LII Международная математическая олимпиада

LII Международная математическая олимпиада прошла с 13 по 24 июля 2011 года в столице Нидерландов городе Амстердаме. Она запомнилась участникам великолепной организацией, интересными экскурсиями, яркими и необычными церемониями открытия и закрытия и, конечно, трудными и интересными задачами. Олимпиада стала одной из самых представительных в истории ММО: в ней приняли участие более 550 участников из более 100 стран мира.

В команду России вошли четверо выпускников: *Ольга Бурова* из Москвы (лицей «Вторая школа»), *Дмитрий Егоров* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239), *Алексей Пахарев* из Ульяновска (СУНЦ МГУ), *Александр Циглер* из Магнитогорска (школа 5), десятиклассник *Михаил Григорьев* из Казани (лицей 131) и девятиклассник *Дмитрий Крачун* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239). Состав команды был достаточно ровный, что и подтвердили результаты олимпиады. Наша сборная завоевала 2 золотых и 4 серебряных медали и традиционно вошла в число лучших команд мира.

Как и в прошлом году, подготовка команды России к ММО завершалась на летних учебно-тренировочных сборах, проходивших с 19 июня по 12 июля в детском лагере «КОМПЬЮТЕРиЯ» (Тверская область). Пользуясь случаем, выражаем благодарность руководству лагеря и персонально *А.А.Андрееву* за обеспечение наиболее благоприятных условий для организации сборов. Большой вклад в успешное выступление команды внесли преподаватели сборов: аспирант Института системного анализа к.ф.-м.н. *А.В. Акопян*, педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга к.ф.-м.н. *С.Л. Берлов*, младший научный сотрудник, преподаватель МГУ и МФТИ к.ф.-м.н. *А.И. Гарбер*, сотрудник университета Браунсвилль к.ф.-м.н. *А.А.Глазырин*, педагог дополнительного образования Санкт-Петербурга *А.С. Голованов*, профессор Ярославского государственного университета д.ф.-м.н. *В.Л. Дольников*, аспирант Ярославского государственного университета *Г.Р.Челноков*.

Публикуем результаты выступления команды России (каждая задача оценивалась из 7 баллов). Подробную информацию о результатах на международных математических олимпиадах можно найти на официальном сайте олимпиады www.imo-official.com.

Команда России на LII Международной математической олимпиаде. Слева направо: М.Григорьев, О.Бурова, А.Циглер, А.Пахарев, Д.Крачун. Д.Егоров не принял участие в торжественном закрытии – ему пришлось уехать раньше, чтобы участвовать в Международной олимпиаде по информатике

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Бурова Ольга	7	1	2	7	7	1	25	серебряная
Егоров Дмитрий	7	4	1	7	7	0	26	серебряная
Григорьев Михаил	7	1	7	7	7	1	30	золотая
Крачун Дмитрий	7	1	3	7	7	1	26	серебряная

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Пахарев Алексей	7	1	7	5	7	1	28	золотая
Циглер Александр	7	2	3	7	7	0	26	серебряная

Руководители команды благодарны *Д.Ю.Дойхену*, много лет оказывающему содействие в подготовке и участии команды России в международных математических соревнованиях.

Задачи олимпиады

1. Для множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, состоящего из четырех попарно различных целых положительных чисел, обозначим через s_A сумму $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Через n_A обозначим количество пар индексов (i, j), $1 \le i < j \le 4$, для которых s_A делится на $a_i + a_j$. Найдите все множества A, состоящие из четырех попарно различных целых положительных чисел, для которых n_A принимает наибольшее возможное значение.

Мексика

2. См. задачу М2245,а «Задачника «Кванта».

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что $f(x+y) \le yf(x) + f(f(x))$ для всех действительных x и y. Докажите, что $f(x) = 0$ для всех $x \le 0$.

Белоруссия

4. Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и n гирь, веса которых равны $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Все n гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, т.е. на каждом из n шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

Иран

5. Пусть f – функция, определенная на множестве целых чисел, принимающая целые положительные значения. Известно, что для любых целых m и n разность $f(m) - f(n)$ делится на $f(m-n)$. Докажите, что для любых целых m и n таких, что $f(m) \le f(n)$, число $f(n)$ делится на $f(m)$.

Иран

6. Пусть ABC – остроугольный треугольник, и Γ – описанная около него окружность. Пусть прямая l – некоторая касательная к окружности Γ, и пусть l_a, l_b и l_c – прямые, симметричные прямой l относительно прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми l_a, l_b и l_c, касается окружности Γ.

Япония

Публикацию подготовили руководители команды России на LII ММО Н.Агаханов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Терёшин