней оболочки атомов после образования конденсированного вещества – металла – рассмотрим кубик вещества, у которого вдоль каждого ребра укладывается  $N$  атомов (или молекул). Для каждого кол-

лективизированного электрона внешней оболочки действие всех положительных ионов и остальных коллективизированных электронов мы будем упрощенно представлять как образование потенциальной ямы с размерами куба и с плоским дном. Выбраться из этой ямы самостоятельно электрон не может – не хватает запаса кинетической энергии. Проекции импульсов электронов на направления вдоль ребер куба не могут быть произвольными – выполняется такое условие: на расстоянии, равном длине ребра куба, должно укладываться целое число полувольт де Бройля. Одновременно проекции импульсов не могут быть вполне определенными: минимальная неопределенность или максимальная точность определения импуль-

са  $\Delta p_{\min} = \frac{h}{ND}$ . Каждому разрешенному набору проекций импульса на соответствующие направления соответствуют два разрешенных состояния электронов, которые отличаются проекциями спинов на заданное направление. (Спин – это внутренняя характеристика состояния электрона. С ним связан собственный момент количества движения электрона и магнитный дипольный момент. Кроме того, спин определяет внутреннюю симметрию частиц и их поведение в коллективе.) Это следует из принципа Паули. Если каждый атом отдает в коллективное пользование  $Z$  электронов с внешней оболочки, то занятыми окажутся  $ZN^3$  разрешенных уровней энергии. При низкой (нулевой) температуре заполняются уровни с минимально возможными энергиями. При этом энергия самого верхнего из заполненных уровней называется энергией Ферми  $E_F$ , а величина импульса, соответствующего этой энергии, называется импульсом Ферми  $p_F$ . Связь между ними известна:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e}.$$

Минимум кинетической энергии (при  $N \gg 1$ ) система электронов будет иметь, если в трехмерном пространстве импульсов будет заполнена приблизительно сферой радиусом  $p_F$  от минимального возмож-

ного значения импульса (с проекциями на три оси координат)  $p_{\min} = \frac{h}{ND}$  до максимальной величины  $p_F$ . Проекция импульсов на оси координат принимают значения, близкие к разрешенным дискретным значениям с квантом импульса, равным минимальному значению импульса

$$\Delta p = \frac{h}{ND}.$$

Как раз таким проекциям импульса и соответствуют подходящие длины волн де Бройля. Эта же величина соответствует и минимальной неопределенности проекций импульса. Такая минимальная разница проекций импульсов позволяет отличить друг от друга разные состояния электронов. (Это различие объясняется принципом Паули: двух электронов с полностью одинаковыми характеристиками в системе быть не может. Поэтому состояния электронов в системе должны быть такими, что их можно различить. Отметим, что система электронов не потому себя так ведет, что ей это «приказывает» принцип Паули. Электроны вели себя так же и задолго до того, как Паули придумал свой принцип, и будут вести себя так всегда. Это принцип Паули был выдвинут для того, чтобы как-то описать и пояснить реальные особенности поведения электронов.)

Внутри сферы радиусом  $p_F$  должны находиться разрешенные наборы проекций импульсов в количестве

$$\frac{4\pi p_F^3}{3\left(\frac{h}{ND}\right)^3} = \frac{ZN^3}{2}.$$

Отсюда находится величина импульса Ферми:

$$p_F = \frac{h}{D} \left( \frac{3Z}{8\pi} \right)^{1/3}$$

и энергия Ферми:

$$E_F = \frac{h^2}{2m_e D^2} \left( \frac{3Z}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

Средняя кинетическая энергия коллективизированных электронов внешних оболочек

атомов находится так:

$$E_{\text{кин ср}} = \frac{\int_0^{p_F} \frac{x^2}{2m} \cdot 4\pi x^2 dx}{\frac{4\pi}{3} p_F^3} = \frac{3}{5} E_F,$$

т.е. она составляет  $3/5$  от энергии Ферми, которая для каждого вещества имеет свое собственное значение. Если считать, что размеры уединенных атомов примерно совпадают со значениями их диаметров, рассчитанными из параметров твердого состояния ( $D = D_{\text{атом}} = D_{\text{кристалл}}$ ), то разница этих энергий равна примерно

$$E_{\text{кин}} - \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{2} \frac{h^2}{mD^2} \left( 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{3Z}{8\pi} \right)^{2/3} \right) \approx \frac{3}{2} \frac{h^2}{mD^2} \left( 1 - \frac{Z^{2/3}}{20} \right).$$

Если каждый атом отдает в коллективное пользование только один электрон внешней оболочки ( $Z = 1$ ), то его вклад в изменение энергии системы равен примерно  $1,42 \frac{h^2}{mD^2}$ . Если в коллективное пользование от каждого атома отдаются по два

электрона внешней оболочки ( $Z = 2$ ), то вклад одного атома в изменение энергии системы становится почти вдвое больше:

$2,76 \frac{h^2}{mD^2}$ . И так далее. Максимальное

число электронов на внешней оболочке атома металла, которые имеют одинаковые главные квантовые числа и могут подвергнуться коллективизации, на практике составляет 6 штук. Это имеет место для элемента полония. Поэтому минимальное изменение энергии каждого электрона, подвергшегося коллективизации,

равно  $1,25 \frac{h^2}{mD^2}$ . Заметим, что минимальный коэффициент 1,25 отличается от максимального 1,42 всего на 12%. Если атомом в коллективное пользование отдаются электроны не только последней, но и предпоследней оболочки или с еще более глубоких оболочек, то вклады каждого такого электрона больше, чем для электронов внешней оболочки.

Нас интересует число электронов, которые поступили от каждого атома или молекулы в «общий обменный фонд» при образовании конденсированного вещества. Для грубой оценки следует сумму молярной теплоты плавления  $L_{\text{пл}}$  и молярной теплоты парообразования  $L_{\text{пар}}$  вещества, т.е. энергию  $L_{\text{пл}} + L_{\text{пар}}$ , которая необходима, чтобы испарить 1 моль вещества, разделить на число Авогадро ( $N_A$ ) и разделить на  $(1,42 \div 1,25) \frac{h^2}{mD^2}$ . Коэффициент  $(1,42 \div 1,25)$  выбирается в зависимости от того, сколько электронов отдает каждый атом в коллективное пользование и сколько электронов атома живет на самой внешней его электронной оболочке. Забегая вперед, скажем, что для всех веществ, и металлов и неметаллов, количество коллективизированных электронов, приходящееся на один атом, больше, чем число электронов на внешней оболочке атома. В этом случае нужно учитывать, что вклады в изменение кинетической энергии электронов внутренних оболочек, подвергшихся коллективизации, более существенны, чем соответствующие вклады электронов внешней оболочки. Для них (электронов внутренних оболочек) размер  $D_{\text{ион}}$  соответствует примерно диаметру иона: атома, у которого отсутствуют все электроны внешней оболочки. Итак,

$$\frac{L_{\text{пл}} + L_{\text{пар}}}{N_A} = n_{\text{внеш}} \frac{3h^2}{2mD^2} \left( 1 - \left( \frac{n_{\text{внеш}}}{20} \right)^{2/3} \right) + n_{\text{внутр}} \frac{3h^2}{2mD_{\text{ион}}^2} \left( 1 - \left( \frac{n_{\text{внутр}}}{20} \right)^{2/3} \right) + \dots$$

Приведенная формула используется для подсчета количества коллективизированных электронов  $n_{\text{внеш}}$  и  $n_{\text{внутр}}$  на внешних и внутренних оболочках атомов, входящих в состав конденсированного вещества, для металлов, а также для оценки количества электронов, которые отдают в коллективное пользование молекулы веществ неметаллов при конденсации.

### Химические связи атомов неметаллов в двухатомных молекулах (ковалентные связи)

При образовании молекул разных химических веществ тоже происходит изменение размеров области проживания части электронов, и это соответствует уменьшению их кинетической энергии. При образовании большинства молекул выделяется тепловая энергия (тепловой эффект химической реакции).

Рассмотрим образование молекул простых веществ: водорода, азота, кислорода, серы, фосфора, фтора, хлора, брома. Объединение двух атомов в одну молекулу мало изменяет размеры самих атомов, следовательно, размер области проживания для коллективизированных электронов изменяется в первом приближении только в одном направлении – вдоль линии, на которой расположены ядра двух атомов. В отдельном (уединенном) атоме каждый электрон обладает кинетической энергией

$$E_{\text{атом}} = \frac{12}{8} \frac{h^2}{m_e D^2}.$$

После образования двухатомной молекулы энергия каждого коллективизированного электрона составит примерно

$$E_{\text{мол}} \approx \frac{2}{2} \frac{h^2}{m_e D^2} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{m_e (2D)^2} = \frac{9}{8} \frac{h^2}{m_e D^2}.$$

Разница этих энергий равна

$$\Delta E = E_{\text{атом}} - E_{\text{мол}} = \frac{3}{8} \frac{h^2}{m_e D^2}.$$

При образовании одного моля двухатомных молекул в двух молях атомов изменяется кинетическая энергия некоторого количества электронов в каждом из атомов. Чтобы найти это некоторое количество электронов, нужно молярную энергию связи (молярную энергию диссоциации молекул) разделить на число Авогадро и на  $2\Delta E$ . Если получившееся число больше, чем количество электронов, находящихся на внешней оболочке уединенного атома, то следует учесть частичную коллективизацию электронов внутренней оболочки атома. В соответствии с приведенной фор-

мулой были рассчитаны количества электронов, отданных каждым атомом в коллективное пользование при образовании двухатомных молекул. Результаты вычислений для простых веществ неметаллов представлены в таблице 1.

Вещество (молекула)	H <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	F <sub>2</sub>	Cl <sub>2</sub>	Br <sub>2</sub>	S <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>
На внешней оболочке атома электронов	1	6	5	7	7	7	6	5
Из них коллективизировано	1,3	6	5	2,80	7	7	6	5
На внутренней оболочке атома электронов	0	2	2	2	8	18	8	8
Из них коллективизировано	0	0,05	0,88	0,00	0,06	0,09	0,13	0,30

Из таблицы видно, что наибольшую ошибку при подсчете количества коллективизированных электронов приведенная формула дает для водорода: 1,3 вместо 1 (снова напомним, что величины в таблице – это достаточно грубые оценки). Заметим, что только атомы фтора отдают в коллективное пользование не все, а лишь часть (приблизительно 3 штуки из 7) электронов внешней оболочки. Атомы остальных веществ отдают все свои внешние электроны. Наиболее щедры атомы азота: они вдобавок к пяти внешним электронам отдают с внутренней оболочки в общий котел еще по одному электрону (0,88 ≈ 1).

Для конденсированных простых веществ неметаллов количества коллективизированных электронов приведены в таблице 2.

Как видно из таблицы, молекулы легких благородных газов (He, Ne, Ar) и двухатомные молекулы водорода, фтора, азота и кислорода в конденсированном веществе не отпускают от себя даже по одному

электрону. Каждая молекула воды в составе льда участвует, как известно, в образовании четырех водородных связей, и почти такое же число электронов коллективизировано у каждой молекулы воды (3,9). Многоатомные молекулы ацетона, четы-

рехлористого или четырехбромистого углерода и бензола при конденсации отдают в коллективное пользование несколько электронов своей внешней оболочки (не все, а только небольшую часть). Чем крупнее атомы, входящие в состав молекул неметаллов, тем больше электронов они (молекулы) отдают в коллективное пользование, переходя в конденсированную фазу вещества. Примеры, подтверждающие такую тенденцию, это ряд благородных газов – гелий,

неон, аргон, криптон, ксенон, радон; ряд галогенов – фтор, хлор, бром, йод; ряд метана CH<sub>4</sub> и его аналогов, в которых атомы водорода замещены атомами фтора, хлора и брома: CF<sub>4</sub>, CCl<sub>4</sub>, CBr<sub>4</sub>. Для последней группы молекул на каждый из четырех входящих в молекулу атомов галогена (F, Cl, Br) при конденсации приходится примерно столько же коллективизированных электронов, сколько их из одной молекулы коллективизируется при конденсации чистых веществ (F<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, Br<sub>2</sub>).

И наконец, обсудим конденсированные вещества металлы. В таблице 3 в первой колонке записано вещество, во второй – число электронов на внешних оболочках, в третьей – сколько электронов из них коллективизировано, в четвертой – число электронов на первой внутренней оболочке, в пятой – сколько электронов из них коллективизировано. Бор, германий и кремний – неметаллы, но включены в таблицу

вместе с металлами, поскольку они в газообразном состоянии не образуют двухатомных молекул или молекул из большего числа атомов. В твер-

Таблица 1

рехлористого или четырехбро-

мистого углерода и бензола при

конденсации отдают в коллек-

тивное пользование несколько

электронов своей внешней обо-

лочки (не все, а только неболь-

шую часть). Чем крупнее атомы,

входящие в состав молекул не-

металлов, тем больше электро-

нов они (молекулы) отдают в

коллективное пользование, пе-

реходя в конденсированную фазу

вещества. Примеры, подтверж-

дающие такую тенденцию, это

ряд благородных газов – гелий,

неон, аргон, криптон, ксенон, радон;

ряд галогенов – фтор, хлор, бром, йод;

ряд метана CH<sub>4</sub> и его аналогов, в которых

атомы водорода замещены атомами фтора,

хлора и брома: CF<sub>4</sub>, CCl<sub>4</sub>, CBr<sub>4</sub>. Для

последней группы молекул на каждый из

четырёх входящих в молекулу атомов

галогена (F, Cl, Br) при конденсации при-

ходится примерно столько же коллективизи-

рованных электронов, сколько их из од-

ной молекулы коллективизируется при

конденсации чистых веществ (F<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, Br<sub>2</sub>).

И наконец, обсудим конденсированные

вещества металлы. В таблице 3 в первой

колонке записано вещество, во второй –

число электронов на внешних оболочках,

в третьей – сколько электронов из них

коллективизировано, в четвертой – число

электронов на первой внутренней оболоч-

ке, в пятой – сколько электронов из них

коллективизировано. Бор, германий и крем-

ний – неметаллы, но включены в таблицу

вместе с металлами,

поскольку они в газо-

образном состоянии

не образуют двух-

атомных молекул или

молекул из большего

числа атомов. В твер-

He	H <sub>2</sub>	Ne	F <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	Ar	P	S	CH <sub>4</sub>	Kr	Xe
0,003	0,03	0,11	0,31	0,50	0,50	0,57	0,62	0,71	0,85	0,90	1,51
CF <sub>4</sub>	Cl <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> S	Rn	Br <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	I <sub>2</sub>	Ацетон	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	CCl <sub>4</sub>	CBr <sub>4</sub>	
1,53	1,66	2,1	2,2	2,74	3,9	5,15	5,62	7,0	7,18	9,7	

Таблица 3

Al	3	3	8	1,55
Ba	2	2	8	5,8
Be	2	2	2	0,52
B*	3	3	2	0,315
V	5	5	8	1,1
W	6	6	18	3,9
Ga	3	3	18	1,3
Ge*	4	4	18	2,55
Fe	2	2	6	4,4
Au	1	1	18	17
In	3	3	18	3,2
Ir	2	2	15	11,9
Cd	2	2	18	1,33
K	1	1	8	2,56
Ca	2	2	8	3,25
Si*	4	4	8	0,356
Li	1	1	2	1,47
Mg	2	2	8	1,2
Cu	1	1	18	5,94
Mo	6	6	18	2,9

Na	1	1	8	1,39
Ni	2	2	16	4,32
Sn	4	4	18	2,4
Pt	1	1	17	13,32
Pu	2	2	8	5,68
Po	6	5,7	18	0,0
Ra	2	2	8	6,45
Hg	2	2	18	0,58
Rb	1	1	8	3,0
Pb	4	4	18	1,77
Ag	1	1	18	7,1
Sb	5	5	18	0,58
Tl	3	3	18	2,73
Ta	5	5	18	4,4
Ti	2	2	10	5,44
U	6	6	18	4,0
Cs	1	1	8	3,63
Zn	2	2	18	0,93
Zr	4	4	18	7,0

дом конденсированном состоянии они представляют собой не молекулярный кристалл, как, например, азот или кислород, а атомный кристалл, как все металлы.

Посмотрим на получившиеся результаты, задумаемся и в меру своих знаний прокомментируем их. Прежде всего, обратим внимание на то, что из всех приведенных в таблице металлов у одного единственного полония коллективизированы электроны только внешней оболочки атома в количестве порядка 6. Есть атомы металлов, отдающие в коллективное пользование электроны внешней оболочки и менее одного электрона с внутренних оболочек, это бериллий, ртуть, сурьма и цинк. Подавляющее большинство металлов отдают в коллективное пользование не только электроны внешней оболочки, но и

заметную часть электронов из внутренних оболочек.

### Выводы

С помощью простых расчетов показано, что для качественного объяснения причин возникновения энергии связи конденсированных веществ и образования химических соединений можно использовать идею о том, что электроны внешних и внутренних оболочек атомов подвергаются коллективизации или передаются от одного атома к другому. Природа изменения кинетической энергии электронов, с которым связаны теплота плавления и теплота испарения веществ, а также энергия диссоциации молекул на атомы, имеет квантовые корни.

## Нобелиада-21

Л. БЕЛОПУХОВ

**И** ПО ФИЗИОЛОГИИ И МЕДИЦИ-  
не, и по химии, и по экономике пре-  
мии этого года хорошо соответствуют заве-  
щанию Нобеля – «ежегодное награждение  
тех лиц, которые в течение предшествую-  
щего года сумели принести наибольшую  
пользу человечеству». Правда, уже давно  
речь идет не о предшествующем годе, а о  
предшествующем времени, иногда доволь-  
но значительном.

Впечатляет награда по физиологии и  
медицине. Найдена разгадка реакции нер-  
вной ткани человека не только на такое  
явление, как боль, но и на гораздо более  
интимные чувства – тепло, холод и при-  
косновение. Может быть, недалеко и раз-  
гадка такого прикосновения, как нежность  
и ласка. Недаром статья об этой премии в  
журнале «Наука и жизнь» названа авто-  
ром «Разгадка теплых объятий». Так и  
хочется назвать награду этого года меди-  
цинско-поэтической.

Необычной, «инверсной» хочется на-  
звать работу, удостоенную премии по хи-  
мии. Обычный путь каталитического син-  
теза асимметричных молекул дан приро-  
дой на клеточном уровне А теперь для ряда  
реакций найден путь каталитического син-  
теза таких молекул без участия биологи-  
ческого клеточного механизма – как гово-  
рят биохимики, «*in vitro*», т.е. в стекле, в  
пробирке, а не «*in vivo*», т.е. в живом  
организме. Это открывает (и уже откры-  
ло) широкие возможности для синтеза  
лекарств направленного действия, особен-  
но для наследственных болезней.

Несколько особняком стоит премия по  
физике. Общее ее название: «За новатор-  
ский вклад в наше понимание сложности  
физических проблем». Другими словами,  
это премия за уточнение понимания слож-

ности. Вообще говоря, «сложность систе-  
мы» – понятие скорее математическое,  
нежели физическое. Но премия 2021 года  
придает важность не абстрактно-матема-  
тической стороне понятия «сложность», а  
совершенно конкретным физическим ис-  
следованиям и математическим теоретико-  
физическим работам, доведенным в ряде  
случаев до сравнения с многолетними эмпи-  
рическими наблюдениями и измерениями.

В качестве плацдарма исследований, где  
проявляется особая сложность явлений,  
Нобелевский комитет избрал одну из акту-  
альнейших научных проблем – проблему  
глобального потепления земного климата.  
Эта проблема понятна всем жителям Зем-  
ли, она обсуждается в научных и научно-  
популярных журналах, на политических и  
экономических форумах и просто в люд-  
ских беседах. Особенно актуальной эта  
тема стала в прибрежных городах и при-  
морских странах (например, в Голлан-  
дии). Ведь повышение температуры на  
Земле означает частичное таяние ледников  
и повышение уровня мирового океана, что  
грозит затоплению местностей, невысоко  
расположенных над берегом. Когда стали  
подсчитывать возможные сроки затопле-  
ния и изменения в мировой флоре и фауне,  
которые могут происходить при этом, то у  
разных футурологов получались сроки  
грядущих катаклизмов, отличающиеся в  
десять раз. Причина потепления – в  
поглощении солнечного тепла так называ-  
емыми парниковыми газами и прежде все-  
го углекислым газом. Это потепление ста-  
ли называть парниковым эффектом.

Наметился даже раскол в отношении к  
этой проблеме. Часть ученых-климатоло-  
гов, геологов, астрофизиков утверждала,  
что потепление – следствие естественных  
природных процессов, прежде всего свя-  
занных с Солнцем и процессами, на нем

происходящими. Но еще в 1896 году знаменитый шведский химик Сванте Аррениус высказал идею, что главная причина потепления – увеличение концентрации углекислого газа в земной атмосфере. Ведь на Венере, например, большая концентрация углекислоты в атмосфере – главная причина высокой средней температуры на этой планете (выше 400 °С). Но в XX веке значительная часть ученых, а кроме того, экономистов, технологов, политиков утверждали, что глобальное потепление – антропогенный фактор, связанный с резким увеличением потребления углеродных топлив для автотранспорта и тепловых электростанций, происшедшем на рубеже 60-х годов прошлого столетия.

Эта тема была очень выгодной для обоснования и создания определенного имиджа у политических деятелей и получения грантов на исследования в научных лабораториях. Но постепенно ажиотаж вокруг этой проблемы стал затихать, все возможные гранты были получены и истрачены. И начались серьезные научные исследования. Их результаты тогда не получали широкого освещения в научной и околонаучной литературе, они не выходили за пределы узкоспециализированных научных журналов. Исследователи понимали, что нужно время для уверенного получения надежных результатов. И вот наконец эти работы получили высокую оценку – Нобелевскую премию по физике. Работы имели не только узко направленный характер – разобраться в проблеме глобального потепления. У исследователей было ясное понимание сложности вопроса, поэтому он и решался как частный случай исследования физически сложной системы.

Вообще говоря, это – не первая нобелевская награда за работы, изучающие изменения климата и его последствия. В 2007 году Нобелевская премия мира была присуждена Межправительственной группе экспертов ООН по изменению климата (МГЭИК) и бывшему вице-президенту США Альберту Гору «за их усилия по распространению знаний об антропогенном воздействии на изменение климата и определению основных принципов, кото-

рые необходимо выработать для противодействия таким изменениям». Эти работы группой экспертов ООН продолжают и по сей день. Нобелевская премия мира была присуждена за их четвертый доклад ООН. А недавно, 9 августа 2021 года, состоялся шестой доклад. Нобелевская премия по экономике была в 2018 году присуждена Полу Ромеру и Уильяму Нордхаусу (США) «за интеграцию проблемы изменения климата и технологических инноваций в долгосрочный макроэкономический анализ».

Но эти премии не были наградой за исследовательские научные работы. Они лишь фиксировали работы по обобщению имеющихся данных. Двенадцать раз (с 1924 по 1945 г.) номинировалась на Нобелевскую премию по физике работа норвежского физика Вильгельма Бьеркнеса «Прогноз погоды как физическая задача». Но Нобелевский комитет по физике так и не посчитал эту работу достойной высокой награды. И, наконец, в этом году Нобелевский комитет по физике принял решение наградить непосредственно тех ученых, которые заложили основы нашего современного понимания процессов изменения планетарного климата. Это решение было давно ожидаемым и восстанавливающим справедливость.

Половина премии (5 миллионов шведских крон, что соответствует примерно 500000 евро или 40 миллионам рублей) присуждена климатологам Сюкуро Манабэ (Syukuro Manabe, Япония) и Клаусу Хассельману (Claus Hasselmann, Германия) «за моделирование климата Земли, математическое описание изменчивых систем и точное предсказание глобального потепления». Как ясно из этой мотивировки, премия дана за математически точное предсказание глобального потепления в отличие от многочисленных спекулятивных работ и рассуждений на эту тему. Вторую половину премии получил итальянский ученый Джорджо Паризи (Giordgio Parisi, Италия) «за открытие взаимодействий в хаосе и флуктуациях в физических системах от атомарных до планетарных масштабов».



*Сюкуро Манабэ*

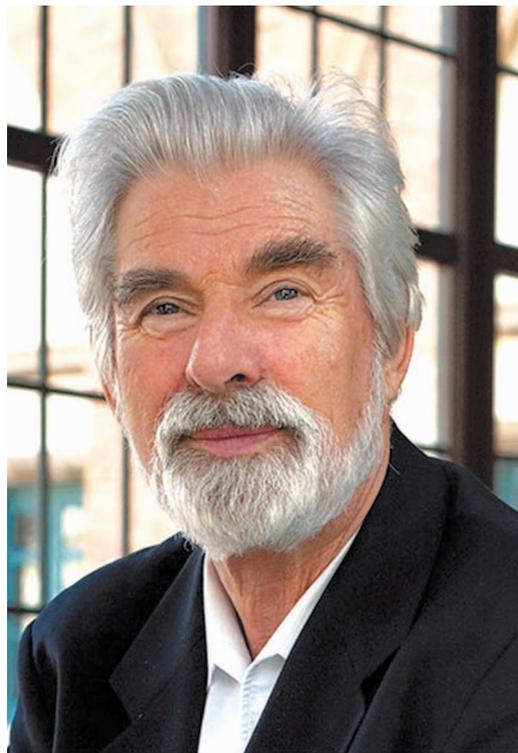
**Сюкуро Манабэ** в 26-летнем возрасте получил докторскую степень по метеорологии в одном из японских университетов, после чего в 1957 году уехал в США, где занялся изучением физики атмосферы и стал тогда одним из первых в мире искать взаимосвязь между растущей концентрацией углекислого газа в атмосфере и ростом глобальной температуры. Он не только фиксировал эту взаимосвязь, но и, главное, строил физические модели для ее объяснения.

В моделях Манабэ учитывалась вертикальная конвекция воздушных масс и тепловой вклад глобального круговорота воды в природе – отдача тепла при конденсации влаги. Вначале он не побоялся сделать одномерное приближение – поведение вертикальной колонны углекислого газа высотой 40 км. Дальнейшие его работы были значительно усложнены переходом к трехмерной модели и учетом движения других газов атмосферы. Оказалось, что концентрации азота и кислорода практически не влияют на атмосферную температуру, тогда как удвоение концентрации углекислого газа (от 0,02% до 0,04%) повышает температуру на 2 К. А это очень много!

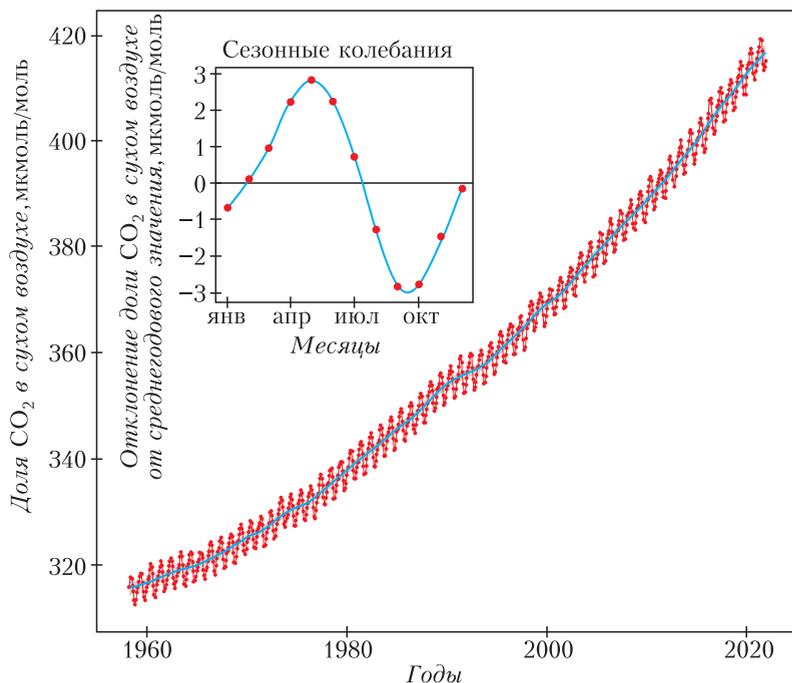
Сегодня 90-летний ученый продолжает активно работать в должности старшего метеоролога Принстонского университета США, одного из самых знаменитых научных учреждений в мире (именно в этом университете работал Альберт Эйнштейн последние 20 лет своей жизни). Не правда ли, интересная должность – «старший метеоролог университета»?

Сюкуро Манабэ и сейчас – страстный проповедник идеи глобального потепления, вызванного человеческой деятельностью, так называемой антропогенной природой глобального потепления. Он говорит, что наличие в ученом мире людей, которые в это не верят, для него является самой большой загадкой, «понять которую в миллион раз труднее, чем понимать причины изменения климата».

**Клаус Хассельман** – ровесник Манабэ, ему тоже 90 лет. Он стал доктором наук по гидродинамике в Геттингенском университете и после этого занимался построением математических моделей волновых процессов в океанах и течениях, заняв долж-



*Клаус Хассельман*

Среднемесячная и среднегодовая концентрации  $\text{CO}_2$ 

Кривая Килинга

ность океанолога в университете океанологии в Калифорнии.

В это время его друг Чарльз Дэвид Килинг, большой любитель горных путешествий, в погодной высокогорной обсерватории на гавайских островах на вершине горы Мауна Лоа проводил многолетние измерения концентрации  $\text{CO}_2$  в местности, далекой от цивилизации, где должны были усредняться все антропогенные влияния на атмосферу. Именно Килингом были получены надежные данные об изменении концентрации углекислого газа от 3,15 промилле (1 промилле = 0,1%, обозначается 1‰) в 1958 году до 3,8 ‰ в 2005 году, когда Килинг умер от сердечного приступа. Но работы в этой обсерватории продолжают и сейчас, и для 2020 года они дали уже значение концентрации углекислого газа 4,15 ‰.

«Кривая Килинга» и сейчас является самым надежным опытным обоснованием для всех работ по глобальному потеплению. Недаром она высечена на стене здания Национальной академии наук в Ва-

шингтоне. И, конечно, Чарльз Килинг был бы сейчас заслуженным номинантом на Нобелевскую премию 2021 года. И присуждение премии его другу и научному соратнику Хассельману увековечивает научные достижения обоих друзей. В тандеме Килинг–Хассельман первый был «добытчиком» фактов, а второй — их тщательным анализатором. Он применил ряд математических методов анализа информации, получивших образные названия «случайные блуждания» и «отпечатки пальцев».

Основное внимание Хассельман уделит нахождению стандартных отклонений от средних

значений, вызываемых сезонными изменениями содержания углекислого газа в атмосфере, связи самых высоких и самых низких отклонений с конкретными погодными условиями в эти годы, т.е. попыткам связать погоду и климат и сделать предсказания погоды более надежными. При этом он достоверно показал, что если бы не было увеличения концентрации углекислого газа в атмосфере, совпавшего по времени с резким увеличением количества тепловых электростанций и другими антропогенными факторами, то положение с температурой атмосферы вовсе не было бы таким критическим, она практически больше бы почти не возрастала.

Хассельманн еще в 1975 году вернулся в родную Германию, основал институт Макса Планка по метеорологии и до 1989 года был одним из ее директоров, сейчас продолжает занимать профессорскую должность в этом институте.

**Джорджо Паризи** — итальянский физик-теоретик. Он защитил докторскую диссертацию в родном римском универси-



*Джорджо Паризи*

тете «Сапиенум», там же и работает сейчас в профессорской должности. В Италии он хорошо известен своей общественно-политической деятельностью – неистовой публичной критикой недостаточного финансирования итальянской науки.

Еще в 1977 году бельгийский химико-физик Илья Пригожин стал Нобелевским лауреатом по химии «за работы по термодинамике необратимых процессов и их использование в химии и биологии». Пригожиным было постулировано существование неравновесных термодинамических систем, которые при определенных условиях поглощая энергию и вещество из окружающего пространства, могут совершать качественные скачки с переходом системы из одного состояния в другое, и эти скачки – непредсказуемы. В системе происходит самоорганизация. Научное направление, которым стал заниматься Пригожин, а вслед за ним и его многочисленные последователи, получило название синергетики. Сам Пригожин изучал вопрос, как ведет себя при этом во времени и пространстве такая важная функция состояния системы, как энтропия – количественная мера хаоса.

Типичным примером возникновения порядка из хаоса являются фазовые переходы. Многие исследователи стали заниматься анализом фазовых переходов с позиций синергетики. Однако оказалось,

что математических методов Пригожина и его последователей недостаточно для предсказания поведения сложных систем. Занявшись этой проблемой, Джорджо Паризи достиг успеха именно в математическом обосновании закономерности появления тех гигантских флуктуаций на микроуровне, которые приводят к качественно новым явлениям на макроуровне.

Паризи с сотрудниками изучал такие явления, как фронты горения (фронты языков пламени), смачивание, кристаллизация, границы турбулентных зон в жидких кристаллах, в самой современной физике – глубокое неупругое рассеяние в квантовой хромодинамике (появление неожиданных сложных кварковых структур) и такую неожиданную для физика проблему, как распределение транспортных потоков. В этот перечень надо добавить поиски выбросов на кривой Лизинга – флуктуации климатических изменений. Вызывает восхищение и интерес разнообразие этих увлечений Паризи.

Но все дело в том, что все эти разнообразные задачи были объединены одной общей чертой. Степень их сложности очень большая. В каждой из них – огромное число различных воздействий, и даже самые современные суперкомпьютеры не могут справиться с решением таких задач «в лоб». Математические методы Паризи позволяют самой математике выделять те воздействия, которые приводят к гигантским флуктуациям поведения системы. В конечном счете его методика сводится к нахождению определенного числа энергетически выгодных (с меньшей энергией) состояний системы, а применяемая математика похожа в разных задачах.

Сам Паризи еще в 1980-е годы открыл теоретически ряд закономерностей возможного поведения некоторых материалов, казавшихся полностью неупорядоченными, и создал математический аппарат. Наиболее полное решение было получено Паризи для рассмотрения возможных состояний так называемых «спиновых стекол». Успешное использование решений Паризи для спиновых стекол позволяет сейчас ставить вопрос о рожде-

нии целой отрасли получения совершенно новых материалов.

Математически постановка обеих задач – поведение спиновых стекол при изменении их состава и поведение климата Земли при изменении состояния земной атмосферы – оказывается очень похожей. И этот факт дал возможность обоснования присуждения Паризи Нобелевской премии за общность его решений для хаоса и для флуктуаций в широком спектре физических систем – от атомарных до планетарных, от взаимодействий кварков до глобального потепления климата.

В самом решении Нобелевского комитета нет ни слова о спиновых стеклах. Это комментаторы после известия о присуждении Паризи Нобелевской премии бросили перерывать работы Паризи. Бьостро выяснилось, что если про спиновые стекла еще хоть что-нибудь понятно, да и сами эти слова «спин» и «стекло» хорошо известны, то о кварках или жидких кристаллах у «нормальных» людей нет никакого представления. Надо сказать, что спиновые

стекла – это вовсе не стекла в нашем обычном понимании. Со стеклами их роднит только тот факт, что они не кристаллические, а аморфные тела. Но представляют они собой не соединения из окислов кремния, натрия и кальция (как обычные стекла), а сплавы двух металлов, например меди и марганца, золота и железа, серебра и марганца, меди и неодима, в соотношении примерно 10:1. И, конечно, они совершенно не прозрачны. Один атом спинового стекла при этом – немагнитный, а другой (железо, марганец, неодим) представляет собой так называемый ферромагнетик. К сожалению, школьные (да и вузовские) учебники по физике не объясняют природу ферромагнетизма, ферримагнетизма и антиферромагнетизма. Говорится лишь, что для ее понимания необходимо хотя бы минимальное знание квантовой механики. Нужно понять, в частности, что такое спин и что такое обменное взаимодействие. Но попытка разобраться в этом не наказуема.

## НЕИЩЕРПАЕМЫЙ ТАНГРАМ

(Начало см. на 2-й с. обложки)

Интересно найти все выпуклые сеточные фигуры из тангов. Напомним три определения выпуклого многоугольника (они эквивалентны): 1) если многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону; 2) если все внутренние углы многоугольника меньше развернутого; 3) если для любых двух точек внутри многоугольника отрезок с концами в этих точках лежит целиком внутри многоугольника.

Из полного набора элементов танграма можно сложить 13 разных выпуклых сеточных многоугольников. Среди них ровно один треугольник,

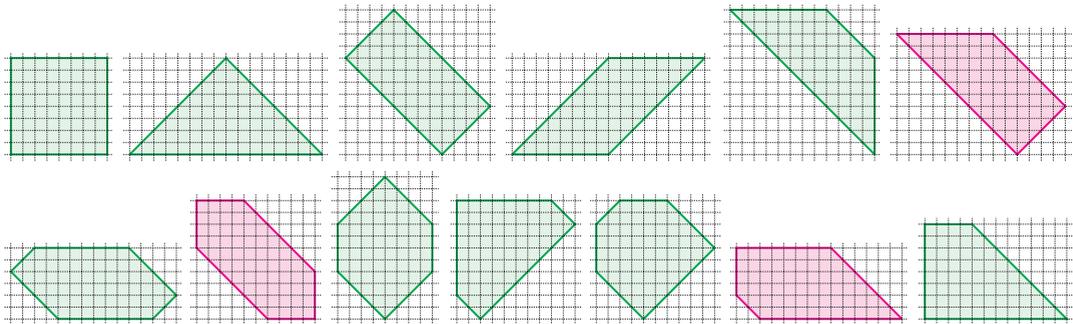
шесть четырехугольников, два пятиугольника и четыре шестиугольника.

Попробуйте объяснить, почему треугольник единственный, а многоугольников с 9 и более сторонами не бывает. Семиугольников и восьмиугольников тоже не бывает, но доказать это сложнее, поскольку придется оценивать минимальную площадь таких фигур из тангов на сетке.

Постарайтесь сложить все эти 13 фигур. Красным цветом нарисованы те, сложить которые труднее.

Желаем успехов!

*А.Ковальджи*



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2686 и M2689 предлагалась на XXIV Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

## Задачи M2686–M2689, Ф2693–Ф2696

**M2686.** 99 команд сыграли двухкруговой турнир по волейболу: каждая сыграла с каждой матч дома и матч в гостях. Каждая команда выиграла ровно половину своих домашних матчей и ровно половину гостевых. Докажите, что какая-то из команд дважды обыграла какую-то другую.

*М.Антипов*

**M2687.** Дан правильный  $n$ -угольник,  $n \geq 4$ . Рассматриваются расстановки в его вершинах  $n$  чисел, каждое из которых равно 1 или 2 (всего  $2^n$  расстановок). Для каждой такой расстановки  $K$  находим количество нечетных сумм среди всех сумм чисел в нескольких подряд идущих вершинах. Это количество обозначим  $a(K)$  (например, для расстановки  $K$ , показанной на рисунке 1,  $n = 5$  и  $a(K) = 8$ ).

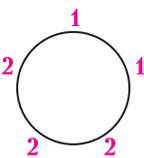


Рис. 1

а) Найдите наибольшее возможное значение  $a(K)$ . б) Найдите количество расстановок, для которых  $a(K)$  принимает это наибольшее возможное значение.

*П.Кожевников*

**M2688.** Пусть  $T_a, T_b, T_c$  – точки касания вписанной окружности  $\omega$  треугольника  $ABC$  со сторонами  $BC, CA, AB$  соответственно (рис. 2). Пусть  $X, Y, Z$  – такие точки на окружности  $\omega$ , что  $A$  лежит на луче  $YX$ ,  $B$  лежит на луче  $ZY$ , а  $C$  лежит

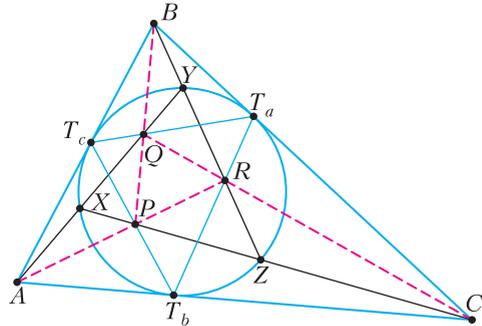


Рис. 2

на луче  $XZ$ . Пусть  $P$  – точка пересечения отрезков  $ZX$  и  $T_bT_c$ , и аналогично  $Q = XY \cap T_cT_a$ ,  $R = YZ \cap T_aT_b$ . Докажите, что точки  $A, B, C$  лежат соответственно на прямых  $RP, PQ, QR$ .

*Л.Шатунов (ученик 11 класса)*

**M2689.** В английском городе 1000 джентльменов, зарегистрированных в реестре под номерами от 1 до 1000. Любые 720 из них образуют клуб. Мэр хочет обложить каждый клуб налогом, который выплачивается всеми участниками клуба в равных долях (налог – произвольное неотрицательное вещественное число). При этом суммарный налог, выплачиваемый джентльменом, не должен превосходить его номера в реестре. Какой наибольший налог может собрать мэр?

*И.Богданов*

**Ф2693.** Три одинаковых по форме шарика соединены невесомыми упругими (т.е.

растяжимыми) нитями и подвешены к потолку на длинной нити, как показано на рисунке 3. Верхний – это теннисный шарик со стандартными параметрами: диаметр  $D = 40$  мм, масса оболочки  $m = 2,7$  г. Средний и нижний – это сплошные шарики из алюминия плотностью  $\rho_a = 2,7$  г/см<sup>3</sup>. Шарики все вместе погружены в бочку с водой так, что они не касаются стенок и дна бочки. Расстояния от верхнего шарика до поверхности воды и от нижнего до дна бочки, а также от всех шариков до стенок бочки значительно больше диаметров шариков. И расстояния между соседними шариками тоже во много раз больше размеров шариков. С какими ускорениями будут двигаться шарики сразу после перерезания одной из нитей? (Не забудьте про присоединенную массу воды, которая для шарика равна половине массы воды, вытесненной шариком.) Вязкостью воды можно пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

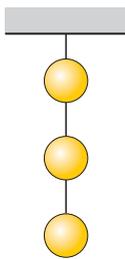


Рис. 3

С. Шариков

**Ф2694.** Хорошо теплоизолированный сосуд в форме куба стоит на горизонтальном столе. Сосуд разделен тонкими вертикальными перегородками на три секции (рис. 4; вид сверху). Все перегородки сделаны из одинакового материала и имеют одинаковую толщину. Секции сосуда доверху заполнили чаем (Ч), супом (С) и компотом (К). После чего сосуд закрыли не проводящей тепло крышкой. В начальный мо-

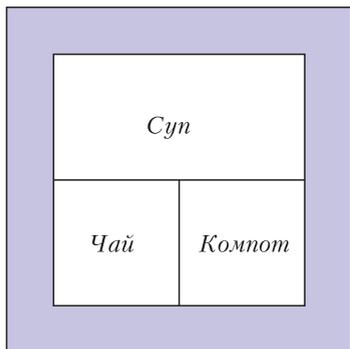


Рис. 4

мент температуры жидкостей в сосуде были такими:  $T_ч = 92$  °С,  $T_с = 60$  °С,  $T_к = 40$  °С. Через минуту температура чая стала равной 91 °С. Тут объявили учебную тревогу и про жидкости забыли. Через какое время компот прогрелся до первоначальной температуры супа?

А. Зильберман

**Ф2695.** Тепловые свойства разных веществ в конденсированном состоянии имеют одинаковые характеристики. Например, для большинства простых веществ при средних температурах выполняется соотношение, которое называют законом Дюлонга и Пти. Согласно этому закону молярная теплоемкость твердых веществ весьма близка к величине  $3R \approx 25$  Дж/(моль · К). При низких температурах наблюдается отступление от этого закона. Та температура, при которой для данного вещества его молярная теплоемкость становится примерно на 10% меньше величины  $3R$ , называется температурой Дебая  $T_D$ . При температурах, значительно меньших температуры Дебая, молярные теплоемкости простых веществ в твердом состоянии зависят от температуры одинаковым образом:  $C_{\text{мол}} = A(T/T_D)^3$ , где  $A$  – одинаковая для всех простых веществ величина.

В пенопластовую емкость с нулевой теплопроводностью и нулевой теплоемкостью стенок поместили 635 г меди при температуре 3 К и 627 г висмута при температуре 10 К. Какая температура установится со временем в этой емкости? Температура Дебая для меди  $T_{Dм} = 315$  К, для висмута  $T_{Dв} = 120$  К. Молярная масса меди  $M_m = 63,5$  г/моль, висмута  $M_в = 209$  г/моль.

В. Дебаев

**Ф2696.** На два непроводящих и немагнитных цилиндра одинаковой длины  $l$ , имеющих разные диаметры  $D_1$  и  $D_2$ , много меньшие длины  $l$ , намотаны виток к витку в один слой по  $N$  витков тонкой сверхпроводящей проволоки с очень тонким слоем изоляции снаружи. Меньшую из получившихся двух катушек вставили соосно внутрь катушки с большим диаметром. Катушки соединены так, как показано на рисунке 5. При таком соединении по вит-

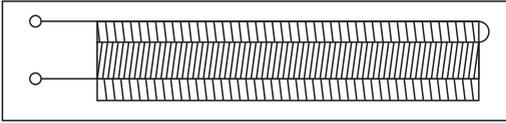


Рис. 5

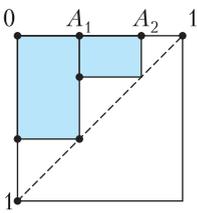
кам двух катушек течет одинаковый ток и магнитное поле внутри катушки меньшего диаметра равно нулю. К выводам системы катушек подключили заряженный конденсатор. Емкость конденсатора  $C$ , а на его обкладках находились электрические заряды  $+Q$  и  $-Q$ . Какой максимальный по величине ток будет протекать по виткам катушек?

С.Дмитриев

### Решения задач M2674–M2677, Ф2680–Ф2684

**M2674.** Дан отрезок  $[0; 1]$ . За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит  $1/2$ .

Построим на нашем отрезке как на стороне квадрат и проведем в нем диагональ, противоположную точке  $0$  (см. рисунок).



Отметим первую точку  $A_1$ , разбив исходный отрезок на два. Произведение длин полученных отрезков равно площади заштрихованного прямоугольника, две противоположные вершины которого —  $0$  и точка на диагонали, лежащая на перпендикуляре к  $A_1$ .

Добавляя новые точки, мы будем добавлять на картинке новые прямоугольники, которые не накладываются друг на друга и все лежат не ниже диагонали. Поэтому их суммарная площадь (равная сумме чисел на доске) не превосходит половины площади квадрата, т.е.  $\frac{1}{2}$ .

Задачу можно решить и индукцией по количеству ходов  $n$ , доказывая более общее утверждение: для отрезка длины  $a$  после не более чем  $n$  ходов сумма чисел на доске не превысит  $\frac{a^2}{2}$ . Действительно, базу

легко проверить. Проверим переход  $n-1 \rightarrow n$ . Пусть на первом ходу отрезок длины  $a$  разбили на отрезки длины  $b$  и  $c$ , где  $b+c=a$ . Тогда  $n-1$  оставшихся ходов сделаны для «подотрезков» одного из отрезков  $b$  или  $c$ . Тогда, по предположению индукции, сумма всех чисел на доске на всех ходах, кроме первого, не превысит  $\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$ . Итого, сумма всех чисел на доске после  $n$  ходов не превышает  $bc + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ , что и требовалось доказать.

М.Лукин, С.Дориченко,  
П.Кожевников

**M2675.** В одной из клеток шахматной доски  $10 \times 10$  стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим — вернулась на нее.

Зафиксируем диагональ. Крайние клетки маршрута разного цвета, поэтому на диагонали не более одной крайней клетки. Ход ладьи соединяет две клетки (направление неважно). Из крайних клеток маршрута выходит один ход, из всех остальных — по два. С диагонали выходит не менее  $2 \cdot 10 - 1 = 19$  ходов. Все они ведут на соседние с диагональю клетки, а их только 18. Значит, есть два хода, соединяющих клетку диагонали с одной соседней клеткой. Это и есть искомая пара последовательных ходов. Задача решена.

Несколько другой интересный вариант решения предложил участник Турнира городов (на котором предлагалась эта задача) 11-классник Валерий Миронов. Его рассуждение таково. На диагонали 10 клеток. Между ними 9 кусков маршрута. Значит, некоторые 5 из этих 9 кусков маршрута должны располагаться с одной стороны от диагонали. У этих 5 кусков маршрута 10 начал/концов, расположен-

ных на соседней с главной диагональю, а на этой диагонали 9 клеток. Значит, начало и конец одного из кусков маршрута совпадают, что и требовалось.

А.Грибалко

**M2676.** Внутри параллелограмма  $ABCD$  взята такая точка  $P$ , что  $\angle PDA = \angle PBA$  (рис. 1). Пусть  $\omega_1$  – вневписанная окружность треугольника  $PAB$ , лежащая напротив вершины  $A$ , а  $\omega_2$  – вписанная окружность треугольника  $PDC$ . Докажите, что одна из общих касательных к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  параллельна  $AD$ .

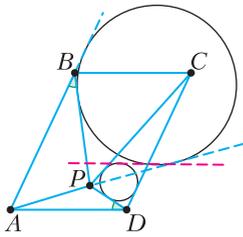


Рис. 1

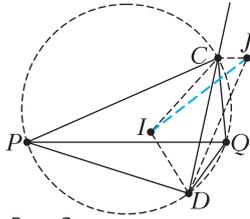


Рис. 2

Перенеся треугольник  $PAB$  на вектор  $\overline{AD}$ , получим треугольник  $QDC$  (рис. 2). Окружность  $\omega_1$  также сдвинется параллельно  $AD$  и перейдет во вневписанную окружность треугольника  $QDC$ , обозначим ее  $\omega_3$ , а ее центр –  $J$ . Поэтому достаточно доказать, что одна из общих касательных к  $\omega_3$  и  $\omega_2$  (обозначим ее центр  $I$ ) параллельна  $AD$ . Эта касательная симметрична общей касательной  $CD$  относительно линии центров  $IJ$ , поэтому достаточно доказать, что угол между  $CD$  и  $IJ$  равен половине угла между  $CD$  и прямой  $PQ$ , параллельной  $AD$ .

По условию  $\angle QPD = \angle PDA = \angle PBA = \angle QCD$ , значит, точки  $C, P, D$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

По известным формулам углов между биссектрисами

$$\begin{aligned} \angle CID + \angle CJD &= \\ &= \left( \frac{1}{2} \angle CPD + 90^\circ \right) + \left( \frac{1}{2} \angle CQD - 90^\circ \right) = 180^\circ, \end{aligned}$$

т.е. точки  $C, I, D$  и  $J$  лежат на одной окружности. Следовательно, угол между  $CD$  и  $IJ$  равен  $\angle CDJ + \angle ICD = \frac{1}{2} \angle CDQ +$

$\frac{1}{2} \angle PCD$ , а это и есть половина угла между хордами  $CD$  и  $PQ$ .

П.Кожевников

**M2677.** На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Заметим, что у Малыша всегда есть возможность взять плюшку с номером любой четности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой четности. Пусть среди плюшек с нечетными номерами не меньше десяти с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш начинает с того, что берет плюшки с нечетными номерами и после каждого ответного хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с четными номерами. В начальный момент эта величина не больше десяти, а если Малыш будет брать плюшки только с нечетными номерами, то в конце она будет не меньше десяти. При этом после каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на единицу. Следовательно, в какой-то момент она будет равна десяти. После этого Малыш может брать только плюшки с четными номерами и в итоге получит ровно десять плюшек с сахаром, а значит, и десять плюшек с корицей, что и требуется.

А.Грибалко

**Ф2680.** В нейтринной лаборатории в 12:00 зарегистрировала реакцию, в которой одна из образовавшихся частиц – нейтрино. А ровно через 69 мин на соседней установке в этой же лаборатории была зарегистрирована еще одна реакция с той же самой (Продолжение см. на с. 34)

*Знание некоторых принципов избавляет от необходимости знания многих фактов.*

Клод Адриан Гельвеций

*... я открыл принцип, могущий служить основой всех законов движения...*

Пьер Мопертюг

*... одни и те же принципы управляют движениями светил, ... равновесием и колебаниями морей, ... распределением света, ... словом, самыми сложными действиями природных сил...*

Жан Батист Фурье

*Теплота не способна переходить сама собой от более холодного тела к более тепловому.*

Принцип Клаузиуса

*По Лейбницу, наш мир является лучшим из всех возможных миров, и потому его законы можно описать экстремальными принципами.*

Карл Зигель

*Существуют великие принципы, применимые к любым явлениям, такие, как законы сохранения энергии и момента количества движения.*

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакомы вам физические принципы?

«За деревьями не видно леса». Подобным же образом множество частных физических законов порой заслоняют более глубокие, базовые утверждения, называемые *принципами*, хотя именно их и зачастую воплощают. Наша рубрика их не скрывала – в «Калейдоскопе» были представлены принципы и относительности, и сохранения, и суперпозиции, и виртуальных перемещений ... Но, конечно, их перечень этим не исчерпывается, и сегодня мы познакомимся еще с некоторыми из этой знатной когорты. Тем же из вас, кто продолжит серьезно овладевать наукой, предстоят удивительные встречи с новыми принципами, в том числе и с такими, что выходят за рамки даже столь разросшейся дисциплины, как физика. Что ж, остается *принципиально*, не жалея сил, продвигаться к их постижению. Оно того стоит...

### Вопросы и задачи

**1.** Из отверстия в стенке сосуда, находящегося в вагоне поезда, вытекает вода. Зависит ли скорость ее истечения от того, стоит поезд на месте или движется равномерно и прямолинейно?

**2.** Стальной шарик, движущийся горизонтально со скоростью  $4v$ , упруго ударяется о массивную стальную вертикальную плиту, удаляющуюся от него со скоростью  $3v$  относительно земли. Какой станет скорость шарика после отскока?

**3.** В геометрическом центре правильного шестиугольника  $ABCDEF$  приложены силы 1 Н, 9 Н, 5 Н, 7 Н, 3 Н, 11 Н, направленные к его вершинам  $A, B, C, D, E, F$  соответственно. Найдите модуль и направление равнодействующей силы.

**4.** С помощью системы блоков груз массой  $m = 100$  кг подняли на высоту  $h = 3$  м, прикладывая силу  $F = 250$  Н. На сколько пришлось вытянуть свободный конец веревки? Массой блоков и трением в них пренебречь.

**5.** К двум вбитым на одном уровне гвоздям подвесили цепочку. Затем вместо нее к тем же гвоздям подвесили два стержня такой же длины, скрепленные свободными концами. У какой из этих двух систем центр тяжести ниже?

**6.** Конический буюк плавает в воде так, что его ось вертикальна и вершина обращена вверх. Плотность материала конуса составляет  $7/8$  плотности воды. Во сколько раз высота надводной части конуса меньше всей его высоты?

**7.** Возможен ли идеальный процесс, при котором вся теплота, заимствованная из теплового резервуара, превращается в работу?

**8.** Колебания в электрическом контуре затухают. Значит, максимальная величина заряда на любой из пластин его конденсатора становится все меньше. Не противоречит ли это закону сохранения заряда?



9. Напряженность поля плоского воздушного конденсатора равна  $E$ , а заряд конденсатора равен  $q$ . Какая сила действует на каждую из его пластин?

10. Заряд  $q$  равномерно распределен по поверхности полусферы радиусом  $R$ . Чему равен потенциал в точках, расположенных посередине между центром сферы и ее краем?

11. Допускает ли принцип Ферма существование нескольких путей, по которым луч света распространяется от точечного источника  $S$  к приемнику?

12. Плоское зеркало движется со скоростью  $2$  см/с, направленной по нормали к плоскости зеркала. С какой по модулю и направлению скоростью должен двигаться точечный источник, чтобы его отражение в зеркале оставалось неподвижным?

13. Можно ли двигаться относительно зеркала с такой скоростью, чтобы не видеть своего отражения в нем?

14. В процессе превращения в электромагнитное излучение пары электрон-позитрон никогда не возникает один  $\gamma$ -квант. Почему?

### Микроопыт

Поставьте на столе «стопочкой» (друг на друга) три спичечных коробка – нижний полный, средний пустой, верхний заполненный не целиком. На какой из коробков действует бóльшая сила?

### Любопытно, что ...

... лишь через девять лет после выдвижения Галилеем своего принципа относительности был осуществлен подтверждающий его опыт, который поставил французский ученый Пьер Гассенди, сбрасывая камни с мачты движущейся галеры.

... принцип суперпозиции кулоновских сил вместе с законом Кулона дает основу для описания электростатического взаимодействия любой системы неподвижных точечных зарядов.

... в копилку «великих принципов сохранения» внес свой вклад и Майкл Фарадей, в 1843 году убедительными экспериментами доказавший точное выполнение закона сохранения электрического заряда.

... принцип Ферма – основополагающий при изучении процессов распространения света в сложных оптических системах. Он также объясняет, почему на закате мы продолжаем видеть солнце, хотя фактически оно уже за горизонтом, или в чем причина возникновения такого явления, как мираж.

... законы классической термодинамики явились результатом обобщения многочисленных опытов и наблюдений, образуя в конечном счете логически завершенную теорию. Ее фундаментальность подчеркивалась используемой физиками терминологией: законы именовались и «постулатами», и «началами», и «принципами».

... принцип Гюйгенса–Френеля представляет собой не что иное, как принцип суперпозиции, позволивший описать дифракцию света в форме результата интерференции вторичных волн.

... представления о симметрии физических законов возникли уже в XVII веке, однако лишь после работ Анри Пуанкаре и Альберта Эйнштейна в начале XX века принципы симметрии стали играть все возрастающую роль и ныне являются главными при построении физических теорий.

... важнейший инструмент при формировании новых физических теорий – принцип соответствия, введенный в науку нобелевским лауреатом Нильсом Бором. Благодаря ему устанавливается связь между теорией относительности Эйнштейна и механикой Ньютона, между квантовой физикой и классической, оказывается возможным понять корпускулярно-волновой дуализм.

### Что читать в «Кванте» о физических принципах (публикации последних лет)

1. «Отрицательная обратная связь» – 2015, №3, с.29;
2. «Пределы точности «точных» наук» – 2016, Приложение №4, с. 219;
3. «Калейдоскоп «Кванта» – 2016, №1, №5/6, 2021, №6, с. 32;
4. «Симметрия в несимметричной вселенной Андрея Сахарова» – 2019, №7, с. 2;
5. «Неопределенность – основа квантовой физики» – 2021, №1, с. 2.

Материал подготовил А. Леонович



(Начало см. на с. 28)

(возникшей час с небольшим назад) частицей. На какое примерно максимальное расстояние равное  $L$  удалялась частица от места своего рождения?

Почитать о том, что думают физики о нейтрино, можно здесь:

[https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya\\_biblioteka/435437/Zagadka\\_malykh\\_mass\\_neytrino](https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/435437/Zagadka_malykh_mass_neytrino)

Нейтрино очень слабо взаимодействует с веществом, однако гравитация на нейтрино действует. Для того чтобы лаборатория и нейтрино снова оказались рядом через такое (сравнительно небольшое) время, равное 69 минутам, нужно, чтобы траектория движения нейтрино и траектория движения лаборатории в системе отсчета (СО), в которой центр Земли считается покоящимся, а оси координат направлены на далекие звезды, лежали в одной плоскости. Это означает, что обе эти траектории находятся в плоскости экватора Земли. Возможны различные гипотетические варианты. В одном из них нейтрино двигалось выше поверхности Земли, а в другом летало в толще Земли (рис. 1). При полете

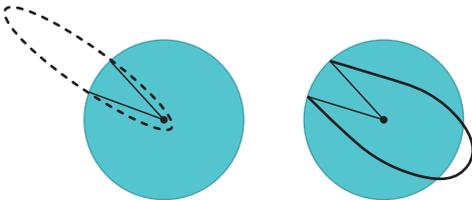


Рис. 1

над Землей форма траектории нейтрино – это часть эллипса, один из фокусов которого совпадает с центром Земли. Для рассмотрения полета нейтрино под поверхностью Земли нужно учитывать, что масса внутри Земли распределена неравномерно, поэтому ускорение свободного падения вплоть до глубины порядка 2800 км остается почти неизменным, а на еще больших глубинах убывает практически линейно до нуля в центре Земли (рис. 2).

Численные расчеты с учетом зависимости  $g$  от глубины показывают, что вариант с движением под поверхностью Земли приводит к времени полета нейтрино большему, чем 69 минут. Это будет так, даже если считать, что ускорение свободного паде-

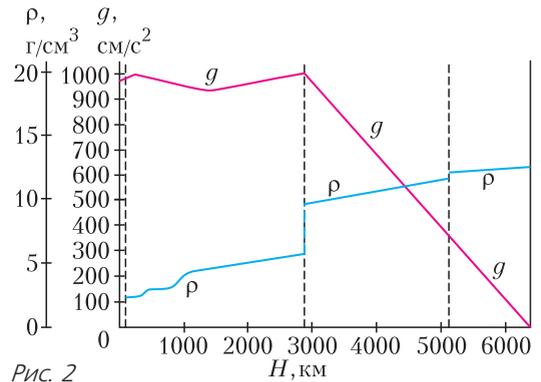


Рис. 2

ния от поверхности до центра Земли сохраняет свою величину, а после прохождения через центр просто изменяет направление. Иными словами, при любой начальной скорости нейтрино, направленной к центру Земли (в нашей СО), даже в случае постоянства ускорения свободного падения по величине получается время движения туда и обратно больше 69 минут. Поэтому для расчетов остается только вариант с полетом над поверхностью Земли. Известна задача с таким условием: у планеты с такой же гравитацией и с такими же геометрическими размерами, как у Земли, отсутствует атмосфера; планета не вращается; нужно найти время падения камня с высоты, равной радиусу этой планеты, если начальная скорость камня по отношению к планете равна нулю. В этой задаче траектория падения камня – это вырожденная в прямую линию часть эллипса. Первая космическая скорость на этой планете равна  $v = \sqrt{gR} = 7,905$  км/с. Время одного оборота вокруг этой планеты камня, брошенного с первой космической скоростью горизонтально, равно  $T = 2\pi R/v = 84,335$  мин. Поскольку для движения камня в поле тяжести планеты выполняются законы Кеплера, в частности второй закон о секториальных скоростях, то время падения камня будет равно  $T(\pi + 1)/(4\pi) = 27,785$  мин. К моменту падения на поверхность этот камень приобретет скорость, как раз равную первой космической. Следовательно, если камень бросить с поверхности планеты вертикально вверх с такой начальной скоростью, то он поднимется на высоту, равную радиусу плане-

ты, и время его полета будет в два раза больше, т.е. будет равно 55,57 мин.

В условии задачи про нейтрино время полета составляет 69 мин, что больше, чем 55,57 мин, хотя по порядку эти величины примерно одинаковые. Это означает, что сразу после рождения скорость нейтрино была порядка первой космической и имела и вертикальную и горизонтальную составляющие. За указанное в условии задачи время лаборатория изменила свое положение в пространстве. Отрезок, соединяющий центр Земли и лабораторию, повернулся в выбранной системе отсчета (СО) на угол  $360^\circ \cdot 69 / (24 \cdot 60) = 17,25^\circ$ . На такой же угол повернулся и радиус-вектор, соединяющий центр Земли и место нахождения нейтрино. При максимальном удалении от поверхности на расстояние, равное по порядку величины радиусу Земли, составляющая скорости, перпендикулярная радиус-вектору (в этой максимально удаленной от поверхности Земли точке траектории), уменьшилась более чем вдвое. Значит, угловая скорость вращения радиус-вектора, описывающего положение нейтрино в выбранной системе отсчета, в верхней точке траектории уменьшилась более чем в 4 раза. А поскольку суммарный угол поворота этого радиус-вектора такой же, как и у лаборатории, то это означает, что сразу после рождения горизонтальная составляющая скорости нейтрино была больше линейной скорости движения точек поверхности Земли на экваторе, а это около 463 м/с. Даже если увеличить эту скорость в четыре раза, то все равно горизонтальная составляющая скорости нейтрино будет в несколько раз меньше вертикальной составляющей скорости, которая имеет порядок величины около 8 км/с.

Численные расчеты дают значение максимального удаления нейтрино от поверхности Земли, равное 6326,866 км, близкое радиусу Земли 6370 км. При этом в нашей системе отсчета начальная вертикальная составляющая скорости равна 7,825 км/с, а горизонтальная составляющая равна 1,185 км/с. Величина скорости равна 7,914 км/с, т.е. весьма близка к первой космической скорости 7,905 км/с. А по

отношению к лабораторной установке, на которой возникло это нейтрино, горизонтальная составляющая скорости равна  $1,185 \text{ км/с} - 0,463 \text{ км/с} = 0,722 \text{ км/с}$  и направлена на восток.

Н. Полетов

**Ф2681.<sup>1</sup>** Тонкое упругое кольцо растянuto и надето на гладкую сферу (совмещено с вертикальным экватором; рис. 1). Так как состояние кольца неустойчиво, то в некоторый момент оно

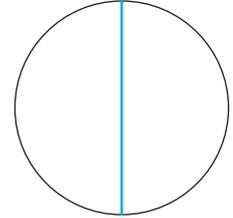


Рис. 1

срывается и движется в горизонтальном направлении. Определите координату кольца в момент покидания сферы. Считайте данными следующие величины:  $R$  – радиус сферы,  $R/2$  – радиус кольца в недеформированном состоянии,  $k_0$  – коэффициент упругости единицы длины материала кольца. Сфера закреплена, гравитация отсутствует.

Физика задачи достаточно проста. Положение кольца при движении определим углом  $\varphi$  (рис. 2) и найдем угол отрыва  $\varphi_{\text{отр}}$ . Коэффициент упругости кольца равен

$$k = \frac{k_0}{\pi R}.$$

Начальная деформация кольца по

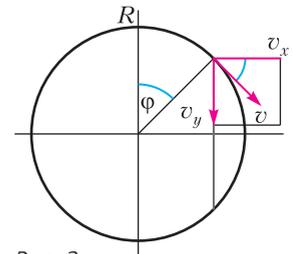


Рис. 2

условию задачи очень большая:  $\Delta l_0 = \pi R$ . Поэтому следует ожидать, что кольцо покинет сферу при не очень большом значении угла отрыва. Зависимость деформации кольца от угла  $\varphi$  имеет вид

$$\Delta l = \pi R (2 \cos \varphi - 1).$$

Записываем уравнения динамики и сохранения энергии в момент отрыва (сила реакции сферы равна нулю):

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{k_0}{\pi R} \pi R (2 \cos \varphi - 1) \cos \varphi,$$

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2681–Ф2684 – А.Власов.

$$m \frac{v^2}{2} = \frac{k_0 (\pi R)^2}{2} - \frac{k_0 (\pi R (2 \cos \varphi - 1))^2}{2}.$$

После несложного решения этой системы уравнений находим угол отрыва кольца от сферы:

$$\cos \varphi_{\text{отр}} = \frac{4\pi + 1}{4\pi + 2} \approx 0,931, \text{ откуда } \varphi_{\text{отр}} = 21,35^\circ.$$

Этот результат определен только первоначальной степенью растяжения кольца и не зависит от остальных параметров задачи. Здесь уместно вспомнить задачу о скатывании шайбы с вершины гладкого цилиндра. Угол отрыва в этой задаче равен  $\varphi_{\text{отр}} = \arccos \frac{2}{3} \approx 48,2^\circ$ .

**Ф2682.** Упругая и очень легкая пластина, имеющая на концах одинаковые маленькие грузики, уравновешена на опоре и может совершать колебания (рис. 1). Определите период малых колебаний такого маятника. Считайте известными следующие величины:  $m$  – масса каждого грузика,  $2l$  – длина пластины,  $k_0$  – коэффициент упру-

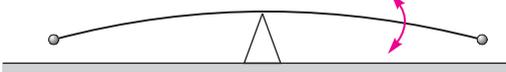


Рис. 1  
гости единицы длины пластины,  $g$  – ускорение свободного падения.

Определим положение центра масс системы грузов при изогнутой пластине в положении равновесия. Для этого найдем профиль изгиба  $y(x)$ . Записываем закон Гука для элемента пластины (он выделен красным на рисунке 2):

$$mg(l-x) \approx \frac{k_0}{dl} d\varphi,$$

где  $\frac{k_0}{dl}$  – коэффициент упругости изгиба элемента пластины,  $mg(l-x)$  – момент силы тяжести грузика, изгибающий этот

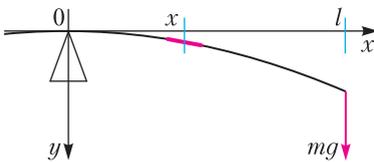


Рис. 2

элемент. В правой части образовалась производная  $\frac{d\varphi}{dl}$ , определяющая кривизну элемента пластины. Для слабоизогнутой пластины формула существенно упрощается:

$$\frac{d\varphi}{dl} = y''.$$

Тогда

$$y'' = \frac{mg}{k_0}(l-x).$$

Это уравнение элементарно интегрируется, и мы получаем для профиля полином третьей степени (без первых двух слагаемых):

$$y(x) = \frac{mg}{k_0} \left( l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Отсюда находим координату грузиков и, соответственно, координату центра масс системы в положении равновесия:

$$y_0 = \frac{mg l^3}{k_0} \frac{1}{3}.$$

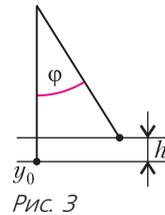


Рис. 3

Определим смещение центра масс при отклонении системы на угол  $\varphi$  (рис. 3):

$$h = y_0(1 - \cos \varphi) \approx y_0 \frac{\varphi^2}{2}.$$

Период колебаний определяем энергетическим методом. Если система совершает гармонические колебания, то ее энергия записывается в виде

$$E = \alpha \frac{(x')^2}{2} + \beta \frac{x^2}{2},$$

где  $x$  – параметр смещения (в нашем случае это угол поворота  $\varphi$ ),  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты инертности и упругости соответственно. Период колебаний определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Записываем энергию колебаний нашей системы:

$$E = ml^2 \frac{(\varphi')^2}{2} + mg \frac{mg l^3}{k_0} \frac{\varphi^2}{2}.$$

Коэффициенты инертности и упругости равны соответственно

$$\alpha = ml^2 \text{ и } \beta = mg \frac{mg l^3}{k_0}.$$

Теперь можно записать формулу периода колебаний нашего маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2 \cdot 3k_0}{mg \cdot mg \cdot l^3}} = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{3k_0}{ml}}$$

Данная задача может быть реализована в экспериментальном варианте, в котором используется гибкая пластиковая пластина (без грузов) и исследуется зависимость периода колебаний от длины пластины. Предлагаем читателям самостоятельно получить формулы статического прогиба пластины, ее координаты центра масс и периода колебаний:

$$y(x) = \frac{\rho g}{24k_0} (6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4),$$

$$h = \frac{\rho g}{20k_0} L^4,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{20k_0}{3\rho}} \frac{1}{gL}.$$

**Ф2683.** Правильная пирамида с квадратным основанием плавает вертикально в воде «головой вниз» (рис. 1). Ось симметрии пирамиды ортогональна поверхности воды. Плотность материала пирамиды составляет  $(3/4)^3$  от плотности воды. Определите угол между плоскостями противоположных граней пирамиды (угол  $\alpha$  на рисунке), при котором плавание будет устойчивым.

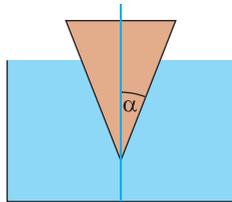


Рис. 1

Начнем с решения основного вопроса: относительно какой точки будет вращаться пирамида при небольшом равновесном отклонении от вертикального положения? Такой точкой будет центр сечения пирамиды на уровне свободной поверхности жидкости, так как в этом случае не будет изменяться величина погруженного объема и, соответственно, сила Архимеда, обеспечивающая вертикальное равновесие. Далее, можно показать, что при выбранном соотношении плотностей материала пирамиды и жидкости, в которой она пла-

вает, центр масс пирамиды будет совпадать с центром поворота (докажите это самостоятельно). При небольшом повороте пирамиды вокруг ее цент-

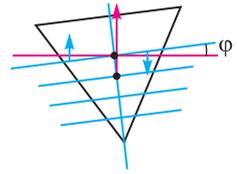


Рис. 2

тра масс на угол  $\phi \ll 1$  (рис. 2) возникает момент сил. И нужно найти условие, при котором этот момент сил будет возвращать пирамиду в прежнее положение, т.е. равновесие будет устойчивым.

Вычисляем момент сил, рассматривая два водяных «клина», возникших при повороте. Правый (на рисунке 2) клин выходит из воды, а левый клин погружается в воду. Это приводит к появлению пары сил, создающих возвращающий момент, равный

$$2 \left( \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \cdot a\phi \cdot g \right) \frac{2}{3} a = \frac{4}{3} \rho g a^4 \phi,$$

где  $2a$  – размер грани пирамиды на уровне поверхности воды. При небольшом повороте пирамиды величина силы Архимеда практически не изменяется, и эта сила обязана проходить через центр масс объема воды, вытесненного пирамидой. Момент силы Архимеда, если  $h$  – глубина погружения пирамиды, равен

$$\left( \rho \cdot \frac{1}{3} \cdot 4a^2 h g \right) \left( \frac{h}{4} \phi \right) = \frac{1}{3} \rho g a^2 h^2 \phi.$$

Этот момент силы ведет к опрокидыванию пирамиды, т.е. к удалению от положения равновесия. Суммарный же момент сил должен возвращать пирамиду к положению, когда ее ось симметрии вертикальна. Следовательно, должно выполняться неравенство между  $a$  и  $h$ , из которого находится условие для угла ( $2\alpha$ ) между гранями пирамиды:

$$h \leq 2a, \text{ или } \text{tg } \alpha \geq \frac{1}{2}, \text{ откуда } 2\alpha \geq 53,13^\circ.$$

**Ф2684.** Происходит удар шара и симметричной уголковой пластины (угла; рис. 1). Перед ударом угол покоится. Шар залетает в угол, скользя по его горизонтальной стенке. Определите геометрию и кинематику (механическое состояние) системы тел после абсолютно упругого

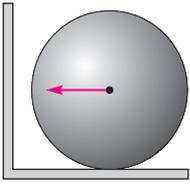


Рис. 1

удара. Гравитации нет. Скорость шара перед ударом  $v_0$ , масса пластины в  $n$  раз больше (меньше) массы шара. Точка удара лежит выше центра масс пластины.

Толщину пластины считайте малой по сравнению с размерами ее катетов и радиусом шара.

Первоначально следует ответить на вопрос: возникнет ли после удара вращение пластины? Ответ получим в ходе следующих рассуждений. После удара шара о вертикальную стенку пластина начнет вращаться. Возникшее вращение неизбежно приводит к удару шара с горизонтальной частью пластины. Если мы предполагаем время каждого удара бесконечно малым, то взаимодействие шара и пластины выглядит как бесконечная серия повторных ударов. Очевидно, что ударное взаимодействие должно выйти на «равновесие». Вращение пластины погасится, и возникнет только поступательное движение. Сделаем рисунок (рис. 2) кинематического состояния системы после удара. Здесь  $u$ ,  $\omega$  – скорости угла по горизонтальной и вертикальной осям,  $v$ ,  $n\omega$  – соответствующие скорости шара. Соотношение вертикальных скоростей соответствует нулевому импульсу системы по вертикали (это легко учитывается сразу).

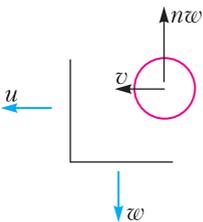


Рис. 2

На рисунке 3 показаны центры масс и их горизонтальные координаты:  $a$  – для угла,  $R$  – для шара,  $x$  – для системы угол–шар. Очевидно, что справедливо соотношение  $n = \frac{R - x}{x - a}$ .

Записываем уравнения законов сохранения импульса, энергии и момента импульса (относительно центра масс системы):

$$\begin{aligned}
 mv_0 &= mv + nmu, \\
 mv_0^2 &= m(v^2 + (n\omega)^2) + nm(u^2 + \omega^2), \\
 mv_0(R - x) &= mv(R - x) + mn\omega(R - x) + \\
 &+ nm\omega(x - a) - nmu(x - a).
 \end{aligned}$$

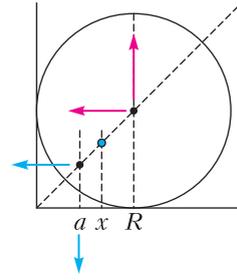


Рис. 3

После упрощения и введения безразмерных переменных (первое уравнение делим на  $mv_0$ , второе на  $mv_0^2$ , третье на  $mv_0(x - a)$ ) система преобразуется к виду (оставляем прежние символы для безразмерных величин)

$$\begin{aligned}
 1 &= v + nu, \\
 1 &= v^2 + (n^2 + n)\omega^2 + nu^2, \\
 n &= nv + n^2\omega + n\omega - nu.
 \end{aligned}$$

Решая систему, получаем

$$\omega = u = v = v_0 \frac{1}{n + 1}.$$

Финишная картинка скоростей изображена на рисунке 4. В системе отсчета, связанной с пластиной, шар скользит по линии продолжения вертикальной стенки пластины.

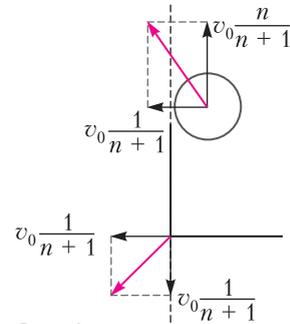
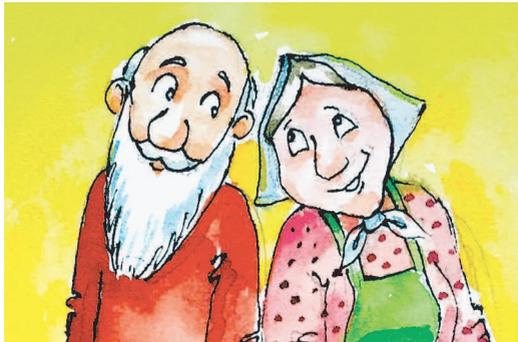


Рис. 4

Интересно отметить, что при  $n = 1$  все компоненты скоростей равны  $\frac{v_0}{2}$  и угол между векторами скоростей равен  $90^\circ$ . Это совпадает с картинкой разлета одинаковых шаров после косоугольного удара.

## Задачи

1. Гражданин Сидоров на 6 лет старше своей жены гражданки Сидоровой. Однажды Сидоров обнаружил, что ровно половину своей жизни он провел в браке с Сидоровой. Ровно через 14 лет после этого Сидорова



обнаружила, что она провела в браке с Сидоровым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет гражданину и гражданке Сидоровой, когда они отпразднуют золотую свадьбу – пятидесятилетие своей супружеской жизни?

2. Петя записал в ряд 2021 число, отличное от нуля, и перемножил все пары соседних чисел. Среди полученных произведений оказалось 1010 по-



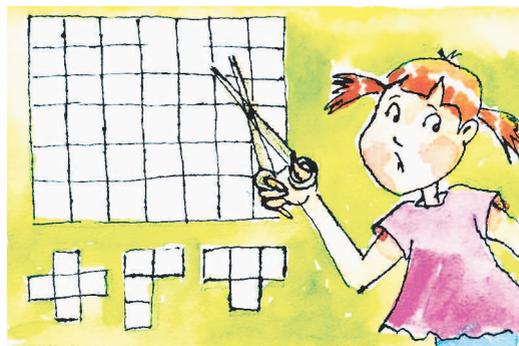
Эти задачи предлагались на олимпиаде «Высшая проба».

ложительных и 1010 отрицательных чисел. Вася записал все исходные числа в том же порядке, но по кругу, и тоже перемножил все пары соседних чисел. Сколько среди этих чисел будет положительных и сколько отрицательных?

*А.Штерн*

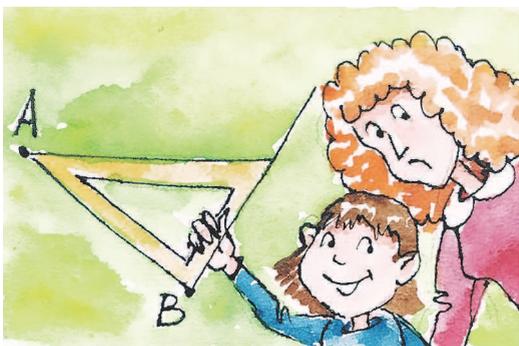
3. Можно ли разрезать прямоугольник  $6 \times 7$  на кресты из пяти клеток, фигурки Г-тетрамино и фигурки Т-тетрамино? Если можно, то сколько пятиклеточных крестов может быть в таком разрезании?

*И.Сиротовский*



4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $B$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $K$  такая, что  $\angle CBK = 15^\circ$ . На луче  $BK$  отмечена точка  $M$  такая, что  $\angle ACM = 90^\circ$ . Докажите, что  $AC = BM$ .

*Е.Бакаев*



# Три истории про воду

**С. ДВОРЯНИНОВ**

*Удивительный вопрос:  
Почему я водовоз?  
Потому что без воды —  
И ни туды, и ни сюды!*

В.Лебедев-Кумач

*— А у нас водопровод!  
Вот.*

С.Михалков

Казалось бы, что такого интересного в водопроводе? Изобретение, конечно, старое и очень полезное, но не более того. Однако оказывается, что и о нем можно рассказать нечто занимательное и поучительное. Итак...

**История первая.** В конце декабря Толику Втулкину пришлось проснуться очень рано — их семья должна была прибыть в аэропорт на первый утренний рейс. Толик заметил, что вода из крана с холодной водой оказалась намного теплее, чем обычно. А из крана с горячей водой, наоборот, текла прохладная. Толик догадался, в чем дело.

Очевидно, что ночью расход воды небольшой, и вода в трубах внутри дома застаивается. При этом холодная вода нагревается, а горячая — остывает.

**История вторая.** Дело было на кухне. Толик открыл кран холодной воды, но из крана полился кипяток. Он чуть руку не обжег! Как же такое получилось?

На рисунке 1 показан смеситель, который стоял на кухне у Толика. Он смешивает горячую воду с холодной.

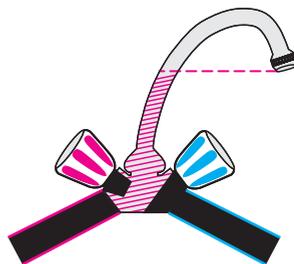


Рис. 1

Обратите внимание на гусак смесителя. Чтобы набрать воды, краны открывают, а потом закрывают. Но после этого в гусаке остается немалый ее объем. Причем если из смесителя текла горячая вода, то она и останется в гусаке. Если же теперь сразу открыть кран холодной воды, то холодная вода начнет вытеснять горячую. И в первую очередь из смесителя выльется именно оставшаяся там горячая вода, которая не успела остыть. Так что будьте внимательны! Пусть после открытия крана вода немного стечет, и только потом осторожно попробуйте, не слишком ли она горячая. Как говорят, не зная броду, не суйся в воду.

Действующий смеситель характеризуется расходом воды, измеряемым, например, литрами в минуту, и температурой вытекающей воды, измеряемой в градусах Цельсия. Состояние каждого крана характеризуется углом поворота барашка. У современных кранов он небольшой. Будем считать, что каждый барашек можно повернуть на угол от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Пусть расход воды прямо пропорционален углу поворота и наибольший, равный  $4,5$  л/мин, получается при повороте на  $90^\circ$ . Пусть температура горячей воды  $70^\circ\text{C}$ , холодной  $10^\circ\text{C}$ . Мы управляем двумя параметрами — углами  $\varphi$  и  $\psi$ . Два параметра отклика системы — это температура вытекающей воды и ее расход. На рисунке 2 на плоскости с координатами  $(\varphi, \psi)$  показаны пять отрезков, вдоль каждого из которых температура воды постоянна. Если углы поворота барашек  $\varphi$  и  $\psi$  увеличить в  $k$  раз, то температура воды не изменится, а расход

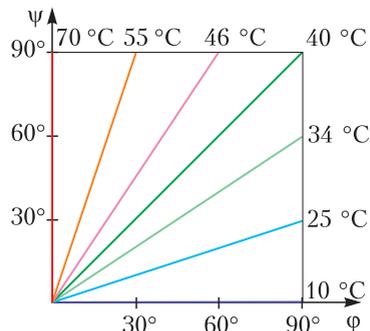


Рис. 2

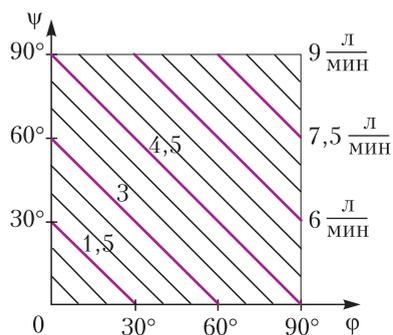


Рис. 3

возрастет в  $k$  раз. Если же изменять величины  $\Phi$  и  $\Psi$  с одновременным сохранением их суммы, то мы получим постоянный расход воды с разной температурой. Соответствующие линии показаны на рисунке 3. Если по каждому отрезку на этом рисунке двигаться вверх, то температура воды будет расти.

**История третья.** В последние годы на смену смесителям с двумя кранами пришли шаровые смесители. Такие смесители, называемые еще джойстиковыми или шарнирными, как и всякие иные, используют для смешивания холодной воды с горячей и получения в результате требуемого расхода воды необходимой температуры. И здесь мы сталкиваемся, на первый взгляд, с парадоксом.

Всякий действующий кран, как уже говорилось, характеризуется двумя параметрами: расходом воды и ее температурой. Два этих параметра (выход) есть отклик на два других параметра – расход горячей воды и расход холодной. В старых кранах крутим *два* барашка и получаем то, что хотим. А у шарового крана рычаг всего *один*! Как же нам одним рычагом управлять двумя параметрами? Раньше даже у кучера были левая вожжа и правая, а кнутом он задавал лошадям нужную скорость.

На самом деле никакого парадокса нет. Положение рычага шарового крана определяется двумя параметрами, подобно тому, как положение точки на поверхности земного шара определяется тоже двумя параметрами – долготой и широтой. В действительности и у шарового смесителя число

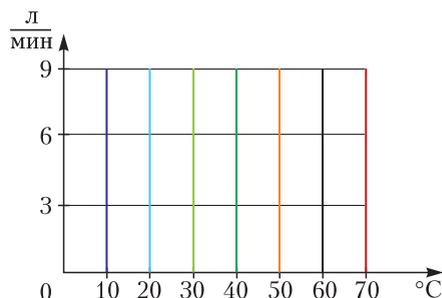


Рис. 4

входных параметров равно числу выходных. Можно сказать, что «долгота» шарового крана характеризует отношение объемов горячей и холодной воды, поступающих в камеру смешивания. Это отношение соответствует температуре смеси (рис.4). «Широта» шарового крана определяет расход потребляемой воды. Изменяя долготу при неизменной широте, мы изменяем температуру смеси, сохраняя расход. Меняя широту при постоянной долготе, мы изменяем расход воды и сохраняем пропорцию между объемом холодной воды и объемом горячей, т.е. не меняем температуру. Достигается это движением задвижек 1 и 2, показанных на рисунке 5.

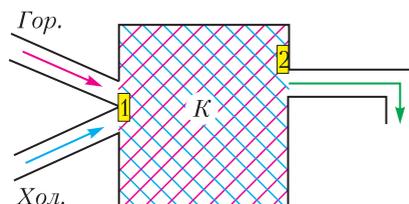


Рис. 5

Предположим, что вечером мы установили нужную температуру воды на выходе и желаем вернуться к ней утром. В таком случае мы уменьшаем только широту (т.е. расход воды) до нуля. При этом работает задвижка 2. В результате шаровой кран «запомнит» температуру, и надобности в ее регулировании в следующий раз не будет. Это обстоятельство объявляют одним из достоинств шаровых смесителей.

А еще в управлении рычагом шарового крана есть доля романтики. Поворачиваем его влево, вправо, к себе, от себя и представляем, что это не водопроводный кран, а... штурвал самолета. Штурвал от себя – и самолет начинает пикиро-

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

вать. Штурвал на себя – и самолет, увеличив угол атаки, взмывает вверх. Штурвал вправо – и самолет кренится вправо...

Сейчас мы не говорим обо всех конструктивных особенностях шарика, находящегося внутри крана и реализующего действие задвижек 1 и 2, а обсуждаем только принцип работы смесителя. К шарiku прикреплен шток, переходящий в рычаг, имеются пазы и прорези, которые выполняют функции задвижек и обеспечивают смешивание воды. Изготовление шарика требует и подходящих материалов, и соответствующей их обработки. Как обычно, путь от идеи до ее реального воплощения зачастую оказывается длинным.

Теперь пора вспомнить, что вода поступает к нам в дом под давлением. Существуют нормативы давления: 0,3–6,5 атмосфер

для холодной воды и 0,3–4,5 атмосфер для горячей. Предположим, что ночью, когда потребление воды во всем городе уменьшается, давление горячей воды оказалось намного выше давления холодной. Тогда при закрытой задвижке 2 горячая вода из сети начнет вытеснять воду из камеры  $K$  в трубу холодного водоснабжения. Если это будет продолжаться достаточно долго, то горячая вода заполнит довольно большой участок трубы холодной воды. И что тогда получится утром? А утром из смесителя, как бы мы его ни крутили, будет течь только горячая вода.

Это и есть третья история, о которой мы хотели рассказать. История невыдуманная. Такое явление автор и его соседи наблюдают довольно часто. А у вас бывает такое? Понаблюдайте!

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

*Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на участников не младше 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт [kvantik.com](http://kvantik.com)).*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

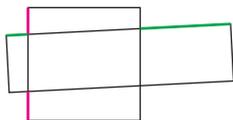
*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте [sites.google.com/view/savin-contest](http://sites.google.com/view/savin-contest) Желаем успеха!*

**21.** Некоторые клетки белой прямоугольной таблицы закрасили синим. Во всех строках количество синих клеток различно, и во всех столбцах тоже. Докажите, что если в таблице не поровну строк и столбцов, то в ней поровну белых и синих клеток.

Б. Френкин

**22.** Квадрат  $6 \times 6$  и прямоугольник  $3 \times 12$  пересекаются, как показано на рисунке.



Докажите, что сумма зеленых отрезков в два раза больше суммы красных отрезков.

Л. Смирнова

**23.** У натурального числа  $N$  последняя цифра нечетная. Верно ли, что у числа  $N^{10}$  третья справа цифра (разряда сотен) четная?

М. Малкин

**24.** Какое наибольшее количество параллелепипедов размера  $1 \times 2 \times 4$  можно разместить в кубе  $5 \times 5 \times 5$ ? Ребра параллелепипедов должны быть параллельны ребрам куба.

В. Расторгуев

# Коронавирус на звездолете

А. СТАСЕНКО

*«Земля – колыбель человечества, но человечество не может вечно оставаться в колыбели», – так говорил Константин Циолковский. Это – одна из моих любимых цитат великого человека.*

Илон Маск

Как известно, на каждом приличном звездолете вращательное движение используется для создания искусственного тяготения – чтобы растения тянулись «вверх», яблоки падали «вниз» – так же, как и микрокапли из носа чихнувшего астронавта, несущие – не дай Бог – разнообразные вирусы.

Всякий здравомыслящий ЕГЭшник должен знать, что во вращающейся оранжерее приличного звездолета центробежное ускорение равно  $a_r = \omega^2 r$  и направлено по радиусу (индекс  $r$ ; см. рисунок). Поскольку его величина пропорциональна радиусу, то на оси вращения ( $r = 0$ ) оно равно нулю.

Но, как тоже хорошо известно, на тело, движущееся во вращающейся системе координат с радиальной скоростью  $v_r$ , действует еще и сила Кориолиса (1792–1843), перпендикулярная как вектору линейной скорости, так и вектору угловой скорости, а значит – касательная к окружности радиусом  $r$ . Она сообщает телу ускорение  $a_\phi = 2v_r\omega$ ; здесь индексы наглядно указывают, вдоль какой из осей направлен соответствующий вектор. Именно сила Кориолиса делает крутыми правые берега рек в северном полушарии Земли и левые – в южном.

А какие еще силы действуют на каплю, движущуюся под воздействием центробежной и кориолисовой сил? Ну, конечно, сила аэродинамического сопротивления вязкого воздуха  $f$ . В научно-популярной литературе

неоднократно обсуждалась зависимость этой силы от скорости  $v$  движения шарика радиусом  $b$ , от плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$  воздуха (см. например, статью Р.Коркина «Капля дождя» в «Кванте» №11-12 за 2020 г.). Поэтому можно привести ее выражение, не противоречащее, по крайней мере, соображениям размерности:

$$\vec{f} = C \rho \pi b^2 v^2 \left( \frac{\vec{v}}{v} \right), \quad \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \right).$$

Здесь  $\frac{\vec{v}}{v}$  – это единичный вектор, указывающий направление силы. А множитель  $C$ , называемый коэффициентом сопротивления, – безразмерный, и его значение измеряется во множестве аэродинамических труб для тел различной формы и разных условий обтекания. Для шара этот коэффициент можно приблизительно представить в виде суммы двух его предельных (асимптотических) выражений:

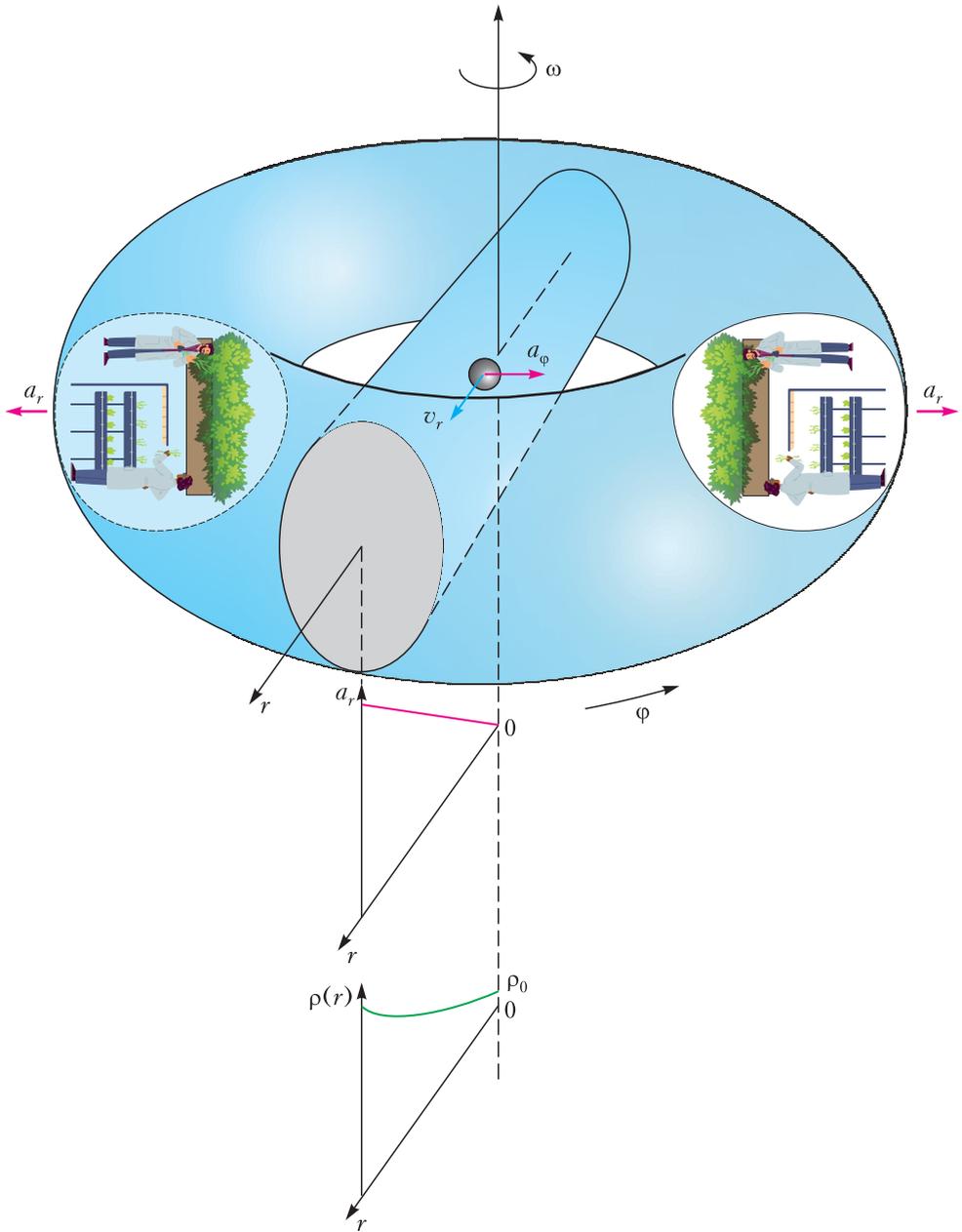
$$C \approx \frac{1}{4} + \frac{6\mu}{b\rho v}.$$

Первое слагаемое близко к значению, найденному еще И.Ньютоном (1643–1727), второе характеризует силу Стокса (1819–1903), важную для мелких шариков. Поскольку  $C$  – безразмерная величина, коэффициент вязкости воздуха должен иметь ту же размерность, что и знаменатель второго слагаемого, а поскольку  $\frac{\mu}{\rho}$  является коэффициентом диффузии в газе, вместо скорости  $v$  нужно подставить среднюю тепловую скорость  $\langle c \rangle$ , вместо радиуса капель – среднюю длину  $l$  свободного пробега молекулы между столкновениями. А молекулярная динамика советует не забыть для приличия еще множитель  $\frac{1}{3}$ , если молекулы рассматриваются как жесткие шары.

Итак,

$$\mu = \frac{1}{3} \rho l \langle c \rangle, \quad C \approx \frac{1}{4} + \frac{2l \langle c \rangle}{b v}, \quad \text{где } \langle c \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{R}{M} T.$$

Видно, что сюда вошли только геометрические и кинематические характеристики капли и воздуха, универсальная газовая постоянная  $R$  и молярная масса  $M$ . Причем размер капли измерен в длинах пробега молекулы, а скорость ее движения – в единицах  $\langle c \rangle$ .



Будем считать, что капли, порожденные чихающим астронавтом, достаточно мелкие и быстро достигают установившейся скорости падения. Собирая всю накопленную информацию, для радиально падающей капли в звездолете получим следующее приближенное уравнение:

$$m \frac{dv}{dt} = m\omega^2 r - \frac{1}{4} \pi b^2 \rho v^2 - 2\pi l \langle c \rangle \rho v b, \quad (1)$$

где  $m = \frac{4}{3} \pi b^3 \rho_B$ ,  $\rho_B$  – плотность воды. В левой части этого уравнения можно избавиться от времени, сделав замену  $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr}$  (учитывая, что  $v = \frac{dr}{dt}$ ); при этом оно определяет изменение с расстоянием кинетической энергии капли.

Казалось бы, пора пытаться решить это уравнение. Да, но! – подумал талантливый ЕГЭшник, – ведь плотность воздуха в потенциальном поле сил должна зависеть от координаты, что имеет место и в поле тяготения Земли! Несомненно. И эту зависимость легко установить:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}\right). \quad (2)$$

Здесь, как и в известной барометрической формуле, показатель экспоненты есть отношение потенциальной энергии молекулы к ее средней тепловой энергии,  $\rho_0$  – значение плотности воздуха на оси вращения (при  $r = 0$ ; см. рисунок). И тут Он осознал, что подстановка выражения (2) в уравнение (1) отнюдь не облегчает решения этого уравнения (хотя ничто не мешает решить его численно). Следовательно, пора упрощать и пренебрегать.

Ранее уже предполагалось, что капли, порожденные чихающим астронавтом, настолько мелкие, что почти мгновенно достигают установившейся скорости «падения». Это значит, что в левой части уравнения (1) можно поставить ноль, т.е. пренебречь радиальным изменением кинетической энергии капли. Тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение для  $v(r)$ , решение которого имеет вид

$$v = \frac{4l\langle c \rangle}{b} \left\{ \left[ 1 + \frac{b^3}{3} \cdot \frac{\rho_B}{\rho} \cdot \frac{r\omega^2}{(l\langle c \rangle)^2} \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (3)$$

(При желании можно сделать такую замену:  $l\langle c \rangle = \frac{3\mu}{\rho}$ ).

Для численных оценок примем «типичный» радиус оранжереи звездолета равным  $r = 100$  м, температуру «воздуха» (чистого кислорода)  $T = 300$  К, его плотность  $\rho = 0,4$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда длина свободного пробега молекулы будет вдвое больше, чем при нормальных условиях на Земле:  $l = 2,5 \cdot 10^{-7}$  м, а средняя тепловая скорость молекулы будет равна

$$\langle c \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{32 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} \text{ м/с} = 450 \text{ м/с}.$$

Здесь учтено, что  $\frac{M}{R} = \frac{m_0}{k}$ , где  $m_0$  – масса молекулы, среднее число нуклонов в моле-

куле кислорода 32 и масса каждого из них  $1,67 \cdot 10^{-27}$  кг, постоянная Больцмана  $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. А углекислым газом, который выделяют растения, пренебрежено для простоты.

Разумеется, приведенные численные оценки относятся к случаю, когда астронавт находится в кольцевой оранжерее (как на рисунке). В радиальном же коридоре (разумеется, разделенном на отдельные отсеки) будут другие значения радиуса  $r$ , определяющего центробежное ускорение  $\omega^2 r$ . Далее, при обеспечении условий, близких к земным, центробежное ускорение должно быть равно ускорению свободного падения на поверхности Земли:

$$\omega^2 r = g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2, \text{ откуда } \omega^2 \approx 0,1 \text{ с}^{-2}.$$

При этом показатель степени в выражении (2) будет порядка  $10^{-2}$ , что позволяет пренебречь радиальным изменением плотности воздуха.

Наконец, оценим установившуюся скорость падения капли радиусом, например,  $b = 10$  мкм =  $10^{-5}$  м:

$$v = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-7} \cdot 450}{10^{-5}} \text{ м/с} \times \left\{ \left[ 1 + \frac{(10^{-5})^3}{3} \cdot \frac{10^3}{0,5} \cdot \frac{10^2 \cdot 0,1}{(2,5 \cdot 10^{-7} \cdot 450)^2} \right]^{1/2} - 1 \right\} \approx 1 \text{ см/с}.$$

Впрочем, причем здесь коронавирус ... Да и растениям в космической оранжерее не обязательно обеспечивать давление воздуха, близкое к атмосферному. Как известно, отношение длины свободного пробега молекулы к размеру частиц характеризует степень разрежения газа и называется числом Кнудсена (1871–1949)  $\text{Kn} = \frac{l}{2b}$ . Так что выражение (3) можно переписать в этих терминах. Считается, что при  $\text{Kn} \geq 0,1$  уже надо учитывать влияние разрежения. Конечно, при этом все большую роль должен играть пар воды, важный для растений, что будущим ботаникам придется учесть в выражениях для вязкости, средней тепловой скорости молекулы...

А что же сила Кориолиса? Можно показать, что при данном наборе параметров она приводит лишь к незначительному смещению капли вбок.

# До финала

**А.БЛИНКОВ**

На личной олимпиаде XXVI Турнира имени А.П.Савина школьникам 5–6 классов была предложена следующая задача.

**Задача 1.** Школьный турнир по настольному теннису проходил по такой системе: на каждом этапе игроки разбивались на пары и играли одну партию, на следующем этапе опять разбивались на пары и играли одну партию (пары не повторялись) и так далее. Школьник, дважды проигравший, выбывал из турнира. Если на каком-то этапе количество участников нечетно, то один проходил на следующий этап без игры. Сколько человек участвовало в турнире, если до финала, в котором должны были играть двое, было сыграно 29 партий?

Эта же задача, но с добавленным вопросом – «Сколько человек участвовало в турнире, если до финала, в котором должны были играть двое, было сыграно 30 партий?» – вошла под номером 15 в Конкурс имени А.П.Савина (см. «Квант» № 11-12 за 2021 г.).

К удивлению жюри, считавшего задачу простой, ее решили немногие. Поэтому, прежде чем привести решение, обратимся к «классической задаче» в слегка измененной формулировке.

**Задача 2.** В турнире по боксу, проходившему по олимпийской системе (проигравший выбывает), было проведено 29 боев, не считая финального. Сколько боксеров участвовало в турнире?

**Решение.** В каждом из боев, прошедших до финала, проигрывал один боксер, который выбывал из турнира. В финале встречались двое не проигрывавших ранее, значит, всего участников было  $29 + 2 = 31$ .

**Упражнение 1.** В турнире по тем же правилам участвовало 66 боксеров. Сколько боев проведено до финала?

Главный вывод – для решения задачи 2 нет необходимости разбирать, как именно проходили бои. Это касается и задачи 1.

**Решение задачи 1.** Каждый из школьников, дошедших до финала, либо вовсе не проигрывал, либо проиграл одну партию. Поэтому на долю остальных приходится 29, 28 или 27 проигранных партий. Так как школьник выбывал после двух проигранных партий, то 29 или 27 партий быть не могло, а количество выбывших составляет  $28 : 2 = 14$ . Значит, в турнире могло участвовать только 16 школьников. Задача решена.

Отметим, что и в данном случае не надо приводить пример, описывающий как именно проходил турнир, и показывать, что полученный ответ достигается, так как в условии сказано, что турнир состоялся, а полученный ответ – единственный.

Но ситуация изменится, если в таком турнире до финала было сыграно 30 партий. Действительно, рассуждая аналогично, получим, что на долю выбывших приходится 30, 29 или 28 партий. Тогда в турнире могло участвовать  $30 : 2 + 2 = 17$  или  $28 : 2 + 2 = 16$  школьников. В этом случае требуется показать, что оба полученных ответа возможны. Сделаем это для 17 участников.

Один из школьников без игры прошел на второй этап, на котором «отдыхал» один из школьников, выигравший на первом этапе, а

Таблица 1

	1	2	3	4	5
1			1 <sub>8</sub>		1 <sub>5</sub>
2			1 <sub>7</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>
3	0 <sub>8</sub>	0 <sub>7</sub>		1 <sub>6</sub>	
4		0 <sub>5</sub>	0 <sub>6</sub>		
5	0 <sub>5</sub>	0 <sub>6</sub>			

остальные, выигравшие на первом и не игравший ранее участники, встречались с проигравшими, сменив соперников, и вновь выигрвали. Тогда после второго этапа 8 участников выбыли, а осталось 9 участников, не имеющих поражений. Следующие два этапа проходили по аналогичной схеме, после чего осталось 5 школьников, не имеющих поражений. Результаты пятого, шестого, седьмого и восьмого этапов приведены в таблице 1 (индекс соответствует номеру этапа). Таким образом, до финала дошли участники 1 и 2, а сыграно было  $8 + 8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 = 30$  партий.

**Упражнение 2.** Приведите аналогичный пример для 16 участников такого турнира, в котором сыграно 30 партий.

С математической точки зрения в приведенном примере ошибок нет, но в реальности турниры по указанной системе проходят по правилам, более жестко регламентирующим

порядок разбиения на пары. Приведем первую часть правил турнира, система проведения которого носит название Double Elimination.

Турнир разделен на две сетки – верхнюю и нижнюю (сетку победителей и сетку проигравших). Все участники начинают турнир в верхней сетке. Участники разбиваются на пары, которые проводят в первом туре игры между собой. Победители первого тура выходят во второй тур верхней сетки. Проигравшие переходят в нижнюю сетку. В нижней сетке турнир начинается со второго тура. Начиная с этого тура, игры проводятся одновременно в обеих сетках, но никто не должен играть с одним и тем же соперником дважды. Выигравший в верхней сетке переходит в следующий тур в ней же. Проигравший в верхней сетке переходит в следующий тур в нижней сетке. Выигравший в нижней сетке переходит в следующий тур в ней же. Проигравший в нижней сетке выбывает из турнира.

При таком подходе приведенный пример не работает, так как уже во втором туре между собой встречаются участники из разных сеток. Более того, если на каждом этапе игроки разбивались на пары, то такой турнир вообще провести невозможно!

Действительно, уже после второго этапа количество участников в нижней сетке существенно превысит количество в верхней, поэтому в какой-то момент в верхней сетке останется один участник, у которого не будет пары, а в нижней сетке – не менее двух. Это удобно показать на примере 16 участников (см. таблицу 2, пары чисел – количество

Таблица 2

1 этап	2 этап	3 этап	4 этап	5 этап
16 – 0	8 – 8	4 – 8	2 – 6	1 – 4

участников в верхней и нижней сетках соответственно).

На помощь приходит вторая часть правил, которая имеет несколько разновидностей. Наиболее простая из них такова. На некоторых этапах игры проводятся только в нижней сетке до тех пор, пока количество участников в обеих сетках не станет одинаковым. После того, как в обеих сетках останется по два участника, на следующем этапе образуются две пары, в каждой из которых участник из верхней сетки встречается с участни-

ком из нижней. В случае побед обоих «верхних» участников они разыгрывают финал. В случае поражений обоих на следующем этапе они меняются соперниками и победители этих пар выходят в финал. Если же выигрывает один из них, то образуется пара участников, имеющих по одному поражению, победитель которой выходит в финал и играет с тем, кто поражений не имеет.

Отметим, что приведенные правила почти автоматически обеспечивают условие «никто не должен играть с одним и тем же соперником дважды». Тогда турнир, в котором 16 участников сыграли до финала 30 партий, мог быть проведен так, как показано в таблице 3 (в первой строке – количество участ-

Таблица 3

1 этап	2 этап	3 этап	4 этап	5 этап	6 и 7 этапы
16 – 0	8 – 8	4 – 8	4 – 4	2 – 4	2 – 2
8 – 0	4 – 4	0 – 4	2 – 2	0 – 2	2 + 2

тников в каждой сетке, во второй – количество игр в каждой сетке; на 6 этапе участники из верхней сетки сначала проиграли нижним и поменялись соперниками, после чего победители пар вышли в финал).

**Упражнение 3.** Приведите пример, показывающий, что в турнире с 17 участниками могло быть сыграно 30 партий до финала, согласно правилам, приведенным выше.

В заключение сравним турниры по олимпийской системе и системе Double Elimination для 16 участников. По олимпийской системе до финала проходит 3 этапа и играется 14 партий, а по системе с выбыванием после двух поражений проходит 6 или 7 этапов, в которых играется 28, 29 или 30 партий, т.е. во втором случае и этапов, и партий как минимум вдвое больше.

Желающие могут исследовать, сохранятся ли эти закономерности для турниров с произвольным количеством участников, начав, для простоты, с турнира, в котором  $2^n$  участников.

# ОЛИМПИАДЫ

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП LVI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

### Теоретический тур

7 класс

#### Задача 1. Конвейер

На ленте конвейера, движущейся с некоторой скоростью  $v$ , находятся цилиндрические емкости. Над лентой через каждые  $L$  метров установлены краны, из которых в те промежутки времени, когда под ними проходят емкости, с постоянным объемным расходом выливается готовый продукт. За некоторое время  $t_0$  емкость заполняется на половину своего объема  $V$ .

1) Какая часть объема  $V$  будет заполняться за то же время  $t_0$ , если расстояние между кранами увеличить в 2 раза, а скорость движения ленты – в 3 раза?

2) Представьте, что все размеры емкости увеличили в 2 раза, расстояние между кранами – в 3 раза, а скорость движения ленты установили  $2v$ . Какая часть объема  $V_1$  новой емкости заполнится за время  $4,5t_0$ ?

При решении задачи считайте, что  $t_0 \gg L/v$ .

А.Евсеев

#### Задача 2. Неудачное испытание

Во время испытаний дрона, созданного для наблюдения за движением транспортных средств по загородному шоссе, что-то

пошло не так. Дрон выдал таблицу, в которой вперемешку приведены координаты трех находящихся на трассе автомобилей в разные моменты времени. Считая, что автомобили двигались с постоянными скоростями вдоль оси  $x$ , не разворачиваясь, определите:

а) величины скоростей автомобилей;

б) координаты и моменты времени, когда автомобили поравнялись (встречались или обгоняли друг друга).

А.Сеитов

Время, ч:мин:с	$x$ , км
12:45:00	34,4
12:45:10	32,6
12:45:30	31,4
12:45:40	33,6
12:46:00	32,0
12:46:40	32,4
12:46:40	33,2
12:46:50	33,0
12:47:00	32,0
12:47:20	33,6
12:47:40	31,2
12:47:40	33,6
12:47:50	34,2
12:48:10	33,8

#### Задача 3. Маша и медведи

В комнате у Маши стоит аквариум, частично заполненный водой плотностью  $\rho_0$  и объемом  $V_0$ . Также у Маши есть два одинаковых плюшевых медведя. Когда Маша погрузила одного медведя в аквариум, он намок и опустился на дно; при этом средняя плотность содержимого аквариума оказалась равной  $\rho_1$ . А когда она погрузила и второго медведя, плотность стала равной  $\rho_2$ . Определите массу  $m$  одного медведя. Вода из аквариума не вытекала.

А.Уймин

#### Задача 4. Стратифицированные жидкости

В цилиндрическом сосуде находится  $V_1 = 100$  мл жидкости плотностью  $\rho_1$ . В него начинают наливать с постоянным массовым расходом  $\mu$  жидкость плотностью  $\rho_2$ . График зависимости средней плотности содержимого

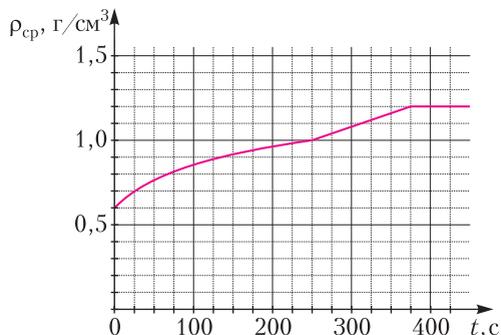


Рис. 1

сосуда от времени представлен на рисунке 1. Определите плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , объем  $V_0$  сосуда и массовый расход  $\mu$ . Жидкости не смешиваются.

А.Уймин

8 класс

#### Задача 1. Подвижные препятствия

Между источником сигнала  $S$  и приемником  $P$  перпендикулярно соединяющей их прямой движутся навстречу друг другу с постоянными

скоростями две пластины длиной  $L = 1$  м (рис. 2). Если сигнал по пути от источника к приемнику проходит только через одну из пластин, то приемник зажигает желтую лампочку

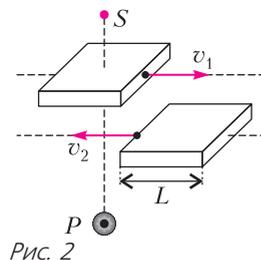


Рис. 2

ку, если через две – то красную. В некоторый момент времени на  $t_1 = 3$  с зажглась желтая лампочка, затем  $t_2 = 3$  с горела красная, а потом в течение  $t_3 = 1$  с – опять желтая. Определите, за какое время  $\tau$  одна пластина проезжает мимо другой.

*А.Евсеев*

**Задача 2. Балансир**

Две пружины жесткостью  $k$  (длинная) и  $2k$  (короткая) отличаются по длине на  $l$ . Их прикрепляют к однородной массивной балке длиной  $8l$  (рис. 3). Затем конструкцию устанавливают на легкие тонкие поршни сообщающихся сосудов, заполненных жидкостью плотностью  $\rho$ , сечения которых  $S$  и  $2S$ . При этом балка принимает горизонтальное положение. Определите массу балки  $M$ .

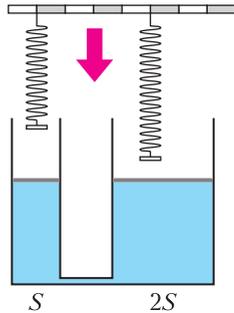


Рис. 3

*А.Евсеев*

**Задача 3. Теплый пол**

Отопление кухни организовано с помощью системы электрического теплого пола. Сначала он работал в базовом режиме, и на кухне установилась температура  $t_1 = 18$  °С. Затем его мощность увеличили в 4 раза, и температура на кухне возросла до  $t_2 = 21$  °С. Какая температура  $t_3$  установится на кухне, если базовую мощность увеличить в 9 раз? Определите также температуру  $t_0$  воздуха на улице.

*А.Евсеев*

**Задача 4. Обледенение**

В теплоизолированный сосуд по одной трубе с массовым расходом  $\mu_1$  поступает колотый лед при температуре  $t_1 = 0$  °С, а по другой с массовым расходом  $\mu_2$  наливается вода при температуре  $t_2$ . На рисунке 4 представлена диаграмма состояний содержимого сосуда.

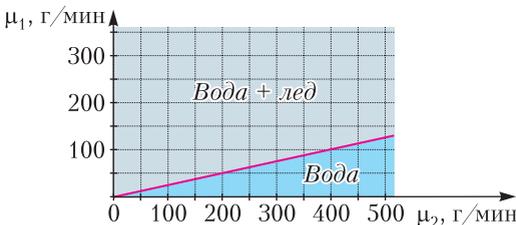


Рис. 4

1) Определите температуру  $t_2$  поступающей воды.

2) Постройте диаграмму состояний содержимого сосуда для случая, когда температура поступающей воды прежняя, а температура льда равна  $t_3 = -40$  °С.

Удельная теплоемкость воды  $c_v = 4200$  Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость льда  $c_l = 2100$  Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.

*М.Замятнин*

9 класс

**Задача 1. Три ракеты**

Из точки, находящейся на высоте  $h$  над поверхностью земли, под разными углами к горизонту с одинаковыми скоростями  $v_0$  одновременно разлетаются три осколка фейерверка. Векторы их скоростей лежат в одной вертикальной плоскости. Через время  $\tau = 1,0$  с после вылета осколки взрываются. Вспышка первого происходит у самой поверхности земли, вспышка второго – на расстоянии  $l = 10$  м от первого, а вспышка третьего – на таком же расстоянии  $l$  от второго. Отрезок, соединяющий две первые вспышки, составляет угол  $75^\circ$  с горизонтом, а отрезок, соединяющий вторую и третью вспышку, составляет угол  $120^\circ$  с первым отрезком, как показано на рисунке 5. Определите начальные скорости  $v_0$  осколков; углы с горизонтом, под которыми направлены векторы начальных скоростей каждого из осколков; высоту  $h$ , на которой разорвался фейерверк. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

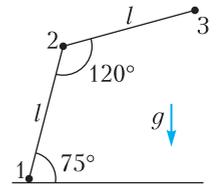


Рис. 5

*А.Аполонский*

**Задача 2. Пружины**

Система состоит из трех легких пружин и двух легких стержней (рис. 6). Коэффициенты жесткости пружин указаны на рисунке. Верхний стержень на трети своей длины прикреплен к шарнирной опоре. Как изменится (в какую сторону и на сколько) длина верхней пружины, если к середине нижнего стержня приложить внешнюю силу  $F$ , направленную вертикально вниз? Чему равен

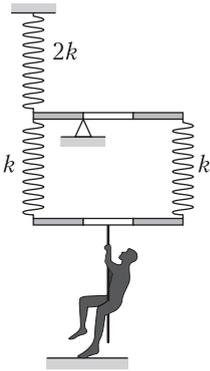


Рис. 6

коэффициент жесткости системы  $k_0$ , если на нее действовать внешней вертикальной силой, приложенной к середине нижнего стержня? Углы поворота стержней малы. Пружины остаются вертикальными.

*М.Замятнин*

### Задача 3. Сосуды с водой

В трех сосудах находится вода массой  $m$ ,  $2m$  и  $4m$  при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $3t$  и  $2t$  соответственно. Порцию воды из первого сосуда переливают во второй. Затем такую же по массе порцию из второго сосуда переливают в третий. И в завершение такую же порцию из третьего сосуда переливают в первый. В результате в первом сосуде устанавливается равновесная температура  $t_1 = 28^\circ\text{C}$ , а во втором  $t_2 = 54^\circ\text{C}$ . Определите новую температуру  $t_3$  в третьем сосуде. Тепловыми потерями и теплоемкостью сосудов можно пренебречь.

*С.Муравьев*

### Задача 4. Кольцо

Кольцо радиусом  $r$  сделано из проволоки, удельное сопротивление  $\rho$  которой увеличивается от точки  $A$  до точки  $B$  по линейному закону  $\rho = \alpha\phi$ , где  $\alpha$  – известная постоянная,  $\phi$  – угол, отсчитываемый от точки  $A$  по или против часовой стрелки, как показано на рисунке 7. Определите сопротивление  $R_0$  всей проволоки, из которой изготовлено кольцо. Найдите на кольце две точки  $M$  и  $N$ , между которыми эквивалентное сопротивление  $R_{MN}$  кольца максимально при минимальном расстоянии между  $M$  и  $N$ . Определите значение этого сопротивления  $R_{\max}$  и расстояние  $L$  между  $M$  и  $N$ . Площадь  $S$  сечения

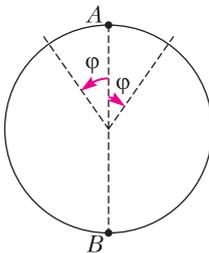


Рис. 7

проволоки известна и постоянна вдоль всего кольца.

*С.Муравьев*

### Задача 5. Параллелограмм

На рисунке 8 обозначены образующие параллелограмм два точечных действительных источника света и два их изображения, полученные с помощью тонкой линзы. Построением определите тип линзы, ее положение, положение главной оптической оси и фокусов  $F$ .

*А.Евсеев*

10 класс

### Задача 1. Магнитики

Как-то раз в руках у экспериментатора Глюка оказались стопка из шести мощных одинаковых цилиндрических магнитов, разделенных одинаковыми картонными прокладками, и высокоточный термометр. Дело оставалось за малым – провести какой-нибудь эксперимент. Не придумав ничего лучше, Глюк включил лабораторную электроплитку и прикрепил стопку магнитов к ее боковой поверхности (рис. 9), затем стал



Рис. 9

измерять температуру крайнего (дальнего от плитки) магнита. Спустя некоторое время его температура перестала изменяться и оказалась равной  $T_1 = 23^\circ\text{C}$ , а температура соседнего магнита оказалась равной  $T_2 = 29^\circ\text{C}$ . Также Глюк измерил радиус магнита  $r = 2,0$  см и его высоту (толщину)  $h = 1,0$  см. Определите температуру остальных магнитов и температуру плитки. Считайте, что магниты обладают очень хорошей теплопроводностью, поэтому температура магнита одинакова во всех его точках; температура воздуха одинакова во всех точках вблизи магнитов и равна  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ; между магнитом и плиткой картонная прокладка отсутствует; теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур цилиндра и воздуха и пропорциональна площади контакта магни-

та с воздухом; поток тепла через картонный диск пропорционален разности температур его поверхностей и пропорционален площади диска.

*А.Аполонский*

### Задача 2. Тяжелый поршень

В вертикальном закрытом сосуде переменного сечения имеются два отделения цилиндрической формы: нижнее с площадью сечения  $S_1 = S$  и высотой  $h_1 = h$ , верхнее с площадью сечения  $S_2 = 3S$  и высотой  $h_2 = 3h$  (рис. 10). Нижнее отделение плотно и герметично закрыто подвижным теплопроводящим поршнем (поршень не приклеен, но газ не проникает в пространство между поршнем и опорами), который может с минимальным трением перемещаться внутри верхнего отделения. В обоих отделениях находится одно и то же количество  $\nu$  газа при температуре  $T_0$ . Газ во всем сосуде медленно нагревают. Когда температура газа достигает величины  $2T_0$ , поршень отрывается от опор.

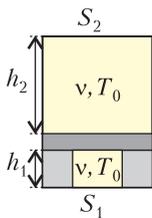


Рис. 10

1) Чему равна масса поршня?

2) На какой высоте  $h'$  от нижнего основания сосуда окажется поршень в равновесии? Температура всего газа поддерживается равной  $2T_0$ .

3) Газ в сосуде начинают медленно охлаждать. При какой температуре  $T$  поршень снова опустится на опоры?

*Примечание.* Температура газа над и под поршнем всегда поддерживается одинаковой.

*А.Заяц*

### Задача 3. Мягкая посадка

Космический корабль должен приземлиться на лишенную атмосферы планету и коснуться ее поверхности со скоростью, не превышающей  $v_{п}$ , которую могут погасить амортизаторы. На высоте  $h$  над поверхностью планеты командир корабля включил тормозной реактивный двигатель, создающий силу тяги, направленную вверх. Какой по величине в этот момент была скорость  $v$  корабля, направленная вертикально вниз, если оказалось, что в процессе посадки он истратил минимальное количество топлива? (Если таких скоростей несколько, то укажите их все.) Массовый расход  $\mu$  топлива и скорость  $u$  истечения газов относительно кор-

пуса корабля считайте постоянными (командир может выбирать любое значение расхода). Изменение массы корабля не учитывайте, ускорение свободного падения равно  $g$ .

*А.Заяц*

### Задача 4. И снова Снеллиус

В архиве Снелла нашли чертеж. От времени чернила частично выцвели и остались видны только 4 точки, две из которых являются точечными действительными источниками  $S_1$  и  $S_2$ , а оставшиеся две —  $\alpha$  и  $\beta$  — их изображения (рис. 11). Из описания к чертежу следовало, что изображения созданы одной линзой. Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) все возможные положения линзы, ее тип и фокусное расстояние.

*А.Евсеев, В.Словобянин*

### Задача 5. Суммарная мощность

В цепи, изображенной на рисунке 12, суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, равна 7 Вт. Определите суммарную мощность, выделяющуюся на резисторах в цепи, изображенной на рисунке 13. Характеристики всех элементов цепей не заданы, но элементы, обозначенные на схемах одинаково, имеют одинаковые характеристики. Источники можно считать идеальными.

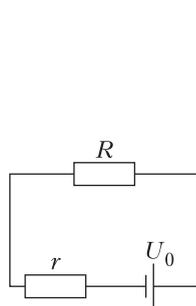


Рис. 12

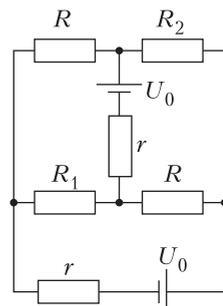


Рис. 13

торах, равна 7 Вт. Определите суммарную мощность, выделяющуюся на резисторах в цепи, изображенной на рисунке 13. Характеристики всех элементов цепей не заданы, но элементы, обозначенные на схемах одинаково, имеют одинаковые характеристики. Источники можно считать идеальными.

*А.Коновалов*

11 класс

### Задача 1. Треугольник и пленка

Легкие стержни  $OA$  и  $AB$  соединены шарнирно между собой (рис. 14). Конец  $O$  стержня  $OA$  закреплен шарнирно на гладкой спице, а на конце  $B$  стержня  $AB$  прикреплено с помощью шарнира маленькое колечко мас-

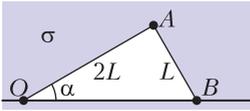


Рис. 14

Рис. 14  
 ОА = 2L, все шарниры невесомы. Система снаружи (до закрепленной внешней границы) окружена двусторонней пленкой с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . В области между спицей и стержнями пленки нет. Силу тяжести не учитывайте. Найдите:

- 1) величину угла  $\alpha$  в положении равновесия;
- 2) период малых колебаний системы вблизи положения равновесия.

А. Уймин

**Задача 2. Охлаждение**

Сосуд объемом  $V$  с теплообменником внутри сообщается с атмосферой через тонкую длинную трубку (рис. 15). Исходно температура в нем  $T_0$  равна температуре атмосферного воздуха. По теплообменнику прокачивают охлаждающую жидкость до тех пор, пока температура воздуха во всем сосуде не уменьшится до  $T$  ( $T < T_0$ ). Сколько тепла от воздуха передано теплообменнику? Атмосферное давление  $p$ . Поток тепла через стенки сосуда и трубку можно пренебречь. Внутренняя энергия воздуха  $U = (5/2)\nu RT$ , где  $\nu$  – число молей,  $T$  – температура, а  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Рис. 15

Рис. 15  
 Сколько тепла от воздуха передано теплообменнику? Атмосферное давление  $p$ . Поток тепла через стенки сосуда и трубку можно пренебречь. Внутренняя энергия воздуха  $U = (5/2)\nu RT$ , где  $\nu$  – число молей,  $T$  – температура, а  $R$  – универсальная газовая постоянная.

И. Воробьев

**Задача 3. Плоский конденсатор**

Две круглые непроводящие пластины радиусом  $R$  располагаются параллельно на малом расстоянии  $d \ll R$  друг от друга, образуя плоский конденсатор (рис. 16). Пластины заряжены равномерно с поверхностными плотностями заряда  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  – центры пластин. Точки  $A$  и  $B$  находятся на краях пластин. Отрезки  $O_1O_2$  и  $AB$  перпендикулярны пластинам. Найдите разности потенциалов между точками:

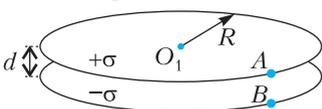


Рис. 16

- 1)  $O_1$  и  $O_2$ ;
- 2)  $A$  и  $B$ ;
- 3)  $O_1$  и  $A$ .

А. Аполонский

**Задача 4. Гантель в магнитном поле**

В аксиально-симметричном магнитном поле находится гантель – легкий непроводящий стержень с заряженными шариками на концах. Массы и заряды шариков одинаковы и равны  $m$  и  $q$ . Гантель перпендикулярна оси симметрии (оси  $x$ ), а ее центр находится на этой оси (рис. 17). Проекция магнитного поля на радиальное (перпендикулярное оси) направление на расстоянии, равном радиусу гантели, везде одинакова и равна  $B_r$ . Осевого компонента поля изменяется вдоль оси. В момент времени  $t_0$  гантели сообщают скорость  $v_0$  вдоль оси  $x$ . Силу тяжести не учитывайте.

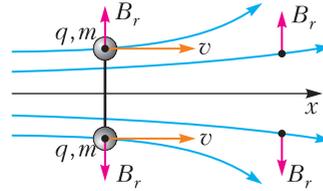


Рис. 17

не учитывайте.

- 1) На какое наибольшее расстояние  $L_{max}$  от начального положения удаляется центр гантели?
- 2) Чему равна максимальная окружная (перпендикулярная оси симметрии) скорость вращения шариков гантели в процессе движения?
- 3) Через какое время угловая скорость вращения гантели окажется наибольшей?

А. Аполонский

**Задача 5. Круг Снелла**

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы, на которой были изображены тонкая собирающая линза, круг и его изображение в линзе. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны лишь круг и его изображение (рис. 18), но известно, что круг целиком располагался в плоскости, проходящей через главную оптическую ось линзы, и что круг и его изображение располагались по разные стороны от плоскости линзы. Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:



Рис. 18

- 1) оптического центра  $O$  линзы;
- 2) плоскости линзы;
- 3) фокусов  $F_1$  и  $F_2$  линзы.

А. Уймин

Публикацию подготовил В. Слободянин

## **Заочная физико-техническая школа при МФТИ**

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (МФТИ) проводит набор учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации, для обучения в 8–11 классах ЗФТШ на 2022/23 учебный год.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики, высшей математики и департамента химии МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты, имеющие большой опыт работы с одаренными школьниками.

Полная программа обучения рассчитана на 4 года – с 8-го по 11-й класс включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

Учащиеся всех отделений по окончании одиннадцатого класса получают свидетельство об окончании ЗФТШ и могут добавить дополнительные баллы при поступлении в МФТИ (подробная информация имеется на сайте МФТИ в разделе «Изменения в порядке учета индивидуальных достижений»).

Для учащихся и руководителей факультативных групп работает online-лекторий по программам ЗФТШ. Лекции читают преподаватели МФТИ.

## **ОЧНО-ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

*(обучение в факультативных группах)*

Телефон: (498) 744-63-51

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *по одному или нескольким предметам*. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ (работы проверяются руководителями групп и в ЗФТШ не высылаются).

Обучение в ЗФТШ для государственных школ бесплатное. Для учащихся, проживающих за пределами Российской Федерации, возможно только платное обучение. Более

подробную информацию можно посмотреть на сайте [school.mipt.ru](http://school.mipt.ru)

Вступительное задание для очно-заочного отделения будет размещено на сайте [school.mipt.ru](http://school.mipt.ru) 30 марта 2022 года и будет доступно до 31 мая 2022 года.

## **ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

*(индивидуальное заочное обучение)*

Телефон: (495) 408-51-45

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения онлайн-олимпиады на сайте <https://zftsh.online> по выбранным для изучения предметам.

Олимпиада стартует 23.03.2022 в 9.00 и закончится 27.03.2022 в 21.00 (время московское).

На выполнение заданий для каждого предмета дается 4 часа.

Решение приемной комиссии будет сообщено до 1 июня 2022 года по указанному при регистрации адресу электронной почты. Также в личном аккаунте появится справка о зачислении в ЗФТШ.

При регистрации на <https://zftsh.online> необходимо прикрепить хорошо читаемую копию справки из школы.

## **ОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

*(заочное обучение с посещением очных консультаций)*

Телефон: (925) 755-55-80

Группа ВК: <https://vk.com/vftsh>

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится в сентябре в два этапа:

- заочный этап – тестирование на сайте <http://zftsh.online>,

- очный этап – устные экзамены.

Более подробная информация о наборе на очное отделение будет размещена на сайтах ЗФТШ в августе 2022 года.

Занятия с учащимися очного отделения проводятся в учебных корпусах МФТИ в городах Долгопрудный и Жуковский.

Обучение для школьников бесплатное (в рамках плана приема), для непрошедших по конкурсу возможно только платное обучение.

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №1)

1. 8.

Из тех 9 коротышек, что вчера ели пончики, 5 коротышек едят их ежедневно, значит, остальные едят их через день. Поэтому сегодня эти четверо есть пончики не будут, а остальные из тех, кто ест через день, — будут. Так что сегодня едят пончики эти трое, а также те пятеро, кто ест пончики всегда. Получаем ответ:  $3 + 5 = 8$ .

2. Возможны варианты:  $1,5 \cdot 1,6 \cdot 2,5 = 6$  или  $1,5 \cdot 2,4 \cdot 2,5 = 9$ . Каждый из этих вариантов на самом деле задает шесть ответов, поскольку от порядка множителей произведение не зависит.

*Комментарий.* От участников олимпиады, где предлагалась эта задача, требовалось найти лишь один пример. Покажем, как найти их все.

Вместо звездочек используем буквы:  $a, b \cdot c, d \cdot e, f = h$ . Домножим каждое из чисел в левой части на 10, а правую часть на 1000, получим  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot \overline{ef} = 1000 \cdot h$ . Поскольку ни одна из звездочек не должна равняться нулю, каждое из чисел  $\overline{ab}$ ,  $\overline{cd}$  и  $\overline{ef}$  — двузначное и не делится на 10. Таким образом, число  $1000 \cdot h = 2^3 \cdot 5^3 \cdot h$  можно представить в виде произведения трех двузначных чисел, не кратных 10. Посмотрим, как эти двойки и пятёрки распределяются по числам  $\overline{ab}$ ,  $\overline{cd}$  и  $\overline{ef}$ . Если число не делится на 10, то в его разложение на простые множители одновременно двойка и пятёрка входить не могут. Также заметим, что число  $5^3 = 125$  уже трехзначное, поэтому три пятёрки не могут войти в одно число. Значит, в разложение одного из чисел  $\overline{ab}$ ,  $\overline{cd}$  и  $\overline{ef}$  должны войти ровно две пятёрки, в другое разложение — одна пятёрка, а в оставшееся — три двойки.

Итак, одно из чисел делится на 25, другое на 8 и третье на 5. Можно считать, что  $\overline{ab} = 25k$ ,  $\overline{cd} = 8m$  и  $\overline{ef} = 5n$  для натуральных  $k, m, n$ . Тогда  $h = kmn$ . Так как числа двузначные, то  $m \geq 2$  и  $n \geq 2$ . Кроме того,  $\overline{ef}$  не кратно 10, поэтому  $n$  нечетно. Так как  $h$  не превышает 9, то подходят только два варианта:  $m$  равно 2 или 3,  $n = 3$ ,  $k = 1$ , которые и дают нам оба примера.

3. Предположим, Саша выложит 13 фишек так, что все синие линии образуют петлю, а дырок внутри нет. Тогда красная кривая не может оборваться внутри петли, а значит, каждому «входу» красной кривой внутрь синей петли можно сопоставить единственный следующий за ним «выход» из нее. Таким образом, общее количество пересечений всех красных кривых с синей петлей четно. С другой стороны, на оставшихся 13 фишках таких пересечений нечетное число (а именно 3). Противоречие; следовательно, Саша не может выложить фишки указанным образом.

4. Первым действием золотоискатель может поставить на левую чашу весов весь песок, а на правую обе гири — и пересыпать песок до достижения равновесия. В итоге он получит 20 кг песка слева и 17 кг песка (и две гири  $1 + 2$  кг) справа. Вторым действием следует на левую чашу весов поместить 20 кг песка, а на правую гирю в 2 кг — и вновь уравнивать весы, пока слева не окажется 11 кг, а справа 9 кг песка (и одна гиря массой 2 кг). Наконец, следует смешать полученную вторым действием кучу песка массой 9 кг и оставшуюся от первого действия кучу массой в 17 кг.

## Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №11-12 за 2021 г.)

9. Предположим противное. Рассмотрим равносторонний треугольник  $ABC$  из трех вершин шестиугольника решетки: в нем тогда ровно две вершины, скажем  $A$  и  $B$ , одного цвета, например черного, а третья — белого.

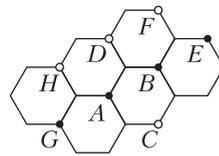


Рис. 1

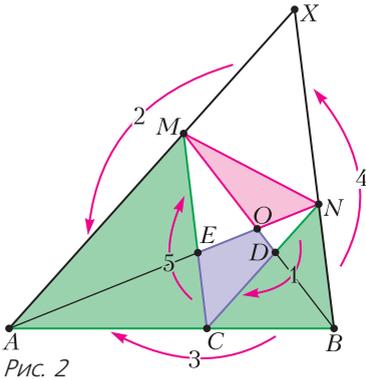
Пусть этот треугольник расположен, как показано на рисунке 1 (этого можно добиться поворотом всей решетки). Тогда в треугольнике  $ABD$  вершина  $D$  белая, в треугольнике  $DCE$  вершина  $E$  черная, в  $DCG$  —  $G$  черная, в  $BEF$  —  $F$  белая, в  $AGH$  —  $H$  белая. Но в таком случае треугольник  $FCH$  целиком белый, что противоречит предположению.

10. 51840.

Всего Петя может выписать  $9!$  разных чисел (для первой цифры есть 9 вариантов, для каждого из них есть 8 вариантов второй цифры и т.д.). Заметим, что вклад третьей слева цифры в остаток от деления числа на 7 равен ей самой (так как  $(1000000 - 1) : 7$ ). Разобьем возможные числа на наборы из 7 чисел, различающихся между собой третьей слева цифрой. В каждом наборе у чисел разные остатки от деления на 7, а значит, ровно одно из них делится на 7. Тогда подходит каждое седьмое число из возможных. Получаем ответ:  $9! / 7 = 51840$ .

11. Продлим  $AM$  и  $BN$  до пересечения в точке  $X$  (рис. 2). Пусть  $CM$  и  $AN$  пересекаются в точке  $E$ ,  $BM$  и  $CN$  — в точке  $D$ ,  $BM$  и  $AN$  в точке  $O$ . Используя параллельности  $BX \parallel CM$  и  $AX \parallel CN$ , получим цепочку равных отношений (на рисунке они пронумерованы в таком же порядке):

$$\frac{ND}{DC} = \frac{XM}{MA} = \frac{BC}{CA} = \frac{BN}{NX} = \frac{CE}{EM}.$$



Далее получаем

$$\begin{aligned} \frac{ND}{DC} = \frac{CE}{EM} &\Rightarrow \frac{ND}{NC} = \frac{CE}{CM} \Rightarrow \frac{S_{MND}}{S_{MNC}} = \\ &= \frac{S_{NCE}}{S_{MNC}} \Rightarrow S_{MND} = S_{NCE} \Rightarrow S_{MNO} = S_{ODCE}. \end{aligned}$$

12. При  $n$ , на 1 меньших степени двойки.

Всего монет  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Пусть в конце во всех кошельках поровну монет, т.е. по  $k = \frac{n+1}{2}$ . Покажем, что  $k$  является степенью двойки. Представим число  $k$  в виде  $t \cdot 2^m$ ,  $t$  нечетно и  $m \geq 0$ . Покажем, что в любой момент количества монет в кошельках делятся на  $t$ . В конце, когда во всех кошельках по  $k$  монет, эти количества делятся на  $t$ . Будем рассматривать ходы в обратном порядке. На произвольном шаге количества монет в двух кошельках из  $a$  и  $b$  превращаются в  $a-b$  и  $2b$ . Если  $a-b:t$  и  $2b:t$ , то  $b:t$  и  $a:t$  (здесь мы использовали нечетность числа  $t$ ). Таким образом, рассматривая ходы в обратном порядке, получим, что если в конце все количества делятся на  $t$ , то и в самом начале все количества делятся на  $t$ . Но в одном из кошельков одна монета, значит,  $t = 1$ .

Итак, мы показали, что  $k = 2^m$ , тогда  $n = 2^{m+1} - 1$ . Индукцией по числу  $a$  покажем, что количества монет в кошельках  $1, 2, \dots, 2^a - 1$  можно сделать равными по  $2^{a-1}$ .

База при  $a = 1$  очевидна. Докажем *переход*. Предположим, что количества монет в кошельках  $1, 2, \dots, 2^a - 1$  можно сделать равными по  $2^{a-1}$ . Покажем, что количества монет в кошельках  $1, 2, \dots, 2^{a+1} - 1$  можно сделать равными по  $2^a$ .

В кошельки  $1, 2, \dots, 2^a - 1$  положим монеты из кошельков соответственно  $2^a + 1, 2^a + 2, \dots, 2^{a+1} - 1$ , а кошелок  $2^a$  не трогаем. В первой группе количества монет удвоились:  $2 \cdot 1, 2 \cdot 2, \dots, 2 \cdot (2^a - 1)$ , во второй группе все количества монет стали равными  $2^a$ .

По предположению индукции количества монет в кошельках  $1, 2, \dots, 2^a - 1$  можно сделать равными по  $2^{a-1}$ . Делая те же действия с кошельками  $2 \cdot 1, 2 \cdot 2, \dots, 2 \cdot (2^a - 1)$ , получится сделать все количества равными  $2^a$ . Итак, все количества монет в кошельках стали равными  $2^a$ , тем самым доказательство перехода индукции завершено.

13. 181.

Если Робинзон не смог сделать выстрел по правилам, то один заряд – это больше, чем 5% имевшихся зарядов. Тогда 20 зарядов – это больше, чем 100% имевшихся зарядов, т.е. у него их осталось не более 19. С другой стороны, вчера патронов было хотя бы 20, а осталось не меньше 95% от этого количества, т.е. их осталось хотя бы 19. Поэтому Робинзон потратил  $200 - 19 = 181$  патрон.

14. При любых  $N$ .

Разделим большой уголок на рамки ширины 2 и, возможно, маленький уголок размера 1 в центре – в зависимости от четности  $N$  (рис. 3). Зна-

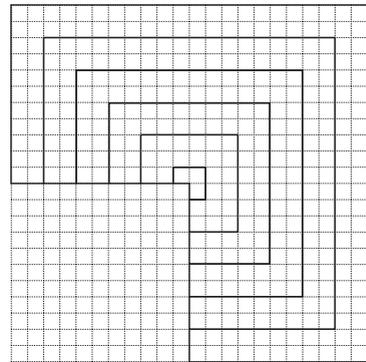


Рис. 3

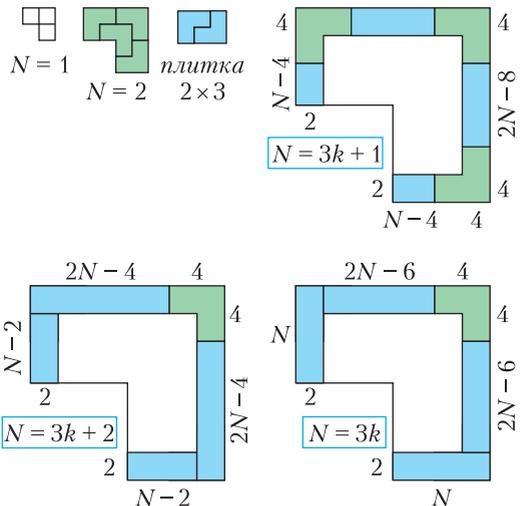


Рис. 4

чит, достаточно доказать, что можно разрезать любую рамку. Если заполнять рамку уголками с одного из ее концов, пары уголков будут объединяться в плитки  $2 \times 3$ . Как именно мы подойдем к первому повороту рамки, зависит от остатка при делении  $N$  на 3 (рис. 4).

15. Решение этой задачи приводится в статье А.Блинкова в этом номере журнала.

16. 40.

Пронумеруем все точки подряд числами от 1 до 101 так, чтобы точка номер 101 была красной. Оставшиеся 100 точек разобьем на 20 групп по 5 точек: с номерами  $x, x + 20, x + 40, x + 60, x + 80$ , где  $x$  принимает значения от 1 до 20. В каждой группе между соседними по кругу точками 19 или 20 других точек, значит, в каждой группе не более двух синих точек. Отсюда получается, что всего точек не более  $2 \cdot 20 = 40$ .

Пример, когда синих точек ровно 40, возможен: пусть это точки с номерами с 1 по 20 и с 51 по 70.

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

1. Вследствие *принципа* относительности Галилея эта скорость одинакова в обоих случаях, если измеряется в системе отсчета, связанной с вагоном. Относительно земли она, разумеется, зависит от скорости вагона.

2. Шарик будет двигаться в ту же сторону со скоростью  $2v$  (рассмотрите движение шарика в системе отсчета, связанной с плитой, и *относительно* земли).

3. Складывая попарно противоположно направленные силы, получим систему трех сил  $F_{AD}$ ,  $F_{EB}$  и  $F_{CF}$ , равных по модулю 6 Н и направленных под углом  $120^\circ$  друг к другу (рис. 5). Векторная

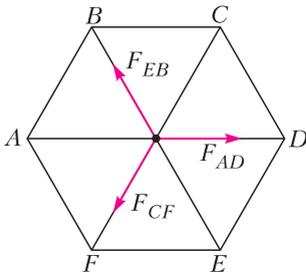


Рис. 5

сумма этих сил равна нулю (*принцип* суперпозиции для сил).

4. Согласно «золотому правилу» механики (простейшей формы *принципа* виртуальных перемещений) работа, совершенная системой блоков, равна работе приложенной силы:  $mg \cdot h = F \cdot H$ . Отсюда  $H = 12$  м.

5. Если бы цепочку заставили висеть углом, как стержни, и отпустили, то она вернулась бы к прежней свободно повисшей форме. Другими словами, она приняла бы форму с минимальной потенциальной энергией в поле земного тяготения, а значит, с наименьшим возможным положением центра тяжести (*принцип* минимума потенциальной энергии – *принцип* Торричелли).

6. По закону Архимеда конус погружен в воду на  $7/8$  своего объема. Отношение объема надводной части (меньшего конуса) ко всему объему равно  $1/8$ . Соответственно, отношение высот равно  $1/2$  (*принцип* подобия).

7. Если процесс круговой, то заимствованная теплота не может быть целиком превращена в работу, так как это противоречит второму *принципу* термодинамики. Однако, если, например, идеальный газ находится в контакте с тепловым резервуаром и расширяется изотермически, совершая работу против внешних сил, то при этом его внутренняя энергия остается неизменной. Поэтому вся теплота, полученная газом от теплового резервуара, должна превращаться в работу.

8. Нет, не противоречит. Постоянна только алгебраическая сумма зарядов, которая в данном случае все время равна нулю (*принцип* сохранения для заряда).

9. Поле внутри конденсатора, очевидно, является суммой полей двух пластин (*принцип* суперпозиции), напряженность каждого из которых равна  $1/2 E$ . Значит, сила, действующая на каждую из пластин, равна  $1/2 qE$ .

10. Приставим к полусфере другую такую же заряженную полусферу так, чтобы вместе они образовали целую сферу. Потенциал, создаваемый второй полусферой в рассматриваемой точке, из соображений симметрии также равен искомому (*принцип* симметрии). Но потенциал целой сферы в этой точке равен потенциалу центра сферы. Итак,  $2\phi = k \frac{2q}{R}$ , или  $\phi = k \frac{q}{R}$ .

11. В однородной и изотропной среде кратчайшее расстояние между двумя точками – прямая; путь распространения луча только один. В неоднородной же среде таких путей может быть несколько. Так, если на пути лучей между источником  $S$  и приемником  $P$  установить собирающую линзу, то все лучи, прошедшие сквозь нее, могут попасть на приемник, при этом время распространения этих лучей будет одно и то же.

12. Источник должен двигаться со скоростью 4 см/с в сторону от зеркала (*принципы* симметрии и относительности).

13. Нельзя, иначе нарушается *принцип* относительности Эйнштейна.

14. В этом процессе проявляется одна из разновидностей *принципа* сохранения – закон сохранения импульса.

**Микроопыт**

Естественно, речь идет о равнодействующей силе, испытываемой каждым коробком. Поскольку все они покоятся, эта сила равна нулю (*принцип* суперпозиции для сил).

**Региональный этап LVI Всероссийской олимпиады школьников по физике**

7 класс

1. За время  $t_0$  сосуд окажется под кранами  $n = vt_0/L$  раз. Под каждым краном сосуд будет находиться в течение времени  $\tau = d/v$ , где  $d$  – диаметр сосуда. Таким образом, за время  $t_0$  в сосуд нальется объем продукта  $V_1 = \mu\tau n = \frac{\mu dt_0}{L}$ , где  $\mu$  – объем продукта, выливающийся из крана в единицу времени (расход). Видно, что скорость заполнения сосуда не зависит от скорости  $v$  движения ленты. По условию задачи  $V_1 = \frac{V}{2}$ .

- 1)  $\frac{V}{4}$ .
- 2)  $\frac{3}{16} V_1$ .

2. На координатной сетке  $x, \tau$  отметим положение автомобилей в разные моменты времени (согласно табличным данным). Так как автомобили едут с постоянной скоростью, проведем через нанесенные точки три прямые  $a, b, c$  так, чтобы не осталось точек вне прямых (рис. 6).

1) По угловому коэффициенту этих прямых вычислим искомые скорости:  $v_a = 24$  км/ч,  $v_b = 72$  км/ч, .

2) Точки 1, 2 и 3 соответствуют моментам времени встреч или обгона автомобилями друг друга. Встреча автомобилей  $a$  и  $c$ :  $x = 33$  км при  $\tau = 12$  ч 46 мин 10 с; встреча автомобилей  $b$  и  $c$ :  $x = 32,6$  км при  $\tau = 12$  ч 46 мин 30 с; встреча автомобилей  $a$  и  $b$ :  $x = 33,4$  км при  $\tau = 12$  ч 47 мин 10 с.

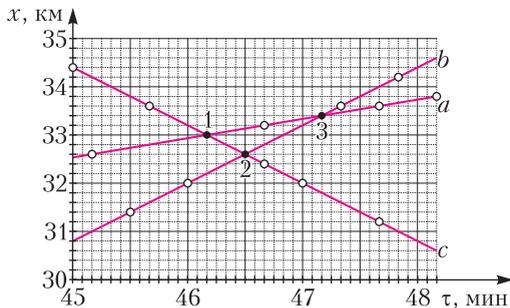


Рис. 6

$$3. m = \frac{V_0(\rho_1\rho_2 - \rho_0(2\rho_2 - \rho_1))}{2(\rho_2 - \rho_1)}$$

4. Средняя плотность равна:

$$\rho_{cp}(t) = \frac{\rho_1 V_1 + \mu t}{V_1 + \frac{\mu t}{\rho_2}} \text{ при } t \leq t_1, \text{ где } t_1 = \frac{\rho_2(V_0 - V_1)}{\mu};$$

$$\rho_{cp}(t) = \frac{\rho_1 \left( V_0 - \frac{\mu t}{\rho_2} \right) + \mu t}{V_0} \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2, \text{ где } t_2 = \frac{\rho_2 V_0}{\mu};$$

$$\rho_{cp}(t) = \rho_2 \text{ при } t \geq t_2.$$

Из графика в условии задачи для момента времени  $t = 0$  получим  $\rho_1 = 0,6$  г/см<sup>3</sup>; для момента времени  $t > 375$  с получим  $\rho_2 = 1,2$  г/см<sup>3</sup>. Из первых двух выражений для средней плотности находим  $\mu = 0,96$  г/с,  $V_0 = 300$  мл.

8 класс

1. Желтая лампочка загорается на дисплее в момент, когда одна из пластин, будем называть ее первой, начинает перекрывать путь сигналу. В момент, когда загорается красная лампочка, на пути сигнала возникает вторая пластина. Красный цвет меняется на желтый, когда одна из пластин перестает мешать прохождению сигнала. Причем это может быть как первая, так и вторая пластина.

В первом случае скорости пластин равны

$$v_1 = \frac{L}{t_1 + t_2} \text{ и } v_2 = \frac{L}{t_1 + t_3}.$$

Во втором случае скорости пластин будут

$$u_1 = \frac{L}{t_1 + t_2 + t_3} \text{ и } u_2 = \frac{L}{t_2}.$$

Пластины движутся друг другу навстречу. Значит, любая из пластин проходит мимо другой со скоростью  $v_1 + v_2$  или  $u_1 + u_2$ , преодолевая при этом расстояние  $2L$ .

В первом случае на это потребуется время

$$\tau_1 = \frac{2L}{\frac{L}{t_1 + t_2} + \frac{L}{t_2 + t_3}} = \frac{2(t_1 + t_2)(t_2 + t_3)}{t_1 + 2t_2 + t_3} = 4,8 \text{ с,}$$

а во втором –

$$\tau_2 = \frac{2L}{\frac{L}{t_1 + t_2 + t_3} + \frac{L}{t_2}} = \frac{2t_2(t_1 + t_2 + t_3)}{t_1 + 2t_2 + t_3} = 4,2 \text{ с.}$$

2. Введем обозначения:  $T_1, l_1$  и  $\Delta l_1$  – сила упругости, длина и деформация левой пружины,  $T_2, l_2$  и  $\Delta l_2$  – сила упругости, длина и деформация правой пружины,  $\Delta h$  – разница высот между поршнями. Запишем правило моментов для балки

относительно точек крепления правой и левой пружин:

$$T_1 \cdot 4l = Mg \cdot l, T_2 \cdot 4l = Mg \cdot 3l$$

и найдем силы упругости пружин:

$$T_1 = \frac{1}{4}Mg, T_2 = \frac{3}{4}Mg.$$

Таким образом, давление под правым поршнем будет выше, чем под левым (площади отличаются в 2 раза, а силы – в 3). Значит, левый поршень поднимется, а правый опустится. Из закона Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{Mg}{8k}, \Delta l_2 = \frac{3Mg}{4k}.$$

Из условия равенства давлений на дно сообщающихся сосудов:

$$\frac{Mg}{8S} = \rho g \Delta h,$$

$$\frac{3Mg}{4 \cdot 2S} = \frac{Mg}{4 \cdot S} + \rho g \Delta h.$$

Поскольку балка горизонтальна:

$$l_1 - \Delta l_1 + \Delta h = l_2 - \Delta l_2.$$

С учетом разницы длин пружин:

$$\Delta h = l - \Delta l_2 + \Delta l_1 = l - \frac{3Mg}{4k} + \frac{Mg}{8k}.$$

Окончательно получим

$$\frac{Mg}{8S} = \rho g \left( l - \frac{5Mg}{8k} \right),$$

откуда

$$M = \frac{8\rho S l k}{(5\rho g S + k)}.$$

**3.** Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур между улицей и кухней. Пусть  $P$  – базовая мощность теплого пола, а  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности тепловых потерь. Тогда условия теплового равновесия для каждого из случаев выглядят так:

$$\alpha(t_1 - t_0) = P, \alpha(t_2 - t_0) = 4P, \alpha(t_3 - t_0) = 9P.$$

Отсюда найдем

$$t_0 = \frac{4t_1 - t_2}{3} = 17^\circ\text{C}, t_3 = 9t_1 - 8t_0 = 26^\circ\text{C}.$$

**4.** Прямая, разделяющая на диаграмме в условии две области, соответствует состоянию, в котором сосуд заполнен только водой при  $0^\circ\text{C}$ , т.е. весь лед тает, но не нагревается. Тогда можно записать уравнение теплового баланса для поступивших за время  $\tau$  порций воды и льда:

$$\mu_1 \tau \lambda = \mu_2 \tau c_v (t_2 - t_0),$$

где  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  – температура плавления льда.

По угловому коэффициенту наклона прямой  $\mu_1 = \mu_2 c_v t_2 / \lambda$  можно найти температуру воды:

$$c_v t_2 / \lambda = 0,25, \text{ откуда } t_2 = 20^\circ\text{C}.$$

Если по первой трубе будет поступать холодный лед, то содержимое сосуда может находиться в трех различных равновесных состояниях: 1) только лед; 2) смесь воды и льда; 3) только вода. Найдем границу состояний 1 и 2. Вся поступающая вода замерзает, но остается при  $0^\circ\text{C}$ , до этой же температуры нагревается поступающий лед. Запишем уравнение теплового баланса:

$$\mu_1 \tau c_{л.} (t_0 - t_3) = \mu_2 \tau c_v (t_2 - t_0) + \mu_2 \tau \lambda,$$

из которого найдем коэффициент наклона прямой, разделяющей эти состояния:

$$\mu_1 / \mu_2 = (c_v (t_2 - t_0) + \lambda) / (c_{л.} (t_0 - t_3)) = 5,0.$$

Граница 2 и 3 состояний находится аналогично, только теперь весь поступающий лед тает и оста-

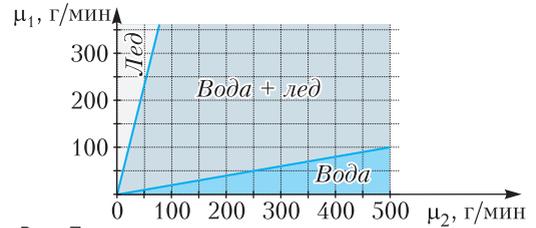


Рис. 7

ется при  $0^\circ\text{C}$ . Такому процессу соответствует уравнение теплового баланса

$$\mu_1 \tau c_{л.} (t_0 - t_3) + \mu_1 \tau \lambda = \mu_2 \tau c_v (t_2 - t_0),$$

из которого находим

$$\mu_1 / \mu_2 = c_v (t_2 - t_0) / (c_{л.} (t_0 - t_3) + \lambda) = 0,20$$

и строим новую диаграмму состояний (рис. 7).

### 9 класс

**1.** Перейдем в систему отсчета, движущуюся вниз с ускорением  $g$ , скорость которой равна нулю в момент взрыва фейерверка. В этой системе осколки движутся по прямолинейным траекториям, направления которых совпадают с направлениями векторов начальных скоростей

(углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  на рисунке 8). Точки вспышек в этой системе отсчета – точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  – лежат на окружности радиусом  $R = v_0 \tau$ , где  $v_0$  – начальная скорость осколков. Из геометрии находим

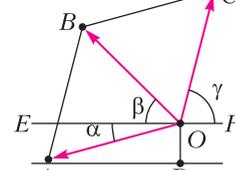


Рис. 8

$$v_0 = \frac{l}{\tau} = 10 \text{ м/с}; \quad \alpha = 15^\circ, \quad \beta = 45^\circ, \quad \gamma = 75^\circ;$$

$$h = l \sin \alpha + \frac{g\tau^2}{2} \approx 7,6 \text{ м.}$$

2. Верхняя пружина сожмется на  $\Delta x_1 = \frac{F}{4k}$ . Ко-

эффициент жесткости системы равен  $k_0 = \frac{8}{5}k$ .

3. Так как переливается одна и та же масса воды, в итоге во всех сосудах оказывается такое же ее количество, как и до начала процесса. Поэтому целесообразно применить уравнение теплового баланса не к каждому отдельному процессу переливания, а сразу к конечному состоянию системы. Поскольку потерь тепла не было, уравнение теплового баланса имеет вид

$$cm(t_1 - t) + c \cdot 2m(t_2 - 3t) + c \cdot 4m(t_3 - 2t) = 0,$$

откуда получим

$$t_3 = \frac{15t - t_1 - 2t_2}{4} = 41^\circ\text{C}.$$

4. Сопротивление всей проволоки  $R_0$  не зависит от того, в какой именно точке мы ее разрежем (все элементарные участки проволоки соединены друг с другом последовательно). Для упрощения разрежем кольцо в точке  $A$ , чтобы сначала найти сопротивления  $R_0/2$  его двух симметричных половинок, а затем их сложить. Поскольку удельное сопротивление проволоки изменяется по линейному закону от угла  $\varphi$  или от расстояния  $l$  от точки  $A$ , для вычисления ее сопротивления воспользуемся средним значением удельного сопротивления  $\rho_{\text{ср}} = \alpha\pi/2$ . Тогда

$$\frac{R_0}{2} = \frac{\rho_{\text{ср}}\pi r}{S} = \frac{\alpha\pi^2 r}{2S}, \quad \text{или} \quad R_0 = \frac{\alpha\pi^2 r}{S}.$$

Подключим контакты к некоторым точкам  $M$  и  $N$  кольца. Получившаяся цепь теперь состоит из двух участков  $MAN$  и  $MBN$ , соединенных параллельно, и ее сопротивление  $R_{MN}$  определяется соотношением

$$R_{MN} = \frac{R_{MAN}R_{MBN}}{R_{MAN} + R_{MBN}} = \frac{R_{MAN}(R_0 - R_{MAN})}{R_0}.$$

Это сопротивление как функция величины  $R_{MAN}$  представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и достигает максимума при  $R_{MAN} = R_0/2$ . Следовательно,

$$R_{\text{max}} = \frac{R_0}{4} = \frac{\alpha\pi^2 r}{4S}.$$

Точки  $M$  и  $N$  должны располагаться симметрично относительно точки  $B$ , расстояние между этими точками равно

$$L = 2r \sin\left(\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \approx 1,6r.$$

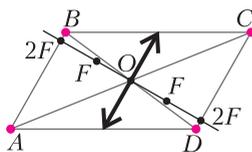


Рис. 9

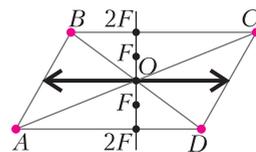


Рис. 10

5. Обозначим точки буквами  $A, B, C, D$ , а также нанесем контуры параллелограмма и его диагоналей (рис. 9 и 10). Прямые, проходящие через пары источник – изображение, должны пересечься в оптическом центре линзы. Поэтому пары определяются однозначно – это  $A-C$  и  $B-D$ . Отсюда следует, что оптический центр линзы находится в точке  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма, а источники с изображениями расположены по разные стороны от него, следовательно, изображения действительные. Это означает, что линза собирающая. Более того, можно утверждать, что источники и их изображения находятся в плоскостях, удаленных на двойное фокусное расстояние от плоскости линзы. Однако по данным условия нельзя однозначно определить положение линзы. Возможны 2 варианта, так как плоскости двойного фокуса могут проходить через  $AB$  и  $CD$ , а могут через  $BC$  и  $AD$ . Соответствующие построения приведены на рисунках 9 и 10.

10 класс

1. Перенумеруем цилиндры, присвоив номер 1 самому дальнему от поверхности плитки цилиндру. Пусть  $t_n$  – превышение температуры цилиндра с номером  $n$  над температурой воздуха. Тогда поток тепла  $q$  от первого цилиндра в окружающую среду определяется выражением

$$q = kt_1S,$$

где  $S$  – площадь поверхности первого цилиндра, находящейся в контакте с воздухом,  $k$  – коэффициент пропорциональности. Площадь поверхности, контактирующей с воздухом, для остальных цилиндров вдвое меньше, и для этих цилиндров

$$q_n = kt_n \frac{S}{2} = q \frac{t_n}{2t_1}.$$

Для потока тепла через картонную прокладку от второго цилиндра к первому справедливо выражение

$$q_{2,1} = \alpha(t_2 - t_1) = q.$$

Аналогично, для потока тепла через картон от цилиндра с номером  $n+1$  к цилиндру с номером  $n$  получим

$$q_{n+1,n} = \alpha(t_{n+1} - t_n) = q \frac{t_{n+1} - t_n}{t_2 - t_1}.$$

Для цилиндра с номером  $n$  условие равенства потоков приходящего и уходящего тепла (уравнение теплового баланса) выглядят так:

$$\text{или} \quad \frac{q(t_{n+1} - t_n)}{t_2 - t_1} = \frac{q(t_n - t_{n-1})}{t_2 - t_1} + \frac{q t_2}{2 t_1},$$

$$\text{откуда} \quad \frac{t_{n+1} - 2t_n + t_{n-1}}{t_2 - t_1} = \frac{t_n}{2t_1},$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{2} \left( 3 + \frac{t_2}{t_1} \right) - t_{n-1}.$$

Используя эту рекуррентную формулу и зная значения  $t_1 = 3^\circ\text{C}$  и  $t_2 = 9^\circ\text{C}$ , получаем

$$t_3 = 24^\circ\text{C}, t_4 = 63^\circ\text{C}, t_5 = 165^\circ\text{C}, t_6 = 432^\circ\text{C}.$$

С учетом того, что  $t_n$  – разница температур цилиндра и воздуха, окончательный ответ для значений температуры такой:  $T_3 = 44^\circ\text{C}$ ,  $T_4 = 83^\circ\text{C}$ ,  $T_5 = 185^\circ\text{C}$ ,  $T_6 = T_{\text{пл}} = 452^\circ\text{C}$ .

**2. 1)** Поршень отрывается, когда сила давления газа под поршнем становится равной сумме сил давления газа над поршнем и силы тяжести поршня:  $p_1 S_1 = p_2 S_2 + mg$ . Давление газа можно выразить из уравнения Менделеева–Клапейрона  $pV = \nu RT$ . Тогда

$$mg = p_1 S_1 - p_2 S_2 = 2\nu RT_0 \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{4 \nu RT_0}{3 h},$$

откуда

$$m = \frac{4 \nu RT_0}{3 gh}.$$

**2)** Как только поршень оторвется от упоров, газ под поршнем начнет давить сразу на всю его площадь и сила давления скачком увеличится. Так как между поршнем и стенками есть малая сила трения, то через некоторое время поршень остановится в положении равновесия. Запишем условие равновесия:

$$\begin{aligned} p'_1 S_2 - p'_2 S_2 &= mg, \\ \frac{\nu R \cdot 2T_0 \cdot 3S}{S_1 h_1 + 3S_1 (h' - h_1)} - \frac{\nu R \cdot 2T_0 \cdot 3S}{3S_1 (4h_1 - h')} &= \frac{4 \nu RT_0}{3 h}, \\ \frac{3}{3h' - 2h_1} - \frac{1}{4h_1 - h'} &= \frac{2}{3h}, \\ \frac{14h - 6h'}{-3(h')^2 + 14hh' - 8h^2} &= \frac{2}{3h}. \end{aligned}$$

Решая квадратное уравнение, получим

$$h' = \frac{23 \pm \sqrt{181}}{6} h.$$

Корень со знаком плюс не подходит, так как он больше  $4h$ . Окончательно

$$h' = \frac{23 - \sqrt{181}}{6} h \approx 1,6h.$$

**3)** Пусть газ охладился до температуры  $T$ . Запишем условие равновесия с учетом того, что  $h = h_1$  и непосредственно перед соприкосновением с опорами газ давит на всю площадь поршня как сверху, так и снизу:

$$\frac{\nu RT \cdot 3S_1}{S_1 h_1} - \frac{\nu RT \cdot 3S_1}{3S_1 \cdot 3h_1} = \frac{4 \nu RT_0}{3 h_1}, T = \frac{T_0}{2}.$$

**3.** Пусть  $M$  – масса космического корабля,  $v$  – начальная скорость корабля,  $a$  – ускорение корабля (направлено вверх). Поскольку  $\mu$  и  $u$  постоянны, то и реактивная сила тяги  $F = \mu u$  тоже постоянна, следовательно, корабль движется равноускорено. Пусть его конечная скорость равна  $v_k$ . Введем ось  $y$ , направленную вертикально вверх, тогда ускорение корабля  $a_y = \frac{v^2 - v_k^2}{2h}$ , время от начала торможения до полной остановки  $t = \frac{v - v_k}{a_y} = \frac{2h}{v + v_k}$ . Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $y$ :

$$M a_y = \mu u - Mg, \text{ откуда } \mu = \frac{M(a_y + g)}{u}.$$

Общий расход топлива за время торможения равен

$$\begin{aligned} m_T = \mu t &= \frac{M}{u} \left( \frac{v^2 - v_k^2}{2h} + g \right) \frac{2h}{v + v_k} = \\ &= \frac{M}{u} \left( (v + v_k) - 2v_k + \frac{2gh}{v + v_k} \right). \end{aligned}$$

Из неравенства Коши известно, что если произведение двух величин равно константе, то их сумма достигает минимума при равенстве величин. В нашем случае минимальная масса топлива достигается при  $v + v_k = \frac{2gh}{v + v_k}$ , тогда  $v = \sqrt{2gh} - v_k$  и масса потраченного топлива равна  $m_T = \frac{M}{u} \cdot 2(\sqrt{2gh} - v_k)$ . Значит,  $m_T$  будет минимальной при максимальной конечной скорости  $v_k = v_n$ , следовательно,  $v = \sqrt{2gh} - v_n$ . Но полученный нами ответ справедлив при  $v_n \leq \sqrt{2gh}$ ; в противном случае будет отрицательный расход топлива и отрицательная начальная скорость, что противоречит физическому смыслу. Окончательный ответ:

если  $v_n < \sqrt{2gh}$ , то  $v = \sqrt{2gh} - v_n$ , при этом двигатели работают и расход не нулевой;

если  $v_n \geq \sqrt{2gh}$ , то  $v \leq \sqrt{v_n^2 - 2gh}$ , при этом двигатели не работают и расход топлива равен нулю.

**4.** Рассмотрим первый случай. Пусть правое

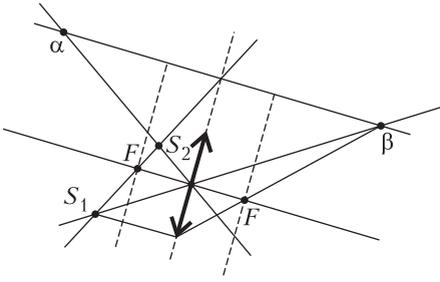


Рис 11

изображение  $\beta$  – это изображение источника  $S_1$ , а левое  $\alpha$  – источника  $S_2$ . Проведем лучи  $S_1\beta$  и  $S_2\alpha$  (рис. 11) Эти лучи идут без преломления, а значит, точка их пересечения является оптическим центром линзы. Рассмотрим луч  $S_1S_2$ . После преломления в линзе он (или его продолжение) должен пройти и через изображения  $\alpha$  и  $\beta$ . Значит, плоскость линзы проходит через точку пересечения прямых  $S_1S_2$  и  $\alpha\beta$ . Построим линзу и перпендикулярно ей главную оптическую ось. Из чертежа видно, что оба источника оказались с одной стороны от линзы, а изображения – с разных сторон. Такое возможно только в случае собирающей линзы, причем одно изображение будет действительным, а второе – мнимым. Для определения положения фокусов линзы проведем из  $S_1$  луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в линзе он пойдет в  $\beta$ , пройдя через фокус. Аналогичным образом найдем второй фокус.

5. Общая мощность, выделяющаяся на резисторах, равна мощности всех источников в цепи. В первой цепи  $P_0 = U_0 I = U_0^2 / (r + R)$ . Рассмотрим вторую цепь. Пусть  $I_0$  – сила тока через нижний источник,  $I_1$  – через правый резистор  $R$ ,  $I_2$  – через верхний источник. Тогда силы тока через резисторы  $R_1$ ,  $R_2$  и левый резистор  $R$  равны соответственно  $I_1 - I_2$ ,  $I_0 - I_1$  и  $I_0 + I_2 - I_1$ . Мощность, выделяющаяся во второй цепи, равна суммарной мощности, вырабатываемой источниками:

$$P = U_0 I_0 + U_0 I_2.$$

С другой стороны, обойдя схему по двум источникам, можем записать

$$2U_0 = I_0 r + I_1 R + I_2 r + (I_0 + I_2 - I_1) R = (I_0 + I_2)(R + r).$$

Отсюда, следует, что

$$I_0 + I_2 = \frac{2U_0}{R + r}, P = U_0 (I_0 + I_2) = \frac{2U_0^2}{R + r} = 2P_0 = 14 \text{ Вт}.$$

11 класс

1. 1) В состоянии равновесия энергия системы должна быть минимальна. В данном случае энер-

гия системы – это энергия натянутой пленки, которая пропорциональна площади пленки; с учетом того, что пленка двусторонняя,  $E_{пл} = 2\sigma S_{пл}$ . Ясно, что минимум этой энергии отвечает положению стержней, в котором максимальна площадь треугольника  $OAB$ . Ее удобно вычислять по двум сторонам ( $OA$  и  $AB$ ) и углу  $\varphi$  между ними:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} L \cdot 2L \sin \varphi = L^2 \sin \varphi.$$

Эта площадь максимальна при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , т.е. когда стержни перпендикулярны друг другу, или  $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$ . Итак,

$$\alpha = \arctg \frac{1}{2} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 26,6^\circ.$$

2) Потенциальная энергия определена с точностью до константы, поэтому мы можем считать энергию системы в положении равновесия равной нулю. Тогда энергия системы в положении, в котором колечко сдвинулось вдоль стержня в точку с координатой  $x$ , отсчитываемой от положения равновесия, равна

$$E(x) = 2\sigma(L^2 - S_{OAB}(x)) = 2\sigma L^2(1 - \sin \varphi(x)).$$

В этом положении  $OB = L\sqrt{5} + x$ , и, в соответствии с теоремой косинусов,  $\cos \varphi(x) \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L} x$ .

Тогда  $\sin \varphi(x) \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1 - \frac{5x^2}{8L^2}$ . Значит,

$$E(x) \approx \frac{5\sigma x^2}{4} = \frac{kx^2}{2} \quad (\text{здесь введено обозначение}$$

$k = \frac{5\sigma}{2}$ ). Мы получили в точности такое же выражение, как для груза на пружине, поэтому малые колебания колечка будут происходить по гармоническому закону с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}.$$

2. При включении теплообменника температура вблизи него падает, остывший воздух сжимается, становится тяжелее и опускается вниз, а на его место приходит более теплый атмосферный воздух. При вхождении воздуха совершается положительная работа силой атмосферного давления. Из уравнения состояния идеального газа находим, что число молей воздуха в сосуде увеличится от начального  $v_0 = \frac{pV}{RT_0}$  до  $v = \frac{pV}{RT}$ .

Если  $\Delta V$  – объем атмосферного воздуха, вошедшего в сосуд, то начальный объем  $v$  молей воздуха при заданных внешних условиях равен  $V + \Delta V = vRT_0/p = VT_0/T$ , а  $\Delta V = V(T_0/T - 1)$ . Тогда рабо-

та при вхождении воздуха в сосуд равна

$$A = p\Delta V = pV(T_0/T - 1).$$

По первому началу термодинамики работа идет на изменение внутренней энергии и передачу теплоты (в данном случае теплообменнику):

$$A = \Delta U + Q.$$

Отсюда

$$Q = A - \Delta U = pV(T_0/T - 1) - (5/2)vR(T - T_0) = \\ = (7/2)pV(T_0/T - 1).$$

**3. 1)** Напряженность электрического поля в зазоре между центрами пластин соответствует напряженности между двумя бесконечными плоскостями:  $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Тогда разность потенциалов между центрами пластин равна

$$\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

2) Рассмотрим поле  $\vec{E}_2$  в зазоре на границе пластин. Так как зазор мал, пластины можно считать полуплоскостями. Для нахождения  $E_2$  мысленно добавим еще две полуплоскости. Они будут создавать напряженность поля, имеющую такую же нормальную компоненту, а суммарная напряженность поля от всех четырех полуплоскостей будет равна  $E_1$ . Таким образом, получаем, что нормальная компонента напряженности электрического поля двух полуплоскостей равна  $E_{2n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Приведенное рассуждение применимо для любой точки отрезка  $AB$ , отсюда разность потенциалов между краями пластин равна

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}.$$

3) Из потенциальности электрического поля следует  $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_A + \varphi_{O_2} - \varphi_B + \varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}$ . Из соображений симметрии  $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_{O_2}$ . Комбинируя эти выражения, получаем

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{1}{2}((\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}) - (\varphi_A - \varphi_B)) = \frac{\sigma d}{4\epsilon_0}.$$

**4.** Вызываемые осевой проекцией магнитного поля силы направлены вдоль стержня, равны по величине и противоположно направлены и не сказываются на движении гантели.

В начальный момент силы, связанные с радиальной проекцией магнитного поля, оказываются тангенциальными, т.е. перпендикулярными оси и радиальному направлению. Это приводит к росту угловой скорости вращения вокруг оси симметрии, но при этом нет сил, смещающих центр гантели поперек оси или вызывающих поворот плоскости вращения. В самом деле, при

скорости  $v$  шариков вдоль оси и окружной скорости  $u$  возникающие из-за радиальной проекции магнитного поля  $B_r$  силы перпендикулярны скорости шариков и имеют осевую составляющую  $F_x = -quB_r$  и тангенциальную (окружную)  $F_\tau = qvB_r$ . Соответственно

$$m \frac{dv}{dt} = -quB_r, \quad m \frac{du}{dt} = qvB_r.$$

Пока  $v$  не уменьшится до нуля, окружная и угловая скорости растут. Поскольку работа магнитной силы равна нулю, кинетическая энергия остается неизменной, и максимальная окружная скорость

$$u_{\max} = v_0.$$

При смещении центра гантели на  $x$  от начальной точки

$$m \frac{du}{dt} = qvB_r = qB_r \frac{dx}{dt},$$

откуда  $mu = qB_r x$ . Для максимального смещения  $L_{\max}$  имеем

$$mu_{\max} = qB_r L_{\max}, \quad \text{и } L_{\max} = \frac{mv_0}{qB_r}.$$

Получаем уравнение гармонических колебаний

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_r}{m}\right)^2 x$$

с круговой частотой  $\omega = \frac{qB_r}{m}$  и периодом  $T = \frac{2\pi m}{qB_r}$ .

Первый раз от момента начала движения максимальная скорость вращения будет достигнута через четверть периода. Затем максимальное значение скорости вращения будет достигаться через каждые полпериода. Таким образом, для моментов времени, в которые достигается максимальная скорость вращения, справедлива формула

$$t_n = \frac{\pi m}{2qB_r}(2n - 1),$$

где  $n$  – натуральное число.

**5.** Поскольку плоскость линзы находится между источником и его изображением, то изображение является действительным, причем фокальные плоскости линзы также находятся между ними – в противном случае изображение оказалось бы «разорванным» на действительную и мнимую части.

Точечный источник и его изображение в линзе лежат на прямой, проходящей через оптический центр. Если прямая, проходящая через оптический центр, касается круга, то на этой прямой находится изображение лишь одной его точки. Это означает, что данная прямая касается и изображения круга. Из этого следует, что опти-

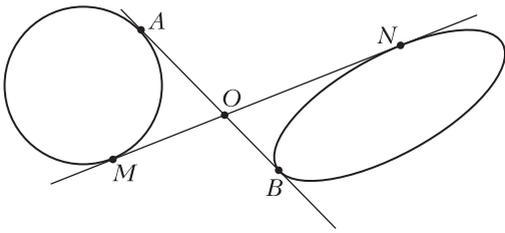


Рис. 12

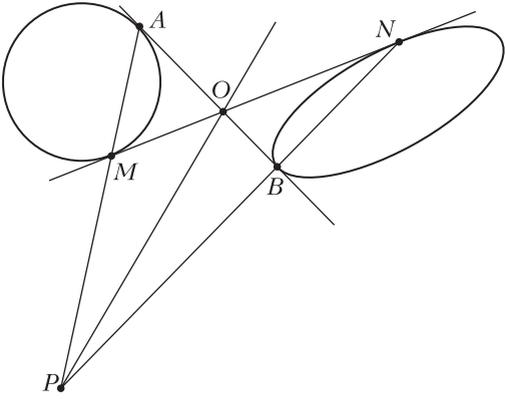


Рис. 13

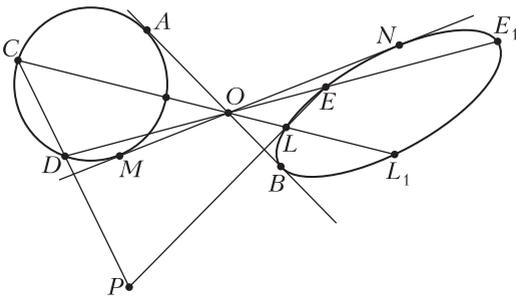


Рис. 14

ческий центр линзы  $O$  находится в точке пересечения общих внутренних касательных  $AB$  и  $MN$  к кругу и его изображению (рис. 12). Рассмотрим луч, проходящий через точки  $A$  и  $M$ . После преломления в линзе он проходит через точки пересечения касательных к изображению круга  $B$  и  $N$ . Поэтому в точке пересечения линий, проходящих через точки круга и его изображения, находится точка  $P$ , принадлежащая плоскости линзы (рис. 13). Проведя прямую  $OP$ , найдем положение плоскости линзы. Отметим, что для построения плоскости линзы можно провести через  $O$  любые две прямые, пересекающие круг и его изображение (например,  $CL$  и  $DE$ ), выбрать на этих прямых точки, принадлежащие кругу, используя найденный центр линзы, определить изображения этих точек ( $L$  и  $E$ ), а затем провести через эти пары

точек прямые до пересечения, чтобы определить положение точки в плоскости линзы (рис. 14). Однако при таком подходе важно не перепутать изображения этих точек с другими точками пересечения прямых  $CO, DO$  с линией изображения («ложные точки»  $E_1$  и  $L_1$ ). Для правильного выбора достаточно заметить, что для действительных изображений в собирающей линзе увеличение расстояния от предмета до линзы приводит к уменьшению расстояния от линзы до изображения. Поэтому изображения «дальних» от  $O$  точек пересечения круга с прямыми ( $C$  и  $D$ ) отвечают «ближние» к  $O$  точки пересечения этих прямых с эллипсом-изображением.

Заканчивая наше построение, определим главную оптическую ось линзы  $O_1O_2$  как прямую, проходящую через точку  $O$  перпендикулярно  $OP$  (рис. 15). Наконец, для определения положения

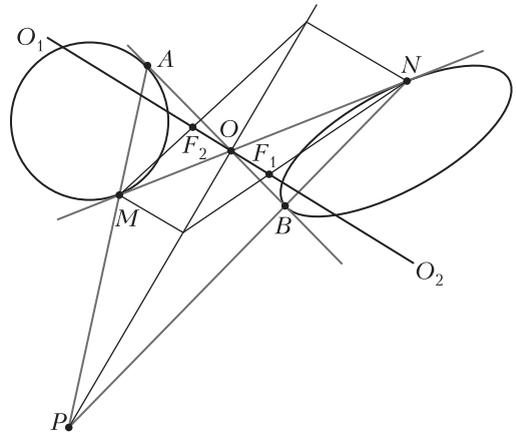


Рис. 15

ния фокусов линзы рассмотрим лучи, идущие параллельно главной оптической оси через точку  $M$  и ее изображение  $N$ . По другую сторону от линзы эти лучи проходят через точки  $N$  и  $M$  соответственно, пересекая оптическую ось в точках фокусов  $F_1$  и  $F_2$ . Как видно, фокальные плоскости действительно оказались между кругом и его изображением.

**18-я Международная естественно-научная олимпиада юниоров (IJSO-2021)**

(см. «Квант» № 1)

**Тест**

- |        |         |
|--------|---------|
| 1. a). | 6. b).  |
| 2. b). | 7. b).  |
| 3. b). | 8. d).  |
| 4. d). | 9. b).  |
| 5. b). | 10. b). |

## Теоретические задачи

## Задача 1

Максимальная кинетическая энергия возможна только тогда, когда вся энергия, выделяющаяся при сгорании, используется для придания кинетической энергии пуле.

A1.  $M = 227 \text{ г/моль}$ .

A2.  $v = 0,05 \text{ моль}$ .

A3.  $W = 16650 \text{ Дж}$ .

A4.  $v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = 5,77 \cdot 10^2 \text{ м/с}$ .

B1.  $p_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{V_2 T_1}$ .

B2.  $p_2 = \frac{p_1}{15} = 6,67 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

B3.  $F = p_2 \frac{\pi D^2}{4} = 1,18 \cdot 10^5 \text{ Н}$ .

## Задача 2

A1. Силы, действующие на багги, это  $F_{\text{тр кач}}$  – сила трения качения, препятствующая движению багги;  $F_{\text{тр п}}$  – сила трения покоя, обеспечивающая движение багги вперед и равная силе тяги двигателя,  $mg$  – сила тяжести.

A2. Вдоль склона горы в направлении, противоположном движению багги, действуют проекция силы тяжести  $mg \sin 30^\circ$  и сила трения качения  $fmg \cos 30^\circ$ . Сумма этих сил равна  $F_{\text{сум}} = mg \sin 30^\circ + fmg \cos 30^\circ = 1240 \text{ Н}$ .

A3. Двигатель багги развивает минимальную мощность  $P = F_{\text{сум}} v = 24,8 \text{ кВт}$ .

A4. После того, как двигатель багги заглох, ускорение автомобиля равно по модулю  $a = F_{\text{сум}}/m = 6,2 \text{ м/с}^2$ .

A5. По инерции до полной остановки багги пройдет расстояние  $s = v^2/(2a) = 32 \text{ м}$ .

B2. Расстояние от центра масс пустой лодки находится на расстоянии  $L_1 = 1 \text{ м}$  от точки приложения выталкивающей силы, а центр масс пассажиров – на расстоянии  $L_2 = 1 \text{ м}$  от той же точки. Предполагается, что лодка остается устойчивой (не переворачивается), если  $m_{\text{л}} L_1 > n m_{\text{ч}} L_2$ . Отсюда находим  $n_{\text{max}} = 16$ .

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<b>УСЛУГИ</b>	<b>АССОРТИМЕНТ</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Интернет-магазин <a href="http://www.bgshop.ru">www.bgshop.ru</a></li> <li>■ Кафе</li> <li>■ Клубные (дисконтные) карты и акции</li> <li>■ Подарочные карты</li> <li>■ Предварительные заказы на книги</li> <li>■ Встречи с авторами</li> <li>■ Читательские клубы по интересам</li> <li>■ Индивидуальное обслуживание</li> <li>■ Подарочная упаковка</li> <li>■ Доставка книг из-за рубежа</li> <li>■ Выставки-продажи</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Книги</li> <li>■ Аудиокниги</li> <li>■ Антиквариат и предметы коллекционирования</li> <li>■ Фильмы, музыка, игры, софт</li> <li>■ Канцелярские и офисные товары</li> <li>■ Цветы</li> <li>■ Сувениры</li> </ul>

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

## КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ  
РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)**

## Отпечатано

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 218-40-40**

## Система АВЕРБАХА

Восьмого февраля 2022 года исполнилось 100 лет Юрию Львовичу Авербаху – легендарному человеку и первому гроссмейстеру, покорившему столь почтенную планку.

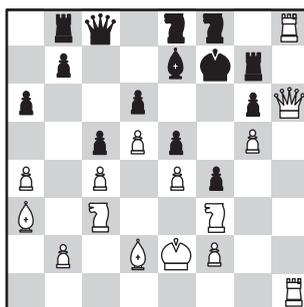
Юрий Львович известен не только как сильный шахматист, но и как журналист, тренер, историк, писатель и большой знаток эндшпиля.

Именем Авербаха названа популярная система в староиндийской защите, по сей день остающаяся популярной среди ведущих гроссмейстеров.

Мы желаем Юрию Львовичу крепкого здоровья и новых эндшпильных находок!

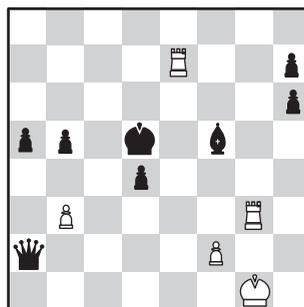
**Ю. Авербах – О. Панно**  
Буэнос-Айрес, 1954

1. d4  $\mathbb{A}f6$  2. c4 g6 3.  $\mathbb{A}c3$   $\mathbb{A}g7$   
4. e4 d6 5.  $\mathbb{A}e2$  0-0 6.  $\mathbb{A}g5$ .  
Данная партия – одна из первых, в которой Авербах применил свою систему. Белые стремятся получить пространственный перевес, ставя попутно ловушку, в которую нередко попадают любители: 6...e5? 7. de 8.  $\mathbb{A}d8$   $\mathbb{A}d8$  9.  $\mathbb{A}d5!$  с выигрышем материала. 6...c5 7. d5 a6 8. a4  $\mathbb{A}a5$  9.  $\mathbb{A}d2$  e5? Серьезная ошибка – запирая центр, черные дают возможность белым атаковать на королевском фланге. Современная теория рекомендует 9...e6 с дальнейшим de. 10. g4!  $\mathbb{A}e8$  11. h4 f5 12. h5 f4 13. g5  $\mathbb{A}f7$  14.  $\mathbb{A}g4$   $\mathbb{A}d8$  15.  $\mathbb{A}c8$   $\mathbb{A}c8$  16.  $\mathbb{A}f3$   $\mathbb{A}f8$  17.  $\mathbb{A}e2!$  В закрытой позиции рокировать необязательно, белые готовят вскрытие линии h для тяжелых фигур. 17... $\mathbb{A}g7$  18.  $\mathbb{A}h4$   $\mathbb{A}d7$  19. hg hg 20.  $\mathbb{A}h1$   $\mathbb{A}e7$  21.  $\mathbb{A}h8+$   $\mathbb{A}f7$  22.  $\mathbb{A}h6$   $\mathbb{A}f8$  23.  $\mathbb{A}h1$   $\mathbb{A}b8$ . В подобных позициях исход борьбы обычно решает жертва, вскрывающая позицию, и белые ее находят.

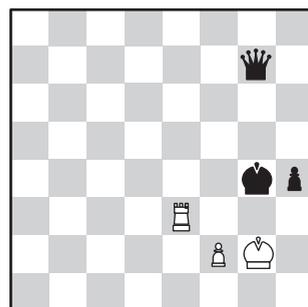


24.  $\mathbb{A}f4!$   $\mathbb{A}c7$  (24...ef 25.  $\mathbb{A}h4!$ )  
25.  $\mathbb{A}h2!$   $\mathbb{A}d7$  26.  $\mathbb{A}h3$   $\mathbb{A}f8$   
27.  $\mathbb{A}f8+!$  Ликвидируя защитника, чтобы проникнуть в лагерь черных ферзем. 27... $\mathbb{A}f8$  28.  $\mathbb{A}c6$   $\mathbb{A}g8$  29.  $\mathbb{A}h4$   $\mathbb{A}d8$  30.  $\mathbb{A}g6+$   $\mathbb{A}g7$  (коня брать нельзя: 30... $\mathbb{A}g6$ )  
31.  $\mathbb{A}h8+$   $\mathbb{A}g7$  32.  $\mathbb{A}g8$ , мат)  
31.  $\mathbb{A}e5$ , и черные сдались.

**Ю. Авербах – И. Бондаревский**  
Москва, 1948



К такой позиции пришла партия, сыгранная Юрием Львовичем в одном из первых послевоенных чемпионатов СССР. Кажется, что шансов на спасение нет, так как белые будут вынуждены отдать одну из ладей за пешку, и в лучшем случае могут рассчитывать на эндшпиль с ладьей и пешкой против ферзя и проходной, который в то время считался безнадежным для слабой стороны. Однако Авербах знал про исключение из этого правила, которое нашел Н. Григорьев и использовал в своем этюде Г. Каспарян:



Дальнейшая борьба показала, что черные не знали об этом исключении: 41... $\mathbb{A}b1+$  42.  $\mathbb{A}g2$   $\mathbb{A}f5$  43.  $\mathbb{A}eg7$   $\mathbb{A}c5$  44.  $\mathbb{A}f3$   $\mathbb{A}e4$  45.  $\mathbb{A}gf7$   $\mathbb{A}b4$  46.  $\mathbb{A}7f4$   $\mathbb{A}e5$  47.  $\mathbb{A}f5$   $\mathbb{A}g7+$  48.  $\mathbb{A}g3$   $\mathbb{A}d7$  49.  $\mathbb{A}ff3$  h5 50.  $\mathbb{A}d3$   $\mathbb{A}d5+$  51.  $\mathbb{A}gf3$   $\mathbb{A}e4$  52.  $\mathbb{A}f1$  h4 53.  $\mathbb{A}h3$  a4 54. ba ba?! Точнее 54... $\mathbb{A}a4$ , сохраняя пешку b. 55.  $\mathbb{A}hf3$   $\mathbb{A}c4$  56.  $\mathbb{A}a3$   $\mathbb{A}c2$  57.  $\mathbb{A}g2$  d3 58.  $\mathbb{A}fd3$   $\mathbb{A}d3$  59.  $\mathbb{A}a4+$   $\mathbb{A}d5?$  В позиции Григорьева – Каспаряна ничья достигается только в том случае, если король отрезан на своей половине доски, поэтому к выигрышу вело 59... $\mathbb{A}b3$ , постепенно подходя к пешке сбoku. 60.  $\mathbb{A}h4$   $\mathbb{A}e6?$  Черные еще могли победить, помешав переводу ладьи при помощи тонкого маневра ферзя: 60...  $\mathbb{A}g6+$  61.  $\mathbb{A}h2$   $\mathbb{A}f5$  62.  $\mathbb{A}g3$   $\mathbb{A}e5+$  63.  $\mathbb{A}f3$   $\mathbb{A}g5$  64.  $\mathbb{A}h3$   $\mathbb{A}d4$  65.  $\mathbb{A}g3$   $\mathbb{A}d5+$  66.  $\mathbb{A}e2$   $\mathbb{A}h1$ . 61.  $\mathbb{A}h3!$  На доске искомая позиция. 61... $\mathbb{A}e4+$  62.  $\mathbb{A}h2$   $\mathbb{A}f6$  63.  $\mathbb{A}e3$   $\mathbb{A}d5$  64.  $\mathbb{A}g3$  h5 65.  $\mathbb{A}e3$   $\mathbb{A}g5$  66.  $\mathbb{A}g3+$   $\mathbb{A}f4$  67.  $\mathbb{A}e3$  h4 68.  $\mathbb{A}h3$   $\mathbb{A}b7$  69.  $\mathbb{A}e3$   $\mathbb{A}g4$  70.  $\mathbb{A}h3$   $\mathbb{A}b1$  71.  $\mathbb{A}g2$   $\mathbb{A}h7$  72.  $\mathbb{A}h2$   $\mathbb{A}c7+$  73.  $\mathbb{A}g2$   $\mathbb{A}c4$  74.  $\mathbb{A}e3$ , ничья. Вот как бывает полезно изучать этюды!

*А. Русанов*

Индекс 90964



## ПАДЕНИЕ КАПЛИ В ЗВЕЗДОЛЕТЕ

Как поведет себя капля, порожденная чихающим астронавтом?



ISSN 0130-2221 22002



(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 43 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)