Расчет электроемкости конденсаторов

В.ЗВАРИЧ, В.ЛЯХОВЕЦ

Как известно, существуют два простейших соединения конденсаторов: последовательное и параллельное. Формулы для нахождения общей электроемкости конденсаторов в этих соединениях давно известны. Но что делать, если конденсаторы соединены не последовательно и не параллельно? Один из методов, которым предлагается решать такие задачи, это метод симметрии. Но его использовать можно не всегда. Встает вопрос: как определить общую электроемкость, а также заряды элементов системы конденсаторов в самом общем случае? Постараемся найти ответ на этот вопрос.

Начнем с простого: рассмотрим два последовательно соединенных конденсатора (рис.1). Очевидно, что при последовательном соединении заряды этих конденсаторов одинаковы. Пусть, например, $q_1 = q_2 = 5$ Кл . Чему равен суммарный заряд данной системы? На этот вопрос многие ответят так: 5 Кл + 5 Кл = 10 Кл. Но это неверно, потому что конденсатор состоит из двух параллельных пластин, разделенных диэлектрической средой (например, воздухом). Это приводит к следующим интересным результатам (рис.2). Заряд от источника тока достигает крайней левой пластины первого конденсатора емкостью C_1. Он не может пойти далее, так как цепь прерывается. Однако положительный заряд на крайней левой пластине удаляет положительные заряды из правой пластины этого же конденсатора (через индукцию), приводя к полному заряду $q_1 = 5$ Кл. Положительные заряды, удаленные из правой пластины первого конденсатора, отправляются через цепь на левую пластину второго конденсатора емкостью C_2. Тем же самым способом удаляются положительные заряды из правой пластины, приводя к полному заряду $q_2 = 5$ Кл на конденсаторе емкостью C_2. Таким образом, полный заряд системы равен $q = 5$ Кл.

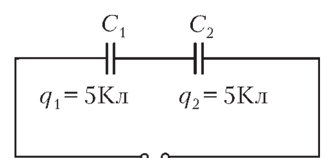

Рис. 1

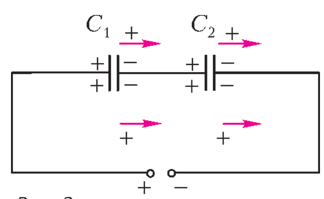

Рис. 2

Отсюда следует очень важное свойство: при последовательном соединении конденсаторов заряд между соседними пластинами двух конденсаторов равен нулю (рис.3).

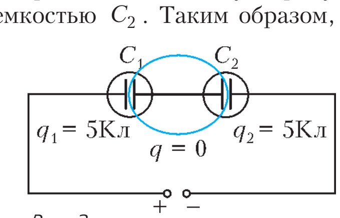

Рис. 3

Используем проведенные рассуждения для решения более сложных задач, где конденсаторы соединены произвольно. Это позволит нам определить заряд и напряжение каждого конденсатора независимо от способа соединения.

Рассмотрим соединение конденсаторов, представленное на рисунке 4. Суммарную электроемкость можно вычислить по

Авторы этой статьи Василий Зварич и Вадим Ляховец – ученики школы 9 города Пинска (Республика Беларусь). (Прим. ред.)

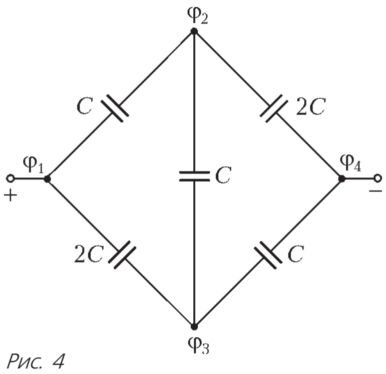

Рис. 4

формуле

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_{\text{общ}}}{U},$$

где $q_{\text{общ}}$ – полный заряд и $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение между клеммами. Проанализируем перераспределение заряда между конденсаторами и найдем области, где заряд между пластинами соседних конденсаторов равен нулю. На рисунке 5 области нулевого заряда между соседними конденсаторами обозначены голубым цветом. Полный заряд этой системы равняется полному заряду только двух конденсаторов, емкостями C и $2C$, которые являются самыми близкими к положительной клемме. Заряд прибывает на пластины только этих конденсаторов, а на остальных он перераспределяется, и никакие новые заряды не создаются в системе.

Чтобы продолжить решение, мы в произвольном порядке приписываем заряды всем конденсаторам, как показано на рисунке 6, и получаем следующую систему уравнений:

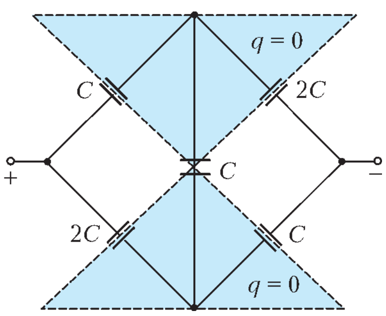

Рис. 5

$$-q_1 - q_3 + q_5 = 0,$$

$$q_2 + q_4 - q_5 = 0,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_1}{C},$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 = \frac{q_2}{2C},$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q_5}{C},$$

$$\varphi_4 - \varphi_2 = \frac{q_3}{2C},$$

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \frac{q_4}{C}.$$

Теперь, зная, что $\varphi_1 - \varphi_4 = U$, необходимо решить данную систему и найти q_1 и q_2.

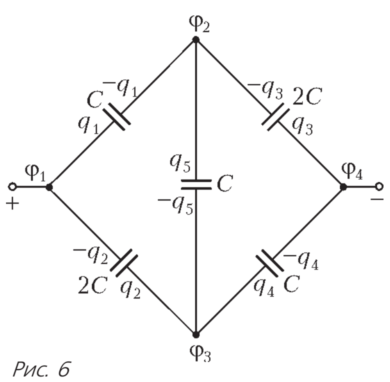

Рис. 6

Складываем уравнения 3, 4, 5 и получаем

$$0 = \frac{q_2}{2C} + \frac{q_1}{C} + \frac{q_5}{C},$$

или

$$q_2 + 2q_1 + 2q_5 = 0.$$

Затем складываем уравнения 5, 6 и 7 и получаем

$$0 = \frac{q_4}{C} + \frac{q_5}{C} + \frac{q_3}{2C},$$

или

$$2q_5 + q_3 + 2q_4 = 0.$$

Из уравнений 3 и 6, учитывая, что разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_4$ равна U, находим

$$U = \frac{q_1}{C} - \frac{q_3}{2C}.$$

Теперь объединим получившиеся три уравнения с первыми двумя уравнения нашей исходной системы, выразим из них заряды q_3, q_4 и q_5 через заряды q_1 и q_2 и получим

$$q_1 = \frac{3CU}{5}, \quad q_2 = -\frac{4CU}{5}.$$

Подставив данные выражения в формулу для общей емкости, найдем

$$C_{\text{общ}} = \frac{|q_1| + |q_2|}{U} = \frac{7C}{5}.$$

Заметим, что первоначальная система уравнений может быть решена быстрее с помощью персонального компьютера.

Данный метод нахождения общей емкости системы конденсаторов универсален. У него есть дополнительное преимущество, что мы не должны знать истинные знаки зарядов заранее: если мы предположили знак неправильно, решение просто даст нам отрицательный ответ.

Применим теперь наш метод к решению конкретных задач.

Задача 1. *На рисунке 7 дана цепь, в которой $R_1 = 3R$, $R_2 = R$, $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $C = 1$ мкФ, $\varphi_1 = 4$В, $\varphi_4 = 0$. Нужно определить заряд на конденсаторе емкостью C_1.*

Решение. Зная, что по конденсаторам ток не идет, найдем общее сопротивление цепи:

$$R_{\text{общ}} = R_1 + R_2 = 4R,$$

ток в цепи:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_{\text{общ}}} = \frac{\varphi_1}{4R},$$

разность потенциалов между точками 3 и 4:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = IR_2 = \frac{\varphi_1}{4},$$

или

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1}{4}.$$

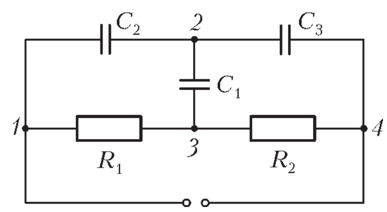

Рис. 7

Теперь мы можем решить задачу нашим методом. И первое, что мы делаем, это на схеме в произвольном порядке расставляем заряды (рис.8). Из рисунка видно, что

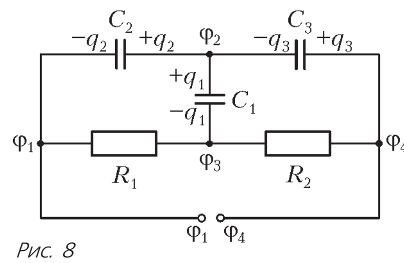

Рис. 8

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0.$$

Остальные уравнения, как обычно, добираем из определения электроемкости конденсаторов:

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q_1}{C}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q_2}{2C}, \quad \varphi_4 - \varphi_2 = \frac{q_3}{3C}.$$

Зная, что $\varphi_4 = 0$ и $\varphi_3 = \frac{\varphi_1}{4}$, решим данную систему уравнений и найдем искомый заряд q_1:

$$q_1 = \frac{C\varphi_1}{8} = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл}.$$

Задача 2. *В цепи, изображенной на рисунке 9, $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $C_4 = 4C$, $C_5 = 5C$, $C_6 = 6C$, $C_7 = 7C$, $C_8 = 8C$, $C_9 = 9C$, $C_{10} = 10C$, $C_{11} = 11C$, $C_{12} = 12C$, $C =$ $= 1$ мкФ. Нужно найти общую емкость получившейся цепи конденсаторов.*

Решение. Данную задачу можно сразу же решить предлагаемым методом, необходимо только расставить заряды и потенциалы в произвольном порядке – так, как это представлено на рисунке 10. Далее находим области, где суммарный заряд равен нулю – это будут вершины куба. Составляем уравнения зарядов:

$$q_1 + q_4 - q_9 = 0, \quad q_8 + q_9 - q_5 = 0, \quad q_2 - q_1 - q_{12} = 0,$$

$$q_5 + q_6 + q_{12} = 0, \quad q_{10} - q_8 - q_7 = 0, \quad q_3 - q_4 - q_{10} = 0,$$

$$-q_2 - q_3 - q_{11} = 0, \quad q_7 - q_6 + q_{11} = 0.$$

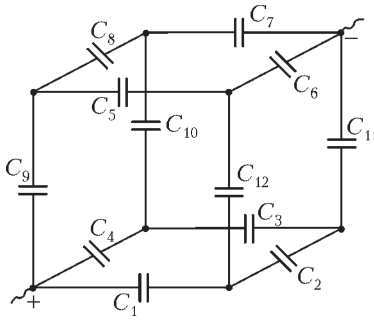

Рис. 9

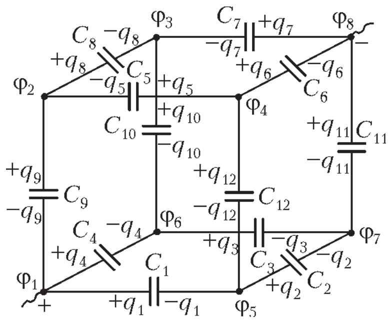

Рис. 10

Остальные уравнения, как обычно, добираем из определения электроемкости конденсаторов:

$$\varphi_1 - \varphi_5 = \frac{q_1}{C},\ \varphi_5 - \varphi_7 = \frac{q_2}{2C},\ \varphi_6 - \varphi_7 = \frac{q_3}{3C},\ \varphi_1 - \varphi_6 = \frac{q_4}{4C},$$

$$\varphi_4 - \varphi_2 = \frac{q_5}{5C}, \varphi_4 - \varphi_8 = \frac{q_6}{6C}, \varphi_8 - \varphi_3 = \frac{q_7}{7C}, \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q_8}{8C},$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q_9}{9C}, \varphi_3 - \varphi_6 = \frac{q_{10}}{10C}, \varphi_8 - \varphi_7 = \frac{q_{11}}{11C}, \varphi_4 - \varphi_5 = \frac{q_{12}}{12C}.$$

Необходимо определить общую электроемкость системы, но заряд от положительной клеммы идет только на конденсаторы емкостями C_1, C_4 и C_9. Значит, надо найти заряды на этих конденсаторах. Обозначив $\varphi_1 - \varphi_8 = U$, решим полученную систему уравнений и получим

$$q_1 \approx 2{,}04CU,\ \ q_4 \approx 11{,}16CU,\ q_9 \approx 13{,}20CU.$$

Остается только найти общую электроемкость цепи:

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_1 + q_4 - q_9}{U} \approx 26{,}4C = 26{,}4\ \text{мкФ}.$$