«Исправленный» закон Кулона

С.ВАРЛАМОВ

Как известно, в формулировке закона Кулона присутствует оговорка: размеры заряженных тел должны быть значительно меньше расстояния между телами, чтобы тела можно было считать точечными. А как изменится вид зависимости силы взаимодействия двух заряженных тел, если учесть их неточечность, т.е. принять во внимание их объемность?

Рассмотрим взаимодействие двух проводящих тел с объемами V_1 и V_2, на которых имеются электрические заряды Q и q соответственно и расстояние r между которыми гораздо больше чем $V_1^{1/3}$ и $V_2^{1/3}$. Так как расстояние r большое, можно считать, что каждое из тел с отличным от нуля объемом находится в поле, созданном другим заряженным телом, расположенным достаточно далеко. Иными словами, в первом приближении внешнее поле для каждого объемного тела можно рассматривать как поле, созданное находящимся далеко точечным зарядом.

В соответствии с принципом суперпозиции, сначала можно найти силы взаимодействия в случаях, когда одно тело заряжено, а другое нет, а затем добавить силу кулоновского взаимодействия заряженных точек в случае, когда заряды этих тел не равны нулю. В результате получится хорошее приближение к истине. Ожидаемая зависимость должна представляться в виде суммы (суперпозиции) нескольких слагаемых:

$$F(r, Q, q, V_1, V_2) = \frac{kqQ}{r^2} + F_1(r, Q, V_2) + F_2(r, q, V_1) + \ldots$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, величины которых значительно меньше, чем величины тех слагаемых, которые выписаны символами. Первое слагаемое – это закон Кулона для двух точечных зарядов, остальные слагаемые – «поправки» к этому закону; k – коэффициент, учитывающий выбранную систему единиц.

Поскольку тела проводящие, заряды на их поверхностях будут располагаться так, что напряженность электрического поля внутри этих тел будет равна нулю. При этом распределения зарядов на поверхностях тоже подчиняются принципу суперпозиции. Чтобы найти выражение для $F_1(r, Q, V_2)$, второе незаряженное тело мысленно разрежем на множество пластинок, плоскости которых перпендикулярны линии, соединяющей центры двух тел, вычислим силу, действующую только на одну уединенную пластинку, а затем снова мысленно соберем все пластинки вместе и сложим результаты действия точечного заряда Q на все множество пластинок.

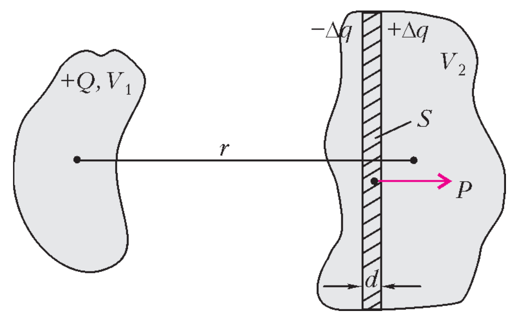
Одна незаряженная пластинка толщиной d и площадью S (см. рисунок) приобрела дипольный момент $P = \Delta q d$, направленный вдоль линии, соединяющей точечный заряд (первое тело) со вторым телом, и равный по величине

$$P = \frac{QS}{4\pi r^2} d = \frac{E_1 S d}{4\pi k}.$$

Видно, что этот дипольный момент пропорционален объему пластинки Sd. Суммарный дипольный момент всех пластинок, на которые мы мысленно разрезали второе тело, равен

$$P_2 = \frac{QV_2}{4\pi r^2} = \frac{E_1 V_2}{4\pi k}.$$

В поле первого точечного заряда с напряженностью $E_1 = \frac{kQ}{r^2}$



этот дипольный момент имеет потенциальную энергию

$$W_1 = -P_2 E_1 = -\frac{V_2}{4\pi k}\left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2.$$

Соответствующая сила притяжения равна

$$F_1 = -\frac{\Delta W_1}{\Delta r} = \frac{V_2 k Q^2}{\pi r^5}.$$

Аналогичное выражение получим для силы, которую испытывает первое тело из-за того, что на нем перераспределяются заряды и это связано с наличием внешнего поля, созданного вторым телом:

$$F_2 = \frac{V_1 k q^2}{\pi r^5}.$$

Если считать, что дипольный момент на одном теле создает в месте расположения другого тела электрическое поле, в котором находится дипольный момент другого тела, то возникает дополнительная энергия взаимодействия:

$$W_{21} = \frac{2kP_1P_2}{r^3} = \frac{2kQqV_1V_2}{(4\pi)^2 r^7}$$

и соответствующая этой дополнительной энергии сила отталкивания:

$$F_{21} = -\frac{\Delta W_{21}}{\Delta r} = \frac{14kQqV_1V_2}{(4\pi)^2 r^8}.$$

Понятно, что эта дополнительная сила уже пренебрежимо мала, так как зависит от расстояния как $1/r^8$.

Итак, получаем

$$F(r, Q, q, V_1, V_2) = \frac{kQq}{r^2} - \frac{kQ^2V_2}{\pi r^5} - \frac{kq^2V_1}{\pi r^5} + \frac{7kQqV_1V_2}{8\pi^2 r^8} + \ldots$$

Какого порядка малости слагаемые мы обозначили здесь многоточием? Учтем, что каждое тело находится в поле, которое создано неточечным зарядом, и что заряды на телах перераспределяются. Созданный на втором теле дипольный момент P_2 создает в месте расположения первого тела электрическое поле напряженностью

$$E_{21} = \frac{2kP_2}{r^3} \approx \frac{2kQV_2}{4\pi r^5}.$$

Это поле, с учетом объемности первого тела, создаст в этом первом теле дипольный момент, который по величине пропорционален полю:

$$P_{21} = \frac{V_1}{4\pi k}\frac{2kQV_2}{4\pi r^5}.$$

Возникнет дополнительная потенциальная энергия:

$$W_{21\,\text{доп}} = -P_{21}E_{21} = -\frac{V_1}{4\pi k}E_{21}^2 = -\frac{kQ^2V_1V_2^2}{16\pi^3 r^{10}}$$

и дополнительная сила взаимодействия (притяжения):

$$F_{21\,доп} = -\frac{\Delta W_{21\,доп}}{\Delta r} = \frac{5kQ^2V_1V_2^2}{8\pi^3 r^{11}}.$$

И, аналогично, для обратного влияния:

$$F_{12\,доп} = \frac{5kq^2V_2V_1^2}{8\pi^3 r^{11}}.$$

Таким образом, слагаемые обозначенные многоточием, зависят от расстояния как $1/r^{11}$. Ими, естественно, можно пренебречь.

Если в формуле для силы взаимодействия двух неточечных проводящих заряженных тел последнее слагаемое, пропорциональное $1/r^8$, ввиду его малости не учитывать, то получается «уточненный» закон Кулона при условии, что расстояние r между телами гораздо больше чем $V_1^{1/3}$ и $V_2^{1/3}$:

$$F(r, Q, q, V_1, V_2) \approx \frac{kQq}{r^2} - \frac{kQ^2V_2}{\pi r^5} - \frac{kq^2V_1}{\pi r^5}.$$

Пусть заряды тел имеют одинаковые знаки. Зафиксируем все параметры за исключением только одного – заряда Q. Тогда получается, что зависимость силы взаимодействия от величины этого заряда выглядит весьма необычно: при малых величинах заряда Q сила взаимодействия соответствует притяжению тел, при больших Q тела тоже притягиваются, и только в некотором диапазоне значений Q тела отталкиваются. В частности, если на телах заряды одинаковые, т.е. $Q = q$, то тела обязательно отталкиваются.

В заключение – задача для самостоятельного решения.

Задача. Два одинаковых проводящих шара находятся в вакууме на некотором расстоянии друг от друга. На них имеются электрические заряды Q и q $(Q > q)$, и сила электростатического взаимодействия шаров равна нулю. Какой дополнительный заряд Δq можно поместить на шар с меньшим начальным зарядом, чтобы и в этом случае сила взаимодействия шаров была равна нулю?

(Ответ: $\Delta q = \dfrac{Q^2}{q} - q$.)