

МАЙ

ISSN 0130-2221

2017 · № 5

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# РОДСТВЕННИК ◀ ТАНГРАМА ▶

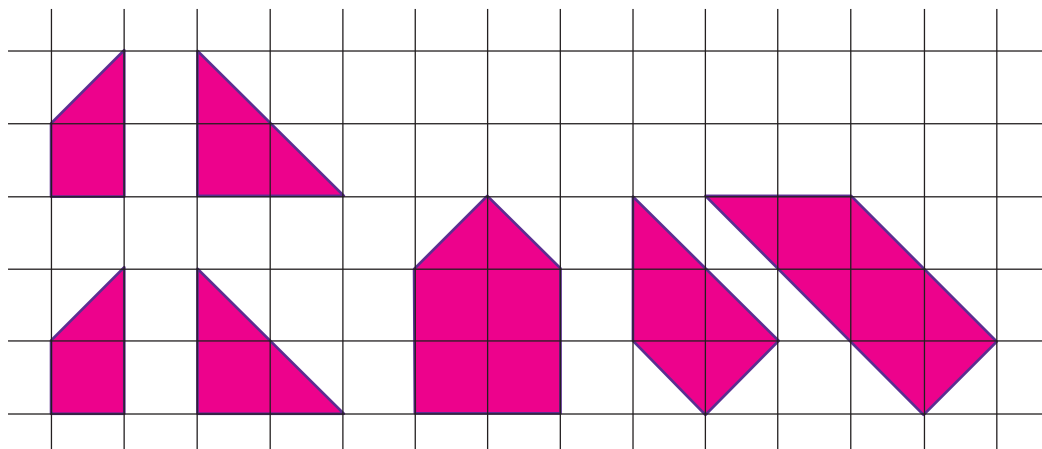


Эта головоломка состоит из семи элементов, показанных на рисунке. Каждый элемент можно мысленно разбить на равные равнобедренные прямоугольные треугольники. Основная задача – складывать из этих элементов разнообразные фигуры. Все это роднит ее с известными головоломками «Танграм» и «Пифагор». Давным-давно эту головоломку выпускал Московский завод тепловой автоматики, но собственного названия у нее не было — такая вот безымянная родственница своих двух известных братьев. Сделать ее несложно, вырезав элементы из картона, пластика или фанеры.

Из элементов головоломки можно сложить прямоугольник (сделайте это). Но можно сложить и много других фигур: в инструкции к головоломке предлагалось сложить аж 129 разных фигур (например, швейцарский крест)! Интересно, что выпуклыми из них были всего восемь. Кроме прямоугольника это трапеция, два вида пятиугольников и четыре вида шестиугольников. Попробуйте найти их.

Но оказывается, что это не все выпуклые фигуры, которые можно собрать из элементов нашей головоломки. Задача поиска всех таких фигур непростая, и если вы хотите за нее взяться, то предлагаем сначала ознакомиться со статьей А.Панова «Загадка фигуры №51» («Квант» №12 за 1982 г.), в которой аналогичный вопрос решен для родственных головоломок — «Танграма» и «Пифагора».

*В.Журавлев*



## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.Л.Семенов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,  
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
П.А.Кожевников (*заместитель главного редактора*),  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев,  
И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица,  
В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,  
В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер

- 2 День – ночь – сумерки... *С.Варламов*  
5 Магия комплексных чисел. *А.Канунников*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 12 Задачи M2462–M2465, Ф2469–Ф2472  
14 Решения задач M2450–M2453, Ф2457–Ф2460

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 21 Задачи  
22 Рулетка и ребро жесткости. *С.Дворянинов*

## ФИЗИКА – ИНЖЕНЕРАМ

- 23 Геомолоток и тайна полезного удара.  
*А.Фридрихсон*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 28 Алгебра и геометрия комплексных чисел.  
*А.Канунников*  
34 Физика града. *В.Дроздов*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Паркеты из выпуклых многоугольников

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 36 Поляра. *Д.Швецов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 40 LXXX Московская математическая олимпиада  
42 Московская физическая олимпиада 2017 года

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 48 Инженерная олимпиада школьников  
49 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к «Калейдоскопу» «Кванта»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# День – сумерки – ночь...

*С.ВАРЛАМОВ*

**НЕБО НАД НАШИМИ ГОЛОВАМИ ДНЕМ** ярко голубое, ночью черное и в звездах. А вот при переходе от дня к ночи и от ночи к дню небо расцветено, причем яркость свечения распределена по нему неравномерно. Перед восходом Солнца на рассвете свечение постепенно нарастает, а на закате после захода Солнца – тоже постепенно, но убывает.

Свет Солнца, проходящий сквозь воздух, рассеивается его частицами, и этот рассеянный свет освещает землю и воспринимается нами как свечение неба. Иными словами, свечение неба – не самостоятельное. Атмосферный воздух прозрачен – большая часть потока света Солнца проникает сквозь толстый слой воздуха, можно сказать, почти беспрепятственно.

Если смотреть в направлении, для которого слой освещенного Солнцем воздуха больше, чем в других направлениях, то при прочих равных условиях и яркость неба в этом направлении тоже больше. Например, когда лучи света падают на землю отвесно, т.е. Солнце «стоит над головой», эквивалентная толщина  $H$  слоя атмосферного воздуха составляет около 8 километров. «Эквивалентность» понимается в том смысле, что создаваемое модельной атмосферой давление воздуха будет таким же, как и для реальной атмос-

феры, только для модельного расчета предполагается неизменной плотность воздуха на разных высотах. Конечно, на самом деле плотность воздуха убывает с высотой, но для качественных оценок модель атмосферы равной плотности вполне годится.

Когда Солнце находится вблизи горизонта, расстояние до поверхности Земли, проходимое прямыми лучами света в атмосфере, гораздо больше 8 километров. На рисунке 1 атмосфера Земли символически изображена бледно-голубым слоем. Примем высоту этого слоя равной  $H$ . Тогда в прямоугольном треугольнике отрезками черного цвета показаны один из катетов длиной  $R$  и гипотенуза длиной  $R + H$ , где  $R$  – это радиус Земли. Второй катет этого треугольника (показан красным цветом) соответствует половине длины участка атмосферы, сквозь который проходят лучи Солнца, касающиеся поверхности Земли. Длину этого катета можно оценить как

$$L = \sqrt{(R + H)^2 - R^2} = \sqrt{2RH + H^2} \approx 320 \text{ км}.$$

Поэтому утром и вечером, когда Солнце находится невысоко над горизонтом, чистое небо непосредственно над головой всегда имеет меньшую яркость, чем соответствующие участки неба, видимые в других направлениях.

Поток света от Солнца в земных условиях можно считать однородным, т.е. почти не зависящим от месторасположения в воздухе. А если бы поток менялся от места к месту, то, естественно, интенсивность рассеянного света была бы пропорциональна интенсивности потока света. Такова, например, ситуация с рассеянием света уличного фонаря пробивающегося сквозь туманный воздух (рис.2). По мере удаления от фонаря поток прямых лучей света

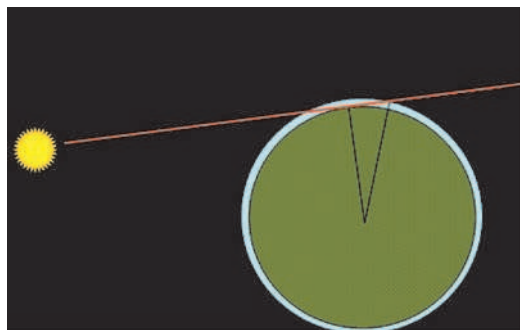


Рис. 1



Рис. 2

убывает, и яркость свечения тумана становится тем меньше, чем дальше от фонаря проходит линия, вдоль которой направлен взгляд наблюдателя. Если рассеяние достаточно слабое, т.е. туман не слишком густой, то вблизи источника света малых размеров яркость свечения тумана убывает обратно пропорционально величине «прицельного расстояния» взгляда наблюдателя.

Если прямые лучи Солнца падают на препятствия в воздухе, то в области тени воздух рассеивает излучение, ранее рассеянное другими участками воздуха (т.е. происходит вторичное рассеяние лучей). Интенсивность свечения этого участка воздуха существенно уменьшается. Например, если смотреть вдоль области тени, созданной инверсным следом самолета, летевшего по прямой, то в воздухе виден темный луч (рис.3).



Рис. 3

Параллельные пучки света, пронизывающие воздух там, где препятствий нет, заставляют воздух светиться, и эти светящиеся области хорошо видны на фоне слабо светящегося воздуха, находящегося в тени препятствий (рис.4).

Интенсивность света, рассеянного определенным количеством воздуха (например, одним молекул), зависит как от длины волны световых лучей, так и от угла, который составляют друг с другом направление распространения прямых лучей Солнца и направление распространения рассеянного света. Области поглощения молекул, из которых в основном состоит воздух, приходятся на диапазон ультрафиолетовых лучей, поэтому в видимом диапазоне воздух прозрачен. В молекулах воздуха, находящихся в электромагнитном поле световых лучей, происходит поляризация электрических зарядов, и при этом дипольный электрический момент молекул пропорционален напряженности электрического поля  $E_0 \cos \omega t$  световой волны. Атомы и молекулы массивны, а электроны внешних оболочек легкие, поэтому можно считать, что дипольный момент связан со смещением легких электронов по отношению к тяжелому остатку молекулы.

Вынужденные движения электронов, имеющих заряд  $q$  и массу  $m$ , в атомах под действием внешнего переменного электрического поля  $E_0 \cos \omega t$  можно описывать так же, как и колебания механической системы, состоящей из груза массой  $m$ ,



Рис. 4

связанного с пружиной жесткостью  $k$ , под действием переменной силы с нерезонансной частотой  $\omega$ . Квадрат резонансной частоты обеих систем равен  $\omega_0^2 = k/m$ . При частотах изменения внешней силы, меньших резонансной частоты, мгновенные величины смещения электронов от равновесного положения в атомах равны

$$A(t) = A_0 \cos \omega t = \frac{E_0 q}{k} \cos \omega t.$$

Средняя по времени мощность излучаемых при таких колебаниях электрического заряда электромагнитных волн пропорциональна квадрату амплитуды ускорения движущегося электрического заряда, т.е. величине  $(A_0 \omega^2)^2$ . Частота колебаний электрического вектора в световой волне  $\omega$  и длина волны света  $\lambda$  связаны друг с другом соотношением  $\lambda \omega = \text{const}$ . Поэтому рассеиваемая молекулами воздуха световая мощность подчиняется закону рассеяния, установленному Рэлеем и имеющему вид

$$W \sim \omega^4 \sim \lambda^{-4}.$$

Из этого закона следует, что чем меньше длина волны света, тем интенсивнее рассеяние света. Воздух в наибольшей степени рассеивает лучи из коротковолновой части спектра излучения Солнца, а длинноволновое излучение рассеивается меньше. Вот почему небо днем голубое, а Солнце вблизи горизонта красное. Наибольшая мощность при таком механизме рассеивания света направляется перпендикулярно вектору ускорения движущейся заряженной частицы. В результате свет неба оказывается частично поляризованным. Различные условия освещения атмосферного воздуха и зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны излучения создают широчайшую гамму цветов, оттенков и яркостей свечения воздуха. Советуем читателям обратиться к замечательной книжке М. Миннарта «Свет и цвет в природе», чтобы познакомиться с самыми разными световыми явлениями, которые можно наблюдать в атмосфере.

В сумерках, когда Солнце находится за горизонтом, небо (тот его участок, что нам

виден напрямую) все еще освещается лучами Солнца, и это придает небу цвет и светимость. Метеорологи, занимающиеся атмосферной оптикой, между днем и ночью выделяют два отрезка времени. Первый, называемый гражданскими сумерками, включает промежуток от момента захода Солнца до момента, когда прямые лучи Солнца освещают только половину видимого наблюдателем воздуха (это соответствует уменьшению освещенности поверхности Земли и предметов на ней светом неба примерно вдвое). К концу гражданских сумерек Солнце находится под горизонтом, и угол между направлением на Солнце и горизонтом составляет

$$\frac{180^\circ}{\pi} \frac{320}{6400} \approx 3^\circ.$$

Второй отрезок, называемый навигационными сумерками, включает промежуток от момента окончания гражданских сумерек до момента, когда прямые лучи Солнца освещают воздух над головой наблюдателя только в верхних слоях атмосферы. К концу навигационных сумерек угол между направлением на Солнце и горизонтом составляет

$$2 \frac{180^\circ}{\pi} \frac{320}{6400} \approx 6^\circ.$$

При этом облака (и воздух) на высотах выше 8 километров над головой наблюдателя все еще освещены прямыми лучами Солнца.

Можно дополнительно выделить моменты времени начала рассвета и конца заката, когда прямыми лучами Солнца освещается воздух на высоте 8 километров, видимый наблюдателем на горизонте. Такие ситуации соответствуют положению Солнца на  $12^\circ$  ниже горизонта. В местах, расположенных на Земле за полярным кругом, Солнце часть времени года вообще не заходит за горизонт, а в широтах выше  $60^\circ$  летом наблюдаются так называемые белые ночи, когда сумерки вечерние смыкаются с сумерками утренними и ночи как таковой — с черным

(Окончание см. на с. 11)

# Магия комплексных чисел

А.КАНУННИКОВ

О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ НАПИСАНО невероятное число научно-популярных статей и учебных пособий, были публикации [4, 5, 6] и в журнале «Квант». В чем секрет такой популярности и зачем написана еще одна статья? Главный аспект – научный: комплексные числа вездесущи, они прочно вошли в самые разные области математики и физики. Мощь аппарата комплексных чисел, красоту и богатство их применений может оценить уже школьник на примере задач элементарной математики. Также полезно и увлекательно изучать историю вопроса: как комплексные числа появились и развивались, как даже великие умы в них поначалу не верили, но со временем привыкали, восторгаясь их удивительной силой. Очень часто выводы, к которым приходили ученые, опережали строгие доказательства, иногда – на века... От этого комплексные числа только подтверждали свою репутацию таинственных и мистических, но в то же время это ускоряло построение математического фундамента и развитие новых научных теорий.

Главную цель статьи раскрывает ее название. Мы хотим поразить вас, уважаемый читатель, показав несколько красивых сюжетов о комплексных числах, имеющих вместе с тем и важное научное значение. Чем меньше вы знаете о комплексных числах, тем удивительнее будут для вас результаты, тем сильнее будет эффект неожиданности. Представьте, что вы пришли на представление иллюзиониста, и усаживайтесь поудобнее – кролики, спрятанные в шляпах, с нетерпением ждут своего появления и ваших аплодисментов!

На первых порах достаточно иметь самые начальные представления о комплексных числах:

- это «числа» (выражения, записи) вида  $a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i$  – так называемая мнимая единица, удовлетворяющая соотношению  $i^2 = -1$ ;

- число  $a + bi$  можно считать точкой  $(a, b)$  на координатной плоскости  $\mathbb{R}^2$ ;

- комплексные числа складываются и умножаются по обычным правилам, при раскрытии скобок  $(a + bi)(c + di)$  пользуемся определением числа  $i$  и получаем  $ac - bd + (ad + bc)i$ ;

- для числа  $z = a + bi$  определены: действительная часть  $\operatorname{Re} z = a$ , мнимая часть  $\operatorname{Im} z = b$ , сопряженное число  $\bar{z} = a - bi$  и модуль  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  (рис. 1).

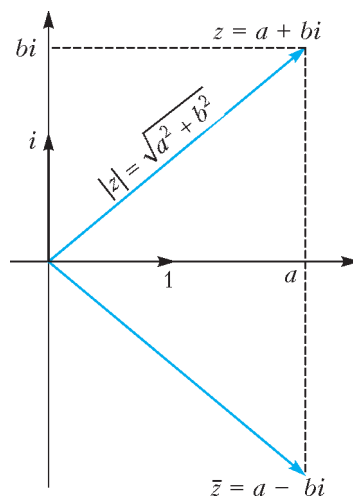


Рис. 1

Более подробно и систематично мы расскажем о комплексных числах в этом же номере журнала (с.28).

## §1. Сумма квадратов раскладывается! С далеко идущими последствиями...

Когда я впервые увидел формулы сокращенного умножения, мне бросилось в глаза, что они все разбиты на пары... все, кроме одной:

$$\begin{array}{ll}
 (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 a^2 + b^2 = ? & a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\
 a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)
 \end{array}$$

«Почему же нет формулы для суммы квадратов?» – подумал я тогда, в 6 классе... И был очень удивлен, когда через пять лет на Малом мехмате узнал от своего товарища, первокурсника мехмата, как ему на устном вступительном экзамене задали ровно этот вопрос! «Ты, конечно, блеснул знаниями, заявив, что формула есть, но нужны комплексные числа?» – спросил я. «Не-е, я не рискнул, – улыбувшись ответил он. – Я честно объяснил, почему формулы не существует».

**Задача 1.** Объясните и вы, почему выражение  $a^2 + b^2$  не раскладывается на множители с действительными коэффициентами.

Так вот, с появлением мнимой единицы сумму квадратов удается разложить:

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi). \quad (1)$$

Важное следствие: всякое ненулевое комплексное число  $a + bi$  обратимо:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

**Задача 2.** Докажите, что произведение двух чисел, представимых в виде суммы двух полных квадратов, тоже представимо в таком виде:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (\dots)^2 + (\dots)^2.$$

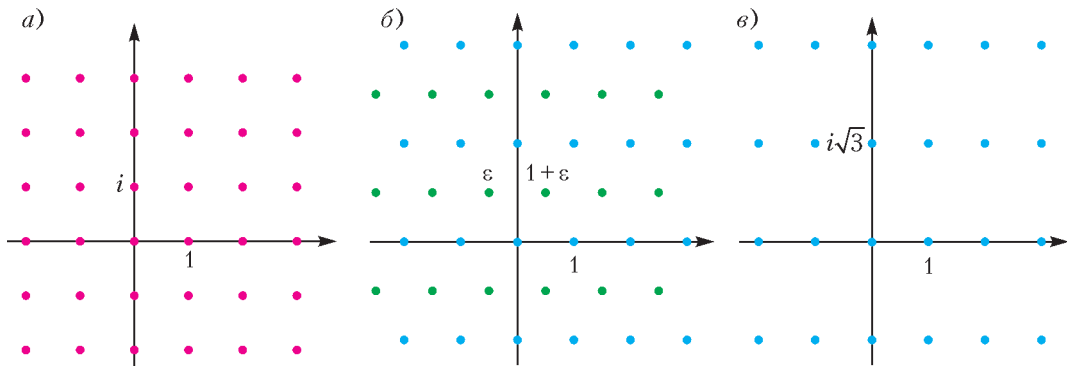


Рис. 2

Заполнив пропуски, вы получите *тождество Брахмагупты*. Попробуйте это сделать не подбором, а с помощью формулы (1). Так вы попутно откроете свойства сопряжения и модулей:  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$ ,  $|zw| = |z||w|$  для всех  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Разложение суммы квадратов открывает новые горизонты в теории чисел. Для решения многих задач множество  $\mathbb{Z}$  целых чисел расширяют до множества

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

*целых гауссовых чисел* (рис.2,а), в которых тоже имеется однозначное разложение на простые множители (см., например, [5]). В качестве примера попробуем решить два уравнения в целых числах:

$$а) 4x^2 - 1 = y^3; \quad б) 4x^2 + 1 = y^3.$$

Преобразуем первое уравнение:  $(2x - 1)(2x + 1) = y^3$ . Множители  $2x \pm 1$  нечетны и отличаются на 2, а потому взаимно просты. Поскольку их произведение равно кубу, то они оба – кубы (здесь мы используем однозначность разложения на простые). Но  $\pm 1$  – единственная пара кубов, отличающихся на 2, поэтому  $(x, y) = (0, -1)$  – единственное решение уравнения.



Уравнение б) очень похожее, но чтобы действовать аналогично, придется выйти в область  $\mathbb{Z}[i]$  – и это чуть ли не единственный способ решения! Имеем:  $(2x + i)(2x - i) = y^3$ . Из свойств гауссовых чисел легко вывести, что оба множителя  $2x \pm i$  – полные кубы. Таким образом,  $2x + i = (a + bi)^3$  для некоторых целых  $a$  и  $b$ , а дальше просто.

**Задача 3.** Завершите решение уравнения б). А может быть, вам удастся придумать решение без комплексных чисел?

Еще одно интересное явление: некоторые простые числа становятся составными в  $\mathbb{Z}[i]$ . Например,

$$\begin{aligned} 2 &= 1^2 + 1^2 = (1 + i)(1 - i), \\ 5 &= 2^2 + 1^2 = (2 + i)(2 - i), \\ 13 &= 3^2 + 2^2 = (3 + 2i)(3 - 2i). \end{aligned}$$

Простой критерий таких чисел дает знаменитая теорема Эйлера–Ферма.

**Теорема 1 (Эйлер–Ферма).** Для натурального простого числа  $p > 2$  следующие условия равносильны:

- (1)  $p$  – составное в  $\mathbb{Z}[i]$  (т.е.  $p = uv$  для некоторых  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $|u|, |v| > 1$ );
- (2)  $p = a^2 + b^2$  для некоторых  $a, b \in \mathbb{N}$ ;
- (3)  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Доказательство – на странице 51. Отметим, что содержательна только импликация (3)  $\Rightarrow$  (2) (иногда лишь ее называют теоремой Эйлера–Ферма), остальные импликации вы можете доказать без труда.

В заключение отметим, что с помощью комплексных чисел раскладывается не только сумма квадратов  $a^2 + b^2$ , но и любая квадратичная форма. Например,

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = (a + b\varepsilon)(a + b\bar{\varepsilon}),$$

где  $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ .

В целочисленных задачах это приводит к соответствующему расширению области  $\mathbb{Z}$  какими-то мнимыми числами. Так, приведенное разложение приводит к области  $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  эйзенштейновых чисел (рис.2,б), которые использовал еще Эйлер за век до Эйзенштейна для решения Великой проблемы Ферма с показателем 3. Так в теории

чисел оформился новый раздел – представление чисел квадратичными формами.

**Задача 4.** Если быть более точным, в рассуждениях Эйлера был пробел из-за того, что он работал в подмножестве

$$\mathbb{Z}[-\sqrt{3}] = \{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}[\varepsilon]$$

(рис.2,в), в котором нет однозначного разложения на простые. Приведите пример.

Подробно и увлекательно о гауссовых, эйзенштейновых числах и многом другом вы можете прочитать в замечательной книге [2]. А мы продолжим тему разложения на множители.

### §2. Разложение многочленов на множители

Это одна из стандартных задач элементарной алгебры, и встречается она, уж поверьте, не только в школьных задачаниках – раскладывать многочлены приходится в самых разных областях науки.

Наш читатель наверняка владеет разными приемами разложения, помимо таких стандартных, как группировка, формулы сокращенного умножения и поиск рациональных корней. Разберем несколько более интересных примеров: а)  $x^4 + 1$ ; б)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ; в)  $x^6 + x^3 + 1$ .

Легко видеть, что при всех  $x \in \mathbb{R}$  эти выражения положительны (кстати, почему?). Однако это, конечно, не значит, что разложить их нельзя – вполне может найтись разложение в произведение квадратных трехчленов (с отрицательными дискриминантами). И правда, в пункте а) для этого достаточно прибавить и вычесть  $2x^2$ :

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Многочлен в б) удобно разделить на  $x^2$  – это позволит сделать замену  $y = x + \frac{1}{x}$  (вообще, стандартная идея для симметричных многочленов):

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \underbrace{x + \frac{1}{x}}_y - 1 = \\ &= \left(y - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \left(y + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

откуда

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + 1\right) \left(x^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + 1\right). \quad (4)$$

Самое интересное начинается в пункте в). Здесь та же идея приводит к кубическому многочлену:

$$x^3 + 1 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = y^3 - 3y + 1. \quad (5)$$

О том, как решать кубические уравнения, мы расскажем в следующем параграфе, а пока приведем готовое разложение в надежде шокировать читателя:

$$x^6 + x^3 + 1 = \left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{9}x + 1\right) \times \left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{9}x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\frac{8\pi}{9}x + 1\right). \quad (6)$$

(Мы не будем предлагать читателю проверить правильность этого разложения, ведь раскрытие скобок приведет к нетривиальным тригонометрическим соотношениям.)

Итак, каждый из трех многочленов нам удалось разложить, применив тот или иной трюк (решение в) см. в примере на с. 10). На самом деле, все три пункта допускают единообразное решение с помощью комплексных чисел, которое обобщается на многочлены того же вида любых степеней:

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}x + 1\right), \quad (7)$$

$$x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x + 1 = \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1}x + 1\right), \quad (8)$$

$$x^{2n} + x^n + 1 = \prod_{\substack{1 \leq k \leq 3n \\ k \not\equiv 3}} \left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi k}{3n}x + 1\right). \quad (9)$$

Как получить эти фантастические разложения и при чем тут косинусы, мы объясним в §5, а сейчас предложим читателю убедиться, что при  $n = 2$  разложения (7) и (8) совпадают с полученными ранее:

$$x^4 + 1 = \left(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{4}x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\frac{3\pi}{4}x + 1\right);$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}x + 1\right).$$

Для первого это очевидно, так как  $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . А для второго – вытекает из результата следующей очень известной задачи.

**Задача 5.** Докажите, что  $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

Есть много способов это доказать. Приведем указания к двум из них.

*I способ.* Проведите биссектрису угла  $\frac{2\pi}{5}$  в треугольнике с углами  $\frac{2\pi}{5}$ ,  $\frac{2\pi}{5}$ ,  $\frac{\pi}{5}$  и воспользуйтесь подобием возникающих треугольников. В процессе решения появится *золотое сечение*

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

*II способ.* Рассмотрим правильный пятиугольник с вершинами

$$A_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{5}, \sin\frac{2\pi k}{5}\right), \quad k = 1, \dots, 5$$

(рис.3). Докажите, что сумма векторов  $\overline{OA_k}$  равна  $\vec{0}$ , и перейдите к их проекциям на ось абсцисс.

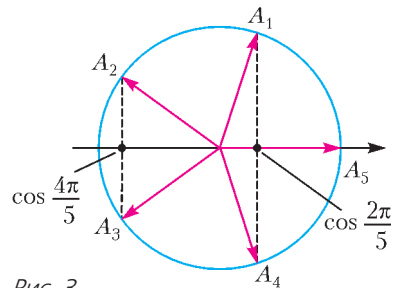


Рис. 3

«Разложения с косинусами и правда удивительные! Интересно, а комплексные числа позволяют разложить вообще любые многочлены?» – может спросить читатель. И да, и нет. Нет – потому что не существует алгоритма разложения произвольного многочлена (с помощью арифметических операций и извлечения корней). В то же время можно доказать *существование разложения*, не предъявляя

его явно. В этом состоит *основная теорема алгебры*.

**Теорема 2.** *Всякий многочлен положительной степени с комплексными коэффициентами раскладывается на линейные множители в комплексных числах.*

Кто и когда впервые доказал теорему – вопрос дискуссионный. Обычно ее приписывают Гауссу, который в 1824 году привел достаточно строгое рассуждение, но не забывают упомянуть и других математиков, чьи более ранние доказательства содержали определенные пробелы: Даламбер, Эйлер, Лаплас, Лагранж и др. (какое созвездие имен!). Не останавливаясь подробно на истории вопроса (см., например, [3]) и разных доказательствах [7], отметим лишь, что во всех них необходимы аналитические соображения (непрерывность, полнота действительной прямой и пр.), а полностью формализовать их удалось только после работ Коши начала XIX века.

Любопытно, что по сути равносильную теорему можно сформулировать (но не доказать!), используя лишь действительные числа.

**Теорема 3.** *Всякий многочлен положительной степени с действительными коэффициентами раскладывается на линейные и квадратные множители.*

Этот факт хорошо иллюстрируют разложения (7)–(9). Отметим, что теоремы 2 и 3 несложно выводятся друг из друга с помощью комплексного сопряжения.

### §3. Решение кубических уравнений

Обсудим задачу, которая привела к открытию комплексных чисел. Случилось это в Италии в первой половине XVI века, когда алгебра была еще наукой о решении уравнений, а до создания Виетом алгебраической символики, близкой к современной, оставалось полвека. Итальянские математики Сципион дель Ферро и Никколо Тарталья научились решать кубические уравнения (по-видимому, независимо друг от друга). Изложим их идею на современном языке, предполагая пока коэффициенты действительными.

Решение основано на формуле куба суммы

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \stackrel{(*)}{=} (a+b)^3 \stackrel{(**)}{=} \\ \stackrel{(**)}{=} 3ab(a+b) + a^3 + b^3. \quad (10)$$

С помощью равенства (\*) общее кубическое уравнение сводится линейной заменой к уравнению с нулевым коэффициентом при квадрате неизвестной<sup>1</sup>:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = \\ = \underbrace{\left(x + \frac{A}{3}\right)^3}_{x^3 + Ax^2 + \dots} + p\left(x + \frac{A}{3}\right) + q.$$

Теперь – ключевая идея: равенство (\*\*) подсказывает один из корней уравнения

$$x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0 \quad (11)$$

– число  $a + b$ . Осталось дело за малым – свести уравнение  $x^3 + px + q = 0$  к виду (11). Для этого найдем  $a$  и  $b$  из системы

$$\begin{cases} p = -3ab \left( \Rightarrow a^3b^3 = -\frac{p^3}{27} \right), \\ q = -a^3 - b^3 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{a^3, b^3\} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

откуда получим формулу для корня:

$$x_1 = a + b = \\ = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Эта формула получила название «формула Кардано», хотя сам Кардано узнал ее от Тарталья, чего никогда не скрывал. Вопреки наказу Тарталья, Кардано так и опубликовал формулу в своем трактате «Великое искусство», а также метод решения уравнения четвертой степени, открытый его учеником Феррари. Подробнее об этой захватывающей истории и о жизни ее героев мы рекомендуем прочитать в замечательных книгах [2, 3].

Казалось бы, формула найдена, но возникает проблема: что если  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ ?

<sup>1</sup> Аналогично тому, как квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  линейной заменой  $x + \frac{p}{2} = y$  сводится к двучленному  $y^2 = \frac{p^2}{4} - q$ .

И здесь итальянские математики решают-ся на весьма смелый по тем временам шаг: они извлекают кубический корень из «числа» вида  $u + v\sqrt{-1}$ , где  $u, v \in \mathbb{R}$ , среди «чисел» того же вида, обращаясь с ними по формальным алгебраическим правилам. В итоге «странный объект»  $\sqrt{-1}$ , использованный в промежуточных выкладках, чудесным образом испарялся, но покоя все равно не давал. В конце концов, с огромным трудом, он таки получил права гражданства.

Чтобы проверить сказанное на примере, пойдем с конца: пусть под кубическим корнем стоит полный куб, скажем,  $(1+i)^3 = -2 + 2i = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ , тогда  $q = 4$ ,  $p = -6$ . При этом под вторым корнем стоит сопряженное число  $-2 - 2i = (1-i)^3$ . Сложив теперь  $1+i$  и  $1-i$ , мы получим корень  $x_1 = 2$  уравнения  $x^3 - 6x + 4 = 0$ .

«Подумаешь! – может пожать плечами современный старшеклассник, – сложили два комплексно-сопряженных числа, и их мнимые части сократились. Что тут особенного?» С высоты XXI века, конечно, ничего, но для XVI века это были по-настоящему революционные открытия, воистину «Великое искусство», как назвал свою книгу Кардано. Вы только подумайте: тогда даже отрицательные числа далеко не всеми признавались<sup>2</sup>, да и алгебраической символики не было – так, вместо формулы (10) куб с ребром  $a + b$  рассекали тремя плоскостями... Примечательно, что Виет подарил миру язык формул именно после изучения трудов итальянских математиков Кардано, Бомбелли и др.

Давайте скорее вернемся к многочлену  $y^3 - 3y + 1$  из (5) и применим формулу к нему. Получим

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Обещанных косинусов  $\cos \frac{2\pi}{9}$ , ... из (6)

<sup>2</sup> Уравнения  $x^3 + ax = b$  и  $x^3 = ax + b$  на полном серьезе рассматривали как разные – для каждого был свой рецепт! Да-да, не удивляйтесь, все так и было.

пока не видно, да и откуда им взяться из *чисто алгебраических выкладок*? Впрочем, от подкоренных выражений определенно веет тригонометрией... ведь это всем знакомые «табличные значения»  $\cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}$ . Развязка близка! И ускорит ее еще один метод решения кубических уравнений – тригонометрический.

**Метод Виета** основан на формуле тройного угла:  $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$ . Продемонстрируем идею на примере уравнения  $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ . Попробуем найти  $x$  в виде  $\cos \varphi$ :

$$4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\varphi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\varphi = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Значит,

$$4x^3 - 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9} \right\}$$

(нашли три корня, других нет). Отсюда

$$8x^3 - 6x + 1 =$$

$$= 8 \left( x - \cos \frac{2\pi}{9} \right) \left( x - \cos \frac{4\pi}{9} \right) \left( x - \cos \frac{8\pi}{9} \right).$$

По счастливому совпадению, многочлен  $y^3 - 3y + 1$  получается отсюда заменой  $y = 2x$ , откуда и следует разложение (6).

Пора объявлять антракт! Наверняка, после всего прочитанного накопились вопросы<sup>3</sup>.

**Задача 6.** Появились ли у вас следующие вопросы? В любом случае поразмышляйте над ними.

а) Так все-таки, как пользоваться формулой Кардано (12) в случае  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$  (пусть пока  $p, q \in \mathbb{R}$ )? Где-то удастся подобрать значения кубических корней, где-то помогает тригонометрия. Но хотелось бы четкого алгоритма, как

<sup>3</sup> Ставить грамотные вопросы подчас не менее важно, чем получать ответы.

извлекать кубический корень из комплексного числа. А если  $p, q \in \mathbb{C}$ , то для начала надо научиться извлекать квадратный корень

$$\sqrt{\frac{q^2 + p^3}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

б) Никто не спорит, что, зная один корень кубического уравнения, два других найти легко. Что это за корни для уравнения (11), помимо  $x_1 = a + b$ ? И можно ли их вычислять по той же формуле Кардано?

в) На какие уравнения распространяется метод Виета? Всякое ли уравнение  $x^3 + px + q = 0$  можно «подогнать» под формулу тройного угла – свести к уравнению вида  $4z^3 - 3z = a$ ? И как решать последнее уравнение при  $|a| > 1$  (не говоря уже о случае  $a \in \mathbb{C}$ )?

На этом мы заканчиваем... нет – прерываем наше путешествие по удивительному миру комплексных чисел. Мы его продолжим в рубрике «Школа в «Кванте», где уже вы, уважаемый читатель, сможете примерить на себя костюм фокусника и помахать волшебной палочкой. А почти все секреты этого представления вы найдете «за кулисами» (с. 51). Не отчаивайтесь,

если многое из увиденного было не очень понятным, – вы непременно освоите секреты мастерства, стоит только захотеть. Помните: отточенная техника и навыки достигаются упражнением и приходят только после тренировок.

**Список литературы**

1. Математика. Энциклопедия для детей. – М.: Аванта+, 1998.
2. М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский. Грани алгебры. – М.: Факториал, 2008.
3. С.Г.Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, 2013.
4. С.Дориченко. Комплексные числа. – «Квант», 2008, №5.
5. В.Сендеров, А.Стивак. Суммы квадратов и целые гауссовы числа. – «Квант», 1999, №3.
6. Ю.Соловьев. Комплексные числа. – «Квант», 1991, №7.
7. В.М.Тихомиров, В.В.Успенский. Десять доказательств основной теоремы алгебры. – «Математическое просвещение», сер. 3, 1997, т.1, с. 50–70.

*(Продолжение следует)*

**День – сумерки – ночь...**

*(Начало см. на с. 2)*

небом и яркими звездами на нем – не наблюдается.

Длинными зимними ночами в высоких широтах на Земле воздух иногда светится под воздействием заряженных энергичных частиц, прилетающих из космоса (от

Солнца), которые магнитным полем Земли направляются в полярные области. Полярное сияние – так называется такое свечение воздуха. Полюбоваться полярным сиянием можно в натуре или воспользовавшись фотографиями (рис.5 и 4-я с. обложки), сделанными в разных местах и в разное время энтузиастами-наблюдателями.



Рис. 5

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2462–M2464, M2465a предлагались на II Кавказской математической олимпиаде. Задачи Ф2469–Ф2472 предлагались на Московской городской олимпиаде по физике 2017 года.

## Задачи M2462–M2465, Ф2469–Ф2472

**M2462.** В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков среди 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает сыгранными, а некоторые – нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовем пятерку кандидатов *перспективной*, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовем кандидата *универсальным*, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

В.Брагин

**M2463.** Действительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right| < 2$ . Докажите,

что для этих чисел верны также неравенства  $\left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right| < 2$  и  $\left| \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} \right| < 2$ .

Л.Емельянов

**M2464.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  меньше стороны  $BC$ ,  $BH_b$  – высота, точка  $O$  – центр описанной окружности (рис. 1). Прямая, проходящая через  $H_b$  параллельно прямой  $CO$ , пере-

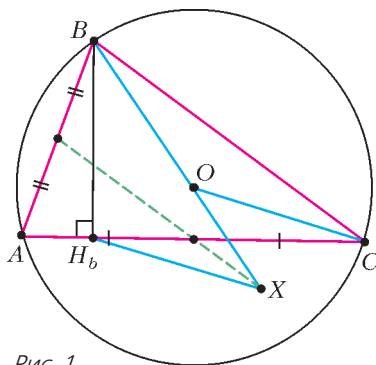


Рис. 1

секает прямую  $BO$  в точке  $X$ . Докажите, что точка  $X$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$  лежат на одной прямой.

П.Кожевников

**M2465.** а) На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Одна из этих точек красная, а остальные синие. Треугольник с вершинами в синих точках называется *хорошим*, если красная точка находится внутри него. Может ли оказаться, что количество хороших треугольников составляет не менее половины от общего количества треугольников с вершинами в синих точках?

б) На окружности отмечены 99 точек. Каково наибольшее количество остроугольных треугольников среди всех треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Фольклор

**Ф2469.** Вова, Саша и Егор одновременно начали движение с постоянными скоростями в одном направлении (по часовой стрелке) из трех равноудаленных друг от друга точек кругового мотовелотрека (рис.2). Через некоторое время Саша, движущийся на мотоцикле с самой

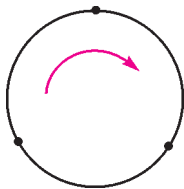


Рис. 2

большой скоростью, поравнялся с Вовой и Егором, которые в тот же момент встретились в первый раз. Какая скорость  $v$  могла быть у Саши, если Егор и Вова ехали на велосипедах со скоростями  $v_1 = 10$  км/ч и  $v_2 = 20$  км/ч соответственно? Известно, что скорость Саши не превышала 80 км/ч.

*М.Замятнин*

**Ф2470.** В соленом океане плавают три небольших айсберга 1, 2 и 3, как показано на рисунке 3 (масштабы соблюдены не

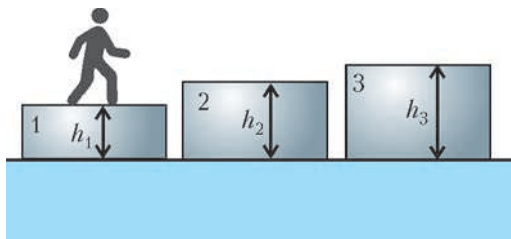


Рис. 3

езде). Каждый из них имеет форму прямоугольного параллелепипеда. На айсберге 1 стоит человек. Площади поверхностей верхних граней у айсбергов одинаковы, а высоты надводных частей равны  $h_1 = 5$  см,  $h_2 = 10$  см и  $h_3 = 12$  см соответственно. Когда человек перешел с айсберга 1 на айсберг 2, то при равновесии поверхности айсбергов 1 и 2 оказались на одинаковой высоте над уровнем воды. После этого человек перешел с айсберга 2 на айсберг 3. Определите, какими после этого стали высоты надводных частей каждого из айсбергов, когда вновь наступило равновесие.

*М.Ромашка*

**Ф2471.** Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 4, собрана из

двух батарей с ЭДС  $U_1 = 36$  В и  $U_2 = 12$  В, а также трех вольтметров.

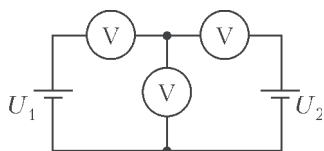


Рис. 4

Спротивление у одного из этих приборов в два раза меньше, чем у каждого из двух других. При этом сопротивление у каждого из вольтметров все равно значительно больше внутреннего сопротивления каждой батареи. Известно, что один из вольтметров показывает напряжение 24 В.

- 1) Какой именно вольтметр показывает 24 В?
- 2) Что показывают остальные вольтметры?
- 3) Определите, где включен вольтметр с малым сопротивлением, а где включены вольтметры с большим сопротивлением.

*П.Крюков, А.Бычков*

**Ф2472.** Два маленьких шарика массами  $m_1$  и  $m_2$  закреплены на концах тонкого жесткого очень легкого стержня длиной  $L$  (рис.5). Этот стержень покоится на

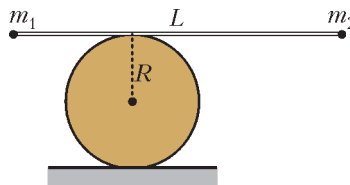


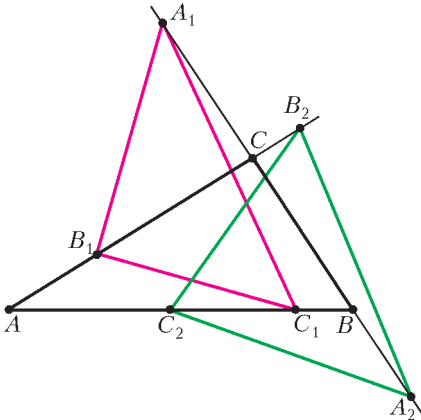
Рис. 5

поверхности шероховатого горизонтального неподвижно закрепленного цилиндра радиусом  $R$ . В положении равновесия стержень горизонтален и перпендикулярен оси цилиндра (на рисунке показан вид со стороны торца цилиндра). Стержень поворачивают на малый угол таким образом, что он движется относительно цилиндра без проскальзывания, и отпускают. После этого начинаются колебания, в процессе которых стержень катается по поверхности цилиндра также без проскальзывания, а шарики движутся в плоскости рисунка. Чему равен период этих колебаний? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

*М.Семенов, А.Якута*

**Решения задач M2450–M2453,  
Ф2457–Ф2460**

**M2450.** Дан треугольник  $ABC$ . На луче  $AB$  отметили такую точку  $C_1$ , что  $AC_1 = AC$ , на луче  $BC$  – такую  $A_1$ , что  $BA_1 = BA$ , на луче  $CA$  – такую  $B_1$ , что  $CB_1 = CB$ ; на луче  $BA$  отметили такую точку  $C_2$ , что  $BC_2 = BC$ , на луче  $CB$  – такую  $A_2$ , что  $CA_2 = CA$ , на луче  $AC$  – такую  $B_2$ , что  $AB_2 = AB$  (см. рисунок).



Докажите, что площадь треугольника  $ABC$  равна полусумме площадей треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ .

Положим  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ . Рисунок соответствует упорядочению длин сторон  $c \geq b \geq a$ .

Имеем

$$S_{A_1B_1C_1} = S - S_{AB_1C_1} - S_{BC_1A_1} + S_{CA_1B_1}, \quad (*)$$

$$S_{A_2B_2C_2} = S - S_{AB_2C_2} + S_{BC_2A_2} + S_{CA_2B_2}.$$

Нетрудно сравнить площади треугольников  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  и т.д. с площадью  $S$  треугольника  $ABC$ . Например,

$$S_{AB_1C_1} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \sin \angle A}{2} = \frac{(b-a) b \sin \angle A}{2} = \frac{(b-a)}{c} \cdot \frac{bc \sin \angle A}{2} = \frac{b-a}{c} S,$$

$$S_{BC_2A_2} = \frac{BC_2 \cdot BA_2 \sin \angle B}{2} = \frac{a(b-a) \sin \angle B}{2} = \frac{(b-a)}{c} \cdot \frac{ac \sin \angle B}{2} = \frac{b-a}{c} S.$$

Таким образом,  $S_{AB_1C_1} = S_{BC_2A_2}$ . Анало-

гично получаем, что  $S_{BC_1A_1} = S_{CA_2B_2}$  и  $S_{CA_1B_1} = S_{AB_2C_2}$ .

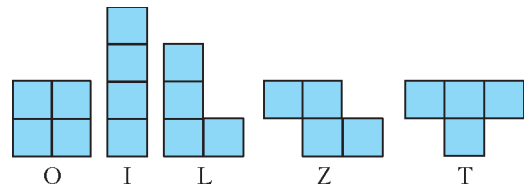
Сложив теперь равенства  $(*)$ , приходим к нужному равенству  $S_{A_1B_1C_1} + S_{A_2B_2C_2} = 2S$ . Возможны и другие способы подсчета площадей, например с использованием векторного произведения.

*П. Кучерявый*

**M2451.** Петя нарисовал многоугольник площадью 100 клеток, проводя границы по линиям квадратной сетки. Он проверил, что его можно разрезать по границам клеток и на 2 равных многоугольника, и на 25 равных многоугольников. Обязательно ли тогда его можно разрезать по границам клеток и на 50 равных многоугольников?

**Ответ.** Обязательно.

Каждый из 25 равных многоугольников содержит по четыре клетки, т.е. образует тетрамино. Есть пять видов тетрамино – в форме букв O, I, L, Z и T (см. рисунок).



Каждое тетрамино, кроме T, можно разрезать на доминошки, получив 50 равных многоугольников.

Предположим, что использовалось T-тетрамино. Раскрасим клетки Петиного многоугольника в шахматном порядке и подсчитаем разность  $D$  количеств черных и белых клеток. Пусть в одном из 50-клеточных многоугольников такая разность равна  $d$ . Поскольку четность разности чисел совпадает с четностью их суммы, число  $d$  четно. При наложении равных многоугольников цвета клеток не меняются или меняются все. Поэтому во втором 50-клеточном многоугольнике разность равна  $\pm d$ . Значит,  $D$  делится на 4. Но в каждом T-тетрамино исследуемая разность равна 2 или  $-2$ . Пусть для  $k$  T-тетрамино разность равна 2, а для остальных  $25 - k$  T-тетрамино разность равна  $-2$ . Тогда  $D = 2k - 2(25 - k) = 4k - 50$ .



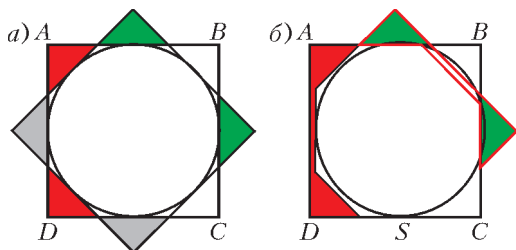
Видим, что  $D$  не делится на 4. Противоречие.

*Е.Бакаев*

**M2452.** Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на две части и покрыть ими какой-нибудь круг диаметра больше 1?

**Ответ.** Можно.

Рассмотрим круг диаметра 1 и объединение двух описанных вокруг него квадратов, повернутых на  $45^\circ$  относительно друг друга. Получится восьмиконечная звезда (см. рисунок *a*). Немного сдвинем круг



вправо и затем немного увеличим его гомотетией с центром в точке  $S$  касания со стороной  $CD$  так, чтобы увеличенный круг  $K$  оставался покрытым квадратом  $ABCD$  и двумя зелеными треугольниками.

Поскольку круг  $K$  не касается  $AD$ , то два красных треугольника можно соединить перешейком вне круга  $K$  (см. рисунок *б*). Разрежем теперь квадрат  $ABCD$  на красную фигуру и оставшуюся часть. Это и будет нужное нам разрезание. Действительно, оставшаяся часть квадрата  $ABCD$  и два зеленых треугольника покрывает весь круг  $K$ , а красную фигуру можно переместить так, чтобы накрыть два зеленых треугольника.

*А.Шаповалов*

**M2453.** На 2016 красных и 2016 синих карточках написаны положительные числа, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то 64 чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же 64 чисел. Всегда ли можно определить, на карточках какого цвета написаны попарные суммы?

**Ответ.** Всегда.

Все 64 неизвестных числа попарно различ-

ны, иначе на карточках некоторые числа были бы равны. Так как все попарные произведения положительны, то все 64 неизвестных числа одного знака, а так как их попарные суммы положительны, то этот знак плюс.

Упорядочим искомые числа  $a < b < \dots < y < z$ . Для карточек каждого цвета рассмотрим отношение наибольшего числа к наименьшему. В одном случае это  $\frac{y+z}{a+b}$ ,

в другом случае это  $\frac{yz}{ab}$ . Но легко видеть, что первое отношение меньше чем  $\frac{z}{a}$ , а

второе отношение – больше. Тем самым, первое отношение меньше второго. Отсюда будет понятно, на каких карточках написаны суммы и на каких произведения. Рассмотрим еще одно рассуждение, приводящее к решению. Так же, как и ранее, установим, что все 64 неизвестных числа положительны. Назовем числа, меньшие 2, *мелкими*, а числа, большие или равные 2, – *крупными*. Глядя на красные и синие карточки, можно узнать, найдутся ли среди неизвестных чисел два мелких или два крупных. Действительно, если среди неизвестных чисел не более одного мелкого числа, то и среди попарных сумм и среди попарных произведений не более 63 чисел, меньших 4. Если же среди неизвестных чисел не более одного крупного числа, то и среди попарных сумм, и среди попарных произведений не более 63 чисел, больших 4. Нетрудно проверить, что произведение двух мелких чисел меньше их суммы, поэтому если среди 64 неизвестных чисел есть два мелких, то наименьшее число на всех красных и синих карточках будет произведением. Аналогично, если среди 64 неизвестных чисел есть два крупных, то наибольшее число на всех красных и синих карточках будет произведением.

*Б.Френкин*

**Ф2457.** У танкера, перевозящего топливо, закончилось горючее, когда до порта осталось  $L = 100$  км. Чтобы доплыть до пункта назначения, капитан решил использовать груз в качестве топлива для танкера. Какое наименьшее количество

тонн топлива придется потратить, чтобы добраться до порта по прямой? Скорость танкера зависит от расхода топлива  $Q$  так, как показано на рисунке 1.

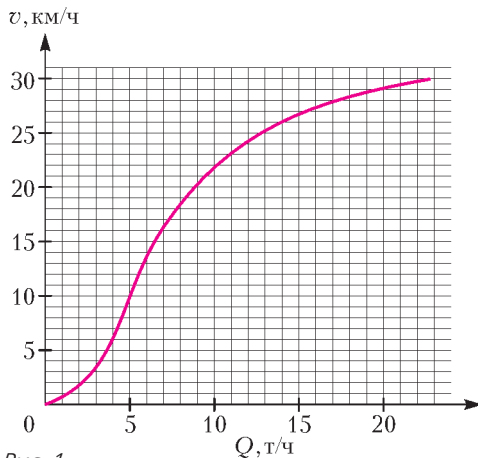


Рис. 1

Величина  $Q$  на рисунке 1 представляет расход топлива в расчете на единицу времени. Чтобы сжечь наименьшее количество топлива, добираясь до порта, танкеру надо двигаться с такой постоянной скоростью, чтобы был минимален расход топлива в расчете на единицу пути.

Пусть танкер идет со скоростью  $v$  и этой скорости соответствует расход топлива в единицу времени  $q$ . Тогда за время пути  $t = L/v$  будет потрачена масса топлива

$$M = qt = L \frac{q}{v}.$$

Величина  $q/v$  в этой формуле имеет смысл массы топлива, расходуемой на единицу пройденного пути. Значит, надо найти, у какой точки на графике отношение  $q/v$  минимально.

Несложно понять, что все точки на графике, у которых величина  $q/v$  одинакова, лежат на одной наклонной прямой, проходящей через начало координат. Например, для точек  $A$  и  $B$  на рисунке 2 расход на единицу пути одинаков, так как  $A$  и  $B$  располагаются на одной прямой, проходящей через начало координат. Чем меньше величина  $q/v$ , тем круче наклон соответствующей прямой. Значит, для решения задачи нам надо найти точки на графике, которые лежат на самой крутой прямой.

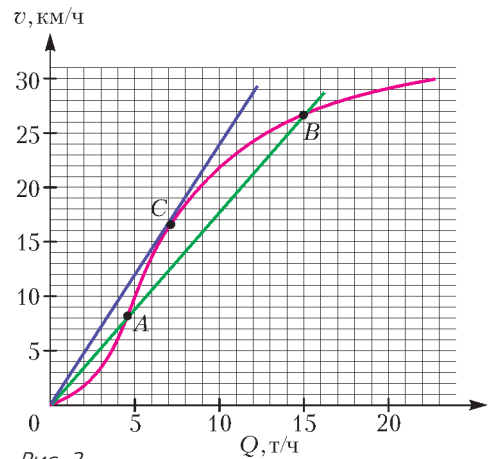


Рис. 2

Из рисунка 2 видно, что эта прямая касается графика в точке  $C$ . Все остальные прямые, пересекающие график и выходящие из нуля, имеют меньший наклон (например, уже рассмотренная нами прямая  $AB$ ). Вычислив отношение  $q/v$  в точке  $C$  — оно равно примерно  $0,43$  т/км, мы можем быть уверены, что это самый выгодный расход топлива на единицу пройденного пути. Чтобы пройти  $L = 100$  км до порта с таким расходом, придется потратить

$$M = L \frac{q}{v} \approx 43 \text{ т},$$

т.е. примерно 43 тонны топлива.

И.Буренев

**Ф2458.** Два робота двигаются по круговым траекториям вокруг общего центра с постоянными по модулю скоростями, радиус траектории первого  $R$ , второго  $\sqrt{2}R$  (рис.1). В начальный момент времени первый робот измерил расстояние до второго, оно оказалось равным  $R$ . Сделав половину оборота, первый робот снова измерил расстояние до второго. Оно стало равным  $\sqrt{3}R$ . Какое время нужно второму роботу, чтобы сделать один полный оборот вокруг центра? Известно, что первый робот делает оборот за  $T = 210$  с, а второй

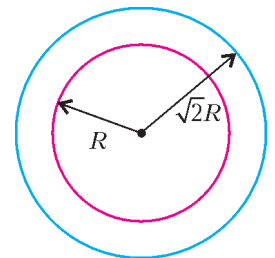


Рис. 1

не может совершить оборот быстрее чем за  $t_m = 100$  с.

Пусть точка  $O$  – общий центр круговых траекторий двух роботов, точка  $A$  – положение первого робота в начальный момент времени, точка  $B$  – его положение через пол-оборота, т.е. в момент  $T/2 = 105$  с (рис. 2). Определим положение второго робота в эти же моменты времени. В

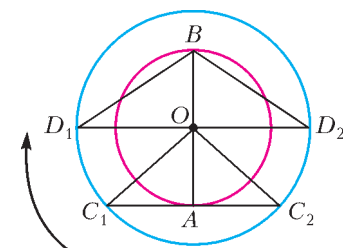


Рис. 2

начальный момент, по условию задачи, он может находиться в одной из двух точек  $C_1$  или  $C_2$ , причем

$$AC_1 = AC_2 = R, \quad OC_1 = OC_2 = \sqrt{2}R, \\ OA = R.$$

Мы изобразили треугольники  $OAC_1$  и  $OAC_2$  прямоугольными, потому что для них выполняется теорема Пифагора. Так как все катеты у этих треугольников равны, то  $\angle AOC_1 = \angle AOC_2 = 45^\circ$ . В момент  $T/2$  расстояние между роботами равно  $\sqrt{3}R$ . На таком расстоянии от  $B$  снова находятся две точки  $D_1$  и  $D_2$ , причем

$$BD_1 = BD_2 = \sqrt{3}R, \quad OD_1 = OD_2 = \sqrt{2}R, \\ OB = R.$$

Треугольники  $BOD_1$  и  $BOD_2$  тоже прямоугольные – ведь их катеты и гипотенузы снова удовлетворяют теореме Пифагора. Проанализируем возможные варианты перемещения второго робота за время  $T/2$ . В условии задачи не сказано, в каком направлении движутся роботы. Пусть второй робот движется по часовой стрелке и за время  $T/2$  сдвигается по своей окружности на угол  $\varphi$ . Будем, например, измерять этот угол в градусах. Полный оборот в  $360^\circ$  он сделает за время  $t$ , определяемое из условия постоянства скорости:

$$\frac{\varphi}{T/2} = \frac{360^\circ}{t},$$

откуда

$$t = T \frac{180^\circ}{\varphi}.$$

На эту величину по условию имеется ограничение:  $T \frac{180^\circ}{\varphi} \geq t_m$ , откуда получаем  $\varphi \leq 180^\circ \frac{T}{t_m}$ . Значит, величина  $\varphi$  не может превосходить  $\varphi_m = 378^\circ$ . Поэтому возможны следующие варианты.

1) Второй робот переместился из  $C_1$  в  $D_1$ , что соответствует  $\varphi = 45^\circ$  и периоду обращения второго робота

$$T_1 = T \frac{180^\circ}{45^\circ} = 4T = 840 \text{ с.}$$

2) Он переместился из  $C_1$  в  $D_2$ , тогда  $\varphi = 225^\circ$  и период

$$T_2 = T \frac{180^\circ}{225^\circ} = 168 \text{ с.}$$

3) Перемещение из  $C_2$  в  $D_1$ :  $\varphi = 135^\circ$ , период

$$T_3 = T \frac{180^\circ}{135^\circ} = 280 \text{ с.}$$

4) Перемещение из  $C_2$  в  $D_2$ :  $\varphi = 315^\circ$ , период

$$T_4 = T \frac{180^\circ}{315^\circ} = 120 \text{ с.}$$

Все эти значения периода обращения второго робота удовлетворяют условию задачи. Нетрудно также проверить, что, рассматривая движение против часовой стрелки, мы получим тот же набор значений периодов.

А.Горбенко

**Ф2459.** Лыдина массой  $M$  покоится на гладкой горизонтальной ледяной поверхности (рис.1; вид сбоку). Угол наклона  $ВАС$  равен  $\alpha$ ,  $BC = H$ . По наклонной плоскости от точки  $A$  к точке  $B$  начинает подниматься с постоянной относительно льдины скоростью  $v$  пингвин массой  $m$ . Пройдя треть пути до вершины, пингвин спотыкается и падает животом на льдину. При этом сразу после падения его скорость относительно льдины осталась равной  $v$ . Какова конечная скорость льдины, если коэффициент трения

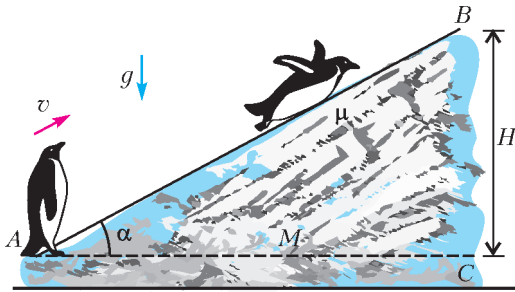


Рис. 1

между животом пингвина и поверхностью льдины  $\mu$ ? До начала движения пингвин неподвижно стоял в точке А на покоящейся льдине. Трением льдины о горизонтальную поверхность пренебречь.

Поскольку на систему льдина–пингвин в горизонтальном направлении внешние силы не действуют, проекция полного импульса на это направление сохраняется. Пусть в некоторый момент времени скорость льдины относительно земли равна  $U$  и направлена влево, а скорость пингвина относительно льдины равна  $V$  и направлена вверх по склону. Тогда скорость пингвина относительно земли равна  $\vec{U} + \vec{V}$ , а ее горизонтальная проекция равна  $U - V \cos \alpha$ . Из закона сохранения импульса получаем

$$MU + m(U - V \cos \alpha) = 0, \text{ или } U = \frac{mV \cos \alpha}{M + m}.$$

Пока пингвин равномерно взбирается по склону,  $V = v$  и скорость льдины постоянна. Затем пингвин спотыкается и начинает скользить вверх по льдине. Трение постепенно тормозит его, соответственно будет постепенно замедляться и льдина.

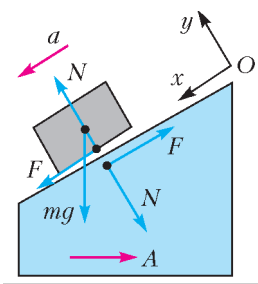


Рис. 2

Обозначим ускорение льдины относительно земли через  $\vec{A}$ , а ускорение пингвина относительно льдины – через  $\vec{a}$  (рис.2). Запишем второй закон Ньютона для льдины в проекции на горизонтальную

ось:

$$F \cos \alpha + N \sin \alpha = MA$$

и для пингвина в проекции на оси  $x$  и  $y$ :

$$F + mg \sin \alpha = m(a - A \cos \alpha),$$

$$N - mg \cos \alpha = -mA \sin \alpha,$$

где  $F = \mu N$  – сила трения скольжения. Данная система уравнений позволяет представить ускорение пингвина в виде

$$a_{\uparrow} = \frac{(1 + M/m)g}{\sin \alpha + \xi_{+} M/m}, \text{ где } \xi_{+} = \frac{1}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}.$$

Индекс « $\uparrow$ » помечает, что это ускорение найдено для ситуации, когда пингвин скользит вверх.

Имея начальную скорость  $v$  и замедляясь с постоянным ускорением  $a_{\uparrow}$ , пингвин должен проехать до полной остановки путь  $s_{\uparrow} = v^2 / (2a_{\uparrow})$ . Длина склона равна  $L = H / \sin \alpha$ ; когда пингвин споткнулся, его отделило от верхнего края расстояние  $2L/3$ .

Предположим, что

$$s_{\uparrow} > \frac{2L}{3}, \text{ или } \frac{v^2}{2a_{\uparrow}} > \frac{2H}{3 \sin \alpha}.$$

Тогда пингвин не успеет затормозить и вылетит со льдины, как с трамплина. Скорость пингвина  $v_{\uparrow}$  относительно льдины в момент отрыва можно определить из формулы равноускоренного движения

$$\frac{v^2 - v_{\uparrow}^2}{2a_{\uparrow}} = \frac{2H}{3 \sin \alpha}$$

и найти скорость льдины  $U_{\uparrow}$  в момент отрыва пингвина:

$$U_{\uparrow} = \frac{m \cos \alpha}{m + M} \sqrt{v^2 - \frac{4Ha_{\uparrow}}{3 \sin \alpha}}.$$

Это и будет конечной скоростью льдины в рассматриваемом случае.

Предположим теперь, что условие  $s_{\uparrow} > \frac{2L}{3}$  не выполнено. Тогда, проехав вверх по склону расстояние  $s_{\uparrow}$ , пингвин перестанет скользить вверх, его скорость, а значит, и скорость льдины обратятся в этот момент в ноль. При этом если  $\mu \geq \tan \alpha$ , то больше пингвин соскальзывать не будет, а льдина

останется неподвижной. Напротив, если  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ , то пингвин начнет соскальзывать вниз. Сила трения  $F$  изменит направление на противоположное, в результате для ускорения пингвина получим

$$a_{\downarrow} = \frac{(1 + M/m)g}{\sin \alpha + \xi_- M/m}, \quad \text{где} \quad \xi_- = \frac{1}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$$

Зная  $a_{\downarrow}$ , найдем скорость пингвина  $v_{\downarrow}$ , которую он приобретет, съехав по склону на расстояние  $L/3 + s_{\uparrow}$  (до самой точки  $A$ ), и соответствующую ей скорость льдины:

$$U_{\downarrow} = \frac{m \cos \alpha}{m + M} \sqrt{\frac{2Ha_{\downarrow}}{3 \sin \alpha} + \frac{a_{\downarrow}}{a_{\uparrow}} v^2}.$$

А.Мальшев

**Ф2460.** К источнику постоянного напряжения подключена схема из шести резисторов (рис.1). Сопротивления резисторов  $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,

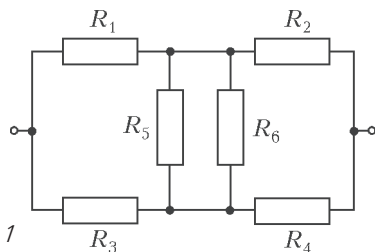


Рис. 1

$R_5 = R_6 = 5 \text{ Ом}$ . Известно, что два резистора вышли из строя (какие именно – не известно): одно из сопротивлений закоротило, а другое – перегорело. Какие два резистора должны выйти из строя, чтобы у получившейся схемы было минимально возможное сопротивление? А чтобы сопротивление оставшейся схемы получилось максимальным? Рассчитайте сопротивление получившейся схемы в этих двух случаях. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

У перегоревшего резистора сопротивление становится бесконечным, у закороченного – нулевым. Наиболее очевидная стратегия решения задачи – перебор всех возможных случаев. Выберем сначала, какой из резисторов сгорел, это сильно упростит схему.

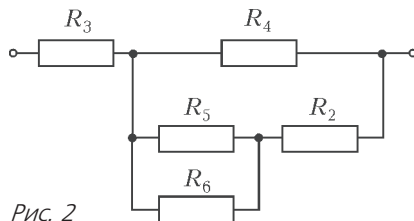


Рис. 2

**Случай 1.** Пусть сгорел один из резисторов  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Если сгорел резистор  $R_1$ , то схема примет вид, изображенный на рисунке 2. Ее общее сопротивление будет равно

$$R_0 = R_3 + \frac{R_4(R_5R_6 + R_2(R_5 + R_6))}{R_5R_6 + (R_2 + R_4)(R_5 + R_6)}.$$

Второй вышедший из строя, т.е. закороченный, резистор теперь можно выбрать из оставшихся лишь четырьмя различными способами – ведь для вычисления общего сопротивления неважно, закоротим мы  $R_5$  или  $R_6$ . Полагая по очереди равными нулю  $R_2, R_3, R_4$  и  $R_5$ , находим общее сопротивление:

- 1) сгорел  $R_1$ , закоротило  $R_2$ , тогда  $R_{01} = 4\frac{1}{9} \text{ Ом}$ ;
- 2) сгорел  $R_1$ , закоротило  $R_3$ , тогда  $R_{02} = 1\frac{7}{15} \text{ Ом}$ ;
- 3) сгорел  $R_1$ , закоротило  $R_4$ , тогда  $R_{03} = 3 \text{ Ом}$ ;
- 4) сгорел  $R_1$ , закоротило  $R_5$  (или  $R_6$ ), тогда  $R_{04} = 4\frac{1}{5} \text{ Ом}$ .

Те же самые результаты получаются, если вместо  $R_1$  сгорел  $R_4$  – в исходную схему они входят симметрично. Если же в качестве сгоревшего резистора выбрать  $R_3$ , то в формуле для  $R_0$  следует сделать замену  $R_3 \rightarrow R_1, R_2 \rightarrow R_4, R_4 \rightarrow R_2$ . При этом закороченное сопротивление снова выбирается из оставшихся четырьмя способами:

- 5) сгорел  $R_3$ , закоротило  $R_1$ , и  $R_{05} = 1\frac{4}{5} \text{ Ом}$ ;
- 6) сгорел  $R_3$ , закоротило  $R_2$ , и  $R_{06} = 2 \text{ Ом}$ ;
- 7) сгорел  $R_3$ , закоротило  $R_4$ , и  $R_{07} = 3\frac{4}{11} \text{ Ом}$ ;

8) сгорел  $R_3$ , закоротило  $R_5$  (или  $R_6$ ), и  $R_{08} = 3\frac{1}{5}$  Ом.

Случай 2. Пусть сгорел один из резисторов  $R_5$  или  $R_6$ , для определенности –  $R_6$ . Выберем, какой резистор закоротило.

1) Закоротило резистор  $R_5$ . В этом случае схема приобретает наиболее простой вид (рис.3), и ее общее сопротивление будет

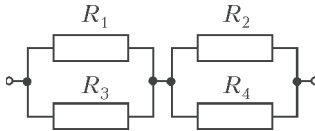


Рис. 3

равно

$$R_{09} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 2\frac{2}{5} \text{ Ом.}$$

2) Закоротило один из резисторов  $R_1, R_2, R_3$  или  $R_4$ . Снова для определенности будем считать, что закоротило резистор  $R_1$ . Эквивалентная схема представлена на рисунке 4. Для определения общего сопротивления цепи можно воспользоваться законами Кирхгофа. Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} I_3 R_3 &= I_5 R_5, \\ I_2 R_2 &= I_5 R_5 + I_4 R_4, \\ I_4 &= I_3 + I_5, \\ I_1 &= I_2 + I_5, \end{aligned}$$

откуда найдем

$$R_0 = \frac{R_2 (R_3 R_5 + R_4 (R_3 + R_5))}{R_3 R_5 + (R_2 + R_4) (R_3 + R_5)}.$$

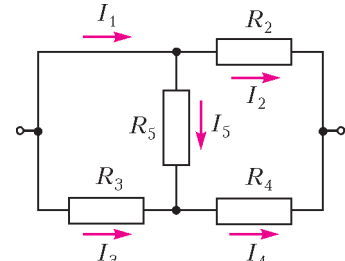


Рис. 4

Таким образом, если закоротило резистор  $R_1$  (или  $R_4$ ), то конечное сопротивление цепи равно

$$R_{010} = 1\frac{38}{55} \text{ Ом.}$$

Если же закоротило резистор  $R_2$  (или  $R_3$ ), то, используя замену  $R_3 \rightarrow R_1, R_2 \rightarrow R_4, R_4 \rightarrow R_2$ , получаем

$$R_{011} = 1\frac{17}{45} \text{ Ом.}$$

Результаты для всех 11 случаев удобно представить в виде таблицы.

Итак, наименьшее сопротивление цепи  $R_0 = 1\frac{17}{45}$  Ом достигается в случае, если перегорел резистор  $R_5$  (или  $R_6$ ), а закоротило резистор  $R_2$  (или  $R_3$ ). Наибольшее сопротивление  $R_0 = 4\frac{1}{5}$  Ом возникает, если сгорел резистор  $R_1$  (или  $R_4$ ), а закоротило резистор  $R_5$  (или  $R_6$ ).

И.Александров

		Сгорел					
		1	2	3	4	5	6
Закоротило	1		$3\frac{4}{11} \approx 3,36$	$1\frac{4}{5} = 1,80$	3	$1\frac{38}{55} \approx 1,69$	$1\frac{38}{55} \approx 1,69$
	2	$4\frac{1}{9} \approx 4,11$		2	$1\frac{7}{15} \approx 1,47$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$
	3	$1\frac{7}{15} \approx 1,47$	2		$4\frac{1}{9} \approx 4,11$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$
	4	3	$1\frac{4}{5} = 1,80$	$3\frac{4}{11} \approx 3,36$		$1\frac{38}{55} \approx 1,69$	$1\frac{38}{55} \approx 1,69$
	5	$4\frac{1}{5} = 4,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$4\frac{1}{5} = 4,20$		$2\frac{2}{5} = 2,40$
	6	$4\frac{1}{5} = 4,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$4\frac{1}{5} = 4,20$	$2\frac{2}{5} = 2,40$	

# Задачи

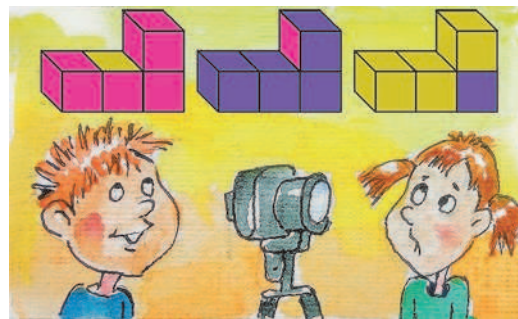
1. В Стране дураков ходят монеты в 1, 2, 3, ..., 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету



сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя монетами разного достоинства. Буратино хотел купить третье такое же мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?

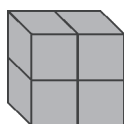
*М.Евдокимов*

2. У Саши было четыре раскрашенных кубика. Расставляя их по-разному, он по очереди сфотографировал три фигуры. Затем Саша сложил из них параллелепипед размером  $2 \times 2 \times 1$  и сделал его черно-белое фото. Все



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XV Устной московской олимпиаде по математике для 6–7 классов.



видимые на фото грани кубиков одного и того же цвета. Какого?

*А.Шаповалов*

3. Можно ли в равенстве

$$\begin{array}{cccccccc} * & * & * & * & * & * & * & * \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{array} = *$$



заменить звездочки цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, так, чтобы равенство стало верным?

*Э.Акопян, Д.Калинин*

4. У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

*Е.Бакаев*



# Рулетка и ребро жесткости

С.ДВОРЯНИНОВ

**П**РЕДСТАВИМ, ЧТО ВЫ ЗАХОТЕЛИ ЗАСТЕКЛИТЬ свой балкон. Звоните в фирму. Чтобы оценить необходимые для выполнения этой работы денежные затраты, вас просят сообщить длину, ширину и высоту балкона. Как их измерить?

Если бы измеряемые отрезки были короткими, то вполне сгодилась бы обычная школьная линейка. А длина балкона — больше трех метров. Это сколько же раз придется прикладывать к перилами линейку длиной 25 сантиметров и складывать  $25 + 25 + 25 + \dots$ ? Со счета можно сбиться. Нет, линейка явно не годится.

Есть еще один инструмент для измерения расстояний — портняжный метр. Да, его можно использовать. Но все-таки для каждого дела нужны свои инструменты. Ведь мерным метром для чистых тканей не гоже размечать на земле клумбу для цветов.

В столярном, слесарном и строительном деле для измерений используют рулетку. У этого слова есть по крайней мере два распространенных значения.

Рулетка — это азартная игра. Название происходит от французского *roulette*, что означает маленькое колесо. В этой игре действительно крутится колесо, по которому катается шарик. В русском языке о колесе напоминает и слово *рулон*, например рулон бумаги.

Нас же сейчас интересует рулетка как инструмент для измерения длины. Она должна быть в каждом доме. Мало ли что придется измерить! А рулетка занимает совсем мало места. Иногда брелок для ключей совмещают с рулеткой, чтобы этот полезный инструмент всегда был под рукой. Рулетка это тот же портняжный метр, только сделанный из прочного материала — из стальной или полимерной ленты с делениями. С одного края ленты — деления в миллиметрах, с другого — в дюймах.



Рулетка как измерительная лента

Для домашних нужд достаточно рулетки длиной 3—5 метров или даже 1 метр.

Лента намотана на катушку, находящуюся в корпусе рулетки. Вытягивают ленту наружу за крючок на ее конце. Внутри ленту сматывают с помощью рукоятки, укрепленной на корпусе. Если же лента не длинная, то и рукоятки никакой нет — лента сматывается внутрь автоматически при помощи находящейся внутри возвратной пружины.

Рулетка с пружиной обычно имеет стопор, который исключает самопроизвольное сматывание рулетки. Некоторые современные рулетки имеют даже жидкокристаллические дисплеи, отображающие показания измерений.

Использовать рулетку следует с осторожностью. У новой рулетки пружина сматывает ленту внутрь очень быстро, почти мгновенно. А края ленты тонкие и жесткие и могут поранить руку.

Интересно следующее. Если присмотреться к рулетке, то можно заметить, что ее стальная лента не плоская, а имеет форму желоба. Для чего же мерной ленте рулетки придают такую форму?

Однажды Колумб рассказывал о том, как он открывал Америку. Согласно легенде, один из слушающих сказал: «Что





«Колумб и яйцо». Иоганн Гайер, 1847

может быть проще, чем открыть новую землю?» В ответ Колумб предложил ему простую задачу: поставить куриное яйцо вертикально. Когда никто сделать этого не смог, Колумб взял яйцо, разбил его с одного конца и поставил на стол. Это действительно просто. Раздосадованные наблюдатели заявили, что так сделать могли бы и они. «Вы могли бы, а я сделал это на самом деле», — заключил Колумб.

В наши дни крылатое выражение *колумбово яйцо* означает простой, но неожи-

данный и парадоксальный выход из затруднительного положения. Например, возьмем полоску бумаги. Можно ли ее поставить на стол вертикально? Это кажется невозможным? Нет, возможно! Достаточно лишь согнуть ее вдоль всей длины в форме желоба. Линия сгиба становится так называемым ребром жесткости.

Школьные учебники геометрии отмечают, что треугольник — это жесткая фигура, а квадрат, прямоугольник, параллелограмм — нет. Если к квадрату добавить диагональ, то получится жесткая фигура. В технике конструктивные элементы, которые придают конструкции жесткость, называют ребрами жесткости. Если лист бумаги свернуть в трубку, то эта трубка окажется достаточно прочной и сможет выдержать немалую нагрузку. Свернутая в желоб полоска бумаги тоже становится жесткой. Ею можно размахивать в воздухе, подобно дирижерской палочке.

Так и в рулетке вытянутый кусок ленты, имеющий форму желоба, оказывается жестким и не сворачивается в рулон. Это позволяет направлять ленту даже вертикально вверх.

## ФИЗИКА – ИНЖЕНЕРАМ

# Геомолоток и тайна полезного удара

**А. ФРИДРИХСОН**

**Ч**АСТО СТАРШЕКЛАССНИКИ, С ИЗВЕСТНЫМИ способностями к физике, отказываются от научной карьеры, говоря: «Какой смысл идти в науку, где все главное уже открыто? Времена Ньютона, Гука и даже Эйнштейна прошли, а переписывать чужие

диссертации за мизерную зарплату не интересно». О, как вы ошибаетесь, молодые и талантливые. Не в зарплате — в открытости всего главного. Уверяю вас, что нераскрытых тайн, непонятых явлений, неосмысленных парадоксов даже в классической физике на ваш век хватит. Более того, физика такая наука, знание которой может влиять на все сферы нашей жизни — от малого бизнеса до большой политики, от нравственных законов внутри нас до звезд над нами. Но поскольку в этой науке не приняты бездоказательные утверждения, попытаемся обосновать вышесказанное нижеприведенным.

Оказывается, такое эмоциональное понятие, как удар, в физике имеет вполне рациональное описание. Если не применять заумных формул, то удар — это быстрое (высокоскоростное — по-научному) приложение силы к телу или системе тел. Впрочем, высокая

скорость – понятие относительное. Поэтому, говоря строже, ударом можно назвать такое приложение силы, при котором время воздействия соизмеримо или меньше периода собственных колебаний тела или системы тел.

Любопытно, что соразмерность – причина некоторых малоизученных, а иногда и парадоксальных «ударных» явлений. Можно начать экскурс с моста, который разрушила рота солдат, ритмично печатая шаг с частотой собственных колебаний мостовой конструкции. Впрочем, резонанс, т.е. совпадение частоты внешнего воздействия с собственной частотой колебаний тела или системы тел, явление достаточно изученное. А вот пример совпадения времени воздействия с периодом собственных колебаний, который мы условно назовем ударом геологического молотка по образцу породы, не так прост, как кажется, и являет собой пример весьма полезного (не только для геологии) удара о твердое тело.

Опытный геолог колет образец на двучастный навесу, как бы смягчая удар. Даже не как бы, а именно смягчая – что неопытному наблюдателю покажется странным. И напрасно. Даже не разбираясь в тонкостях теории упругости, или физики твердого тела, опытный геолог знает: чтобы расколоть образец аккуратно пополам, надо придать молотку достаточно высокую, но постоянную скорость так, чтобы ускорение в момент удара было минимальным. В идеале – равным нулю. Парадокс? Кажущийся. Потому

что квазиуловное ускорение в момент контакта геомолотка с породой дает полезное выполнение закона сохранения энергии, когда вся кинетическая энергия молотка переходит во внутреннюю энергию образца. Причем не в тепловую, а в упругую энергию. Ибо при свободном (без ускорения) контакте с породой молоток взаимодействует с образцом ровно то время, которое определяется собственными упругими свойствами. А значит, время взаимодействия молотка с породой определяется не внешним усилием геолога, а собственным периодом колебаний исследуемого им образца. При таких параметрах взаимодействия энергия геомолотка, за счет так называемой ударной вязкости, максимально полно перейдет в энергию упругой деформации образца. А вот ударная волна в породе, которая лишь раскрошит образец (за счет минимального ускорения), будет минимальной.

Как же происходит сам процесс раскола пополам? Как правило, легко. В результате деформации сжатия по направлению удара образец одновременно расширяется в перпендикулярной плоскости. И когда эта поперечная деформация превысит критическую деформацию данной горной породы на растяжение (лучше сказать – на разрыв), образец расколется по самой слабой из вертикальных плоскостей образца, т.е. пополам, чтобы показать свою текстуру, состав и много иных геологических подробностей образца. Что и требовалось умелому геологу. Причем за счет длинной ручки своего

молотка геолог может не только дотянуться до нужного куска породы в полевых условиях, но и регулировать «аналитический удар» таким образом, чтобы раскалывать на две части самые разные образцы как по форме, так и по составу. Более того, зная приблизительную скорость молотка, при которой образец исследуемой породы расколется пополам, можно предварительно определить так называемые критические напряжения на разрыв, а это весьма важная характеристика породы.

Кстати сказать, эту характеристику используют коллеги геологов – горняки. В карьерах, которые



Горные породы	Предел прочности на скалывание $\delta_{ск} \times 10^5, \text{Па}$	Предел прочности на сжатие $\delta_{сж} \times 10^5, \text{Па}$	Предел прочности на растяжение $\delta_{раст} \times 10^5, \text{Па}$
Мрамор	91	1650	–
Известняк	95–192	1030–1640	91
Андезит	96	986	58
Гранатовый скарн	96	1015	–
Туф	110	1156	67
Доломит	118	1620	69
Гранодиорит метаморфизованный	130	1412	–
Грандиорит	211–222	2336–2659	–
Гранит мелкозернистый	198	1660	120
Гранит среднезернистый	220	2592	143
Сиенит	221	2152	143
Сиенит-порфир	296	2250	143
Диорит	240	2390	–
Диорит-порфир	302	3240	–
Габбро	244–375	2300–3406	135
Скари рудный	255	2098	–
Скарн эпидото-гранатовый	305	2762	–
Кератофир	268–373	2285–3740	138
Альбитофир	282	1728	119
Кварцит	316	3050	144
Базальт	322	3245	–
Диабаз	347	3430	134

разрабатываются взрывом, заряд во взрывных скважинах, а также расстояние между взрывными скважинами рассчитываются, исходя из прочностных характеристик породы. Внимательный читатель, посмотрев на приведенную здесь таблицу, наверняка обратит внимание на две подробности: 1) временное сопротивление разрыву (растяжению) на порядок меньше, чем на сжатие и даже на изгиб; 2) изученность пород по этому параметру (сопротивление разрыву) заметно отстает, что, очевидно, связано с более трудоемким процессом исследования.

В отличие от геологов, горнякам нужно взрывом расколоть породу как можно мельче, чтобы легче было грузить на автотранспорт, а в дальнейшем перерабатывать, например в щебенку. Ударная волна, порожденная как раз высоким ускорением породы при взрыве, в отличие от деликатного геоло-

гического удара, крошит породу в зонах, соразмерных с диаметром взрывной скважины. Но за счет резкого падения энергии ударной волны с расстоянием на удалении уже в несколько метров от скважины порода раскалывается «по принципу геомолотка» – на ослабленных микротрещинами плоскостях, когда породу разрушают вышеописанные деформации растяжения.

В этом контексте малая изученность (как видим из таблицы) пород на критические деформации растяжения не позволяет горным инженерам более точно рассчитывать энергию взрыва. Ведь для нужд горной промышленности разбитая в пыль ударной волной порода нужна гораздо меньше, чем оптимально расколотая на фрагменты. Однако что известно точно, так это обратная зависимость фрагментации от энергии взрыва (как и от механического удара): чем

больше энергия, тем мельче фрагментация разрушенной породы. Однако следует заметить, что в некоторых случаях справедливо и обратное: чем мельче фрагментация до разрушения, тем большая энергия требуется для дальнейшего дробления. Ведь чем больше трещин в породе до взрыва, тем больше естественных препятствий для дробящей ударной волны. И тем большая часть энергии взрыва затратится не на дробление, а на перемещение в пределах трещин свободных кусков породы. Опытные горные инженеры учитывают и эту, в общем мало изученную, тонкость взрывного дела. В любом случае для точного расчета энергии взрыва помимо прочностных свойств породы они учитывают и ее «блочность» – средний размер куска породы между трещинами на данном участке карьера.

Геофизики ту же характеристику называют «трещиноватость» и учитывают ее для расчета энергии опытного удара (обычно ударом сброшенным с определенной высоты грузом по поверхности земли). Если сейсмическая волна возбуждается с помощью взрыва, также учитывают и трещиноватость скального массива. Однако в большей степени на эффективность опытного взрыва, а главное – на меньший ущерб экологии, влияет такой близкий к геомолотку показатель, как бризантность, т.е. быстродействие взрывчатого вещества. Точно так же, как опытный геолог стремится опустить свой молоток на породу с минимальным ускорением, опытные геофизики выбирают для возбуждения сейсмических колебаний взрывчатое вещество с минимальной бризантностью – чтобы большая часть энергии взрыва уходила не в ударную волну (период которой меньше периода собственных колебаний породы), а в упругую, т.е. собственно сейсмическую волну (период которой и есть период собственных колебаний геомассива). Другими словами, чем меньше разрушение ударного воздействия, тем больше научной информации можно получить по его результатам – например, о массиве горных пород.

Решаема и обратная, как говорят геофизики, задача: если известны прочностные характеристики породы, то по количеству расколотых при ударе частей можно определить исходную энергию этого самого удара. Аналогично, по размеру среднего куска породы

после взрыва (например, в карьерах известняков, песчаников или гранитов для производства важнейшей составляющей дорожного строительства – щебня) можно определить энергию самого взрыва.

Закон сохранения энергии – универсален и симметричен во времени и в пространстве. Поэтому степень разрушения (а следовательно, и фрагментации) любого материала зависит от исходной энергии разрушения и наоборот. И даже в важнейшем расследовании катастрофы под Донецком можно было бы применить эту зависимость. В данном случае – зависимость энергии взрыва от среднего размера фрагментов разрушенного корпуса. Многие специалисты обратили внимание на весьма малую фрагментацию обломков на месте крушения малазийского Боинга, исходя из которой можно, хоть и приблизительно, рассчитать энергию исходного взрыва. Простейший расчет показывает, что при такой фрагментации энергия исходного взрыва окажется в пределах  $10^{12}$  джоулей. Это колоссальная энергия, соразмеряемая с энергией массового взрыва на большом карьере или с энергией небольшого землетрясения с магнитудой 1. Энергия же взрыва пресловутой ракеты БУК-М (даже если бы она взорвалась не вне самолета, а внутри) минимум в сто раз меньше. Единственный энергоисточник, эквивалентный приведенным цифрам, это взрыв (мгновенная детонация) всех топливных баков Боинга при условии, что они полны. Также следует заметить, что одновременную детонацию топлива могло вызвать не столько внешнее, сколько внутреннее специально подготовленное воздействие – проще говоря, инициирующий взрыв-детонатор близ самих топливных баков. Что же стало причиной столь мощного разрушения, тысячекратно превышающего возможности ракет любого класса, вопрос уже не научного свойства. Но поставлен он надежным экспертом – законом сохранения энергии.

Действенную помощь этого закона автор испытал и в своей полевой практике. Дело было на Светлогорском карьере гранитов в Карелии (карьер разрабатывал взрывом самую крепкую породу, дабы превратить ее в самую крепкую щебенку для отсыпки дорожных покрытий по всей стране). Рассчитать так называемую взрывную сетку, т.е.

расстояние между взрывными скважинами, можно, как уже знают наши читатели, лишь зная такую характеристику скального массива, как трещиноватость. Для решения этой задачи в нашем распоряжении был сейсмометрический комплекс каротажа (для скважинных и межскважинных исследований): сейсмоприемник и источник упругих колебаний. Если первый элемент представлял из себя корпус весом несколько сот граммов, то источник колебаний весил полсотни килограммов. Но главная проблема была даже не в весе: после опускания этого агрегата в скважину и закрепления на стенках скважины сверху по нему наносился удар специальной сейсмометрической кувалдой весом заметно большим, чем геологический молоток. Удар этот посредством механических переходников транслировался на стенки скважины и таким образом создавал те самые упругие колебания, которые мы должны были улавливать сейсмоприемником в соседней скважине. По скорости их прохождения можно было судить о степени трещиноватости – чем меньше скорость, тем больше трещиноватость и наоборот.

Вроде бы простая задача. Однако после трех-четырех ударов наш скважинный источник заклинивало так, что поднять эту тяжеленную металлоконструкцию на поверхность было уже большой проблемой. В результате производительность наших каротажных исследований резко упала, и встал вопрос, что делать (а кто виноват, мы уже знали, ибо сами не продумали всех технических деталей). В результате мозгового штурма было предложено применить... обычные воздушные шарики, опускаемые на шланге с воздушного ресивера нашей экспедиционной машины ГАЗ-66 в скважину – для последующего «лопания» в ее полости. Конечно, были сомнения: энергии воздуха даже под давлением 1–2 атмосферы могло быть недостаточно, чтобы «пробить», или, точнее говоря, «прозвучить» скальный массив на 10–20 метров до соседней скважины, где «прохлаждался» наш компактный сейсмоприемник в тщетном ожидании эффективной работы.

Каково же было удивление неверующих в успех, когда на сейсмограмме мы получили не просто сигнал, а многократно превосходящий тот, что мы получали до того посред-

ством «кувалдометра». Все дело было в энергоемкости нашего изобретенного пневмоисточника. Когда автомобильные атмосферы распирали сжатый стенками скважины резиновый шарик, окружающий массив гранитов воспринимал эту энергию «медленно, но верно», по сути без потерь – деформируясь микрон за микроном несколько секунд. Когда же замечательное резиновое изделие лопалось, возникал «обратный» динамический удар. Каковой возникает, например, при отбрасывании отработанных ступеней ракеты или при разгрузке очага землетрясения.

Мы намеренно приводим такие макропримеры, потому что наш гранитный эксперимент 1984 года показал: этот принцип работает на всех масштабах от очага землетрясения до воздушного шарика.

Итак, проблема была успешно решена и дальнейшая работа пошла-полетела, как по маслу, точнее – как по воздуху. Удар сброшенным давлением, как оказалось, применялся в истории науки и техники неоднократно, но для возбуждения упругих колебаний в скважине – впервые. И по возвращении из экспедиции мы оформили «патент на способ», каковой успешно применяли в дальнейших своих экспедициях неоднократно – и не только на гранитах, но и на песчаниках, известняках, доломитах.

Впрочем, ничего невероятного в том, что воздушный шарик заменил многокилограммовый «кувалдометр», нет. Все очевидно: одна атмосфера, умноженная на одну десятую кубометра (так считается энергия, которую надуваемый шарик транслировал через стенки скважины в геомассив), составляет 10000 джоулей. С учетом высокого КПД можно сопоставить такой пневмоисточник обратного динамического удара с прямым ударом груза массой 100 килограммов, упавшего с высоты 10 метров (это без учета значительных энергетических потерь при таком прямом воздействии – на мелкодисперсное дробление породы, неупругую ударную волну и тепловую энергию, которая, куда ж без нее, выделилась в окружающее пространство). В источнике описанного типа этих потерь нет.

Так глобальный закон сохранения энергии помог решить техническую головоломку и частную геофизическую задачу.

# Алгебра и геометрия комплексных чисел

А.КАНУННИКОВ

Эту статью мы рекомендуем читать после статьи «Магия комплексных чисел» (с. 5) или параллельно с ней. Сюжеты той статьи зачастую проходили по одному сценарию: для решения алгебраической задачи «за кадром» применялись геометрические методы, и готовый результат появлялся словно кролик из шляпы.

С какими задачами о комплексных числах все же справляется чистая алгебра и где границы ее применения? В каких задачах помогают геометрические методы, и как комплексные числа и геометрия обогащают друг друга? Обо все этом мы расскажем в статье. Но главная наша цель – уж коль скоро это рубрика «Школа в «Кванте» – научить вас, уважаемый читатель, приемам работы с комплексными числами, алгебраическим и геометрическим методам решения задач, которые бы опирались на твердую теоретическую основу. Не стремитесь понять все и сразу. Работайте над статьей вдумчиво, не торопясь, возвращайтесь к «Магии комплексных чисел» (секреты открываются?). Обсуждайте материал с учителями и товарищами, а главное – решайте задачи, к большинству из них приведены ответы и указания (с. 51).

## Алгебра комплексных чисел

### §1. Определение и свойства в вопросах и ответах

Мы не будем вновь определять начальные понятия, ожидая, что вы ознакомились с ними (см. с. 5). Еще лучше почитайте более подробные введения в комплексные числа из разных источников, например [2–5]. Мы, право, не видим смысла их

повторять. Лучше ответим на наиболее распространенные вопросы из серии «Что вы хотели узнать (уточнить), но боялись спросить». В процессе обсуждения мы придем к разумному определению комплексных чисел.

*Q: Почему мнимая единица обозначается буквой  $i$ ? Почему нельзя писать просто  $\sqrt{-1}$ ?*

*A:* Это первая буква в латинском слове *imaginarius* (мнимый). Ее предложил Эйлер в 1777 году. Вместо  $i$  неправильно писать  $\sqrt{-1}$ , так как это обозначение для множества корней уравнения  $x^2 = -1$ , которое, помимо  $i$ , имеет еще один корень  $-i$ :  $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ . Кстати, именно на этом неудачном обозначении основаны примитивные ошибки типа

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1^2} = -1.$$

*Q: Почему в литературе комплексные числа часто определяются как пары действительных? Это выглядит немного странным, особенно когда вводят умножение по формуле*

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

*Почему сразу не написать  $a + bi$ ?*

*A:* Подход с парами – дань формализму, не более того. Потом все равно переходят на понятную запись  $a + bi$  вместо  $(a, b)$ . Просто так удобнее без лишних слов дать определение: пары и все. Но вы правы, умножение пар выглядит дико, и в хороших книгах оно обязательно мотивируется. Если сразу написать  $a + bi$ , то возникнет вопрос, что это за плюс и что за умножение  $b$  на  $i$ . Все-таки сначала надо определить комплексные числа как объекты и только после этого вводить операции.

*Q: Неужели нельзя дать определение и строго, и понятно?*

*A:* Можно. Давайте рассматривать комплексные числа как векторы на плоскости:  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Векторы – те же пары, причем мы умеем их складывать и умножать на действительные числа (покоординатно). Отождествим вектор  $(1, 0)$  с числом 1, а вектор  $(0, 1)$  обозначим буквой  $i$ . Тогда

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

– разложение вектора по базису 1,  $i$ . Осталось определить умножение базисных векто-

ров 1,  $i$  по формулам  $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ ,  $i^2 = -1$  и продолжить его на все комплексные числа раскрытием скобок:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + (bi)(di) = \\ = ac - bd + (ad + bc)i. \quad (1)$$

*Q: Но ведь просто определить комплексные числа и операции над ними недостаточно? Еще надо проверять какие-то очевидные свойства типа  $a + b = b + a$  и т.д. Причем в одних учебниках они и впрямь проверяются на нескольких страницах, в других остаются в качестве упражнения, а в третьих еще называются аксиомами поля...*

*A: Мы расширили множество  $\mathbb{R}$  до множества  $\mathbb{C}$ , продолжили сложение и умножение с  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{C}$  и, конечно, надо проверить, обладают ли по-прежнему эти операции привычными свойствами. А именно:*

- 1)  $x + y = y + x$ ;
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- 3)  $x + 0 = x$ ;
- 4)  $xy = yx$ ;
- 5)  $(xy)z = x(yz)$ ;
- 6)  $x \cdot 1 = x$ ;
- 7)  $x(y + z) = xy + xz$ ;
- 8) для каждого  $x$  есть  $-x$ :  $x + (-x) = 0$ ;
- 9) для каждого  $x \neq 0$  есть  $1/x$ :  $x(1/x) = 1$ .

Считая известным, что эти свойства верны в множестве  $\mathbb{R}$ , легко перенести их на  $\mathbb{C}$ . Так, свойства 1), 2), 3), 8) ясны из покомпонентного сложения векторов. Далее, 6) очевидно, а проверяя 4), 5), 7), при раскрытии скобок по формуле (1) **не надо** заменять  $i^2$  на  $-1$ . Например, для проверки 5) надо раскрыть скобки  $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)(a_3 + b_3i)$  двумя способами – в обоих получится сумма восьми одинаковых слагаемых:  $(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$ ,  $(a_1b_2i)b_3i = a_1b_2b_3i^2 = a_1(b_2ib_3i)$  и т.д. Иными словами, поскольку  $i$  коммутирует с действительными числами, то 5) достаточно проверить для базисных векторов  $x, y, z \in \{1, i\}$ , а это очевидно. Проверка 4) и 7) аналогична и еще проще. Наконец, напомним 9) (см. с. 6):  $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ .

Множество, на котором заданы две операции (сложение и умножение), в котором есть два элемента (0 и 1) и для которого выполнены свойства 1)–9), называется *полем*, а сами эти свойства – аксиомами поля. Таким

образом, множество  $\mathbb{C}$  вслед за множеством  $\mathbb{R}$  является полем. Скажем, множество  $\mathbb{Z}$  не является полем: в нем верны свойства 1)–8), но неверно 9). Добавив к  $\mathbb{Z}$  все дроби, получим поле  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел. (Отметим, что поля необязательно состоят из чисел: есть поле вычетов  $\mathbb{Z}_p$  по простому модулю  $p$ , поле рациональных функций  $\mathbb{C}(x)$  и др.).

*Q: А вы не забыли про свойства  $0x = 0$  и  $(xy = 0 \Rightarrow x = 0$  или  $y = 0)$ ?*

*A: Нет, не забыли, но вопрос хороший. Это следствия аксиом поля:  $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0x = 0$ ; если  $xy = 0$ , но  $x \neq 0$ , то умножив на  $1/x$ , получим  $0 = (1/x)0 = 1/x(xy) = (1/x \cdot x)y = 1y = y$ .*

*Q: Также из аксиом следуют формулы сокращенного умножения, да? Например,  $(x - y)(x + y) = x^2 - yx + xy - y^2 = x^2 - y^2$ , так как  $xy = yx$ .*

*A: Совершенно верно, а также их обобщения – бином Ньютона*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

и разность  $n$ -х степеней

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

(по той же причине,  $xy = yx$ ).

*Q: Выходит, в поле  $\mathbb{C}$  можно делать все то же самое, что и в поле  $\mathbb{R}$ , плюс извлекать корни из отрицательных чисел?*

*A: Не совсем все. Сохраняются правила арифметических действий, но кое-что все-таки теряется – об этом в следующем параграфе. Однако приобретений гораздо больше. В алгебре это в первую очередь решение полиномиальных уравнений (в частности, извлечение корней).*

## §2. Можно ли сравнивать комплексные числа?

Как-нибудь, конечно, можно, например:  $a + bi < c + di \Leftrightarrow (a < c)$  или  $(a = c, b < d)$ . Однако интерес представляет только порядок, *согласованный с операциями*, т.е. такой, что

- если  $z < z'$ , то  $z + w < z' + w$ ,
- если  $z < z'$  и  $w > 0$ , то  $zw > z'w$ .

**1.** Докажите, что такой порядок должен удовлетворять условиям:

- a)  $z > 0 \Rightarrow -z < 0$ ;
- б)  $zw > 0 \Leftrightarrow (z, w > 0)$  или  $(z, w < 0)$ ;

- в)  $z^2 > 0$  при  $z \neq 0$ ;  
 г)  $-1 < 0 < 1$ .

Из в) и г) получаем противоречие:  $0 < i^2 = -1 < 0$ . Значит, поле  $\mathbb{C}$  нельзя упорядочить согласованно с операциями.

Из-за этого обстоятельства многие привычные рассуждения, справедливые на действительной прямой, перестают работать в комплексной плоскости. Вот два характерных примера.

**2.** Докажите, что для любых а) действительных; б) комплексных  $z, w$  таких, что  $|z|, |w| < 1$ , верно неравенство  $|zw + 1| > |z + \bar{w}|$ . (Напомним, для числа  $w = a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ , определены сопряженное число  $\bar{w} = a - bi$  и модуль  $|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{w\bar{w}}$ .)

Решение в п. а) совсем простое. Нет, мы, конечно, не будем раскрывать модули, а воспользуемся тем, что для  $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) > 0.$$

Имеем

$$|zw + 1| > |z + \bar{w}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z\bar{w} + 1 - z - \bar{w})(z\bar{w} + 1 + z + \bar{w}) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{w} - 1)(z + 1)(\bar{w} + 1) > 0,$$

что выполняется для всех действительных  $z, \bar{w} \in (-1, 1)$ .

Понятно, что в п. б) эти рассуждения неверны, так как  $|A|^2 = A\bar{A} \neq A^2$  при  $A \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Оставим эту задачу читателю.

**3.** При каждом  $n \in \mathbb{N}$  функция  $x \mapsto x^{2n-1}$  возрастает на  $\mathbb{R}$ , а функция  $x \mapsto x^{2n}$  возрастает на луче  $[0; +\infty)$  и убывает на луче  $(-\infty; 0]$ . Отсюда следует, что уравнение  $x^{2n-1} = 1$  имеет единственный действительный корень  $x = 1$ , а уравнение  $x^{2n} = 1$  имеет ровно два действительных корня  $x = \pm 1$ . В поле комплексных чисел эти рассуждения не проходят, а уравнение  $x^n = 1$  при  $n > 2$  имеет и другие корни (комплексные корни из единицы). Например,

$$x^3 = 1 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \left( \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \quad (2)$$

$$x^4 = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1, \pm i. \quad (3)$$

**4.** Если вы изучаете комплексные числа по нашей статье и еще не знаете, как решить в  $\mathbb{C}$  уравнение  $x^n = 1$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ , то сделайте это прямо сейчас для а)  $n = 6$ ; б)  $n = 8$ ; в)\*  $n = 5$  и – самое главное – изобразите корни на комплексной плоскости. Уверены – вы будете удивлены и заинтригованы. Достаточно уметь решать квадратные уравнения, уже промелькнувшие выше для  $n = 3, 4$ .

### §3. Квадратные корни и квадратные уравнения

В поле  $\mathbb{R}$  уравнение  $x^2 = a$  при  $a < 0$  не имеет корней, при  $a = 0$  имеет один корень  $x = 0$ , а при  $a > 0$  имеет два противоположных корня. Этим мотивируется определение квадратного корня  $\sqrt{a}$  из неотрицательного числа  $a$  как неотрицательного корня уравнения  $x^2 = a$ . Далее выделением полного квадрата решается квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4} = \frac{D}{4}, \quad (4)$$

число действительных корней которого зависит от знака дискриминанта  $D$ . Так обстоят дела в поле  $\mathbb{R}$ .

Решим теперь уравнение  $z^2 = a + bi$  относительно  $z \in \mathbb{C}$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим три случая.

$$\bullet b = 0, a \geq 0: z^2 = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{a} \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet b = 0, a < 0: z^2 = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0 \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{-a} \in i\mathbb{R}$$

– два чисто мнимых корня (для того и вводили мнимую единицу). Как следствие, уравнение (4) имеет два чисто мнимых корня при  $D < 0$ .

• В случае  $b \neq 0$  придется расписать  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Разберем для примера уравнение  $z^2 = i$ :

$$(x + yi)^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 2xy = 1 \quad (\Rightarrow x \text{ и } y \text{ одного знака}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$



Выкладки в общем случае оставим читателю в качестве упражнения:

$$a + bi = (x + yi)^2 \stackrel{b \neq 0}{\Leftrightarrow} x + yi = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i(\operatorname{sgn} b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right). \quad (6)$$

Итак, для любого ненулевого комплексного числа существует два – противоположных – *квадратных корня*, причем, в отличие от действительного случая, нет оснований отдать предпочтение одному из них. Поэтому в поле  $\mathbb{C}$  квадратным корнем из числа  $w$  называют *любой* корень уравнения  $z^2 = w$ , а символом  $\sqrt{w}$  обозначают *множество* всех квадратных корней из  $w$ :

$$z \in \sqrt{w} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} w^2 = z.$$

В частности, любое квадратное уравнение над  $\mathbb{C}$  разрешимо.

5. Для всех  $a \in \mathbb{R}$  решите уравнения в  $\mathbb{R}$  и в  $\mathbb{C}$ :

а)  $x^2 - 2(\cos a)x + 1 = 0$ ;

б)  $x^4 - x^2 = a^2 - a$ .

6. Для каждой пары  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  найдите все такие пары  $(x, y)$  из  $\mathbb{C}^2$  и из  $\mathbb{R}^2$ , что:

а)  $\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x^4 + y^4 = p, \\ xy = q. \end{cases}$

7. Извлеките корень  $\sqrt{\cos \varphi + i \sin \varphi}$  при каждом  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

8. а) Пусть  $a, b, c > 0$  и  $a^2 - b^2c > 0$ . Докажите *формулу сложных радикалов*

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}}. \quad (7)$$

*Пример из тригонометрии.* Вычислим  $\cos \frac{\pi}{12}$  двумя способами:

$$1) \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \Rightarrow \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2};$$

$$2) \cos \frac{\pi}{12} = \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Формула (7) подтверждает равенство результатов.

б) Пусть  $a, b, c, \delta \in \mathbb{C}$  и  $\sqrt{a^2 - b^2c} = \{\pm \delta\}$ . Докажите равенство множеств  $\sqrt{a + b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \delta}{2}} + \sqrt{\frac{a - \delta}{2}}$  и сравните его с формулой (6) при  $c = -1$ .

#### §4. Об извлечении корней высших степеней

Определим множество корней степени  $n \in \mathbb{N}$  из числа  $w \in \mathbb{C}$ :

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} | z^n = w\}.$$

У нас уже есть в запасе несколько примеров (см. (2), (3), задачу 4а):

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}, \quad \sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\},$$

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[3]{1} \cup \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \cup (-\sqrt[3]{1}) =$$

$$= \left\{ \pm 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Задачу 4б можно свести к последовательному извлечению квадратных корней:

$$x^8 = 1 \Leftrightarrow x^4 = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 \in \{\pm 1, \pm i\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in \left\{ \pm 1, \pm i, \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\} = \sqrt[8]{1},$$

так как  $\sqrt{i} = \left\{ \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right\}$  в силу (5), а тогда

$$\sqrt{-i} = \left\{ \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\} \quad (w^2 = z \Leftrightarrow \bar{w}^2 = \bar{z}). \text{ Вообще,}$$

по индукции при всех  $k \in \mathbb{N}$  и  $w \neq 0$  корень  $\sqrt[2^k]{w}$  состоит из  $2^k$  чисел, выражаемых в квадратных радикалах. Но как быть с корнями любых степеней?

Уже с кубическими корнями дело обстоит на порядок сложнее. Уравнение  $(x + yi)^3 = a + bi$  сводится к системе

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a, \\ 3x^2y - y^3 = b, \end{cases}$$

а она, в свою очередь, заменой  $t = \frac{x}{y}$  – к

уравнению  $\frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1} = \frac{a}{b}$ . Самое время вспом-

(Продолжение см. на с. 34)

# Паркетты из выпуклых многоугольников

Периодическим замощением плоскости называется покрытие плоскости неперекрывающимися фигурами, для которого существуют такие два непараллельных вектора, что сдвиг на любой из них переводит покрытие в себя. Если периодическое покрытие образовано копиями одного и того же многоугольника, то его называют паркетом.

Только три правильных многоугольника — треугольник, квадрат и шестиугольник — являются паркетными. У остальных правильных  $n$ -угольников угол при вершине не является делителем 360.

Паркетты из выпуклых неправильных многоугольников устроены гораздо сложнее. Очевидно, что паркет можно сложить, копируя любой треугольник или любой четырехугольник. Но ни из какого выпуклого  $n$ -угольника с  $n > 7$  составить паркет нельзя.

При  $n=6$  найдено три типа выпуклых паркетных шестиугольников и доказано, что других не существует (для шестиугольника  $ABCDEF$  эти типы характеризуются набором соотношений для углов и сторон, на неупомянутые углы и стороны никаких ограничений не накладывается).

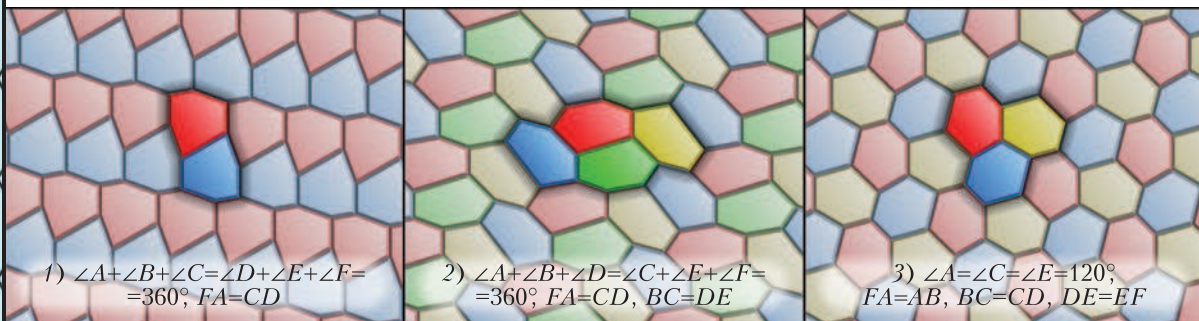
многоугольников, параллельными переносами которого можно получить весь паркет.

Первые пять типов нашел К. Рейнхардт (K. Reinhardt) в 1918 году, а последний из известных, 15-й, нашли К. Манн, Дж. Маклеод, Д. Вон Дергау (C. Mann, J. McLoud, D. Von Derau) в 2015 году.

Типы 14 и 15 заданы жестко (с точностью до подобия). Остальные типы имеют степени свободы (например, у типа 1 их пять), при изменении которых внешний вид паркета может меняться довольно сильно. Более того, некоторые типы пятиугольников в своем общем виде допускают несколько замощений. Но бывает и иначе — у данного типа есть подтип (без степеней свободы или с меньшим их числом, чем у основного типа), которым можно замостить плоскость несколькими способами.

Задание типов паркетных многоугольников через соотношения для сторон и углов наиболее компактное и традиционное. Проанализировав его, можно привести более наглядное построение каждого класса, выявляющее геометрию свободных параметров.

Заинтересовавшийся читатель может установить бесплатную программу-энциклопедию



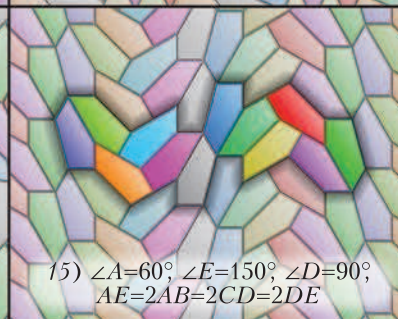
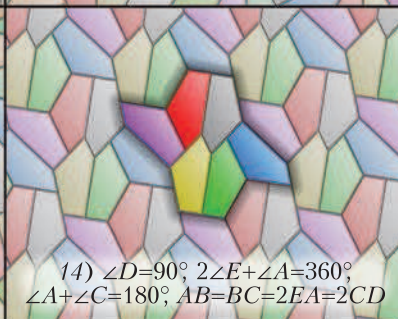
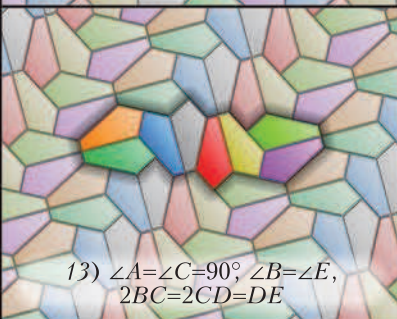
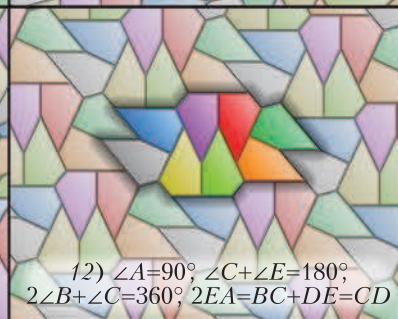
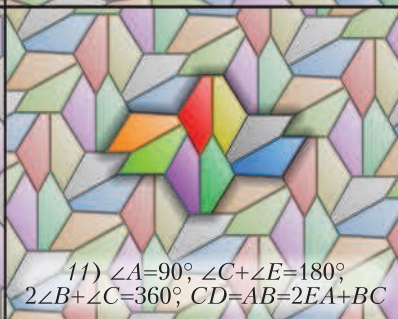
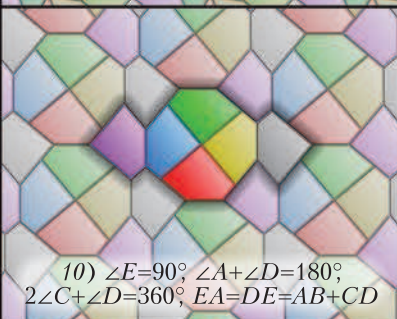
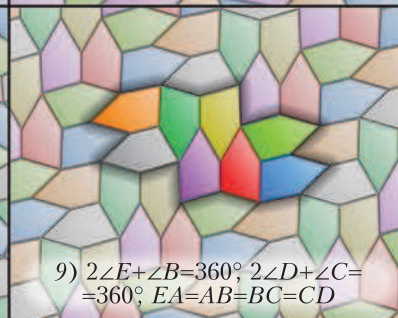
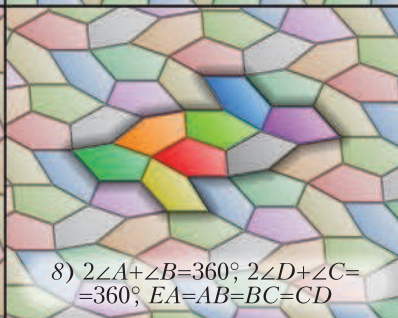
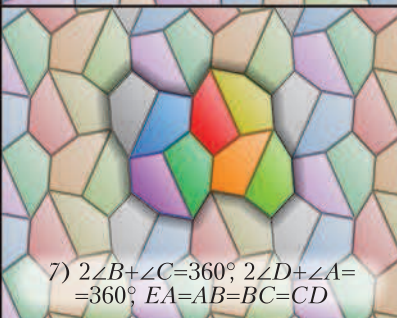
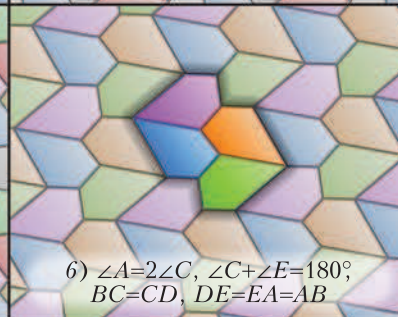
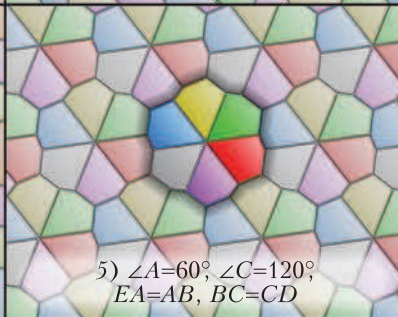
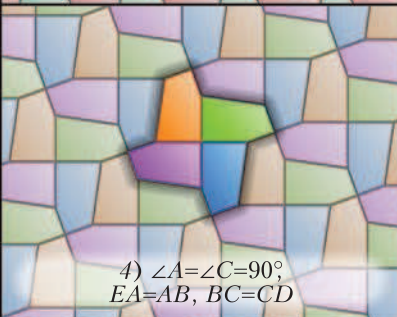
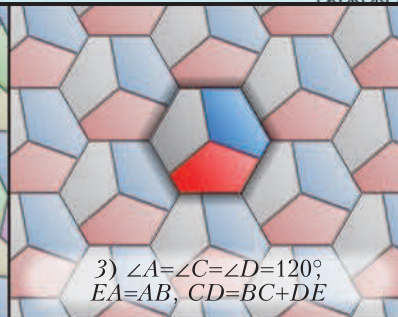
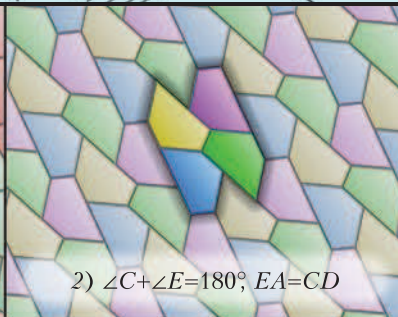
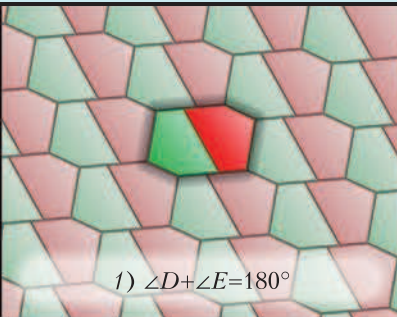
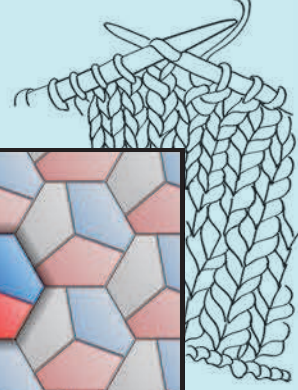
При  $n=5$  задача полностью не решена. Обнаружены 15 типов выпуклых пятиугольников, образующих паркет, но существуют ли другие и если да, то какие — неизвестно.

Найденные типы паркетных пятиугольников  $ABCDE$  с характеризующими соотношениями представлены на правой странице «Калейдоскопа». Ярко отмечена (выбранная по соображениям симметрии) фундаментальная область — набор из минимально возможного количества

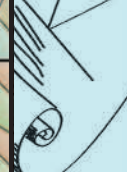
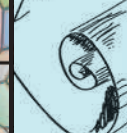
<http://www.jaapsch.net/tilings>. В ней ее автор — Я. Схерпфэйс (J. Scherphuis) — собрал все ныне известные периодические замощения (не только выпуклыми, но и невыпуклыми) многоугольниками.

Про замощения невыпуклыми многоугольниками и другие задачи этой тематики рассказывалось в «Калейдоскопе «Кванта» №2 за 2009 год.

Материал подготовили Н. Андреев, М. Панов



$\angle D + \angle E = 180^\circ;$   
 $EA = CD$   
 $\angle A = 60^\circ$



$360^\circ$

$90^\circ$   
 $\angle B$



(Начало см. на с. 28)

нить, что именно решение кубических уравнений привело к открытию комплексных чисел (см. с. 9). Что теперь? Неужели «пора открывать» формулу Кардано? В любом случае непонятно, как быть с корнями любых степеней...

Вот мы и подошли к той черте, когда чисто алгебраических средств уже недостаточно. Нужны принципиально новые идеи, новое видение комплексных чисел.

### Список литературы

1. В.И.Арнольд. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО, 2002.
2. С.Дориченко. Комплексные числа. – «Квант», 2008, №5.
3. Я.П.Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. – М.: МЦНМО, 2004.
4. В.В.Прасолов, В.М.Тихомиров. Геометрия. – М.: МЦНМО, 2007.
5. Ю.Соловьев. Комплексные числа. – «Квант», 1991, №7.

(Продолжение следует)

## Физика града

В.ДРОЗДОВ

ИЮЛЬ 2008 ГОДА ВЫДАЛСЯ В РЯЗАНСКОЙ области суровым: ливни, грозы и даже град<sup>1</sup>. Так, 18 июля примерно в 6 часов вечера я едва успел укрыться от града в близкой к Рязани железнодорожной станции «208 км». Форма града была близка к сферической с диаметром примерно 1 сантиметр, шел он три минуты. Приехав домой, перечитал в известном в начале XX века учебнике физики К.Д.Краевича статью о граде. Этот текст заслуживает цитирования:

<sup>1</sup>Красивые фотографии июльского града можно найти в «Кванте» №3 за 2017 год (см. 4-ю с. обложки и с. 25 внутри журнала).



«Если в мощном восходящем движении столба воздуха ожигение водяного пара наступает уже при температуре выше нуля, то образовавшиеся капельки уносятся выше в те слои, где господствуют отрицательные температуры; там они, оставаясь жидкими, охлаждаются ниже нуля, т.е. переохлаждаются. Если в таком состоянии капельки переохлажденной воды встретят носящиеся в воздухе ледяные кристаллы, то сразу наступает замерзание и образовавшийся ледяной шарик при падении вниз среди переохлажденных капель быстро облепляется льдом, увеличивается в своем объеме и достигает поверхности земли в виде куска льда часто неправильной формы. Осадки такого вида называются градом.

Градины обыкновенно бывают величиною с кедровый орех, а иногда с голубиное и даже с куриное яйцо; они имеют неправильную форму. Середина градины часто состоит из снежного ядра, покрытого ледяною прочною оболочкою. Граду часто предшествует проливной дождь, обычно град сопровождается сильными грозами. Он обыкновенно бывает среди лета и чаще днем, нежели ночью. Выпадение града продолжается несколько минут, редко четверть часа. Этот вид осадков производит сильные опустошения, уничтожает хлебные посевы, и если крупен, то бывает гибелен даже для людей и животных».



Наблюдал своими глазами: люди, попавшие под мелкий град, не пострадали. Интересно проверить физическим расчетом, опасен ли для человеческой жизни крупный град. Вычисления будут, по понятным причинам, носить оценочный характер. Однако числовые безразмерные коэффициенты мы убирать не станем: никакие соображения не требуют этого.

Сначала определим скорость падения сферической градины радиусом  $R$ . В режиме установившейся скорости  $v$  сила сопротивления воздуха  $F$  равна по модулю силе тяжести, действующей на градину:

$$F = mg.$$

Из соображений размерностей легко получить выражение для силы сопротивления:

$$F = \frac{1}{2} C \rho_v v^2 S.$$

Здесь  $C$  – безразмерный коэффициент,  $\rho_v$  – средняя плотность воздуха (град падает с высоты в несколько километров),  $S = \pi R^2$  – площадь большого круга. Для мелких градин сферической формы с радиусом  $R \approx 0,5$  см можно принять  $C \approx 0,2$ , для более крупных градин с радиусом  $R \approx 2,5$  см правильнее считать  $C \approx 0,42$ . Впрочем, это не изменит порядок оцениваемой величины. Масса градины равна

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_l,$$

где  $\rho_l = 900$  кг/м<sup>3</sup> – плотность льда. Получаем уравнение

$$\frac{1}{2} C \rho_v v^2 \pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_l g,$$

откуда находим

$$v = \sqrt{\frac{8}{3C} \frac{\rho_l}{\rho_v} R g}.$$

Если положить среднюю плотность воздуха равной  $\frac{1}{2} \rho_0$ , где  $\rho_0 = 1,29$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воздуха у земной поверхности, то это будет заниженная оценка. Все же град падает с высоты, где плотность отлична от нуля.

Лучше принять  $\rho_v = \frac{3}{4} \rho_0$ , тогда получим

$$v = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2Rg}{C} \frac{\rho_l}{\rho_v}}.$$

Для дальнейшего нам надо быть уверенным, что скорость градины действительно устанавливается, т.е. что сопротивление воздуха играет существенную роль при ее падении. Легко видеть, что критерий этого таков:

$$v \ll \sqrt{2gH},$$

где  $H$  – высота падения.

Из двух последних формул получаем оценку для высоты падения:

$$H \gg \frac{16}{9C} \frac{\rho_l}{\rho_v} R.$$

Для наблюдавшегося мелкого града с  $R \approx 0,5$  см наша оценка выглядит так:  $H \gg 31$  м, что заведомо выполняется. Для крупного града с  $R \approx 2,5$  см получим  $H \gg 155$  м, что тоже можно считать верным с достаточной точностью.

Теперь найдем кинетическую энергию  $W$  градины перед ее ударом о землю:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{64}{27} \frac{\pi g \rho_l^2}{C \rho_v} R^4.$$

Полученная формула показывает очень сильную зависимость энергии градины от ее радиуса.

Известно, что уровень энергии, достаточной для причинения человеку смертельных повреждений, составляет  $W_0 = 80$  Дж. Из формулы для  $W$  находим радиус опасной для жизни градины:

$$R_0 = \sqrt[4]{\frac{27}{64} \frac{C \rho_v}{\pi g \rho_l^2} W_0} \approx 2,4 \text{ см}.$$

Итак, наши вычисления подтверждают жизненную практику: крупный град опасен. К тому же градин падает много. Так что под любой град лучше не попадать!

# Поляра

Д.ШВЕЦОВ

ДАВАЙТЕ НАЧНЕМ С СОВСЕМ ПРОСТОГО вопроса: как построить касательную из точки  $P$  к данной окружности  $\omega$ ? Напомним, что стандартное построение тут таково: находим центр окружности  $O$  (как?), затем строим окружность  $\omega_1$  с диаметром  $OP$ , теперь точки пересечения окружностей  $\omega$ ,  $\omega_1$  и задают касательные (рис.1).

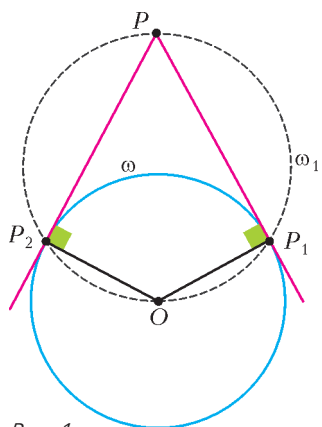


Рис. 1

В основе этого построения лежит базовое свойство-признак касательной – радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому построение, скорее всего, не выглядит удивительным. А вот если отказаться от использования циркуля, то все становится куда интересней.

Итак, давайте через произвольную точку  $P$  вне данной окружности  $\omega$  проведем две

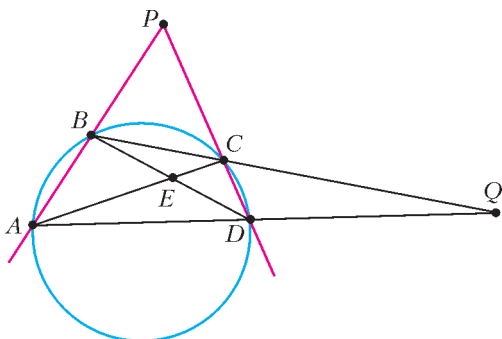


Рис. 2

произвольные секущие, пересекающие окружность в точках  $A, B$  и  $C, D$  соответственно. Пусть прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ , а прямые  $BC$  и  $AD$  – в точке  $Q$  (рис.2). Теперь, наконец, пусть прямая  $QE$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $P_1$  и  $P_2$ , тогда оказывается, что прямые  $PP_1$  и  $PP_2$  являются касательными! Так можно построить касательные из точки  $P$  к окружности  $\omega$ , используя лишь одну линейку. Заметим, что и секущие на первом шаге выбирались абсолютно произвольно, а в итоге, тем не менее, получились касательные, т.е. положение точек  $P_1$  и  $P_2$  не зависит от выбора четырехугольника  $ABCD$ . Получаем, что точки пересечения диагоналей всех таких четырехугольников лежат на одной прямой (рис.3).

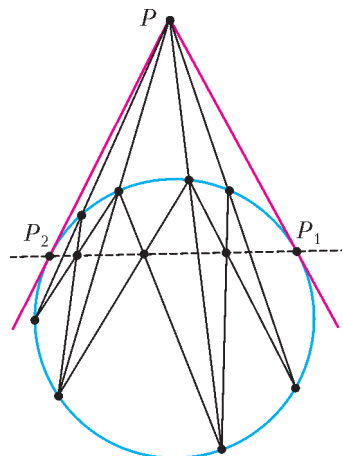


Рис. 3

Все эти наблюдения можно сформулировать в виде теоремы, элементарному доказательству которой и посвящена эта статья.<sup>1</sup>

**Основная теорема.** Пусть продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность  $\omega$ , пересекаются в точке  $P$ , продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  – в точке  $Q$ , диагонали  $AC, BD$  – в точке  $E$ . Пусть касательные, проведенные из  $P$  к окружности  $\omega$ , касаются ее в точках  $P_1$  и

<sup>1</sup> Одно из самых естественных доказательств основной теоремы использует проективную геометрию.

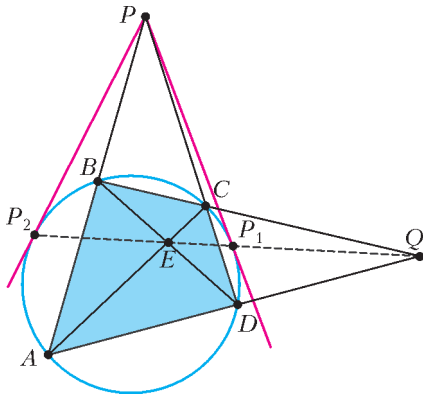


Рис. 4

$P_2$ . Тогда точки  $P_1, P_2, E, Q$  лежат на одной прямой (рис.4).

**Задача Шарыгина**

В уже далеком 1985 году участникам XXVI Международной математической олимпиады предлагалась следующая задача, автор которой – выдающийся геометр Игорь Федорович Шарыгин (1937–2004).

**Задача.** Пусть описанные окружности треугольников  $PAD, PBC$  пересекаются вторично в точке  $M$ , как показано на рисунке 5. Тогда  $\angle PMO = 90^\circ$ , где  $O$  –

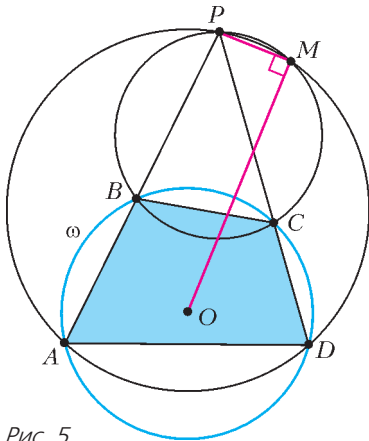


Рис. 5

центр описанной окружности  $\omega$  четырехугольника  $ABCD$ . Докажите это.

**Решение.** Утверждение задачи равносильно тому, что точка  $M$  лежит на окружности с диаметром  $OP$ . С другой стороны, окружность с диаметром  $OP$  проходит через середины  $X, Y$  отрезков  $AB$  и  $CD$ , так как  $OX \perp AB$  и  $OY \perp CD$  (рис.6). Таким обра-

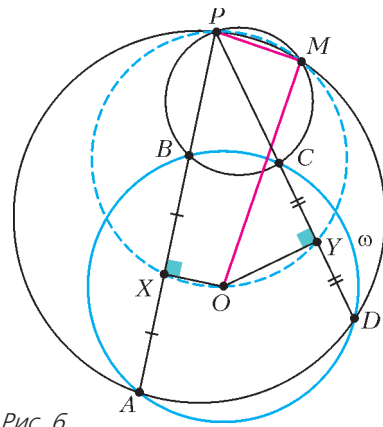


Рис. 6

зом, нам достаточно доказать, что четырехугольник  $PMYX$  вписанный.

Заметим, что  $\angle MDP = \angle MAP$  как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу  $MP$ , и, аналогично,  $\angle MCP = \angle MBP$  (рис.7). Из равенства пар углов следует подобие треугольников  $MDC$  и  $MAB$ . Отрезки  $MX$  и

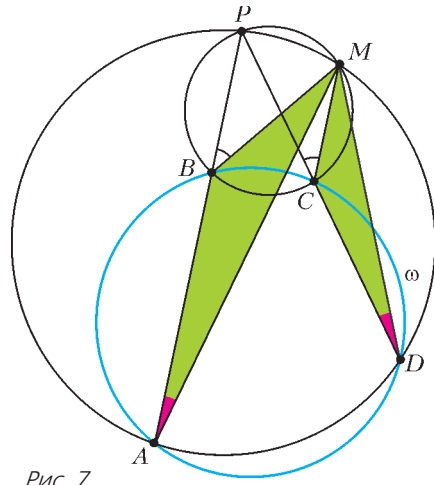


Рис. 7

$MY$  являются медианами в подобных треугольниках, поэтому подобны и треугольники  $MYS$  и  $MXB$ . Из последнего подобия следует равенство углов:  $\angle MYP = \angle MXP$ , откуда и вытекает вписанность четырехугольника  $PMYX$ .

Тем самым утверждение задачи доказано.

**Радикальные оси и доказательство основной теоремы**

Давайте еще проанализируем конструкцию из задачи Шарыгина, учитывая, что для трех окружностей их радикальные оси

пересекаются в одной точке либо параллельны.<sup>2</sup>

Обозначим окружность, описанную вокруг четырехугольника  $ABCD$ , через  $\omega$ , вокруг четырехугольника  $BPMC$  – через  $\beta$ , вокруг четырехугольника  $APMD$  – через  $\gamma$  (рис.8). Заметим, что прямая  $AD$  является

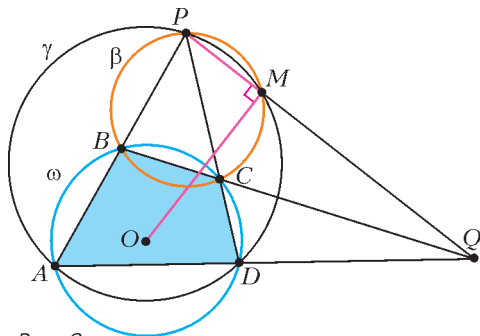


Рис. 8

радикальной осью окружностей  $\omega$  и  $\gamma$ , прямая  $BC$  – радикальная ось окружностей  $\omega$  и  $\beta$ , а прямая  $PM$  – радикальная ось окружностей  $\beta$  и  $\gamma$ . Тогда если  $Q$  – точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ , то прямая  $PM$  также проходит через точку  $Q$ .

С другой стороны, мы уже знаем, что точка  $M$  лежит на окружности  $\Omega$  с диаметром  $OP$ , но на этой же окружности лежат точки  $P_1$  и  $P_2$  – точки касания касательных, проведенных из точки  $P$  к окружности  $\omega$  (помните, как мы строили касательную циркулем и линейкой?).

На рисунке 9 мы вновь видим конструкцию их трех окружностей  $\omega, \Omega, \beta$ , две радикальные оси  $AD$  и  $PM$  которых пересекаются в точке  $Q$ . Следовательно, и третья радикальная ось  $P_1P_2$  проходит через точку  $Q$ .

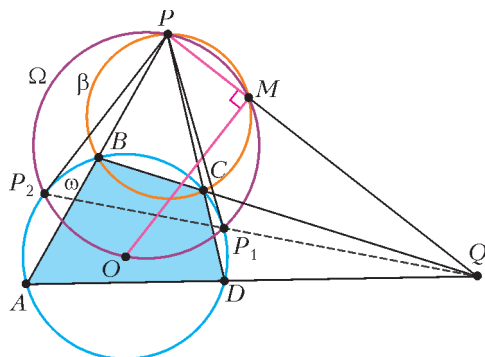


Рис. 9

Таким образом, мы показали, что точки  $Q, P_1$  и  $P_2$  лежат на одной прямой.

**Упражнение 1.** Докажите, что в конструкции на рисунке 9 точка  $M$  лежит на описанных окружностях треугольников  $ABQ$  и  $CDQ$  (иначе говоря, точка  $M$  – это точка Микеля для четверки прямых  $AB, BC, CD, DA$ ).

Для завершения доказательства основной теоремы остается «усадить» точку  $E$  пересечения диагоналей на эту же прямую  $P_1P_2$ . Но точки  $E$  и  $Q$  в некотором смысле равноправны для нашей конструкции с секущими  $AB$  и  $CD$ : если поменять обозначения у точек  $C$  и  $D$ , то точки  $E$  и  $Q$  поменяются ролями. Поэтому можно ожидать, что доказательство для точки  $E$  пойдет по тому же сценарию, что и для точки  $Q$ . Мы предлагаем читателю провести это доказательство, решив следующую серию упражнений, после чего доказательство основной теоремы будет закончено.

**Упражнения**

**2** (аналог задачи Шарыгина). Пусть описанные окружности треугольников  $PAC$  и  $PBD$  пересекаются вторично в точке  $N$ . Докажите, что  $\angle ONP = 90^\circ$ .

**3.** Докажите, что прямая  $PN$  проходит через  $E$ .  
*Указание.* Рассмотрите тройку окружностей  $(PAC), (PBD)$  и  $(ABCD)$ .

**4.** Докажите, что прямая  $P_1P_2$  проходит через точку  $E$ .

*Указание.* Рассмотрите тройку окружностей  $(PACN), (PP_1P_2N)$  и  $(ABCD)$ .

**Следствия**

Рассмотрим еще раз четырехугольник  $ABCD$ , вписанный в окружность с центром  $O$ , и пусть  $P, Q, E$  – точки пересечения пар прямых  $AB$  и  $CD, BC$  и  $AD, AC$  и  $BD$ . Теперь из основной теоремы мы знаем, что прямая

<sup>2</sup>Для двух пересекающихся окружностей радикальная ось совпадает с прямой, проходящей через их точки пересечения. Если три окружности попарно пересекаются в точках  $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ , то теорему о радикальных осях легко вывести из теоремы о произведении отрезков секущих. Действительно, пусть  $X$  – точка пересечения радикальных осей  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$ , а прямая  $XA_1$  вторично пересекает окружность  $(A_1A_2B_1B_2)$  в точке  $A'_2$ . Тогда  $XA_1 \cdot XA'_2 = XB_1 \cdot XB_2 = XC_1 \cdot XC_2$ . Равенство  $XA_1 \cdot XA'_2 = XC_1 \cdot XC_2$  означает, что  $A'_2$  лежит и на окружности  $(A_1A_2C_1C_2)$ , т.е. совпадает с  $A_2$ .



$QE$  совпадает с прямой  $P_1P_2$ . Но точки  $P_1$  и  $P_2$ , очевидно, симметричны относительно прямой  $PO$ , откуда  $P_1P_2 \perp PO$ . Тем самым,  $QE \perp PO$ . Аналогично,  $PE \perp QO$ . Следовательно, точка  $E$  является точкой пересечения высот треугольника  $POQ$  (иначе говоря, четверка  $P, Q, E, O$  ортоцентрическая, т.е. каждая из этих точек является ортоцентром треугольника с вершинами в оставшихся трех точках). В частности,  $OE \perp PQ$  (рис. 10).

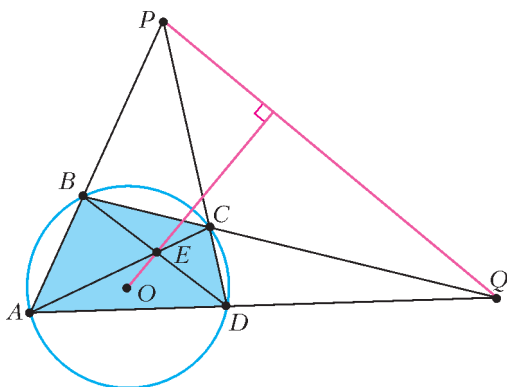


Рис. 10

Перпендикулярность прямых  $OE$  и  $PQ$  носит название *теоремы Брокера*.

### Что дальше?

Конструкция основной теоремы встречается настолько часто, что некоторые ее объекты заслужили собственные имена. Так, точку  $P$  называют *полюсом* прямой  $P_1P_2$ , а саму прямую  $P_1P_2$  — *полярной* точки  $P$ . Таким образом, с каждой точкой (полюсом) связана своя уникальная прямая (поляр), такое соответствие называют *полярным*. Полярное соответствие находит очень широкое применение в решениях самых трудных задач. Для быстрого и эффективного введения в тему рекомендуем подборку задач [1], в которой можно найти множество интересных примеров.

Удивительным образом оказывается, что построение касательной одной линейкой проведет точно таким же образом, если мы заменим окружность на эллипс, гиперболу или параболу (рис. 11).

На первый взгляд может показаться, что наше доказательство бесполезно в этой ситуации, однако, на самом деле все три упомянутых случая (эллипса, гиперболы и параболы) можно свести к случаю окружнос-

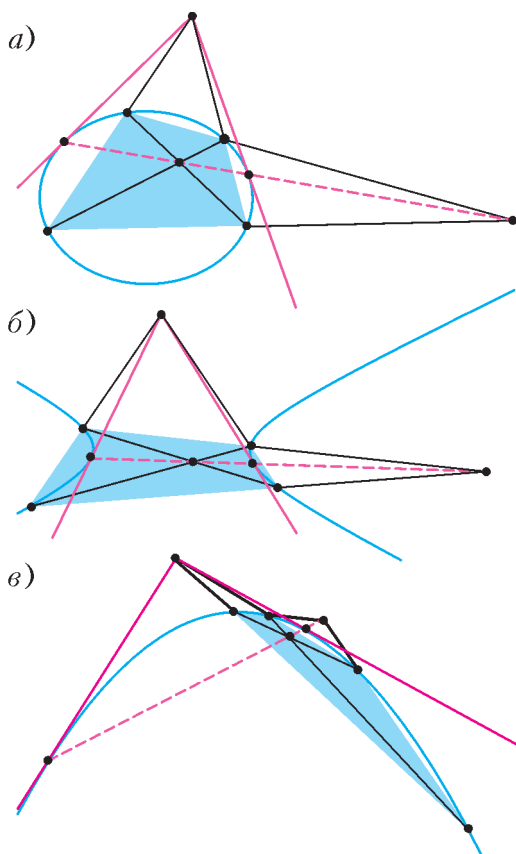


Рис. 11

ти! Для этого используют так называемые *проективные преобразования*. О них можно прочитать, например, в обстоятельной книге [2].

Под занавес отметим, что основой для всего сюжета послужила задача Шарьгина, совершенной другой подход к которой, а также ее связи с другими жемчужинами геометрии можно найти в замечательной статье [3].

### Литература

1. П.А.Кожевников. Полярное соответствие. (<http://geometry.ru/persons/kozhevnikov/polar.pdf>)
2. И.Я.Яглом. Геометрические преобразования. Том 2. — М.: Наука, 1955. (<http://www.math.ru/lib/files/djvu/yaglom/tom2.djvu>)
3. В.Протасов. О двух велосипедистах и вишневой косточке. — «Квант», 2008, №3. (<http://geometry.ru/articles/protasovbicycle.pdf>)

# LXXX Московская математическая олимпиада

8 класс

1. Замените в выражении  $AB^C = DE^F$  буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным, используя каждую цифру от 1 до 6 ровно один раз. (Пояснение:  $AB^C$  – двузначное число из цифр  $A$  и  $B$ , возведенное в степень  $C$ . Достаточно привести один способ замены.)

*Е.Бакаев*

2. На плоскости даны треугольник  $ABC$  и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника  $ABC$ . Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

*С.Маркелов*

3. По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стерли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально?

*Б.Френкин*

4. См. задачу 4 сложного варианта для 8–9 классов весеннего тура XXXVIII Турнира городов (опубликовано в «Кванте» №4).

5. Преподаватель выставил оценки по шкале от 0 до 100. В учебной части могут менять верхнюю границу шкалы на любое другое натуральное число, пересчитывая оценки пропорционально и округляя до целых. Нецелое число при округлении меняется до ближайшего целого; если дробная часть равна 0,5, направление округления учебная часть может выбирать любое, отдельно для каждой оценки. (Например, оценка 37 по шкале 100 после пересчета в шкалу 40 перейдет в  $37 \cdot (40/100) = 14,8$  и будет округлена до 15.) Студенты Петя и Вася получили оценки  $a$  и  $b$ , отличные от 0 и 100. Докажите, что учебная часть может сделать несколько пересчетов так, чтобы у Пети

стала оценка  $b$ , а у Васи – оценка  $a$  (пересчитываются одновременно обе оценки).

*Б.Высоканов, Н.Медведь, В.Брагин*

6. См. задачу M2460 «Задачника «Кванта»».

9 класс

1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру.

*М.Евдокимов*

2. См. задачу 1 сложного варианта для 8–9 классов весеннего тура XXXVIII Турнира городов.

3. См. задачу 2 сложного варианта для 8–9 классов весеннего тура XXXVIII Турнира городов.

4. Найдите все такие пары натуральных чисел  $a$  и  $k$ , что для всякого натурального  $n$ , взаимно простого с  $a$ , число  $a^{k^n+1} - 1$  делится на  $n$ .

*А.Меньщиков*

5. См. задачу 4 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXVIII Турнира городов.

6. См. задачу 5 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXVIII Турнира городов.

10 класс

1. Квадратный трехчлен  $x^2 + bx + c$  имеет два действительных корня. Каждый из трех его коэффициентов (включая коэффициент при  $x^2$ ) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трехчлена также увеличились на 1?

*М.Евдокимов*

2. Все натуральные числа, большие единицы, раскрасили в два цвета – синий и красный – так, что сумма любых двух синих (в том числе одинаковых) – синяя, а произве-

дение любых двух красных (в том числе одинаковых) – красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2017?

*М.Евдокимов*

**3.** Точка  $O$  – центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Описанная окружность треугольника  $AOC$  вторично пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Оказалось, что прямая  $EF$  делит площадь треугольника  $ABC$  пополам. Найдите угол  $B$ .

*М.Евдокимов*

**4.** У Васи был камень (однородный, без внутренних полостей), имеющий форму выпуклого многогранника, у которого есть только треугольные и шестиугольные грани. Вася утверждает, что он разбил этот камень на две части так, что можно сложить из них куб (без внутренних полостей). Могут ли слова Васи быть правдой?

*М.Евдокимов*

**5.** При каких натуральных  $n$  для всякого натурального  $k \geq n$  найдется число с суммой цифр  $k$ , кратное  $n$ ?

*А.Кузнецов, И.Лосев*

**6.** См. задачу 7 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXVIII Турира городов.

*11 класс*

*Первый день*

**1.** Найдите наименьшее натуральное число, кратное 80, в котором можно так переставить две его различные цифры, что получившееся число также будет кратно 80.

*А.Бегуниц*

**2.** На вписанной окружности треугольника  $ABC$ , касающейся стороны  $AC$  в точке  $S$ , нашлась такая точка  $Q$ , что середины отрезков  $AQ$  и  $QC$  также лежат на вписанной окружности. Докажите, что  $QS$  – биссектриса угла  $AQC$ .

*М.Васильев*

**3.** Пусть  $x_0$  – положительный корень уравнения  $x^{2017} - x - 1 = 0$ , а  $y_0$  – положительный корень уравнения  $y^{4034} - y = 3x_0$ .

а) Сравните  $x_0$  и  $y_0$ .

б) Найдите десятый знак после запятой числа  $|x_0 - y_0|$ .

*И.Шейнак*

**4.** Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной  $d$  метров. При каком наименьшем  $d$  фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

*О.Косухин*

**5.** На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые служат вершинами меньшего куба. Найдите все значения, которые может принимать длина ребра этого куба.

*М.Евдокимов*

**6.** См. задачу 6 для 10 класса.

*Второй день*

**1.** Даны две непостоянные прогрессии  $(a_n)$  и  $(b_n)$ , одна из которых арифметическая, а другая – геометрическая. Известно, что  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 : b_2 = 2$  и  $a_4 : b_4 = 8$ . Чему может быть равно отношение  $a_3 : b_3$ ?

*Д.Горяшин*

**2.** Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?

*А.Бегуниц*

**3.** Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один – преступник, еще один – свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

*О.Косухин*

**4.** Внутри треугольника  $ABC$  взята такая точка  $D$ , что  $BD = CD$ ,  $\angle BDC = 120^\circ$ . Вне

треугольника  $ABC$  взята такая точка  $E$ , что  $AE = CE$ ,  $\angle AEC = 60^\circ$  и точки  $B$  и  $E$  находятся в разных полуплоскостях относительно  $AC$ . Докажите, что  $\angle AFD = 90^\circ$ , где  $F$  – середина отрезка  $BE$ .

*О. Косухин*

5. Таблица размером  $2017 \times 2017$  заполнена ненулевыми цифрами. Среди 4034 чисел, десятичные записи которых совпадают со

строками и столбцами этой таблицы, читаемыми слева направо и сверху вниз соответственно, все, кроме одного, делятся на простое число  $p$ , а оставшееся число на  $p$  не делится. Найдите все возможные значения числа  $p$ .

*А. Галатенко*

*Публикацию подготовил Е. Епифанов*

## Московская физическая олимпиада 2017 года

### Второй теоретический тур

*7 класс*

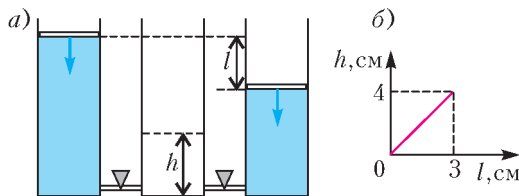
1. В аэропорту Шереметьево в длинном переходе между двумя терминалами есть два параллельных друг другу траволатора – горизонтально расположенных эскалатора, имеющих одинаковые длины. Школьник Вася, отправляющийся на Международную физическую олимпиаду, заметил, что первый траволатор движется, а второй выключен, и, ожидая свой рейс, решил немного развлечься. Он начал бегать по траволаторам туда-сюда, каждый раз возвращаясь в исходную точку. В первый раз Вася пробежал туда по движущемуся траволатору, а назад – по неподвижному. Во второй раз он пробежал туда по неподвижному траволатору, а назад – по движущемуся. Разность времен движения Васи в первом и втором забегах составила  $\Delta t_1 = 25$  с. В третий раз Вася пробежал в обе стороны по движущемуся траволатору, а в четвертый раз – в обе стороны по неподвижному. Разность времен движения Васи в третьем и в четвертом забегах оказалась равной  $\Delta t_2 = 5$  с. Вася развивает постоянную скорость относительно траволатора, скорость движения которого также постоянна и равна  $u = 1$  м/с. Найдите скорость  $v$  Васи относительно траволатора и определите длину траволатора. Считайте, что на ускорение, торможение и на разворот Вася тратит пренебрежимо мало времени.

*М. Замятнин*

2. Выйдя из дома, папа с дочкой Машей и сыном Ваней бегут к автобусной остановке, расстояние до которой  $s = 430$  м. Скорость Вани  $v = 2$  м/с, скорость Маши  $2v$ , а скорость папы  $4v$ . Если папа сажает любого из детей на шею, то его скорость уменьшается до  $3v$ . Двоих детей одновременно папа нести не может. Через какое минимальное время вся семья сможет оказаться на остановке? Можно считать, что посадка детей на папину шею, а также разгон и торможение происходят быстро.

*А. Бычков*

3. Три одинаковых вертикальных цилиндрических сосуда сообщаются друг с другом вблизи дна при помощи узких трубок с кранами, которые первоначально перекрыты (рис. 1, а). В левом и правом сосудах под горизонтальными тонкими поршнями находится вода, а средний сосуд пуст. Краны одновременно открывают и в тот же момент начинают двигать вниз оба поршня с постоянными скоростями. При этом разница уровней поршней по вертикали увеличивается со скоростью  $v$ . Пользуясь графиком зависимости высоты  $h$  уровня воды в среднем сосуде



*Рис. 1*

от расстояния по вертикали  $l$  между поршнями (рис.1,б), найдите скорость каждого из поршней.

*А.Бычков*

4. Чебурашка и Гена долго строили и, наконец, построили наглядную модель графена – двумерного кристалла углерода, состоящего из ячеек в виде правильных шестиугольников (как показано на рисунке 2) в

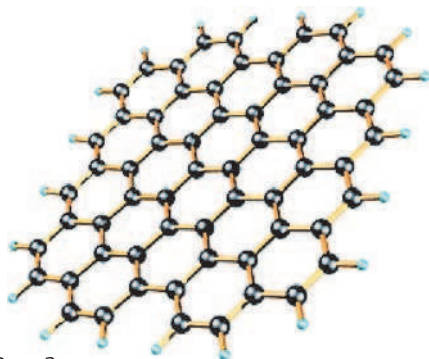


Рис. 2

масштабе  $250\,000\,000 : 1$ . Количество ячеек в модели было большим, так что ее площадь оказалась равной  $12,5\text{ м}^2$ . Атомы углерода в модели – одинаковые пластилиновые шарики, а связи между атомами – кусочки проволоки, сделанной из медного сплава. При этом объем пластилина в каждом шарике в 9 раз больше объема каждой проволоочки, соединяющей соседние шарики. Оцените массу этой модели графена. Плотность пластилина  $\rho_{\text{пл}} = 1330\text{ кг/м}^3$ , плотность медного сплава  $\rho_{\text{м}} = 9000\text{ кг/м}^3$ . Масса проволоочек, необходимых для изготовления одной-единственной ячейки графена, составляет 487 мг. Расстояние между центрами соседних атомов настоящего графена  $0,142\text{ нм}$  (нанометр – это одна миллионная часть миллиметра). Площадь  $S$  правильного шестиугольника с длиной стороны  $a$  определяется по формуле  $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ , где  $\sqrt{3} \approx 1,7$ .

*П.Крюков*

8 класс

1. Три одинаковых вертикальных цилиндрических сосуда сообщаются при помощи узких трубок с кранами, которые первоначально перекрыты (рис.3,а). В левом сосуде под поршнем находится жидкость плотнос-

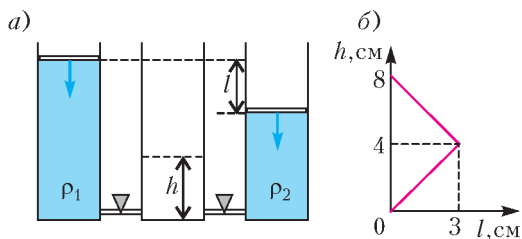


Рис. 3

тью  $\rho_1$ , в правом сосуде под поршнем – жидкость плотностью  $\rho_2$ , а средний сосуд пуст. Краны одновременно открывают и в тот же момент начинают двигать вниз оба поршня с постоянными скоростями. Сначала разница уровней поршней по вертикали увеличивается со скоростью  $v$ . Затем, в некоторый момент, скорости поршней изменяются – они продолжают двигаться с постоянными скоростями, но теперь разница уровней поршней по вертикали уменьшается с такой же скоростью  $v$ . Пользуясь графиком зависимости высоты  $h$  уровня смеси в среднем сосуде от расстояния по вертикали  $l$  между поршнями (рис.3,б), найдите среднюю плотность смеси в тот момент, когда  $h = 6\text{ см}$ . Можно считать, что объем смеси равен сумме объемов жидкостей, которые перетекли из крайних сосудов.

*А.Бычков*

2. Три пловца разной квалификации решили посоревноваться на дистанции 100 метров в пятидесятиметровом бассейне. Стартовали пловцы одновременно, и каждый проплывал дистанцию со своей постоянной скоростью. Обозначим через  $d_{12}(t)$  расстояние между первым и вторым пловцами, а через  $d_{13}(t)$  – расстояние между первым и третьим пловцами в момент времени  $t$ . На рисунке 4 красной линией изображен график зависимости  $d_{13}(t)$  для части заплыва – от старта до момента времени  $t_2$ . График

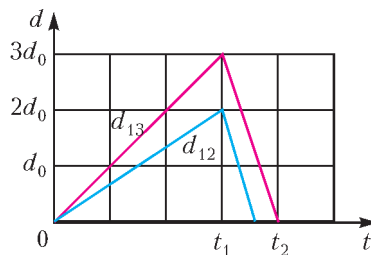


Рис. 4

зависимости  $d_{12}(t)$  изображен синей линией. Численное значение величины  $d_0$  неизвестно, но зато известно, что  $t_1 = 30$  с и  $t_2 = 40$  с. При определении расстояния между пловцами ширина дорожек бассейна не учитывалась и считалось, что спортсмены движутся почти вдоль одной прямой. Разворот каждого из пловцов происходит очень быстро.

1) Какое время на финише показал каждый из пловцов?

2) Продолжите (достройте) оба графика до момента времени 60 с.

*П. Крюков*

**3.** Неоднородный груз массой  $4m$  подвешен при помощи системы блоков так, как показано на рисунке 5. Нити и блоки очень

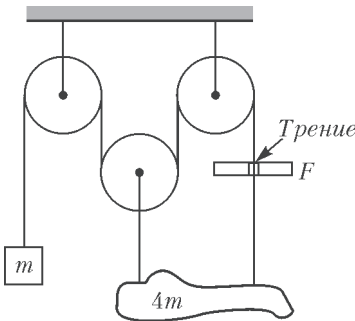


Рис. 5

легкие, свободные участки нитей вертикальны, трения в осях блоков нет. К свободному концу нити, перекинутой через блоки, прикреплен противовес массой  $m$ . Участок этой же нити, находящийся между грузом и правым блоком, проходит через небольшое отверстие в неподвижной перегородке. При скольжении нити в отверстии возникает сила трения  $F = 10$  Н, действующая на нить со стороны стенок перегородки.

1) При каких значениях массы  $m$  противовеса система может оставаться в равновесии?

2) Где должен находиться центр масс неоднородного груза для того, чтобы равновесие было возможным?

3) Чему равен модуль силы трения  $F_1$  и в какую сторону она направлена при  $m = m_1 = 0,7$  кг?

Модуль ускорения свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*М. Замятин*

**4.** В Москве в районе Очаково работает мощная тепловая электрическая станция с названием «ТЭЦ-25». Максимальная электрическая мощность этой станции  $W_1 = 1370$  МВт. Кроме выработки электроэнергии эта станция может одновременно поставлять тепло мощностью  $W_2 = 4088$  Гкал/ч для снабжения соседних районов города горячей водой и для обогрева домов. Станция работает на природном газе метане ( $\text{CH}_4$ ), при сгорании  $m_0 = 16$  г которого выделяется количество теплоты  $Q = 797$  кДж. В атмосферу через трубы вместе с продуктами сгорания всегда выбрасывается 20% энергии, полученной в результате сгорания топлива. В летнем режиме, когда дома отапливать не нужно, станция работает на 80% своей максимальной электрической мощности и при этом 30% выделившего при сгорании метана количества теплоты все равно приходится отводить в атмосферу при помощи испарения воды в специальных устройствах – градирнях. Удельная теплота парообразования воды  $L = 2256$  кДж/кг, одна калория равна примерно 4,2 Дж.

1) Каков у станции расход топлива (в кг/с) зимой?

2) Каков КПД использования тепловой энергии при ее преобразовании в электрическую зимой?

3) Какое количество воды каждую секунду превращается в пар (в л/с) в градирнях станции летом?

4) Какая мощность поставляется потребителям горячей воды в домах летом?

*И. Семериков, С. Варламов*

*9 класс*

**1.** Ракета удаляется от горизонтальной поверхности Земли со скоростью  $v$ , направленной строго вертикально. Параллельно поверхности точно на запад летит самолет со скоростью  $v/\sqrt{3}$ .

1) С какой наименьшей по модулю скоростью  $u$  и в каком направлении должен лететь (относительно Земли) квадрокоптер для того, чтобы относительно него ракета и самолет имели противоположные по направлению скорости?

2) Под каким углом к горизонту (относительно Земли) должна быть направлена ско-

рость квадрокоптера для того, чтобы ракета и самолет имели в системе отсчета квадрокоптера противоположные по направлению и равные по модулю скорости? Чему равен модуль скорости квадрокоптера в этом случае?

*А.Бычков*

2. В находящуюся в широком сосуде жидкость частично погружены одинаковые кубики со стороной  $a$  и массой  $M$ , которые удерживаются в равновесии при помощи системы, состоящей из невесомых блоков, соединенных очень легкой и нерастяжимой нитью (рис.6).

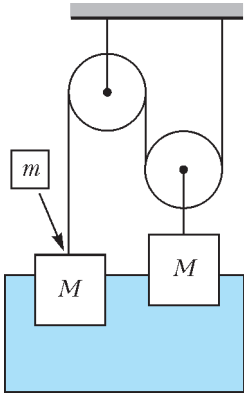


Рис. 6

Трение в осях блоков отсутствует, плотность жидкости равна плотности кубиков. Изначально правый кубик погружен в жидкость ровно наполовину.

1) На какую величину изменится глубина погружения правого кубика, если на левый кубик поместить небольшой перегрузок массой  $m = M/16$ ?

2) На сколько в результате этого изменятся модуль силы натяжения нити и модуль силы давления жидкости на дно?

3) При каких значениях массы перегрузка оба кубика останутся частично погруженными в жидкость?

Явлениями, связанными со смачиванием поверхностей кубиков жидкостями, можно пренебречь.

*М.Замятнин*

3. Для охлаждения своих одинаковых экспериментальных установок юные физики Вася и Петя используют радиаторы, в которые через трубки одинакового сечения закачивают жидкую смесь холодной воды, имеющей температуру  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , с мелко перетертым льдом в объемном соотношении три к одному. Известно, что в экспериментальной установке Васи на выходе из радиатора получается вода с температурой  $t_1 = +32^\circ\text{C}$ , а в установке Пети — с температурой  $t_2 = +75^\circ\text{C}$ . Тепловые мощности, отбираемые охлаждающей смесью у двух установок,

одинаковы. Чему равно отношение скоростей закачивания смеси в радиаторы экспериментальных установок Васи и Пети? Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплоемкость воды  $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ .

*А.Бычков*

4. На рисунке 7 приведена схема цепи, состоящей из трех одинаковых омметров  $\Omega$ , с помощью которых измеряется неизвестное сопротивление  $R$  резистора. Полярность включения у всех омметров одинаковая. Один из омметров показывает сопротивление  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ , а другой —  $R_2 = 800 \text{ Ом}$ . Каковы показания  $R_3$  третьего омметра? Чему равно сопротивление  $R$  резистора?

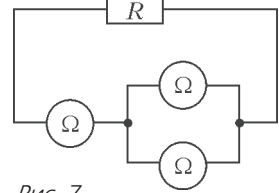


Рис. 7

*Указание.* Можно считать, что омметр состоит из соединенных последовательно идеального источника с напряжением  $U$ , резистора сопротивлением  $r$  и идеального амперметра. Показания амперметра автоматически пересчитываются в сопротивление подключенного к его клеммам резистора, которое отображается на цифровом табло прибора.

*М.Замятнин*

10 класс

1. Жесткий стержень  $AB$  длиной  $L$  лежит на горизонтальном полу, придвинутый одним из своих концов вплотную к вертикальной стене, как показано на рисунке 8. В точке  $A$  сидит букашка. В тот момент когда конец  $A$  стержня начала двигать вверх вдоль стены с постоянной по модулю скоростью  $v$ , букашка поползла по стержню с постоянной относительно стержня скоростью  $u$  в направлении конца  $B$ , который скользит по полу, не

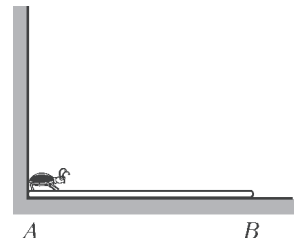


Рис. 8

отрываясь от него. Найдите максимальное расстояние  $s$  от стенки до букашки в процессе ее движения по стержню.

*А.Бычков*

2. По закрепленной наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, скользил брусок массой  $2m$ , двигаясь с постоянной скоростью  $v$ . Сверху без начальной скорости отпустили кусок пластилина массой  $m$ . Пролетев расстояние  $H$ , пластилин упал на брусок и прилип к нему. Какое количество теплоты выделилось за время соударения? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

*М.Замятнин*

3. Деревянный брусок плотностью  $\rho = 500 \text{ кг/м}^3$  в форме прямоугольного параллелепипеда имеет длину  $L = 1 \text{ м}$  и квадратное поперечное сечение со стороной  $a = 10 \text{ см}$ . Брусок опустили в воду большого озера и удерживали его в таком неустойчивом положении равновесия, что одна из длинных граней бруска была сухой и горизонтальной, при этом половина объема бруска была погружена в воду. Брусок отпустили, и он принял устойчивое положение, повернувшись вокруг своей оси симметрии на угол  $45^\circ$ . На сколько в результате этого уменьшилась потенциальная энергия системы вода–брусок? Плотность воды равна  $2\rho$ .

*С.Варламов*

4. Один моль идеального одноатомного газа совершает замкнутый цикл, состоящий

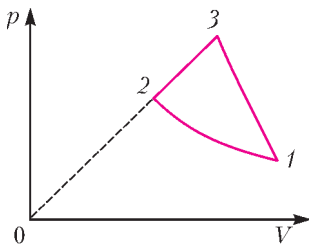


Рис. 9

из изотермы 1–2 и процессов 2–3 и 3–1, в которых давление является линейной функцией объема, как показано на рисунке 9. Известно, что в состояниях 1 и 2 давление газа равно  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. При каких давлениях в состоянии 3 в нем достигается максимальная температура газа за весь цикл?

*А.Бычков*

5. См. задачу Ф2471 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Прямой круговой конус с образующей длиной  $L = 13 \text{ см}$  и диаметром основания  $D = 10 \text{ см}$  катится по горизонтальной поверхности, не проскальзывая (рис. 10). Центр

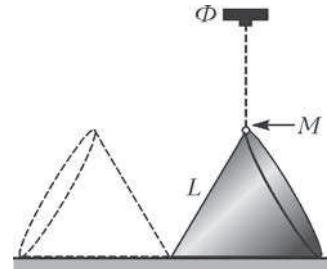


Рис. 10

основания конуса движется с постоянной по модулю скоростью, а максимально возможная скорость точки, лежащей на поверхности этого конуса, равна  $v = 1 \text{ м/с}$ . На одну из точек, расположенных на границе основания и боковой поверхности конуса, нанесена очень маленькая метка  $M$ . Над конусом неподвижно закреплен фотоаппарат  $\Phi$ , объектив которого расположен горизонтально. В момент когда метка находилась в своем наивысшем положении и строго под объективом фотоаппарата, был сделан фотоснимок. Через какое минимальное время после этого можно при помощи того же неподвижного фотоаппарата сделать точно такую же фотографию?

*С.Варламов*

2. Одинаковые пылинки, имеющие заряд  $q = 1 \text{ пКл}$ , массу  $m = 1 \text{ мг}$  и летящие с

одинаковой начальной скоростью  $\vec{v}$ , модуль которой равен  $2 \text{ м/с}$ , попадают на некоторую область, в которой создано электрическое поле. Модуль вектора напряженности этого поля не меняется со временем и равен  $E = 10 \text{ кВ/см}$ , а вектор напряженности вращается с посто-

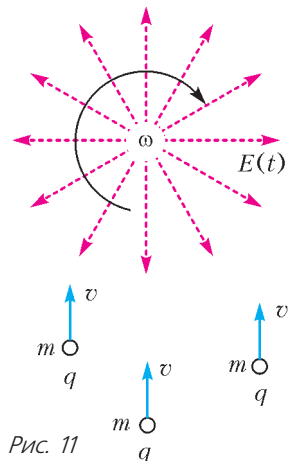


Рис. 11



янной угловой скоростью  $\omega = 2$  рад/с в одной плоскости с векторами скоростей частиц (рис. 11).

1) С какой максимальной по модулю скоростью  $u$  могут вылетать некоторые пылинки из области действия электрического поля?

2) Какого наибольшего значения может достигать угол  $\beta$  между вектором конечной скорости и начальным направлением движения (угол отклонения) некоторых пылинок, если время их пребывания в поле  $\tau = 0,25$  с?

3) До какого значения  $\tau_0$  надо изменить длительность пребывания некоторых пылинок в данном поле для того, чтобы наибольший угол их отклонения достиг своего максимально возможного значения? Чему равен максимально возможный угол отклонения  $\beta_0$ ?

Взаимодействие пылинок друг с другом и влияние на них других сил пренебрежимо мало.

*М.Замятнин*

**3.** См. задачу Ф2472 «Задачника «Квант»».

**4.** В теплоизолированном цилиндре под непроводящим тепло поршнем находятся в термодинамически равновесном состоянии аргон и насыщенные пары воды при температуре  $T_1 = 302$  К и давлении  $p = 2$  атм. Сразу после быстрого увеличения объема смеси под поршнем в  $n = 1,06$  раза температура в цилиндре уменьшается до некоторой величины  $T_2$ , а водяные пары оказываются в термодинамически неравновесном состоянии пересыщения, при котором их давление  $p_2$  становится выше давления насыщенного пара  $p_{\text{нас}}(T_2)$  при новой температуре. Со временем часть пара конденсируется, и система вновь приходит в состояние устойчивого термодинамического равновесия.

1) Найдите температуру  $T_2$ .  
2) Определите давление  $p_2$ .  
3) Верно ли, что в новом состоянии устойчивого равновесия температура под поршнем будет отличаться от  $T_2$  менее чем на 1 К?

Удельная теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг·К), теплоемкость одного моля водяного пара при постоянном объеме  $C_V = 3R$ , удельная теплота испарения воды

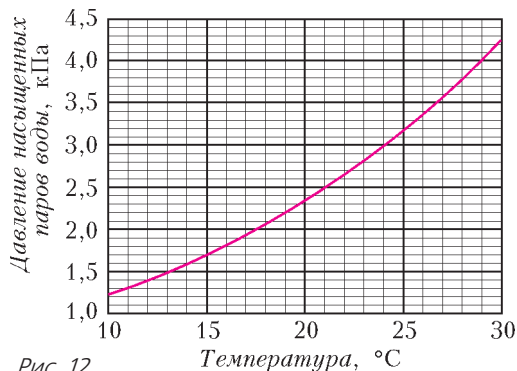


Рис. 12

$L = 2,33 \cdot 10^6$  Дж/кг, молярная масса воды  $M = 18$  г/моль. График зависимости давления насыщенных паров воды от температуры представлен на рисунке 12.

*П.Крюков*

**5.** Точки  $A_1, \dots, A_{2017}$  — вершины правильного 2017-угольника, точка  $S$  — его центр. Между соседними вершинами многоугольника, за исключением 1-й и 2017-й, включены одинаковые идеальные батарейки с напряжением  $U_0$  так, как показано на рисунке 13. Также между каждой вершиной и точкой

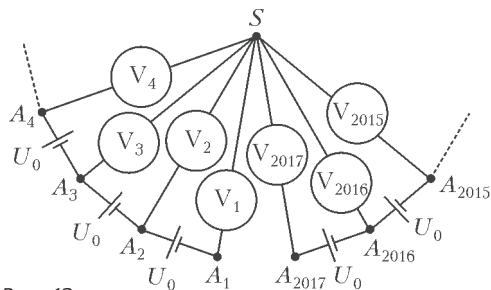


Рис. 13

$S$  включен вольтметр с соответствующим номером. Все вольтметры одинаковые, в точке  $S$  есть электрический контакт.

1) На сколько отличаются показания первого и десятого вольтметров?  
2) Что показывает вольтметр с номером  $N$ ?  
3) Определите номер вольтметра с нулевыми показаниями.

*П.Крюков*

*Публикацию подготовили  
А.Бычков, М.Семенов, А.Якута*

# Инженерная олимпиада ШКОЛЬНИКОВ

Пять лет назад ряд ведущих технических университетов России – Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е.Алексеева и Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева – организовали необычную олимпиаду, посвященную физике в технике, физике вокруг нас, физике в жизни человека. Эту олимпиаду было решено назвать «Инженерной олимпиадой школьников». За пять лет олимпиада прошла длинный путь от нескольких десятков участников до шести тысяч, от 3 точек проведения до 26 региональных площадок (в том числе трех – за пределами РФ), от неясного и плохо определенного формата до продуманного задания по инженерной физике, включающего элементы прикладной механики и сопротивления материалов, электротехники и электроники, технической термодинамики и технической оптики.

Инженерная олимпиада школьников входит в Перечень олимпиад школьников, поэтому ее победители и призеры получают особые права при поступлении в любые вузы РФ.

Ниже приводятся избранные задачи отборочных и заключительного туров Инженерной олимпиады школьников 2016/17 учебного года.

## Избранные задачи олимпиады

1. В открытый с двух сторон тонкостенный цилиндр радиусом  $R$ , стоящий на горизонтальной поверхности, помещают два шарика радиусами  $2r$  и  $r$  и массами  $2m$  и  $m$  соответственно (рис.1).

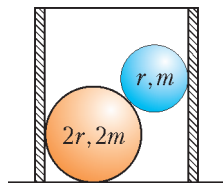


Рис. 1

Нижний шарик лежит на горизонтальной поверхности, верхний шарик опирается на нижний и на боковую стенку цилиндра. Смогут ли шарики опро-

кинуть цилиндр, и если да, то при какой его максимальной массе?

2. Имеется цилиндрическая труба с внутренним радиусом  $r$ , внутри которой находится газ под давлением  $p$ . Найдите силу (величину и направление), действующую со стороны этого газа на кусок трубы с плоскими сечениями, которые образуют углы  $\alpha$  и  $2\alpha$  с перпендикулярной трубе плоскостью и осью трубы соответственно (рис.2; кусок трубы, для которого нужно искать силу, выделен).

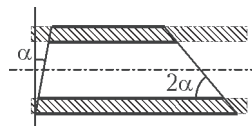


Рис. 2

3. Трехзвенный механизм представляет собой три связанных шарнирно стержня  $O_1A$ ,  $AB$  и  $BO_2$ , прикрепленных к неподвижным осям  $O_1$  и  $O_2$ . Размеры механизма (в условных единицах) и его расположение в некоторый момент

времени показаны на рисунке 3 ( $AB = 5$ , угол между звеньями  $AO_1$  и  $BO_2$  – прямой). Стержень  $O_1A$  вращается вокруг оси  $O_1$  так, что величина скорости

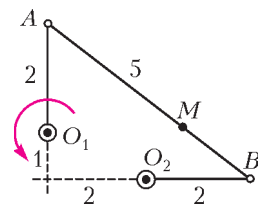


Рис. 3

точки  $A$  постоянна и равна  $v$  (направление вращения стержня  $AO_1$  показано стрелкой). Найдите в этот момент скорость точки  $M$ , делящей стержень  $AB$  в отношении 3:1 ( $AM : MB = 3:1$ ).

4. Известна цепь, в которой лампочку можно включать и выключать любым из двух выключателей  $K$ , причем независимо от положения второго (рис.4). На основе приведенной цепи постройте цепь, в которой включение-выключение лампочки можно

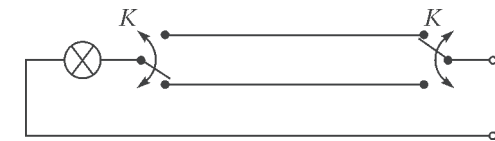


Рис. 4

осуществлять любым из пяти выключателей независимо от положения четырех остальных. Цепь должна состоять только из проводов и выключателей – одинарных или двойных (рис.5). Одинарный выключатель со-

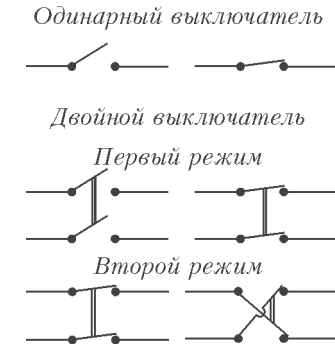


Рис. 5

единяет или разрывает один провод, двойной выключатель может работать в двух режимах: 1) одновременно соединять или разрывать два провода двухпроводной линии, 2) одновременно переключать соединение двух проводов двухпроводной линии.

5. Важным параметром жидкостного насоса является его напорно-расходная характеристика, которая показывает, какой перепад давлений  $\Delta p$  (напор) может обеспечить насос в зависимости от количества жидкости  $\mu$ , которое он может прокачать в единицу времени (расход). Эта зависимость, как пра-

вило, является убывающей функцией: при большом расходе насос может обеспечить только маленький напор и наоборот. Имеется насос, напорно-расходная характеристика которого имеет вид  $\Delta p = p_0 - \alpha \mu^2$ , где  $p_0$  и  $\alpha$  – известные числа с соответствующими размерностями. При каком расходе насос развивает наибольшую мощность? Чему равна эта наибольшая мощность?

6. Два зубчатых колеса помещены между горизонтальными зубчатыми рейками (рис.6). Одиночное колесо имеет радиус  $R$ , ступенчатое образовано двумя концентри-

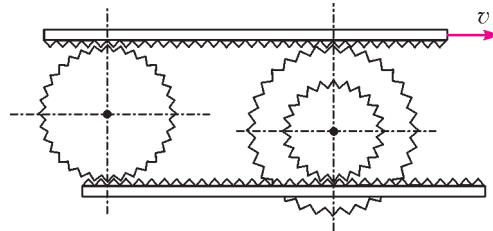


Рис. 6

ческими колесами радиусов  $3R/4$  и  $5R/4$ , причем второе колесо зажато между рейками большим и малым колесами (как показано на рисунке). Верхняя рейка движется вправо со скоростью  $v$ . Сближаются или удаляются друг от друга колеса? Найдите скорость центра правого колеса относительно центра левого.

Публикацию подготовил С.Муравьев

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. У восьми кубиков  $8 \cdot 6 = 48$  граней. Из них  $48 : 3 = 16$  синих. На гранях большого куба  $2 \times 2 \times 2$  мы видим  $6 \cdot 4 = 24$  грани маленьких кубиков, из них  $24 : 3 = 8$  красные, а остальные  $24 - 8 = 16$  синие. Итак, все 16 синих граней маленьких кубиков расположены на поверхности большого, т.е. все невидимые грани красные. Теперь можно каждый кубик повернуть так, чтобы три его скрытые красные грани оказались снаружи.

Можно обойтись и без подсчета числа граней. По условию синие грани составляют  $1/3$  от их

общего числа. На поверхности большого куба мы видим ровно половину граней каждого кубика (три из шести), т.е. мы видим половину всех граней. Синих из них  $2/3$ , т.е.  $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$  от их общего числа. Значит, все синие грани снаружи, и мы можем повернуть каждый кубик, спрятав эти грани вовнутрь.

2. Да, можно.

Пример – на рисунке 1.

3.  $19 \times 19$  м.

В первом случае пересечением ковров является квадрат площади  $4 \text{ м}^2$  (рис.2,а), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 м. Во втором случае пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 2 м (рис.2,б). Сле-

2		1	4
7	3	5	6

Рис. 1

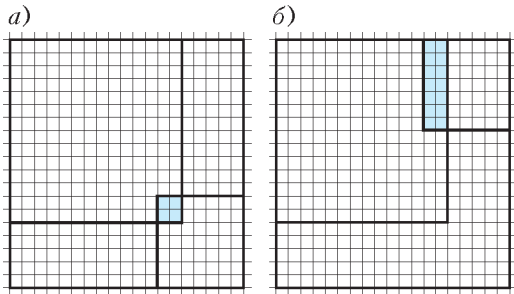


Рис. 2

довательно, другая сторона этого прямоугольника равна  $14 : 2 = 7$  (м), а это и есть длина стороны меньшего ковра. Значит, сторона большего ковра имеет длину 14 м. Так как стороны ковров накладываются друг на друга на 2 м, то длина стороны зала равна  $7 + 14 - 2 = 19$  (м).

4. 16 крестиков.

Пример – на рисунке 3,а.

Оценка. Рассмотрим произвольную расстановку крестиков, удовлетворяющую условию. Дока-

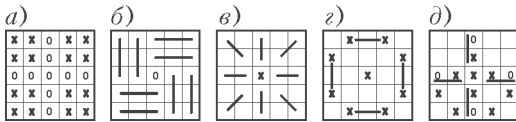


Рис. 3

жем, что в ней хотя бы 9 ноликов. Предположим, что это не так, тогда ноликов не более 8. Рассмотрим два случая. 1) В центральной клетке стоит нолик. Тогда разобьем оставшиеся клетки на 8 групп по 3 клетки (рис.3,б). В каждой из них хотя бы один нолик, значит, всего ноликов не менее 9. Противоречие. 2) В центральной клетке стоит крестик. Тогда рассмотрим 8 пар клеток, изображенных на рисунке 3,в. В каждой из них хотя бы один нолик, значит, всего ноликов не менее 8. Но по предположению ноликов не более 8, значит, их ровно 8, при этом в каждой выделенной паре ровно один нолик и вне этих пар ноликов нет. Тогда на оставшихся клетках – крестики (рис.3,г). Рассмотрим четыре выделенные тройки, в каждой из них уже по 2 крестика, поэтому оставшиеся знаки – нолики. Рассмотрим снова четыре из восьми ранее выделенных пар (рис.3,д), мы уже выяснили, что в них ровно один нолик, значит, другие знаки в них – крестики, поставим их. Видим, что в центре оказались тройки подряд идущих крестиков. Следовательно, эта расстановка крестиков не удовлетворяет условию. Противоречие.

**КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА**

(см. «Квант» №3)

20. Возьмем две таблицы из 0, 1 и 2, изображенные ниже. Если вместо каждого числа  $x$  таблицы 1 написать  $3^x$ , а вместо каждого числа  $x$  таблицы 2 записать  $5^x$ , получатся таблицы 3 и 4. Перемножив их (т.е. перемножив пары чисел в соответствующих ячейках), получим таблицу 5, все числа которой различны, а произведения в строках, столбцах и диагоналях равны  $3^3 \cdot 5^3$ .

Табл. 1	Табл. 2			
2 0 1	1 0 2			
0 1 2	2 1 0			
1 2 0	0 2 1			
↓	↓			
Табл. 3	Табл. 4	×	=	Табл. 5
9 1 3	5 1 25			45 1 75
1 3 9	25 5 1			25 15 9
3 9 1	1 25 5			3 225 5

21. Пусть  $A + B = 1099999$ , где  $A$  и  $B$  – шестизначные числа. Если выкинуть из  $A$  и  $B$  первую цифру, сумма полученных пятизначных чисел будет оканчиваться на 99999, а значит, она равна 99999, потому что сумма любых двух пятизначных чисел меньше 199999. Отсюда следует, что сумма первых цифр чисел  $A$  и  $B$  равна 10. Значит, если в числах  $A$  и  $B$  поставить первую цифру на последнее место, то в сумме получится  $999990 + 10 = 1000000$ .

22. 6 гирь.

Пример: гири 100 г, 200 г, 400 г, 800 г, 1600 г, 3200 г. Сократив все массы на 100, получим, что массы гирь составляют количества граммов, равные степеням двойки:  $1 = 2^0$ ,  $2 = 2^1$ ,  $4 = 2^2$ , ...,  $32 = 2^5$ . Доказать, что с помощью таких гирь можно набрать любое целое количество граммов от 1 до  $2^6 - 1$ , можно, сославшись на известную задачу о том, что с помощью гирь с массами  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^k$  можно набрать любое количество граммов от 1 до  $2^{k+1} - 1$  (в общем случае ее можно доказать по индукции, а для  $k = 5$  можно даже просто перебрать все варианты). Мы сокращали массы на 100, поэтому с помощью исходных гирь можно уравновесить любую массу от 100 г до 6300 г, кратную 100 г. Пусть удастся обойтись 5 гирями массами  $a, b, c, d, e$ . Тогда есть всего 31 вариант наборов этих гирь (каждую гирю можно либо взять в набор, либо не взять –  $2^5$  способов, остается отбросить пустой набор). И требуется взвесить

тоже 31 массу: 3000 г, 3100 г, ..., 6000 г. Но тогда каждая из масс  $a, b, c, d, e$  должна входить в этот набор. Значит, сумма масс всех (и даже любых двух) гирь больше 6000 г. Противоречие.

**23.** Заметим, что при повороте на 60 градусов вокруг узла сетки каждый узел переходит в другой узел. Значит, можно рассмотреть треугольник с вершинами в узлах сетки и всеми сторонами, равными  $a$ . Такой треугольник можно достроить до бесконечной треугольной сетки, каждая из ячеек которой – равносторонний треугольник со стороной, равной  $a$ . При этом все узлы такой сетки будут являться узлами изначальной сетки.

Рассмотрим эту сетку и докажем, что можно провести отрезок с вершинами в ее узлах. Пусть площадь одного треугольничка этой сетки –  $s$ . Тогда у равностороннего треугольника, площадь которого в  $k$  раз больше, чем  $s$ , сторона в  $\sqrt{k}$  раз больше, чем  $a$ . На рисунке 4 пока-

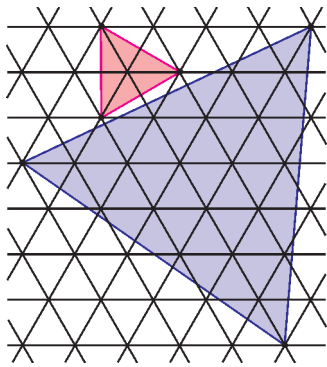


Рис. 4

заны равносторонние треугольники с площадями  $3s$  и  $37s$  с вершинами в узлах сетки (убедитесь в этом сами; доказательство аналогично решению задачи 11 «Конкурса», напечатанному в «Кванте» №3). Стороны этих треугольников и являются искомыми отрезками, проведенными на новой сетке.

**МАГИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ  
(ЗА КУЛИСАМИ)**

1. Если  $a^2 + b^2$  раскладывается над  $\mathbb{R}$  нетривиальным образом, то оба множителя – однородные линейные, т.е. имеют вид  $\lambda a + \mu b$ , где  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , причем  $\lambda$  и  $\mu$  не равны 0 одновременно. Но такое выражение обнуляется на целой прямой, в то время как при  $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

2. Разложив обе суммы квадратов и перегруппировав множители, приходим к одному из двух тождеств:

пировав множители, приходим к одному из двух тождеств:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

3.  $2x + i = (a + bi)^3$

$$\begin{aligned} & (\Rightarrow 2x - i = (a - bi)^3 \Rightarrow y = a^2 + b^2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a^3 - 3ab^2, \\ 1 = 3a^2b - b^3 (\Leftrightarrow b = 3a^2 - b^2 = \pm 1) \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1, \\ a = x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Значит,  $(x, y) = (0, 1)$  – единственное решение.

4.  $2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ .

5. Поскольку сумма векторов  $\overline{OA_k}$  равна  $\vec{0}$ , то и сумма их проекций на ось абсцисс равна 0:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \underbrace{\cos \frac{2\pi}{5}}_c + 2 \underbrace{\cos \frac{4\pi}{5}}_{2c^2-1} &= 0 \Rightarrow 4c^2 + 2c - 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow c = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ так как } c > 0. \end{aligned}$$

6. а) Тригонометрический метод упомянут весьма по делу. Корни из комплексных чисел извлекаются тригонометрически (об этом – в следующем номере журнала). Значение первого кубического корня в формуле Кардано можно брать любым из трех, значение второго корня определяется однозначно, поскольку произведение значений этих корней равно  $-\frac{p}{3}$ .

б) Два других корня:  $a\epsilon + b\epsilon^2, a\epsilon^2 + b\epsilon$ , где  $\epsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Эти значения также дает формула Кардано, принимающая вид  $x = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{b^3}$ .

в) Методом Виета можно решать любые кубические уравнения. В уравнении  $x^3 + px + q = 0$  делаем подстановку  $x = kz: k^3 z^3 + pkz + q = 0$  и  $k$  ищем из условия

$$k^3 : (pk) = 4 : (-3) \Leftrightarrow k \in \sqrt{\frac{-4p}{3}}.$$

При  $a > 1$  нужно воспользоваться гиперболическим косинусом  $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ . Верна аналогичная формула  $\operatorname{ch} 3t = 4\operatorname{ch}^3 t - 3\operatorname{ch} t$ . Для произвольного  $a \in \mathbb{C}$  нужно продолжить функцию  $\operatorname{cos}$  на всю комплексную плоскость (почитайте про комплексную экспоненту).

**Доказательство теоремы Эйлера–Ферма**

$(1) \Rightarrow (2)$  Пусть  $p = uv$ , где  $|u|, |v| > 1$ . Тогда  $p^2 = |u|^2 |v|^2, |u|^2 |v|^2 \in \mathbb{N}$ , поэтому  $|u|^2 = |v|^2 = p$ , откуда  $v = \frac{p}{u} = \frac{u\bar{u}}{u} = \bar{u}$ . Значит, если  $u = a + bi$ ,

где  $a, b \in \mathbb{Z}$ , то  $v = a - bi$  и  $p = uv = a^2 + b^2$ .  
Очевидно, что при этом  $a, b \neq 0$ , иначе  $p$  – составное в  $\mathbb{N}$ .

**(2)  $\Rightarrow$  (3)** Если  $a^2, b^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ , то  $p = a^2 + b^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$ . Но  $p$  – простое и  $p > 2$ , поэтому  $p \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ .

**(3)  $\Rightarrow$  (1)** Существует такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $n^2 + 1$  кратно  $p$  (выводится из малой теоремы Ферма или теоремы Вильсона). Далее  $p$  становится составным в  $\mathbb{Z}[i]$ , так как иначе из соотношения  $p | n^2 + 1 = (n + i)(n - i)$  следовало бы, что  $p | n + i$  или  $p | n - i$ , что неверно.

**АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ  
КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ**

1. а) Если  $-z \geq 0$ , то  $0 = z + (-z) > 0 + 0 = 0$  – противоречие.
- б) В §1 доказано:  $zw = 0 \Leftrightarrow z = 0$  или  $w = 0$ . Осталось разобрать 4 случая. Например, если  $z, w < 0$ , умножаем неравенство  $z < 0$  на  $-w > 0$  и получаем  $z(-w) < 0$ , т. е.  $zw > 0$  в силу п. а).
- в) Следует из б) при  $z = w$ .
- г) По п. в)  $1 = 1^2 > 0$ , тогда по п. а)  $-1 < 0 < 1$ .
2. Распишите  $z = x + yi$ ,  $w = u + iv$  ( $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ) и преобразуйте доказываемое неравенство равносильными преобразованиями к истинному.
4. а), б). См. §4. в)  $x = 1, \cos \frac{2\pi}{5} \pm i \sin \frac{2\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{5} \pm i \sin \frac{4\pi}{5}$ , см. §2 «Магии комплексных чисел».
5. а)  $x = \cos a \pm i \sin a \in \mathbb{R} (\Leftrightarrow a \in \pi\mathbb{Z})$ .
- б)  $x^2 = a, 1 - a$  и далее 3 случая:  $a < 0, 0 \leq a \leq 1, a > 1$ .

6. а)  $\{x, y\} = \left\{ \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right\} (\subset \mathbb{R} \Leftrightarrow p^2 \geq 4q)$ .

б)  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ .  
 $q = 0: x = 0, y \in \sqrt[4]{p}$  или  $y = 0, x \in \sqrt[4]{p}$   
 ( $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$ , см. §4);  
 $q \neq 0: x \in \sqrt[4]{\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$  (максимум 8 значений),  $y = \frac{4}{q}$ .  
 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$q = 0, p \geq 0: x = 0, y = \pm \sqrt[4]{p}$  или  $y = 0, x = \pm \sqrt[4]{p}$ ;

$|p| \geq 2q^2 > 0: x = \pm \sqrt[4]{\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q^4}}{2}}$  (максимум 4 значения),  $y = \frac{4}{q}$ ;  
 при остальных  $q, q$  действительных решений нет.

7.  $\pm \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$ . Формально следует из формулы (6) и формул половинного аргумента, но идейно следует из геометрии умножения на комплексное число, о чем будет рассказано во второй части статьи.

8. а) Возводим обе части (неотрицательные) неравенства в квадрат.
- б) Оба множества симметричны относительно 0 и их квадраты равны множеству  $a + b\sqrt{c}$ , так как  $2\sqrt{\frac{a+\delta}{2}}\sqrt{\frac{a-\delta}{2}} = \sqrt{b^2c} = b\sqrt{c}$  – мы воспользовались равенством множеств  $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$  для любых  $A, B \in \mathbb{C}$ .

**ИНЖЕНЕРНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

1. На шарики действуют силы тяжести, силы реакции между ними, сила реакции горизонтальной поверхности и силы реакции со стороны боковых стенок цилиндра (рис.5). Пусть  $\alpha$  – угол между отрезком, соединяющим центры шариков, и горизонтом. Из условия равновесия верхнего шарика в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления имеем

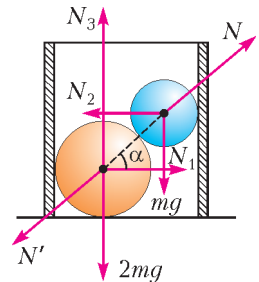


Рис. 5

$$N = \frac{mg}{\sin \alpha}, N_2 = \frac{mg \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Очевидно, такой же будет и сила реакции  $N_1$ . Угол  $\alpha$  найдем геометрически:

$$2r + 3r \cos \alpha + r = 2R, \text{ и } \cos \alpha = \frac{2R}{3r} - 1.$$

Рассмотрим теперь условие равновесия цилиндра (рис.6). На цилиндр действует его сила тяжести ( $Mg$ ), две силы реакции со стороны шариков ( $N'_1 = N_1$  и  $N'_2 = N_2$ ) и сила реакции со стороны пола, которая

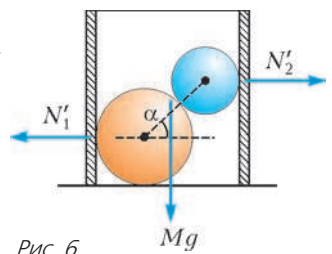


Рис. 6

в момент переворота цилиндра окажется сосредоточенной в точке, относительно которой происходит переворот (правая нижняя). В этот момент будет выполнено условие равенства моментов сил

$$N_2(2r + 3r \sin \alpha) = N_1 \cdot 2r + MgR, \text{ или} \\ MR = 3mr \cos \alpha.$$

Отсюда найдем, что цилиндр не перевернется при условии

$$M \geq \frac{m(2R - 3r)}{R}.$$

2. Если бы основания выделенного участка трубы были закрыты плоскими поверхностями, то сила, действующая на этот участок (вместе с плоскими основаниями) со стороны газа, была бы равна нулю. Поскольку площади оснований

равны  $\frac{\pi r^2}{\cos \alpha}$  и  $\frac{\pi r^2}{\sin 2\alpha}$ , то на них действуют



Рис. 7

силы  $F_1 = \frac{p\pi r^2}{\cos \alpha}$  и  $F_2 = \frac{p\pi r^2}{\sin 2\alpha}$ , направленные перпендикулярно основаниям (рис.7). Следовательно, сила, действующая на кусок трубы без оснований, равна

$$F = F_1 \sin \alpha + F_2 \cos 2\alpha = p\pi r^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha)$$

и направлена в сторону максимальной образующей куска трубы (на рисунке – вниз).

3. С одной стороны, точки  $A$  и  $B$  принадлежат стержням  $O_1A$  и  $O_2B$ , поэтому их скорости  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_1$  направлены перпендикулярно этим стержням (рис.8).

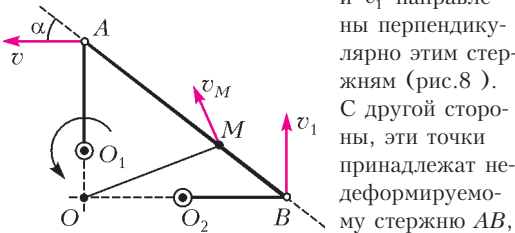


Рис. 8

С другой стороны, эти точки принадлежат недеформируемому стержню  $AB$ , и потому проекции их скоростей на сам стержень равны друг другу:

$$v \cos \alpha = v_1 \sin \alpha.$$

Отсюда, с учетом того что  $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$  (это следует из геометрии механизма), получаем

$$v_1 = \frac{4}{3} v.$$

Поскольку точка  $O$  лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям двух точек стержня  $AB$ , то в этой точке расположен мгновенный центр вращения этого стержня, а его угловая

скорость равна

$$\omega_{AB} = \frac{v}{OA} = \frac{v_1}{OB}.$$

Тогда для скорости точки  $M$  имеем

$$v_M = \omega_{AB} \cdot OM.$$

Длину отрезка  $OM$  найдем из треугольника  $OMB$  по теореме косинусов:

$$OM = \sqrt{OB^2 + MB^2 - 2OBMB \cos \alpha} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \text{ (y.e.)}.$$

Окончательно получаем

$$v_M = \frac{7\sqrt{5}}{15} v.$$

4. В данной цепи выключатели выполняют функцию переключения тока с верхней линии цепи на нижнюю и наоборот. Поэтому если в системе с большим количеством выключателей каждый будет делать то же самое – переключать ток с верхней линии на нижнюю и наоборот, то каждый (независимо от положения других) будет включать и выключать лампочку. Это значит, что для организации требуемой цепи необходимо использовать нужное количество двойных выключателей во втором режиме. Например, для цепи, показанной на рисунке 9,

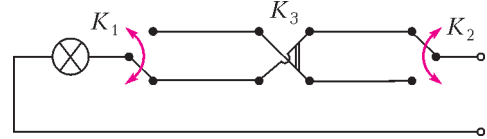


Рис. 9

лампочка горит. Если переключить любой выключатель, например  $K_2$  (рис.10), лампочка погаснет.

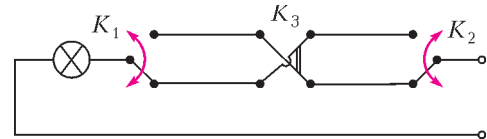


Рис. 10

Если в этом положении переключить любой выключатель, например  $K_3$  (рис.11), лампочка вновь загорится.

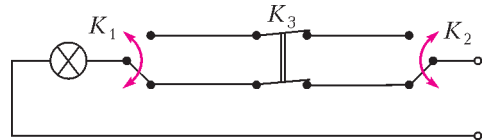


Рис. 11

В двухпроводной линии можно расположить любое количество таких выключателей, каждый из которых будет включать-выключать

лампочку независимо от положений остальных выключателей.

5. Пусть  $v$  – скорость движения жидкости через насос,  $S$  – площадь сечения трубопроводов насоса. Тогда за малое время  $\Delta t$  насос перемещает массу жидкости  $\Delta m = \rho S v \Delta t$  (здесь  $\rho$  – плотность жидкости), и, следовательно,

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S v.$$

С другой стороны, поскольку насос действовал на эту жидкость силой  $F = \Delta p S$ , то его мощность равна

$$N = Fv = \Delta p S v = \frac{\Delta p \mu}{\rho}.$$

Таким образом, мощность, развиваемая насосом, есть (с точностью до постоянного множителя  $\rho$ ) произведение напора на расход:

$$N \sim \Delta p \mu = p_0 \mu - \alpha \mu^3.$$

Чтобы найти максимальную мощность насоса, нужно найти максимум этого выражения. Дифференцируя  $N$  по  $\mu$  и приравнявая производную к нулю, находим напор, отвечающий максимальной мощности, и саму максимальную мощность:

$$\mu_{\max} = \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}, \quad N_{\max} = \frac{2p_0}{3\rho} \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}.$$

6. Движение колес представляет собой вращение и поступательное движение, а скорости различных точек колес складываются из скоростей этих двух движений. Пусть левое колесо движется направо со скоростью  $v_1$  и вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega_1$  (если какая-то из этих величин окажется отрицательной, значит, направление поступательного движения или вращения колеса противоположно принятому). Поскольку в системе отсчета, связанной с центром колеса, оно только вращается, скорость верхней точки колеса равна  $v_1 + \omega_1 R$ , а нижней равна  $v_1 - \omega_1 R$ . А так как скорости верхней и нижней точек левого колеса совпадают со скоростями верхней и нижней реек, имеем

$$v_1 + \omega_1 \cdot \frac{5}{4} R = v, \quad v_1 - \omega_1 \cdot \frac{5}{4} R = 0, \quad \text{и} \quad v_1 = \frac{1}{2} v.$$

Пусть правое колесо движется также направо со скоростью  $v_2$  и вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega_2$ . Тогда

$$v_2 + \omega_2 \cdot \frac{5}{4} R = v, \quad v_2 - \omega_2 \cdot \frac{3}{4} R = 0, \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{3}{8} v.$$

Получается, что скорость правого колеса меньше скорости левого, поэтому колеса сближаются и скорость центра правого колеса относительно центра левого равна

$$u = v_1 - v_2 = \frac{1}{8} v.$$

## XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ

(с.м. «Квант» №4)

Задачи весеннего тура

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. 20161932.

Нужно дописать справа как можно меньше цифр к 2016, чтобы число поделилось на 2017. Если мы допишем одну цифру, то разность 20170 – 2016\* тоже должна будет делиться на 2017, но она слишком мала для этого, потому что не превосходит и десяти. Так же не хватит двух и трех цифр. Взяв разность 20170000 – 2016\*\*\*\* максимально большой положительной, а именно  $4 \cdot 2017$ , мы получим ответ.

2. Квадратный трехчлен с единственным корнем  $a$  и старшим коэффициентом 1 имеет вид  $(x - a)^2$ . Координаты точки на его графике имеют вид  $(p, (p - a)^2)$ . Трехчлен

$x^2 + px + (p - a)^2$  имеет единственный корень, когда его дискриминант равен нулю, т.е.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = (p - a)^2. \quad \text{Подходят } p = 2a \text{ или } p = \frac{2a}{3}.$$

3. Отразим относительно  $BC$  центр  $O$  описанной окружности  $\Omega$  треугольника  $ABC$  (рис.12). Получим точку  $O'$ . Так как

$$\angle BO'C = \angle BOC = 2\angle A = 120^\circ = 180^\circ - \angle A,$$

то  $O'$  лежит на  $\Omega$ . Так как  $O$  лежит на среднем перпендикуляре к  $BC$ , то  $O'$  – середина дуги  $BC$ . Значит, биссектриса угла  $A$  проходит через  $O'$ . Это и значит, что после отражения шарик пройдет через точку  $O$ .

4. Обозначим первые слева 25 мест в ряду буквой  $A$ , вторые 25 –  $B$ , третьи и четвертые –  $C$  и  $D$ . Каждый раз, выбирая 50 детей, будем выстраивать их по убыванию роста. Сделаем это

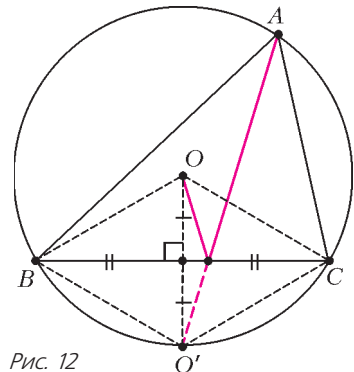


Рис. 12



сначала с  $AB$ , затем с  $BC$  и, наконец, с  $CD$ . После первой перестановки 25 самых низких детей окажутся в куске  $BCD$ , после второй – в  $CD$ , после третьей – в  $D$ . Таким образом, 25 самых низких детей уже расставлены правильно. Снова выполним перестановки  $AB$  и  $BC$ . Они расставят в нужном порядке следующих по росту 25 детей в куске  $C$ . Последняя перестановка  $AB$  расставит правильно 50 самых высоких.

10–11 классы

1. Можно.

Отложим векторы, равные данным, из одной точки. Они поделят полный угол при ней на углы по  $30^\circ$ . Возьмем любые три вектора, образующие между собой углы по  $120^\circ$ . Сумма этих векторов нулевая. Среди оставшихся девяти векторов есть три пары противоположных. Добавив две из этих пар векторов к трем выбранным, получим искомую семерку.

2. Пусть на большей окружности угол отсекает дугу  $BC$ . Обозначим через  $C'$  и  $B'$  вторые точки пересечения большей окружности с прямыми  $AB$  и  $AC$  соответственно (рис.13). Сумма дуг  $BC$  и  $B'C'$  равна  $2\alpha$ , поэтому эти дуги

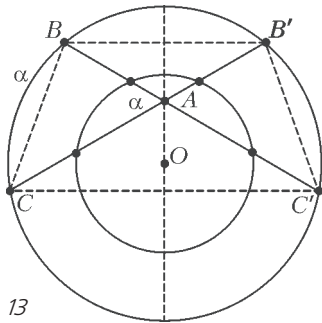


Рис. 13

равны. Значит,  $BB'C'C$  – равнобедренная трапеция или прямоугольник.

Ось симметрии этой трапеции проходит через середины оснований, точку  $A$  пересечения диагоналей и общий центр  $O$ . Следовательно, вся картинка симметрична относительно оси, поэтому углы  $BAC$  и  $B'AC'$  отсекают на меньшей окружности равные дуги. Сумма этих дуг равна  $2\alpha$ , значит, каждая из них равна  $\alpha$ .

3. Только при  $s = 1$ .

Понятно, что при  $s = 1$  числа во всех клетках одинаковы.

Пусть  $s > 1$  и  $p$  – простой делитель  $s$ . В клетках, сумма координат которых делится на  $p$ , впишем единицы, а в остальные клетки – нули. В любом прямоугольнике  $T$  площади  $s$  одна из сторон делится на  $p$ , поэтому он разбивается на

$s/p$  полосок длины  $p$ . В каждую такую полоску попадает ровно одна единица. Поэтому сумма чисел в  $T$  равна  $s/p$ , т.е. не зависит от выбора прямоугольника.

4. 8 перебежек.

Занумеруем детей по возрастанию роста – 1, 2, ..., 10.

Оценка. Пусть изначально они стояли в обратном порядке. Если было меньше восьми перебежек, то какие-то трое детей остались на своих местах, а их порядок противоположен нужному.

Пример на 8 перебежек: 1-й и 2-й остаются на своих местах, 3-й перебегают и встает за 2-м, потом 4-й – за 3-м и т.д.

5. Неверно.

Графики  $y = \frac{1}{8}(x^2 + 6x - 25)$  и  $y = \frac{1}{8}(25 + 6x - x^2)$  имеют оси  $x = \pm 3$ , а пересекаются при  $x = \pm 5$ . Произведение тангенсов углов наклона касательных в точках пересечения равно  $\frac{1}{64}(2 \cdot 5 + 6)(6 - 2 \cdot 5) = -1$ . Значит, касательные в этих точках перпендикулярны.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. Предположим, что каждый участник сыграл меньше половины своих игр с земляками. Просуммируем количества таких игр у всех участников и разделим на 2. Мы получим, что меньше половины всех игр на турнире были между земляками, что противоречит условию. Значит, хотя бы один участник сыграл не меньше половины своих игр с земляками. Так как он всего сыграл 9 игр, то шахматистов из его города (включая его самого) не меньше шести. Значит, в каждом туре была игра между участниками из этого города.

2. Можно во всех пунктах (рис.14).

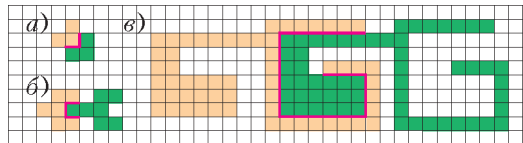


Рис. 14

Замечание. Еще

один способ для п. в) показан на рисунке 15.

3. а) Могло.

Пример 1. Возьмем число 2 и 1024 числа, равных  $1/2$ .

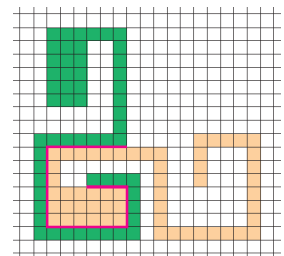


Рис. 15

Тогда

$$a_n = 2^n + 1024 \cdot 2^{-n} = 32(2^{n-5} + 2^{5-n}).$$

Сумма двух положительных взаимно обратных чисел тем меньше, чем ближе они друг к другу. Поэтому построенная последовательность убывает до  $n = 5$ , а потом возрастает.

*Пример 2.* Возьмем  $a_n = 1,02^n + 0,5^n$ . Заметим, что

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow 0,02 \cdot 1,02^n > 0,5^{n+1} \Leftrightarrow 2,04^n > 25 \Leftrightarrow n \geq 5.$$

Таким образом, последовательность убывает до  $n = 5$ , а потом возрастает.

б) Не могло.

Предположим, такое случилось. Тогда  $a_n < a_5$  для любого  $n$ . Среди исходных чисел было число  $x > 1$ , иначе бы последовательность никогда не возрастала. Заметим, что  $a_n > x^n$  для любого  $n$ . А последовательность  $x^n$  не ограничена. Противоречие.

**4.** Треугольники  $ABD$  и  $EDB$  переходят друг в друга при симметрии относительно серединного перпендикуляра к  $BD$ , так как они равны (по

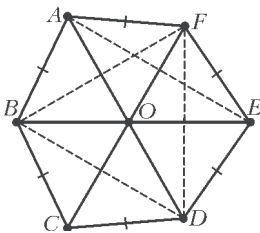


Рис. 16

трем сторонам), и точки  $A$  и  $E$  лежат по одну сторону от  $BD$  (рис.16). Значит, этот перпендикуляр совпадает с серединным перпендикуляром к  $AE$ , а так как  $AF = AE$  и  $BC = CD$ , он является

осью симметрии шестиугольника. Аналогично, прямые  $AD$  и  $BE$  – оси симметрии шестиугольника. Получаем, что треугольник  $BFD$  имеет три оси симметрии, т.е. он правильный. На его стороны опираются одинаковые равнобедренные треугольники  $ABF$ ,  $EFD$ ,  $CDB$ , торчащие наружу (так как шестиугольник выпуклый). Значит, увеличивая радиус и не меняя центр вписанной окружности треугольника  $BFD$ , мы сможем получить окружность, касающуюся всех сторон шестиугольника.

**5.** 7 гирь.

*Пример.* Возьмем гири в 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43 г. Первыми двумя можно взвесить любую целую массу до 2 г. Значит, первыми тремя можно взвесить до 5 г, четырьмя – до 10 г, пятью – до 21 г, шестью – до 42 г, семью – до 85 г. Уменьшим массу каждой гири в два раза. Теперь все гирьки весят нецелое число граммов, и ими можно взвесить любую целую или полуцелую массу от 0,5 до 42,5 г.

*Оценка.* Предположим, что в наборе 6 гирь.

Различных поднаборов  $2^6 = 64$ . Покрасим одну гирю в желтый цвет и разобьем поднаборы на пары, отличающиеся только наличием в них желтой гири. Поскольку масса парных поднаборов отличаются нецелой массой желтой гири, то максимум один из них может иметь целую массу в граммах. Поэтому поднаборов с целым весом не более 32, и 40 различных целых масс этим набором гирь не набрать. Противоречие.

10–11 классы

**1.** Прямая равноудалена от концов отрезка в двух случаях: она параллельна ему или проходит через его середину. Если среди данных прямых нет параллельных, то не менее семи из них удовлетворяют второму условию, т.е. проходят через одну из трех середин сторон треугольника. Значит, через одну из этих точек проходит не менее трех данных прямых.

**3.** Могут.

Как известно, у куба есть шестиугольное сечение, проходящее через середины ребер. Оно разрезает куб на две равные части. Присоединим два куба гранями. Проведем в них эти сечения, как показано на рисунке 17,а. Отбросив от каж-

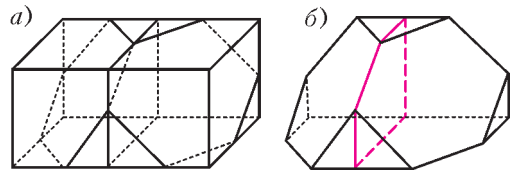


Рис. 17

дого куба половину, получим выпуклый многогранник (рис.17,б), у которого лишь треугольные и шестиугольные грани. Если разрезать его по общей грани бывших кубов, то из этих равных частей складывается куб.

**4.** Не обязательно.

Заменим цвета цифрами. Раскрасим сначала клетки квадрата в шахматном порядке. Занумеруем все белые клетки пятью цифрами так, чтобы любой кусок длины 5 белой диагонали содержал разные цифры. Это легко сделать, так как при повороте квадрата на  $45^\circ$  белые клетки образуют привычную прямоугольную сетку, а куски диагоналей превращаются в прямоугольники  $1 \times 5$ . Аналогично занумеруем черные клетки пятью другими цифрами.

На рисунке 18 приведен пример такой раскраски и два поло-

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
7	6	7	6	7	6	7	6	7	6
8	9	8	9	8	9	8	9	8	9
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
5	4	5	4	5	4	5	4	5	4
6	7	6	7	6	7	6	7	6	7
9	8	9	8	9	8	9	8	9	8

Рис. 18

жения Петиного многоугольника. Ясно, что в любом возможном положении он накрывает два диагональных куска длины 5 разного цвета, следовательно, содержит все 10 цифр.

5. Проведем через вершины треугольника  $ABC$  прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые образуют «удвоенный» треугольник  $A'B'C'$  (рис.19). Заметим, что  $BB_1$  – серединный перпендикуляр к  $A'C'$ , а  $A'$  лежит на прямой  $AM$ .

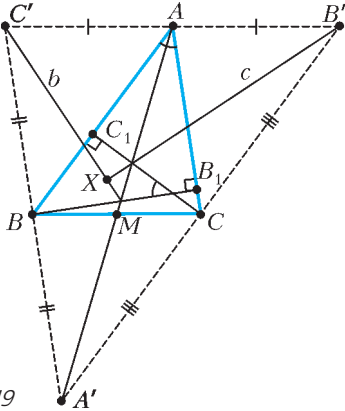


Рис. 19

Поэтому при симметрии относительно  $BB_1$  точка  $A'$  переходит в  $C'$ , значит,  $C'$  лежит на  $b$ . Аналогично,  $B'$  лежит на  $c$ .

При переходе от прямых к перпендикулярным им углы сохраняются. Поэтому угол между высотами  $BB_1$  и  $CC_1$  тоже равен  $45^\circ$ . Прямые  $b$  и  $c$  получаются друг из друга композицией симметрий относительно этих высот, т.е. поворотом на удвоенный угол между ними. Следовательно,  $b$  и  $c$  перпендикулярны. Медиана  $XA$  прямоугольного треугольника  $XB'C'$  равна половине гипотенузы  $B'C'$ , т.е. равна  $BC$ .

6. При  $n$ , не кратных 3.

Если  $n$  кратно 3, то всякое кратное  $n$  число кратно и 3. Значит, сумма цифр этого числа кратна 3, поэтому не может быть равной, например,  $n + 1$ .

Далее считаем, что  $n$  не кратно 3. Тогда найдется решение сравнения  $9x \equiv -k \pmod{n}$  относительно  $x$  в интервале  $0 < x \leq n \leq k$ .

Если  $n$  взаимно просто с 10, то  $10^a \equiv 1 \pmod{n}$  при некотором натуральном  $a$ . Тогда подойдет число

$$(10^{a+1} + 10^{2a+1} + \dots + 10^{ax+1}) + (10^a + 10^{2a} + \dots + 10^{a(k-x)})$$

(при  $k = n$  подойдет  $x$ , равное  $n$ , а вторая скобка отсутствует). Его сумма цифр равна  $x + (k - x) = k$ , а по модулю  $n$  оно сравнимо с  $10x + (k - x) \equiv 0$ . Если же  $n = 2^b 5^c d$ , где  $d$  взаимно просто с 10, то  $k > d$ . Как показано выше, существует крат-

ное  $d$  число с суммой цифр  $k$ . Домножив его на  $10^{\max(b,c)}$ , получим искомое число.

7.  $3^{12}$  банд.

Если гангстеры не враждуют, то будем считать, что они *дружат*. Тогда банда – это *максимальная* дружная компания (добавление любого гангстера нарушает ее дружность). И всякую такую компанию объявим бандой, если она таковой еще не является.

*Пример.* Пусть гангстеры разбиты на 12 троек, гангстеры из одной тройки враждуют, а из разных – дружат. Тогда каждая банда содержит из каждой тройки ровно по одному гангстеру. Поэтому будет  $3^{12}$  банд.

*Оценка.* Пусть бандой является любая компания, внутри которой все дружат (т.е. не враждуют) и которую нельзя расширить с сохранением этого свойства. Назовем *авторитетом гангстера* количество банд, в которых он состоит. Пусть гангстеры  $X$  и  $Y$  – враги, причем авторитет  $X$  не ниже, чем авторитет  $Y$ . Заменяем  $Y$  клоном гангстера  $X$ , т.е. гангстером  $Z$ , у которого те же враги, что у  $X$ , причем  $X$  и  $Z$  также враждуют. Тогда могут исчезнуть лишь те банды, в которые входил  $Y$ . Действительно, пусть  $Y$  не входил в банду. Она останется бандой, если  $Z$  враждебен кому-то из ее членов. Если  $X$  не входит в эту банду, то он враждебен кому-то в банде, и тогда ему враждебен и  $Z$ . Если же  $X$  входит в банду, то он сам является врагом  $Z$  в этой банде.

Таким образом, количество исчезнувших банд не больше, чем авторитет  $Y$ . Зато добавятся банды с участием  $Z$ , количество которых равно авторитету  $X$ . Значит, общее количество банд не уменьшилось, а если авторитет  $X$  больше авторитета  $Y$ , то увеличилось.

Пусть количество банд наибольшее из возможных. Из предыдущего следует, что в этом случае у любых двух врагов одинаковые авторитеты. Возьмем любого гангстера  $X$  и заменим одного из его врагов клоном  $X$ . Количество банд не изменится, и у врагов опять одинаковые авторитеты. Так поступим со всеми врагами  $X$ . Получим компанию враждующих гангстеров, которые дружат со всеми остальными гангстерами.

Возьмем гангстера не из этой компании и сделаем с ним то же самое, и так далее. В итоге все гангстеры разобьются на компании, причем гангстеры из одной компании враждуют, а из разных – дружат. Тогда количество банд равно произведению размеров компаний.

Задача свелась к такой. Число 36 разложено на натуральные слагаемые. При каком разложении произведение этих слагаемых максимально?

Единичные слагаемые добавим к любому, произведение увеличится. Слагаемые вида  $n + 2$ , где

$n \geq 2$ , будем разбивать на два, произведение не будет уменьшаться, поскольку  $2n \geq n + 2$ . Останутся только двойки и тройки. Заменяя три двойки на две тройки, будем увеличивать произведение. В итоге получим 12 троек.

Таким образом, количество банд не больше  $3^{12}$ .

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. 3.

Построим следующий граф: вершины – игроки, ребра – сыгранные партии. Согласно условию, для обоих турниров этот граф один и тот же. Рассмотрим первый турнир и выберем те партии, победители которых до этого не выигрывали (например, такова первая партия). Тогда соответствующие ребра образуют путь, а остальные ребра одним концом примыкают к этому пути. В частности, если выбросить все висячие вершины, то останется только наш путь без крайних вершин. Теперь рассмотрим тот же граф как граф кубкового турнира. Если из него выбросить висячие вершины, останется граф турнира на  $2^{n-1}$  победителях первого этапа. Он, очевидно, является путем лишь при  $n \leq 3$ , в противном случае победитель турнира будет иметь степень не меньше 3. Значит,  $n \leq 3$ .

Осталось привести пример при  $n = 3$ . Пусть участники пронумерованы от 1 до 8 и пары в кубке таковы (первым указан проигравший, вторым победитель): 1–2, 3–4, 5–6, 7–8, 2–4, 6–8, 4–8. тогда при игре навыйлет пары могли быть такими (победитель снова указан вторым): 1–2, 2–4, 3–4, 4–8, 7–8, 8–6, 6–5.

2. Нет.

Мы покажем даже, что это неверно ни в одном из двух случаев: а) сотовое ребро – ребро основания, и б) сотовое ребро – боковое.

а) Возьмем правильный 51-угольник  $A_1A_2 \dots A_{51}$  с центром  $S$ . Пусть  $\omega$  и  $\Omega$  – его вписанная и описанная окружности соответственно. Рассмотрим сферу  $S$  с центром  $S$ , которая пересекает плоскость 51-угольника по окружности  $\omega$ , и рассмотрим конус с основанием  $\Omega$ , в который вписана эта сфера. Пусть  $O$  – вершина этого конуса. Тогда у 50-угольной пирамиды  $OA_1A_2 \dots A_{50}$  все боковые ребра и 49 ребер основания касаются сферы  $S$ , а ребро  $A_1A_{50}$  – не касается.

б) Построим многоугольник, сферу и конус так же, как в пункте а). Пусть теперь прямые  $A_1A_{51}$  и  $A_{49}A_{50}$  пересекаются в точке  $B$ . Тогда пирамида  $OA_1A_2 \dots A_{49}B$  – искомая: все ее ребра, кроме бокового ребра  $OB$ , касаются сферы  $S$ .

4. Нет.

Ясно, что строки доски можно переставлять как угодно, и столбцы тоже. Переставим все нечет-

ные столбцы влево, а все нечетные строки вниз. В итоге из исходной доски получится доска, разделенная на 4 одинаковых квадрата – два противоположных из них белые, а остальные черные.

Пусть после перекраски в каждой строке и каждом столбце оказалось по  $50 + k$  черных клеток; тогда в каждом столбце и в каждой строке перекрашено на  $k$  белых клеток больше, чем черных. Пусть в одном из черных квадратов перекрашено  $a$  клеток. По замечанию выше, в каждом из белых квадратов перекрашено по  $a + 50k$  клеток, а тогда в другом черном квадрате также перекрашено  $(a + 50k) - 50k = a$  клеток. Значит, общее число перекрашенных клеток равно  $2a + 2(a + 50k) = 4(a + 25k)$ , т.е. оно делится на 4 и потому не может равняться 2018.

5. Пусть  $M$  – середина  $BC$ , а  $Y$  и  $Z$  – точки, симметричные  $X$  относительно прямой  $BC$  и точки  $M$  соответственно (рис.20).

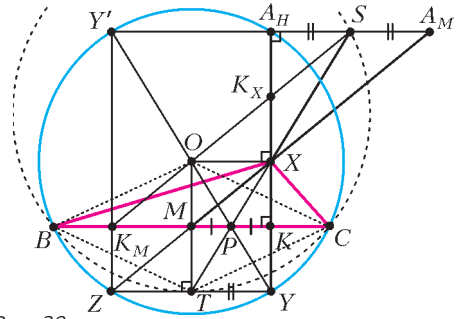


Рис. 20

Тогда

$$\angle BZC = \angle BYC = \angle BXC = 180^\circ - \angle BA_HC,$$

откуда точки  $A_H, B, C, Y$  и  $Z$  лежат на одной окружности  $\Omega$  с центром  $O$  и радиусом  $R$ . При этом, поскольку  $A_HA_M \parallel BC$  и  $A_MX : XM = 2$ , получаем  $A_HX : XY = A_MX : 2XM = 1$ , т.е.  $X$  – середина  $A_HY$ .

Пусть  $T$  – середина  $YZ$ . Тогда  $OTYX$  – прямоугольник, поэтому  $TX = OY = R$ . Из симметрии относительно  $BC$  получаем, что  $OB = OC = TB = TC = R$ . Значит,  $T$  – центр окружности, описанной около треугольника  $BXC$ , т.е. по лемме о трезубце это середина дуги  $BC$  окружности  $(A_1BC)$ .

Пусть  $K = A_HY \cap BC$ ,  $YY'$  – диаметр окружности  $\Omega$ , а  $P$  и  $S$  – середины  $KM$  и  $A_HA_M$  соответственно. Заметим, что  $YZ = 2KM = A_HA_M = A_HY'$ . Значит,  $TX$  пересекает отрезки  $KM$  и  $A_HA_M$  в их серединах  $P$  и  $S$ , а также  $P = YY' \cap BC$ . Тогда  $BP \cdot PC = YP \cdot PY' = TP \cdot PS$  (последнее равенство выполнено в силу симметрии отрезков  $YY'$  и  $TS$  относитель-

по перпендикуляра к  $BC$  в точке  $P$ ). Значит,  $TBSC$  – вписанный четырехугольник, как и  $TBA_1C$ . Поскольку  $A_1$  и  $S$  лежат на  $TX$ , отсюда следует  $A_1S = S$ .

**6.** При всех четных  $n$ .

Нечетные  $n$  не подходят. В самом деле, рассмотрим многочлен  $P(x) = x^n + 1$  и различные натуральные  $a, b$ . Так как  $n$  нечетно,  $a^n + b^n$  делится на  $a + b$ , а тогда  $P(a) + P(b) = (a^n + b^n) + 2$  на  $a + b$  не делится, поскольку  $a + b > 2$ .

Осталось доказать, что все четные  $n$  подходят. Рассмотрим произвольный многочлен  $P(x)$  степени  $n$ . Представим его в виде суммы

$P(x) = P_0(x) + P_1(x)$ , где в  $P_0(x)$  все мономы четной степени, а в  $P_1(x)$  – нечетной. Заметим, что при всех натуральных  $a, b$  сумма

$P_1(a) + P_1(b)$  делится на  $a + b$ . Докажем, что найдутся такие  $a, b$ , что и  $P_0(a) + P_0(b)$  делится на  $a + b$ . Заметим, что степень  $P_0$  равна  $n$ .

Рассмотрим случай, когда старший коэффициент  $P_0(x)$  положителен (в случае отрицательно старшего коэффициента проведем дальнейшее доказательство для многочлена  $-P_0(x)$ ). Так как  $n > 1$ , то найдется такое натуральное  $m$ , что  $P_0(m) > 2m$ . Докажем, что  $a = m, b = P_0(m) - m$  подходят. В силу выбора  $m$ , они оба натуральные, причем  $b > a$ . Далее, по модулю  $a + b = P_0(m)$  выполняются сравнения  $P_0(a) = P_0(m) \equiv 0$  (очевидно) и  $P_0(b) = P_0((b+a) - a) \equiv P_0(m) \equiv 0$  (в силу четности многочлена  $P_0$ ). Значит,  $P_0(a) + P_0(b) \equiv 0 \pmod{a + b}$ , что и требовалось.

**ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2017»**

(см. «Квант» №4)

**МАТЕМАТИКА**

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Первый тур

**1.** 157.

Если  $x$  – число поездок на наземном транспорте, а  $y$  – на метро, то получаем  $31x + 32y = 5000$ , откуда  $32(x + y) = 5000 + x \geq 5000$ . Следовательно,  $x + y \geq 5000/32 = 156 \frac{1}{4}$ . Наименьшее целое значение  $x + y$  равно 157, оно достигается при  $x = 24, y = 133$ .

**2.** 432.

Так как  $11! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ , все кратные трем делители этого числа имеют вид  $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta \cdot 11^\varphi$ , где  $\alpha \in [0; 8], \beta \in [1; 4], \gamma \in [0; 2], \delta \in [0; 1], \varphi \in [0; 1]$  – целые числа.

Общее количество таких делителей равно

$$(8 + 1) \cdot 4 \cdot (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 432.$$

**3.** -6,25.

После замены  $t = \pi \sin^2 x$  уравнение принимает вид

$$\sin(\pi - 2t) = \cos t \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ t = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l, k, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Так как  $0 \leq t \leq \pi$ , эти равенства возможны только при  $k = 0, l = 0$  и  $l = 1$ . Следовательно,  $\sin^2 x = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$  или  $\frac{5}{6}$ . Остается выбрать корни этого уравнения на нужном отрезке; их сумма равна  $-\frac{25\pi}{4}$ .

**4.** 4,24 (точное значение:  $\sqrt{5} + 2$ ).

Пусть  $AC = a, BC = b, BD = c, N$  – точка пересечения хорд,  $M$  – середина  $AD, H$  – точка пересечения прямых  $MN$  и  $BC$  (рис.21). Не-

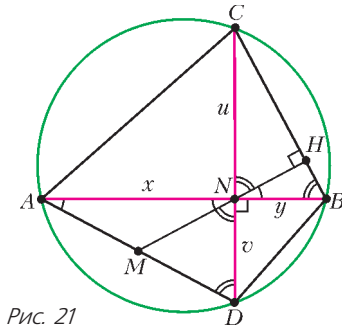


Рис. 21

сложно убедиться, что прямые  $NH$  и  $BC$  перпендикулярны и искомое расстояние равно длине отрезка  $MH$ .

Пусть  $AN = x, NB = y, CN = u, ND = v$ . Из подобия  $\triangle ACN$  и  $\triangle DBN$  и теоремы Пифагора получаем  $\frac{u}{y} = \frac{a}{c}, u^2 + y^2 = b^2, x^2 = a^2 - u^2,$

$v^2 = c^2 - y^2$ . В итоге

$$MH = \frac{\sqrt{x^2 + v^2}}{2} + \frac{uy}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}{2} + \frac{abc}{a^2 + c^2} = \sqrt{5} + 2 \approx 4,24.$$

**5.** 6 (решение неравенства:  $\left[\frac{3}{2}; 3\right] \cup \left(3; \frac{9}{2}\right]$ ).

Обозначим через  $a$  и  $b$  соответственно первое и второе слагаемые в левой части неравенства.

Тогда  $b > 0$  и

$$ab = 24 \cdot \frac{(x+1)^2 - (x-7)^2}{(2x-3)^2 - (2x-9)^2} = 24 \cdot \frac{8 \cdot (2x-6)}{6 \cdot (4x-12)} = 16$$

при  $x \neq 3$ , откуда  $a = \frac{16}{b}$ . Неравенство

$$\frac{16}{b} + b \leq 8 \left( \Leftrightarrow \left( \frac{4}{\sqrt{b}} - \sqrt{b} \right)^2 \leq 0 \right)$$

выполнено только при  $b = 4$ . Остается решить уравнение

$$3 \cdot \frac{|x+1| + |x-7|}{|2x-3| + |2x-9|} = 4.$$

Разбор случаев и раскрытие модулей дает, что при всех  $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$  уравнение обращается в верное равенство. С учетом условия  $x \neq 3$  получаем решение исходного неравенства:  $\left[\frac{3}{2}; 3\right) \cup \left(3; \frac{9}{2}\right]$ .

6. -4914 (числа на доске: -3, 2, 7, 9, 13). Сумма чисел полученного набора равна 112. Каждое число из исходных пяти в этой сумме повторяется 4 раза. Следовательно, сумма искомым чисел равна  $112 : 4 = 28$ . Сумма двух наименьших равна -1, сумма двух наибольших равна 22. Следовательно, среднее число (третье по величине из пяти) равно  $28 - 22 - (-1) = 7$ . В наборе из условия задачи второе число равно сумме первого и третьего искомым чисел, откуда первое число равно  $4 - 7 = -3$ , а второе равно 2. Аналогично получаем, что четвертое число равно 9, а пятое равно 13.

7. 374,12 (точное значение:  $216\sqrt{3}$ ).

Указание. Нужно рассмотреть сечение пирамиды  $SABC$ , проходящее через боковое ребро  $SA$  и апофему противоположной грани  $SD$  (рис. 22). Тогда  $SH$  – высота пирамиды, расстояние от  $H$  до прямой  $SD$  равно  $HN = 4$ , а расстояние от  $H$  до прямой  $SA$  равно  $HM = 4\sqrt{3}$ .

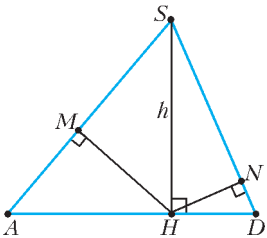


Рис. 22

8. 760.

Разложение по степеням  $x$  имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{40} a_k x^k. \text{ Сумма всех коэффициентов}$$

равна  $\sum_{k=0}^{40} a_k = f(1) = 1$ . Следовательно, надо

найти коэффициент при  $x^3$ . Имеем:

$$f(x) = \left((1-x^2) + x\right)^{20} = (1-x^2)^{20} + 20(1-x^2)^{19}x + \frac{20 \cdot 19}{2}(1-x^2)^{18}x^2 + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6}(1-x^2)^{17}x^3 + \dots,$$

где многоточием заменены слагаемые, в которые  $x^3$  не входит.

В первое и третье слагаемое  $x^3$  также не входит. Во второе слагаемое  $x^3$  входит с коэффициентом  $(-20) \cdot 19 = -380$ ; в четвертое слагаемое

$$x^3 \text{ входит с коэффициентом } \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} =$$

$= 1140$ . Значит, коэффициент при  $x^3$  равен  $-380 + 1140 = 760$ .

9. 8712.

Указанным в условии задачи свойством обладают только числа 8712 и 9801, из которых меньше первое.

10. *Пример требуемой задачи.* Пункты А и Б соединены двумя дорогами: одна длиной 19 км, а другая – 12 км. В 12:00 из пункта А по длинной дороге вышел пешеход и прошел первые 11 км с некоторой постоянной скоростью, а затем, утомившись, шел остаток пути до пункта Б в среднем на 1,5 км/ч медленнее. В 14:00 из пункта А по короткой дороге вышел второй пешеход и прошел весь путь со средней скоростью, на 0,5 км/ч большей, чем вначале шел первый. С какой средней скоростью первый пешеход прошел последние 8 км пути, если известно, что он прибыл в пункт Б не раньше второго пешехода?

Ответ: не более 4 км/ч.

#### Второй тур

1. 1 (день – понедельник).

Указание: предыдущий год был обычным.

2. 4033.

В получившейся сумме будут одночлены вида  $k_n x^{3n}$  для всех целых  $n \in [-2016; 2016]$  с положительными коэффициентами  $k_n$ , т. е. всего  $2 \cdot 2016 + 1 = 4033$  слагаемых.

3. 28,27 (точное значение:  $9\pi$ ).

Площадь  $S$  получившейся фигуры (рис.23)

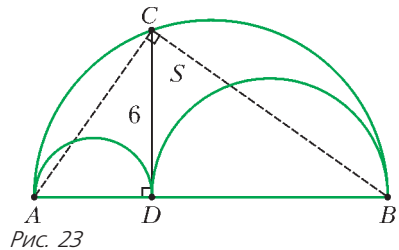


Рис. 23

равна

$$S = \frac{\pi}{2} \left( \left( \frac{AB}{2} \right)^2 - \left( \frac{AD}{2} \right)^2 - \left( \frac{DB}{2} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{8} (AB^2 - AD^2 - BD^2).$$

Так как  $AB = AD + DB$ , получаем, что

$$S = \frac{\pi}{4} AD \cdot BD = \pi \left( \frac{DC}{2} \right)^2 = 9\pi \approx 28,27.$$

4. 2017.

Подставим в равенство  $\frac{1}{x}$  вместо  $x$ . Получим систему из двух линейных уравнений относи-

тельно  $f(x)$  и  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ :

$$\begin{cases} (x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}, \\ \left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{1-x}. \end{cases}$$

Решая ее, получим  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Следовательно-

но,  $f\left(\frac{2016}{2017}\right) = 2017$ .

5. 6.

Указание. Если изобразить графики движения автомобиля (отрезок  $KL$  на рисунке 24), автобуса

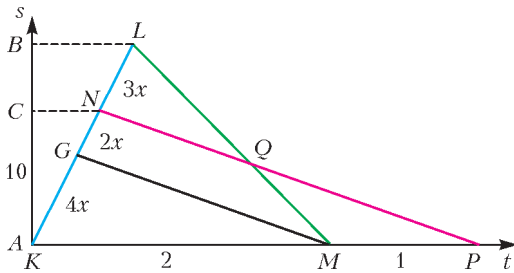


Рис. 24

(отрезок  $LM$ ) и велосипедиста (отрезок  $NP$ ) в осях  $(t; s)$ , где  $t$  – время (в часах),  $s$  – расстояние (в километрах) от пункта  $A$ , то задача сводится к чисто геометрической, которая решается рассмотрением подобных треугольников.

6. 28.

Указание. Обозначим  $t = \frac{\pi x}{12}$ , тогда неравенство принимает вид

$$(1 - \text{ctg}^2 t)(1 - 3\text{ctg}^2 t)(1 - \text{tg} 2t \text{ctg} 3t) \leq 16.$$

Так как

$$1 - \text{ctg}^2 t = -\frac{\cos 2t}{\sin^2 t},$$

$$1 - 3\text{ctg}^2 t = \frac{\sin^2 t - 3 \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{4 \sin^2 t - 3}{\sin^2 t} = -\frac{\sin 3t}{\sin^3 t},$$

$$1 - \text{tg} 2t \text{ctg} 3t = 1 - \frac{\sin 2t \cos 3t}{\cos 2t \sin 3t} = \frac{\sin t}{\cos 2t \sin 3t},$$

то неравенство приводится к виду  $\frac{1}{\sin^4 t} \leq 6$ ,

т.е.  $|\sin t| \geq \frac{1}{2}$ . Поэтому  $t \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

7. 0,56 (точное значение:  $\frac{5}{9}$ ).

Обозначим искомую величину двугранного угла через  $\alpha$ . Пусть  $R$  и  $r$  – радиусы, а  $O_R$  и  $O_r$  – центры большего и меньшего шаров соответственно,  $A$  и  $B$  – основания перпендикуляров, проведенных из  $O_R$  и  $O_r$  к ребру двугранного

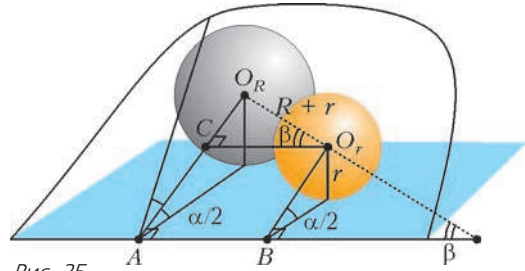


Рис. 25

угла,  $\beta$  – угол между ребром двугранного угла и  $O_R O_r$ ,  $R = kr$ . Тогда (рис.25)

$$O_R A = \frac{R}{\sin(\alpha/2)},$$

$$O_r B = \frac{r}{\sin(\alpha/2)} \Rightarrow CO_R = \frac{R-r}{\sin(\alpha/2)}.$$

Из прямоугольного треугольника  $O_R O_r C$  находим

$$\sin \beta = \frac{CO_R}{O_R O_r} = \frac{R-r}{(R+r)\sin(\alpha/2)} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$

Отсюда

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\sin \beta}\right), \cos \alpha = 1 - 2\left(\frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\sin \beta}\right)^2.$$

При  $k = 2$ ,  $\beta = 45^\circ$  получаем  $\cos \alpha = \frac{5}{9}$ .

8. 0,9.

Поскольку

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)n(n+1-n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

получаем, что число из условия задачи равно

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

9. 567.

Указание. Если  $n \geq 1000$ , то  $n^2 \geq 10^6$ , тогда десятичные записи  $n$  и  $n^2$  содержат вместе не менее 11 цифр. Если же  $n \leq 316$ , то  $n^2 \leq 99856$ , и десятичные записи  $n$  и  $n^2$  содержат вместе не более 8 цифр. Следовательно,  $317 \leq n \leq 999$ .

Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45 и делится на 9, поэтому  $n + n^2$  также делится на 9. Поскольку  $n + n^2 = n(n+1)$  есть произведение двух взаимно простых чисел, оно делится на 9 только в двух случаях: 1)  $n$  делится на 9; 2)  $n+1$  делится на 9, т.е.  $n$  имеет остаток 8 при делении на 9.

Перебор с учетом того, что в записи числа  $n$  не

должно быть одинаковых цифр и цифры 0 и оно не может заканчиваться на 1, 5 и 6 (иначе его квадрат оканчивается на ту же цифру), дает, что наименьшим числом, удовлетворяющим условию задачи, оказывается число 567.

**10. Пример требуемой задачи.** Две бригады проводят ремонт офисного помещения, состоящего из трех кабинетов: 1-й площадью  $50 \text{ м}^2$ , 2-й площадью  $30 \text{ м}^2$  и 3-й площадью  $20 \text{ м}^2$ . Производительность второй бригады выше на  $2 \text{ м}^2/\text{ч}$ , чем у первой. Первый кабинет они отремонтировали вместе, а затем разделились: первая бригада отремонтировала только 3-й кабинет, а вторая – только 2-й. Какова должна быть минимальная производительность первой бригады, чтобы вся работа была выполнена не более чем за 10 часов? *Ответ:*  $4 \text{ м}^2/\text{ч}$ .

#### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

1.  $5/3$ .

2.  $\frac{257}{16}$ .

*Указание.* Пусть  $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ , тогда

$\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \frac{2}{\sqrt{t}}$ , и уравнение принимает вид  $\sqrt{t} = \frac{4}{\sqrt{t}} + \sqrt{2}$ , или  $t - \sqrt{2t} - 4 = 0$ .

3. Первое.

Поскольку  $11^{\lg 121} = (11^{\lg 11})^2$ , а  $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11 = 10 \cdot (10^{\lg 11})^{\lg 11} + 11 = 10 \cdot 11^{\lg 11} + 11$ , требуется сравнить числа  $x^2$  и  $10x + 11$ , где  $x = 11^{\lg 11}$ .

Выражение  $x^2 - 10x - 11 = (x-11)(x+1)$  в точке  $x = 11^{\lg 11} > 11$  принимает положительное значение, поэтому первое число больше.

4.  $\frac{5}{2}$ .

5. 262.

Пусть искомое число равно  $a$ . Имеем

$\sqrt{n+524} = a - \sqrt{n}$ ,  $n+524 = a^2 - 2a\sqrt{n} + n$ . По условию  $a$  рационально, поэтому и  $\sqrt{n}$  рационально. Значит,  $n = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда число

$\sqrt{n+524}$  тоже рационально, поэтому  $n+524 = m^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Значит,  $m^2 - k^2 = 524$ ,

$(m-k)(m+k) = 4 \cdot 131$ . Заметим, что числа  $m-k$  и  $m+k$  одинаковой четности, а число 131 простое. Следовательно,  $m-k = 2$  и  $m+k = 2 \cdot 131$ . Оба равенства выполнены при  $m = 132$ ,  $k = 130$ . Итак,  $a = m+k = 262$ .

6.  $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9+5\sqrt{3}}$  или  $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ .

7.  $\left[-\frac{1}{2}; \cos 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 1 + \sin 1\right)$ .

1) Функция  $f(x) = \cos(\cos x) + \sin(\sin x)$  возвра-

стает на промежутке от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  (каждое из слагаемых – монотонно возрастающая функция) и убывает на промежутке от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$  (так как  $f(\pi-x) = f(x)$ ). Поэтому

$$E(f) = [f(0); f(\pi/2)] = [\cos 1; 1 + \sin 1].$$

Данное уравнение имеет ровно два корня на отрезке  $[0; \pi]$  при  $a \in [\cos 1; 1 + \sin 1)$ .

2) Во втором уравнении используем замену  $t = \sin 2x$  и получим

$$1 - \frac{t^2}{2} + t = a \Leftrightarrow t^2 - 2t - 2 = -2a.$$

Область значений функции  $g(t) = t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3$  на отрезке  $[-1; 1]$  есть множество  $E(g) = [g(1); g(-1)] = [-3; 1]$ . Данное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда

$$-2a \in [-3; 1], \text{ т.е. } a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

3) Поскольку  $1 + \sin 1 > 1 + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$ , ровно

одно из данных утверждений 1), 2) выполнено

$$\text{при } a \in \left[-\frac{1}{2}; \cos 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 1 + \sin 1\right).$$

8. 4032.

Рассмотрим набор чисел 2016, 2017, 2018, ..., 4032. Легко видеть, что ни одно из этих чисел не может равняться сумме двух других.

Допустим, что есть подходящий набор из 2017 чисел, в котором наибольшее число  $N \leq 4031$ . Покажем, что в нем есть пара чисел, сумма которых равна  $N$ . Разобьем все натуральные числа, меньшие  $N$ , на пары с суммой, равной  $N$ :  $(1, N-1)$ ,  $(2, N-2)$ , ... Если таких пар 2016 или больше, то чисел, меньших  $N$ , будет не меньше чем 4032, что невозможно. Поэтому таких пар не больше чем 2015, а чисел в наборе 2017. Значит, в наборе найдется по крайней мере одна пара чисел с суммой, равной  $N$ .

#### Ф И З И К А

##### ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

##### 7–9 классы

1. Дальность полета мяча при той же начальной скорости будет максимальной, если ее направить под углом  $45^\circ$  к горизонту. Тогда

$$L = \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{g} \left( \left( \frac{l}{\tau} \right)^2 + \left( \frac{g\tau}{2} \right)^2 \right) = 26,9 \text{ м}.$$

2. Из законов сохранения импульса и энергии (с учетом работы силы трения) находим

$$v_{\max} = 2\sqrt{\mu g l \left( 1 + \frac{m}{M} \right)} = 2,19 \text{ м/с}.$$



3. Из уравнения теплового баланса находим

$$k = \frac{c_b(t_1 - 2t_2 + t_0)}{\lambda - c_b(t_1 - 2t_2 + t_0)} \cdot 100\% = 104\%.$$

4.  $R = \frac{Ur}{Ir - U} = 20,4 \text{ Ом}.$

5. Ясно, что предельный угол поворота зеркала, при котором мальчик  $M$  еще видит изображение девочки  $D_1$ , соответствует случаю, когда точки  $M$ ,  $D_1$  и центр зеркала  $O$  лежат на одной прямой. Отсюда находим

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = 45^\circ.$$

6.  $\rho = \frac{100\%}{n} \rho_0 = 1,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$

10–11 классы

Первый тур

1. Каждая из звезд движется по орбите под действием гравитационного притяжения к другой звезде. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения получаем

$$M = \frac{16\pi^2 R^3}{GT^2} = 2,0 (\times 10^{30}) \text{ кг}.$$

2. Силы, действующие на велосипедиста на трек с горизонтально расположенным дорожным полотном и на наклонном треке, изображены на рисунке 26. Применяя второй закон Ньютона

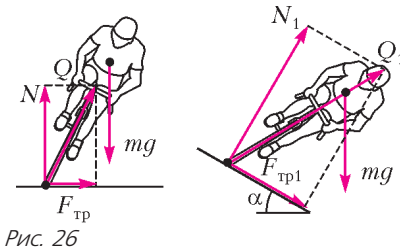


Рис. 26

для обоих случаев, находим

$$u = \sqrt{\frac{(Rg \operatorname{tg} \alpha + v^2) Rg}{Rg - v^2 \operatorname{tg} \alpha}} = 22,5 \text{ м/с}.$$

3. В координатах  $p$ - $V$  цикл аргона имеет вид прямоугольного треугольника, и работу газа можно найти, вычислив его площадь:  $A = 2p_0V_0$ . Так как исходная внутренняя энергия аргона равна  $U_0 = \frac{3}{2}p_0V_0$ , в итоге получаем

$$U_0 = \frac{3}{4}A = 45 \text{ кДж}.$$

4. На бусинку будет действовать вихревое электрическое поле, напряженность которого направлена по касательной к кольцу. Кинетическая энергия бусинки равна работе действующих

на нее электрических сил. Отсюда находим скорость бусинки:

$$v = \frac{q \Phi}{m 2\pi R} = 1,6 \text{ мм/с}.$$

5.  $n = 2 - \frac{1}{k} = 1,33.$

Второй тур

1.  $v_{\text{тк}} = 2R\sqrt{\frac{G\rho r}{3}} = 6,2 \text{ м/с}.$

2.  $L = l_1\sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{2\mu g l_1} - 1\right)^2} = 8,1 \text{ м}.$

3. Запишем уравнение теплового баланса для каждого переливания и найдем, что после трех циклов переливаний разность температур будет

$$\Delta t = (t_2 - t_1) \left(\frac{m - \Delta m}{m + \Delta m}\right)^3 = 11,0 \text{ }^\circ\text{C}.$$

4. Конденсатор с вставленной пластиной эквивалентен двум параллельно соединенным конденсаторам, и искомое отношение равно

$$k = \frac{n+1}{n} = 1,33.$$

5.  $h = \frac{nFD}{d - F} = 26,0 \text{ см}.$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

7–8 классы

1.  $m_1 = m \frac{\rho_1(\rho - \rho_2)}{\rho(\rho_1 - \rho_2)} \approx 1,4 \text{ кг}.$

2.  $k = \frac{F^2}{2A} = 20 \text{ Н/м}.$

3.  $m = \frac{c\rho V(t_2 - t_1) \cdot 100\%}{\eta q} = 0,52 \text{ кг}.$

4.  $U = I \left( R_1 + \frac{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \right) = 15 \text{ В}.$

9 класс

1.  $N_{\min} = \left[ \frac{2}{l} \left( 1 - \frac{v_0^2}{2gH} \right) \sqrt{L^2 + 4H^2} \right] + 1 = 5$ , где символом [...] обозначена целая часть числа.

2. Сопоставление приведенных данных показывает, что весь лед растает и в сосуде с его содержимым установится положительная температура

$$t_0 = \frac{Ct_1 - (mc_{\text{л}}(0^\circ\text{C} - t_2) + m\lambda)}{C + mc_{\text{в}}} = 6,1 \text{ }^\circ\text{C}.$$

3.  $R_1 = \frac{I_2 R_2 R_3}{I_0 R_3 - I_2 (R_2 + R_3)} = 7,5 \text{ Ом}.$

$$4. v = \sqrt{V^2 \cos^2 \alpha + u^2 - V^2} - V \cos \alpha = \\ = V \left( \sqrt{\cos^2 \alpha + 1} - \cos \alpha \right) = 9,3 \text{ км/ч.}$$

10–11 классы

1. В положении равновесия сила упругости, возникающая в каждой из пружин, равна  $\frac{Mg}{2}$ .

Поэтому удлинения пружин в положении равновесия равны  $\Delta y_1 = \frac{Mg}{2k_1}$  и  $\Delta y_2 = \frac{Mg}{2k_2}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Пусть в некоторый момент времени горизонтальный стержень опустится на величину  $y$ . Из-за нерастяжимости нити верхние концы пружин сместятся при этом в разные стороны: конец левой пружины на величину  $\Delta y$  вниз, а правой – на столько же вверх (поскольку  $k_1 > k_2$ ). Силы натяжения нити слева и справа одинаковы, поэтому  $k_1(y - \Delta y + \Delta y_1) = k_2(y + \Delta y + \Delta y_2)$ , откуда следует, что  $\Delta y = y \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ . Сила упругости, возникающая в каждой из пружин, равна  $F = \frac{2yk_1k_2}{k_1 + k_2} + \frac{Mg}{2}$ . По второму закону Ньютона для груза имеем

$$Ma = Mg - 2F = -4 \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} y, \text{ или} \\ y'' + \frac{4k_1k_2}{M(k_1 + k_2)} y = 0.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания груза с периодом

$$T = \pi \sqrt{\frac{M(k_1 + k_2)}{k_1k_2}} \approx 0,4 \text{ с.}$$

2. Работа газа численно равна площади треугольника 1–2–3:

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = \\ = \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1) \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 \right) \approx 2,49 \text{ кДж.}$$

3. Потенциал точки, находящейся на расстоянии  $r$  от точечного заряда  $q$ , относительно бесконечно удаленной от него точки равен  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

Поскольку все точки поверхности полусферы находятся на одинаковом расстоянии  $R$  от ее центра и полусфера заряжена равномерно, потенциал точки, расположенной в центре полусферы, равен  $\varphi_0 = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ .

Переместим стержень вдоль оси на небольшое расстояние  $\Delta x$ . Так как стержень бесконечно длинный, это эквивалентно тому, что мы поместим на конец

стержня, обращенный к полусфере, заряд  $-\gamma\Delta x$ . Энергия взаимодействия этого заряда с полусферой равна  $\Delta W = -\gamma\Delta x\varphi_0$ . С другой стороны, она равна работе силы взаимодействия полусферы со стержнем при перемещении стержня на расстояние  $\Delta x$ , т.е.  $\Delta W = -F\Delta x$ . Окончательно получаем

$$F = \frac{\gamma\sigma R}{2\epsilon_0} \approx 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

4. При фиксированном расстоянии между свечой и стеной, превышающем  $4F$ , существуют два положения линзы, при которых она дает на стене резкое изображение пламени. Используя формулу тонкой линзы, находим

$$F = \frac{L^2 - \Delta l^2}{4L} = 0,2 \text{ м.}$$

# КВАНТ 12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
С.Л.Кузнецов, А.Ю.Котова,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

**в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

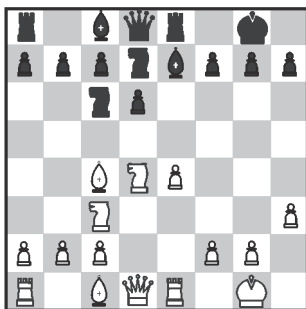
## Как мыслит ШАХМАТИСТ-3

Одно из главных качеств, отличающих классного шахматиста, заключается в умении «видеть всю доску» в динамике. Предвидение последствий перемещения фигуры в одной части доски для развития событий в другой ее части — отличительная черта чемпионского стиля.

Первый русский чемпион мира Александр Алехин в совершенстве владел этим аспектом игры. В своей лекции, посвященной атаке в шахматной партии, он продемонстрировал, как мыслит шахматист экстра-класса, на примере анализа следующей партии.

### В.Гольцгаузен-З.Тарраш, сеанс одновременной игры

Берлин, 1912



1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♙c4 ♘f6 4. d4 ed 5. 0-0 d6 6. ♘:d4 ♗e7 7. ♘c3 0-0 8. h3 ♜e8 9. ♞e1 ♘d7?

Неожиданная комбинация решает исход партии: 10. ♙:f7+! ♜:f7 11. ♘e6!! Черные сдались, так как после 11... ♜:e6 12. ♞d5+ ♜f6 13. ♞f5× они получают мат, а если они не берут коня, то теряют ферзя на d8.

Особенности финальной комбинации побудили Александра Алехина найти в ней закономерности, изучение которых помогло бы лучше понять меха-

низм борьбы в дебюте. Для этого он прибегнул к методу сравнений: выделил характерные особенности известных ему партий, в которых встречались комбинации с жертвами с целью использовать положение короля противника для получения материальной выгоды или достижения мата. Оказалось, что большинство партий складывались по похожему сценарию: постепенное накопление атакующих сил, постепенное ослабление позиции короля, решающая комбинация.

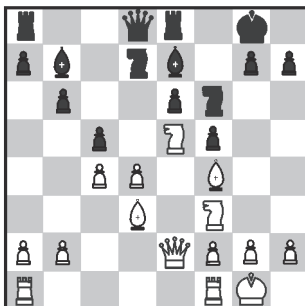
Однако в рассмотренной партии не было никаких приготовлений к атаке, а к мгновенной победе белых привела всего лишь одна тактическая ошибка черных. Ключ к пониманию данной комбинации можно найти, ответив на вопрос, какой пункт черных стал уязвимым после хода 9... ♘d7? Правильный ответ — e6. Жертва слона на f7 проводилась для завлечения короля, а позиционной основой жертвы стал контроль белых над центральными полями.

Алехин тонко понял суть идеи двойной жертвы и через несколько лет провел похожую комбинацию в своей партии.

### А.Алехин-М.Фельдт, сеанс одновременной игры вслепую

Тернополь, 1916

15. ♘f7 ♜:f7 16. ♞:e6+ ♜g6 (16... ♜:e6 17. ♘g5×) 17. g4! Выигрыш белых.

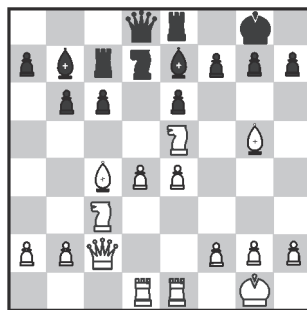


Идея аналогична: полное господство над центральными полями позволяет белым провести атаку практически без приготовлений.

Через 6 лет Алехину снова удалось провести подобную комбинацию. Справедливости ради, стоит отметить, что победить в этой партии ему помог неточный ответ соперника на 17-м ходу.

### А.Алехин-М.Найт, сеанс одновременной игры

Бостон, 1924



15. ♘f7 ♜:f7 16. ♙:e6+ ♜f8! 17. e5! g6? (17... ♘g5!) 18. ♙h6+ ♘g7 19. ♞e3 c5 20. ♘d5! ♙:d5 21. ♙:d5 cd 22. ♞f3+ ♘f6 23. ♞:f6! ♙:f6 24. ef! ♙e5 25. fg+ ♞:g7 26. ♙b3 d3 27. ♞c4. Выигрыш белых.

Впоследствии Алехин, используя двойную жертву, выиграл еще несколько партий.

А.Русанов

Индекс 90964

Длинными зимними ночами в высоких широтах Земли  
можно наблюдать красочное свечение воздуха...

## ПОЛЯРНЫЕ СИЯНИЯ



(Продолжение – на с. 2 внутри журнала)

Арктика с доставкой