Числа Стирлинга

20 лет назад, в седьмом номере «Кванта» за 1991 год, в рубрике «Математические сюрпризы» была опубликована статья Дж.Конвея «Один старый факт и несколько новых». Там на числовых примерах было рассказано о двух чудесах, и автор просил доказать, что они всамделишные. Попробуем с ними разобраться.

Начнем издалека, с алгебры. Возрастающими степенями называют следующие многочлены:

$$x^{\overline{1}} = x\,,$$

$$x^{\overline{2}} = x(x+1) = x^2 + x\,,$$

$$x^{\overline{3}} = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x\,,$$

$$x^{\overline{4}} = \left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x\,.$$

Коэффициенты этих многочленов – это и есть числа Стирлинга[1] (рис.1). Коэффициент при k-й степени у

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
6	120	274	225	85	15	1

Рис. 1

n-го многочлена обозначается символом $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Чтобы вычислить пятую возрастающую степень

$$x^{\overline{5}} = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} x^5 + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} x^1,$$

проще всего бесхитростно раскрыть скобки. Но мы поступим хитрее, заодно получим рекуррентные соотношения:

$$x^{\overline{5}} = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x^1\right)(x+4) =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x^5 + \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) x^4 + \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) x^3 +$$

$$+ \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) x^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x^1,$$

таким образом,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 1\,,\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 10\,,$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 35\,,\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 50$$

$$\text{и}\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 24\,.$$

Вообще,

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1\,,\quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!\,,\quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{и}\quad \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \quad \text{при } 1 \le k \le n\,.$$

Теперь – комбинаторика. Количество способов разбить n человек на k хороводов – это в точности число Стирлинга $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ (в хороводе может быть от одного до n человек). Доказать это легко по индукции: база – случай $n = 1$ – совершенно очевидна. А переход тоже несложен: если нужно разбить на k хороводов $n + 1$ человек, то либо первый их них образует отдельный хоровод, и таких способов ровно $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$, либо же надо сначала разбить остальных n человек на k хороводов, а затем поставить первого по правую руку от любого из n уже стоящих в хороводах людей.

Теперь начинаются чудеса Дж.Конвея. Выпишем в ряд бесконечную последовательность единиц и обведем в кружок те, номера которых – треугольные числа: 1, $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, $10 + 5 = 15$, … Это – первая строка рисунка 2. Вторая и последующие строки получаются так: числа записываются только под необведенными числами предыдущей строки, каждое число должно равняться сумме чисел, расположенных непосредственно слева и сверху от него (первое число строки равно просто стоящему над ним числу), в кружок обводятся числа, стоящие наискосок влево-вниз от обведенных чисел предыдущей строки. Обведенные в кружок числа – это числа Стирлинга!

Чтобы объяснить это чудо, введем новые обозначения. Наш рисунок 2 разбивается на бесконечное число «треугольных» частей (на рисунке они отделены друг от друга вертикальными прямыми). Занумеруем их. На рисунке 3 изображен четвертый «треугольник». Число, стоящее в n-м треугольнике на пересечении i-й строки

---

[1] *Точнее, числа Стирлинга первого рода; бывают еще числа Стирлинга второго рода* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ *– это количество разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств.*

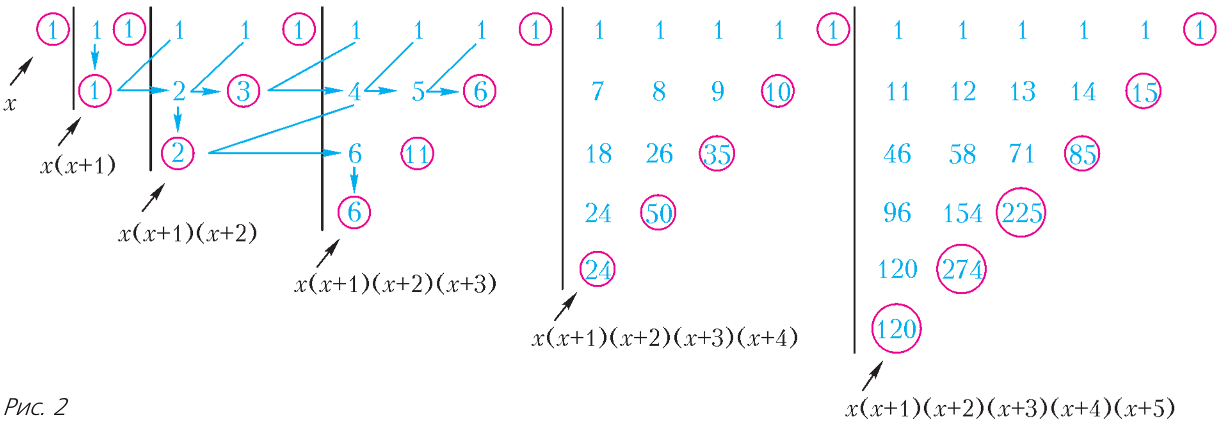

Рис. 2

и j-го столбца, обозначим $\begin{bmatrix} n \\ i,j \end{bmatrix}$ (столбцы треугольника нумеруются слева направо, а строки – снизу вверх). Для удобства обведенные в кружок числа предыдущего треугольника будем считать нулевым столбцом данного. Обозначения, приведенные рядом с четвертым треугольником на рисунке 3, поясняют сказанное. Оче-

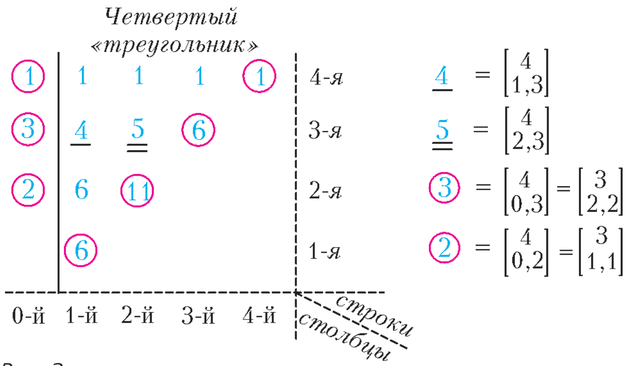

Рис. 3

видно, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k,k \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 0,n \end{bmatrix}$.

Вся таблица – не только обведенные в кружок числа Стирлинга! – удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и сами числа Стирлинга: например,

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2,4 \end{bmatrix} = 58 = 5 \cdot 8 + 18 = 5\begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3,4 \end{bmatrix} = 71 = 5 \cdot 9 + 26 = 5\begin{bmatrix} 5 \\ 3,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2,3 \end{bmatrix};$$

вообще,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m,k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n \\ m,k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ m-1,k-1 \end{bmatrix}.$$

Есть ли у чисел $\begin{bmatrix} n \\ m,k \end{bmatrix}$ комбинаторный смысл – мы не знаем. Может быть, тут нам помогут читатели?

Теперь – второе чудо. Если обвести не единицы с треугольными номерами, а каждое третье число (рис.4), то в нижней строке получим квадраты натуральных чисел! Более того, как и для чисел Стирлинга, ряды

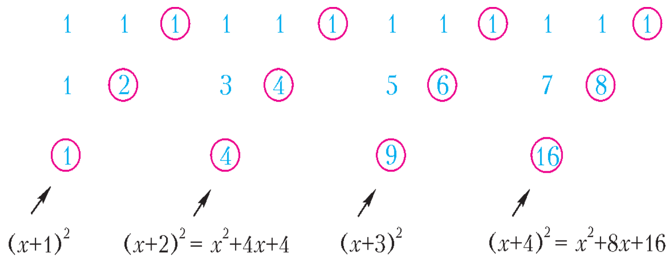

Рис. 4

обведенных кружочками чисел – это коэффициенты многочленов $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+3)^2$, $(x+4)^2$, …

Если обведем каждую четвертую единицу (рис.5), то в нижней строке получим кубы. Соответствующие многочлены – это $(x+1)^3$, $(x+2)^3$, $(x+3)^3$, $(x+4)^3$, …

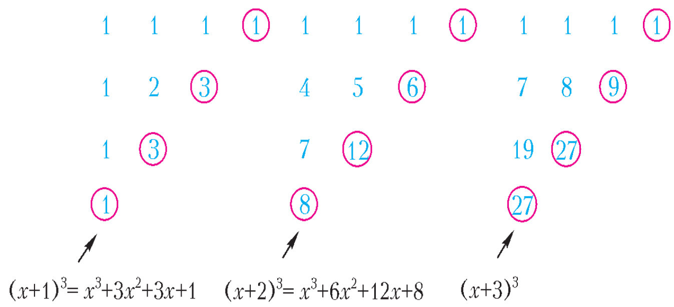

Рис. 5

Аналогичная закономерность верна и при обведении в кружок каждой пятой единицы. Более того, если $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le \ldots$, то при обведении в кружок единиц с номерами n_1, $n_1 + n_2$, $n_1 + n_2 + n_3$, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, … мы получим многочлены, которые замечательным образом разлагаются на множители. Как именно, рассказано в разделе «Ответы, указания, решения» в конце журнала.

А.Волгин (ученик 8 класса), А.Спивак