Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант⁺». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–6/2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2236» или «Ф2243». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2236–М2243 предлагались на заключительном этапе XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задача М2245, а) предлагалась на LII Международной математической олимпиаде.

Задачи М2236–М2245, Ф2243–Ф2252

М2236. На доске написаны девять приведенных квадратных трехчленов: $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, … …, $x^2+a_9x+b_9$. Известно, что последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_9$ и $b_1, b_2, \ldots, b_9$ – арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трехчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трехчленов может не иметь корней?

И.Богданов

М2237. Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 2010/2$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и еще ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

И.Богданов

М2238. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ – прямой. Пусть AF – высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC – прямой.

А.Полянский

М2239. На столе лежит куча из более чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берет Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n, либо любое кратное n число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

С.Берлов

М2240. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \dfrac{a^n-1}{b^n-1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.

В.Сендеров

М2241*. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N – середина дуги BAC его описанной окружности, а M – середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

М.Кунгожин

М2242*. Клетчатый квадрат 2010×2010 разрезан на трехклеточные уголки. Докажите, что можно в каждом уголке отметить по клетке так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали было поровну отмеченных клеток.

И.Богданов, О.Подлипский

М2243*. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населенных пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населенных пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населенных пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причем около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

С.Берлов

М2244*. Пусть даны точки A_1, A_2, B_1, B_2 и C_1, C_2, лежащие на одной окружности, а также некоторая окружность ω. Через точки A_1 и A_2 проведем две окружности, касающиеся ω, обозначим их точки касания с ω через A_3 и A_4. Точки B_3, B_4 и C_3, C_4 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_3A_4, B_3B_4 и C_3C_4 пересекаются в одной точке.

А.Акопян, С.Ильясов

М2245*. Пусть $\mathcal{S}$ – конечное множество точек на плоскости, содержащее хотя бы две точки. Известно, что никакие три точки множества $\mathcal{S}$ не лежат на одной прямой. Назовем *мельницей* следующий процесс. Вначале выбирается прямая l, на которой лежит ровно одна точка $P \in \mathcal{S}$. Прямая l вращается по часовой стрелке вокруг *центра* P до тех пор, пока она впервые не пройдет через другую точку множества $\mathcal{S}$. В этот момент эта точка, обозначим ее Q, становится новым центром, и прямая продолжает вращаться по часовой стрелке вокруг точки Q до тех пор, пока она снова не пройдет через точку множества $\mathcal{S}$. Этот процесс продолжается бесконечно.

а) Докажите, что можно выбрать некоторую точку P множества $\mathcal{S}$ и некоторую прямую l, проходящую через P, так, что для мельницы, начинающейся с прямой l, каждая точка множества $\mathcal{S}$ выступит в роли центра бесконечное число раз.

б) Докажите, что можно выбрать некоторую точку P множества $\mathcal{S}$ такую, что для мельницы, начинающейся с любой прямой l, проходящей через P, каждая точка множества $\mathcal{S}$ выступит в роли центра бесконечное число раз.

Дж.Смит (Великобритания)

Ф2243. Длинная прямая лестница состоит из ступенек с горизонтальными поверхностями, каждая из которых имеет ширину L = 29 см и высоту h = 15 см. Маленькому мячу радиусом R = 1 см придали такую начальную горизонтальную скорость v и такую угловую скорость вращения ω, что он стал спускаться по ступенькам, «пересчитывая» их одну за одной, ударяясь о каждую ступеньку на одном и том же расстоянии от края ступеньки, причем над каждой ступенькой после удара он поднимался на одну и ту же высоту. Отношение высоты, на которую поднялся мяч над первой ступенькой после удара о нее, к высоте, с которой его бросили, равно 0,7. Коэффициент трения мяча о поверхность ступенек не равен нулю, но скорость вращения мяча при ударах не меняется, так как мгновенная скорость движения нижней точки мяча имеет все время нулевую горизонтальную составляющую. Какими были начальные скорости мяча v и ω и на какой высоте H над ступенькой, о которую он в первый раз ударился, находился мяч при старте?

С.Полтинников

Ф2244. На легкой короткой нити к ветке сосны подвешена гирька массой $m = 1$ кг. К ней привязана еще одна легкая нить с длиной в недеформированном состоянии l = 1 м и жесткостью k = 1 кН/м, на конце которой висит еще одна гирька массой m = 1 кг. Система находилась в равновесии до момента, когда верхнюю нить перебил дятел. Гирьки упали на землю одновременно. Каково расстояние от ветки до земли?

В.Дятлов

Ф2245. «Водяная ракета» представляет собой полуторалитровую бутылку с резиновой пробкой, в которую налито небольшое количество воды массой m = 200 г. Ракета несет полезный груз, укрепленный на ее корпусе снаружи. На какую высоту взлетит ракета, запущенная вертикально вверх из перевернутого положения, в результате быстрого выброса воды при повышении давления в бутылке до p = 5 атм? В момент старта ракета была неподвижна. Общая масса взлетевшей ракеты с «боеголовкой» M = 0,5 кг. Считайте, что давление в бутылке при выбросе воды меняется несильно. Массой пробки пренебречь.

А.Гуденко

Ф2246. Вася нашел старую медную проволоку с сильно попорченной изоляцией. Намереваясь сдать медь в пункт приема цветных металлов, он скомкал проволоку и бросил комок в костер. После такой обработки полностью избавленная от изоляции медь массой 2 кг имела температуру 600 °C. Вася зацепил проволоку железной кочергой и, не торопясь, опустил горячий комок проволоки в открытое ведро с 5 литрами воды. Когда шипение прекратилось, Вася круговыми движениями комка проволоки перемешал воду в ведре. Начальная температура воды была 20 °C. Какой стала температура воды в ведре после того, как медь остыла? Молярная масса меди 63,5 г/моль, молярная теплоемкость меди 25 Дж/(моль·К), молярная теплота испарения воды 40 кДж/моль.

В.Паров

Ф2247. В большом сосуде с жесткими и не проводящими тепло стенками находится газообразный водород при температуре T_1 = 50 К. При такой температуре вращательные степени свободы двухатомных молекул водорода «заморожены». Предположим, что эти степени свободы «размораживаются» при фиксированной температуре T_0 = 80 К. Сосуд движется с некоторой скоростью v, а затем сталкивается с очень жестким препятствием и мгновенно останавливается. Какая температура T_2 установится в сосуде? Теплоемкостью стенок сосуда можно пренебречь.

С.Варламов

Ф2248. Если две одинаковые проводящие пластины, каждая площадью S, находятся на расстоянии $d \ll \sqrt{S}$ параллельно друг другу, то электрическая емкость такого конденсатора равна C. Четыре такие пластины расположены параллельно друг другу, расстояния между соседними пластинами равны d и две внешние пластины соединяются тонким проводом (рис.1, случай A). Какова емкость системы проводников в этом случае, если ее измеряют между указанными на рисун-

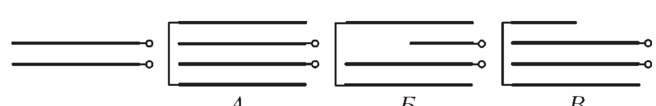


Рис. 1

ке точками? Затем от одной из пластин отрезали и удалили половину (по площади). Какова теперь емкость системы проводников (случаи $Б$ и $В$)?

С.Дмитриев

Ф2249. Вокруг закрепленного точечного положительного заряда Q вращается небольшой отрицательный заряд $-q$ с массой m. Каков период его обращения, если наибольшее расстояние между зарядами в процессе движения в три раза больше наименьшего расстояния, равного r_0?

А.Гуденко

Ф2250. На одном конце легкой и достаточно длинной пружины укреплен массивный шарик. Другой конец пружины жестко удерживается в тисках. Пружина имеет большую продольную жесткость и гораздо меньшую «изгибную» жесткость, а шарик может совершать колебания, изгибая пружину. Когда ось пружины в положении равновесия занимает вертикальное положение и шарик находится выше закрепленного конца пружины, то период малых колебаний равен $T_{\text{верх}}$. Если же шарик находится ниже закрепленного конца пружины, то период малых колебаний равен $T_{\text{нижн}} < T_{\text{верх}}$. Каким будет период малых колебаний шарика, если ось пружины в положении равновесия занимает горизонтальное положение? Длина пружины вдоль ее оси при всех рассматриваемых положениях шарика практически не меняется.

В.Сергеев

Ф2251. К сети переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц точками B и G Вася подключил электрическую схему из различных элементов (рис.2).

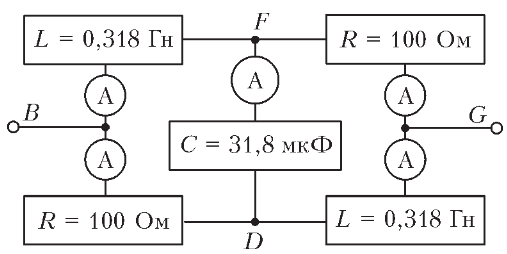


Рис. 2

У элементов схемы значения таковы, что $R = L\omega = 1/(C\omega) = 100$ Ом. Идеальные амперметры показывают эффективные значения тока. Чему равны эти значения?

А.Зильберман

Ф2252. По проекту в Большом адронном коллайдере протоны во встречных пучках будут летать, имея каждый энергию $E = 7$ ТэВ $= 7 \cdot 10^{12}$ эВ. При этом скорость движения частиц всего на несколько метров в секунду меньше скорости света в вакууме c. Связь между энергией E частицы и модулем ее импульса p при таких условиях выглядит очень просто: $E \approx cp$. Магнитное поле обеспечивает движение частиц по кольцу общей длиной $L = 27$ км. Второй закон Ньютона в виде $\Delta\vec{p}/\Delta t = \vec{F}$ при таких скоростях остается справедливым. Считая кольцо круглым, оцените модуль индукции магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца.

В.Бак

Решения задач М2214–М2228, Ф2228–Ф2233

М2214. *На доске выписаны $N \ge 4$ чисел. Оказалось, что сумма любых трех выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?*

Ответ: 0 при $N = 4$, $N - 2$ при $N \ge 5$.

Для $N = 4$ пример из чисел 1, 1, -1, -1 удовлетворяет условию, т.е. нулей может не быть вовсе.

Пусть теперь $N \ge 5$. Пример из $N - 2$ нулей и чисел 1, -1 удовлетворяет условию, поэтому количество нулей может быть ровно $N - 2$.

Предположим, что количество нулей меньше $N - 2$, т.е. имеется хотя бы 3 ненулевых числа (среди них найдутся два одного знака). Если ненулевых чисел хотя бы 5, то найдутся три числа одного знака. Иначе среди данных N чисел имеется ноль. В любом случае либо на доске найдутся три неотрицательных числа, среди которых хотя бы два строго положительных, либо найдутся три неположительных числа, среди которых хотя бы два строго отрицательны. В первом случае пусть это числа $a > 0$, $b > 0$, $c \ge 0$, причем пусть a – наибольшее из всех выписанных чисел. Но тогда число $a + b + c > a$, поэтому $a + b + c$ не может быть выписанным – противоречие.

Второй случай разбирается аналогично.

И.Богданов

М2215. *а) Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.*

б) Существует ли четверка простых чисел p, q, r, s такая, что шестая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение трех остальных?

а) **Ответ**: 2, 3, 5.

Ясно, что любые два числа тройки различны (если $p = q$, то $p^4 - 1$ не делится на q). Пусть для определенности p – наименьшее из чисел тройки. Нам известно, что число $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ делится на qr. Заметим, что $p - 1$ меньше любого из простых чисел q и r, а значит, взаимно просто с ними. Далее, число $p^2 + 1$ не может делиться на оба числа q и r, так как $p^2 + 1 < (p+1)(p+1) < qr$. Значит, $p + 1$ делится на одно из них – для определенности, на q. Поскольку $q > p$, это возможно лишь при $q = p + 1$. Тогда одно из чисел p и q четно, а поскольку оно простое, то $p = 2$, $q = 3$. Наконец, r является простым делителем числа $p^4 - 1 = 15$, отличным от $q = 3$, значит, $r = 5$. Осталось проверить, что тройка 2, 3, 5 удовлетворяет условиям задачи.

б) **Ответ**: не существует.

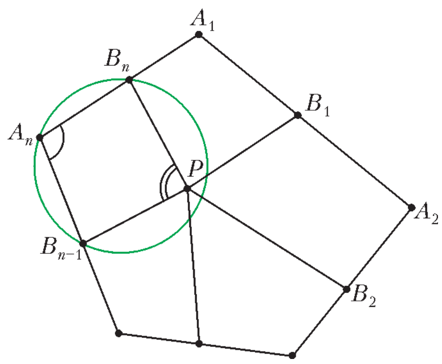
Предположим, что нужная четверка p, q, r, s нашлась. Построим рассуждения так же, как и в пункте а). Аналогично а), покажем, что любые два из чисел p, q, r, s различны, и выберем из данной четверки наименьшее число – пусть для определенности это p. По условию $p^6 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+p+1)(p^2-p+1)$

делится на qrs. Заметим, что $p \neq 2$, так как $2^6 - 1 = 63$ имеет всего два простых делителя. Поэтому $p-1$ и $p+1$ меньше любого из простых чисел q, r, s, и, значит, $(p-1)(p+1)$ не делится ни на одно из чисел q, r, s. Далее, каждое из чисел p^2+p+1, p^2-p+1 может делиться не более чем на одно из чисел q, r, s, так как произведение любых двух из чисел q, r, s больше чем $(p+1)(p+1) > p^2+p+1$. Таким образом, $(p-1)(p+1)(p^2+p+1)(p^2-p+1)$ делится не более чем на два из трех чисел q, r, s. Противоречие.

П.Кожевников, В.Сендеров

М2216. *На сторонах $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ взяты точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Докажите, что круги, описанные вокруг треугольников $B_nA_1B_1$, $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, … …, $B_{n-1}A_nB_n$, покрывают весь многоугольник.*

Пусть P – произвольная точка внутри данного многоугольника (см. рисунок). Сумма $(\angle B_nA_1B_1 +$



$+ \angle B_1A_2B_2 + \ldots + \angle B_{n-1}A_nB_n) +$ $(\angle B_nPB_1 + \angle B_1PB_2 + \ldots$ $\ldots + \angle B_{n-1}PB_n)$ равна $(n-2)\cdot 180° + 360° = n \cdot 180°$, поэтому хотя бы одна из n сумм $(\angle B_nA_1B_1 + \angle B_nPB_1)$, $(\angle B_1A_2B_2 + \angle B_1PB_2)$, …, $(\angle B_{n-1}A_nB_n + \angle B_{n-1}PB_n)$ не меньше 180°. Но неравенство $(\angle B_{i-1}A_iB_i + \angle B_{i-1}PB_i) \geq$ $\geq 180°$ означает, что точка P лежит внутри или на границе окружности, описанной около треугольника $B_{i-1}A_iB_i$ (здесь считаем $B_0 = B_n$).

Отметим, что идея этого решения встречалась ранее в классической задаче о том, что выпуклый четырехугольник целиком покрывается кругами, построенными на его сторонах как на диаметрах.

П.Кожевников, Н.Седракян

М2217. *Найдите все наборы из $n \geq 2$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам*

$$|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \ldots = n|a_n - a_1|.$$

Ответ: наборы из n равных чисел.

Если $a_1 = a_2$, то последовательно получаем, что все числа равны. Все наборы из равных чисел удовлетворяют условию.

Докажем, что других искомых наборов нет. Предположим, что $a_1 \neq a_2$ и $a_1 - a_2 = A$. Тогда $a_2 - a_3 = \pm\frac{A}{2}$ (при некотором выборе знака), $a_3 - a_4 = \pm\frac{A}{3}$, … …, $a_n - a_1 = \pm\frac{A}{n}$. Из равенства $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots$ $\ldots + (a_n - a_1) = 0$ следует, что при некотором выборе знаков плюс и минус верно равенство

$$A\left(1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \ldots \pm \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Теперь достаточно показать, что сумма $1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \ldots \pm \frac{1}{n}$ ни при каком натуральном $n \geq 2$ не равна целому числу. Пусть 2^k (k – натуральное) – наибольшая степень двойки, не превосходящая n. Тогда при приведении указанной суммы дробей к общему знаменателю (равному НОД$(1, 2, \ldots, n)$) во всех дробях, кроме одной дроби $\pm\frac{1}{2^k}$, числитель будет четный. Таким образом, после сложения получим дробь с нечетным числителем и четным знаменателем. Она не равна целому числу.

П.Кожевников

М2218. *Прямую палку длиной 2M сантиметров распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?*

Ответ: $M + 2$ (здесь $M \geq 2$).

Пусть $N \leq M+1$. Распилим палку на $N-1$ палочку длиной 1 и одну палочку длиной $2M+1-N$. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как палочка длиной $2M+1-N$ не меньше полупериметра и, значит, не может быть частью никакой стороны прямоугольника. Таким образом, $N \geq M+2$.

Покажем, что при $N = M + 2$ искомый прямоугольник найдется. Пусть $l \geq 2$ – наибольшая среди длин всех палочек. Пусть x – количество палочек длины 1. Тогда кроме этих x палочек и палочки длиной l имеется $M+1-x$ палочек, длина каждой из которых не меньше 2. Отсюда $l + x + 2(M+1-x) \leq 2M$, и, значит, $x \geq l+2$. Итак, имеется по крайней мере $l+2$ палочки длины 1. Отложим две палочки длины 1 – из них сделаем две единичные стороны прямоугольника, остается еще l палочек длины 1. Начнем выкладывать палочки в ряд в порядке убывания длин с целью выложить одну сторону, равную $M-1$. Пусть на каком-то шаге ряд имел длину $L < M-1$, а после добавления очередной палочки длиной m стал иметь длину $L + m > M + 1$. Тогда уберем последнюю выложенную палочку длины m и вместо нее положим $M-1-L$ единичных палочек (это можно сделать, так как $M-1-L < m \leq l$). Теперь у нас выложены три стороны прямоугольника (1, 1 и $M-1$). Выложив оставшиеся палочки в ряд, получим еще одну сторону длины $M-1$.

Замечание. У задачи имеются и более «профессиональные» доказательства возможности выложить прямоугольник при $N = M + 2$.

Приведем, например, следующее красивое рассуждение. Рассмотрим окружность длины $2M$ и разобьем ее

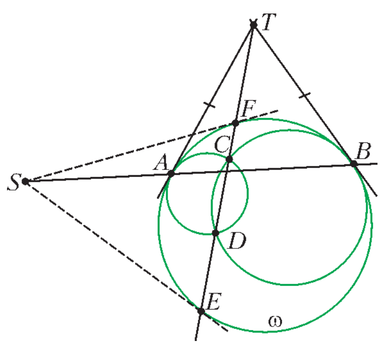
$M + 2$ красными точками на дуги, равные по длине длинам палочек. Эти точки являются некоторыми $M + 2$ вершинами правильного $2M$-угольника T, вписанного в эту окружность. Вершины многоугольника T разбиваются на пары противоположных. Таких пар M, а красных точек $M + 2$, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D, причем суммарные длины в группах A и C, а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

А.Магазинов

M2219. *Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D – точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2 (C и D лежат внутри ω). Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.*

Пусть a и b – общие касательные к окружностям ω, ω_1 и ω, ω_2 в точках A и B. Тогда прямые a, b, EF являются радикальными осями окружностей ω, ω_1, ω_2, поэтому они пересекаются в одной точке T или параллельны (см. рисунок). В последнем случае вся картинка симметрична относительно прямой AB, и утверждение задачи очевидно.



Рассмотрим теперь первый случай. Из подобия пар треугольников TAE и TFA, а также TBE и TFB имеем $\frac{AE}{FA} = \frac{TE}{TA} = \frac{TE}{TB} = \frac{BE}{FB}$. Значит, $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FB}$. Если $AE = EB$ и $AF = FB$, то картинка симметрична относительно EF, что невозможно (так как окружности ω_1 и ω_2 не равны). Пусть касательные в точках E и F пересекают AB в точках S и S'. Тогда из подобных треугольников SAE и SEB

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SA}{SE} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{AE}{EB} = \frac{AE^2}{EB^2}.$$

Аналогично, $\frac{S'A}{S'B} = \frac{AF^2}{FB^2}$, т.е. $\frac{SA}{SB} = \frac{S'A}{S'B}$, откуда $S = S'$. Это и требовалось доказать.

Замечание. Последняя часть решения – по сути доказательство эквивалентности различных условий того, что четырехугольник $AEBF$ *гармонический*.

П.Кожевников

M2220. *Скандалист и n нормальных зрителей купили билеты в театр. Билеты на s мест оказались нераспроданы. Скандалист, растолкав всех, первым вошел в зал и сел на случайно выбранное им место, не поинтересовавшись номером своего места. После этого остальные зрители действовали по следующим правилам: если указанное в билете место свободно, то зритель садится на свое место; если место занято, то зритель садится на любое еще не занятое место. Какова вероятность того, что последний вошедший в зал зритель сядет не на свое место?*

Ответ: $1/(s+2)$.

Используем индукцию по n. База: при $n = 1$ скандалист занимает одно из $s + 2$ мест, значит, место нормального зрителя занято с вероятностью $1/(s+2)$.

Докажем переход индукции. Рассмотрим нормального зрителя A, который входит в зал сразу после скандалиста. В тех вариантах, когда A садится на свое место, задача сводится к уже решенной; число зрителей на единицу меньше (зрителя A можно просто не принимать в расчет). Если же место зрителя A занял скандалист, тогда A садится на случайное свободное место, сам «превращаясь» в скандалиста (можно представить, что, наоборот, A сел на свое место, а скандалист пошел на какое-то случайное свободное место – при такой трактовке этот шаг решения становится почти очевидным!), и задача снова сводится к уже решенной (число зрителей на единицу меньше).

Таким образом, ответ в задаче не зависит от n.

Отметим, что в случае $s = 0$ задача превращается в известную задачу математического фольклора про «сумасшедшую старушку» (старушка входит первой в салон самолета и занимает случайное место, а далее, как и в нашей задаче, пассажиры по очереди занимают свои места, каждый раз пересаживаясь на случайное свободное место, если свое место уже занято).

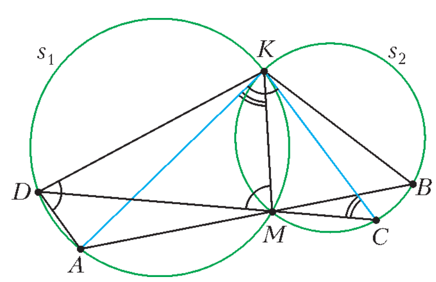
А.Спивак

M2221. *Окружности s_1 и s_2 пересекаются в точках K, M. Через точку K проведены касательные к s_2 и s_1, которые вторично пересекают s_1 и s_2 в точках A и C соответственно. Прямая AM пересекает вторично s_2 в точке B, а прямая CM пересекает вторично s_1 в точке D. Докажите, что $AB = CD$.*

Пусть точки расположены, как показано на рисунке (другие случаи расположения рассматриваются аналогично). Углы KAM и KDM опираются на одну дугу окружности s_1, поэтому они равны. Аналогично, равны углы KCM и KBM. В треугольниках KAB и KDC равны две пары углов, т.е. они подобны.

Далее, $\angle DAK = \angle DMK$; используя теорему об угле между касательной и хордой, имеем

$$\angle ADK = \angle AKC = \angle AKM + \angle MKC = \\ = \angle KCM + \angle MKC = \angle DMK.$$



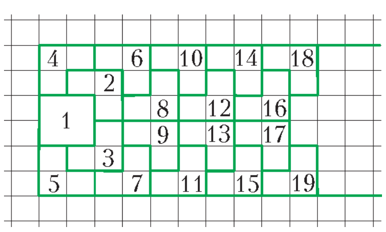
Мы получили, что $\angle DAK = \angle ADK$, поэтому треугольник ADK равнобедренный: $KD = KA$. Значит, подобные треугольники KAB и KDC равны, откуда вытекает утверждение задачи.

И.Рудаков

М2222. *Дан клетчатый прямоугольник $6 \times N$ $(N \geq 3)$, в котором изначально все клетки покрашены синим. За один ход можно покрасить в красный цвет все единичные квадратики некоторого клетчатого квадрата 2×2, в котором есть хотя бы три синие клетки (в процессе некоторые клетки могут быть покрашены в красный цвет больше одного раза). Какое максимальное количество ходов можно сделать?*

Ответ: $2N - 1$.

После первого хода на доске появилось 4 красных клетки, после каждого следующего добавляется не менее 3 красных клеток, таким образом, после k ходов в прямоугольнике будет не менее $4 + 3(k-1) = 3k + 1$ красных клеток. С другой стороны, это количество не больше $6N$, откуда $k \leq 2N - \frac{1}{3}$, а значит, $k \leq 2N - 1$.



Пример последовательности из $2N - 1$ ходов приведен на рисунке (под номером k ($k \geq 2$) отмечается уголок из трех красных клеток, появившихся на k-м ходу).

П.Кожевников

М2223. *Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.*

Ответ: $(-2,-2)$; $(x, 2-x)$, где x – целое.

Данное уравнение эквивалентно уравнению $x^3 + y^3 + (-2)^3 - 3 \cdot (-2)xy = 0$. Воспользуемся тождеством

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right),$$

где $a = x$, $b = y$, $c = -2$. Получаем два варианта:

1) $a + b + c = 0$, тогда $x + y = 2$;

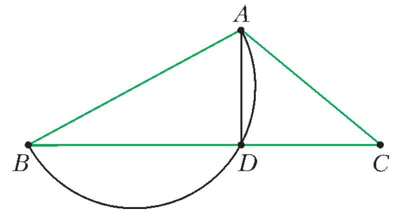
2) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$, т.е. в этом случае $x = y = -2$.

Замечание. Данное уравнение можно решать и по-другому, сведя его к небольшому перебору случаев. Например, при $|x + y| \geq 9$ решений нет, так как в этом случае $\left|x^3 + y^3\right| \geq 9|xy|$, поэтому

$$\left|x^3 + y^3 + 6xy\right| \geq 9|xy| - 6|xy| = 3|xy| > 8.$$

В.Кириак

М2224. *Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.*



Пусть ABC – внешний треугольник, и BC – его наибольшая сторона (см. рисунок). Предположим противное: пусть AB и AC – две наименьшие стороны среди всех шести сторон двух треугольников. Высота AD разбивает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника ADB и ADC. Один из этих треугольников содержит хотя бы две вершины внутреннего треугольника. Пусть, для определенности, треугольник ADB содержит вершины X и Y внутреннего треугольника. Но тогда сторона XY содержится внутри треугольника ABD, вписанного в окружность диаметра AB. Итак, отрезок XY лежит строго внутри окружности диаметра AB, значит, $XY < AB$. Противоречие.

А.Акопян, П.Кожевников

М2225. *Найдите все многочлены $f(x)$ такие, что для каждого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет хотя бы один а) целый корень; б) рациональный корень.*

Ответ: а) $f(x) = \frac{x}{k} + \frac{m}{k}$, где m, k – целые, $k \neq 0$;

б) $f(x) = ax + b$, где a, b – рациональные, $a \neq 0$.

Очевидно, ни в задаче а), ни в б) $f(x)$ не может быть постоянным многочленом.

Пусть степень $f(x)$ равна 1, т.е. $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Рассмотрим вопрос а). Из условия следует, что $as + b = 1$ и $at + b = 2$ для некоторых целых s и t. Тогда $a(t - s) = 1$, значит, $a = \frac{1}{t-s}$, т.е. a имеет вид $\frac{1}{k}$ для некоторого целого k. Тогда $b = \frac{k-s}{k}$, т.е. b имеет вид $\frac{m}{k}$, где m – целое. Легко видеть, что любой многочлен $f(x) = \frac{x}{k} + \frac{m}{k}$, где m – целое, а k – ненулевое целое, удовлетворяет условию.

Для пункта б) получаем, что $as + b = 1$ и $at + b = 2$ для некоторых рациональных s и t. Отсюда $a = \frac{1}{t-s}$ – рационально, и b – тоже рационально. Легко видеть, что любой многочлен вида $f(x) = ax + b$ с рациональными $a \neq 0$ и b удовлетворяет условию.

Докажем теперь, что ни один многочлен степени не ниже второй не удовлетворяет условиям задач а) и б). Предположим противное: пусть степень $f(x)$ больше или равна 2, и этот многочлен удовлетворяет условию. Найдем такое $X > 0$, что $|f(x)|$ возрастает на промежутке $[X; +\infty)$, и $|f(x)|$ убывает на промежутке $(-\infty; X]$ (докажите, что такое X найдется). Тогда если мы возьмем натуральное $N > X$, то для $x \in (-\infty; -N) \cup (N; +\infty)$ имеем $|f(x)| > M = \min\{|f(N)|, |f(-N)|\}$. Таким образом, для каждого уравнения $f(x) = n$, где n – натуральное число, меньшее M, его корень должен принадлежать отрезку $[-N; N]$.

Теперь нетрудно завершить решение пункта а). Рассмотрим все уравнения $f(x) = n$, где n – натуральное число, меньшее M. Количество рассматриваемых уравнений больше или равно $M-1$, причем разные уравнения, очевидно, имеют разные корни. С другой стороны, каждый корень – это целое число из отрезка $[-N;N]$ (таких чисел $2N+1$), значит, $M-1 \le 2N+1$. С другой стороны, так как степень $f(x)$ больше 1, то при больших N выполнено $|f(N)| > 2N+2$ и $|f(-N)| > 2N+2$, значит, $M > 2N+2$. Противоречие.

Чтобы решить задачу б), используем ту же идею об оценке количества корней. Однако потребуются следующие дополнительные соображения.

Вначале предположим, что коэффициенты $f(x)$ рациональны. Домножая уравнение $f(x)-n=0$ на НОК знаменателей всех коэффициентов многочлена f, получим уравнение $a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ (можно считать $a_d > 0$) с целыми коэффициентами, причем все коэффициенты, кроме a_0, зависят только от $f(x)$, но не от выбора натурального n. Как известно, если рациональное число $x = \frac{p}{q}$ (где НОД$(p,q)=1$) является корнем этого уравнения, то q – делитель старшего коэффициента a_d, т.е. x равно числу вида $\frac{r}{a_d}$, где r – целое. Теперь можем завершить решение так же, как и в пункте а): рассмотрим все уравнения $f(x) = n$, где n – натуральное число, меньшее M; каждый корень – это число вида $\frac{r}{a_d}$ (r – целое), принадлежащее отрезку $[-N;N]$ (таких чисел $2Na_d+1$), значит, $M-1 \le 2Na_d+1$. Так же, как и выше, получаем противоречие для больших N.

Остается понять, что $f(x)$ обязан иметь рациональные коэффициенты. Пусть степень $f(x)$ равна d, и $x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}$ – рациональные корни уравнений $f(x) = 1, \ldots, f(x) = d+1$ соответственно. С помощью конструкции *интерполяционного многочлена Лагранжа* можно явно указать многочлен $g(x)$ степени не выше d с рациональными коэффициентами и такой, что $g(x_i) = i$ для $i = 1, 2, \ldots, d+1$: $g(x) = \sum_{i=1}^{d+1} i \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$, где p_i – это произведение $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{d+1})$, из которого вычеркнут сомножитель $(x-x_i)$. Многочлен $f(x)-g(x)$ имеет степень не выше d, и $d+1$ различных чисел $x_1, \ldots, x_{d+1}$ являются его корнями, значит, он тождественно равен нулю, т.е. $g(x)$ совпадает с $f(x)$.

П.Кожевников

M2226*. *Докажите, что количество целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| \le n$ равно количеству целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \le k$ для любых натуральных n и k.*

Как мы узнали, задача М2226 была независимо предложена на национальной олимпиаде Колумбии специалистом в области комбинаторики Федерико Кастильо. Публикуем решение, предложенное составителями Колумбийской олимпиады – возможно, самое изящное среди многих других решений данной задачи.

Через $R(k,n)$ обозначим множество целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| \le n$. Нам требуется показать, что $|R(k,n)| = |R(n,k)|$ (здесь и далее через $|X|$ обозначаем количество элементов множества X).

Обозначим через $T(k+1,n+1)$ множество целочисленных решений уравнения $x_0 + |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| = n+1$, в которых $x_0 > 0$. Каждому набору $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из $R(k,n)$ сопоставим набор $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из $T(k+1, n+1)$, добавив $x_0 = n+1-(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|)$. Легко видеть, что это соответствие взаимно-однозначно, значит, $|R(k,n)| = |T(k+1,n+1)|$. Таким образом, достаточно установить взаимно-однозначное соответствие между $T(k+1,n+1)$ и $T(n+1,k+1)$.

Каждый набор $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из $T(k+1,n+1)$ разобьем на *блоки*: в один блок входит ненулевое число и несколько (возможно, ноль) следующих за ним нулей вплоть до следующего ненулевого числа. *Знаком* блока назовем знак входящего в него ненулевого числа. *Весом* блока назовем модуль входящего в него ненулевого числа. *Длиной* блока назовем количество входящих в него чисел. Теперь в наборе $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из $T(k+1,n+1)$ заменим каждый блок B на *обратный* блок B' того же знака, что и B, такой, что длина B' совпадает с весом B, а вес B' совпадает с длиной B (см. пример в конце решения задачи).

После этой замены набор $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из $T(k+1,n+1)$ превратится в набор из $T(n+1,k+1)$. Повторная замена каждого блока на обратный приведет к исходному набору из $T(k+1,n+1)$. Таким образом, предъявлено взаимно-однозначное соответствие между $T(k+1,n+1)$ и $T(n+1,k+1)$.

Пример: $(3,0,-2,1,-2,0,0) \in T(7,8)$.

Разбиение на блоки: $(\underline{3,0},\ \underline{-2},\ \underline{1},\ \underline{-2,0,0})$.

Замена каждого блока на обратный

$$(\underline{3,0},\ \underline{-2},\ \underline{1},\ \underline{-2,0,0}) \to (\underline{2,0,0},\ \underline{-1,0},\ \underline{1},\ \underline{-3,0})$$

дает набор из $T(8,7)$.

Имеются и другие пути решения данной задачи. Например, можно установить явную формулу $|R(k,n)| = \sum_{r=0}^{\min(k,n)} C_k^r C_n^r 2^r$, из которой сразу вытекает утверждение задачи.

П. Кожевников

M2227*. *Пусть a, b, c – натуральные взаимно простые в совокупности числа,*

$$D_n = НОД\left(a+b+c, a^2+b^2+c^2, a^n+b^n+c^n\right).$$

а) Докажите, что при любом n, не делящемся на 3, число D_n может быть сколь угодно велико.

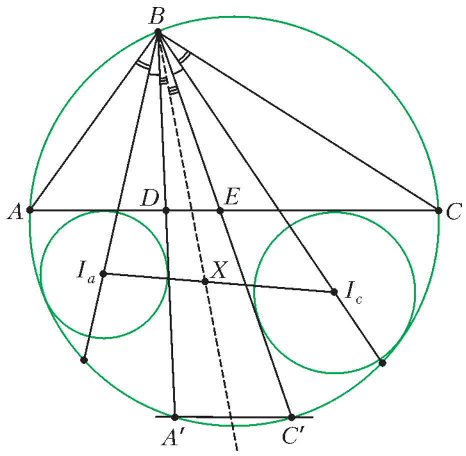
б) Найдите все возможные значения D_n при каждом n, делящемся на 3.

а) Положим $a = 1$, $b = x$, $c = x^2$, где x – натуральное число. Достаточно доказать, что при $k \neq 3t$ число $x^{2k} + x^k + 1$ делится на $x^2 + x + 1$, или, эквивалентно: $A = \left(x^{2k} + x^k\right) - \left(x^2 + x\right)$ делится на $x^2 + x + 1$.
Если k дает остаток 1 при делении на 3, то имеем $A = x^2\left(x^{2k-2} - 1\right) + x\left(x^{k-1} - 1\right)$ делится на $x^3 - 1$, что в свою очередь делится на $x^2 + x + 1$. Если же k дает остаток 2 при делении на 3, то имеем $A = x\left(x^{2k-1} - 1\right) + x^2\left(x^{k-2} - 1\right)$ делится на $x^3 - 1$.[1]
б) **Ответ**: 1, 2, 3, 6.
Пусть $n = 3t$. Предположим, что D_n делится на простое $p > 3$. Имеем $a \equiv -(b + c)(\operatorname{mod} p)$, поэтому $0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2\left(b^2 + bc + c^2\right)(\operatorname{mod} p)$. Отсюда $b^2 + bc + c^2$ делится на p, и, значит, $b^3 - c^3$ делится на p, т.е. $b^3 \equiv c^3 (\operatorname{mod} p)$. Аналогично рассуждая, имеем $a^3 \equiv c^3 (\operatorname{mod} p)$. Поэтому $0 \equiv a^{3t} + b^{3t} + c^{3t} \equiv 3c^{3t} (\operatorname{mod} p)$. Следовательно, c делится на p, а значит, a и b тоже делятся на p. Противоречие с условием $\text{НОД}(a, b, c) = 1$.
Таким же образом доказываем, что D_n не делится на 9 (повторяя предыдущие рассуждения для $p = 9$, в конце получаем, что a, b и c делятся на 3 – противоречие).
Если D_n четно, то $a + b + c$ четно, значит, среди чисел a, b, c должно быть два нечетных числа и одно четное. Но тогда $a^2 + b^2 + c^2$ имеет остаток 2 при делении на 4. Таким образом, D_n не делится на 4.
С другой стороны, для любого натурального n число D_n может равняться 1, 2, 3, 6. Как легко видеть, при $a = b = 1$, $c = 3$: $D_n = 1$; при $a = b = 1$, $c = 2$: $D_n = 2$; при $a = b = c = 1$: $D_n = 3$; при $a = b = 1$, $c = 4$: $D_n = 6$.

В.Сендеров

М2228*. *Треугольник ABC вписан в окружность (см. рисунок). На дуге AC (не содержащей B) взяты точки A' и C' так, что $AC \parallel A'C'$. Отрезки BA' и BC' пересекают отрезок AC в точках D и E соответственно. Окружности ω_a и ω_c вписаны в криволинейные треугольники ADA' и CEC' соответственно. Докажите, что точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_a и ω_c лежит на биссектрисе угла ABC.*

Рассмотрим преобразование h, равное композиции (т.е. последовательному применению) инверсии с центром B радиусом $\sqrt{BA \cdot BC}$ и симметрии относительно биссектрисы угла ABC. Заметим, что $h(A) = C$, $h(C) = A$, h переводит прямую AC в окружность ABC и, наоборот, h переводит прямую BA' в BC' (так как $\angle ABA' = \angle CBC'$). Отсюда следует, что $h(\omega_a) = \omega_c$.



Таким образом, ω_a и ω_c видны из точки B под равными углами, а биссектриса угла I_aBI_c (I_a и I_c – центры окружностей ω_a и ω_c) совпадает с биссектрисой угла ABC. Остается воспользоваться следующим утверждением.
Утверждение. *Пусть окружности ω_a и ω_c с центрами I_a и I_c видны под равными углами из точки B. Тогда точки пересечения двух внутренних и двух внешних общих касательных к ω_a и ω_c лежат на биссектрисах (внутренней и внешней) угла I_aBI_c.*
Доказательство. Пусть I_aI_c пересекает биссектрису угла I_aBI_c в точке X. Из условия $BI_a/BI_c = r_a/r_c$ (r_a и r_c – радиусы окружностей), а по свойству биссектрисы $BI_a/BI_c = XI_a/XI_c$, отсюда $XI_a/XI_c = r_a/r_c$, значит, X – центр гомотетии (с положительным или отрицательным коэффициентом) окружностей ω_a и ω_c, т.е. точка пересечения общих (внешних или внутренних) касательных.[2]

П.Кожевников

Ф2228. *На гладкой безграничной горизонтальной поверхности нарисован квадрат с длиной ребра 2a. Ребра квадрата ориентированы в направлениях север-юг и восток-запад. В углы квадрата вертикально вбиты четыре тонких гвоздя, которые выступают над поверхностью. К юго-восточному гвоздю с координатами относительно центра квадрата (–1a на север; +1a на восток) прикреплена тонкая невесомая нерастяжимая нить длиной 100a, которая выдерживает максимальную силу растяжения F. Нить выпрямлена и вытянута в направлении от места крепления на восток. К свободному концу нити прикреплена шайба малых размеров массой M. Шайбе придали толчком скорость v в направлении на север. Какими будут координаты шайбы через время t после толчка? Числовые значения параметров: m = 1 кг, a = 1 см, F = 1,18 Н, t = 20 с, v = 1 м/с. При решении задачи рекомендуется пользоваться компьютером.*

Сначала разберем возможные варианты движения шайбы в общем виде, а затем, подставив численные

[1] *Другое доказательство делимости многочлена $x^{2k} + x^k + 1$ на $x^2 + x + 1$ можно дать с помощью подстановки комплексных значений $\sqrt[3]{1}$.*

[2] *Другое доказательство можно получить, рассмотрев окружность ω_a', симметричную ω_a относительно биссектрисы угла I_aOI_c, и применив к окружностям ω_a, ω_a' и ω_c теорему о трех гомотетиях.*

значения, узнаем, какой из вариантов на самом деле реализовался.

Если величина $mv^2/(100a) > F$, то нить порвется сразу после толчка шайбы и шайба полетит (заскользит) в направлении на север. Тогда ее координаты в момент времени t будут $(vt - a; 1a)$. Это справедливо при условии, что найденные величины координат все-таки много меньше радиуса Земли.

Если указанное неравенство не выполняется, то по мере наматывания нити на гвозди ее сила натяжения растет «скачками» и в некоторый момент может превысить значение F. Иными словами, при выполнении неравенства $mv^2/(2a) > F$ нить порвется в тот момент, когда ее «свободный» участок будет меньше величины mv^2/F. Пусть $mv^2/F = a(100 - 2N + n)$, где $2N$ – целое четное число, меньшее 100, а $0 < n < 2$. Тогда к моменту разрыва нити шайба может проскользить по поверхности путь

$$s = 0{,}5\pi\left(100a + 98a + \ldots + (100 - 2N)a\right).$$

Скольжение происходит с неизменной по величине скоростью v. Если $t < s/v$, то нить к этому моменту еще не порвалась, а если $t > s/v$, то нить уже успела порваться. И так далее...

Понятно, что вариантов для исследования очень много и для сужения круга поиска нужно воспользоваться данными в условии численными значениями величин. Данное в условии значение предельной величины силы $F = 1{,}18$ Н больше величины $mv^2/(100a) = 1$ Н, но $mv^2/(100a - N_{\min} \cdot 2a) > 1{,}18$ Н. Отсюда находим: $N_{\min} = 9$, т.е. при $N = 8$ нить еще не рвется. Следовательно, путь, пройденный шайбой до момента разрыва нити, равен

$$s = 0{,}5\pi(100a + 98a + \ldots + 84a) = 13{,}006 \text{ м}.$$

Оказывается, в течение первых 13 секунд шайба оставалась прикрепленной к нити, а в момент 13,006 с нить порвалась. К этому моменту скорость нити вновь приобрела направление на север, а свободный участок нити укоротился на 16 см. Оставшиеся почти 7 секунд (без 0,006 с) шайба двигалась с постоянной скоростью. Итак, координаты шайбы к моменту времени 20 с после толчка таковы: (699 см на север; 85 см на восток).

С.Дмитриев

Ф2229. *Вокруг Земли летают с выключенными двигателями два спутника. Периоды обращения этих спутников одинаковы и составляют 12 часов. На какое максимальное расстояние могут удаляться друг от друга эти два спутника? Для справки: периоды обращения вокруг Земли всех спутников, летающих на «низких» орбитах, равны примерно 1,5 часа.*

Согласно первому закону Кеплера, спутники Земли в системе отсчета с началом в центре Земли и с осями, направленными на далекие звезды, летают по орбитам, которые имеют форму эллипсов. Центр Земли находится в фокусе (одном из двух) каждого из таких эллипсов. Согласно третьему закону Кеплера, отношения больших осей орбит спутников D_1 и D_2 и их периодов T_1 и T_2 связаны формулой

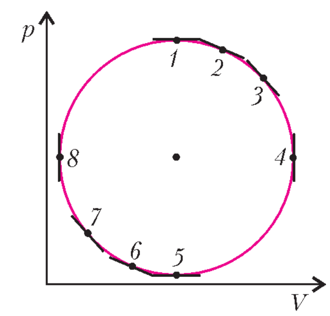
$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2.$$

Низколетающие спутники имеют диаметр орбиты $D_1 \approx 2R_З$ и период $T_1 = 1{,}5$ ч. Следовательно, большие оси эллипсов, по которым спутники летают с периодом $T_2 = 12$ ч (в 8 раз больше, чем 1,5 ч), равны $D_2 \approx 8R_З$. Каждый из спутников может удаляться от центра Земли на максимальное расстояние, приблизительно равное $7R_З$. Максимальное расстояние между двумя такими спутниками составляет

$$L_{\max} \approx 14R_З \approx 89{,}6 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

А.Полетаев

Ф2230. *Фиксированная масса идеального газа участвовала в процессе, который в координатах p–V выглядит почти окружностью (см. рисунок). В точках 1 и 5 этой почти окружности касаются изобары, в точках 2 и 6 – изотермы, в точках 3 и 7 – адиабаты и в точках 4 и 8 – изохоры. На разных участках цикла газ обменивался теплом с окружающей средой. Известны абсолютные величины количеств теплоты:* $Q_{12} = 7$ *Дж*, $Q_{23} = 2$ *Дж*, $Q_{34} = 4$ *Дж*, $Q_{45} = 11$ *Дж*, $Q_{56} = 5$ *Дж*, $Q_{67} = 1$ *Дж*, $Q_{78} = 3$ *Дж и* $Q_{81} = 12$ *Дж. Найдите КПД цикла.*



Именно точки *3* и *7* касания адиабат являются точками, разделяющими цикл на два участка, на одном из которых газ только получал, а на другом – только отдавал тепло. Стало быть, КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{34} + Q_{45} + Q_{56} + Q_{67}}{Q_{78} + Q_{81} + Q_{12} + Q_{23}} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%.$$

С.Крюков

Ф2231. *В тройной точке воды при температуре 273,16 К и давлении водяных паров 610 Па жидкая, твердая и газообразная фазы воды находятся в состоянии термодинамического равновесия. Молекулы газообразной фазы бьются о поверхность конденсированного вещества и создают одинаковые давления и на поверхность льда, и на поверхность воды. Оцените отношение «коэффициентов прилипания» молекул к плоским поверхностям конденсированного твердого и конденсированного жидкого веществ при ударе о них молекул, находящихся в газовой фазе при этой температуре (или, что то же самое, оцените отношение скоростей испарения жидкой воды и твердого льда при температуре ≈ 273 К, если над ними вакуум).*

Молярная теплота плавления льда вблизи температуры 273 К составляет примерно 6 кДж/моль, а молярная теплота парообразования из твердого льда равна

51 кДж/моль. Соответственно, молярная теплота парообразования из жидкой воды при этой же температуре равна 45 кДж/моль. Пусть с единицы поверхности воды в твердом и жидком состоянии в единицу времени в вакуум уходят количества молекул $n_т$ и $n_ж$ соответственно. Каждая испарившаяся с поверхности молекула «собрала» при случайных ударах с соседними молекулами кинетическую энергию поступательного движения, которая позволила ей преодолеть потенциальный барьер и «оторваться» от соседок. Эта энергия во много раз больше средней кинетической энергии хаотического теплового поступательного движения молекул в направлении «ухода», т.е. перпендикулярно границе раздела конденсированной и газообразной фаз вещества, равной $RT/2 \approx 1{,}1$ кДж/моль. Согласно закону Больцмана, вероятности «ухода» молекул с поверхностей одной и другой фаз конденсированного вещества относятся как

$$\frac{n_ж}{n_т} = e^{\frac{\Delta E}{RT}} = e^{\frac{6\ кДж}{8{,}31 \cdot 273\ Дж}} = 14\ ,$$

т.е. с поверхности жидкой воды молекулы уходят в пар в 14 раз чаще, чем с поверхности льда. Это означает, что вероятность прилипания к жидкой поверхности для молекулы, ударившейся об эту поверхность, больше, чем при ударе о твердую поверхность при той же температуре.

Попробуем «на пальцах» объяснить причины столь большой разницы. Удар молекулы о поверхность конденсированного вещества соответствует ее взаимодействию не с одной молекулой, а с целым коллективом молекул. Масса этого коллектива гораздо больше массы одной молекулы, поэтому она с большой вероятностью отскакивает от поверхности. Если рассматривать модель абсолютно упругого лобового удара движущейся легкой частицы массой m с покоящейся тяжелой частицей массой M, то потеря энергии после отскока составит определенную часть от первоначально имевшейся энергии, а именно

$$\frac{\Delta W}{W_0} = 4\frac{Mm}{(M+m)^2} \approx 4\frac{m}{M}\ .$$

Чем больше масса коллектива молекул, с которым при ударе о поверхность взаимодействует молекула, тем меньше энергии она теряет.

Скорости звука в жидкой воде и в толще льда отличаются: 1,5 км/с для воды и 4 км/с для льда. Это означает, что за одинаковое (примерно) время взаимодействия молекулы с поверхностью конденсированного вещества звуковые волны во льду захватывают объем вещества примерно в $(4/1{,}5)^3 \approx 19$ раз больший, чем в жидкой воде, т.е. средняя масса «ледяного коллектива» значительно больше средней массы «водного коллектива». Это обстоятельство и объясняет такую большую разницу вероятностей прилипания молекул.

С.Тройнов

Ф2232. *Средний срок службы ламп накаливания (с номиналами 100 Вт, 220 В) и люминесцентных ламп с одинаковой производительностью по свету примерно один и тот же – около 2000 часов. Эффективность ламп накаливания в 5 раз меньше, чем люминесцентных. Стоимости этих ламп отличаются в 15 раз: 10 руб. и 150 руб. за штуку (люминесцентные дороже). При какой стоимости 1 кВт · ч электроэнергии выгодно покупать и использовать более дорогие лампы?*

Выгодно покупать и использовать люминесцентные лампы только при выполнении следующего неравенства:

$$150\ руб. + 0{,}1\ кВт \cdot 2000\ ч \cdot x\left(руб/(кВт \cdot ч)\right)/5 <$$
$$< 10\ руб. + 0{,}1\ кВт \cdot 2000\ ч \cdot x\left(руб/(кВт \cdot ч)\right),$$

где x – это цена одного киловатт-часа электроэнергии. Отсюда находим

$$x > 0{,}875\ руб/(кВт \cdot ч)\ .$$

С.Варламов

Ф2233. *Каждый сорт стекла характеризуется показателем преломления n_0 в середине оптического диапазона при длине волны $\lambda_0 = 0{,}55$ мкм и коэффициентом дисперсии β, который показывает, на сколько отличается показатель преломления данного сорта стекла при заданной длине волны λ от его значения при λ_0: $n_\lambda = n_0 + \beta(\lambda - \lambda_0)$. Имеются два сорта прозрачного стекла с характеристиками $n_{01} \ne n_{02}$ и $\beta_1 \ne \beta_2$. Нужно изготовить линзы для очков, у которых отсутствовала бы хроматическая аберрация, т.е. оптическая сила не зависела бы от длины волны и равнялась α диоптриям. Причем со стороны, обращенной к глазу, линза очков должна быть вогнутой с радиусом кривизны R_0, который выбирается примерно равным расстоянию от этой вогнутой поверхности (когда очки используются по назначению) до точки, вокруг которой глаз вращается.*

Естественно предложить комбинацию из двух тонких линз, сделанных из разных сортов стекол, склеенных между собой прозрачным клеем. При таком решении нужно подобрать радиусы кривизны этих двух линз, чтобы одновременно выполнялись такие два условия:

$$(n_{01}-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+(n_{02}-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_0}\right)=\alpha\ ,$$

$$\beta_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\beta_2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_0}\right)=0\ .$$

В.Стеклов

Ф2234. *Пучок быстрых (но нерелятивистских) нейтронов пересекает пучок медленно движущихся атомов водорода. При какой минимальной энергии нейтронов атомы водорода могут быть ионизованы? Столкновения протонов и нейтронов считайте абсолютно упругими.*

До удара атом водорода находился в основном состоянии, поэтому выполнялось такое условие: кинетическая энергия движения электрона $p^2/(2m_e)$ была равна его энергии ионизации, т.е. 13,6 эВ, где p – величина импульса электрона, а m_e – масса электрона. При этом потенциальная энергия электрического взаимодействия в атоме была равна −27,2 эВ. После лобовых столкновений нейтрона и протона они обмениваются скоростями, так как их массы m_n и m_p близки друг к другу. Скорость v движения нейтрона при скоростях, значительно меньших скорости света, связана с его кинетической энергией $E_к$ соотношением $v = \sqrt{(2E_к/m_n)}$. Если время удара нейтрона и протона можно считать малым, то, в соответствии с законами микромира, неопределенность импульса электрона, находящегося возле протона в области размерам радиуса атома $r \sim 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м, составит величину $\Delta p = p = \hbar/r$, где $\hbar$ – постоянная Планка. Классически это можно интерпретировать так: в момент удара скорость электрона, равная по величине p/m_e, могла быть направлена произвольным образом по отношению к вектору $\vec{v}$. Другими словами, относительно новой системы отсчета, которую можно связать с пришедшим в движение протоном, «его» электрон имеет скорость в диапазоне величин $v \pm \Delta p/m$ и находится на расстоянии r от протона. Чтобы произошла ионизация, кинетической энергии электрона должно хватить, чтобы улететь от протона далеко и не вернуться, т.е. его кинетическая энергия в новой системе отсчета должна стать как минимум вдвое больше, а именно 27,2 эВ. При самых благоприятных (вероятных) обстоятельствах скорость электрона равна $v + p/m_e$, тогда его кинетическая энергия будет в два раза больше, если выполнено условие $v = \left(\sqrt{2} - 1\right) p/m_e$. Отсюда находим минимальную энергию нейтронов:

$$E_к = \frac{m_n v^2}{2} = \frac{13{,}6 \text{ эВ} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 m_n}{m_e} \approx 4{,}3 \text{ кэВ}.$$

А.Томов