

ИЮЛЬ

ISSN 0130-2221

2020 · № 7

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



## ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

СОМА



Головоломку «кубики сома» (soma cube) придумал датский математик и изобретатель Пит Хейн (Piet Hein) в 1933 году. В ней требуется из семи деталей (шести пространственных тетрамино и одного уголка-тримино) составить куб  $3 \times 3 \times 3$ . Головоломка стала очень известной и породила великое множество вариантов: в одних нужно сложить какую-нибудь другую фигуру, в других немного отличается набор деталей. Но, как ни удивительно, мастера головоломочных дел до сих пор продолжают придумывать новые задачи на ее основе.

Пару лет назад венгерский изобретатель Ласло Молар (Laszlo Molar) предложил такую головоломку: тот же набор деталей нужно упаковать в коробку  $7 \times 2 \times 2$ . Дело осложняется тем, что эта коробочка закрыта прозрачной крышкой, в которой сделан вырез в форме Т-тетрамино. Объем такой коробочки равен 28, а суммарный объем деталей, как несложно подсчитать, равен 27. Чтобы не упрощать нам решение, Молар уже заранее занял лишнее место одним кубиком  $1 \times 1 \times 1$  (он вклеен в правый нижний угол коробочки). В итоге получилась интересная и довольно сложная головоломка. А если изготовить ее из красивых пород дерева, то она еще и будет выглядеть весьма эффектно.

Желаем успехов в ее решении!

*Е.Епифанов*

**В номере:**

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,  
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Космические лучи и исследование космоса.  
*А.Урысон*  
9 Окружности Карлейля, или Как решать  
квадратные уравнения циркулем и линейкой.  
*К.Кноп*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 16 Математическая «археология»: Задачи первой  
советской олимпиады школьников по  
математике. *Д. Фомин*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 22 Задачи M2610–M2613, Ф2617–Ф2620  
23 Решения задач M2598–M2601, Ф2605–Ф2608

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 31 Задачи

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика на языке функций и графиков

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 34 Пропала энергия. «Коварная» материальная  
точка. *А.Власов*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 38 К понятию действительного числа. *Э.Винберг*

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 41 Своенравный волчок. *М.Старшов*

## НАМ ПИШУТ

- 42 Параллелограмм замечательных точек.  
*К.Козеренко*

## ИНФОРМАЦИЯ

- 44 Заочная школа СУНЦ НГУ

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 49 Национальный исследовательский университет  
«МИЭТ»  
54 Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова  
56 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (21,30)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Урысон*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Космические лучи и исследование космоса

*А. УРЫСОН*

## Что такое космические лучи

Космические лучи – это элементарные частицы (протоны, электроны) и ядра атомов, которые летят к нам из космоса. В космических лучах были зарегистрированы частицы очень больших энергий – до 48 Дж. На ускорителях такие энергии недостижимы. Нужно сказать, что физики обычно используют для указания энергии не джоуль, а другую единицу – электронвольт (эВ). В этих единицах максимальная энергия, зарегистрированная у частиц космических лучей, равна  $3 \cdot 10^{20}$  эВ. А весь диапазон энергий космических частиц чрезвычайно широк: от  $10^6$  эВ до  $3 \cdot 10^{20}$  эВ. Космические лучи даже самых низких энергий летят с гигантскими скоростями, почти со скоростью света.

Откуда берутся космические лучи?

Частицы с энергией ниже  $2 \cdot 10^{10}$  эВ поставляются Солнцем, и они называются солнечными космическими лучами. Частицы более высоких энергий, вплоть до  $10^{17}$ – $10^{18}$  эВ, рождаются в Галактике во взрывах сверхновых, и они называются галактическими космическими лучами. Частицы еще больших энергий, выше  $10^{19}$  эВ, называются космическими лучами ультравысоких энергий. В этом названии нет информации о происхождении частиц, а только указывается их энергетический диапазон. Причина в том, что происхождение



ние космических лучей ультравысоких энергий до сих пор не выяснено.

Как исследуют космические лучи ультравысоких энергий? Их регистрируют детекторы на наземных установках, а затем при помощи пакетов специальных программ определяются энергии частиц, направления их прихода и другие характеристики. Теперь, дополнительно к этому способу, данные о космических лучах получают, используя приборы, размещенные на борту спутников.

Где же находятся те природные ускорители, в которых частицы космических лучей получают такую огромную энергию? После многолетних исследований выяснилось следующее. Во-первых, природные ускорители расположены вне нашей галактики Млечный Путь, а во-вторых, их можно исследовать астрономическими методами.

## За пределами Млечного Пути. Активные ядра галактик

Млечный Путь – лишь одна из многочисленных галактик нашей Вселенной. Галактики различаются по внешнему виду, по размеру, по интенсивности звездообразования, по соотношению старых и молодых звезд. По этим признакам их и классифицируют астрономы. Но галактики различаются еще и характеристиками своей центральной части (это тоже важный признак для классификации галактик). Центральная часть отличается от других областей галактики повышенной концентрацией звезд и межзвездного вещества – газа и пыли. Эта часть галактики компактна. Ее называют ядром галактики. Причиной сгущения вещества в ядре галактики является гравитация. Однако не у всех галактик есть ядра. Их нет у небольших по массе галактик, так как там недостаточно гравитации для сгущения вещества в центре.

В большинстве галактик основная часть энергии излучается звездами, и излучение галактического ядра – это тоже излучение составляющих его звезд. Такие галактические ядра называются стационарными или неактивными.

Но существует небольшое количество галактик, в которых из ядра вырывается огромный поток энергии, как если бы в центре галактики светило сто миллионов или даже сто миллиардов Солнц. Излучение из ядра переменное – оно резко уменьшается и потом резко возрастает, причем за короткий промежуток времени (часы, месяцы, годы). При этом энергия ядра излучается в различных диапазонах – радио-, рентгеновском, ультрафиолетовом, инфракрасном и гамма-диапазоне. Из ядра выбрасываются порции плазмы, вблизи него быстро движутся облака газа. Эти процессы невозможно объяснить высокой плотностью звезд и межзвездного вещества. Такие ядра называются активными или нестационарными.

Галактик с активными ядрами немного, примерно 1% от общего количества галактик. Их подразделяют на несколько типов

в зависимости от того, как проявляется активность ядра. Например, самым мощным излучением обладают квазары, галактики с мощным радиоизлучением из ядра называются радиогалактиками.

Мы не будем касаться классификации активных ядер, так как она не важна для нашего исследования. А суть его состоит в следующем. Поскольку в активных галактических ядрах выделяется огромное количество энергии, то там, возможно, и протекают процессы, в которых космические лучи приобретают ультравысокие энергии. Вылетев из области, где частицы ускорились, космические лучи покидают пределы своей галактики и, преодолев огромные расстояния в космосе, достигают Земли. Можно ли исследовать активные ядра, регистрируя на Земле эти космические лучи, пусть частицы и проделали гигантский путь в космосе?

В этом исследовании важно ответить на такие вопросы: откуда в активных галактических ядрах берется колоссальная энергия; как там ускоряются частицы; что происходит с частицами, когда они летят в межгалактическом пространстве.

### Что является источником энергии активного галактического ядра

В настоящее время доминирует гипотеза, что активность ядра обусловлена сверхмассивной черной дырой в центре галактики.

Черная дыра – это объект с такой сильной гравитацией, что из него не может вырваться даже свет. Как это может быть? Для того чтобы преодолеть силу притяжения небесного тела, тела должны иметь вторую космическую скорость. Для черных дыр вторая космическая скорость больше скорости света. Но в природе ничто не движется быстрее света, поэтому из черных дыр ничего не выходит наружу. Так как из них не выходит даже свет, черные дыры – темные, они невидимы для наблюдателя.

На больших расстояниях от черной дыры ее притяжение очень мало и не отличается от притяжения звезд. Лишь начиная с какого-то расстояния, все, попавшее в гра-

витационное поле черной дыры, «сваливается» в нее и уже не может выйти наружу. Граница, отделяющая ту область вокруг черной дыры, из которой ничего не возвращается, называется горизонтом черной дыры, или горизонтом событий. Никакие сигналы или тела, находящиеся внутри горизонта событий, не могут выйти из черной дыры.

Если масса  $M$  черной дыры составляет не менее  $10^5$  масс Солнца  $M_{\odot}$ , то такая дыра называется сверхмассивной. В ядрах галактик наблюдаются признаки черных дыр с  $M \approx (10^5 - 10^{11}) \cdot M_{\odot}$ .

### Аккреционный диск вокруг сверхмассивной черной дыры

Под действием тяготения на черную дыру падает вещество из окружающего пространства. Это вещество составляют звезды, оказавшиеся слишком близко от черной дыры и затянутые ее гравитационным полем, газ и пыль из межзвездной среды, а также вещество, захваченное с поверхности соседних звезд.

В гравитационном поле черной дыры потенциальная энергия падающего вещества преобразуется в кинетическую, и вещество разгоняется до огромных скоростей, сравнимых со скоростью света. Из-за того что звезды обращаются по орбитам, вещество падает на черную дыру не вертикально, а закручиваясь, образуя вокруг черной дыры плотный и горячий диск – так называемый аккреционный диск.

Слои газа в диске движутся вокруг центра в одном направлении, но с разными скоростями – чем ближе к центру, тем выше скорости. Поэтому между слоями газа возникает трение, и оно превращает кинетическую энергию газа в тепло. В результате диск разогревается до такой высокой температуры, что светится в радио-, инфракрасном и оптическом диапазонах, в рентгеновском свете и гамма-лучах.

Газ в аккреционном диске не только вращается, но и медленно перемещается по радиусу к центру. Скорость этого движения зависит от характеристик диска – массы и температуры. В некоторых аккре-

ционных дисках радиальное перемещение газа к центру приводит к тому, что по оси диска перпендикулярно его плоскости выбрасываются массы вещества. Они формируются в узкие прерывистые струи, или джеты (от английского *jet – струя*). Сверхмассивная черная дыра с аккреционным диском и джетами изображена на рисунке в начале статьи.

У аккреционного диска есть магнитное поле. Оно образует магнитосферу вокруг черной дыры. О том, почему в аккреционном диске существует магнитное поле, рассказывается в приложении «Магнитное поле аккреционного диска».

### Ускорение частиц вблизи сверхмассивных черных дыр

Вблизи сверхмассивных черных дыр имеется три зоны, где может происходить ускорение частиц. Это магнитосфера черной дыры, аккреционный диск и джет. В каждой зоне частицы ускоряются своими способами. О них рассказывается в приложении «Способы ускорения частиц вблизи сверхмассивных черных дыр».

А можно ли определить, в какой зоне были ускорены космические лучи?

Ускоренные частицы имеют разную энергию. Определив количество частиц, имеющих одинаковую энергию, и построив график зависимости числа частиц от энергии, мы получим *энергетический спектр* частиц – число частиц  $dN$  с энергией  $\varepsilon$  в единичном интервале энергии  $d\varepsilon$ . Энергетический спектр можно получить и аналитически (в виде формулы). Теоретический анализ показывает, что в каждой зоне ускорения энергетический спектр частиц будет разным.

Когда частицы ускоряются в джете, их энергетический спектр описывается формулой  $\frac{dN}{d\varepsilon} \propto \varepsilon^{-\alpha}$ , показатель степени  $\alpha \approx (2,2 - 2,5)$ . Спектр такого вида называется *степенным* (или *экспоненциальным*). Чем выше энергия, тем быстрее уменьшается число частиц с ростом энергии.

Когда частицы ускоряются в аккреционном диске, их энергетический спектр тоже

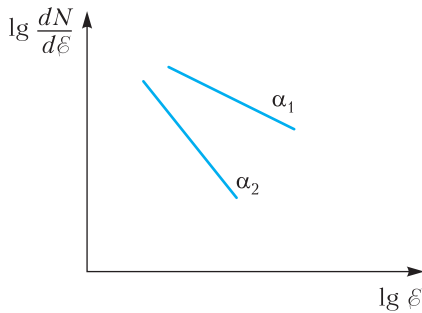


Рис. 1. Схематический график исходного степенного спектра космических лучей в логарифмическом масштабе. Показаны две кривые с разными показателями спектра

степенной, но показатель степени другой:  $\alpha \approx (0 - 2,1)$ . Показатель степени 0 – это вариант ускорения, когда при любых энергиях число частиц в одинаковых интервалах энергии одинаковое.

Степенные энергетические спектры с разными показателями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ) схематически показаны на рисунке 1.

Когда частицы ускоряются в магнитосфере черной дыры, почти все они набирают примерно одну и ту же энергию. Такой энергетический спектр называется *моноэнергетическим*, он показан на рисунке 2.

Итак, космические лучи, ускоренные в разных зонах, имеют разные энергетические спектры.

Самый простой ход мысли дальше мог бы быть таким. Измерим энергетический спектр космических лучей на Земле и сравним его с теоретическими спектрами (изображенными на рисунках 1, 2). Выяс-

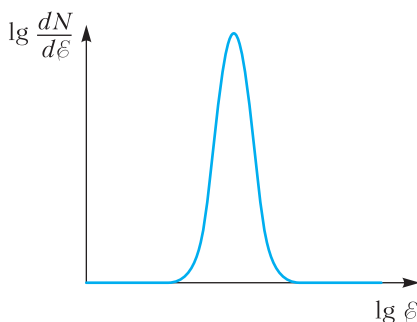


Рис. 2. Схематический график исходного моноэнергетического спектра космических лучей в логарифмическом масштабе

ним, с каким из них совпадает измеренный спектр, и найдем, где ускорялись космические лучи. Так мы «заглянем» в окрестности черной дыры и увидим, как там ускоряются частицы.

Но этот простой ход мысли неверный, и вот почему.

### Что происходит с космическими лучами, когда они летят во Вселенной

Покинув свой «ускоритель» – активное ядро галактики, космические лучи затем вылетают из своей галактики. Те из частиц, которые достигают Земли, преодолевают расстояния в десятки и сотни миллионов световых лет. Это огромные расстояния. Их проходят за десятки и сотни миллионов лет фотоны, а они летят с самой большой скоростью в природе.

Что происходит с космическими лучами, когда они летят во Вселенной? Галактики распределены во Вселенной редко, на больших расстояниях друг от друга, и их размеры очень малы по вселенским масштабам. Поэтому весь или практически весь путь космических лучей пролегает по межгалактическому пространству.

Глаз, не вооруженный приборами, воспринимает межгалактическое пространство как абсолютно пустое и темное. Но это не так. В межгалактическом пространстве летят фотоны разных энергий. Одни из них излучены звездами в галактиках. Другие остались от времен рождения Вселенной, и эти фотоны так и называются – реликтовые. (Есть в межгалактическом пространстве молекулы газа и пыли и магнитные поля, но о них мы рассказывать не будем.) Космические частицы взаимодействуют с фотонами, и это приводит к двум эффектам.

Первый эффект – это изменение исходной формы спектра космических лучей, а именно: в спектре у Земли по сравнению с исходным спектром не достает частиц самых высоких энергий, около  $10^{20}$  эВ и выше. Происходит это по следующей причине.

Когда космические лучи самых высоких энергий летят на Землю с достаточно боль-

ших расстояний, они на длинном пути успевают взаимодействовать с реликтовыми фотонами. В этих взаимодействиях космические лучи теряют энергию на рождение других элементарных частиц. А космические лучи меньших энергий практически не взаимодействуют с реликтовыми фотонами, так как их энергии недостаточно для производства других частиц. Потратив часть энергии во Вселенной, частицы ультравысоких энергий переходят в ряды космических лучей с меньшими энергиями. В результате их энергетический спектр изменяется по сравнению с исходным спектром.

Значит, чтобы ответить на вопрос, где вблизи сверхмассивной черной дыры ускоряются частицы, недостаточно сопоставлять измеренный спектр космических лучей с теоретическими исходными спектрами.

Но пролет космических лучей по межгалактическому пространству приводит к еще одному эффекту. Он состоит в следующем. Элементарные частицы, которые рождаются во взаимодействиях частиц с реликтовыми фотонами, живут недолго и дают начало электронам, позитронам и квантам. Они в свою очередь взаимодействуют с фотонами, порождая новые и новые электроны, позитроны и кванты. Число частиц растет лавинообразно, и в космосе возникает гигантский каскад из частиц, которые продолжают взаимодействовать с межгалактическими фотонами. Частицы в каскаде расходятся настолько далеко друг от друга, что расстояние между ними превышает размеры Солнечной системы. (Рожденные элементарные частицы дают начало и нейтрино, но они летят по Вселенной, не взаимодействуя.)

Рождение межгалактических каскадов – это второй эффект, появляющийся в результате взаимодействий космических лучей с фотонами в космосе.

Для нашего исследования наибольший интерес представляют каскадные кванты. Кроме них в межгалактическом пространстве существуют фотоны различных энергий, и все эти фотоны и кванты составляют

*внегалактический фон*. Его измеряют приборами, размещенными на борту спутников. Основная часть внегалактического фона – это излучение отдельных источников, которые находятся так далеко от нас или же так слабы, что не видны приборами. Возможно, что во внегалактический фон вносят вклад и другие процессы. Например, частицы темной материи, распадаясь, тоже дают начало квантам. Исследуя внегалактический фон, можно определить его компоненты и долю в нем каскадного излучения.

Оказывается, что доля каскадного излучения зависит от того, в какой зоне сверхмассивной черной дыры ускорялись космические лучи. А зная и каскадное излучение, и спектр космических лучей на Земле, можно выяснить, где и как были ускорены частицы. (Напомним, что в каждой зоне они ускоряются своим способом.)

Теперь физики исследуют частицы ультравысоких энергий на Земле и в космосе. Спектр космических лучей измеряют на Земле, а внегалактический фон – в космосе. Анализируя данные этих измерений, физики исследуют процессы в окрестности сверхмассивных черных дыр.

### Заключение

Космические лучи были открыты более ста лет назад, в 1910-х годах. Много лет ушло на понимание взаимодействий космических лучей с земной атмосферой, понимание того, что частицы разных энергий имеют разное происхождение: космические лучи низких энергий выбрасываются Солнцем, более энергичные рождаются в нашей Галактике.

Ученые предполагают, что источники космических лучей ультравысоких энергий – это активные ядра галактик. В их центрах находятся сверхмассивные черные дыры, в окрестности которых частицы приобретают огромную энергию.

Исследование этих источников космических лучей требует создания новых приборов для измерений в космосе. Оно требует понимания, какие процессы возмож-



ны в активных ядрах галактик и в межгалактическом пространстве. Для моделирования этих процессов требуются усовершенствованные компьютеры.

Мы не сможем попасть в окрестность сверхмассивной черной дыры и непосредственно исследовать протекающие там процессы. Уточнить понимание того, что там происходит, помогает изучение космических лучей и внегалактического излучения, компьютерное моделирование того, как ускоряются частицы и как они летят в межгалактическом пространстве, и сопоставление полученных результатов.

## Приложения

Магнитное поле аккреционного диска

Межзвездный газ пронизан магнитным полем, оно присутствует во всех звездах. Почти все вещество в звездах и в межзвездной среде ионизовано и состоит преимущественно из заряженных частиц. Вследствие этого в космосе магнитное поле *вморожено* в среду: силовая линия магнитного поля как бы прикреплена к тем заряженным частицам, которые находились на ней в начальный момент, и когда частицы перемещаются, они увлекают линию за собой.

Газ, падающий на черную дыру и формирующий аккреционный диск, увлекает за собой магнитное поле, поэтому диск намагничивается. А если плотность газа возрастает, т.е. газ сжимается, то силовые линии сгущаются и магнитное поле усиливается. Поэтому поле аккреционного диска может быть намного больше, чем поле, пронизывающее межзвездный газ и вещество звезд.

Способы ускорения частиц вблизи сверхмассивных черных дыр

Из школьного курса физики известно, что заряженные частицы приобретают энергию в электрическом поле. (Простейший случай: частица с зарядом  $q$ , пройдя расстояние  $L$  в однородном электростатическом поле с напряженностью  $E$ , приобрета-

ет энергию  $\varepsilon = qEL$ .) Этот механизм ускорения работает и в космосе. Магнитное поле в аккреционном диске неоднородно из-за неоднородной плотности газа. Диск вращается, и его магнитное поле индуцирует электрические поля как в самом диске, так и в магнитосфере черной дыры. Они и ускоряют заряженные частицы. При некоторых условиях индуцированное электрическое поле может ускорять частицы до ультравысоких энергий.

Еще один механизм ускорения частиц в космосе связан с неоднородностями магнитного поля, и в нем не участвует электрическое поле. Впервые возможность такого ускорения частиц понял и рассмотрел итальянский физик Ферми, поэтому этот механизм называется *механизмом Ферми*. Вблизи сверхмассивных черных дыр механизм Ферми работает в джете, который вырывается из аккреционного диска. Частицы в джете ускоряются так.

Джет сформирован из вещества аккреционного диска. В джете сгустки плазмы выбрасываются из диска по двум воронкообразным каналам вдоль его оси вращения. Толщина аккреционных дисков вокруг сверхмассивных черных дыр неодинакова, она зависит от характеристик черной дыры. В зависимости от толщины диска сгустки летят сквозь него месяцы и годы. Все это время сгустки взаимодействуют с боками канала (с веществом диска) и с излучением диска (ведь аккреционный диск ярко светится в разных диапазонах, он наполнен тепловыми, оптическими, радио- и другими фотонами). В результате взаимодействия с веществом и излучением на поверхности сгустка возбуждаются волны разных типов, в том числе *ударные волны*. Поясним, что это такое.

Участок поверхности сгустка испытывает удар и получает толчок. Под действием толчка участок плазмы начинает двигаться по сгустку, приводя в движение лежащие впереди плазменные слои. Граница между плазмой, движущейся вдоль сгустка, и неподвижной относительно сгустка — резкая. Она называется *фронтом ударной*

волны. На этой границе скачком возрастают плотность, давление, температура и скорость плазмы. Ударная волна заставляет плазму в сгустке упорядоченно двигаться, а на фронте происходит интенсивное превращение энергии упорядоченного движения плазмы в энергию хаотического движения частиц. И если частица оказалась на фронте ударной волны, она приобретает энергию, т.е. ускоряется.

Что происходит дальше? Частица уносится потоком плазмы от фронта ударной волны «вниз по течению». Если частица вернется на фронт ударной волны, ее энергия увеличится еще больше. А может ли частица возвратиться? Да, и даже не один раз. Происходит это так.

В сгусток плазмы вморожено магнитное поле, оно неоднородно из-за неоднородной плотности сгустка. В некоторых областях неоднородное магнитное поле направлено так, что отклоняет летящую частицу по направлению к фронту ударной волны, и частица возвращается на фронт. Отклонение частицы пропорционально величине поля и обратно пропорционально энергии частицы – чем она больше, тем слабее отклонение. Поэтому частица возвращается на фронт ударной волны до тех

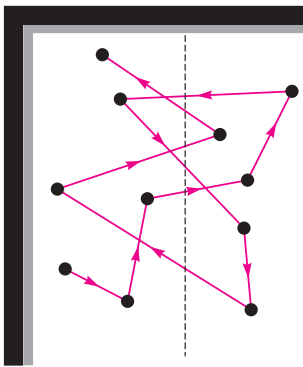


Рис. 3. Блуждания частицы вблизи фронта ударной волны. Фронт показан вертикальной пунктирной линией, частица изображена черным кружком, линии со стрелками – это векторы скорости частицы. Отклонения в неоднородном магнитном поле дают возможность частице многократно пересекать ударный фронт и ускоряться

пор, пока не наберет такую энергию, когда магнитные поля в сгустке уже не отклонят ее назад. Движение частицы в неоднородном магнитном поле вблизи фронта ударной волны схематически показано на рисунке 3.

При любом из этих способов ускорения частица одновременно и набирает, и теряет энергию. Энергетические потери возникают, когда частица находится в области, пронизанной магнитным полем с искривленными силовыми линиями. Дело в том, что если силовая линия изгибается, то у частицы появляется составляющая скорости, перпендикулярная магнитному полю. И тогда траектория частицы искривляется под действием силы Лоренца. Частица, которая движется по искривленной траектории, излучает энергию, и энергия самой частицы уменьшается.

Силовые линии могут быть прямолинейными, но лишь на ограниченных отрезках. И даже если частица двигалась вдоль прямой силовой линии, потери энергии все равно будут, и вот почему. Участок, где линия прямолинейна, кончается, и дальше силовая линия изгибается. А в поле с такими силовыми линиями траектория частицы искривляется, частица, двигаясь, излучает энергию и ее энергия падает.

Вблизи сверхмассивных черных дыр частицы все-таки ускоряются до ультравысоких энергий. Это показал теоретический анализ процессов, в которых частица одновременно набирает и теряет энергию.

Оба способа ускорения частиц вблизи черной дыры – посредством индуцированного электрического поля и посредством механизма Ферми – были выявлены теоретически, «на бумаге». Какой из них важнее в природе – покажут наблюдения.

# Окружности Карлейля, или Как решать квадратные уравнения циркулем и линейкой

К.КНОП

**КА**ЗАЛОСЬ БЫ, КАКАЯ МОЖЕТ быть связь между квадратными уравнениями и геометрическими инструментами – циркулем и линейкой? Однако эта связь есть, и ее исследование с разных сторон – увлекательнейшая задача, тесно связанная и с геометрией, и с алгеброй.

А при чем тут Томас Карлейль? Согласно Википедии, это британский писатель, публицист, историк и философ, автор многотомных сочинений «Французская революция» (1837), «Герои, почитание героев и героическое в истории» (1841), «История жизни Фридриха II Прусского» (1858–1865). О его занятиях математикой практически ничего не известно, и тем не менее, в честь него назван класс окружностей, помогающих решать квадратные уравнения.

А теперь – обо всем по порядку.

## Что мы подразумеваем под решением уравнений циркулем и линейкой?

В школьных учебниках геометрии есть какие-то упоминания о возможности построения квадратичных иррациональностей с помощью геометрических инструментов, но в основном не в виде практических алгоритмов построения, а в качестве теоремы существования. Единственный школьный пример конкретного алго-



Томас Карлейль.  
Портрет работы Дэниэла Маклиса

ритма, как-то связанного с квадратными уравнениями, – построение среднего геометрического. Давайте и мы тоже начнем с этой задачи.

**Задача 1.** Даны отрезки  $a$  и  $b$ . Постройте отрезок, равный  $\sqrt{ab}$ .

**Решение.** Отложим на одной прямой

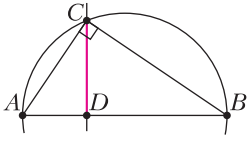


Рис. 1. Построение среднего геометрического

$AD = a, DB = b$ . Построим окружность на отрезке  $AB$  как на диаметре. Восставим к нему перпендикуляр в точке  $D$  – в пересечении получим точку  $C$  (рис.1). Тогда  $CD = \sqrt{ab}$ . (Доказательство: угол  $ACB$ , опирающийся на диаметр окружности, является прямым. Поэтому треугольник  $ACB$  подобен (по углам) каждому из треугольников  $ADC$  и  $CDB$ , откуда  $AD : CD = CD : DB$ , и  $ab = AD \cdot DB = CD^2$ .)

Обычно после решения этой задачи в школе говорится, что поскольку мы умеем с помощью циркуля и линейки складывать, вычитать, также умножать и делить (пользуясь теоремой Фалеса), а вот теперь умеем и корни извлекать, то этого уже достаточно для того, чтобы по формулам для корней квадратного уравнения научиться строить отрезки соответствующей длины. Действительно, достаточно. Но ведь дико неудобно!

К счастью, есть и нормальный способ «геометрического» решения квадратных уравнений, известный вот уже более двух веков. Этот способ впервые был описан шотландским математиком и физиком

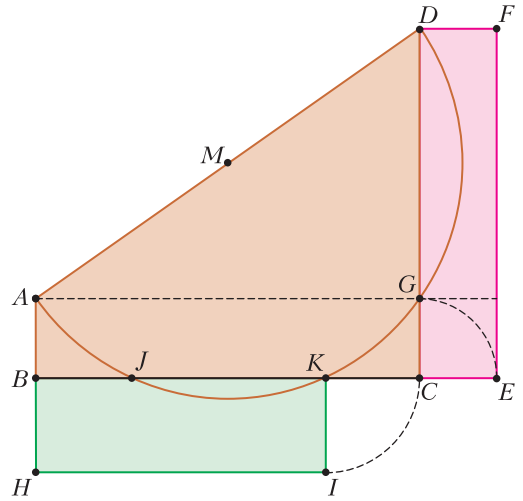


Рис. 3. Задача Лесли в Википедии

Джоном Лесли в его книге «Элементы геометрии и плоской тригонометрии», изданной в 1809 году. В одном из последующих изданий Лесли добавил сноску о том, что идея этого способа принадлежит его бывшему ученику Томасу Карлейлю.

На рисунке 2, заимствованном из книги Лесли, сформулирована задача: «Построить прямоугольник, равновеликий данному прямоугольнику  $CDFE$ , полупериметр которого равен данному отрезку  $BC$ ». Ее решение, предложенное Карлейлем, показано на рисунке 3. Прокомментируем построение на этом рисунке. Вначале данный отрезок  $BC$  откладывается на продолжении меньшей стороны четырехугольника ( $CE$ ). Затем на большей его стороне откладывается  $CG = CE$ , после чего с помощью параллельных прямых достраивается четвертая вершина прямоугольника  $ABCG$ . Теперь достаточно построить окружность на диаметре  $AD$  – точки  $J$  и  $K$  ее пересечения с отрезком  $BC$  и дадут искомые стороны прямоугольника ( $BJ$  и  $JC$  или, как изображено на рисунке,  $BK$  и  $KC = KI$ ).

Почему и как это работает? Проще всего ответить на этот вопрос с помощью системы координат. Поместим начало координат в точку  $C$ , ось абсцис направим влево (к  $B$ ), а ось ординат вверх (к  $D$ ). Кроме того, будем считать, что  $CE = e, CB = b$ ,



Рис. 2. Задача Лесли, страница из его книги

$CD = d$ . Тогда координатами точки  $A$  будут  $(b; e)$ , а значит, координатами  $M$  будут  $(b/2; (d+e)/2)$ . Это означает, что окружность с центром  $M$  и радиусом  $MG (= MA = MD)$  имеет уравнение

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d+e}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-e}{2}\right)^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + y^2 - (d+e)y + \left(\frac{d+e}{2}\right)^2 &= \\ &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-e}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

и

$$x^2 - bx + y^2 - (d+e)y + de = 0.$$

Теперь уже совсем нетрудно увидеть, что точки пересечения этой окружности с горизонтальной прямой  $BC$  (осью абсцисс) – это точки, для которых  $y = 0$ , а значит, они удовлетворяют уравнению

$$x^2 - bx + de = 0.$$

Как мы знаем из школьной алгебры (теорема Виета), сумма корней этого уравнения равна  $b$ , а произведение равно  $de$ . Таким образом, если  $K(x_1; 0)$  и  $J(x_2; 0)$ , то  $CK + CJ = x_1 + x_2 = b = CB$ , а  $CK \cdot CJ = x_1 \cdot x_2 = de$ , т.е. площадь прямоугольника со сторонами  $CK$  и  $BK = CJ$  действительно равна площади исходного прямоугольника  $CDFE$ .

То же самое можно было получить и не выписывая уравнения окружности, из чисто геометрических соображений. Ведь  $CK \cdot CJ$  – это произведение длины секущей на ее внешнюю часть, а  $de = CD \cdot CG$  – другое такое же произведение. По теореме о секущих, они равны, т.е.  $CK \cdot CJ = de$ . А так как  $ABCD$  – прямоугольная трапеция, а  $M$  – середина ее боковой стороны, то высота в равнобедренном треугольнике  $MJK$  является одновременно средней линией трапеции и медианой в том же треугольнике. Отсюда сразу получаем, что  $CK = BJ$ , а значит,  $CK + CJ = CB = b$ .

Осмысление того, что способ Карлейля годится не только для одной этой задачи, пришло далеко не сразу. Сначала в 1867 году австрийский железнодорожный

инженер Эдуард Лиль описал свой метод приближенного графического нахождения корней многочленов произвольной степени (см. в Википедии «Метод Лиля»). Но только еще через 58 лет (в 1925 году) американский профессор Джордж Абрам Миллер, занимавшийся историей математики в качестве хобби, объяснил связь между окружностью, использованной Карлейлем и Лесли, и применением метода Лиля к решению квадратного уравнения.

### Способ Карлейля

Итак, пусть мы хотим решить приведенное квадратное уравнение  $x^2 - sx + p = 0$ . Тогда мы должны взять на координатной плоскости точки  $A(0; 1)$  и  $B(s; p)$ , найти середину  $C$  отрезка  $AB$  и построить окружность с центром в  $C$  и радиусом  $CA$  (рис.4).

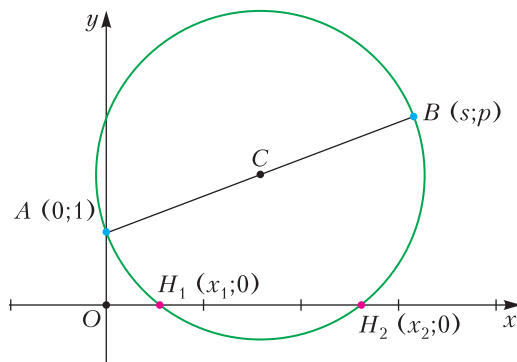


Рис. 4. Окружность Карлейля – определение

Точки пересечения этой окружности с осью абсцисс и будут корнями уравнения.

Доказательство практически полностью повторяет решение задачи Лесли, приведенное выше.

Но мы, кажется, собирались что-то строить циркулем и линейкой? А здесь координатная плоскость... Ничего страшного! Все, что нам на самом деле нужно от координат, вполне сводится к двум осям. Действительно, вместо точки  $B(s; p)$  можно сразу рассмотреть ее проекции на оси  $B_1(s; 0)$  и  $B_2(0; p)$ . Ведь если мы знаем коэффициенты  $s$  и  $p$ , то построить именно эти точки на осях – проще простого. А дальше центр окружности получится пересечением серединных перпендикуляров

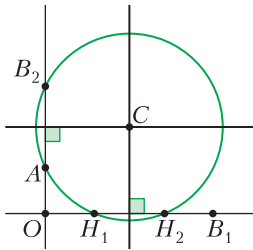


Рис. 5. Окружность Карлейля – построение

к  $OB_1$  и  $AB_2$  (попытайтесь разобраться, почему это так, по рисунку 5).

Как видно из рисунка 5, способ с окружностью Карлейля не только простой, но и удивительно легкий для запоминания. Кроме начала координат, требуются всего три точки –  $B_1$  (абсцисса которой равна коэффициенту  $s$ ) откладывается на оси абсцисс, а  $A(0; 1)$  и  $B_2$  (ордината которой равна  $p$ ) – на оси ординат. Два серединных перпендикуляра, одна окружность – вуаля, корни готовы!

**Как это применять?**

Возможно, самое известное применение окружностей Карлейля – построение правильных многоугольников. Многие слышали о том, что построение правильного пятиугольника циркулем и линейкой возможно. (На самом деле – не только возможно, но было дано и полностью обосновано еще Евклидом.) Но многие ли пытались понять, как именно решается эта задача?

**Задача 2.** Дана окружность с центром  $O$  и точка  $A$  на ней. Постройте правильный пятиугольник  $ABCDE$ , вписанный в эту окружность.

**Решение.** Построение пятиугольника с помощью окружностей Карлейля отличается удивительной простотой. Начнем с координатных осей, проведя через центр круга прямую  $OX$ , перпендикулярную  $OA$  (рис. 6). Радиус данной окружности будем считать равным 1. Теперь берем точку  $M(-1/2; 0)$  и строим окружность с центром  $M$ , проходящую через  $X$ . В пересечении с  $OA$  получаем точки  $H_1$  и  $H_2$ . Если теперь в полученных точках построить единичные окружности, то они пересекут данную окружность как раз в точках  $B, C, D, E$ , являющихся вершинами правильного пятиугольника (на рисунке 6 он выделен красным, а единичные окружности – изображены синим пунктиром).

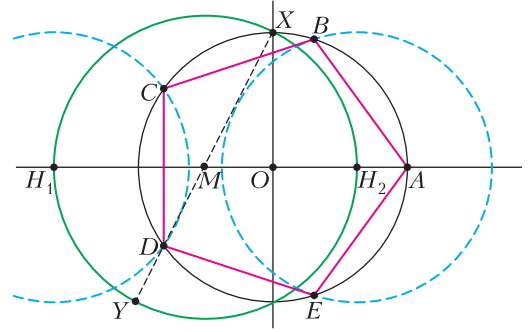


Рис. 6. Правильный пятиугольник

Почему это работает и при чем тут Карлейль? А вот при чем. Способ Карлейля утверждает, что построенная окружность с центром  $M$  находит корни квадратного уравнения для  $(s; p) = (-1; -1)$ , поскольку  $M$  – середина отрезка  $XY$ , где координаты точки  $Y$  как раз и равны  $(-1; -1)$ . Значит,  $H_1$  и  $H_2$  – корни квадратного уравнения  $x^2 + x - 1 = 0$ . Это знаменитое уравнение золотого сечения. Для нас достаточно использовать его «тригонометрическую» ипостась.

**Лемма.** Корнями квадратного уравнения  $x^2 + x = 1$  являются величины  $2 \cos 72^\circ$  и  $2 \cos 144^\circ$ .

**Доказательство.** Косинусы этих углов удовлетворяют тригонометрическому уравнению  $\cos 3\alpha = \cos 2\alpha$ , при этом они отличны от корня  $\alpha = 0$ . Преобразование уравнения  $\cos 3\alpha = \cos 2\alpha$  в алгебраическое с помощью замены  $x = 2 \cos \alpha$  дает уравнение  $(x - 2)(x^2 - x - 1) = 0$ , что и требовалось доказать. (Корень  $x = 2$  соответствует  $\alpha = 0$ .)

Итак, с помощью метода Карлейля и «золотой» леммы мы выяснили, что точки  $H_1$  и  $H_2$  имеют координаты  $(2 \cos 144^\circ; 0)$  и  $(2 \cos 72^\circ; 0)$  соответственно. А дальше мы в этих центрах построили единичные окружности, т.е. окружности того же радиуса, что и данная окружность с центром  $O$ . Ясно, что они пересекут окружность  $(O, A)$  на серединных перпендикулярах к отрезкам  $OH_1$  и  $OH_2$  соответственно. Осталось только понять, что серединные перпендикуляры – это прямые  $x = \cos 72^\circ$  и  $x = \cos 144^\circ$ , а значит, точки  $B, E, C$  и  $D$  пересечения окружностей имеют коорди-

наты  $(\cos 72^\circ; \sin 72^\circ)$ ,  $(\cos 72^\circ; -\sin 72^\circ)$ ,  $(\cos 144^\circ; \sin 144^\circ)$  и  $(\cos 144^\circ; -\sin 144^\circ)$ , т.е. углы  $AOB$  и  $AOE$  равны  $72$  градусам. а углы  $AOC$  и  $AOD$  –  $144$  градусам. А это и означает, что они являются вершинами правильного пятиугольника. Доказательство правильности построения на этом завершено.

### О сложности построений и «геометрографии» Эмиля Лемуана

Француз Эмиль Мишель Гиацинт Лемуан по праву считается одним из отцов современной «геометрии треугольника». Вероятно, вы слышали о точке Лемуана в треугольнике или об окружностях Лемуана. Он же в 1892 году опубликовал работу «Геометрография, или искусство геометрических конструкций» («La Géométophographie ou l'art des constructions géométriques»), в которой впервые предложил сравнивать различные геометрические построения по количеству требуемых элементарных операций (а лучшим построением считать то, на которое тратится меньшее число операций). Оптимальным («геометрографическим») способом Лемуан называет самый экономный из известных алгоритмов построения.

Элементарных операций Лемуан насчитал пять:

- $S_1$  – приложить линейку к определенной точке;
- $S_2$  – провести прямую линию;
- $C_1$  – поставить ножку циркуля в определенную точку;
- $C_2$  – изменить радиус циркуля, поставив ножку с карандашом в определенную точку;
- $C_3$  – провести циркулем окружность.

При этом Лемуан считал циркуль устойчивым, т.е. после проведения окружности сохраняющим выставленный радиус. Таким образом, следующая окружность того же радиуса, по Лемуану, требует уже не трех операций:  $C_1 + C_2 + C_3$ , а всего двух:  $C_1 + C_3$ .

Сосчитаем, например, количество операций в построении корней уравнения с помощью окружности Карлейля, показанном на рисунке 5. Оси координат и точки  $A$ ,  $B_1$  и  $B_2$  заданы. Построение серединного

перпендикуляра к отрезку  $OB_1$  – это две окружности равных радиусов и одна прямая, т.е.  $(2C_1 + C_2 + 2C_3) + (2S_1 + S_2)$ . Следующий серединный перпендикуляр – это  $(2C_1 + 2C_3) + (2S_1 + S_2)$ , потому что мы строим его, не меняя радиуса циркуля. Тем самым, мы построили центр, затратив 15 элементарных операций. И наконец, сама окружность Карлейля – это еще  $C_1 + C_2 + C_3$ . Итого «сложность» построения  $5C_1 + 2C_2 + 5C_3 + 4S_1 + 2S_2$  равна 18.

**Упражнение 1.** Придумайте другой способ построения окружности Карлейля, имеющий сложность 17 или меньше.

*Подсказка.* Центр этой окружности – середина отрезка, одним из концов которого является  $B_1$ . Постройте сначала второй конец этого отрезка.

Современная компьютерная игра-головоломка Euclidea ([www.euclidea.xyz](http://www.euclidea.xyz)) также требует от решателей задач найти самое экономное построение, но, в отличие от Лемуана, не подсчитывает предварительные операции  $S_1$ ,  $C_1$  и  $C_2$ , а считает только количество проведенных линий (т.е.  $S_2 + C_3$  в терминологии Лемуана). С точки зрения Euclidea, построение окружности Карлейля имеет сложность 7.

### Можно ли отыскать корни квадратного уравнения с меньшей сложностью?

Когда автор начинал писать эту статью, он предполагал, что этот вопрос будет повешен в качестве финальной улыбки Чеширского Кота и оставлен читателю для самостоятельного решения. Однако планы немножко поменялись, и сейчас я хочу показать более экономный способ, а читателям предложить обдумать, нельзя ли найти еще лучший.

Во-первых, откажемся от оси ординат. Зачем она нужна, если все корни мы ищем на оси абсцисс?

Пусть у нас есть всего одна ось, а на ней – четыре известные точки  $O(0)$ ,  $E(1)$ ,  $S(X+Y)$  и  $P(XY)$ . Последние две точки соответствуют коэффициентам того уравнения, которое мы хотим решить. Рисунок 7 соответствует ситуации, когда  $0 < XY < 1 < X+Y$ , но это не очень кри-



Рис. 7. Четыре точки на одной оси

точно – приведенное ниже построение работает и во многих других случаях, а если оно не будет работать из-за того, что какие-то окружности не пересекутся, то его не очень сложно адаптировать.

Вначале проведем две окружности равных радиусов с центрами в  $P(XY)$  и  $E(1)$  (рис.8) – как будто мы хотим строить середину отрезка между этими точками. Радиус окружностей возьмем таким, чтобы первая окружность прошла через точку  $S(X+Y)$ . Отметим  $C$  – общую точку этих окружностей.

Затем построим еще две окружности – окружность с центром  $O(0)$ , проходящую через  $C$ , и окружность такого же радиуса с центром  $S$ . Их точку пересечения (любую из двух точек) назовем  $D$  (рис.9).

И (немного неожиданный, как и полагается улыбке Кота) финальный шаг – окружность с центром  $D$ , радиус которой точно такой же, как у двух первых (рис.10). Нетрудно убедиться, что в пересечении этой окружности с осью абсцисс получатся

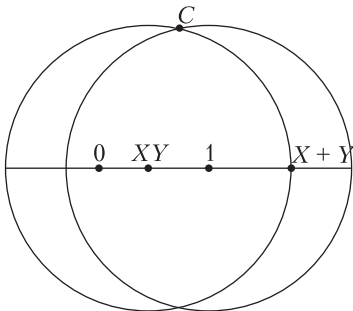


Рис. 8. Начало построения

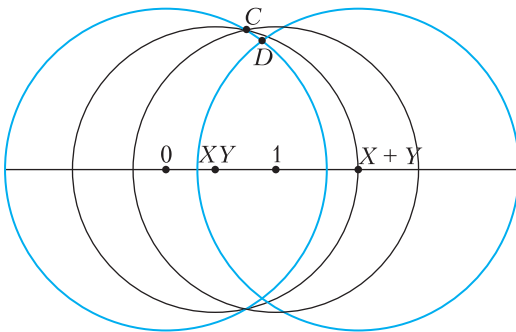


Рис. 9. Вторые две окружности

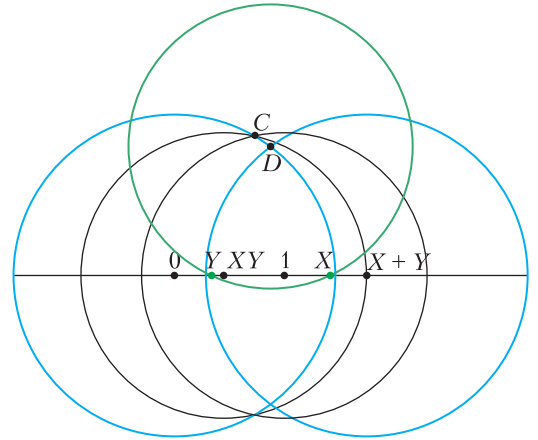


Рис. 10. Корни уравнения найдены

нужные корни уравнения. Так получается потому, что разность квадратов радиусов построенных окружностей равна  $XY$ , и по теореме Пифагора квадрат длины отрезка между точками пересечения пятой окружности с прямой равен  $(X+Y)^2 - 4XY = (X-Y)^2$ . А поскольку середина этого отрезка имеет координату  $(X+Y)/2$ , то правый конец отрезка совпадает с большим из чисел  $X, Y$ , а левый – с меньшим.

Сосчитаем сложность:  $2C_1 + C_2 + 2C_3$  на первую пару окружностей, столько же на вторую и еще  $C_1 + C_2 + 2C_3$  на последнюю окружность – всего  $5 + 5 + 3 = 13$ , вместо прежних 17 или 18. Ура!

**Дополнение.**

**Построение правильного 17-угольника**

**Задача 3.** Пусть дана окружность с центром  $O$  и точка  $A$  на ней. Постройте правильный 17-угольник с вершиной  $A$ , вписанный в эту окружность.

Эта задача, в отличие от трех неразрешимых задач древности, стала знаменитой после того, как была решена 19-летним Карлом Фридрихом Гауссом. Биографы Гаусса пишут, что только после ее решения Гаусс окончательно выбрал своей будущей профессией математику, а не литературу. Известна также легенда, что Гаусс завещал выбить на своем могильном камне изображение правильного 17-угольника. Кажется, даже если такое завещание было, то оно оказалось невыполненным, а вот на памятнике Гауссу в Брауншвейге след его юношеской работы есть (рис.11 и 12).





Рис. 11. Памятник Гауссу в Брауншвейге



Рис. 12. Семнадцатигульная звезда на памятнике

Полное описание гауссова метода решения этой задачи, пожалуй, далеко выходит за рамки одной статьи, но набросок метода дать нетрудно. Правда, это потребует от читателя хорошего знакомства с комплексными числами.

**Решение.** Основной идеей Гаусса было циклическое упорядочение комплексных корней 17-й степени из 1 – такое, чтобы каждый следующий корень был определенной степенью предыдущего. Он доказал, что полный цикл получится тогда, когда эта определенная степень равна 3.

Таким образом, он расположил корни в следующем порядке:

$\tau^1, \tau^3, \tau^9, \tau^{10}$  (поскольку  $27 = 10 \pmod{17}$ ),

$\tau^{13}, \tau^5, \tau^{15}, \tau^{11}, \tau^{16}, \tau^{14}, \tau^8, \tau^7, \tau^4, \tau^{12}, \tau^2, \tau^6$ .

Далее Гаусс разбил этот цикл на два куска, которые он назвал *периодами*. В один период вошла половина корней – все корни на нечетных местах цикла, в другой – вторая половина:

$$\eta_{02} = \tau^1 + \tau^9 + \tau^{13} + \tau^{15} + \tau^{16} + \tau^8 + \tau^4 + \tau^2,$$

$$\eta_{12} = \tau^3 + \tau^{10} + \tau^5 + \tau^{11} + \tau^{14} + \tau^7 + \tau^{12} + \tau^6.$$

Гаусс заметил, что сумма двух построенных им величин  $\eta_{02} + \eta_{12}$ , равная сумме всех корней уравнения, равна  $-1$ , а их произведение равно  $-4$ . (Первое наблюдение Гаусса легко следует из теоремы Виета для уравнения  $x^{17} - 1 = 0$ , так как сумма всех корней вместе с корнем  $x = 1$  равна 0. Второе же наблюдение несложно проверить непосредственным вычислением. Для этого достаточно просто перемножить выражения – каждое содержит по 8 слагаемых, в произведении их будет 64, и из соображений симметрии ясно, что каждая степень будет

встречаться по 4 раза, поэтому произведение равно учетверенной сумме.) Иными словами, две эти величины – корни квадратного уравнения с известными коэффициентами.

Дальше – проще. Гаусс просто продолжает разбивать каждый период на два меньших:

$$\eta_{02} = \eta_{04} + \eta_{24}, \text{ где } \eta_{04} = \tau^1 + \tau^{13} + \tau^{16} + \tau^4,$$

$$\text{а } \eta_{24} = \tau^9 + \tau^{15} + \tau^8 + \tau^2,$$

$$\eta_{12} = \eta_{14} + \eta_{34}, \text{ где } \eta_{14} = \tau^3 + \tau^5 + \tau^{14} + \tau^{12},$$

$$\text{а } \eta_{34} = \tau^{10} + \tau^{11} + \tau^7 + \tau^6.$$

Суммы значений  $\eta_{04} + \eta_{24}$  и  $\eta_{14} + \eta_{34}$  – уже известные нам величины  $\eta_{02}$  и  $\eta_{12}$ , а их произведения равны  $-1$  (убедитесь в этом сами, раскрыв скобки в произведениях). Следовательно, мы снова знаем квадратные уравнения, корни которых нужно отыскать.

Следующим шагом точно так же вводятся периоды длины 2 – их всего восемь, от  $\eta_{08}$  до  $\eta_{78}$ . Собственно, этот шаг уже является последним, потому что  $\eta_{08} = \tau^1 + \tau^{16} = 2 \cos(\pi/17)$ , так что, зная величину  $\eta_{08}$ , мы легко построим вершины правильного 17-угольника, соседние с заданной вершиной  $A$  (аналогично построению вершин по точке  $H_2$  для правильного пятиугольника).

### Упражнения

2. Вычислите произведение  $\eta_{08}\eta_{48}$ .

3. Дуайн ДиТемпл описал пошаговое построение правильного 17-угольника с помощью окружностей Карлейля ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:01-Heptadecagon-Carlyle\\_circle.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:01-Heptadecagon-Carlyle_circle.gif)). Разберитесь в этом построении.

# Математическая «археология»: Задачи первой советской олимпиады школьников по математике

*Д. ФОМИН*

**Н**А ПРОТЯЖЕНИИ МНОГИХ ЛЕТ всем, кто когда-либо интересовался задачами Ленинградских математических олимпиад (ЛМО), было хорошо известно, что варианты первых ЛМО пропали во время войны и блокады или попросту не были сохранены. Да и в первые послевоенные годы эта печальная судьба не обошла северную столицу – пожалуй, только задачи олимпиад второй половины 1950-х годов удалось найти в более или менее полных вариантах (да и то не для каждого года и не для каждого класса).

С одной стороны, это можно понять. Вполне вероятно, что в те годы эти новомодные соревнования не воспринимались как нечто заслуживавшее особого внимания. Тем более, что разные революционные (в полном смысле этого слова) инициативы в образовании сваливались на головы учителей и школьников буквально каждый день. Зачастую не проходило и квартала или двух, как все отменялось, приходили новые министры, директора и другие руководящие энтузиасты, которые изобретали и внедряли совершенно другие способы обучения, новаторские идеи по выявлению молодых дарований, подъему социалистической науки на небывалый уровень и так далее. Не исключено, что многие профессора-организаторы олимпиады не считали нужным хра-

нить все эти многочисленные списки задач, которые – чего уж тут греха таить – поначалу почти ничем особенно и не отличались от обыденных задач школьной программы.

С другой стороны, надо отметить, что в те годы и в Ленинграде и в Москве нашлись энтузиасты, которые уже тогда интуитивно понимали, как важно сохранить для истории эти первые олимпиадные задачи, материалы первых кружков. Они аккуратно сберегали эти тексты в своих архивах, а затем публиковали первые статьи и сборники задач, посвященные математическим соревнованиям. Среди москвичей здесь в первую очередь стоит упомянуть Ростислава Николаевича Бончковского (1905–1942) и Иоасафа Ивановича Чистякова (1870–1942).

Что касается Ленинграда, то известно, например, что руководители кружков Дворца пионеров Михаил Львович Вержбинский (1909–1962) и Марк Константинович Гаурин (1911–1992) бережно собирали комплекты олимпиадных задач и материалы занятий со школьниками (см. [7]). Но затем они ушли на фронт, а уж что произошло с их архивами, теперь, наверное, никому не известно. Дочка М.Л. Вержбинского написала в своих воспоминаниях об отце, что во время блокадных зим из-за нехватки дров на растопку порубили хранившуюся в их квартире уникальную мебель фирмы «Чиппендейл». Что уж тут

говорить о каких-то бумажках с никому не нужными формулами. В 1941 году Ленинградский университет был эвакуирован в Елабугу, а потом в Саратов; многие профессора, аспиранты и студенты ушли на фронт, их записи и архивы пропали – или в блокадном Ленинграде, или во время многочисленных переездов.

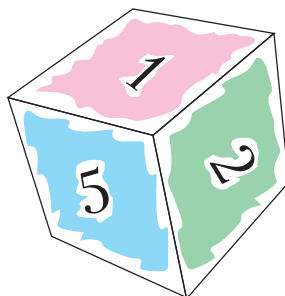
Когда в конце 1980-х годов я попытался разыскать задачи олимпиад тех далеких довоенных лет, то всеобщий консенсус был таков – «это безнадежно». Да и результаты моих раскопок в Государственной публичной библиотеке (ныне Российская национальная библиотека), в документах и отчетах Дворца пионеров и в более чем тридцати личных архивах привели меня к тому же печальному выводу. В первом издании сборника Ленинградских математических олимпиад ([6]) я примерно так и написал, что, мол, найти задачи довоенных олимпиад представляется крайне маловероятным, реальных шансов на это нет.

Тут необходимо упомянуть, что в 1984 году, к пятидесятилетию первой олимпиады, в журнале «Математика в школе» была опубликована любопытная статья Н.М.Матвеева и С.Е.Рукшина [5], в которой авторы, в частности, цитировали воспоминания С.В.Валландера<sup>1</sup>, а затем сообщали нам, что «история сохранила первую задачу первой олимпиады». При этом в статье отсутствовала точная атрибуция этого утверждения.

Вот условие приведенной там задачи:

**Задача про кубик.** *Сколько существует различных способов раскрасить грани кубика шестью цветами? (Два способа раскраски называются различными, если их нельзя совместить поворотом кубика.)*

Когда я прочитал этот текст вскоре после его публикации, то моя первая реакция была – какой приятный сюрприз! Мало того, что удалось найти задачу первой ЛМО, так еще и задачка-то сама весьма



симпатичная и не стандартная, совершенно не похожая на подавляющее большинство других задач математических соревнований тех лет, которые выглядят так, как будто их только что переписали из школьного учебника.

Полюбовавшись на задачу, я немного призадумался, поскольку у меня возникло ощущение, что где-то я ее уже видел. И в самом деле, открыв сборник [3], я тут же обнаружил эту задачу... в варианте первой Московской математической олимпиады 1935 года.

Могли ли москвичи использовать задачу с ленинградской олимпиады предыдущего года? Нечего даже и говорить, что в наше время это было бы абсолютно невозможно. Но тогда, в эпоху самых первых математических соревнований, во времена, когда скорость распространения узкоспециализированной технической информации была крайне невелика, подобные вопросы, конечно же, не воспринимались столь серьезно. Трудно было утверждать что-либо наверняка, хотя мне и показалось, что это (т.е. повторное использование уже опубликованной задачи) все же маловероятно – если даже и допустить, что москвичам так понравилась эта задача, что им без нее никак было не обойтись, то вполне достаточно было бы слегка видоизменить ее условие; сделать это было бы совсем несложно. Поэтому у меня возникла – впрочем, ни на чем не основанная – гипотеза, что за давностью лет произошло этакое произвольное «наложение» варианта ММО-1935 на воспоминания об ЛМО-1934.

В кратких воспоминаниях другой участницы первой олимпиады М.Л.Александровой ([4]) приводились некоторые дан-

<sup>1</sup> Сергей Васильевич Валландер – победитель первой ЛМО, в будущем доктор физ.-мат. наук, член-корр. АН СССР, декан математико-механического факультета ЛГУ в 1965–1973 гг.

ные про организацию самого соревнования, но, увы, задач олимпиады она не помнила.

Ясно было, что однозначно разрешить это небольшое и, вообще говоря, не очень существенное разночтение не представлялось возможным. Оставалось только надеяться, что когда наши отдаленные потомки изобретут машину времени, то один из них посетит Ленинград весной 1934 года, и тогда благодарное человечество наконец-то получит в свое распоряжение полный список задач первой в мировой истории городской математической олимпиады.

Однако, почти тридцать лет спустя, при подготовке переиздания сборника ЛМО я предпринял дополнительные поиски в интернете – в основном с целью разыскать какие-либо фотографии тех лет. И довольно скоро (в январе 2020 года), почти по чистой случайности, я натолкнулся на выпуск сборника «Математическое просвещение», изданного в Москве в 1935 году. В этой книжке была опубликована статья И.И.Чистякова [2] под длинным официозным названием «Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А.С.Бубнова». Нечего и говорить, что я был приятно ошеломлен и обрадован.

Во-первых, Чистяков указывал точную дату олимпиады (среда, 18 апреля).

Во-вторых, он более подробно описал схему организации олимпиады, а также сообщил, сколько именно школьников приняло участие во втором и третьем (заключительном) туре – 307 и 48 человек соответственно.

В-третьих, и это было самое важное, в приложении к этой заметке были перечислены одиннадцать задач олимпиады. Впервые за много лет были найдены хотя бы некоторые задачи первой в СССР математической олимпиады!

Вопрос об атрибуции в статье был также полностью опущен, но в данном случае речь шла о работе, написанной по горячим следам только что прошедшего соревнования. Естественно было предположить, что либо сам автор статьи, либо редакция сборника получили список задач непосред-

ственно от организаторов первой ЛМО – в частности, с января 1935 года главный «идеолог» Ленинградской олимпиады Борис Николаевич Делоне уже жил и работал в Москве (в связи с переездом туда Математического института Академии наук СССР).

К сожалению, в статье не было указано, какие именно из этих задач относятся к первому (тренировочному), второму или третьему туру олимпиады. Задача про раскраску кубика отсутствовала (что, однако, ничего не означало, ибо из текста явствовало, что приложение содержало лишь набор из нескольких избранных задач олимпиады).

Однако сам факт обнаружения этой заметки послужил для меня толчком к дальнейшим поискам. Не прошло и нескольких месяцев, как в середине мая 2020 года (хоть какой-то прок от печального коронавирусного карантина), продолжая «блуждать» по просторам мировой сети, я обнаружил там копию журнала «Математика и физика в средней школе» (предшественника журнала «Математика в школе») за 1934 год, в котором была опубликована аналогичная статья того же автора [1]. Название этой статьи было более лапидарным («Итоги Ленинградской математической олимпиады»), и за исключением некоторых малосущественных деталей она практически не отличалась от статьи [2]. Однако в этой версии сразу за основным текстом следовало приложение, содержащее комплект задач третьего тура ЛМО-1934!

В уже упомянутых выше воспоминаниях М.Л.Александрова написала, что каждый участник заключительного тура олимпиады получил две задачи – первая по алгебре, вторая по геометрии. Именно так и выглядит это приложение к статье [1] – оно состоит из восьми вариантов по две задачи. Необходимо указать, что по непонятной причине (не поместилась? потеряна? случайно пропущена при наборе?) отсутствует задача 5(a) – впрочем, не исключено, что эта задача содержится в списке из приложения к статье [2] – см. ниже задачи 1934.X, 1934.Y и 1934.Z.

Теоретически возможно, что это все еще не полный набор всех вариантов. Мне лично верится с трудом в то, что жюри приготовило по отдельному варианту для каждого из 48 участников, тем более что их количество не было заранее известно. Идея многовариантной олимпиады состояла в том, чтобы исключить возможность списывания – даже тогда, на самой первой олимпиаде, на это уже обращали внимание, что, впрочем, и не удивительно. Однако восьми вариантов вполне должно было хватать – Александра вспоминает, что участников рассадили в несколько аудиторий Главного здания университета. Видимо, организаторы хотели гарантировать, чтобы в каждом помещении сидели школьники с разными вариантами условий – тогда такая организация проведения устного тура выглядит вполне разумно. Конечно, существует ненулевая вероятность того, что количество вариантов могло быть и больше, скажем десять или двенадцать. Но в таком случае, однако, было бы трудно объяснить, почему публикация не содержала полный комплект задач.

Что касается задачи о раскраске кубика, то нельзя полностью исключить, что она была включена в рассылавшийся по школам список тренировочных задач, на основе решения которых школы формировали свои «команды» на второй тур (этот школьный этап был вполне заслуженно назван первым туром ЛМО-1934). Такое предположение теоретически могло бы объяснить воспоминания одного из участников, что эта задача была самой первой задачей олимпиады. Я, однако, честно признаюсь, что эта гипотеза не кажется мне правдоподобной. В статье [2] упомянуто, что список задач первого тура состоял из «90 задач из различных разделов алгебры, геометрии и тригонометрии»; кстати, многие из них также перечислены в приложении к этой статье под заголовком «Упражнения для учащихся», другой список тренировочных задач приведен в предыдущем выпуске (1934, №3) того же журнала «Математика и физика в средней школе»; ни одной нестандартной задачи в этих списках нет.

Если же речь шла о втором туре олимпиады, то он, как и третий тур, был составлен по многовариантному методу, что опять-таки исключало возможность использования такой задачи. Не исключено, однако, что вопрос про кубик был одной из дополнительных задач, которые предлагались школьникам, решившим все задачи основного варианта.

Как бы то ни было, теперь мы можем с достаточно серьезным основанием заявить, что вопрос о задачах основных вариантов заключительного тура первой в истории городской математической олимпиады практически разрешен. Любители математических соревнований, наконец-то, могут ознакомиться со многими задачами Ленинградской математической олимпиады 1934 года. И кто знает, может быть, среди тех, кто читает эти строки, найдутся потомки ленинградских школьников, учителей, студентов или профессоров, в чьих давно забытых семейных архивах до сих пор хранятся задачи или фотографии с олимпиад других довоенных лет. Будем надеяться, что нам не придется ждать еще почти девяносто лет до следующей публикации, посвященной истории Ленинградских городских математических олимпиад. Впрочем, на худой конец, у нас всегда остается вариант с машиной времени.

\* \* \*

А теперь – задачи третьего тура первой ЛМО (набор из восьми вариантов, перечисленных в статье [1]). В некоторых местах мною исправлены опечатки и заменена устаревшая терминология.

### Третий тур. 10-й класс. 1934 год

**1934.01.** (а) Покажите, что если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – стороны треугольника, то корни уравнения

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

будут мнимые<sup>2</sup>.

(б) Треугольник скользит по своей плоскости так, что две его стороны все время

---

<sup>2</sup> Т.е. эти корни не могут быть вещественными числами.

проходят через две неподвижные точки. Покажите, что третья сторона сохраняет постоянное расстояние от третьей неподвижной точки.

**1934.02.** (а) Покажите, что если  $\alpha$  и  $\beta$  – корни уравнения

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

а  $\gamma$  и  $\delta$  – корни уравнения

$$x^2 + qx + 1 = 0,$$

то

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

(б) Пересеките данную трехгранную пирамиду плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

**1934.03.** (а) Исключите  $\theta$  и  $\varphi$  из уравнений

$$a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta = m,$$

$$b \sin^2 \varphi + a \cos^2 \varphi = n,$$

$$a \operatorname{tg} \theta = b \operatorname{tg} \varphi.$$

(б) Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ ; через точку  $A$  проведена секущая окружностей в точках  $P$  и  $Q$ . Какую линию описывает середина  $M$  отрезка  $PQ$ , когда секущая вращается вокруг точки  $A$ ?

**1934.04.** (а) Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}.$$

(б) Две касательные к кругу неподвижны, а третья катится по кругу. Докажите, что отрезок третьей касательной, заключенный между первыми двумя, виден из центра под постоянным углом.

**1934.05.** (б) Три грани трехгранного угла с взаимно перпендикулярными ребрами пересекают шар по трем кругам. Докажите, что сумма площадей этих кругов не изменится, если повернуть этот трехгранный угол вокруг его вершины так, чтобы его грани не перестали пересекать шар.

**1934.06.** (а) Решите систему уравнений

$$x^2 = a + (y - z)^2,$$

$$y^2 = b + (z - x)^2,$$

$$z^2 = c + (x - y)^2.$$

(б) Покажите, что касательные к двум пересекающимся кругам, проведенные из произвольной точки на продолжении их общей хорды, равны между собой.

**1934.07.** (а) Докажите, что

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

(б) Докажите, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть среднее пропорциональное<sup>3</sup> между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных в концах этой хорды.

**1934.08.** (а) Докажите, что если  $\sec \alpha \sec \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$ , то  $\cos 2\gamma \leq 0$ .

(б) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке, делящей каждую из этих прямых в отношении 3 : 1.

\* \* \*

Здесь же перечислим и те несколько задач из статьи [2], которые не вошли в предыдущий список, – по всей видимости, они были предложены на первых двух турах. Не исключено, что одна из них является пропущенной задачей 5 (а).

**1934.X.** Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

при вещественных  $a$ ,  $b$  и  $c$  не имеет мнимых<sup>4</sup> корней.

**1934.Y.** Найдите предел величины

$$\left( \cos \frac{a}{x} \right)^x,$$

<sup>3</sup> То же самое, что среднее геометрическое.

<sup>4</sup> Т.е. не вещественных.

когда  $x$  неограниченно возрастает, принимаемая последовательно целые значения  $x = 1, 2, 3, \dots$  до бесконечности.

**1934.Z.** Докажите, что

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \dots + \frac{n+p}{(n+p+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+p+1)!}.$$

\* \* \*

Позволим себе несколько заключительных замечаний.

Во-первых, с более чем восьмидесятилетнего «расстояния» сразу видны определенные недостатки многовариантной олимпиады, особенно в ситуации, когда требовалось большое количество вариантов. Совершенно очевидно, что не все варианты ЛМО-1934 примерно равнозначны. Так, например, геометрическая задача первого варианта 1934.01(б), с нашей точки зрения, заметно сложнее, чем аналогичная задача шестого варианта. Аналогично, стереометрические задачи обычно сложнее для школьников, чем задачи по планиметрии. Нахождение предела в задаче 1934.04(а), скорее всего, вызывало у школьников большие трудности, нежели исключение переменных в 1934.03(а) или решение системы уравнений в 1934.06(а). Хотя никакой статистики у нас, увы, не имеется, но задача 1934.Y выглядит существенно более трудной для решения, нежели алгебраические задачи других вариантов.

Во-вторых, интересно обратить внимание на то, что школьникам, учившимся в старших классах обычных советских школ

середины 1930-х годов, здесь предлагались задачи по вычислению пределов и решению уравнений в комплексных числах. Контраст с математической программой современной средней школы налицо.

С другой стороны, если опять обратиться к сборнику [3], то мы увидим, что в вариантах московских олимпиад тех лет нет никаких пределов, комплексных чисел и т.п. Эти темы довольно быстро пропадают и из ленинградских олимпиадных задач. Был ли это кратковременный и географически локализованный эксперимент? Судя по всему, в течение следующих лет школьные программы были постепенно стандартизованы по всей стране и несколько упрощены – из них постепенно исчезли и пределы и комплексные числа.

### Литература

1. *И.И.Чистяков.* Итоги Ленинградской математической олимпиады. – «Математика и физика в средней школе», 1934, № 4 (М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1935).
2. *И.И.Чистяков.* Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А.С.Бубнова. – «Математическое просвещение», 1935, № 3 (М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935).
3. *А.А.Леман.* Сборник задач московских математических олимпиад. – М.: Просвещение, 1965.
4. *М.Л.Александрова.* Первая математическая олимпиада. – «Квант», 1984, № 9.
5. *С.Е.Рукшин, Н.М.Матвеев.* 50 лет математических олимпиад. – «Математика в школе», 1984, № 4.
6. *Д.В.Фомин.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994.
7. *С.Е.Рукшин.* Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге. Первые 50 лет. – Ростов-на-Дону: Издательский центр МарТ, 2000.

### Вниманию наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2610–М2613 предлагались на V Кавказской математической олимпиаде.

Задачи Ф2617–Ф2620 предложил С.Варламов.

## Задачи М2610–М2613, Ф2617–Ф2620

**М2610.** Вершины правильного стоугольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что можно выбрать 4 вершины этого стоугольника, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.

*Е.Бакаев*

**М2611.** Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB \neq AC$  (рис.1). Пусть  $M$  – середина отрезка  $AB$ ,  $K$  – середина дуги  $BAC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $P$  – точка, в которой серединный перпендикуляр к  $AC$  пересекает биссектрису угла  $BAC$ . Докажите, что точки  $A, M, K, P$  лежат на одной окружности.

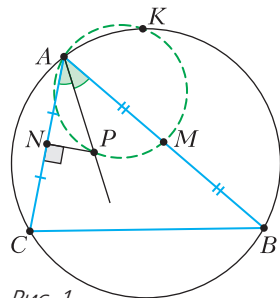


Рис. 1

*П.Кожевников*

**М2612.** Поле для игры – горизонтальная клетчатая полоска  $1 \times 2019$ . Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя выбирает  $n$  натуральных чисел и записывает их на доске, после чего Вася ставит фишку в одну из клеток. Далее на каждом следующем ходе Петя называет некоторое число  $s$ , которое выписано на доске, а Вася

переставляет фишку на  $s$  клеток, если это возможно, вправо или влево – по своему выбору. Если же переставить фишку ни влево, ни вправо на  $s$  клеток невозможно, то фишка остается на месте. При каком наименьшем  $n$  Петя может играть так, чтобы фишка за конечное количество ходов побывала на всех клетках полоски?

*М.Дидин*

**М2613\*.** Найдите все такие функции  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (т.е. определенные на множестве натуральных чисел и принимающие натуральные значения), что для любых натуральных  $m$  и  $n$  число  $f(m) + n - m$  делится на  $f(n)$ .

*М.Сагафьян (Иран)*

**Ф2617.** На заднем колесе велосипеда, имеющем радиус  $R = 35$  см, на спицах закреплен маленький фонарик. При езде велосипеда по прямой дороге со скоростью  $v = 7$  м/с линия, касательная к траектории движения фонарика, в некоторых точках составляет с горизонтом максимальный угол  $\alpha = 45^\circ$ . На каком расстоянии от оси заднего колеса находится фонарик? С какой максимальной и с какой минимальной по величине скоростью движется фонарик? (Дорога неподвижна.)

**Ф2618.** Четыре пластиковых стаканчика были вставлены друг в друга и во внутрен-



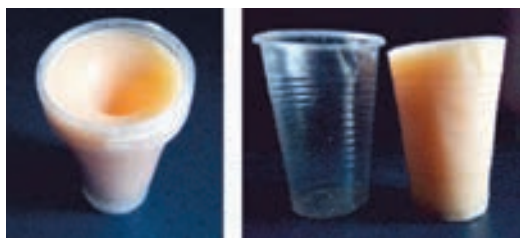


Рис. 2

ний стаканчик был налит парафин. Большое количество стаканчиков обеспечивало замедление процессов теплопередачи. За ночь парафин остыл и принял интересную форму (рис.2). Внешние поверхности парафина в точности копировали внутреннюю поверхность стенок стаканчика, в котором парафин застывал. А вот верхняя поверхность парафина, которая была горизонтальной, когда парафин был жидким, стала «не горизонтальной». Высота каждого стаканчика 9 см, диаметр в самом верху 6,4 см, емкость 200 мл. В углубление-ямку помещается 30 мл воды. В вертикальном сечении, проходящем через ось симметрии стаканчика, глубина ямки зависит от расстояния по горизонтали. Какой была бы эта зависимость, если бы стаканчик имел в точности цилиндрическую форму с соотношением высота/диаметр = 3/2?

**Ф2619.** Сосуд в форме куба с ребром  $a = 1$  м заполнен морской водой с удельным сопротивлением  $\rho = 0,3 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Две противоположные вертикальные грани куба сделаны из медных пластин, а остальные грани сделаны из полиэтилена (непроводящего материала). К медным граням подвели переменное напряжение  $U = 30 \text{ В}$ . Естественно, пошел ток, он был равен  $I_0 = 100 \text{ А}$ . Затем в центр куба поместили полиэтиленовый шарик. Оцените размер этого шарика, если лишняя вода вытекла, а ток стал равен  $I_1 = 99 \text{ А}$ ?

**Ф2620.** На фотографии (рис.3), взятой с сайта [webdiscover.ru](http://webdiscover.ru), видны радуга, море, строения, деревья, тени. Используя эту

фотографию и сделав разумные предположения, попробуйте оценить, на какой высоте над морем находился фотограф, получивший такой снимок.

**Решения задач М2598–М2601, Ф2605–Ф2608**

**М2598.** *Может ли в сечении какого-то тетраэдра двумя разными плоскостями получиться два квадрата: один – со стороны не больше 1, а другой – со стороны не меньше 100?*

**Ответ:** может.

Ниже мы предьявим нужную конструкцию, но начнем с наблюдения, которое помогает придумать нужный пример. В тетраэдре  $KLMN$  разделим точками  $X, Y, Z, T$  ребра  $KL, LM, MN, NK$  в одном и том же отношении, считая от вершин  $K$  и  $M$ , так что  $KX : XL = MY : YL = MZ : ZN = = KT : TN = a : b$ . Тогда сечение  $XYZT$  – параллелограмм, стороны которого параллельны противоположным ребрам  $KM$  и  $LN$ , причем  $XT = YZ = (a/(a+b))LN$  и  $XY = ZT = (b/(a+b))KM$ . Это легко установить с помощью подобий:  $LXY \sim LKM$  и т.д. Данное наблюдение подсказывает, что нужный нам пример можно искать среди тетраэдров, у которых перпендикулярны пары противоположных ребер (такие тетраэдры называются ортоцентрическими). При этом одну пару противоположных ребер можно сделать «довольно длинными», чтобы соответствующий квад-



Рис. 3

рат в сечении был «большим», а одно из ребер другой пары (а значит, и соответствующий квадрат в сечении) сделать «маленьким».

*Пример.* Рассмотрим ромб  $ABCD$  со стороны длины 200, в который можно вписать квадрат  $1 \times 1$  со сторонами, параллельными диагоналям ромба (такой ромб, очевидно, существует). Построим прямую призму  $ABCD A'B'C'D'$  с основанием  $ABCD$ , боковые грани которой – квадраты. Тетраэдр  $AB'D'C$  по построению имеет в горизонтальном сечении квадрат  $1 \times 1$ . С другой стороны,  $AB' \parallel DC' \perp CD'$  и  $AB' = CD' > 200$ , поэтому сечение плоскостью, проходящей через середины четырех ребер и параллельной  $AB'$  и  $CD'$ , – квадрат со стороной, равной  $\frac{1}{2}AB' > 100$ .

*М.Евдокимов, Л.Медников, А.Семенов,  
П.Кожевников*

**M2599.** *К Ивану на день рождения пришли  $2N$  гостей. У Ивана есть  $N$  черных и  $N$  белых цилиндров. Он хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или несколько) так, чтобы в каждом хороводе было хотя бы два человека и люди в цилиндрах одного цвета не стояли в хороводе рядом. Докажите, что Иван может устроить бал ровно  $(2N)!$  различными способами. (Цилиндры одного цвета неразличимы; все гости различимы.)*

Приведем два решения.

*Первое решение.* Занумеруем людей числами от 1 до  $2N$ . Есть как раз  $(2N)!$  способов расставить этих людей в ряд, поэтому достаточно установить взаимно однозначное соответствие между такими расстановками и разбиениями на хороводы.

Возьмем любую расстановку в ряд, наденем всем цилиндры в порядке ЧБЧБ...ЧБ слева направо. Мысленно разделим людей на пары (вида ЧБ) соседей. В первый хоровод берем подряд всех людей от начала и до той пары включительно, где стоит человек 1 (и замыкаем в хоровод); во второй хоровод берем следующие пары подряд до той включительно, где стоит

человек с наименьшим из оставшихся номеров (и замыкаем в хоровод), и т.д.

Обратно, по набору хороводов легко восстановить расстановку. Мысленно делим хороводы на пары вида ЧБ, которые образуются при обходе по часовой стрелке. Далее берем хоровод, где стоит человек 1, находим пару ЧБ, в которой он находится, «разрезаем» хоровод сразу за этой парой, вытягиваем в линию и ставим в начало расстановки. Далее берем человека с наименьшим номером из оставшихся, также разрезаем хоровод за его парой и подсоединяем к расстановке и т.д. Задача решена.

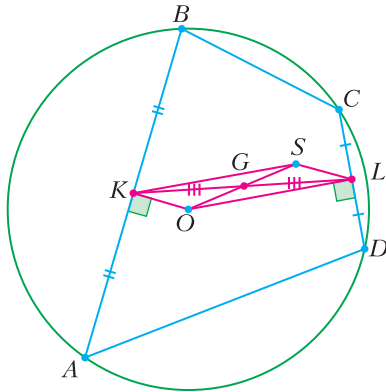
*Второе решение.* «Белых» гостей можно выбрать  $C_{2N}^N$  способами. Для каждого из них разбить «белых» гостей на циклы (длины от 1 до  $N$ ) можно  $N!$  способами (так как каждая перестановка однозначно разбивается в произведение независимых циклов). Для каждого из них вставить между «белыми» гостями «черных» можно  $N!$  способами. В итоге получаем  $C_{2N}^N \cdot N! \cdot N! = (2N)!$  различных балов. Ясно, что все балы рассмотрены, тем самым задача решена.

Кроме решений, в которых строится взаимно однозначное соответствие (к таким относятся оба решения выше), возможны также решения с использованием индукции. Отметим, что задача обобщается на большее количество цветов цилиндров  $k$  (и соответственно  $kN$  гостей), при этом для хороводов нужно требовать циклическое повторение фиксированного порядка цветов. Для случая трех цветов задача предлагалась на Московской математической олимпиаде 2020 года. Оба решения, изложенные выше, легко обобщаются на случай  $k$  цветов.

*Г.Погудин, Л.Медников, А.Семенов*

**M2600.** *Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Окружности с диаметрами  $AB$  и  $CD$  пересекаются в двух точках  $X_1$  и  $Y_1$ . Окружности с диаметрами  $BC$  и  $AD$  пересекаются в двух точках  $X_2$  и  $Y_2$ . Окружности с диаметрами  $AC$  и  $BD$  пересекаются в двух точках  $X_3$  и  $Y_3$ . Докажите, что прямые  $X_1Y_1$ ,  $X_2Y_2$ ,  $X_3Y_3$  пересекаются в одной точке.*

Пусть  $G$  – центр масс вершин  $A, B, C, D$  (т.е. единичных масс, расположенных в вершинах). Можно произвольным образом разделить вершины на пары и взять середины двух отрезков, соединяющих вершины в парах. Тогда  $G$  будет серединой отрезка, соединяющего указанные середины (это известный факт, который можно объяснить «перегруппировкой масс»: две единичные массы, расположенные в точках, меняем на массу, равную 2, расположенную в середине отрезка, соединяющего эти точки; центр масс системы от такой замены не изменится). Например, если  $K$  и  $L$  – середины сторон  $AB$  и  $CD$ , то  $G$  – середина  $KL$  (см. рисунок).



Пусть точка  $S$  симметрична центру описанной окружности  $O$  относительно  $G$ . Мы докажем, что  $S$  – искомая точка, через которую проходит каждая из прямых  $X_1Y_1, X_2Y_2$  и  $X_3Y_3$ .

Чтобы доказать, что  $S$  лежит на прямой  $X_1Y_1$ , соединяющей точки пересечения окружностей  $\Omega_{AB}$  и  $\Omega_{CD}$ , построенных на  $AB$  и  $CD$  как на диаметрах (т.е. на радикальной оси этих окружностей), достаточно понять, что степени точки  $S$  относительно окружностей  $\Omega_{AB}$  и  $\Omega_{CD}$  равны, т.е. что  $KS^2 - KA^2 = LS^2 - LC^2$  (поскольку центры  $\Omega_{AB}$  и  $\Omega_{CD}$  – точки  $K$  и  $L$ , а радиусы равны  $AB/2 = KA$  и  $CD/2 = LC$  соответственно).

Так как  $KOLS$  – параллелограмм, имеем

$$\begin{aligned} KS^2 - KA^2 &= OL^2 - (OA^2 - OK^2) = \\ &= OL^2 + OK^2 - R^2 = \\ &= OK^2 - (OC^2 - OL^2) = LS^2 - LC^2, \end{aligned}$$

что и требовалось. Аналогично,  $S$  лежит на  $X_2Y_2$  и  $X_3Y_3$ .

М.Дидин

**M2601.** Глеб задумал натуральные числа  $N$  и  $a$ , где  $a < N$ . Число  $a$  он написал на доске. Затем Глеб стал проделывать такую операцию: делить  $N$  с остатком на последнее выписанное на доску число и полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Могли Глеб изначально выбрать такие  $N$  и  $a$ , чтобы сумма выписанных на доску чисел была больше  $100N$ ?

**Ответ:** мог.

Как известно, сумма обратных к первым  $n$  натуральным числам (частичная сумма гармонического ряда) может быть сколь угодно велика. В частности, найдется такое  $m$ , что  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m+2} > 100$ .

Положим

$$\begin{aligned} N &= a + a_1 = 2a_1 + a_2 = 3a_2 + a_3 = \dots \\ &= \dots = ma_{m-1} + a_m = (m+2)a_m. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a > \frac{N}{2}, a_1 > \frac{N}{3}, a_2 > \frac{N}{4}, \dots \\ \dots, a_{m-1} > \frac{N}{m+1}, a_m > \frac{N}{m+2} \end{aligned}$$

и

$$a + a_1 + a_2 + \dots + a_m > 100N.$$

Осталось найти решение указанной системы в целых числах. Заметим, что  $a = a_1 + a_2, a_1 = a_2 + \frac{a_3}{2}, a_2 = a_3 + \frac{a_4}{3}, \dots$

$$\dots, a_{m-2} = a_{m-1} + \frac{a_m}{m-1}, a_{m-1} = \frac{(m+1)a_m}{m}.$$

Поэтому при  $a_m = m!$  все числа  $a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a, N$  будут целыми. Действительно,  $a_{m-1}$  делится на  $(m-1)!, a_{m-2}$  – на  $(m-2)!, a_{m-3}$  – на  $(m-3)!$  и т. д.

И.Митрофанов, Л.Медников, А.Семенов

**Ф2605.**<sup>1</sup> Два маленьких шарика – легкий от пинг-понга и тяжелый каучуковый – бросают вместе на пол с высоты  $h$  (шарик от пинг-понга – сверху, каучуковый – снизу; рис.1). Шарики падают на землю, и каучуковый шарик отражается от земли. Считая, что все столкновения шариков упругие, что между шариками есть небольшой зазор и шарик от пинг-понга много легче каучукового шарика, найдите, на какую высоту подпрыгнет шарик от пинг-понга. Размеры шариков много меньше высоты  $h$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

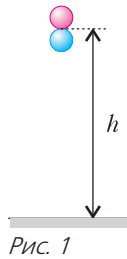


Рис. 1

Шарики будут падать с одинаковым ускорением  $g$  и, следовательно, вместе достигнут поверхности земли, имея одинаковые скорости. Поскольку по условию между шариками есть небольшой зазор, произойдут два столкновения: сначала каучуковый шарик столкнется с землей, а потом каучуковый шарик и шарик от пинг-понга столкнутся между собой. Найдем скорости шариков до и после столкновений. Скорости шариков до столкновения с землей определим по закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \text{ и } v = \sqrt{2gh}.$$

После упругого столкновения с землей каучуковый шарик меняет свою скорость на противоположную. Поэтому столкновение двух шариков будет выглядеть так: шарик с одинаковыми скоростями  $v$  движутся навстречу друг другу (рис.2,а). Перейдем в систему отсчета, связанную с нижним шариком.

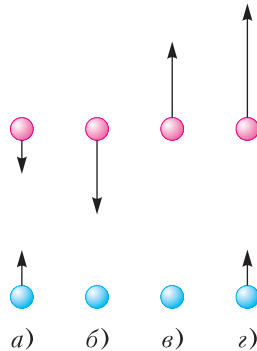


Рис. 2

В ней нижний шарик покоится, а верхний движется навстречу со скоростью  $2v$  (рис.2,б). Поскольку по условию масса нижнего шарика много больше массы верхнего, после столкновения нижний останется на месте, а верхний поменяет скорость на противоположную. Иными словами, в системе отсчета, движущейся вверх со скоростью  $v$ , верхний шарик имеет скорость  $2v$ , а нижний покоится (рис.2,в). Поэтому в системе отсчета, связанной с землей, нижний шарик имеет скорость  $v$ , направленную вверх, а верхний имеет скорость  $3v$ , направленную вверх (рис.2,г). Применяя теперь к шарикам закон сохранения энергии, найдем высоту подъема  $H$  по начальной скорости  $V$ :

$$H = \frac{V^2}{2g}.$$

Заключаем, что нижний (тяжелый) шарик подпрыгнет практически на ту же высоту  $h$ , с которой шарики падали, а верхний (легкий) подпрыгнет на высоту  $9h$ . Такой опыт легко сделать в домашних условиях, причем выглядит он весьма впечатляюще – верхний шарик действительно подпрыгивает на очень большую высоту.

**Ф2606.** Шесть одинаковых зацепляющихся зубчатых колес связаны рычагом, вращающемся с угловой скоростью  $\omega$  относительно центра колеса 1, которое является неподвижным (рис.1). Найдите угловую скорость шестого колеса.

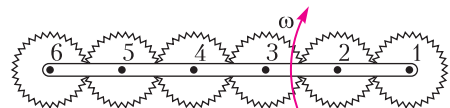


Рис. 1

Перейдем в систему отсчета, вращающуюся по часовой стрелке вместе с рычагом, связывающим колеса. В этой системе отсчета рычаг покоится, а колесо 1 вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , колесо 2 вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega$ , колесо 3 – против часовой стрелки и т.д. (рис.2). Вернемся теперь назад в систему отсчета, связанную с землей. Пусть в какой-то момент времени рычаг расположен так,

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2605–Ф2608 – С.Муравьев.

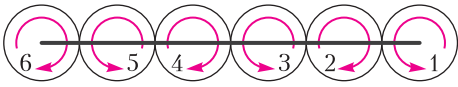


Рис. 2

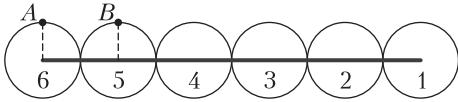


Рис. 3

как показано на рисунке 3. Проследим за вращением точки  $A$  четного (шестого колеса) и точки  $B$  нечетного (пятого колеса). Пусть после рассматриваемого момента времени прошел малый интервал времени  $\Delta t$ . Тогда рычаг повернулся на угол  $\Delta\varphi = \omega\Delta t$  по часовой стрелке. На такой же угол по отношению к рычагу (ведь колеса имеют угловую скорость  $\omega$  относительно рычага) повернутся и колеса: четное колесо – по часовой стрелке, нечетное колесо – против часовой стрелки. На рисунке 4

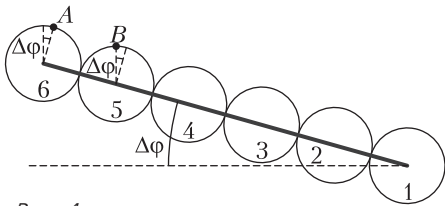


Рис. 4

показано положение рычага и колес в этот момент времени, а углы поворота рычага и колес изображены дугами. Из этого рисунка заключаем, что четное колесо повернется по отношению к своему начальному положению на угол  $2\Delta\varphi$  по часовой стрелке, а нечетное не повернется вообще. Это значит, что угловые скорости четного колеса и рычага складываются и дают удвоенную угловую скорость, а угловые скорости нечетного колеса и рычага вычитаются. Таким образом, при вращении рычага по часовой стрелке (при условии, что первое колесо закреплено) все четные колеса, а значит и шестое, будут вращаться вокруг своей оси по часовой стрелке с угловой скоростью  $2\omega$ , нечетные же колеса вообще не будут вращаться вокруг своей оси. Возможно также другое решение – без перехода в систему отсчета, связанную с рычагом. Поскольку первое колесо по ус-

ловию покоится, то линейная скорость точки второго колеса, связанной в данный момент с первым, равна нулю, скорость его центра  $v_1$  равна скорости рычага в этой точке:  $v_1 = 2r\omega$ . Поэтому это колесо должно вращаться с такой угловой скоростью  $\omega_2$ , что

$$2r\omega - \omega_2 r = 0, \text{ и } \omega_2 = 2\omega.$$

Отсюда находим линейную скорость точки второго колеса, которая контактирует с третьим колесом:

$$v_{23} = 2\omega r + \omega_2 r = 4\omega r.$$

Скорость центра третьего колеса  $v_3$  равна скорости рычага в той точке, где находится центр третьего колеса:

$$v_3 = 4\omega r.$$

Из двух последних формул видим, что и центр третьего колеса и его точка, касающаяся второго, имеют одинаковые скорости. Следовательно, третье колесо не вращается:

$$\omega_3 = 0.$$

Поэтому и его точка, касающаяся четвертого колеса, имеет такую же линейную скорость:

$$v_{34} = 4\omega r.$$

Значит, такую же скорость имеет и точка четвертого колеса, касающаяся третьего. С другой стороны, линейная скорость центра четвертого колеса  $v_4$  равна линейной скорости рычага в той точке, где находится центр четвертого колеса:

$$v_4 = 6\omega r.$$

Следовательно, четвертое колесо должно вращаться с такой угловой скоростью  $\omega_4$ , что

$$6\omega r - \omega_4 r = 4\omega r, \text{ и } \omega_4 = 2\omega.$$

И так далее. Из этой цепочки равенств видим, что угловая скорость всех нечетных колес равна нулю, а всех четных равна  $2\omega$ .

**Ф2607.** Инженеры-взрывотехники проводят испытание новых видов взрывчатки в открытом снизу толстостенном цилиндрическом «колоколе» массой  $M$  и радиусом  $R$ , стоящем на земле. Внутри

колокола на его оси на высоте  $h$  от поверхности земли взрывается заряд массой  $m$ . Заряд разбивается на множество мелких осколков, разлетающихся с одинаковыми скоростями равномерно во все стороны. Считая, что все осколки либо уходят в землю, либо застревают в стенках колокола, что масса колокола много больше массы осколков и все осколки долетают до колокола практически одновременно, найдите высоту, на которую он подпрыгнет над землей. Суммарная кинетическая энергия осколков равна  $E$ .

Когда осколки застревают в колоколе, они передают ему свой импульс. А так как суммарный импульс осколков равен нулю, то, если бы колокол окружал заряд со всех сторон, после взрыва он бы не двигался. Поэтому движение колокола связано с тем, что часть осколков попадают в землю и не передают колоколу свой импульс. По закону сохранения импульса импульс осколков, попадающих в колокол, равен импульсу осколков, попадающих в землю. Найдем последний.

В землю попадут все осколки, которые движутся после взрыва в конусе, опирающемся на основание колокола, с вершиной в точке взрыва (рис.1). Пусть при взрыве

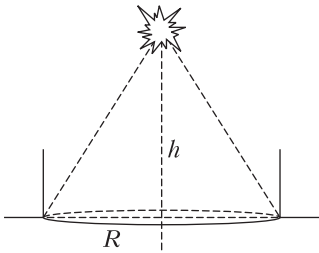


Рис. 1

образовалось  $N$  осколков (по условию число  $N$  много больше единицы,  $N \gg 1$ ). Поскольку суммарная энергия осколков равна  $E$ , то скорость каждого осколка можно найти из соотношения

$$\frac{\Delta m v^2}{2} N = E$$

( $\Delta m$  – масса каждого осколка,  $v$  – его скорость). Но так как  $\Delta m N = m$ , то скоро-

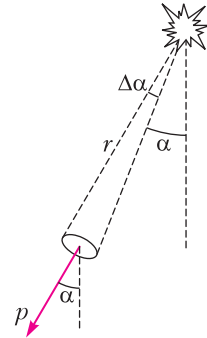


Рис. 2

сти всех осколков равны

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Рассмотрим теперь осколки, движущиеся внутри бесконечно узкого конуса с углом раствора  $\Delta\alpha$ , расположенного под углом  $\alpha$  к вертикали (рис.2). Количество осколков  $\Delta N$ , которые движутся внутри этого конуса, так относится к полному числу осколков  $N$ , как относится площадь основания этого конуса  $\Delta S$  к площади сферы, радиус которой равен высоте узкого конуса  $r$ , т.е.

$$\Delta N = \frac{\Delta S}{4\pi r^2} N.$$

Импульс этих осколков равен

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta N \Delta m v = \frac{\Delta S}{4\pi r^2} N \Delta m v = \\ &= \frac{\Delta S}{4\pi r^2} m v = \frac{\Delta S}{4\pi r^2} \sqrt{2mE}. \end{aligned}$$

Суммарный импульс этих осколков направлен вертикально вниз и равен сумме величин  $P$  кальных проекций импульсов осколков, попадающих в землю. Поэтому импульс осколков, попавших в землю, равен

$$P = \sum \Delta p \cos \alpha = \sum \frac{\Delta S \cos \alpha}{4\pi r^2} \sqrt{2mE}.$$

Но величина  $\Delta S \cos \alpha$  равна проекции площади основания рассматриваемого конуса на поверхность земли. Тогда

$$\sum \frac{\Delta S \cos \alpha}{r^2} = \frac{R^2}{4(R^2 + h^2)}$$

Отсюда находим суммарный импульс осколков, ушедших в землю:

$$P = \frac{R^2 \sqrt{2mE}}{4(R^2 + h^2)}.$$

Такой же импульс (но направленный вверх) получит колокол, следовательно, по закону сохранения импульса его скорость сразу после взрыва заряда будет равна

$$V = \frac{R^2 \sqrt{2mE}}{4(R^2 + h^2)M}$$

(здесь мы пренебрегли массой осколков, застрявших в колоколе). Высоту подъема колокола теперь можно найти по закону сохранения энергии:

$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{mER^4}{16(R^2 + h^2)^2 M^2 g}.$$

**Ф2608.** Рассмотрим модель передачи вращения между двумя параллельными осями, основанную на трении. Два одинаковых конуса – ведущий и ведомый – прижимаются друг к другу по образующей (рис. 1). Ведущий конус вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , к его оси приложен момент внешних сил  $M$ . С какой угловой скоростью вращается ведомый конус? Конусы прижаты друг к другу равномерно по образующей с силой  $N$ . Угол при вершине конусов  $\alpha$ , коэффициент трения между конусами  $\mu$ , высота конусов  $h$ .

За счет силы трения ведущий конус разгонит ведомый до какой-то угловой скорости и в стационарном режиме вращения угловые скорости обоих конусов не будут ме-

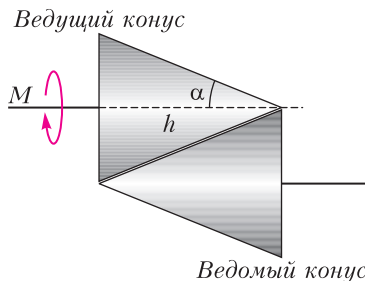


Рис. 1

няться. Но поскольку линейные скорости разных точек на поверхности каждого конуса разные, между касающимися друг друга точками конусов есть проскальзывание и должны действовать силы трения скольжения. Действительно, точки ведущего конуса, находящиеся дальше от его оси, имеют большие линейные скорости и должны опережать точки ведомого конуса, с которыми они контактируют. А точки ведущего конуса, находящиеся ближе к его оси, имеют меньшие линейные скорости и должны отставать от точек ведомого конуса, с которыми они контактируют. А это значит, что в разных точках поверхности каждого конуса сила трения действует по-разному. На ведущий конус действует тормозящая сила трения со стороны ведомого конуса в тех его точках, которые опережают точки ведомого, и разгоняющая сила трения в тех его точках, которые отстают от точек ведомого. Однако суммарная сила трения, действующая на ведущий конус, должна быть тормозящей, поскольку он вращается равномерно при действии на него момента внешних сил. Из условия равенства момента внешних сил и момента суммарной силы трения можно найти точки конусов, имеющие одинаковые линейные скорости (сечение равных скоростей).

Итак, пусть сечение равных скоростей находится на расстоянии  $h_0$  от вершины ведущего конуса (показано пунктиром на рисунке 2), сила нормальной реакции, действующая между конусами, равна  $N$ . Рассмотрим тонкий слой ведущего конуса толщиной  $\Delta x$ , лежащий на расстоянии  $x$  от

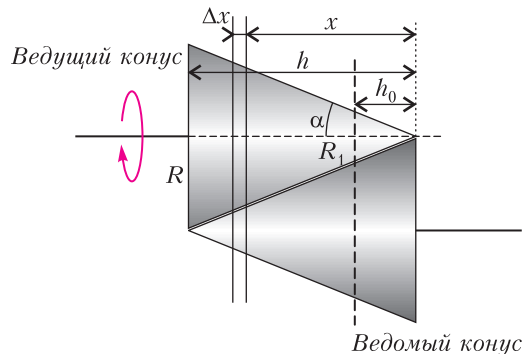


Рис. 2

его вершины. На этот слой действует сила трения

$$\Delta F_{\text{тр}} = \mu N \frac{\Delta x}{h}.$$

Эта сила создает момент относительно оси ведущего конуса, равный

$$\Delta M_{\text{тр}} = \mu N \frac{\Delta x}{h} r = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{h} x \Delta x,$$

где  $r$  – радиус рассматриваемого слоя. Поэтому суммарный тормозящий момент силы трения, действующей на ведущий конус, определяется соотношением

$$\Delta M_{\text{тр}}^{\text{торм}} = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{h} \sum x \Delta x,$$

при этом сумма распространяется на слои ведущего конуса, лежащие между его основанием и сечением равных скоростей.

А суммарный разгоняющий момент силы трения определяется аналогичным соотношением, но сумма распространяется на слои ведущего конуса, лежащие между сечением равных скоростей и вершиной:

$$\Delta M_{\text{тр}}^{\text{разг}} = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{h} \sum x \Delta x.$$

Суммы такого рода встречаются при вычислении работы силы упругости. Их, в частности, можно найти графически как площадь под графиком функции  $f(x) = x$  между значениями координат  $x = h$  и  $x = h_0$  для первой суммы и между  $x = h_0$  и  $x = 0$  для второй суммы. Вычисляя эти суммы, находим суммарный момент силы трения, действующей на ведущий конус со стороны ведомого:

$$\begin{aligned} M_{\text{тр}} &= \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} (h^2 - h_0^2) - \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} h_0^2 = \\ &= \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} (h^2 - 2h_0^2). \end{aligned}$$

Приравнявая этот момент моменту внешних сил, действующих на ведущий конус, получим

$$\begin{aligned} M_{\text{тр}} &= M, \quad \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} (h^2 - 2h_0^2) = M, \\ h_0 &= \sqrt{\frac{h^2}{2} - \frac{hM}{\mu N \operatorname{tg} \alpha}}. \end{aligned}$$

Формула для  $h_0$  имеет простой физический смысл. Как и должно быть, при  $M = 0$

сечение равных скоростей находится на расстоянии  $h/\sqrt{2}$  от вершины ведущего конуса, т.е. ближе к его основанию, чем к вершине, причем настолько, что тормозящий и разгоняющий моменты силы трения друг друга компенсируют. При увеличении  $M$  сечение равных скоростей сдвигается к вершине ведущего конуса. К такому же результату приводит уменьшение силы реакции или коэффициента трения. Подкоренное выражение становится отрицательным, когда силы трения между конусами недостаточно, чтобы затормозить ведущий конус. В этом случае постановка задачи становится неверной, поскольку ведущий конус не будет вращаться с постоянной угловой скоростью.

Из формулы для  $h_0$  легко найти угловую скорость ведомого конуса. Она должна быть такой, чтобы сечение равных скоростей находилось на расстоянии  $h_0$  от вершины ведущего конуса, или  $\omega h_0 \operatorname{tg} \alpha = \omega_1 (h - h_0) \operatorname{tg} \alpha$ . Отсюда получаем

$$\omega_1 = \omega \frac{h_0}{h - h_0}.$$

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<b>УСЛУГИ</b>	<b>АССОРТИМЕНТ</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Интернет-магазин www.bgshop.ru</li> <li>■ Кафе</li> <li>■ Клубные (дисконтные) карты и акции</li> <li>■ Подарочные карты</li> <li>■ Предварительные заказы на книги</li> <li>■ Встречи с авторами</li> <li>■ Читательские клубы по интересам</li> <li>■ Индивидуальное обслуживание</li> <li>■ Подарочная упаковка</li> <li>■ Доставка книг из-за рубежа</li> <li>■ Выставки-продажи</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Книги</li> <li>■ Аудиокниги</li> <li>■ Антиквариат и предметы коллекционирования</li> <li>■ Фильмы, музыка, игры, софт</li> <li>■ Канцелярские и офисные товары</li> <li>■ Цветы</li> <li>■ Сувениры</li> </ul>

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
www.biblio-globus.ru  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед



## Задачи

1. Вовочка написал в тетрадке числа от 1 до 13. Пять из них он умножил на 3, остальные на 7 и все произведения сложил. Могло ли у него в результате получиться 433?

*Н.Чернятьев*



2. Клетки доски  $5 \times 5$  закрашены в шахматном порядке, причем угловые клетки черные. Миша разрезал эту доску по сторонам клеток на пять пятиклеточных фигурок. Могло ли так оказаться, что более чем в половине фигурок больше половины клеток белые?

*Н.Чернятьев*



Задачи 1 и 2 предлагались на Костромском Турнире юных математиков, задача 3 – на Турнире математических боев имени А.П.Савина, задача 4 – на Математическом празднике.

3. В Стране Равных Возможностей во всех коробках одинаковое количество конфет. Каждый из 18 жителей этой страны, приглашая на свой день рождения гостей, покупает одну такую



коробку и делит поровну конфеты на всех, включая себя. За год один из жителей съел на днях рождения 39 конфет, двое – по 25, четверо – по 84, еще четверо – по 95 и семеро – по 65 конфет. Больше всех гостей пригласил Ваня. Сколько гостей было на Ваняном дне рождения?

*И.Раскина*

4. Три стороны четырехугольника равны, а его углы, образованные этими сторонами, равны  $90^\circ$  и  $150^\circ$ . Найдите два других угла этого четырехугольника.

*М.Волчкевич*



*Насильственное движение тела..., брошенно-го не перпендикулярно к горизонту, никогда не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой.*

Никколо Тарталья

*...мы получим бесконечное количество различных точек... они опишут требуемую кривую линию.*

Рене Декарт

*...график функции — кривая, начерченная свободным влечением руки.*

Леонард Эйлер

*Высь, ширь, глубь. Лишь три координаты. Мимо них, где путь? Засов закрыт.*

Валерий Брюсов

*...мы освободили понятие графика от всего случайного.*

Андрей Колмогоров

*Это один способ описать движение <табличный — А. Л.>. Есть и другой способ — графический.*

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакома вам Физика на языке функций и графиков?

Еще наши очень далекие предки понимали, что окружающие их явления взаимосвязаны. Но как эту связь точно выразить? Даже в Древней Греции ученые, вплотную подойдя к понятию функциональной зависимости, не смогли его сформулировать. Потребовалось еще почти полторы тысячи лет, чтобы изучение соответствий между переменными величинами, исследование траекторий движущихся точек, введение координат и буквенных обозначений привели математиков к возможности записать законы природы в виде функций, а также изобразить их графически. Тем самым физике (да и не только ей!) была оказана неоценимая услуга, значительно укрепившая ее исследовательский потенциал.

Увы, школьники зачастую пренебрегают применением графиков. А зря! Графики расширяют наши представления о физических процессах, делают их наглядными, а порой заметно облегчают решение задач. Попробуем в этом выпуске «Калейдоскопа» убедить вас в этом.

### Вопросы и задачи

**1.** Из пунктов  $A$  и  $B$  одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Через какое время они встретились, если автомобиль, выехавший из пункта  $A$ , доехал до пункта  $B$  через 9 часов после встречи, а автомобиль, выехавший из  $B$ , прибыл в  $A$  через 4 часа после встречи?

**2.** От движущегося поезда отцепляют последний вагон, но поезд продолжает двигаться с той же скоростью. Считая, что вагон движется с постоянным ускорением, найдите, во сколько раз путь, пройденный вагоном до его остановки, меньше пути, пройденного поездом к этому моменту.

**3.** За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь  $s = 5$  м и останавливается. Какой путь проходит тело за вторую секунду этого движения?

**4.** Концы стержня  $AB$  длиной  $l$  скользят, не отрываясь, по вертикальной стене и горизонтальному полу. Найдите траекторию точки  $C$  — середины стержня, считая, что в начальный момент стержень располагался, полностью прилегая к стене.

**5.** Шарик, находящийся на расстоянии  $L$  от вертикальной стенки и на высоте  $H$  от горизонтального пола, бросают горизонтально по направлению к стенке. При какой минимальной начальной скорости шарик после упругого удара отскочит от стенки дальше, чем на  $L$ ?

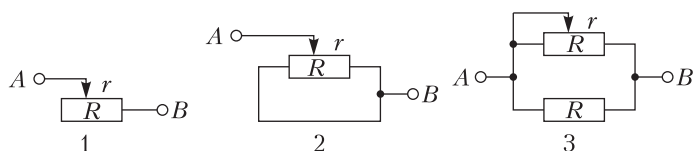
**6.** Кубик со стороной  $a$  и плотностью  $\rho_k$  плавает на поверхности жидкости, плотность которой  $\rho_j$ . Изобразите график силы, действующей на кубик, в зависимости от глубины погружения.

**7.** Начертите примерный график зависимости плотности воды данной массы от

температуры, изменяющейся в пределах от 0 до 8 °С.

8. С постоянной массой идеального газа проводят процесс, в котором давление прямо пропорционально объему. Постройте графики этого процесса в координатах  $(p, V)$ ,  $(p, T)$ ,  $(V, T)$ .

9. Для схем включения реостата, изображенных на рисунке, постройте графики



зависимости сопротивления цепи между точками  $A$  и  $B$  от сопротивления  $r$  правой части реостата (до ползунка).

10. Какая зависимость связывает частоту и длину электромагнитной волны, например при настройке радиоприемника?

#### Микроопыт

Оберните цилиндрическую свечу 2-3 раза листом бумаги (можно взять и батон колбасы в оболочке) и разрежьте наискосок острым ножом. Как вы думаете, график какой функции получится по краю разреза при разворачивании бумаги?

#### Любопытно, что...

...античная наука оставила будущим поколениям совсем мало кривых. Главные из них – окружность, а также эллипс, гипербола и парабола, появившиеся в трудах древнегреческого ученого Аполлония Пергского.

...с именем французского математика и физика (и экономиста!) XIV века Никола Оресма связана одна из первых попыток построения системы прямолинейных координат.

...неоднократно издававшийся трактат Оресма, возможно, оказал влияние на будущих ученых, в том числе и Декарта, ясно выразившего идею функциональной зависимости переменных величин и геометрического выражения этой зависимости, т.е. графика функции.

...задача о нахождении перемещения, совершаемого при равноускоренном движении, впервые была решена графическим методом в XVII веке Галилео Галилеем.

...Галилей полагал, что цепная линия, по которой провисают гибкие нерастяжимые нити и свободно подвешенные цепочки, совпадает с параболой. Это утверждение было опровергнуто Гюйгенсом, который также выяснил, что циклоида, а не окружность, как считал Галилей, обладает тем свойством, что тело, скользящее по ней без трения, совершает колебания с периодом, не зависящим от начального положения.

...по гиперболам движутся вокруг Солнца кометы, залетевшие издалека в Солнечную систему, и  $\alpha$ -частицы, пролетающие мимо атомного ядра при его бомбардировке; закон радиоактивного распада отражает экспоненциальный характер этого процесса; по логарифмическим спиральям закручены многие галактики, в том числе и наша. Наблюдать «живьем» эти зависимости практически невозможно...

...а вот в некоторых случаях графики функций видны, можно сказать, воочию. Так, металлическая линейка, сжатая с концов, изгибается по синусоиде (еще пример – в Микроопыте). В узкой щели, образованной двумя вертикальными стеклянными пластинками, опущенными в воду, четко вырисовывается гипербола свободной поверхности жидкости. Наклонив наполненный водой до середины цилиндрический стеклянный стакан, мы получим эллипс. Таких примеров немало, попробуйте их обнаружить вокруг себя.

#### Что читать в «Кванте» на эту тему (публикации последних лет)

1. «Когда помогают графики» – 2014, №1, с.47;
2. «Размышляем, решая задачу» – 2017, №9, с.31;
3. «Средняя скорость прямолинейного движения» – 2018, №2, с.48;
4. «И снова котенок на лестнице» – 2018, №4, с.36;
5. «Господин Великий Косинус» – 2019, №1, с.39;
6. «Кофе с экспонентами» – 2019, №7, с.25;
7. «Как выглядит график синуса» – 2020, №3, с.38; №4, с.11.

Материал подготовил А.Леоневич

# Пропала энергия. «Коварная» материальная точка

А. ВЛАСОВ

Классическая физика (в большей степени механика) плодотворно использует абстрактную модель «материальной» точки. Эта модель часто присутствует и в олимпиадных физических задачах. В данной статье рассматривается пример такой задачи. Можно надеяться, что ее решение будет хорошей иллюстрацией свойств материальной точки.

На одном из тренингов по решению задач экспромтом была придумана простенькая (как казалось) задача на «связанное» движение. «Актрисой» в этой задаче должна была выступать материальная точка, которая находится на ободе невесомого колеса. Отметим (и будем об этом помнить) предельную абстрактность физической схемы этой задачи.

Вот первоначальный сценарий задачи. Поставим колесо на горизонтальную плоскость. Будем удерживать его в положении, при котором материальная точка находится на уровне центра колеса (рис.1). Освобождаем систему. Как будет двигаться колесо и, соответственно, как будет двигаться материальная точка? На возможное движение наложим «связи»: колесо должно катиться по нижней плоскости без проскальзывания, покидать поверхность запрещено. Проскальзывание можно исключить микрозубчатым

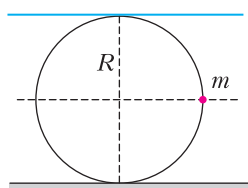


Рис. 1

зацеплением колеса с нижней поверхностью. Второе условие может обеспечить верхняя горизонтальная гладкая плоскость, расположенная на высоте диаметра обруча.

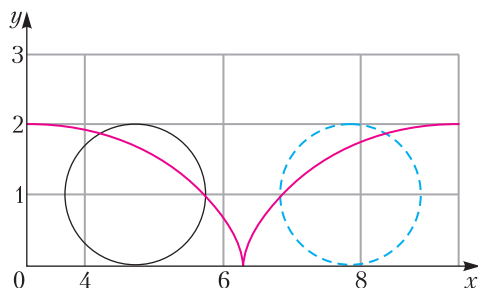


Рис. 2

Школьное (не очень «внимательное») решение привело нас к неожиданному результату. Очевидно, что при качении колеса материальная точка будет двигаться по отрезкам циклоиды (рис.2) и, в соответствии с законом сохранения энергии, она (точка) после падения на пол (нижнюю плоскость) должна вновь подняться на прежнюю высоту. Но известно, что при качении колеса (движении без проскальзывания) скорость центра колеса и орбитальная скорость равны по модулю. Тогда скорость точки обода, которая ложится на дорогу, становится равной нулю, так как в этот момент скорость центра колеса и орбитальная скорость противоположны (рис.3).

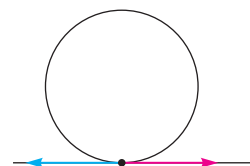


Рис. 3

Судьба материальной точки на ободе колеса оказалась печальной. Опустившись на дорогу, она остановилась! Движение исчезло! Проблему «пропажи» первоначальной потенциальной (гравитационной) энергии системы школьная физика не смогла решить.

Попробуем разобраться с возникшей проблемой. Во-первых, вернемся к реальной физике. Материальная точка – абстрактный объект физической теории, основой введения которого является аксиоматика геометрической точки. Материальная точка помимо массы может иметь электрический заряд, магнитный момент и другие физические параметры. Но для нее нет понятия вращения и, соответственно, момента инерции и момента импульса. В нашей задаче есть вращение. И эту реальность нужно восстановить.

С этих позиций сформулируем задачу так. На невесомом обруче радиусом  $R$  закреплен

небольшой массивный шарик. Радиус шарика  $r$ . Оставляя прежними условия связанного движения, исследуем физику движения колеса. (При опускании шарика на дорогу условия качения не должны нарушаться, соответствующую конструкцию системы колесо-шарик придумать не очень сложно.) Очевидно, что, осуществляя предельный переход  $r \rightarrow 0$  (при постоянной массе шарика), мы вернемся к первоначальному варианту задачи и сможем понять причину энергетического парадокса.

Приведем решение этого (реального) варианта задачи. Делаем рисунок с системой сил, действующих на колесо, и вводим систему координат (рис.4). Математика решения начинается с системы уравнений связи:

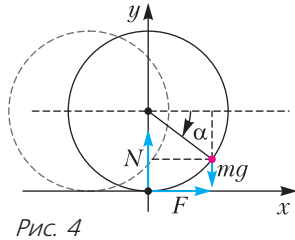


Рис. 4

$$\begin{cases} x = R \cdot \alpha, \\ x_0 = R(\alpha + \cos \alpha), \\ y_0 = R(1 - \sin \alpha). \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнения для скорости:

$$\begin{cases} \dot{x} = R \cdot \dot{\alpha}, \\ \dot{x}_0 = R(1 - \sin \alpha) \cdot \dot{\alpha}, \\ \dot{y}_0 = -R \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \end{cases}$$

и для ускорения:

$$\begin{cases} \ddot{x} = R \cdot \ddot{\alpha}, \\ \ddot{x}_0 = R(-\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}), \\ \ddot{y}_0 = R(\sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}). \end{cases}$$

Здесь  $x$  – координата центра колеса,  $x_0, y_0$  – координаты центра шарика.

Уравнения динамики для шарика (поступательное и вращательное движения) имеют вид

$$\begin{cases} N - mg = mR(\sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}), \\ F = mR(-\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}), \\ N \cdot R \cos \alpha - F \cdot R(1 - \sin \alpha) = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \ddot{\alpha}, \end{cases}$$

или в безразмерных переменных –

$$\begin{cases} n = 1 + \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}, \\ f = -\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}, \\ n \cdot \cos \alpha - f \cdot (1 - \sin \alpha) = \frac{2}{5} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \cdot \ddot{\alpha}. \end{cases}$$

Здесь  $n = \frac{N}{mg}$ ,  $f = \frac{F}{mg}$ ,  $j = \frac{2}{5} \left( \frac{r}{R} \right)^2$  – безразмерный момент инерции,  $\tau^2 = \frac{R}{g}$  – квадрат

безразмерного времени.

Закон сохранения энергии дает последнее уравнение:

$$mgR \cdot \sin \alpha = \frac{mR^2}{2} \left( (1 - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha + j \right) \cdot \dot{\alpha}^2.$$

В итоге имеем следующую систему уравнений в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} n = 1 + \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}, \\ f = -\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}, \\ n \cdot \cos \alpha - f \cdot (1 - \sin \alpha) = j \cdot \ddot{\alpha}, \\ 2 \cdot \sin \alpha = (2(1 - \sin \alpha) + j) \cdot \dot{\alpha}^2. \end{cases}$$

Параметром уравнений будем считать угол поворота колеса. Искомыми функциями являются: угловая скорость, угловое ускорение, нормальная и касательная составляющие реакции нижней плоскости. После решения системы получаем

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{2 \cdot \sin \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j}, \\ \ddot{\alpha} = \frac{(2 + j) \cos \alpha}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2}, \\ n = 1 + \frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j} - \frac{(2 + j) \cos^2 \alpha}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2}, \\ f = \frac{(2 + j) \cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2} - \frac{2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j}. \end{cases}$$

Все решения (функции) достаточно замысловаты. Дополнительные усложнения вносит параметр  $j$  (безразмерный момент инерции шарика). Но для компьютера это не является проблемой. В итоге получаем очень красивые и интересные графики, которые

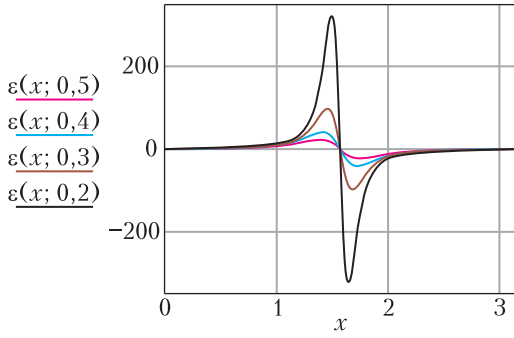


Рис. 5

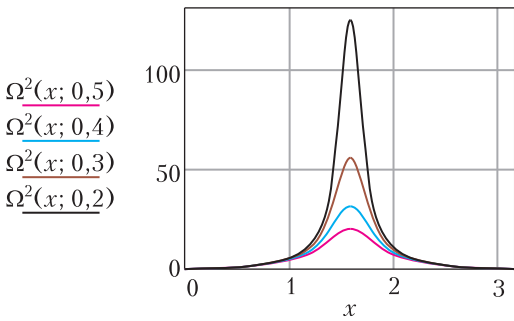


Рис. 6

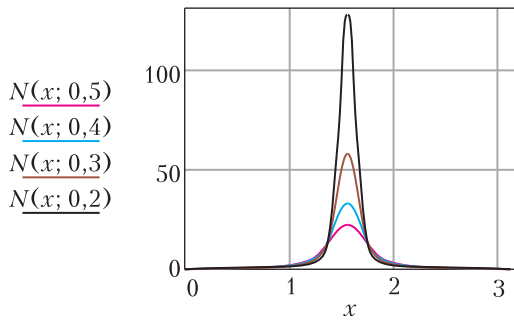


Рис. 7

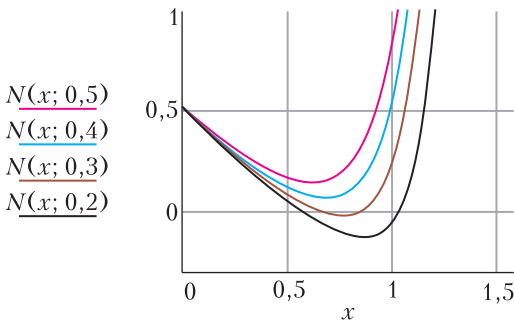


Рис. 8

построены в интервале угла поворота колеса  $(0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi)$ . В этом диапазоне угла  $\alpha$  шарик опускается на плоскость и вновь поднимается на прежнюю высоту.

График зависимости углового ускорения от угла поворота колеса (рис.5) построен при различных значениях относительного радиуса шарика  $(\frac{r}{R} = 0,5; 0,4; 0,3; 0,2)$ . Все последующие графики построены в этом же диапазоне размеров шарика.

На рисунке 6 приведен график квадрата угловой скорости. При касании шарика нижней плоскости потенциальная (гравитационная) энергия полностью перекачивается в энергию вращения шарика. В этот момент угловая скорость вращения максимальна. Далее происходит обратный энергетический процесс.

График нормальной составляющей силы реакции плоскости представлен на рисунке 7. Даже для достаточно большого шарика  $(\frac{r}{R} = 0,2)$  амплитуда реакции плоскости превосходит силу тяжести шарика на два порядка. Интересная особенность графика проявляется при большом увеличении (рис.8). Видно, что при некотором значении радиуса шарика возникает область отрицательного значения нормальной реакции плоскости. В этой области углов поворота обруча «работает» верхняя плоскость – она должна прижимать обруч к нижней плоскости. При уменьшении радиуса шарика угловая область отрицательного давления расширяется.

Рисунок 9 представляет график силы трения (касательной составляющей силы реакции плоскости). Здесь опять же интересным является смена положительного значения на отрицательное. Первоначально сила трения разгоняет центр масс системы (обруч – шарик). Далее вплоть до касания шарика нижней плоскости система тормозится.

Приведенные графики показывают, что уменьшение радиуса шарика (уменьшение его момента инерции) ведет к увеличению амплитуд всех величин. Предельный переход к материальной точке неизбежно приводит к бесконечным амплитудам.

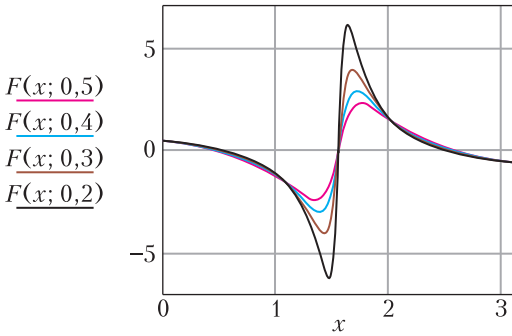


Рис. 9

Рассмотренное движение шарика, которое ему «навязывает» безмассовый обруч при отсутствии проскальзывания, можно рассматривать как удары о плоскость. Шарик как бы «прыгает» на плоскости. При этом амплитуда силового импульса зависит от момента инерции шарика. Теперь понятно, куда «исчезает» потенциальная (гравитационная) энергия системы. Она перекачивается в энергию вращения. Для материальной точки такой переход невозможен.

Дополнительно отметим, что среднее значение (во времени) нормальной составляющей реакции опоры (в безразмерном виде) ожидаемо равно 1 и, соответственно, среднее значение касательной составляющей реакции равно 0.

В заключение приведем «численный» вариант задачи.

**Условие.** На легком обруче радиусом  $R$  закреплен небольшой шарик массой  $m$  и радиусом  $r$ . Поставим обруч на горизонтальную плоскость. Будем удерживать его так, чтобы центр шарика находился на уровне центра обруча. Освобождаем систему. При дальнейшем движении обруча выполнены следующие условия: отсутствует проскальзывание, контакт с нижней плоскостью не нарушается. Движение обруча по вертикали ограничивает горизонтальная гладкая плоскость, расположенная на высоте диаметра обруча. Определите, при каком соотношении  $R/r$  максимальное значение нормальной реакции нижней плоскости будет больше силы тяжести шарика в  $n$  раз. Вычислите значение  $R/r$  при  $n = 1000$ . При этом значении  $R/r$  определите период колебаний обруча.

**Решение.** Используя готовое решение, находим

$$n = 1 + \frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j} - \frac{(2 + j) \cos^2 \alpha}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2} \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{2}{j}$$

Поскольку  $j = \frac{2}{5} \left( \frac{r}{R} \right)^2$ , получаем

$$n = 1 + 5 \left( \frac{R}{r} \right)^2,$$

откуда

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{n-1}{5}}.$$

При  $n = 1000$  отношение радиусов  $\frac{R}{r} \approx 14$ .

Для вычисления периода колебаний используем решение для угловой скорости:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2 \cdot \sin \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j}.$$

Это уравнение можно упростить, учитывая малое значение величины  $j = \frac{2}{5} \left( \frac{r}{R} \right)^2$ :

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Отсюда  $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$ , или

$$dt = \sqrt{\frac{1}{\sin \alpha} - 1} \cdot d\alpha.$$

Интегрируем:

$$T = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin \alpha} - 1} \cdot d\alpha$$

и для безразмерного «циклоидального» периода получаем

$$T_0 = 4 \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \approx 7,05,$$

а в обычных единицах –

$$T \approx 7,05 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

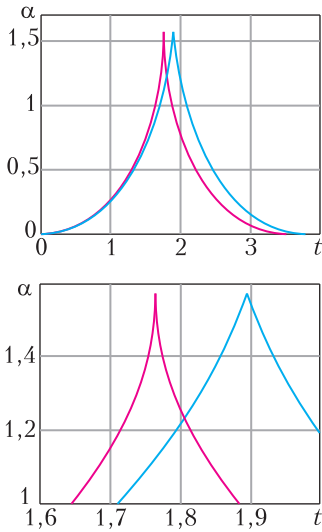


Рис. 10

Этот результат интересно сравнить с периодом вертикальных «колебаний» шарика на

упругой плите (шарик падает с высоты  $R$ )

$$T_0 = 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5,66 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Графическая иллюстрация к вычислению периода  $T$  дана на рисунке 10. На нем показана зависимость угла поворота колеса от времени. Для наглядности угол поворота изменяется в интервале  $(0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow 0)$ . Красный график соответствует движению обруча с материальной точкой. Сдвинутый синий график построен для движения обруча с достаточно большим шариком  $(\frac{r}{R} = 0,5)$ . Для маленького шарика «сдвиг» периода практически незаметен. На нижнем графике в увеличенном виде показаны пики кривых в момент прохождения нижней точки. Для материальной точки (шарика с очень малым диаметром) производная (угловая скорость) стремится к бесконечности.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# К ПОНЯТИЮ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

**Э.ВИНБЕРГ**

**Д**ЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО мыслится как результат бесконечной последовательности измерений со все возрастающей точностью. Давайте посмотрим, какой это может иметь смысл. Известно, что точность физических измерений не превосходит 15 значащих цифр, и есть принципиальные ограничения точности из-за прерывистости

материи. Но даже если бы этой трудности не было, все равно бесконечная последовательность измерений никогда не могла бы быть завершена! Поэтому данное выше «определение» действительного числа должно пониматься как мысленный образ.

Можно дать точное определение действительного числа, не используя слова «измерение». Назовем действительным числом всякую бесконечную последовательность рациональных чисел

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, \quad (1)$$

все меньше и меньше отличающихся друг от друга (с чем же еще сравнивать?). Последнее требование следует понимать так: для любого натурального числа  $m$  найдется такое  $n_0$ , что при  $n_1, n_2 > n_0$

$$|r_{n_1} - r_{n_2}| < \frac{1}{m}.$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию, называется *фундаментальной*.

Действительное число, определенное последовательностью (1), следует считать рав-

Опубликовано в сборнике «Математическая школа. Лекции и задачи. Выпуск II» (М.: МГУ, 1965).



ным действительному числу

$$r'_1, r'_2, \dots, r'_n, \dots,$$

если  $r_n - r'_n$  стремится к нулю при увеличении  $n$ , т.е. для любого натурального числа  $m$  существует такое  $n_0$ , что при  $n > n_0$

$$|r_n - r'_n| < \frac{1}{m}.$$

Что же это: игра ума или закреплённый в математическом определении результат познания природы? (Заметим, что к такому определению пришли далеко не сразу, оно выстрадано несколькими поколениями математиков. Но, может быть, это объясняется тем, что правила игры были очень запутанными?)

На этот вопрос не ответишь, если копаться в определении и пытаться физически истолковать каждый его пункт. Надо посмотреть, что можно с этим определением сделать. А сделать, оказывается, можно дифференциальное и интегральное исчисление. А с помощью этого исчисления можно решить разные физические задачи, например рассчитать прочность какого-нибудь сооружения или орбиту планеты. Это и есть решение нашего вопроса. Ведь если бы определение действительного числа было лишь игрой нашего ума, то ничего кроме продолжения игры из него не могло бы проистекать.

Правда, понятие действительного числа является идеализацией, оно лишь приблизительно отражает свойства реального мира. Но так всегда бывает в любой науке. Без идеализации ничего не сделаешь. Почитайте по этому поводу прекрасное рассуждение «Что такое сила?» в первом томе «Фейнмановских лекций по физике».

Рассмотрим теперь вопрос: какие задачи надо решать в математике? В этом отношении очень поучителен следующий пример из истории математики. Раньше очень интересовались получением формул для решения алгебраических уравнений

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (2)$$

вроде известной формулы для решения квадратного уравнения. Такие формулы для уравнений 3-й и 4-й степени были найдены итальянцами в XVI веке. Уравнения более высоких степеней не поддавались. В 1824 году Абель окончательно доказал, что для общих уравнений степени 5 и выше невозможно получить желанные формулы. Чтобы точно

понять смысл этого результата, надо знать, что в данном случае означает слово «формула». Имеется в виду определенная последовательность арифметических операций и извлечений корней (любых степеней), которые надо произвести над числами  $a_1, \dots, a_n$  и определенными целыми числами (например, в формулу для квадратного уравнения входит число 2). Абель доказал, что при  $n \geq 5$  не существует формулы, которая при любых  $a_1, a_2, \dots, a_n$  давала бы точное решение уравнения (2).

Оставалась возможность, что для каждого набора чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  существует своя формула. Через несколько лет после работы Абеля французский математик Эварист Галуа нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы такая формула существовала, и доказал, что для каждого  $n \geq 5$  можно указать числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , для которых эти условия не выполняются.

В ходе своих исследований Галуа ввел новые понятия и придумал новые методы, которые имели решающее значение для создания так называемой «теории групп». Начиная с конца XIX века теория групп получает различные применения в физике. Кроме того, она оказала плодотворное влияние на развитие других разделов математики.

Выходит, что Галуа старался не зря! Но вернемся к его задаче и посмотрим, что она представляет собой с наивной физической точки зрения. Любую величину можно с достаточной степенью точности выразить рациональным числом, т.е. представить как отношение целых чисел. В частности, это относится к решению уравнения (2), и задача Галуа при таком подходе становится бессмысленной! Она приобретает смысл только при абстрактном математическом толковании. Могло бы показаться, что этой задачей заниматься не стоит, однако мы видели, что это неверно.

Итак, не всякое математическое понятие и не всякая теорема имеет осязаемый физический смысл, но из этого не следует, что математика — это плод нашего воображения. Если представить реальный «физический» мир в виде почвы, на которой растет дерево математики, а математические теории — в виде ветвей этого дерева (идущих как от ствола, так и от других ветвей), то математика будет похожа на дерево баньян, некоторые ветви которого пускают корни в почву. К этому нужно еще

добавить, что ветви переплетаются между собой (не знаю, как обстоит дело с настоящим баньяном). Это убеждает нас в том, что каждая содержательная математическая теория, пусть даже очень абстрактная, отражает какие-то свойства материального мира и не может остаться бесполезной.

### Задачи

1. Найдите все фундаментальные последовательности, составленные из целых чисел.

2. Являются ли фундаментальными следующие последовательности рациональных чисел:

а)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ; б)  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ ;

в)  $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots$ ; г)  $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \dots$ ;

д)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots$ ; е)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots$ ;

ж)  $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{10}, \dots, \frac{n^2}{3n+1}, \dots$ ; з)  $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \dots, \frac{n^2-1}{n^2+1}, \dots$ ;

и)  $1, 1 + \frac{1}{1!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \dots$ ; к)  $0; 0,3; 0,33; 0,333, \dots$ ;

л)  $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$ ;

м) последовательность, определенная равенствами

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)?$$

3. Какие из фундаментальных последовательностей задачи 2 задают одно и то же действительное число?

4. Докажите, что если последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

фундаментальные, то последовательности

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots \\ a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots$$

также фундаментальные.

5. Как следует определять действия над действительными числами?

6. Можно ли рассматривать рациональные числа как частный случай действительных? Если да, то какие к тому основания и какие фундаментальные последовательности следует считать отвечающими рациональным числам?

7. Как следует определять неравенства между действительными числами?

8. Докажите, что между любыми двумя (различными) действительными числами найдется рациональное число.

9. Докажите, что если последовательность фундаментальная, то всякая ее подпоследовательность также фундаментальна и определяет то же действительное число.

10. Что такое  $\sqrt{2}$ ?

11. Докажите, что последовательности л) и м) из задачи 2 определяют  $\sqrt{2}$ . Вычислите  $\sqrt{2}$  с точностью до 0,001, используя последовательность м).

12. Пусть дана бесконечная десятичная дробь  $c_0, c_1 c_2 \dots$  ( $c_0$  обозначает целую часть,  $c_1, c_2, \dots$  — какие-то цифры). Рассмотрим последовательность,  $n$ -й член которой равен  $c_0, c_1 c_2 \dots c_n$ . Докажите, что эта последовательность всегда фундаментальна.

13. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными десятичными дробями, равны?

14. Докажите, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью.

15. Пусть  $c_0, c_1, c_2, \dots$  — целые числа, причем  $c_1, c_2, \dots$  положительны. Докажите, что последовательность подходящих дробей бесконечной цепной дроби  $c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots}}$  всегда фундаментальна.

16. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными цепными дробями, равны?

17. Докажите, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной цепной дробью.

18. Последовательность называется ограниченной сверху, если существует такое число  $r$ , что все ее члены не превосходят  $r$ . Есть ли среди последовательностей задачи 2 неограниченные?

19. Докажите, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

20. Докажите, что всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность фундаментальна.

21. Докажите, что последовательность,  $n$ -й член которой равен  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , фундаментальна. (Действительное число, определяемое этой последовательностью, обозначается через  $e$ .)

22. Докажите, что последовательность и) задачи 2 определяет число  $e$ . Вычислите его с точностью до 0,001.

Подробные сведения о построении системы действительных чисел можно найти в первом томе «Энциклопедии элементарной математики» (в статье И.В.Проскуракова) или, в другом изложении, в книге Э.Ландау «Основы анализа» (Госиноиздат, 1947).

# Своенравный ВОЛЧОК

М. СТАРШОВ

ЭТА ПРОСТЕНЬКАЯ КОНСТРУКЦИЯ под названием *спиннер* (рис.1), можно сказать, колесом прошла по свету, и кто-то даже назвал ее «обязательной офисной игрушкой в 2017 году». В самом деле, некоторое время спиннер имел и бездумно любовался его завораживающим вращением едва ли не каждый молодой человек примерно до четвертьвекового возраста.

Но мода всегда непостоянна, и сейчас трудно вспомнить, когда последний раз видел спиннер у кого-нибудь в руках.

Один такой волчок перешел по наследству от внука к деду, а тот и начал искать игрушке новое применение. Прежде всего были очевидны гироскопические способности вертушки. Поэтому возникла идея заставить ее вращаться не в руках, а на какой-то опоре. Действительно, спиннер хорошо чувствует себя, например, на вертикально закрепленном отрезке стержня от шариковой авторучки



Рис. 1

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200705>

(пока хватает его вращательной инерции).

Затем из канцелярской скрепки большого размера было согнуто миниатюрное подобие вилки переднего колеса велосипеда. В таком захвате игрушка хорошо вращалась. Но главное, можно было ощутить давление на пальцы при изменении направления ее оси вращения. Понятно же, гироскоп!

А вчера пришла мысль прикрепить вертушку к линейке и подвесить сооружение на ниточке (рис.2). Получилось интересно, линейка поворачивалась. Но быстро захотелось от линейки избавиться или, по крайней мере, сделать ее полегче.



Рис. 2

В «полезном мусоре» нашлась полосочка гетинакса с продольными прорезями. Через одну из них маленьким винтиком спиннер был прижат к гетинаксу, а за вторую прорезь все это подвешивалось на тонкой нитке (рис.3).

И вот здесь-то и происходит самое интересное – при быстром вращении спиннера пластинка начинает медленно раскручиваться вокруг вертикальной оси. Направление этого поворота зависит от направления вращения самого волчка, и больше того – при изменении направления вращения меняется характер поворота пластинки. В одном случае это простой медленный поворот, а в другом пластинка поворачивается скачками градусов по тридцать, своеобразными квантами. Со временем эта скорость несколько возрастает, а



Рис. 3

после остановки волчка меняется ее направление – это, видимо, раскручивается нитка.

Такое поведение кажется неожиданным для гироскопа, ведь на ракетах используется именно сохранение ориентации оси вращения гироскопа...

Сегодня цена этой игрушки настолько упала, что мировые производители наверняка утратили к ней интерес и массовое производство прекратилось. А жаль, было бы интересно поиграть с этим волчком, только с

заменой трех грузов одним тяжелым кольцом, чтобы волчок стал ближе к обычному гироскопу.

Полезно и поломать голову над тем, откуда берется сила, поворачивающая ось висящего на нити волчка (так сказать, призрака центробежной силы). И как проявляется в этом опыте закон сохранения момента количества движения системы.

Подумайте обо всем этом!

## НАМ ПИШУТ

# Параллелограмм замечательных точек

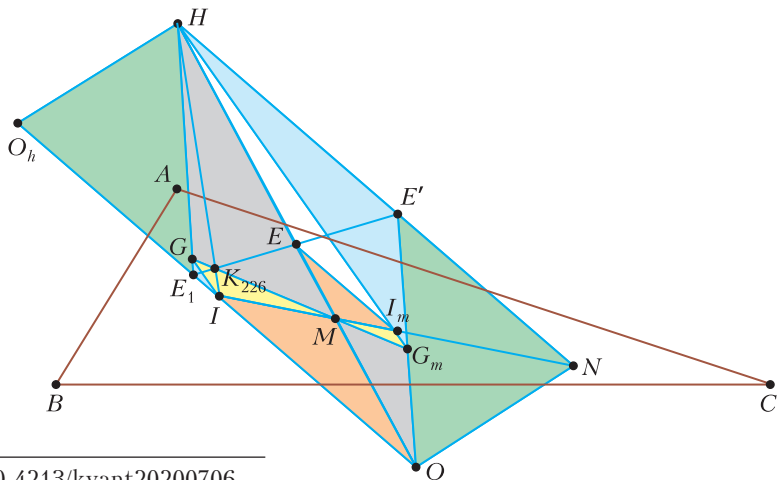
*К. КОЗЕРЕНКО*

**С**УЩЕСТВУЕТ ОГРОМНОЕ МНОЖЕСТВО замечательных точек, связанных с треугольником, более 30000 из них уже включены в известную энциклопедию Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) Кларка Кимберлинга (Clark Kimberling). Конечно, многие точки интересны не только сами

по себе, но в связи с другими замечательными точками.

Здесь мы опишем весьма регулярную конструкцию из многих замечательных точек (см. рисунок). Она во многом резюмирует известные факты и результаты из статьи К. Козеренко и П. Факанова «Птолемеева ось треугольника» («Квант» №2 за 2017 г.).

Используем обозначения:  $ABC$  – произвольный треугольник,  $M$  – его центр масс, т.е. точка пересечения медиан  $AA_m$ ,  $BB_m$ ,  $CC_m$ ,  $H$  – ортоцентр,  $O$  – центр описанной окружности,  $E$  – центр окружности девяти точек. Хорошо известно, что четыре перечисленные точки лежат на одной прямой (прямая Эйлера), при этом  $E$  – середина  $OH$ , а  $M$  делит отрезок  $OH$  в отношении  $OM : MH = 1 : 2$ . Это следует, например, из гомотетии



с центром в  $M$  и коэффициентом  $-2$ , переводящей серединный треугольник  $A_m B_m C_m$  в  $ABC$ , поскольку  $O$  является ортоцентром треугольника  $A_m B_m C_m$ :  $O = H_m$ . Здесь и далее индексом  $m$  обозначаем точку в серединном треугольнике, соответствующую точке в исходном треугольнике  $ABC$ .

Далее, пусть  $I$  – центр вписанной окружности, а  $N$  – точка Нагеля (напомним, что точкой Нагеля называют точку пересечения трех отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями). Известно, что  $I$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой (прямая Нагеля), при этом  $M$  делит отрезок  $IN$  в отношении  $IM : MN = 1 : 2$ . Точка  $I_m$  также лежит на прямой Нагеля (опять работает гомотетия с центром в  $M$ , переводящая  $A_m B_m C_m$  в  $ABC$ ), при этом  $IM : MI_m = 2 : 1$ , отсюда  $I_m$  – середина отрезка  $IN$ .

Сопоставляя расположения точек на прямых Эйлера и Нагеля, видим тройку гомотетичных с центром  $M$  треугольников:

$$IMO \sim MNH \sim I_m ME.$$

При этом:

$IMO \sim I_m ME$  (оранжевые треугольники) гомотетичны с коэффициентом  $2$ ;

$IMO \sim MNH$  – гомотетичны с коэффициентом  $1/2$ .

Из последнего вытекает, что  $\overline{NH} = 2\overline{OI}$ . Поэтому конструкцию можно достроить до параллелограмма, отразив  $O$  относительно  $I$  (отраженная точка –  $O_h$ ). Итак,

$HNOO_h$  – параллелограмм с центром  $E$ .

Добавляя в рассмотрение точку Жергонна  $G$  (т.е. точку пересечения трех отрезков, соединяющих вершины треугольника  $ABC$  и точки касания сторон с вписанной окружностью – вершины треугольника Жергонна) и соответствующую точку  $G_m$ , получаем новые пары гомотетичных с центром  $M$  треугольников:

$IMG \sim I_m MG_m$  (желтые треугольники) с коэффициентом  $2$ ;

$HMG \sim OMG_m$  (серые треугольники) с коэффициентом  $2$ .

И, как следствие, получаем параллельности:

$$I_m G_m \parallel IG;$$

$$OG_m \parallel HG.$$

В упомянутой статье «Птолемея ось треугольника» одной из ключевых точек являлся центр  $E_1$  окружности Эйлера треугольника Жергонна. Там было показано, что  $E_1$  лежит на прямых  $OI$  и  $HG$ , причем

$$\overline{IE_1} = \frac{r}{2R} \overline{OI};$$

$$\overline{GE_1} = \frac{r}{4R} \overline{HG}.$$

В частности,  $E_1$  лежит на стороне нашего параллелограмма. Пусть  $E'$  симметрична  $E_1$  относительно центра параллелограмма  $E$ , так что зеленые треугольники  $O_h HE_1$  и  $NOE'$  равны (симметричны относительно  $E$ ). Поскольку  $HE_1 \parallel OE'$  (иначе говоря,  $HE_1 OE'$  – параллелограмм), получаем, что

$G_m$  лежит на  $OE'$ .

Новое интересное наблюдение состоит в том, что

$I_m$  лежит на  $HG_m$

или, эквивалентно,

$$GI \parallel G_m H.$$

В следующем абзаце мы укажем возможную схему доказательства этой параллельности, но читатель может вывести ее самостоятельно из уже накопленных фактов.

*Схема доказательства параллельности*

$GI \parallel G_m H$ . Достаточно доказать, что  $GI$  пересекает прямую Эйлера в точке  $X$  такой, что  $\overline{MX} = 2\overline{HM}$  (или, эквивалентно,  $\overline{OX} = \overline{HO}$ ).

Это можно сделать, используя равенства  $\overline{IE_1} = \frac{r}{2R} \overline{OI}$  и  $\overline{GE_1} = \frac{r}{4R} \overline{HG}$ .

Теперь мы видим еще одну пару гомотетичных треугольников (соответствующие стороны параллельны):

$$IE_1 G \sim HE' G_m \text{ (голубые треугольники),}$$

и, значит,

$IH$ ,  $E_1 E$  и  $GM$  пересекаются в одной точке.

Начав рассказ с упоминания энциклопедии Кимберлинга, ею и завершим: последнюю полученную точку – центр гомотетии голубых треугольников – мы можем обнаружить в этой энциклопедии под номером 226.

# Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗФМШ НГУ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ. В ЗФМШ НГУ принимаются все желающие, без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов ЗФМШ приглашаются в Летнюю школу СУНЦ НГУ, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа. По результатам обучения в Летней школе проводится зачисление в СУНЦ НГУ.

Учащиеся, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускника Заочной школы СУНЦ НГУ.

Учителя общеобразовательных учреждений могут организовывать группы учащихся и проводить факультативные занятия по программам ЗФМШ, используя полученные методические материалы.

Всю подробную информацию можно найти на сайте ЗФМШ: <http://zfmsh.nsu.ru>

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11/1, Заочная школа СУНЦ НГУ  
Телефон: +7 (383) 363-40-66  
E-mail: [zfmsh@yandex.ru](mailto:zfmsh@yandex.ru)

## Первые задания на 2020/21 учебный год

Необходимо присылать решенное задание того класса, в котором будете учиться в Заочной школе.

### Математическое отделение

5 класс

1. Известно, что если первое из двух заданных чисел умножить на 3 и вычесть второе число, то получится 742893, а если второе число умножить на 3 и вычесть первое, то получится 257107. Найдите, чему

равна сумма заданных чисел.

2. Фигуру, изображенную на рисунке 1, разрежьте на 6 одинаковых частей.

3. В классе 52% девочек, причем девочек на одну больше, чем мальчиков.

Сколько мальчиков в этом классе?

4. У некоторой дроби числитель увеличили на 3, знаменатель увеличили на 4 и получили дробь, равную  $\frac{1}{3}$ . Найдите наименьшую дробь с таким свойством.

5. Известно, что сумму кубов первых  $n$  натуральных чисел можно вычислить по формуле  $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ . Может ли сумма кубов нескольких первых натуральных чисел равняться 14400?

6. На столе лежат 343 монеты. Двое игроков по очереди берут либо 3, либо 4 монеты. Выигравшим считается тот, кто забирает последние монеты. Кто выиграет в этой игре, если каждый старается сделать наилучший ход?

6 класс

1. У некоторой дроби со знаменателем, большим 4, числитель уменьшили на 3, знаменатель уменьшили на 4 и получили дробь, равную  $\frac{2}{3}$ . Найдите наибольшую дробь с таким свойством.

2. Фигуру, изображенную на рисунке 2, разрежьте на две одинаковые части.

3. В магазин завезли авторучки, в первую неделю продали 22% из этих авторучек, во вторую неделю продали  $\frac{1}{3}$  от оставшихся и всего

за это время продали 252 авторучки. Сколько всего авторучек было завезено в магазин?

4. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, у которых сумма цифр равна 10.

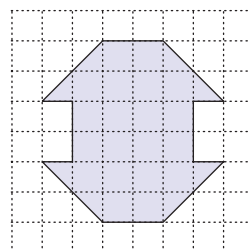


Рис. 1

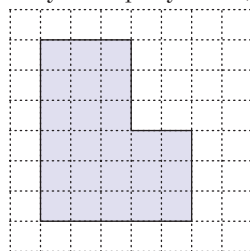


Рис. 2

5. Известно, что сумму первых  $n$  натуральных чисел можно вычислить по формуле  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел равняться 8000?

6. На столе лежат 729 монет. Двое игроков по очереди берут либо 4, либо 5 монет. Выигравшим считается тот, кто забирает последние монеты. Кто выиграет в этой игре, если каждый старается сделать наилучший ход?

7 класс

1. Найдите, чему равно значение выражения  $99 - (97 - (95 - \dots - (3 - 1))) \dots$ .

2. Найдите площадь изображенной на рисунке 3 фигуры, если площадь одной клетки равна  $0,25 \text{ см}^2$ .

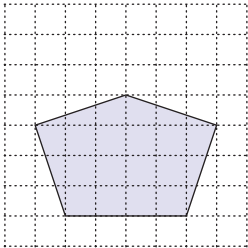


Рис. 3

3. От двух бревен отпилили по одинаковому куску, и первое бревно стало вдвое длиннее второго. После того как от них еще раз отпилили по такому же куску, второе бревно стало короче первого в четыре раза. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

4. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых используется ровно две различные цифры.

5. Найдите все целые значения  $m$ , при каждом из которых значение выражения  $\frac{2m-2}{2m+7}$  будет натуральным числом.

6. Докажите, что если у шестизначного числа цифры, симметрично расположенные относительно середины, равны, то это число делится на 11.

8 класс

1. Сто чисел 1 записали подряд и расставили знаки «+», «-» и скобки по следующей закономерности:

$$1 - (1 - (1 + (1 - (1 + (1 - \dots \dots - (1 - (1 - (1 + 1))) \dots))))).$$

Найдите значение этого выражения.

2. Буратино хочет купить букварь с цветными картинками, но ему не хватает 18 сольдо. На этот же букварь Мальвине не хватает 7 сольдо, а Пьеро не хватает 10 сольдо. Смогут ли Пьеро и Мальвина вместе купить один букварь на двоих?

3. В окружности  $\Sigma$  проведены хорда  $AB$  и вторая окружность  $S$ , которая касается хорды  $AB$  и окружности  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$ . Докажите, что прямая  $CD$  содержит середину одной из дуг окружности  $\Sigma$  с концами  $A, B$ .

4. Докажите, что если  $a + b + c = 0$ , то  $(ab + bc + ac)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2$ .

5. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых используется ровно две различные цифры.

6. Дана последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , в которой одно число равно  $(-1)$ , а остальные равны 1. Строится новая последовательность  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  по правилу:  $b_1 = a_1 \cdot a_2$ ,  $b_2 = a_2 \cdot a_3$ , ...,  $b_{n-1} = a_{n-1} \cdot a_n$ ,  $b_n = a_n \cdot a_1$ . Затем по такому же правилу строится третья последовательность  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  и так далее. Докажите, что ни одна из получающихся последовательностей не будет совпадать с начальной последовательностью  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

9 класс

1. 2020 чисел 1 записали подряд и расставили знаки «+», «-» и скобки по следующей закономерности:

$$1 - (1 - (1 + (1 - (1 - (1 + (1 - \dots \dots - (1 - (1 - (1 + 1))) \dots))))).$$

Найдите значение этого выражения.

2. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  одновременно по двум дорогам выезжают два автомобиля. Если первый автомобиль начинает ехать с некоторой постоянной скоростью  $v$  км/ч, то второй должен ехать со скоростью на 25 км/ч больше, чтобы одновременно с первым автомобилем приехать в пункт  $B$ . Если же второй автомобиль начинает ехать со скоростью  $v$  км/ч, то первый должен ехать со скоростью на 20 км/ч меньше, чтобы одновременно со вторым автомобилем приехать в пункт  $B$ . Найдите, чему равна скорость  $v$ .

3. В окружности проведена хорда  $AB$ , точка  $M$  – середина одной из дуг с концами  $A$  и  $B$ . Из точки  $M$  проведены две хорды  $MC$  и  $MD$ , пересекающие хорду  $AB$  в точках  $E$  и

*F.* Докажите, что треугольник  $MCD$  подобен треугольнику  $MFE$ .

4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 15 различных делителей, включая число 1 и само число.

5. Найдите количество четырехзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых используется ровно две различные цифры.

6. Решите уравнение  $x^2 = 2x + 8\sqrt{x} + 3$ .

### 10 класс

1. Найдите все корни уравнения  $x^4 - 7x^2 - 2x + 2 = 0$ , если известно, что число  $\sqrt{2} - 1$  является одним из его корней.

2. Из коробки, содержащей монеты по 5 копеек и по 10 копеек, монету в 10 копеек можно вынуть с вероятностью  $5/7$ . После того как в коробку добавили несколько монет по 5 копеек, вероятность выбора монеты в 10 копеек из коробки стала равной  $4/11$ . Чему равно наименьшее число монет по 5 копеек, которые добавлялись в коробку?

3. Даны две непересекающиеся окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой. Две внешние касательные к этим окружностям пересекаются с двумя внутренними касательными в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки и центры окружностей расположены на одной окружности.

4. При каждом натуральном  $n$  найдите сумму

$$S_n = 2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (n+1) \cdot 2^{n-1}.$$

5. Прямоугольник  $P$  расположен на клетчатой бумаге так, что его горизонтальные стороны и вертикальные стороны расположены на линиях сетки, а длины сторон равны 9 и 15 шагов сетки. Найдите количество всех других прямоугольников, расположенных внутри прямоугольника  $P$ , со сторонами, расположенными на линиях сетки, и не имеющих общих точек со сторонами прямоугольника  $P$ .

6. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 24 различных делителя, включая число 1 и само число.

### 11 класс

1. Вася задумал два натуральных числа, умножил их сумму на 8, а затем вычел из полученного числа квадрат одного из задуманных чисел. Оказалось, что результат

этих действий на 47 меньше произведения задуманных чисел. Какие числа задумал Вася?

2. Найдите все корни уравнения  $x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 2 = 0$ , если известно, что число  $2 + \sqrt{3}$  является одним из его корней.

3. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  описана вокруг окружности, а ее боковые стороны  $AB$  и  $CD$  касаются окружности в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что  $AK : KB = k_1$ ,  $DL : LC = k_2$ .

4. Из коробки, содержащей монеты по 5 копеек и по 10 копеек, монету в 10 копеек можно вынуть с вероятностью  $\frac{4}{7}$ . После того как в коробку добавили несколько монет по 10 копеек, вероятность выбора монеты в 10 копеек из коробки стала равной  $\frac{7}{9}$ . Чему равно наименьшее число монет по 10 копеек, которые добавлялись в коробку?

5. Найдите все корни уравнения

$$\cos 2x + \cos \frac{3}{4}x = 2.$$

6. Решением уравнения  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$  в натуральных числах называется упорядоченный набор  $(x_1; x_2; x_3; x_4)$  четырех натуральных чисел, сумма которых равна  $n$ . Найдите, сколько всего различных решений в натуральных числах имеет уравнение  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ .

## Физическое отделение

### 7 класс

1. Определите скорость движения кончиков минутной и часовой стрелок стенных стрелочных часов (необходимые параметры задайте самостоятельно).

2. Определите диаметр Солнца. Известно, что Луна, радиус которой 1700 км, находящаяся на расстоянии 380000 км, имеет такой же видимый размер, как и Солнце. Радиус орбиты Земли 150 млн км.

3. велосипедист и пешеход одновременно отправились в соседний город. В середине пути велосипедист проколол колесо и потратил час на его замену. В итоге в соседний город они прибыли одновременно. Чему равно расстояние между городами? Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода 6 км/ч.



4. Легковой автомобиль обгоняет стоящий на месте автопоезд за 2 с, а такой же автопоезд, движущийся со скоростью 50 км/ч, – за 6 с. Какова скорость легкового автомобиля?

5. Самолет, летевший из Новосибирска в Москву, совершил перелет за 4 ч, а такой же самолет, летевший навстречу, затратил 4,5 ч. Чему равнялась скорость ветра? Расстояние между городами 3000 км.

8 класс

1. Если на льдину, находящуюся в пресной воде, поместить груз в 300 кг, льдина целиком погрузится в воду. Такая же льдина в соленой воде полностью погружается под весом груза в 400 кг. Определите плотность соленой воды, если плотность льда  $910 \text{ кг/м}^3$ .

2. Резервуар в форме параллелепипеда имеет основание  $30 \times 50 \text{ см}$ . При каком минимальном уровне воды в резервуаре сила давления ее на одну из стенок превысит силу давления на дно?

3. Высота струи фонтана 6 м, а расход воды 1200 л/мин. Оцените мощность насоса. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

4. Оцените, какую механическую работу совершаете вы при подъеме по лестнице на пятый этаж и чему равна ваша средняя мощность.

5. Велосипедист и пешеход одновременно отправились в соседний город, находящийся на расстоянии 20 км. Доехав до цели, велосипедист пообедал и поехал обратно, на середине обратного пути встретив пешехода. Сколько времени занял обед? Скорость велосипедиста 20 км/ч, пешехода 5 км/ч.

9 класс

1. На плиту из охлажденного до температуры  $T_{\text{л}} = -22,5 \text{ }^\circ\text{C}$  льда поставили кубик из нагретой до  $T_{\text{м}} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$  меди. Оцените, на какую часть своей высоты опустится кубик, прежде чем вмерзнет в лед. Ответ приведите с точностью до 3 значащих цифр. Плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,92 \text{ г/см}^3$ , плотность меди  $\rho_{\text{м}} = 8,9 \text{ г/см}^3$ , удельная теплоемкость льда  $c_{\text{л}} = 2,1 \text{ Дж/(г} \cdot \text{град)}$ , удельная теплоемкость меди  $c_{\text{м}} = 0,39 \text{ Дж/(г} \cdot \text{град)}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330 \text{ Дж/г}$ . Небольшой наклон плиты обеспечивает сток талой воды.

Теплопроводность меди много больше теплопроводности воды и льда.

2. Деревянный брусок, плавая в пресной воде, выступает из нее на высоту  $h$ , а плавая в морской воде – на  $h_1$ . Определите плотность бруска, если плотность пресной воды  $\rho$ , а плотность морской воды  $\rho_1$ .

3. Остров делит реку на два русла, начиная с точки  $C$  (рис.4). Катер из пункта  $A$  левого русла идет в пункт  $B$  правого за время  $t_1 = 1 \text{ ч } 10 \text{ мин}$ , а обратный маршрут он проделывает за  $t_2 = 55 \text{ мин}$ . Скорость катера относительно реки в 5 раз больше одинаковой в двух руслах скорости ее течения. На сколько расстояние  $AC$  больше расстояния  $BC$ , если полная протяженность маршрута  $AB$  равна 20 км?

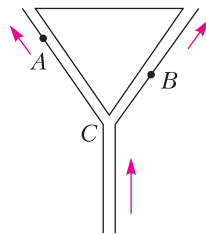


Рис. 4

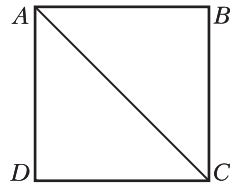


Рис. 5

4. Из однородной проволоки сделали квадрат и соединили этой же проволокой две диагонально противоположные вершины  $A$  и  $C$  этого квадрата (рис.5). Сопротивление между точками  $B$  и  $D$  равно  $R$ . Каково сопротивление между точками  $A$  и  $B$ ?

5. На маршрут  $ABCD$  в виде квадрата со стороной  $a$  из пункта  $A$  (рис.6) выходит автомобиль и далее движется с постоянной скоростью  $v$ . Через время  $\tau$ ,  $\tau < 2a/v$ , из того же пункта  $A$  в том же направлении выходит второй автомобиль и движется с той же скоростью. Через какое время после выхода второго автомобиля он впервые сблизится на минимально возможное расстояние с первым автомобилем?

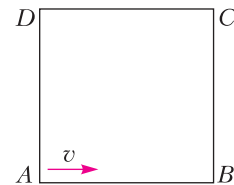


Рис. 6

10 класс

1. Решите задачу 5 для 9 класса.
2. Решите задачу 3 для 9 класса.

11 класс

3. Поезд берет большие песочные часы. Он трогается с места, разгоняется с постоянным ускорением и далее движется с постоянной скоростью. Через время  $T = 8$  мин 20 с после отправления поезд прошел 8 км. После отправления поезда на первых  $s = 4$  км его пути из верхнего отсека часов в нижний высыпалось  $m_1 = 300$  г песка, на следующих – еще  $m_2 = 200$  г. С каким ускорением разогнался поезд? Движение поезда не влияет на песочные часы.

4. Два цилиндрических груза одинаковой массы подвешены на нити, переброшенной через блок (рис.7,а). Один из грузов лежит на дне блока (рис.7,а). Один из грузов лежит на дне сосуда с водой, другой плавает в этом

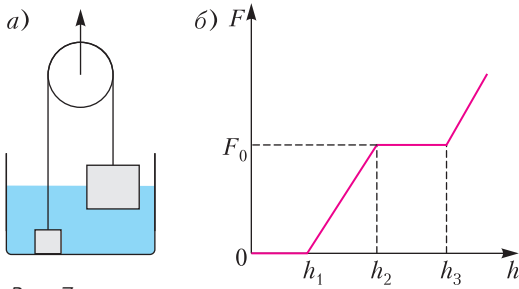


Рис. 7

сосуде, погрузившись на  $1/2$  своей высоты  $H$ . Блок медленно поднимают. На рисунке 7,б показан график усилия, прикладываемого к блоку, в зависимости от его высоты. Определите по графику плотность лежащего на дне груза. Блок невесомый, трения нет. Плотность воды  $\rho_0$ .

5. Нить продели через бусинку массой  $M$  и ее концы привязали к двум другим надетым на горизонтальную спицу бусинкам (рис.8). Первую справа бусинку (1) тянут с некоторой постоянной горизонтальной силой, в результате чего нить приобретает форму прямоугольного треугольника с прямым углом при висящей на ней бусинке (2) и углом  $\alpha$  при правой бусинке (1). Определите массу левой бусинки (3). Нить невесомая и нерастяжимая. Трения нет

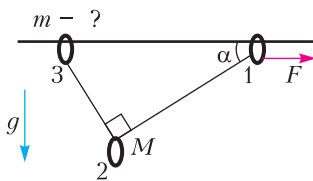


Рис. 8

1. Все резисторы в изображенной на рисунке 9 схеме имеют одинаковое сопротивление  $R$ . Чему равно сопротивление между точками  $A$  и  $B$ ?

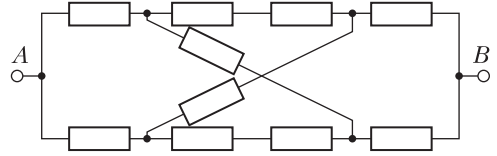


Рис. 9

2. Трубка расположена в вертикальной плоскости и имеет участок, наклоненный под углом  $\alpha$  к горизонту, и горизонтальный участок (рис.10). Внутри трубки находится шарик массой  $m$ , который с помощью упругой резинки жесткостью  $k$  перемещают с постоян-

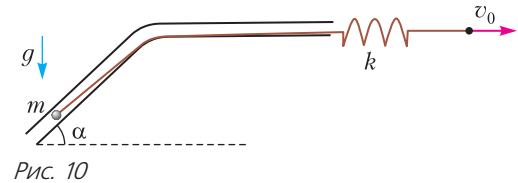


Рис. 10

ной скоростью  $v_0$  вправо. Свободный конец резинки продолжают тянуть со скоростью  $v_0$ , когда шарик переходит с наклонного на горизонтальный участок пути. Определите максимальную скорость шарика на горизонтальном участке пути. Трения нет, резинка невесомая, криволинейный участок трубки короткий, шарик поперек трубки не движется. Ускорение свободного падения  $g$ .

3. Ракета стартует с горизонтальной поверхности земли. Ее двигатель выключается через время  $\tau$  после старта на высоте  $H$  и на расстоянии  $s$  по горизонтали от точки старта. На каком расстоянии от места старта ракета упадет на землю? Во время работы двигатель сообщает ракете постоянное по величине и направлению ускорение. Ускорение свободного падения  $g$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. В цилиндрическом стакане сделана перегородка (рис.11). В ней имеется маленькое отверстие. Объем высотой  $H$  под перегородкой заполнен воздухом при атмосферном давлении  $p_0$ . Объем над перегородкой быстро до высоты  $h$  заполняют водой. Уровень воды в этом объеме медленно падает и со временем устанавливается. Определите ус-

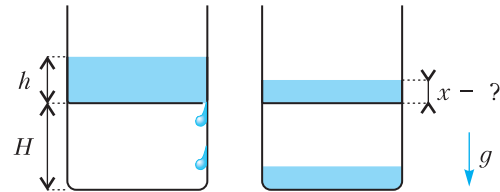


Рис. 11

тановившийся уровень воды над перегородкой. Отверстие в перегородке не пропускает пузырьки воздуха. Плотность воды  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ .

5. Два одинаковых маленьких шарика с зарядом  $q$  и массой  $m$  каждый связаны нитью

длиной  $2l$ . Нить переброшена через блок (рис.12), закрепленный на углу между горизонтальной и вертикальной поверхностями. Шарик отпускают в положении, когда

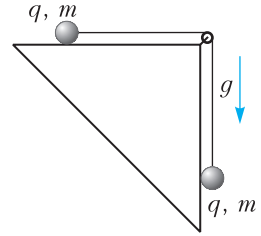


Рис. 12

они оба касаются поверхностей и находятся на равных расстояниях от блока. Определите ускорения шариков сразу после того, как их отпустили. Ускорение свободного падения  $g$ . При движении верхний шарик не отрывается от стола.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

# Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников страны. С 2015 года в заочной (дистанционной) форме проводится олимпиада школьников «РИТМ МИЭТ». Ежегодно в 9 секциях олимпиады принимают участие более 2000 человек. В 2018 году университет организовал очную Физико-математическую олимпиаду МИЭТ, которая проходит в нескольких десятках городов России и стран СНГ. С 2019 года также проводится олимпиада школьников «Электронный наномир».

Ниже приводятся задачи по физике, предложенные на заключительном туре олимпиады «РИТМ МИЭТ», варианты (для 10 и 11 классов) Физико-математической олимпиады МИЭТ и избранные задачи олимпиады «Электронный наномир».

Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

### Заключительный этап

1. После удара футболиста с центра поля мяч пролетел чуть выше перекладины и ударился о землю на расстоянии  $a = 5$  м за воротами. Определите максимальную высоту подъема мяча над полем, если перекладина ворот находится на высоте  $h = 2,5$  м, а расстояние от центра поля до ворот  $l = 50$  м. Сопротивлением воздуха пренебrecь.

2. Бревно перемещают волоком по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью, прикладывая к его концу силу, направленную под углом  $\alpha = 75^\circ$  к горизонту (рис.1). При этом бревно составляет с горизонтом угол

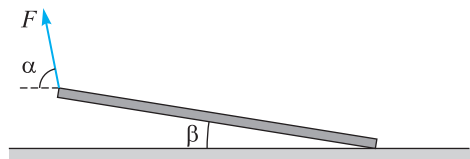


Рис. 1

$\beta = 15^\circ$ . Определите коэффициент трения скольжения бревна по поверхности.

3. Тележка может ускориться за счет выстрела установленной на ней пушки. На горизонтальной поверхности выстрел может разогнать тележку из состояния покоя до максимальной скорости  $v_1 = 1,25$  м/с. Артиллерист-исследователь решил достичь большей скорости. Он сначала съехал на тележке с горки высотой

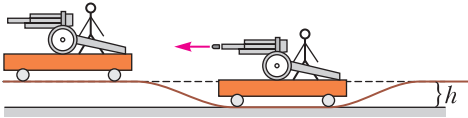


Рис. 2

$h = 1,25$  м, в нижней точке произвел горизонтальный выстрел, а затем по инерции поднялся вместе с тележкой на прежний горизонтальный уровень (рис.2). Чему равна скорость тележки после этого? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Можно ли подобным способом разгонять космические аппараты, сначала падая на планету, а затем на большой скорости включая разгонный ракетный двигатель?

4. В закрытом сосуде объемом  $V_1 = 5$  л находится воздух с относительной влажностью  $\phi_1 = 60\%$ . Определите относительную влажность  $\phi$  воздуха в этом сосуде после того, как в него закачают еще  $V_2 = 2$  л воздуха с относительной влажностью  $\phi_2 = 70\%$ . Температура воздуха постоянная.

5. Конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  зарядили до напряжений  $U_1 = 300$  В и  $U_2 = 200$  В и соединили в цепь, как показано на рисунке 3. До какого

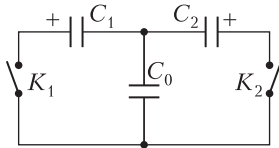


Рис. 3

максимального напряжения можно зарядить первоначально незаряженный конденсатор  $C_0$ , замыкая и размыкая в определенной последовательности ключи  $K_1$  и  $K_2$ ? Емкости всех трех конденсаторов одинаковые.

6. После размыкания ключа  $K$  в схеме, изображенной на рисунке 4, показания вольтметра изменились в  $n = 1,9$  раза. Определите сопротивление вольтметра, если сопротивление каждого резистора  $R = 100$  Ом, а сопротивление источника постоянного напряжения пренебрежимо мало.

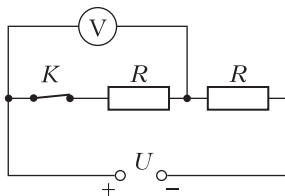


Рис. 4

## Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

### Вариант 1

1. Тележка налетает на брусок. Сразу после столкновения тележка и брусок движутся в одном направлении со скоростями  $v_t = 2$  м/с и  $v_b = 3$  м/с (рис.5). Через какое время  $\tau$  после первого столкновения произойдет второе? Тележка между столкновениями движется равномерно, а брусок равнозамедленно с ускорением  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>.

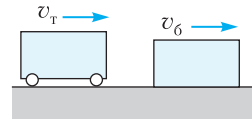


Рис. 5

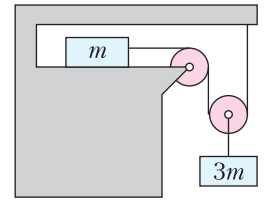


Рис. 6

2. На горизонтальном столе находится брусок массой  $m = 1$  кг, соединенный с грузом массой  $3m$  с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей и двух невесомых блоков, как показано на рисунке 6. Прямолинейные отрезки нити у подвижного блока вертикальны, нить, прикрепленная к бруску, горизонтальна. Коэффициент трения бруска по столу  $\mu = 0,45$ . а) Определите ускорение груза массой  $3m$ . б) Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску, чтобы груз опускался с постоянной скоростью? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. Из легкой жесткой проволоки сделан квадрат  $ABCD$ , в вершинах  $B$ ,  $C$  и  $D$  которого закреплены одинаковые точечные массы. Квадрат может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через вершину  $A$  (рис.7). Первоначально квадрат удерживают неподвижно в положении, когда его сторона  $AB$  горизонтальна, а затем без толчка отпускают. Определите максимальную скорость вершины  $D$  при последующем движении квадрата. Длина стороны квадрата  $a = 50$  см. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

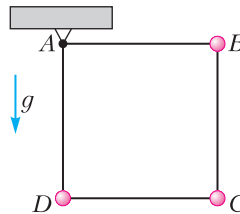


Рис. 7

4. В баллоне находилось  $N_1$  атомов гелия и  $N_2$  молекул водорода. При повышении температуры на  $\alpha = 20\%$  половина молекул водорода покинула баллон и давление в баллоне увеличилось на  $\beta = 10\%$ . Найдите отношение  $N_2/N_1$ .

5. После размыкания ключа  $K$  в схеме, изображенной на рисунке 8, показания амперметра изменились в  $n = 12$  раз. Определите сопротивление амперметра, если сопротивление каждого резистора  $R = 100$  Ом, а сопротивление источника постоянного напряжения пренебрежимо мало.

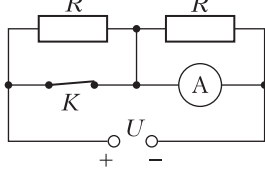


Рис. 8

**Вариант 2**

1. Поезд движется с постоянной скоростью  $v = 40$  км/ч. Найдите длину поезда, если в момент времени  $t_1 = 0$  его локомотив поравнялся с километровым знаком  $x_1 = 106$  км, а в момент времени  $t_2 = 216$  с его последний вагон проскочил мимо знака  $x_2 = 108$  км.

2. Грузы массами  $3m$ ,  $m$  и  $M$  соединены в систему, как показано на рисунке 9, с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей и невесомого блока, который состоит из жестко соединенных соосных цилиндров радиусами  $r$  и  $R = 2r$ . Одна нить плотно намотана на цилиндр радиусом  $R$  (много круговых витков в один слой), а другая перекинута через цилиндр радиусом  $r$ . Определите:

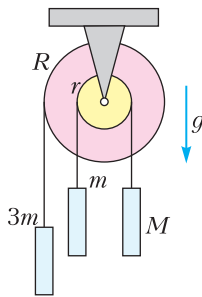


Рис. 9

а) отношение  $M/m$ , при котором система будет в равновесии; б) ускорение груза массой  $M$  при  $M = m$ . Трением в осях блоков и проскальзыванием нитей пренебречь. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

3. Груз массой  $m = 100$  г, подвешенный на пружине, удерживают в положении, когда пружина растянута на  $\Delta x_1 = 7$  см, а ее ось вертикальна. После того как груз без толчка отпустили, он стал совершать колебания, при которых максимальное сжатие пружины составило  $\Delta x_2 = 3$  см. Определите жесткость  $k$  пружины.

4. Над идеальным газом совершают процесс 1–2–3, в котором зависимость давления  $p$  от его температуры  $T$  имеет вид, показанный на рисунке 10. Во сколько раз максимальный объем газа в этом процессе больше минимального?

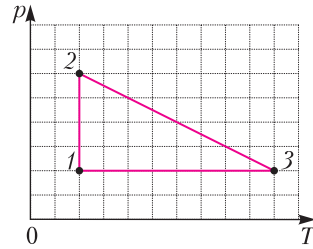


Рис. 10

5. Из приведенных значений сопротивления: 120 Ом, 140 Ом, 160 Ом, 180 Ом, 200 Ом, 220 Ом выберите наиболее близкое к эквивалентному сопротивлению цепи, изображенной на рисунке 11, где  $R = 100$  Ом. Выбор ответа обоснуйте.

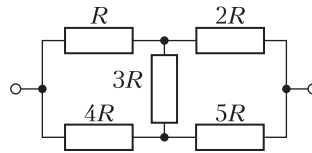


Рис. 11

11 класс

**Вариант 1**

1. Тележка налетает на покоящийся брусок. Через время  $t_1 = 1$  с после столкновения брусок останавливается, а еще через время  $t_2 = 3$  с на него вновь налетает тележка. Определите скорость тележки  $v_T$  между столкновениями, если тележка между столкновениями движется равномерно, а брусок равнозамедленно с ускорением  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>.

2. На горизонтальном столе находится брусок массой  $m = 1$  кг, соединенный с грузом массой  $2m$  с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей и двух невесомых блоков, как показано на рисунке 12.

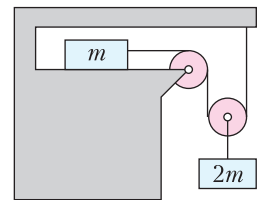


Рис. 12

Прямолинейные отрезки нити у подвижного блока вертикальны, нить, прикрепленная к бруску, горизонтальна. Коэффициент трения бруска по столу  $\mu = 0,4$ . а) Определите ускорение бруска массой  $m$ . б) Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску, чтобы груз поднялся с постоянной скоростью? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. В баллоне находилось  $N_1$  атомов гелия и  $N_2$  молекул водорода. При повышении темпе-

ратуры на  $\alpha = 10\%$  половина молекул водорода покинула баллон и давление в баллоне уменьшилось на  $\beta = 20\%$ . Найдите отношение  $N_2/N_1$ .

4. К батарейке подключили конденсатор емкостью  $C = 1$  мкФ. После полной зарядки конденсатора его отключили от батарейки. Затем его отрицательно заряженную обкладку соединили с положительной клеммой того же источника, как показано на рисунке 13, а выводы 1 и 2 от положительной обкладки конденсатора и отрицательной клеммы источника оставили свободными. Разность потенциалов в точках 1 и 2 стала равной  $\phi_1 - \phi_2 = 3$  В. Определите: а) ЭДС батарейки; б) заряд предварительно незаряженного конденсатора емкостью  $C/2$  после его подключения к точкам 1 и 2 и завершения процесса его зарядки.

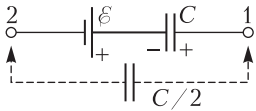


Рис. 13

5. Рельсы  $CC$  и  $DD$  с пренебрежимо малым электрическим сопротивлением, между которыми поддерживается напряжение  $U = 6$  В, расположены параллельно в горизонтальной плоскости. На рельсах лежит проволочная рамка, имеющая форму равностороннего треугольника  $FGH$ , сторона  $FG$  которого перпендикулярна рельсам (рис.14). Рамка находится в однородном магнитном поле, вектор индукции  $\vec{B}$  которого параллелен рельсам, а величина  $B = 0,1$  Тл. Между рамкой и рельсами имеется электрический контакт, сопротивление единицы длины рамки  $\lambda = 1$  Ом/см. Найдите силу Ампера, действующую со стороны магнитного поля: а) на сторону  $FG$  рамки; б) на всю рамку. На рисунке укажите направления сил.

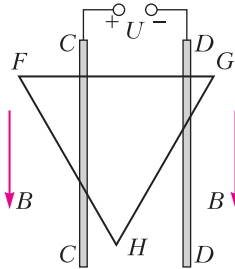


Рис. 14

и 2 от положительной обкладки конденсатора и отрицательной клеммы источника оставили свободными. Разность потенциалов в точках 1 и 2 стала равной  $\phi_1 - \phi_2 = 3$  В. Определите: а) ЭДС батарейки; б) заряд предварительно незаряженного конденсатора емкостью  $C/2$  после его подключения к точкам 1 и 2 и завершения процесса его зарядки.

5. Рельсы  $CC$  и  $DD$  с пренебрежимо малым электрическим сопротивлением, между которыми поддерживается напряжение  $U = 6$  В, расположены параллельно в горизонтальной плоскости. На рельсах лежит проволочная рамка, имеющая форму равностороннего треугольника  $FGH$ , сторона  $FG$  которого перпендикулярна рельсам (рис.14). Рамка находится в однородном магнитном поле, вектор индукции  $\vec{B}$  которого параллелен рельсам, а величина  $B = 0,1$  Тл. Между рамкой и рельсами имеется электрический

контакт, сопротивление единицы длины рамки  $\lambda = 1$  Ом/см. Найдите силу Ампера, действующую со стороны магнитного поля: а) на сторону  $FG$  рамки; б) на всю рамку. На рисунке укажите направления сил.

1. Стержень  $AB$ , ориентированный вдоль оси  $x$ , движется с постоянной скоростью  $v = 0,1$  м/с в положительном направлении оси  $x$ . Передним концом стержня является точка  $A$ , задним – точка  $B$ . Найдите длину стержня, если в момент времени  $t_A = 10$  с координата точки  $A$  равна  $x_A = 3$  м, а в момент  $t_B = 30$  с координата точки  $B$  равна  $x_B = 4,5$  м.

2. Грузы массами  $m$ ,  $M$  и  $3m$  соединены в систему, как показано на рисунке 15, с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей и

невесомого блока, который состоит из жестко соединенных соосных цилиндров радиусами  $r$  и  $R = 2r$ . Одна нить плотно намотана на цилиндр радиусом  $R$  (много круговых витков в один слой), а другая перекинута через цилиндр радиусом  $r$ . Определите: а) отношение  $M/m$ , при котором система будет в равновесии; б) ускорение груза массой  $M$  при  $M = 2m$ . Трением в осях блоков и проскальзыванием нитей пренебречь. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

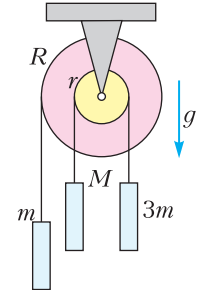


Рис. 15

3. Над идеальным газом совершают процесс  $1-2-3-4$ , в котором зависимость объема газа  $V$  от его температуры  $T$  имеет вид, показанный на рисунке 16. Во сколько раз максимальное да-

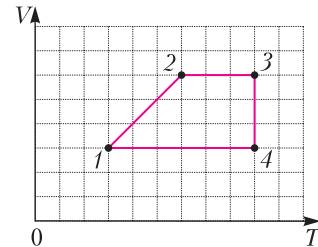


Рис. 16

вление газа в этом процессе больше минимального?

4. В схеме, показанной на рисунке 17,  $R = 10$  Ом,  $C = 1$  мкФ,  $\varepsilon = 3$  В, внутреннее сопротивление каждого источника  $r = 5$  Ом, ключ  $K$  в течение длительного времени замкнут. Определите: а) напряжение на резисторе; б) заряд конденсатора; в) количество теплоты, которое выделится в цепи после размыкания ключа.

5. В схеме, изображенной на рисунке 18, сопротивление резистора  $R = 400$  Ом, а внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. После замыкания ключа  $K$  максимальный ток в цепи оказался равным  $I_m = 10$  мА, а максимальное напряжение на катушке было  $U_m = 4,5$  В. Найдите: а) сопротивление  $r$  провода, которым намотана катушка; б) индуктивность  $L$  катушки, если извест-

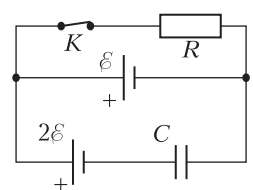


Рис. 17

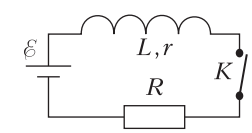


Рис. 18

но, что в момент времени, когда напряжение на катушке станет равным  $U = 3$  В, энергия магнитного поля катушки будет равна  $W = 2,25$  мкДж.

**Олимпиада  
«Электронный наномир»  
Избранные задачи**

*10 класс*

**1. а)** Камень бросают вертикально вверх со скоростью  $5$  м/с. Определите путь, пройденный камнем за первую секунду полета. **б)** Определите начальную скорость камня, брошенного с балкона вертикально вверх, если при трехкратном увеличении этой скорости путь, пройденный камнем за первую секунду полета, остается неизменным. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**2.** Костя Иночкин забежал в кабинет физики и при помощи суперклея закрепил в двух одинаковых ящиках три каких-то предмета. Потом взвесил ящики на пружинных весах – масса каждого из них оказалась равной  $3$  кг. Костя уронил ящики с нулевой начальной скоростью. Один из них начал падать с ускорением  $g$ , а другой – с ускорением  $1,5g$ . Какие предметы и как Костя закрепил в ящиках? Какова масса пустого ящика?

**3.** По горизонтальным рельсам без трения движется тележка. Дождь увеличивает массу тележки с быстротой  $\mu = \Delta m / \Delta t = 2$  кг/с. В начальный момент масса тележки  $M = 50$  кг, а ее скорость  $v_0 = 5$  м/с. С какой скоростью и с каким ускорением будет двигаться тележка в момент времени, когда ее масса увеличится вдвое? Капли дождя падают вертикально.

**4.** Объем одного моля одноатомного идеального газа медленно увеличили в  $2$  раза в процессе  $1-2$  (рис.19). График этого процесса в коор-

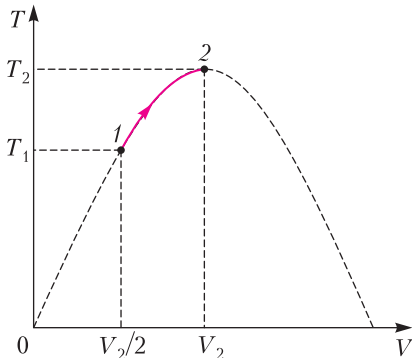


Рис. 19

динатах  $T-V$  ( $T$  – температура,  $V$  – объем) совпадает с участком параболы, проходящей через начало координат и достигающей максимума в точке  $2$  при температуре  $T_2 = 400$  К. Определите: а) температуру  $T_1$  газа в состоянии  $1$ ; б) количество теплоты  $Q$ , полученное газом в этом процессе. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(К · моль).

**5.** В однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен горизонтально, на двух шелковых нитях, закрепленных в одной точке, висят два маленьких шарика. Заряд каждого шарика  $q$ , масса  $m$ , одна нить длиннее другой в  $2$  раза. В положении равновесия длинная нить вертикальна, а короткая отклонена от вертикали на угол  $90^\circ$ . Определите величину вектора напряженности однородного электрического поля. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

*11 класс*

**1.** С каким ускорением движется электрон в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 100$  В/м? Определите начальную скорость электрона, направленную вдоль силовой линии этого поля, если при ее трехкратном увеличении путь, пройденный электроном за первую микросекунду, остается неизменным. Отношение элементарного заряда к массе электрона  $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

**2.** Два протона сближаются, двигаясь в одной плоскости. На большом расстоянии электрическое взаимодействие протонов пренебрежимо мало, их скорости одинаковы по величине и направлены взаимно перпендикулярно. В процессе сближения и разлета протонов на большое расстояние вектор скорости одного из них повернулся на угол  $\alpha = 60^\circ$ . Во сколько раз изменилась величина скорости этого протона? Считать, что скорости протонов малы по сравнению со скоростью света в вакууме.

**3.** На тонкую пластиковую трубочку массой  $m$  и длиной  $l$  нанесены заряды  $+q$  и  $-q$ , локализованные у ее концов. Трубочка без трения может скользить по диэлектрическому кольцу радиусом  $R$ , который значительно превышает  $l$  (рис.20). В центре кольца закреплен положительный точечный заряд  $Q$ . В начальный момент времени трубочка покоится. Определите: а) величину силы,

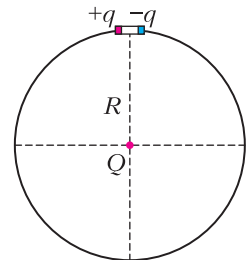


Рис. 20

с которой заряд  $Q$  действует на трубочку; б) ускорение трубочки. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона равен  $k$ . Силу тяжести не учитывать.

4. В 1975 году Брайан Киббл, сотрудник Национальной физической лаборатории Великобритании, сконструировал весы, которые, используя сверхточные измерения тока и напряжения, позволили воспроизводить эталон массы. Упрощенная схема процесса состоит в следующем. На первом этапе груз массой  $m$  крепится к перемычке П-образной проволочной рамки, расположенной в вертикальной плоскости (рис.21,а). Перемычка может без трения скользить в вертикальном направлении. Постоянные магниты создают магнитное поле, вектор магнитной индукции которого перпендикулярен плоскости рамки. В проводящем контуре устанавливают ток, при котором магнитная сила уравнивает силу тяжести груза (массой перемычки пренебрегаем), и фиксируют его величину  $I$ . На втором этапе груз массой  $m$  убирают, а перемычку перемещают в магнитном поле с постоянной скоростью  $v$  и фиксируют показания  $U$  вольт-

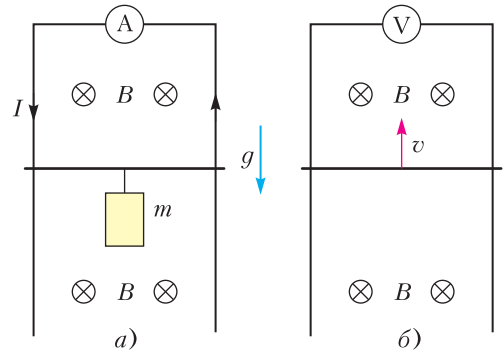


Рис. 21

метра, который включают в цепь вместо амперметра (рис.21,б). Найдите массу  $m$ , если в опытах получены следующие значения:  $I = 10,0$  А,  $U = 0,049$  В,  $v = 0,05$  м/с, ускорение свободного падения  $g = 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Изменится ли результат, если магнитное поле будет неоднородным?

Публикацию подготовили Г.Гайдуков, И.Горбатый, А.Спиридонов

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

## Профильный экзамен по физике

В 2020 году в связи с риском распространения коронавирусной инфекции профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и его Севастопольском филиале проводился в дистанционном формате на портале <https://exam.distant.msu.ru/>

Для участия в экзамене предъявлялись следующие технические требования к рабочему месту испытуемого. 1) Наличие ноутбука (желательно), персонального компьютера, смартфона или планшета со стабильным интернет-соединением (без прерываний на протяжении

испытания и минимальной скоростью от 5 Мбит/с). 2) При подключении к видеоконференции с помощью смартфона или планшета любого типа для получения задания обязательно использование второго устройства, например компьютера, иного смартфона/планшета. 3) Необходимо также наличие браузера Google Chrome или Mozilla Firefox последних версий и сканирующего или фотографирующего устройства для сканирования или фотографирования экзаменационной работы с последующей загрузкой на портал экзамена.

Руководство МГУ в 2020 году приняло решение сократить как объем заданий для профильного экзамена, так и время их выполнения. В итоге типовое задание по физике в этом году охватывало три основных раздела программы для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось три астрономических часа.

Ниже приводятся задания профильного экзамена 2020 года.



**Механика**

1. Дайте определение кинетической энергии материальной точки и определение потенциальной энергии механической системы.

**Задача.** На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит брусок массой  $M = 0,8$  кг, в котором сделано гладкое углубление полусферической формы радиусом  $R = 0,2$  м (рис.1). Из точки  $A$  из состояния покоя начинает соскальзывать маленькая шайба массой  $m = 0,2$  кг. Найдите максимальную высоту  $h$  относительно нижней точки полусферы, на которую поднимется шайба при ее последующем движении.

2. Что такое инерциальные системы отсчета? Сформулируйте первый закон Ньютона.

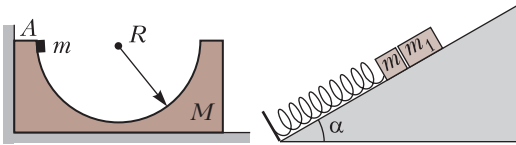


Рис. 1

Рис. 2

**Задача.** На гладкой наклонной плоскости лежат два бруска массами  $m = 100$  г и  $m_1 = 3m$ . Нижний брусок прикреплен к одному из концов легкой пружины, другой конец которой приделан к неподвижной опоре (рис.2). Определите максимальное расстояние  $x_{\max}$ , на которое можно сместить бруски вниз по наклонной плоскости, чтобы после того, как их отпустят из состояния покоя, в процессе движения верхний брусок не отрывался от нижнего. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . Жесткость пружины  $k = 200$  Н/м. Модуль ускорения свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Молекулярная физика и термодинамика**

1. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы? Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

**Задача.** В вертикальном цилиндрическом сосуде под легким подвижным поршнем находится некоторое количество одноатомного идеального газа. В положении равновесия поршень удерживается в сосуде атмосферным давлением. При этом расстояние от поршня до дна сосуда равно  $h_0 = 1$  м. Поддерживая температуру газа постоянной, сверху на поршень медленно насыпают песок массой  $m = 1$  кг. Найдите количество теплоты  $Q$ , которое необходимо сообщить газу, чтобы вернуть поршень в первоначальное положение. Трение поршня о стенки сосуда считайте пренебрежимо малым, ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Дайте определение удельной теплоты парообразования. Как зависит температура кипения от давления?

**Задача.** В сосуде находится воздух с относительной влажностью  $\phi = 80\%$  при температуре  $T = 373$  К. Объем сосуда  $V = 10$  л. Воздух в сосуде изотермически сжимают, уменьшая его объем в два раза. Найдите массу  $m$  сконденсировавшейся при этом воды. Универсальную газовую постоянную примите равной  $R = 8,3$  Дж/(К · моль), а нормальное атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па. Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль. Объемом сконденсировавшейся воды можно пренебречь.

**Электродинамика**

1. Сформулируйте закон электромагнитной индукции и правило Ленца.

**Задача.** В электрической схеме, представленной на рисунке 3, конденсатор электроемкостью  $C = 1$  мкФ сначала заряжается от источника с ЭДС  $\mathcal{E} = 10$  В. Затем ключ переводят из положения 1 в положение 2. Какое количество теплоты  $Q_L$  выделится за все время возникших затухающих колебаний на катушке, если она изготовлена из медной проволоки длиной  $l = 10$  м и сечением  $S = 1$  мм<sup>2</sup>? Сопротивление резистора  $R = 1,7$  Ом. Удельное сопротивление меди примите равным  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом · м.

2. Дайте определение магнитного потока. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.

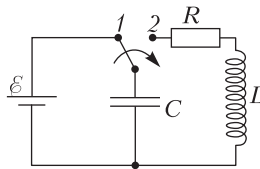


Рис. 3

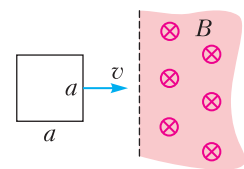


Рис. 4

**Задача.** Квадратную проволочную рамку двигают с постоянной скоростью, перпендикулярной одной из сторон рамки. В некоторый момент времени рамка входит в область, занимаемую однородным магнитным полем, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки, причем ее скорость перпендикулярна прямой, ограничивающей область магнитного поля (рис.4). Какое количество теплоты  $Q$  выделится в рамке за время, в течение которого она полностью окажется в магнитном поле? Сторона рамки  $a = 10$  см, сопротивление рамки  $R = 1$  Ом, модуль скорости рамки  $v = 1$  м/с, магнитная индукция  $B = 1$  Тл.

Публикацию подготовил С.Чесноков

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №6)

1. 8 карандашей.

Пусть ошиблась Маша. Тогда в коробке хотя бы 5 красных и 10 синих карандашей, значит, зеленых не больше 5.

Пусть ошибся Витя. Тогда в коробке хотя бы 10 синих карандашей и, кроме синего и зеленого, есть хотя бы по одному карандашу еще каких-то трех цветов. Значит, зеленых не больше 7.

Пусть ошибся Егор. Тогда в коробке хотя бы 5 красных и 5 синих карандашей и, кроме красного, синего и зеленого, есть хотя бы по одному карандашу еще каких-то двух цветов. В этом случае зеленых карандашей не больше 8.

Их будет ровно 8, если, например, в коробке лежат 5 синих, 5 красных, 8 зеленых, 1 желтый и 1 фиолетовый карандаш.

2. 6 раз.

Пусть будильник заведен на  $t$  часов. В тот момент, когда будильник слоненка первый раз зазвонит, в реальной жизни будет уже  $2t$  часов и слоненок выставит это время на своих сломанных часах. Таким образом, он прокрутит стрелку еще на  $t$  часов вперед, и до следующего звонка будильника останется  $12 - t$  часов. Пока сломанные часы отмерят это время, на самом деле пройдет  $24 - 2t$  часов. Поэтому будильник зазвонит второй раз, когда реально с момента времени  $2t$  пройдет  $24 - 2t$  часов, т.е. будет 00:00. Тогда слоненок снова выставит правильное время. Таким образом, за одни сутки будильник звонит дважды, а каждые следующие сутки начинаются с исходной позиции (время на часах и в жизни одинаковое). Следовательно, за трое суток будильник прозвонит шесть раз.

3. За 5 рублей.

Отметим числа 17, 19, 23 и 29, потратив четыре рубля, и отметим число 2, потратив еще рубль. После этого мы сможем бесплатно отметить все четные числа (так как они делятся на 2), а затем все нечетные числа, не превосходящие 15, — для любого из них, допустим для числа  $n$ , четное число  $2n$  у нас отмечено, и мы можем отметить  $n$  как его делитель. Осталось отметить 21, 25 и 27, и это тоже делается бесплатно: 25 делится на отмеченное число 5, а 21 и 27 — на отмеченное число 3. При любом способе решения задачи простые числа 17, 19, 23 и 29, превышающие 15, придется отмечать за деньги — они не являются делителями или кратными каких-либо чисел на доске. Значит, 4 рубля мы потратим только на них. Чтобы отметить хотя бы что-то еще, придется тратить пятый рубль. Значит, дешевле чем за пять рублей условия задачи не выполнить.

*Комментарий.* На самом деле, отметив «большие» простые числа, мы могли бы вместо двойки

отметить любое из оставшихся чисел на доске, так как потом мы бесплатно отметим его наименьший простой делитель  $p$ . Если  $p = 2$ , действуем по алгоритму, описанному выше. Если нет, отмечаем  $2p$  (это можно сделать, так как  $p < 15$ ), потом отмечаем двойку, а дальше все остальное уже известным способом.

Аналогичное решение применимо и для произвольно длинного набора  $2, 3, 4, \dots, N$  — мы вынуждены отметить за деньги все «большие» простые числа (превышающие  $N/2$ ), а потом отмечаем за рубль любое из оставшихся чисел. Далее бесплатно отмечаем двойку способом, описанным выше, затем отмечаем все четные числа, потом все «малые» простые числа (не превышающие  $N/2$ ), потому что любое «малое»  $p$  будет делителем  $2p$ . Теперь можно отметить все остальные неотмеченные числа: каждое из них будет делиться на свой минимальный простой делитель — «малое» простое число.

4. а) Нельзя; б) можно.

Заметим, что площадь верблюда — 25 клеток. Тем самым, складывать нам предстоит квадрат со стороной 5.

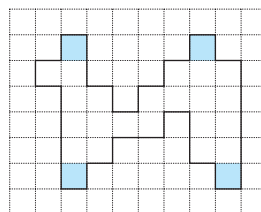


Рис. 1

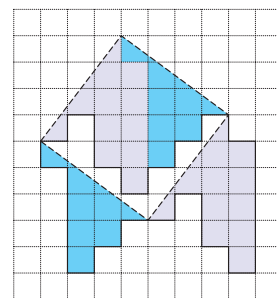


Рис. 2

### Комментарии

1. Решив пункт а), можно догадаться, что в пункте б) сторона квадрата должна идти не по линиям сетки. Чтобы найти на клетчатой бумаге отрезок длины 5, не идущий по линиям сетки, полезно вспомнить про египетский треугольник (прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5).

2. Можно заметить, что сдвинутыми копиями верблюда можно замостить плоскость как парке-

а) Посмотрим на 4 клетки, отмеченные на рисунке 1. Любые две из них «далеко друг от друга»: разделены минимум 4 строками или столбцами. Поэтому при разрезании две отмеченные клетки не могут попасть в одну часть (такая часть не уместилась бы в квадрат  $5 \times 5$ ). Значит, чтобы сложить квадрат  $5 \times 5$ , верблюда необходимо разрезать хотя бы на 4 части (если резать по клеточкам).  
б) Как разрезать верблюда и сложить квадрат — показано на рисунке 2.

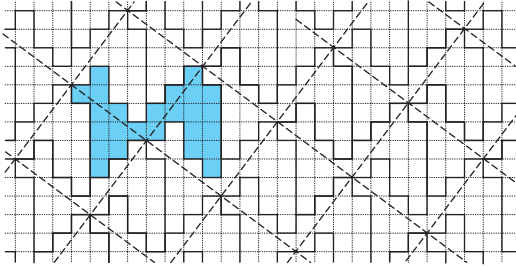


Рис. 3

том (рис.3). Отметив соответствующие точки верблюдов (на рисунке взяты «носы»), мы увидим, что они расположены в вершинах квадратной решетки.

Посмотрим на один из таких квадратов. Каждая его часть – кусочек одного из сдвинутых верблюдов. Сдвинув их обратно, мы получим разрезание исходного верблюда на части, из которых можно сложить квадрат. Остается найти такое положение квадрата, при котором частей получается три. Подобным образом замощения помогают решить

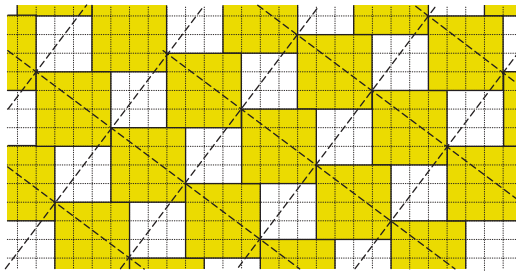


Рис. 4

разные задачи на разрезание. Например, при помощи замощения квадратами, показанного на рисунке 4, можно доказать теорему Пифагора!

### Калейдоскоп «Кванта»

#### Вопросы и задачи

1. Из графика (рис.5) следует, что  $\frac{T+9}{T+4} = \frac{9}{T}$ , где  $T$  – искомое время, равное 6 часам.
2. За время, равное времени торможения вагона  $t_T$ , поезд пройдет в 2 раза больший путь, чем вагон (рис.6).

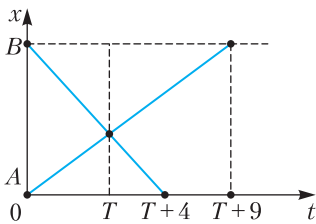


Рис. 5

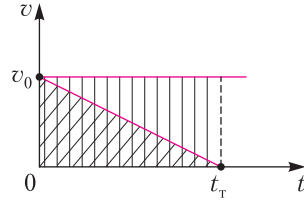


Рис. 6

3. Воспользуемся методом «обратного кино» и законом нечетных чисел при равноускоренном движении (рис.7). По графику  $v(t)$  видно, что пути, пройденные за вторую и пятую секунды, относятся как 7:1, отсюда  $s_{12} = 7s = 35$  м.

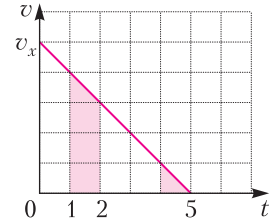


Рис. 7

4. Из рисунка 8 следует, что в любой момент движения середина стержня  $C$  равноудалена от вершины угла между стеной и полом. Иначе говоря, эта точка перемещается по дуге окружности радиусом  $l/2$ . Если ввести систему координат  $xOy$ , то можно получить уравнение траектории середины стержня:  $x_C^2 + y_C^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$ .

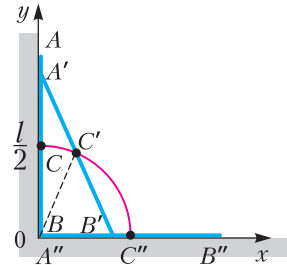


Рис. 8

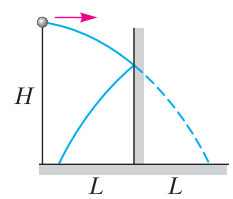


Рис. 9

5. Сделаем «развертку» реальной траектории шарика (рис.9), что приведет к аналогии с горизонтальным броском с высоты  $H$  на расстоянии  $2L$  от стенки. Отсюда  $v_{0\min} = 2L\sqrt{\frac{g}{2H}} = L\sqrt{\frac{2g}{H}}$ .

6. Искомая сила равна равнодействующей силы тяжести кубика и силы Архимеда. График проекции этой силы на ось, направленную вниз, представлен на рисунке 10, где  $h_0 = a \frac{\rho_K}{\rho_J}$ .

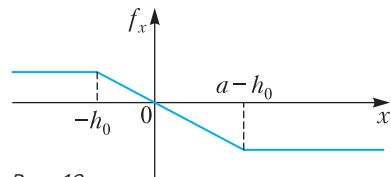


Рис. 10

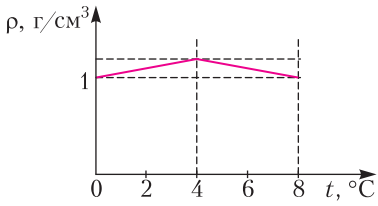


Рис. 11

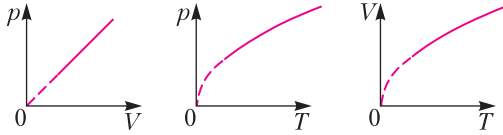


Рис. 12

7. Наибольшая плотность воды достигается при 4 °С. Искомый график изображен на рисунке 11.  
 8. Искомые графики показаны на рисунке 12, второй и третий графики – это части парабол.  
 9. См. рис. 13;  $R_1 = r$ ,  $R_2 = \frac{rR - r^2}{R}$ ,  $R_3 = \frac{rR}{r + R}$ .

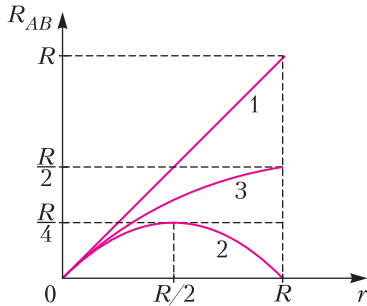


Рис. 13

10. Гиперболическая:  $\lambda = \frac{c}{v}$ , где  $c$  – скорость света.

**Микроопыт**

Получится синусоида.

**Математическая «археология»**

**Задача про кубик.** Количество различных раскрасок куба равно 30.

*Подсказка.* Начните с такого поворота куба, чтобы грань, покрашенная в первый цвет, стала нижней гранью куба. Далее, имеется пять различных вариантов окраски противоположной грани. Докажите, что для каждого такого варианта есть ровно шесть различных окрасок остальных граней.

**1934.01.** (а) *Подсказка.* Мнимость (невещественность) корней данного уравнения равносильна положительности выражения

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

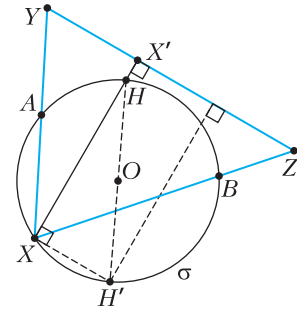


Рис. 14

Теперь воспользуйтесь неравенством треугольника, примененным к треугольнику с длинами сторон  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

(б) Обозначим неподвижные точки через  $A$  и  $B$  и допустим, что сторона  $XY$  нашего движущегося треугольника  $XYZ$  проходит через точку  $A$ , а сторона  $XZ$  – через точку  $B$  (рис.14). Поскольку угол  $\alpha = \angle YXZ$  не меняется, то вершина  $X$  лежит на фиксированной окружности  $\sigma$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$  (это геометрическое место точек, из которых отрезок  $AB$  виден под углом  $\alpha$ ). Опустим высоту  $h = XX'$  на сторону  $YZ$  и определим точку  $H$  как пересечение этой высоты и окружности  $\sigma$ . Поскольку угол  $\angle BXH = \angle ZXX' = 90^\circ - \angle YZX$ , стягиваемый хордой  $BH$ , всегда один и тот же, то точка  $H$  не меняется при движении треугольника. Найдем теперь точку  $H'$  на окружности  $\sigma$ , диаметрально противоположную  $H$ . Тогда прямая  $YZ$  удалена от точки  $H'$  на расстояние, равное  $|XX'|$ , которое всегда одно и то же (это длина высоты  $h$  в треугольнике  $XYZ$ ).

**1934.02.** (а) *Подсказка.* Воспользуйтесь равенствами

$$\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = 1, \gamma + \delta = -q, \gamma\delta = 1.$$

(б) *Подсказка.* В пирамиде  $ABCD$  найдем на ребре  $BC$  точку  $M$  такую, что  $BM/MC = AB/CD$ . Осталось провести через  $M$  плоскость, параллельную обоим ребрам  $AB$  и  $CD$ .

**1934.03.** (а) Результат исключения – уравнение

$$(a - m)(b - n)^2b^2 = (a - n)(b - m)a^2.$$

*Подсказка.* Используйте тождество  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , а также первое равенство, чтобы выразить квадраты синуса и косинуса  $\theta$ , а потом и квадрат тангенса  $\theta$  через  $m$ ,  $a$  и  $b$ . Затем сделайте то же самое со вторым равенством и, наконец, подставьте результаты в третье равенство.

(б) Если обозначить центры данных окружностей через  $O_1$  и  $O_2$ , то точки  $M$  заполняют окружность, проходящую через точки  $A$  и  $B$ , с центром в середине отрезка  $O_1O_2$ .

*Подсказка.* Ясно, что углы треугольника  $PQB$  всегда одни и те же, так как его углы при вершинах  $P$  и  $Q$  опираются на одну и ту же дугу

$AB$  в данных двух окружностях. Следовательно, все треугольники  $PQB$  подобны друг другу, а это означает, что угол  $\angle MAB$  всегда один и тот же, откуда следует, что все точки  $M$  лежат на окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .

**1934.04.** (а) Предел равен  $(1+a^2)/\cos^2 a$ .

*Подсказка.* Воспользуйтесь формулами для разницы тангенсов и разницы арктангенсов.

(б) Обозначим центр окружности  $O$ , точки касания двух фиксированных касательных через  $A$  и  $B$ , а переменную точку касания третьей прямой через  $X$  (рис.15). Тогда угол  $POQ$ , как легко видеть, равен половине угла  $AOB$  и, следовательно, не зависит от положения точки  $X$ .

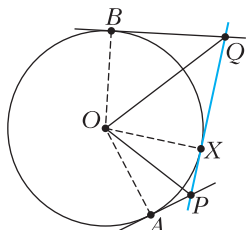


Рис. 15

**1934.05.** (б) Допустим, что шар имеет радиус  $R$  и центр  $O$ , каковой находится на расстоянии  $D$  от вершины угла  $V$ . Площадь круга-пересечения шара и плоскости равна  $\pi(R^2 - d^2)$ , где  $d$  есть расстояние от точки  $O$  до данной плоскости. Следовательно, сумма площадей из условия задачи равна  $S = \pi(R^2 - d_1^2 + R^2 - d_2^2 + R^2 - d_3^2)$ , где  $d_1, d_2, d_3$  – расстояния от точки  $O$  до трех граней угла. Но поскольку ребра угла перпендикулярны друг другу, то сумма квадратов этих расстояний равна квадрату расстояния  $|OV| = D$ , и поэтому мы получаем  $S = \pi(3R^2 - D^2)$ , что не зависит от поворота трехгранного угла.

**1934.06.** (а) Есть два возможных решения:

$$x = \pm \frac{a(b+c)}{2\sqrt{abc}}; \quad y = \pm \frac{b(a+c)}{2\sqrt{abc}}; \quad z = \pm \frac{c(a+b)}{2\sqrt{abc}}.$$

Знаки надо выбрать либо все верхние, либо все нижние.

*Подсказка.* Преобразуйте систему следующим образом:

$$a = x^2 - (y-z)^2 = (x-y+z)(x+y-z),$$

$$b = y^2 - (z-x)^2 = (y-z+x)(y+z-x),$$

$$c = z^2 - (x-y)^2 = (z-x+y)(z+x-y),$$

после чего выразите  $x+y-z, x-y+z$  и  $-x+y+z$  через  $a, b$  и  $c$ .

(б) *Подсказка.* Воспользуйтесь (легко доказываемой и очень известной в наши просвещенные времена) леммой о том, что для любой точки  $O$ , находящейся вне данной окружности  $\sigma$ , и для любой прямой, проходящей через точку  $O$  и пересекающей окружность в точках  $P$  и  $Q$ , произведение длин  $|OP| \cdot |OQ|$  равно квадрату длины касательной от точки  $O$  к окружности  $\sigma$ . (Это так называемая теорема о секущей и касательной

или свойство степени точки относительно окружности).

**1934.07.** (а) Преобразуйте левую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n &= \\ = x(1+x+\dots+x^{n-2}+x^{n-1}) + \\ + x^2(1+x+\dots+x^{n-2}) + \\ &\dots \\ + x^{n-1}(1+x) + x^n \quad (1) \end{aligned}$$

и затем воспользуйтесь (многократно!) формулой

$$1+x+x^2+\dots+x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

(б) *Подсказка.* Рассмотрим треугольник  $ABC$ , образованный хордой  $AB$  и касательными  $AC$  и  $BC$  (рис.16). Пусть  $M$  – это произвольная точка на дуге  $AB$ , а  $C_1, A_1, B_1$  – основания перпендику-

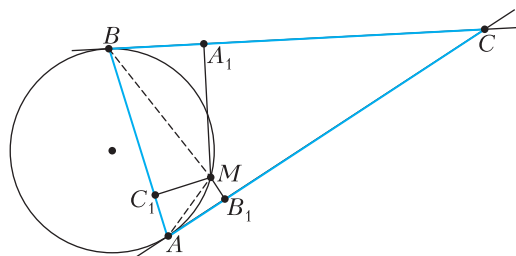


Рис. 16

ляров, опущенных из  $M$  на  $AB, BC$  и  $CA$  соответственно. Докажите и используйте наличие двух пар подобных треугольников:  $\Delta B_1AM \sim \Delta C_1BM$  и  $\Delta A_1BM \sim \Delta C_1AM$ .

**1934.08.** (а) *Подсказка.* Начнем с того, что неравенство  $\cos 2\gamma \leq 0$  равносильно неравенству  $\operatorname{tg}^2 \gamma \geq 1$ . Используем тождество

$$\sec \alpha \sec \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{1 + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что при положительном произведении  $\cos \alpha \cos \beta$  мы имеем  $1 + \sin \alpha \sin \beta \geq \cos \alpha \cos \beta$ , а при отрицательном произведении  $\cos \alpha \cos \beta$  мы имеем  $1 - \sin \alpha \sin \beta \geq -\cos \alpha \cos \beta$ . И в том и в другом случае это следует из того, что  $\cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha \mp \beta)$  и, следовательно, лежит в интервале  $[-1; 1]$ .

(б) *Подсказка.* Этой общей точкой является центр тяжести пирамиды.

Воспользуйтесь векторами. Тогда искомая точка  $M$  в пирамиде  $ABCD$  будет концом вектора  $\overline{OM} = (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})/4$ . Вычислите векторы, ведущие в центры граней пирамиды, и

затем воспользуйтесь формулой

$$\overline{OY} = \frac{q}{p+q} \overline{OX} + \frac{p}{p+q} \overline{OZ},$$

верной для любой точки  $Y$ , лежащей на отрезке  $XZ$  и делящей его в отношении  $p : q$ .

**1934.Х. Подсказка.** Избавьтесь от знаменателей и приведите подобные члены. Результатом будет квадратное уравнение

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0.$$

Рассмотрите его дискриминант.

Другой вариант решения состоит в том, чтобы воспользоваться симметричностью выражения и предположить, без потери общности, что  $a < b < c$ . Теперь рассмотрите знаки выражения  $(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$  в точках  $a, b$  и  $c$ ; из того, что они чередуются, можно вывести, что наше уравнение имеет не менее двух вещественных решений.

**1934.У.** Предел равен 1.

*Подсказка.* Докажите неравенство

$$0 < 1 - \cos^x \frac{a}{x} < a \sin \frac{a}{2x}.$$

**1934.З.** *Подсказка.* Воспользуйтесь несложной формулой

$$\frac{n+k}{(n+k+1)!} = \frac{1}{(n+k)!} - \frac{1}{(n+k+1)!}$$

и сложите эти равенства для  $k = 0, 1, \dots, p$ .

## Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

### Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

$$1. y_m = \frac{h(l+a)^2}{4la} \approx 7,56 \text{ м.}$$

$$2. \mu = \frac{1}{\text{tg} \alpha - 2 \text{tg} \beta} \approx 0,31.$$

$$3. v_3 = v_1 \sqrt{1 + 2\sqrt{2gh}/v_1} = 3,75 \text{ м/с.}$$

Подобным способом можно разгонять космические аппараты, сначала приближаясь к планете (при этом потенциальная энергия будет уменьшаться, а кинетическая расти), а затем на большой скорости включая разгонный ракетный двигатель. Такой маневр называют гравитационным. Подробности можно прочитать, например, в Википедии.

$$4. \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \frac{V_2}{V_1} = 88\%.$$

$$5. U = 200 \text{ В.}$$

$$6. R_V = \frac{n-1}{2-n} R = 900 \text{ Ом.}$$

## Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

### Вариант 1

$$1. \tau = \frac{2(v_6 - v_\tau)}{a} = 1 \text{ с.}$$

$$2. \text{ а) } a = \frac{(3-2\mu)g}{7} = 3 \text{ м/с}^2; \text{ б) } F = mg \left( \frac{3}{2} - \mu \right) = 10,5 \text{ Н.}$$

$$3. v_D = \sqrt{ga(\sqrt{2}-1)} \approx 1,44 \text{ м/с.}$$

$$4. \frac{N_2}{N_1} = \frac{2(\alpha-\beta)}{100\%+2\beta-\alpha} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$5. R_A = \frac{R}{n-2} = 10 \text{ Ом.}$$

### Вариант 2

$$1. l = v(t_2 - t_1) + x_1 - x_2 = 400 \text{ м.}$$

$$2. \text{ а) } \frac{M}{m} = 7; \text{ б) } a = \frac{3g}{7}.$$

$$3. k = \frac{2mg}{\Delta x_1 - \Delta x_2} = 50 \text{ Н/м.}$$

$$4. \text{ В } 15 \text{ раз.}$$

$$5. 220 \text{ Ом.}$$

11 класс

### Вариант 1

$$1. v_\tau = \frac{at_1^2}{2(t_1+t_2)} = 0,25 \text{ м/с.}$$

$$2. \text{ а) } a = \frac{2(1-\mu)g}{3} = 4 \text{ м/с}^2; \text{ б) } F = mg(1+\mu) = 14 \text{ Н.}$$

$$3. \frac{N_2}{N_1} = \frac{2(\alpha+\beta)}{100\%-2\beta-\alpha} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

$$4. \text{ а) } \varepsilon = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 1,5 \text{ В; б) } q = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)}{3} = 1 \text{ мкКл.}$$

$$5. \text{ а) } F_1 = \frac{UB}{\lambda} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Н; б) } F_2 = \frac{3UB}{2\lambda} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

### Вариант 2

$$1. l = v(t_B - t_A) + x_A - x_B = 0,5 \text{ м.}$$

$$2. \text{ а) } \frac{M}{m} = 1; \text{ б) } a = \frac{g}{9}.$$

$$3. \text{ В } 3 \text{ раза.}$$

$$4. \text{ а) } U = \frac{\varepsilon R}{R+r} = 2 \text{ В; б) } q = C(2\varepsilon - U) = \frac{C\varepsilon(R+2r)}{R+r} =$$

$$= 4 \text{ мкКл; в) } Q = \frac{C\varepsilon^2 r^2}{2(R+r)^2} = 0,5 \text{ мкДж.}$$

5. а)  $r = \frac{U_m}{I_m} - R = 50 \text{ Ом}$ ; б)  $L = \frac{2WR^2}{(U_m - U)^2} = 0,32 \text{ Гн}$ .

**Олимпиада «Электронный наномир»**

10 класс

1. а)  $s = 2,5 \text{ м}$ ; б)  $v_0 = \frac{gt_0}{4} = 2,25 \text{ м/с}$ .

а) Из уравнения  $v_0 - gt_1 = 0$  найдем время  $t_1$  движения камня до верхней точки траектории:  $t_1 = v_0/g = 0,5 \text{ с}$ . Путь, пройденный за это время, равен  $s_1 = v_0t_1 - gt_1^2/2 = 1,25 \text{ м}$ . За оставшееся время  $t_2 = t_0 - t_1 = 0,5 \text{ с}$ , где  $t_0 = 1 \text{ с}$ , камень пролетит путь  $s_2 = gt_2^2/2 = 1,25 \text{ м}$ . Таким образом, путь камня за первую секунду полета равен  $s = s_1 + s_2 =$

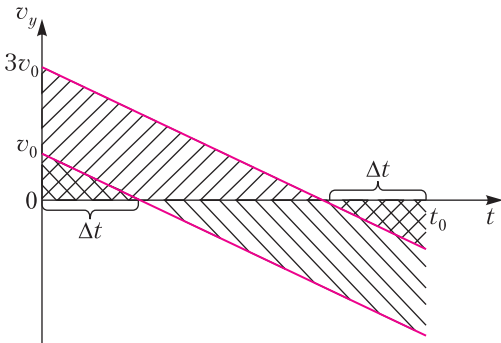


Рис. 17

$= 2,5 \text{ м}$ .

б) Нарисуем графики зависимости проекции скорости камня на вертикальную ось от времени для значений начальной скорости  $v_0$  и  $3v_0$  (рис.17). Если промежутки времени, обозначенные на рисунке  $\Delta t$ , одинаковые, то за время  $t_0$  камень пройдет одинаковый путь при двух значениях начальной скорости – в этом случае площади под графиками одинаковые. Из уравнения  $3v - gt_0 = -v_0$  получим  $v_0 = gt_0/4 = 2,25 \text{ м/с}$ .

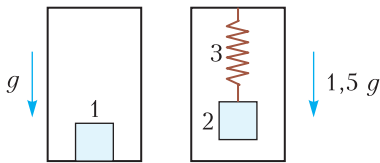


Рис. 18

2.  $M = \frac{2}{3}M_0 = 2 \text{ кг}$ .

В одном ящике Костя приклеил груз 1 массой  $m$ , в другом ящике такой же груз 2 подвесил на легкой пружине 3, как показано на рисунке 18. В момент старта второго ящика  $1,5gM = Mg + F$ ,

$0 = mg - F$ , где  $M = M_0 - m$  – масса пустого ящика,  $M_0 = 3 \text{ кг}$ ,  $F$  – сила упругости. Из этих уравнений получим  $M = (2/3)M_0 = 2 \text{ кг}$ .

3.  $v = v_0/2 = 2,5 \text{ м/с}$ ,  $a = \mu v_0/(4M) = 0,05 \text{ м/с}^2$ . На тележку, наполняемую дождевой водой, в горизонтальном направлении внешние силы не действуют. Поэтому проекция на горизонтальную ось суммарного импульса воды и тележки остается постоянной:  $Mv_0 = m(t)v(t)$ , где  $m(t) = M + \mu t$ . Скорость тележки в момент времени, когда  $m(t) = 2M$ , будет равна

$$v(t) = \frac{Mv_0}{2M} = \frac{v_0}{2} = 2,5 \text{ м/с}.$$

Ускорение тележки найдем, записав закон сохранения импульса для двух моментов времени, разделенных малым промежутком времени  $\Delta t$ :  $mv = (m + \Delta m)(v + \Delta v)$ . Пренебрегая в этом выражении произведением двух малых величин  $\Delta m \Delta v$ , для проекции ускорения на горизонтальную ось получим

$$a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v \Delta m}{m \Delta t} = -\frac{v \mu}{m}.$$

Знак минус означает, что вектор ускорения направлен противоположно вектору скорости – тележка движется замедленно. В рассматриваемый момент времени  $m = 2M$ ,  $v = v_0/2$  и величина ускорения тележки равна

$$a = \frac{\mu v_0}{4M} = 0,05 \text{ м/с}^2.$$

4. а)  $T_1 = (3/4)T_2 = 300 \text{ К}$ ; б)  $Q = RT_2 = 3,3 \text{ кДж}$ . а) Уравнение параболы, характеризующей процесс, представим формулой  $T = \beta V(2V_2 - V)$ , где  $\beta$  – некоторая постоянная. Из этой формулы для состояний 1 и 2 получим  $T_1 = \frac{3}{4}\beta V_2^2$ ,  $T_2 = \beta V_2^2$ . Следовательно,

$$T_1 = \frac{3}{4}T_2 = 300 \text{ К}.$$

б) Подставляя выражение для температуры в уравнение состояния идеального газа, найдем зависимость давления газа от объема:  $p = \beta R(2V_2 - V)$ . График этой зависимости изображен на рисунке 19. Давления в состояниях 1 и 2 равны

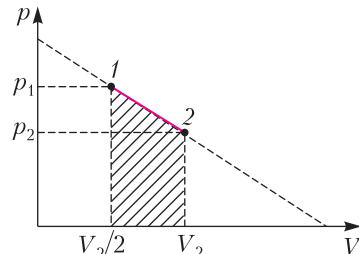


Рис. 19

$p_1 = (3/2)\beta R V_2$  и  $p_2 = \beta R V_2$ . Работа, совершаемая газом в процессе 1–2, численно равна соответствующей площади:

$$A = \left( \frac{p_1 + p_2}{2} \right) \frac{V_2}{2} = \frac{5}{8} \beta R V_2^2 = \frac{5}{8} R T_2.$$

Количество теплоты, полученное газом в этом процессе, найдем из первого закона термодинамики:

$$Q = (U_2 - U_1) + A = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1) + \frac{5}{8} R T_2 = RT_2 = 3,3 \text{ кДж.}$$

5.  $E = \frac{mg}{2q}$ .

Изобразим на рисунке 20 силы, действующие на шарики:  $m\vec{g}$  – сила тяжести,  $q\vec{E}$  – сила, действующая на каждый шарик со стороны однородного электрического поля напряженностью  $\vec{E}$ ,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  – силы кулоновского взаимодействия шариков,  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  – силы натяжения нитей. Из четырех уравнений, выражающих условия равновесия шариков, два уравнения определяют силы натяжения нитей, а два других:  $qE = F_2 \cos \alpha$ ,  $mg = F_1 \sin \alpha$  позволяют найти модуль вектора напряженности:

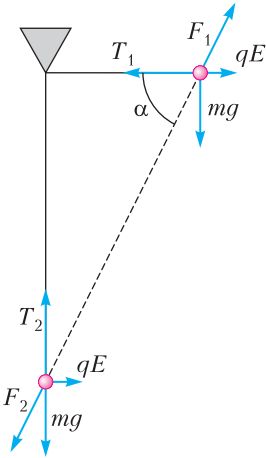


Рис. 20

$$E = \frac{mg}{q} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{mg}{2q}.$$

11 класс

1.  $a = \frac{eE}{m} = 1,76 \cdot 10^{13} \text{ м/с}^2$ ;  $v_0 = \frac{at_0}{4} = \frac{eEt_0}{4m} = 4,4 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

Решение этой задачи аналогично решению задачи 1 для 10 класса.

Полученное значение скорости значительно меньше скорости света в вакууме, что оправдывает использование нерелятивистского приближения.

2.  $k = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1,37.$

Обозначим скорости протонов до их сближения  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ , а после сближения и разлета на большое расстояние  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ . По условию задачи  $v_1 = v_2$ ,  $\vec{v}_1 \vec{v}_2 = 0$ , а угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{u}_1$  равен  $\alpha = 60^\circ$ . Запишем законы сохранения импульса и энергии для системы двух протонов:

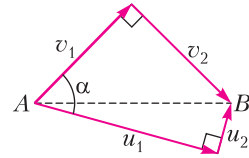


Рис. 21

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2, \quad \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2},$$

или

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Первое уравнение возведем в квадрат:

$$v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \vec{v}_2 = u_1^2 + u_2^2 + 2\vec{u}_1 \vec{u}_2$$

и получим  $\vec{u}_1 \vec{u}_2 = 0$ . Следовательно, конечные скорости протонов также взаимно перпендикулярны. На рисунке 21 это уравнение изображено графически. Рассматривая прямоугольные треугольники, для гипотенузы  $AB$  запишем:

$$AB = v_1 \sqrt{2}, \quad AB = \frac{u_1}{\cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Приравняв правые части этих выражений, получим

$$\frac{u_1}{v_1} = \sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1,37.$$

3. а)  $F = \frac{kqQl}{R^3}$ ; б)  $a = 0$ .

а) Заряды, расположенные у концов трубочки, будем считать точечными. Электрическая сила, с которой заряд  $Q$  действует на заряды  $\pm q$ , является векторной суммой сил, действующих на каждый точечный заряд (рис.22):

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-, \quad |\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = \frac{kqQ}{R^2}.$$

Сила  $\vec{F}$  направлена вдоль прямой, соединяющей точечные заряды, а ее величина равна

$$F = 2 \frac{kqQ}{R^2} \sin \alpha,$$

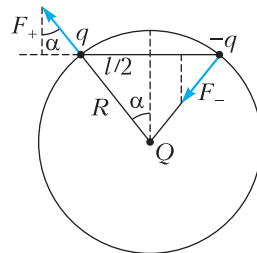


Рис. 22



где  $\sin \alpha = l/(2R)$ . Мы учли, что при  $l \ll R$  длина дуги примерно равна длине стягивающей ее хорды. Окончательно получаем

$$F = \frac{kqQl}{R^3}.$$

б) Из закона сохранения энергии следует, что кинетическая энергия трубочки измениться не может. Поэтому если трубочка покоилась в начальный момент времени, то она и далее будет покоиться, ускорение трубочки равно нулю. В отсутствие трения электрическая сила  $F$  компенсируется силами реакции опоры, действующими на трубочку со стороны кольца: векторная сумма электрических сил и сил реакции, а также суммарный момент этих сил равны нулю.

4.  $m = \frac{IU}{gv} = 1 \text{ кг}.$

На первом этапе в положении равновесия сила тяжести груза уравнивается магнитной силой Ампера, действующей на перемычку:

$$mg = IBl.$$

На втором этапе при равномерном перемещении проводящей перемычки в магнитном поле на ее концах возникает разность потенциалов, равная ЭДС индукции:

$$U = Blv.$$

Отсюда для измеряемой массы получим

$$m = IU/(gv) = 1 \text{ кг}.$$

В неоднородном магнитном поле перемычку можно разбить на элементарные части  $\Delta l_i$ , в пределах которых магнитное поле можно считать однородным. Тогда

$$mg = I \sum B_i \Delta l_i, \quad U = v \sum B_i \Delta l_i,$$

где  $B_i$  – перпендикулярная плоскости контура составляющая вектора магнитной индукции в точке, где расположен элемент перемычки  $\Delta l_i$ . Из этих формул для массы получаем такое же выражение, что и в случае однородного магнитного поля.

**Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова**  
**Профильный экзамен по физике**

**Механика**

1. При скольжении шайбы по левой стороне сферической поверхности брусок будет удерживаться на месте стенкой и останется в покое. По закону сохранения механической энергии шайба в нижней точке сферической поверхности приобретет скорость

$$v_0 = \sqrt{2gR},$$

направленную горизонтально. При дальнейшем движении шайбы и бруска будут сохраняться проекция импульса на горизонтальную ось и механическая энергия. Поскольку в момент достижения шайбой максимальной высоты относительная скорость шайбы и бруска обратятся в ноль, то в соответствии с законам сохранения импульса и механической энергии имеем

$$mv_0 = (m + M)v, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m + M)v^2}{2} + mgh,$$

где  $v$  – скорости бруска и шайбы в этот момент. Исключая из записанных выражений  $v$ , находим

$$h = \frac{M}{m + M} \frac{v_0^2}{2g} = \frac{MR}{m + M} = 0,16 \text{ м}.$$

2. Если верхний брусок не будет в процессе движения отрываться от нижнего, то бруски будут совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_1}},$$

а уравнение движения верхнего кубика в проекции на ось, параллельную наклонной плоскости, будет иметь такой вид:  $m_1 a = m_1 g \sin \alpha - N$ , где  $N$  – сила реакции со стороны нижнего бруска. Верхний брусок оторвется от нижнего при  $N = 0$ . Поэтому максимальное ускорение, которое может иметь этот брусок, равно  $a_{\max} = g \sin \alpha$ . Поскольку максимальное ускорение тела, совершающего гармонические колебания с амплитудой  $x_{\max}$ , равно  $a_{\max} = \omega^2 x_{\max}$ , то

$$x_{\max} = \frac{(m + m_1) g \sin \alpha}{k} = 1 \text{ см}.$$

**Молекулярная физика и термодинамика**

1. Из условия равновесия поршня следует, что давление газа в сосуде равно  $p_0$  в начальном состоянии и  $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$ , когда на поршень насыпали песок. Здесь  $p_0$  – атмосферное давление,  $S$  – площадь поршня. По закону Бойля–Мариотта имеем

$$p_0 V_0 = p_1 V_1, \text{ где } V_0 = h_0 S, \quad V_1 = (h_0 - \Delta h) S.$$

Отсюда находим, что под действием веса песка поршень переместится вниз на расстояние

$$\Delta h = \frac{mgh_0}{Sp_0 + mg}.$$

Для того чтобы вернуть поршень в исходное положение, газ должен совершить работу

$$A = p_1 \Delta V = \left( p_0 + \frac{mg}{S} \right) \Delta h S = mgh_0.$$

Сообщенное при этом количество теплоты должно быть равно

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2} p_1 \Delta V + p_1 \Delta V = \\ = \frac{5}{2} A = \frac{5}{2} m g h_0 = 25 \text{ Дж.}$$

2. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, записанному для водяного пара в сосуде, а именно  $\phi_1 p_{\text{шт}} V = \frac{m_1}{M} RT$ , первоначальная масса пара равна

$$m_1 = \frac{\phi_1 p_{\text{шт}} M V}{RT}.$$

Здесь  $\phi_1 = \frac{\phi}{100\%}$ ,  $p_{\text{шт}}$  – парциальное давление насыщенного водяного пара, равное при 100 °С нормальному атмосферному давлению  $p_0$ . При уменьшении объема сосуда вдвое пар в сосуде становится насыщенным и его масса будет

$$m_2 = \frac{p_{\text{шт}} M V}{2RT}.$$

Масса сконденсировавшейся воды равна

$$m = m_1 - m_2 = \frac{p_0 M V}{2RT} \left( \frac{\phi}{100\%} - \frac{1}{2} \right) \approx 1,7 \text{ г.}$$

### Электродинамика

1. Энергия, запасенная в заряженном конденсаторе, равна

$$W_0 = \frac{C \mathcal{E}^2}{2}.$$

В процессе колебаний сила тока, протекающего по резистору и по катушке, одинакова в каждый момент времени. Поэтому отношение количеств теплоты, выделяющихся на этих участках цепи в единицу времени (мгновенная мощность) и за все время протекания процесса, пропорционально отношению их омических сопротивлений:

$$\frac{Q_R}{Q_L} = \frac{R}{R_L},$$

где  $R_L = \rho \frac{l}{S}$  – омическое сопротивление катушки, равное сопротивлению проволоки. Вся исходная энергия  $W_0$  заряженного конденсатора перейдет в тепло

$$Q = Q_R + Q_L = \left( 1 + \frac{R}{R_L} \right) Q_L.$$

На долю катушки придется его часть, равная

$$Q_L = \frac{R_L}{R + R_L} W_0.$$

В итоге получаем

$$Q_L = \frac{\rho l}{RS + \rho l} \frac{C \mathcal{E}^2}{2} \approx 4,55 \text{ мкДж.}$$

2. Во время вхождения рамки в область, занимаемую магнитным полем, в стороне рамки, параллельной границе магнитного поля, возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = Bva,$$

в результате чего по рамке начинает течь индукционный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bva}{R}.$$

По закону Джоуля–Ленца количество теплоты, выделившееся в рамке за время  $\tau$  ее вхождения в магнитное поле, равно

$$Q = I^2 R \tau.$$

По истечении этого времени рамка полностью окажется в магнитном поле и индукционный ток прекратится. Поскольку  $\tau = \frac{a}{v}$ , из записанных выражений находим

$$Q = \frac{B^2 v a^3}{R} = 1 \text{ мДж.}$$

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 202249**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

**Тел.: (831) 216-40-40**

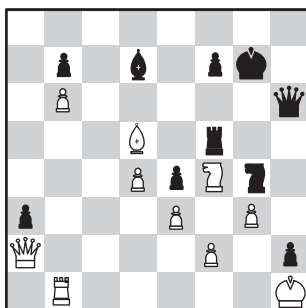
## Плоды МАШИННОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ-3

В сегодняшнем выпуске мы продолжим разбирать дебютные предпочтения AlphaZero и посмотрим, как искусственный интеллект трактует ферзевый гамбит. Особенно интересно это будет тем, кто играет карлсбадский вариант – одну из самых популярных систем в этом дебюте.

### Stockfish – AlphaZero Лондон, 2018

1. d4 d5 2. c4 e6. Как мы отмечали в предыдущем номере, AlphaZero черными в ответ на 1. d4 предпочитает разыгрывать защиту Нимцовича или защиту Рагозина, однако в этой партии первые два хода были запрограммированы заранее. 3. ♘c3 ♗f6 4. cd ed 5. ♗g5 ♗e7 6. e3 0-0 7. ♗d3 h6 8. ♗h4 c6 9. ♗c2 ♗e8 10. ♗ge2 ♗bd7 11. 0-0 ♗h5 12. ♗e7 ♗e7 13. ♗ae1 ♗f8 14. a3 ♗d7 15. b4 ♗f6 16. ♗b1 ♗e6 17. a4 a6 18. ♗fe1 h5!? Начало типичного для AlphaZero маневра, разбору которого мы посвятили одну из предыдущих страничек. 19. h3 g6. Полезный ход, блокирующий диагональ b1-h7. 20. ♗a1 ♗g5 21. ♗f4 ♗ge4. Черные занимают форпост, подготавливая движение пешки g. 22. ♗e4 de 23. ♗c4 ♗g7 24. ♗ec1 h4 25. ♗ab1 g5 26. ♗e2 ♗h6 27. ♗f1 ♗g8 28. b5. Белые начинают типичную для карлсбадской структуры атаку пешечного меньшинства. 28...cb 29. ab a5!? 30. b6 a4 31. ♗a2 a3. Необычный контрплан – черные захватывают пространство на ферзевом фланге и готовы отдать пешку, чтобы отвлечь тяжелые фигуры белых от защиты на королевском фланге. 32. ♗c3 g4 33. hg ♗g4 34. ♗f4 h3!? Марш крайних пешек – ключ к победе черных в этой партии. 35. g3.

Белые вынуждены закрывать позицию, вариант 35. ♗h3 ♗h2+ 36. ♗e2 ♗g2 37. ♗f4 ♗g4+ 38. ♗e1 ♗f3+ ведет к поражению, не лучше и взятие пешкой. 35...♗gc8 36. ♗g1 h2+ 37. ♗g2 ♗g7 38. ♗cc1 ♗a5 39. ♗e2 ♗c1 40. ♗c1 ♗b4 (с угрозой ♗b2) 41. ♗b1 ♗d6 42. ♗c4 ♗h6 43. ♗h1 ♗f5 44. ♗d5. Позиция черных явно лучше, а сейчас они достигают решающего перевеса, жертвуя качество.

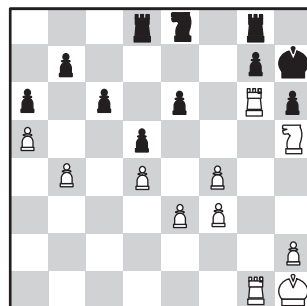


44...♗f4! 45. ef (не спасало и 45. gf ♗h4 46. ♗f1 ♗h3 47. ♗e2 ♗b5) 45...♗f5 (с угрозой e3) 46. ♗c1 (красивый и практически форсированный финал мог случиться после 46. ♗b1 e3 47. fe ♗b1 48. ♗b1 ♗h3 49. ♗e1 a2 50. f5 ♗f2+ 51. ♗f2 a1 ♗+ 52. ♗g1 hg ♗x) 46...♗b6 47. ♗a3 ♗f2+ 48. ♗h2 ♗g4+ 49. ♗g2 ♗d4. Ввиду угроз ♗f2+ и ♗d5 белые сдались.

### AlphaZero – Stockfish Лондон, 2018

1. d4 ♗f6 2. c4 e6 3. ♗c3 d5 4. cd ed 5. ♗g5 c6 6. e3 ♗d6 (более амбициозно, чем 6...♗e7) 7. ♗d3 0-0 8. ♗f3 ♗e8 9. 0-0 ♗g4. Черным остается сделать ход ♗bd7, чтобы завершить гармоничное развитие фигур, поэтому белые пользуются моментом, чтобы затруднить эту задачу. 10. ♗b3 ♗a6 (напрашивающееся 10...♗b6 приведет к сдваиванию пешек после 11. ♗f6 gf, поэтому черные выбирают тактический способ защиты пешки b7) 11. ♗fe1 (11. ♗b7 ♗b4) 11...♗f3 12. gf. Слабость сдво-

енных пешек компенсируется открытой линией g, по которой белые будут атаковать черного короля. 12... ♗b8 13. ♗d1 ♗c7 14. f4 ♗e7 15. ♗f3 ♗d7 16. ♗e7 ♗e7 17. ♗h3 (с угрозой мата) ♗f6 18. ♗h1 ♗d7 19. ♗f5 ♗d6 20. ♗g1 ♗h8 21. ♗d3 ♗g8 22. ♗h4 ♗ce8 23. ♗g5 h6 24. ♗ag1 ♗c7 25. a3 ♗e6 26. ♗e5 ♗d6 27. ♗e2. Начало типичного для AlphaZero «длинного» перевода коня с c3 на f5, откуда он будет атаковать королевский фланг. 27...♗h7 28. ♗g3 ♗f6 29. ♗h3 ♗d6 30. f3 a6 31. a4 ♗d8 32. ♗h5 ♗f6 33. a5! Технично. Фиксируя пешки ферзевого фланга на белых полях, белые в будущем смогут угрожать переходом в эндшпиль, где они станут мишенью для слона. 33...♗e7 34. ♗e5 ♗c7 35. b3 ♗cc8 36. ♗b1 ♗cf8 37. b4 ♗d8 38. ♗h5 ♗f6 39. ♗h4 ♗d8 40. ♗h5 ♗e6 41. ♗e6 fe 42. ♗hg4 ♗e8 43. ♗h7 ♗h7 44. ♗g6.



Внезапно черные оказались практически в дугцванге: после 44...♗d6 45. ♗1g2 сразу не проигрывает пешку только 45...♗h8, однако после 46. ♗g1 ♗h7 47. ♗f2 ♗h8 48. ♗e2 ♗h7 49. ♗d3 ♗h8 50. e4 с угрозой e5 черные все равно теряют пешку на e6. 44...♗d7 45. ♗e6. Черные предпочли отдать пешку сразу, после чего оставшаяся часть партии – дело техники для AlphaZero. Черные сдались на 89 ходу.

А.Русанов

Индекс 90964

# ТОЛЬКО ЛИ ИГРУШКА

От офисной игрушки до  
физического инструмента – один шаг.



*Игрушки с физикой*

ISSN 0130-2221 20007



9 770130 222207



(Подробнее – на с.41 внутри журнала)