

По воде и посуху

С. ДОРИЧЕНКО

По течению и против

Андрей, Даня, Миша и Федя собрались после уроков на математический кружок. До начала еще оставалось время, преподавателя в классе не было, но кто-то уже написал на доске несколько задач. Первая была такая.

Задача 1. *Двое ребят одновременно прыгнули с пловущего по реке плота и поплыли в разные стороны: первый – по течению, а второй – против. Через 5 минут они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто вернулся раньше? (Каждый плыл равномерно со своей скоростью.)*

– Интересно, это для нас задача? – спросил Миша.

– Эх, сейчас бы на речку, куда интереснее, чем эти ваши задачи, – ответил Федя. – Да и вообще эта задача неправильная.

– Почему? – спросил Миша.

– Надо было еще сказать, что скорости этих двоих больше скорости течения, – сказал Федя. – Иначе тот, кто против течения прыгнул, не сможет от плота отплыть.

– А вот и нет, – возразил Даня. – Даже если его скорость равна скорости течения, он все равно от плота отплывет.

– Да что ты выдумываешь? – закричал Федя. – Ясно, что он тогда на одном месте будет барахтаться. Со мной так было один раз, плыву по речке изо всех сил против течения, а напротив меня елка растет здоровенная. Так я сколько ни греб, все время напротив этой елки был. Еле на берег потом выбрался. Очень река была быстрая.

– Ну хорошо, ты на одном месте будешь, но плот-то не будет тебя ждать, – заметил Даня. – Плот же не на берегу, как твоя елка, его река унесет.

– Вы меня совсем запутали, – сказал Федя. – Значит, если я даже медленнее течения плыву, я все равно от плота уплыву?

– Конечно. Ведь плот совсем течению не сопротивляется, а ты, хоть и слабо, но гребешь против.

– Ну и как тогда задачу решать?

Ребята молчали, каждый пытался сообразить, но решение не приходило.

– Ой, слушайте, у меня идея, – вдруг сказал Андрей. – Пусть у нас все на озере происходит. Ясно, что тогда оба вернутся одновременно: плот стоит, каждый плывет от него 5 минут и столько же времени возвращается.

– Но у нас-то река, а не озеро, – возразил Даня. – Еще течение добавляется!

– Ну и что? Река одинаково действует на все, что в нее попало – движет вперед со скоростью течения. А это значит, что его как бы и нет.

– Пожалуй, правда. Неужели все так просто?

– Конечно. А в туман, когда берега не видно, ты вообще реку от озера не отличишь!

– Придумал, придумал! – все посмотрели на Федю,

который от волнения даже руками стал размахивать. – Я могу еще понятнее объяснить. У меня папа кинооператор, он боевик снимал, и там был похожий случай. Вот представьте, ехал бы он по берегу все время напротив плота и снимал его на пленку. Что бы мы потом на экране увидели?

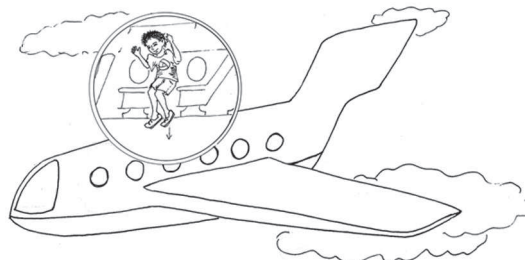
– Ничего особенного, – пожал плечами Даня. – В центре экрана плот стоит, а противоположный берег и деревья едут, как за окном в поезде.

– Нам берег сейчас не интересен, – строго сказал Федя. – Важно, что был бы неподвижный плот, причем на неподвижной воде! С него в разные стороны прыгнули двое. За 5 минут каждый отплыл на свое расстояние и обратно проплывет его за те же 5 минут.

– Да, здорово, – сказал Андрей. – Кажется, это называется «перейти в систему отсчета, связанную с плотом», моему брату на физике рассказывали.

– Не умничай. А про поезд ты удачно вспомнил, как мы сразу не сообразили. – Федя просто сиял от удовольствия. – Река все вперед движет, как будто поезд или самолет. Вот если мы с тобой побежим в разные стороны по коридору летящего самолета и через пару секунд побежим обратно, то встретимся в исходной точке.

– Ага, – согласился Даня. – И если подпрыгнуть в самолете вверх, то приземлишься на то же место, откуда прыгал. Хоть у самолета скорость огромная, он из-под тебя не улетит.



– Это потому, – подхватил Андрей, – что у него относительно земли скорость большая. Но и ты летишь с той же скоростью. Вот для тебя самолет и неподвижен.

– Правда, когда я летел в самолете, – сказал Федя, – меня во время взлета в кресло так и вдавило. Попробовал бы я тогда подпрыгнуть. А если бы в коридоре стоял, так и покатылся бы в хвост.

– Так самолет тогда скорость набирал, двигался с ускорением, – ответил Даня. – Это совсем другое дело. Не зря же во время взлета и посадки там ходить запрещается.

– Теперь понятно, почему в фильмах ковбой не боится бежать по крыше поезда и с вагона на вагон прыгать, – не унимался Федя. – А это все равно, что по неподвижному составу бежать.

– Ну не совсем, – возразил Андрей, – там ведь на тебя встречный воздух давит. Ты когда подпрыгнешь, он тебя сразу тормозить начнет – воздух-то снаружи не движется вместе с поездом. Если поезд очень быстро едет, тебя вообще с крыши может ветром снести. А во времена ковбоев поезда медленно ездил, обычная лошадь могла поезд обогнать.

– Пока вы там спорили про своих ковбоев, я задачу решил алгебраически, с помощью уравнения, – замахал листком бумаги Миша. – Показать?

– Да и так все ясно. Ну ладно, показывай, не зря же ты старался.

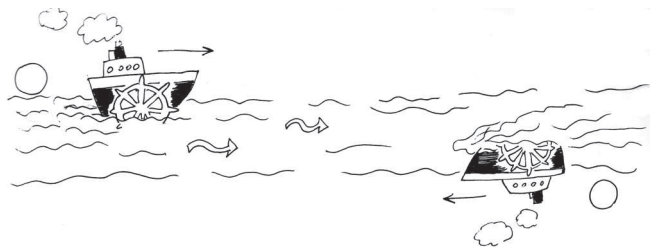
Ребята столпились над Мишиным листком.

– А у меня очень коротко. Пусть v – скорость реки, x – скорость первого, в метрах в минуту. Первый сначала плывет 5 минут по течению со скоростью $x + v$ относительно берега. Удастся он от плота на $5(x + v) - 5v = 5x$ метров. А следующие 5 минут он со скоростью $x - v$ преодолет $5(x - v) = 5x - 5v$ метров и как раз встретит плот, проплывший за эти 5 минут $5v$ метров ему навстречу. Ну и для второго так же проверяется.

– У нас то же самое, только без всяких там x и v .

– Давайте и вторую задачу решим.

Задача 2. Города A и B находятся на реке в 10 км друг от друга. На что у парохода уйдет больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?



– Ну, эта задача еще проще, – сразу заявил Федя. – Когда пароход плывет по течению, ему река помогает. А когда против течения, ему река мешает и всю выгоду от полученной помощи съедает. Значит, одно и то же получается, что от A до B и обратно проплыть, что по озеру.

– Что-то тут не так, – засомневался Андрей. – Представь, что скорость парохода равна скорости течения. Он тогда в тот город, что выше по течению, вообще не сможет доплыть, не поборот течение. А по озеру запросто. Так что, наверное, по озеру всегда быстрее.

– А где у меня ошибка?

– Кажется, я понял. Вот ты говоришь, река помогает, мешает. А что это значит?

– Что же тут неясного?

– Помогает – значит каждую секунду еще на сколько-то вперед поддвигает, а мешает – каждую секунду на столько же обратно отодвигает, по сравнению с озером.

– Так и я то же самое говорю, только короче и понятнее.

– Да ты главное забыл. Пароход плывет вверх и вниз одно и то же расстояние. Но вниз он проплывает его быстрее, чем вверх. А значит, течение помогает ему меньше времени, чем мешает! Вот и получается, что выгода будет меньше, чем вред.

– Ах я дурак! Да, здорово. Выходит, по озеру быстрее.

– А я снова все посчитал, – сказал Миша.

– Слушай, ты, алгебраист-отличник. – набросился на него Федя. – Ну что тут писать, если уже и так все ясно.

– Видел я, как вам все было ясно. Вы запутались, вот я и составил уравнение. Я же не знал, что вы так скоро распутаетесь.

– Ладно, показывай. Эх, не охота проверять.

На листке было написано следующее:

$$\begin{aligned}
 &v - \text{ скорость парохода} \\
 &u - \text{ скорость реки (в км/ч)} \\
 &10 \text{ км по течению: } \frac{10}{v+u} \text{ ч} \\
 &10 \text{ км против течения: } \frac{10}{v-u} \text{ ч} \\
 &\text{всего: } \frac{10}{v+u} + \frac{10}{v-u} = \frac{20v}{v^2-u^2} \text{ ч} \\
 &20 \text{ км по озеру: } \frac{20}{v} \text{ ч} \\
 &\frac{20v}{v^2-u^2} > \frac{20}{v} \Leftrightarrow 20v^2 > 20(v^2-u^2)
 \end{aligned}$$

– Я вычисления плохо понимаю, – сказал Федя, – я люблю без них обходиться. Так, есть у нас что-нибудь нерешенное?

На доске оставалась еще одна задача.

Задача 3. Пароход вниз по реке идет от A до B трое суток, а от B до A – пять суток. Сколько времени будут плыть плоты от A до B ?

– Ой, а тут наверняка уравнение составлять придется, – помрачнел Федя. – Вот сказано, что вниз по реке пароход плывет трое суток, а вверх – пять. И что это значит?

– Да просто скорости их относительно земли относятся как 5 к 3, – сказал Андрей.

– Чьи скорости? – не понял Федя.

– Ну, парохода, который по течению плывет, и который против, – пояснил Андрей. – Можно даже так сказать: выпустим два одинаковых парохода, один вниз по течению, а другой вверх. Тогда если первый проплыл по реке 5 км, второй за это время проплывет 3 км.

– Да это же гениальная идея! – подхватил Даня.

– Какая еще идея?

– Да два парохода из пункта A одновременно выпустить в разные стороны. Только надо в этот момент еще и плот по течению отправить.

– А зачем? – удивился Федя.

– Так ведь плот все время посередине между пароходами будет, если расстояние вдоль реки считать! Вспомни задачу про ребят, которые с плота спрыгнули.

– Ух ты, классно! Пароходы – как будто те двое. А раз пароходы одинаковые, они удаляются от плота с равными скоростями. Только как нам это поможет?

– А вот как. Если первый пароход отплыл от A на $5x$ км, то второй – на $3x$ км, так? Плот в это время посередине между ними. А где эта середина будет-то?

– Расстояние между пароходами $8x$ км, половина это $4x$ км. Значит, плот будет... на расстоянии x км от пункта A вниз по течению.

– Вот мы задачу и решили. Нас интересует, когда плот окажется в пункте B , то есть x надо взять равным расстоянию между A и B . Первый пароход проплывет за это время пять расстояний от A до B , а одно такое расстояние он проплывает за трое суток. Значит, пять расстояний проплывает за 15 суток, это ответ.

– А я составил уравнение, там тоже совсем просто получается, – сказал Миша.

– Слушай, ты без своих уравнений просто жить не можешь, – рассердился Федя.

– Да вы посмотрите, всего три строчки. Обозначим расстояние между пунктами A и B за 1.

– Я не понял, 1 чего?

– Да какая разница. Есть же между ними какое-то расстояние. Можно его за единицу измерения принять. Помнишь, в мультфильме длину удава в попугаях измеряли? А мы будем измерять путь в расстояниях между A и B . Ничем не хуже километров. Так всегда делают для удобства, чтобы не вводить лишнюю переменную.

– Ладно, что дальше?

– Пусть скорость парохода – v , скорость течения – u наших единиц в сутки. Тогда по условию $3(v + u) = 1$ и $5(v - u) = 1$, откуда $v + u = 1/3$, $v - u = 1/5$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $2u = 1/3 - 1/5 = 2/15$, то есть $u = 1/15$. Значит, плот доплывет от A до B за 15 суток.

– И у нас ответ такой же.

– А я сам задачу придумал! Ура! – Андрей выбежал к доске и схватил в руки мел.

– Да ну...

– Нет, правда. Мне так первое решение про пароходы понравилось, что я сам задачу придумал. Вот решите-ка.

И Андрей написал на доске условие.

Задача 4. Из пункта A вниз по течению прямой реки одновременно отплыли плот и катер, а навстречу им в тот же момент из пункта C отправился такой же катер. Докажите, что в тот момент, когда первый катер достигнет пункта C , плот окажется точно посередине между пунктом A и вторым катером.

– Понятно, понятно, – закричал Даня. – Это практически та же сама задача.

Ребята быстро справились с задачей Андрея, и она им очень понравилась.

Упражнение 1. Решите и вы эту задачу.

Тут в класс зашел руководитель кружка Сергей Александрович.

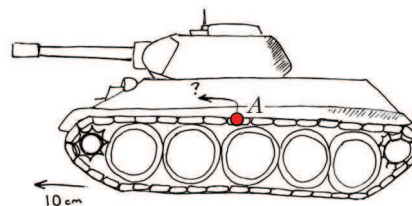
Про танк и эскалатор

Ребята принялись наперебой рассказывать учителю решения задач. А потом задали ему придуманную Андреем задачу и придирчиво проверили решение.

– Молодцы, – сказал учитель. – Можно сказать, без меня кружок провели, да еще замечательную задачу придумали. Но я для вас еще кое-что припас.

Задача 5. На рисунке изображен танк, на его гусенице отмечена точка A . Танк проехал 10 см. Сколько проехала при этом точка A ?

– Тоже мне задача, для первоклассников что ли? – удивился Федя. – Раз танк проехал 10 см, то и точка A проехала 10 см.



– Это что же получается, точка A тогда все время находилась напротив середины танка? – спросил Даня.

– А что в этом такого?

– Так она ведь на гусенице, эта точка. Получается, что середина гусеницы и середина танка были все время напротив друг друга. Значит, гусеницы вообще не двигались. Как же тогда танк мог хоть сколько-то проехать?

– И правда, гусеницы же должны прокручиваться, – Федя задумался. – Вообще, когда на танк в кино смотришь, кажется, что они слишком быстро крутятся, быстрее, чем сам танк едет.

– Слушай, а давай на помощь твоего папу-кинооператора позовем. Пусть он едет напротив танка с кинокамерой и снимает.

– Давай, – обрадовался Федя. – Тогда на экране будет неподвижный танк, только колеса крутятся и гусеницы вращаются. Чтобы танк в реальности сдвинулся на 10 см, земли должны коснуться новые 10 см гусениц, то есть им надо на эти 10 см прокрутиться вперед. Значит, точка A сдвинется на экране на 10 см. Опять эти же заколдованные 10 см получаются.

– Так ведь еще и наша кинокамера проехала 10 см! Значит, точка A проехала всего $10 + 10 = 20$ см.

– Потрясающе! Даже не верится.

– Тем не менее, ответ именно такой, если, конечно, танк не игрушечный и точка A не успела доехать до переднего колеса, – подтвердил Сергей Александрович. – А сейчас я вас попробую еще раз удивить. Вот новая задача.

Задача 6. Петя и Вася ехали вниз по эскалатору. На середине эскалатора хулиган Вася сорвал с Пети шапку и бросил на встречный эскалатор. Петя побежал вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься за шапкой вниз. Вася побежал вниз, чтобы затем подняться за шапкой вверх. Кто будет первым? (Скорости ребят относительно эскалатора равны и не зависят от направления движения.)

– Сейчас, сейчас, – забормотал Федя. – Васе эскалатор сначала помогает, а когда он перебегает на встречный эскалатор... ой, опять помогает. А Пете, наоборот, эскалатор все время мешает. Значит, Вася первым прибежит.

– Постой, но шапка-то едет навстречу Пете, а от Васи удаляется, – заметил Миша.

– Тогда Петя добежит первый. Нет, я запутался, – сказал Федя. – А может, они одновременно добегут?

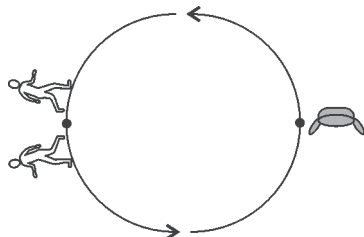
– Если бы эскалаторы не двигались, то конечно одновременно: каждому надо пробежать две половинки эскалатора.

– Наверное, тут, как в задаче про реку, можно считать, что эскалаторы стоят.

– Точно! – включился в разговор Даня. – Ведь мешает эскалатор так же, как и помогает. Вот и выходит, что он как бы Васю вместе с шапкой вперед двигает, а Петю вместе с шапкой – назад.

– Ага, понял – согласился Федя. – Значит, и расстояние между шапкой и любым из них сокращается, как если бы эскалаторы не двигались.

– Молодцы, – сказал учитель. – Давайте, я ваше рассуждение немного по-другому расскажу.



Учитель подошел к доске и нарисовал две полуокружности со стрелками.

– Это я изобразил эскалаторы, – сказал он, – а стрелки показывают, куда эскалаторы едут.

– А зачем вы так смешно эскалаторы кривыми нарисовали? – засмеялись ребята.

– Сейчас поймете. Когда один из мальчиков сбегает со своего эскалатора, он тут же на другой эскалатор перебегает. Давайте эти полуокружности-эскалаторы соединим в окружность. То есть один эскалатор у нас как бы сразу в другой переходит. Получается, что ребята как будто бегут по движущейся окружности.

– Ура! Все ясно. Сначала Петя с Васей и шапка будут в противоположных точках окружности. А потом побегут к шапке в разные стороны с равными скоростями. Ясно, что и прибегут одновременно. И не важно, крутится окружность или нет. Давайте следующую задачку!

– погодите, мы еще эту не дорешали.

– Как это не дорешали? – очень удивился Федя. – Мы же доказали, что они одновременно прибегут, что тут еще делать?

– Этот ответ не совсем верный.

– Как? Но ведь мы же доказали, даже двумя способами. Вы что, шутите?

– Нет. Подумайте, мы кое-что не учли.

– Ну есть ведь еще расстояние между эскалаторами, – задумчиво протянул Даня. – Когда они его пробегают, они как бы ненадолго прыгивают с окружности, а шапка все время к Пете едет. Он и будет первый.

– Очень дельное замечание. Но даже если ребята преодолевают расстояние между эскалаторами мгновенно, возможен случай, когда один из мальчиков прибежит к шапке раньше другого.

– А, ну конечно, – догадался Федя. – Если скорость Пети будет меньше или равна скорости эскалатора, он вообще до верха не дойдет. А шапка-то к нему на эскалатор не перескочит!

– Да, но и это еще не все: даже если скорости Пети и Васи больше скорости эскалатора, возможен другой ответ.

– Я понял, – закричал Андрей. – Федя сейчас подсказку сделал. Если они бегут не очень быстро, шапка может успеть доехать до верха эскалатора.

– И кто тогда прибежит к ней первым?

– Шапка перестанет приближаться к Пете и удаляться от Васи. Значит, Вася.

– Да, теперь все случаи разобраны.

Тут в класс заглянул учитель информатики Александр Прокофьевич.

Гонки на реке

– Что это тут у вас происходит? – спросил он. – Крики на весь этаж слышны.

– Да мы задачки интересные решаем про танки, эскалаторы, плоты, речки, катера...

– А я, между прочим, очень люблю в походы на байдарке ходить, – сказал Александр Прокофьевич. – И даже в одном походе сам задачу придумал, про гребцов. Хотите?

– Конечно, хотим! – закричали ребята. – Нам теперь такие задачи нишчем.

– А это мы посмотрим. Условие вот какое.

Задача 7. *Две байдарки стартовали из одной точки и движутся по одному маршруту по реке с переменным течением ровно по 4 часа. Первая байдарка все 4 часа движется со скоростью 3 км/ч относительно стоячей воды. Вторая байдарка движется со скоростью 6 км/ч относительно стоячей воды, но только первые 2 часа, а потом 2 часа гребцы отдыхают, а лодка движется по течению. Могло ли случиться, что вторая байдарка прошла по реке большее расстояние?*

– Это какая-то непонятная задача, – сразу сказал Федя.

– Условие очень длинное. Когда до середины дойдешь, уже забудешь, что вначале было.

– Да еще и река с переменным течением. А мы такие задачи не решали, – сказал Миша.

– Ну и что? Попробуем. Давайте сначала задачу решим, как будто у нас река с постоянным течением, – предложил Андрей.

– Если течение постоянное, можно считать, что его нет: оно одинаково на обе байдарки действует, а плыли они одно и то же время, – заметил Даня.

– Ага. Значит, решаем для озера. – Андрей начал вычислять. – Первая байдарка пройдет за 4 часа 12 километров. А вторая уже за первые два 12 километров отмахает, зато следующие два часа на одном месте стоять будет. Поровну выходит!

– Ну вот, ничего не получается, – расстроился Даня. – Может и на реке с переменным течением всегда будет поровну?

– А чего тогда Александр Прокофьевич так хитро улыбается? – Федя подозрительно смотрел на учителя информатики. – Наверняка тут какой-то подвох есть.

– Стоп! Все ясно, – осенило Андрея. – На озере почему поровну получилось? Потому что вторая байдарка последние 2 часа на месте стояла. А давайте возьмем 12-километровое озеро и из него речку выпустим – хоть самую медленную, лишь бы текла. Первая байдарка только все озеро за 4 часа и проплывет. А вторая проплывет его за 2 часа и в речке окажется, вот ее речка и унесет дальше.

– Все хорошо, только у нас ведь не озеро, а река, – возразил Даня.

– Между прочим, на реке бывает и стоячая вода, и даже течение иногда в обратную сторону идет, – сказал Андрей.

– Ну ладно, давай думать, как для реки пример строить.

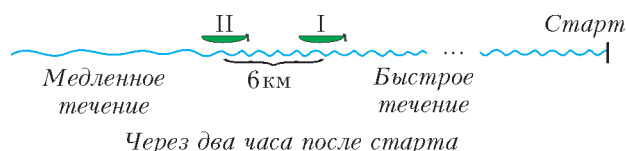
– Я все не пойму, где второй байдарке лучше грести, – сказал Федя, – на быстром течении или на медленном?

– Давай два случая разберем, – предложил Даня. – Допустим сначала, что первые два часа вторая байдарка гребет по очень быстрому течению, скажем 100 км/ч. А потом два часа сплавляется почти по нулевому течению.

– Разве бывают такие странные реки?
 – А ты что, не знаешь, что на горных реках скорость течения очень сильно меняется? – сказал Андрей. – Русло у реки то разливается широко, и там вода медленно течет, то вдруг сужается в желоб между скал, и там струя так и хлещет, как из брандспойта. Правда, чтобы аж 100 км/ч было, это наверно перебор.

– Да не важно, бывают, не бывают, – отмахнулся Даня, – я сейчас хочу в принципе понять, что происходит. Поэтому очень разные скорости взял, чтобы эффект заметнее был.

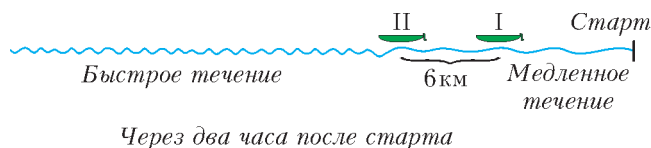
– С таким гигантским течением обе байдарки за первые 2 часа примерно одно и то же огромное расстояние пройдут, – сказал Федя. – Только первая отстанет на 6 км.



– Зато за следующие два часа вторая байдарка вообще почти с места не сдвинется, – продолжил Даня. – А первая 6 км быстрого течения за несколько минут проплывет, а потом быстро вторую обгонит: отставания почти никакого, а скорость на 3 км/ч больше.

– А если наоборот, вторая байдарка сначала 2 часа почти по нулевому течению гребет, а потом течение 100 км/ч становится?

– Тогда за первые два часа вторая байдарка чуть больше чем 12 км проплывет, ну и первая снова на 6 км отстанет.



Зато за следующие два часа вторая байдарка на 200 км вперед улетит. А первая только на 6 км до быстрого течения около 2 часов потратит. Ну и потом у нее времени почти не останется на быстром течении покатааться.

– Теперь ясно. Только лучше числа правдоподобные подобрать.

– Я думаю, если взять скорость слабого течения 1 км/ч, а сильного 10 км/ч, тоже все получится, – сказал Миша.

Упражнение 2. Проверьте предположение Миши. Можно ли еще сблизить скорости течений?

– Что ж, справились, – обрадовался Александр Прокофьевич. – А на каком течении выгоднее грести, совсем просто можно объяснить. Представьте, что кто-то на месте старта каждую секунду бросает в реку листочек (начав это задолго до отплытия байдарок). На реке появится дорожка из листочков. Где течение быстрое, они будут плыть редко, а где медленное – часто. Обе байдарки движутся по 4 часа – значит, кто больше листочков обгонит, тот дальше и продвинется. Так где же выгоднее грести второй байдарке? Конечно, там, где листочки часто идут – за короткое время она обгоняет много листочков.

– Вот это да, – зашумели ребята. – Просто здорово, коротко и ясно!

– Ладно, буду теперь к вам заходить, задачки подбирать, – сказал Александр Прокофьевич, прощаясь.

– Пожалуй, и нам пора. Мы очень хорошо поработали. На сегодня все, – сказал Сергей Александрович.

Приключения со стрелками

– Ого, уже пять вечера, – важно посмотрел на свои часы Федя. – И правда, пора домой.

У Феде были большие красивые часы со стрелками, они светились в темноте. А все вокруг носили электронные часы или мобильник как часы использовали.

Феде и Дане идти было к одной станции метро, поэтому они вышли из школы вместе.

– Федь, ну зачем тебе такие часы? Это ведь прошлый век! – стал подшучивать над Федей Даня.

– Это чтобы задачки по математике решать, – ответил Федя. – Я сейчас в Заочной математической школе учусь, а там кучу задач про часы со стрелками задали. Вот я и сказал родителям: покупайте мне такие часы, а то школу брошу.

– Да ладно выдумывать, неужто из-за задачек носишь?

– Ну, если честно, мне такие больше нравятся просто. Но одну задачку я с помощью них решил, между прочим. Вот она какая была.

Задача 8. Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов совпадают?

– Ну и как же ты ее решил?

– Да вот, сначала все думал, думал – так ничего и не придумал. А потом взял, да и просидел рядом с часами целые сутки, и все совпадения сосчитал.

– Не спал целые сутки?

– Ну нет, понятно же, что если стрелки совпали, то в следующий раз еще не скоро совпадут. Я заметил, что они примерно раз в час совпадают. Днем я все время на часы поглядывал, чтобы момент не пропустить. А ночью будильник ставил – как стрелки совпадут, я на час засыпаю, потом просыпаюсь – они уже снова близко. Так и сосчитал.

– Ну ты даешь. Слушай, а ведь зря ты так себя мучил. Можно было гораздо проще сделать.

– Это как еще проще?

– Да просто прокрутил бы колесико на часах, чтобы часовая стрелка прошла 24 часа, и считал бы совпадения.

– Так нечестно. И вообще, как я, интереснее было.

– Да и что там считать, сам же сказал – стрелки раз в час совпадают. В сутках у нас 24 часа, значит, получаем 24 совпадения.

– А вот и нет. От одного совпадения до другого больше часа проходит.

– Ах да, конечно. Тогда наверно 23.

– Все равно неверно!

– Но должно же быть решение без круглосуточных наблюдений. Давай соображать. Часовая стрелка поворачивается со скоростью $1/12$ циферблата в час, а минутная стрелка поворачивается со скоростью 1 циферблат в час. Значит, сближаются они со скоростью $1 - 1/12 = 11/12$



циферблата в час.

– Это почему?

– Ну вот, стрелки встретились, и тут минутная стрелка как бы снова часовую догоняет. Но и часовая на месте не стоит. Значит, скорость, с которой минутная стрелка догоняет часовую – это разность их скоростей.

– Вроде понятно, а дальше?

– Слушай, а давай, как на сегодняшнем занятии, в другую систему отсчета перейдем. Будем считать, что часовая стрелка неподвижна.

– Это как?

– Представь, что ты микроб и на часовой стрелке сидишь. Или, если хочешь, можешь у себя перед носом часы все время крутить так, чтобы часовая стрелка всегда ровно вверх смотрела.

– Ну представил, и что?

– Смотри, минутная стрелка тогда будет вращаться вокруг часовой со скоростью $11/12$ циферблата в час, и будет совпадать с ней каждый раз, когда пройдет весь циферблат.

– Ага. Первое совпадение мы когда считаем, в 00 часов 00 минут? Наверное так. Значит следующий раз они совпадут через... через $12/11$ часа.

– Так это же решение. Стрелки будут совпадать каждые $12/11$ часа. За сутки совпадений будет $24 : (12/11)$, то есть $24 \cdot (11/12)$, а это 22. И как раз мы не учитываем совпадение в следующие 00 часов 00 минут, это ведь уже другие сутки будут.

– Правильно, – подтвердил Федя, – я столько же насчитал.

– Ты, кстати, мог бы всего 12 часов свои наблюдения делать. А потом на 2 все умножить.

– Эх, так ведь вообще все очевидно. Совпадения будут через каждый час с небольшой добавкой. Начинаем считать с полуночи. Второе совпадение будет после часа, третье – после двух, ... А двенадцатое-то уже ровно на полдень попадет, на начало второй половины суток. Из добавок как раз лишний час набегаёт.

– Вот и выходит 11 раз за одну половину суток, и еще 11 за другую.

– А там еще задача есть, слушай.

Задача 9. *Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов образуют угол 90° ?*

– Ну, это почти то же самое. Между соседними моментами, когда стрелки совпадают, они два раза под углом 90° оказываются. Промежутков между совпадениями – от первого до 23-го, в начале следующих суток, – будет 22. Так что ответ 44.

– Лихо ты задачки щелкаешь. А такую как решать?

Задача 10. *В будильнике кроме обычных стрелок есть еще стрелка звонка. Один часовщик сделал шуточный будильник, в котором стрелка звонка двигалась равномерно, причем все время была на прямой, делящей угол между часовой и минутной стрелками пополам. Сколько оборотов сделает такая стрелка за сутки?*

– Эту давай в следующий раз решим. А то я на футбол опоздаю. До завтра!

– Пока! До завтра!

Упражнение 3. Решите задачу, которую ребята отложили на следующий день.