Приятного аппетита!

И.АКУЛИЧ

– Отправимтесь-ка все, так как есть, к полицеймейстеру; он у нас чудотворец: ему стоит только мигнуть, проходя мимо рыбного ряда или погреба, так мы, знаете ли, так закусим!

Н.В.Гоголь. Мертвые души. Глава 7

Среди множества народных сказок некоторые вызывают особый интерес своим несомненным математическим содержанием. К таковым можно отнести русскую сказку «Как мужик курицу делил»[1].

Сюжет ее таков. Бедный мужик решил поздравить помещика с праздником. Он зажарил единственную имевшуюся у него курицу и доставил как раз к обеду. А у помещика, надо сказать, семья была не маленькая: он сам, да жена, да два сына, да две дочери.

– Спасибо за угощение! – сказал помещик. – Садись с нами за стол. И подели-ка свое угощение между всеми, а то, кажется, маловато выходит.

– С удовольствием! – ответил мужик. – Ты, барин, в доме голова – так вот тебе голову. С другой стороны, жена твоя – это шея: куда повернется, туда голова и

[1] *Это собирательное название сказки; в различных сборниках она озаглавлена по-разному.*

смотрит. Поэтому ей мы отдаем шею.[2] Сыновьям твоим, как вырастут, предстоит много дорог пройти, изрядно ноги истоптать, поэтому им даем по ноге. Дочери твои скоро замуж выйдут и улетят из родного дома, так что им – по крылышку. Ну, а мне, мужику, то, что осталось – туловище.

Такая математика помещику весьма понравилась, и он щедро заплатил мужику.

Однако на том история не закончилась. Узнал обо всем этом другой мужик – богатый – и принес помещику аж пять жареных кур, рассчитывая получить пропорционально большее вознаграждение. Но тот его огорошил, потребовав:

– Раздели-ка ты этих кур между нами, чтобы всем досталось *поровну*.

Богатый мужик оторопел: как поделить 5 кур на 6 человек (или даже на 7, если учесть его самого)? Пришлось вновь обращаться к бедному мужику, который за словом в карман не полез:

– Тебе, барин, с женой даем на двоих одну курицу – и вас стало трое. Твоим сыновьям тоже одну курицу – вот и их трое. И дочерям одну курицу – опять получается трое. Ну а мне, мужику, две курицы – и нас трое! Всем поровну!

В результате он славно подзакусил (и получил в придачу от помещика еще одну денежную премию за остроумие и сообразительность).

Вот такая математическая сказка. Что, скажете, не вполне математическая? Пожалуй. Тогда давайте перенесемся несколько южнее и западней, взяв в руки сборник сказок классика молдавской и румынской литературы Иона Крянгэ (1837–1889). До чего ж они хороши! А персонажи-то каковы: отважный Фэт Фрумос, неунывающий Иван Турбинка, злобный песиголовец[3] и другие, не менее колоритные, не дают читателю заскучать ни на минуту.

Но не только волшебными приключениями интересны сочинения замечательного писателя. Не чурался он и бытовых сказок, среди которых мы и встречаем одну очень даже математическую.

Итак, шли куда-то два путника. У одного в котомке было два хлеба, у другого – три. Когда они собрались пообедать, к ним присоединился третий, не имевший ничего. Когда они втроем съели весь хлеб, поделив его поровну, третий дал первым двоим пять монет в уплату за угощение. Те заспорили, как поделить деньги по справедливости. Первый требовал делить пополам – по две с половиной, а второй – соответственно имевшемуся изначально количеству хлебов, т.е. 2 и 3. Кто прав?[4]

Давно известно, что при дележе денег правых не бывает. Точнее, каждый считает, что прав только он сам, ибо понятие о справедливости у каждого свое. На первый взгляд, конечно, представляется, что дележ первого (поровну) абсурден. Хотя он мог вполне разумно обосновать свое мнение. Например, так: «Представь себе, что наш гость *вообще ничего* нам не заплатил. Тогда бы мы получили по круглому нулю, т.е., несомненно, поровну. Почему же сейчас мы должны делить не поровну?»

Звучит убедительно. Но на языке шулеров такое рассуждение – типичное *передергивание*, а на математическом языке – явная подмена прямой теоремы обратной. Посмотрите, что получается. Пусть x – общее число полученных монет, а $f(x)$ и $g(x)$ – число монет, полученное первым и вторым путником соответственно (они записаны в виде функций, поскольку, безусловно, зависят от x). Тогда аргументы первого можно изложить так: если $f(0)=g(0)$, то $f(x) = g(x)$ для *любого* x. Но это неверно, хотя обратная теорема, несомненно, верна. Вот и все. Ну, а дележ второго выглядит безупречно, и большинство людей считают его абсолютно правильным.

Но *и это не так*, в чем мы убеждаемся, читая сказку дальше. Повздорив, путники пришли в город, где обратились к судье, и тот, рассмотрев ситуацию, объявил, что первому причитается лишь одна монета, зато второму – остальные четыре! Он рассуждал так. Всего было 5 хлебов, поэтому каждый съел $\frac{5}{3}$ хлеба. Значит, первый из двух своих хлебов $\frac{5}{3}$ съел сам, а третьему оставил только $2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$ хлеба. Второй же выделил ему $3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$ хлеба, т.е. вчетверо больше первого, потому-то ему и причитаются 4 монеты против одной, полагающейся первому.

Вот как первого погубила жадность. Хотел урвать полмонеты – и потерял целую! Похоже, после этого он наверняка до конца дней возненавидел судебные власти. И, конечно, весьма удивительно, что вполне разумный дележ второго тоже оказался ошибочным. Но не надо совсем списывать его со счетов – он был бы пригоден при несколько ином повороте сюжета: если третий путник окажется настолько голоден и проворен, что проглотит все пять хлебов еще до того, как первые двое успеют открыть рот! Тогда, по сути, речь пойдет просто о продаже ему всех запасов хлеба.

Тут и сказке конец. Однако не исключено, что читатели встречали подобный сюжет где-нибудь еще. Например, в «Живой математике», принадлежащей перу известного популяризатора естественных наук Якова Исидоровича Перельмана (1882–1942), описывается случай с жильцами коммунальной квартиры Тройкиной, бросившей в общую печь 3 полена, Пятеркиной, бросившей 5 поленьев, и их соседом Бестопливным, пользовавшимся их огнем и заплатившим за это 8 рублей. Оказывается, и здесь хозяйка трех поленьев получает лишь один рубль!

---

[2] *В некоторых вариантах сказки мужик говорил чуть поиному: «Жена твоя хозяйка-хлопотунья, должна все время по дому вертеться, так что ей – гузку!» С питательной точки зрения мало чем от шеи отличается.*

[3] *Жуткое существо, похожее на человека с собачьей головой. Упаси Бог такое встретить!*

[4] *Вечный вопрос! Правда, чаще он формулируется в альтернативном виде: «Кто виноват?»*

Обратим внимание: как-то очень удачно у них все делится – все время нацело! А будь у этих путников (жильцов) другое количество хлебов (поленьев) – не придется ли им рубить монеты на части?

Давайте выясним. Пусть у первого и второго путников было m и n хлебов соответственно. Тогда каждый из троих съел $\frac{m+n}{3}$ хлебов, поэтому первый дал третьему $m-\frac{m+n}{3}=\frac{2m-n}{3}$ хлебов, а второй дал $n-\frac{m+n}{3}=\frac{2n-m}{3}$ хлебов. Поэтому общую сумму $(m + n)$ монет они должны разделить в пропорции $\frac{2m-n}{3}:\frac{2n-m}{3}$, или, отбросив тройки в знаменателях, в пропорции $(2m-n):(2n-m)$. Сколько же достанется каждому? Это даже считать не надо! Так как $(2m-n)+(2n-m) = m+n$, т.е. как раз соответствует общему числу монет, то первый и второй именно столько и получат: $(2m-n)$ и $(2n-m)$ монет соответственно. Видите – заведомо целые числа! Значит, имеем удивительный результат: сколько бы хлебов у путников ни было, они всегда получат по *целому* числу монет. И кстати, непременно должны выполняться неравенства $n \le 2m$ и $m \le 2n$, иначе кому-то из путников достанется *отрицательная* сумма денег.

Первый вопрос читателю: как объяснить эту отрицательную сумму с «практической» точки зрения?

Как видно, для большинства m и n справедливый дележ отличается от «естественной» пропорции $m:n$ (и совпадает с ним в единственном случае: когда $m = n$). При этом наиболее эффектно он выглядит, если тому, кто имел меньше хлебов, достанется одна-единственная монета. Интересно, каковы должны быть для этого m и n?

Разберемся. Пусть для определенности $m \le n$, тогда должно выполняться равенство $2m-n=1$, т.е. m – любое натуральное, а $n=2m-1$. Например, если $m = 1$, то $n = 1$, а если взять уже известные нам $m = 2$ и $m = 3$, то получим, соответственно, $n = 3$ и $n = 5$. Вот уже есть три подходящих пары (m, n): $(1, 1)$, $(2, 3)$ и $(3, 5)$.

Но ведь это… соседние числа Фибоначчи[5]! Вот уж сюрприз так сюрприз. Как же так, при чем здесь Фибоначчи? Ведь последовательность Фибоначчи, как известно, такова: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 и так далее, где каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих: $u_k = u_{k-1}+u_{k-2}$. Неужели и для других соседних чисел Фибоначчи будет то же самое? Попробуем-ка другую пару чисел: $m = 5$, $n = 8$. Получается $2m-n=2\ne 1$. Аж легче на душе стало – все-таки, похоже, имели место случайные совпадения.

Но и в таком случае возникает задача о том, какие *соседние* числа Фибоначчи способны наградить первого путника ровно одной монетой – только ли те три пары, что мы нашли, или какие-то еще? Для ответа на этот вопрос используем упомянутое нами главное свойство чисел Фибоначчи: $u_k = u_{k-1}+u_{k-2}$. Пусть пара чисел (u_k, u_{k+1}) удовлетворяет нашему условию, т.е. $2u_k-u_{k+1}=1$. Но

$$2u_k-u_{k+1}=2u_k-(u_k+u_{k-1})=u_k-u_{k-1}=u_{k-2}.$$

Итак, должно быть $u_{k-2}=1$, что верно лишь для $k = 3$ и $k = 4$. Это дает два уже известных решения: $(2, 3)$ и $(3, 5)$. А третье решение – $(1, 1)$? Куда оно-то делось?

Второй вопрос читателю: действительно, куда оно делось? Почему мы его не обнаружили вместе с первыми двумя?

Но тема Фибоначчи еще не до конца исчерпана. Почему мы рассматривали только соседние числа Фибоначчи? А если взять *не обязательно* соседние? Что тогда?

Давайте эту ношу переложим на другие плечи. Например, читательские.

Третий вопрос читателю: существуют ли *не соседние* числа Фибоначчи, дающие владельцу меньшего числа хлебов вознаграждение в размере ровно одной монеты?

И еще один штрих. Когда автор этой статьи опрашивал своих приятелей насчет справедливого дележа в исходной задаче-сказке И.Крянгэ, то практически никто не дал правильного ответа, и лишь один человек ответил верно. А помогло ему то, что он является заядлым игроком в… карты, а точнее – в игру под названием «преферанс». Дело в том, что в преферансе каждому игроку отводится специальное поле для записи штрафных очков, именуемое «горой». После игры горы всех игроков суммируются, затем определяется среднее арифметическое их значение, и далее каждый получает прибыль или, наоборот, терпит убыток в зависимости от того, на сколько и в какую сторону отличается его гора от среднего значения. Знакомый картежник сразу уловил, что расчет справедливого дележа денег аналогичен расчету горы, в которой первый игрок имеет 3 очка-хлеба, второй – 2 очка, а третий – 0 очков (только очки не штрафные, а наоборот). Так что пристрастие к азартным играм может иногда оказаться и полезным!

Но хватит о картах – это непедагогично. Лучше посоветовать читателю на досуге проанализировать с математической точки зрения какие-нибудь другие «съедобные» сказки. Например, «Колобок» или «Репку». Приятного аппетита!

И.Акулич

---

[5] *Леонардо Фибоначчи (ок.1175–1250) – итальянский математик. Свои удивительные числа он представил в «Книге абака», вышедшей в свет в 1202 году.*