«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №6 за 2010 г.)

1. 86 фотографий.
Плата за печать уменьшится сильнее всего, если мы увеличим число фотографий ровно до 100. Печать при этом будет стоить 300 рублей. Пусть изначально было n фотографий. Тогда нужно найти наименьшее n, для которого верно неравенство $3{,}5n > 300$. Это и есть $n = 86$.
2. Если переложить девять спичек так, как это показано на рисунке 1, то на нашу фигуру можно будет взглянуть с обратной стороны и увидеть все четыре кубика.

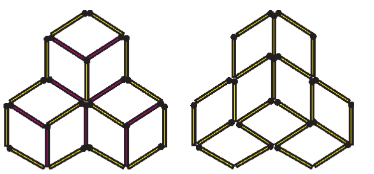

Рис. 1

3. Подойдет число 1340.
Заметим, что $2010 = 2\times3\times5\times67$. Пусть x – искомое четырехзначное число, а y – число, которое получится, если записать x пятнадцать раз подряд. По признаку делимости на 3 число y делится на 3 (его сумма цифр в 15 раз больше суммы цифр числа x). Ясно также, что y делится на x. Тогда в качестве x подойдет, например, число $1340 = 2\times2\times5\times67$ – оно не делится на 2010, а число y будет делиться на $3x = 2\cdot2010$.
4. По условию, если бы у Феди был желтый кусочек пазла с носом енота, а у Саши – зеленый кусочек с хвостом, они смогли бы собрать всю картинку целиком. Значит, сейчас у одного из них есть синий кусочек с лапкой, которого нет у Димы. Точно так же у Саши или Димы есть желтый кусочек с носом, которого нет у Феди. Тогда, если Федя и Дима объединятся с Сашей, у них окажутся недостающие желтый и синий кусочки, и они смогут составить пазл.

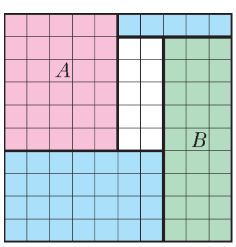

Рис. 2

5. На рисунке 2 показан пример требуемого разрезания. Подумайте, есть ли другие способы разрезания.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2010 г.)

1. а) Да, например подходят числа $2, 2^3, 2^5, \ldots, 2^{19}$.
б) Нет.
Предположим противное: такой набор из 10 чисел найдется. Рассмотрим первые четыре числа a, b, c, d. По условию, abc – квадрат и bcd – квадрат. Тогда их произведение $a(bc)^2d$ – тоже квадрат, а значит, и ad – квадрат. Но adb – квадрат по условию, откуда b – тоже квадрат, что условию противоречит.
2. См. рис.3.
3. Сможет.
Пусть хамелеон вначале находится на некоторой клетке A. Он красит ее в белый цвет. Далее, хамелеон мысленно отмечает те черные клетки доски, которые ему надо перекрасить в белый цвет, чтобы в итоге получилась шахматная раскраска. Хамелеону достаточно научиться такой операции: находясь в белой клетке A, переместиться в любую отмеченную черную клетку B, перекрасить ее в белый цвет и вернуться назад, оставив цвета всех клеток, кроме B, неизменными. Тогда он последовательно перекрасит все отмеченные клетки и получит шахматную раскраску.

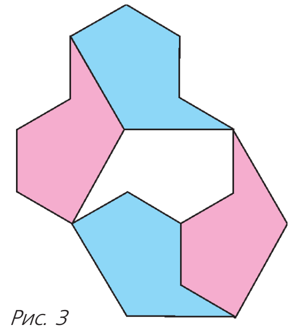

Рис. 3

Вот один из способов, которым маляр-хамелеон может проводить эту операцию.
Если B находится в том же столбце или той же строке, что и A, то все просто: хамелеон ходит на клетку B, красит ее в белый цвет и возвращается назад.
Пусть клетки A и B находятся в разных строках и столбцах. Обозначим через C клетку, которая стоит в том же столбце, что и A, и в той же строке, что и B.
Если C – белая, то хамелеон ходит на C, оставляя ее цвет и себя белыми, затем ходит на B, перекрашивает ее в белый цвет и тем же путем возвращается назад.
Если C – черная, хамелеон может проделать следующее:
1) пойти из A в C и покрасить C в белый цвет;
2) пойти из C в B и покрасить B в белый цвет;
3) выбрать черную клетку в строке с клеткой B (такая клетка найдется, так как хамелеон красит доску в шахматном порядке), пойти в нее и перекраситься самому в черный цвет;
4) пойти в C и покрасить ее в черный цвет;
5) вернуться в A и перекраситься в белый цвет.
4. Пусть ABC – данный треугольник, AB – его гипотенуза (рис.4). Обозначим точки касания вписанной окружности с катетами AC и BC через E и F соответственно. Легко видеть, что точки E и F расположены ближе к C, чем середины катетов AC и BC соответственно (докажите). Тогда средняя линия, соединяющая середины катетов, пересекает вписанную окружность и тем самым не может ее касаться.

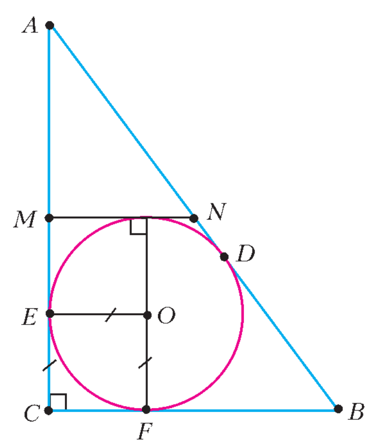

Рис. 4

Пусть вписанной окружности касается средняя линия MN (см. рис.4).
Видно, что $EC = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{4}AC$. Отрезки AD и AE равны как касательные к окружности, аналогично, $BF = BD$ и $EC = CF$, откуда $EC = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$. Приравнивая полученные выражения для EC, имеем $AB = \frac{1}{2}AC + BC$. Тогда по теореме Пифагора $\left(\frac{1}{2}AC + BC\right)^2 = AC^2 + BC^2$, откуда $AC\cdot BC = \frac{3}{4}AC^2$. Значит, $BC : AC = 3:4$. Следовательно, стороны треугольника ABC относятся как $3:4:5$.
5. Не может.
Предположим противное. Пусть число x является степенью двойки, а полученное из него перестановкой цифр число y будет большей степенью двойки. Тогда y больше x в k раз, где k – тоже степень двойки, причем k меньше 10 (поскольку цифр в числе y столько же, сколько и в x). Значит, k равно либо 2, либо 4, либо 8. С другой стороны, по признаку делимости на 9 разность числа и его суммы цифр всегда делится на 9. Так как суммы цифр у x и y одинаковы, их разность тогда тоже будет делиться на 9. Но она равна $y - x = k\cdot x - x = (k-1)x$, т.е. равна либо x, либо $3x$, либо $7x$. Ни одно из этих чисел на 9 не делится – противоречие.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Нет, масса тела на Луне наибольшая, на Земле – наименьшая.

2. Почти полностью освещенной Солнцем.

3. Только верхняя (внешняя) планета, радиус орбиты которой превышает радиус орбиты Земли, может находиться на угловом расстоянии более 90° от Солнца (рис.5).

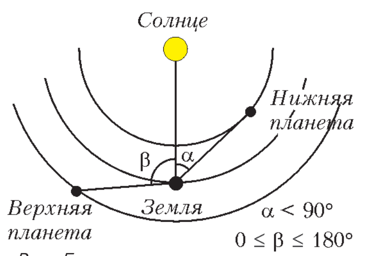

Рис. 5

4. В первом случае Земля улетела бы по параболической траектории, во втором случае орбита практически не изменилась бы.

5. Луна на картах изображается так, как она видна в телескоп.

6. В новолуние скорость Луны вокруг Солнца будет минимальной, в полнолуние – максимальной.

7. В принципе, Луну можно считать и спутником Земли, и спутником Солнца. Траектория Луны в системе отсчета Земли действительно «похожа» на орбиту спутника Земли, а в системе отсчета Солнца – на орбиту спутника Солнца.

8. По-прежнему наблюдались бы 2 прилива и 2 отлива, но период между приливами был бы около 6 часов, а не около 12 часов, как сейчас.

9. Да, могут. Например, у Сатурна по одной орбите движутся три спутника, а на одной орбите Юпитера находятся две группы астероидов – «греки» и «троянцы».

10. Если придать телу достаточно большую начальную скорость и сориентировать в нужном направлении, то можно одним выстрелом попасть не только на Луну, но и на Марс или другие планеты. Однако вывести спутник на околоземную орбиту без дополнительных маневров невозможно – он либо совсем улетит от Земли, либо упадет на нее.

11. Нет, такой спутник может существовать только у планеты, вместе с которой он совершает вращение.

12. Трасса представляет собой «восьмерку», касающуюся 60-х параллелей, с точкой самопересечения на экваторе (рис.6).

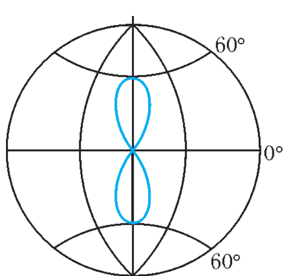

Рис. 6

13. Нельзя.

14. Да. За счет выброса сгоревшего топлива масса ракеты начнет уменьшаться, поэтому тяга двигателей станет понемногу превышать силу тяжести ракеты, и она полетит.

15. Да. Так можно не только остановить ракету, но и заставить ее лететь в обратном направлении.

16. Из-за большего поперечного сечения ракета-носитель сильнее тормозится атмосферой, вследствие чего, снижаясь, она начинает двигаться с большей угловой скоростью вокруг Земли.

17. Полную невесомость астронавты ощутили бы после выхода снаряда из атмосферы Земли, так как до этого сила сопротивления воздуха создавала бы дополнительное ускорение снаряда, воспринимаемое как весомость.

Микроопыт

При наличии трения между бруском и горизонтальной поверхностью пройденный на Луне путь будет больше l, в отсутствие же трения пути будут одинаковы.

СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ

а) В каждом из двух случаев ускорение совпадает с тангенциальной составляющей ускорения (рис.7,*а*).

б) Тело движется по окружности, значит, у тела есть нормальная составляющая ускорения, которая направлена к центру окружности. Кроме этого, по условию задачи скорость тела возрастает, следовательно, есть и тангенциальная составляющая ускорения, которая направлена вдоль скорости. Полное ускорение $\vec{a}$ изображено на рисунке 7,*б*.

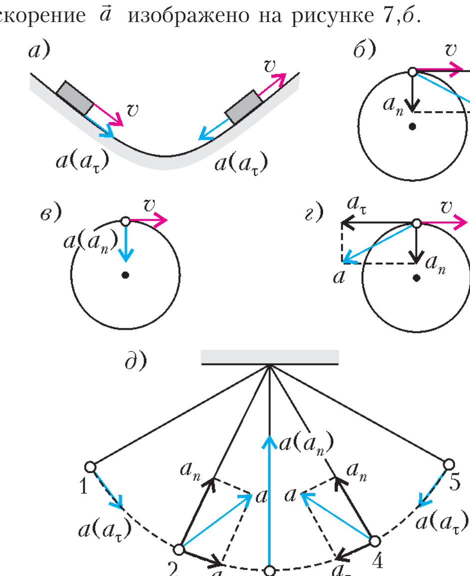

Рис. 7

в) См. рис.7,*в*. г) См. рис.7,*г*.

д) Прежде всего отметим, что траектория движения математического маятника – это окружность (рис.7,*д*). Поэтому, там, где скорость тела не равна нулю, есть нормальная составляющая ускорения.

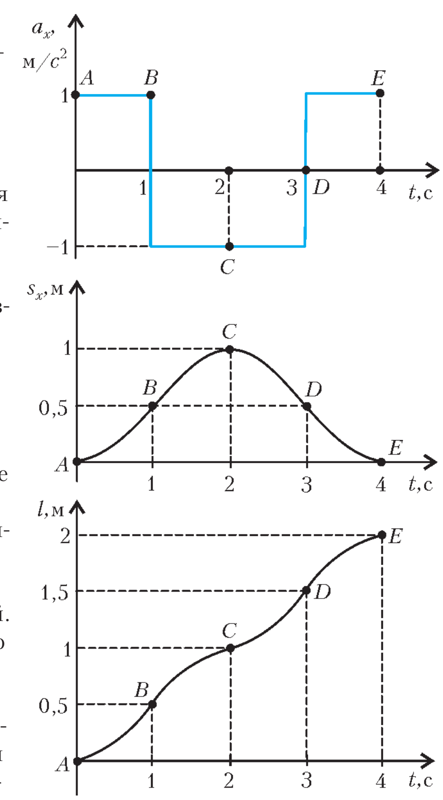

Рис. 8

Крайние точки 1 и 5 – это точки поворота. Скорость в этих точках обращается в ноль, поэтому нормальная составляющая ускорения в обеих точках равна нулю. А есть ли в этих точках тангенциальная составляющая? Вот здесь, бывает, ошибаются даже самые сильные школьники. Правильный ответ – да, тангенциальное ускорение в точках остановки есть. Проще всего применить к этим точкам второй метод рассуждений – динамический. В точках 1 и 5 на тело действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. Касательная составляющая силы тяжести и создает тангенциальное ускорение.

ГРАФИКИ В ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧАХ

1. 150 км, 15км/ч, 10 км/ч. **2.** 6 км/ч, 4 км/ч. **3.** 3 ч 12 мин. **4.** 2 ч. **5.** 45 мин. **6.** 8 км. **7.** 5ч 30 мин. **8.** 5/11. **9.** 18 км. **10.** 5.

РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

1. $l = 32$ м. **2.** $k = 2$. **3.** $a = 12$ м/с^2. **4.** $v = 5$ м/с. **5.** $h = 45$ м. **6.** $l = 25$ м. **7.** $v = 40$ м/с. **8.** $v = 0{,}75$ м/с, $a = 0{,}5$ м/с^2. **9.** $v = 10$ м/с. **10.** $l = 250$ м. **11.** $v = 5$ м/с. **12.** $t = 1$ с. **13.** См. рис.8.

XXXII ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2010 ГОД)

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. Продолжим шахматную раскраску на всю таблицу. Заметим, что среднее арифметическое чисел, стоящих в двух одноцветных клетках одного ряда (строки или столбца), равно числу в клетке, стоящей посередине между ними. Пусть углы – черные. Каждое белое число рамки равно полусумме своих черных соседей по рамке, при этом каждое черное число входит в две полусуммы. Сложив эти равенства, получим, что сумма белых чисел равна сумме черных.

2. Ось симметрии трапеции и биссектриса пересекаются в центре вписанной окружности и вместе с основаниями высекают два очевидно равных прямоугольных треугольника с катетами, равными радиусу и половине меньшего основания. Ось симметрии делит трапецию на две равные половинки. Прибавив к половинке один треугольник и отняв другой, получим часть, отсеченную биссектрисой. Значит, площадь части равна площади половинки. *Уточнение*: треугольники не вылезают за пределы трапеции, так как точка пересечения биссектрисы с противоположным (длинным) основанием удалена от его середины на половину короткого основания.

3. Могло.
Поставим кубик на клетку a1 и перекатим его по маршруту a1-a2-b2-b1. При этом кубик сдвинулся на одну клетку вправо, снова стоит на нижней грани, а его верхняя грань ни разу не лежала на доске. Аналогично можно сдвинуть кубик на клетку вверх. Перемещая кубик подобным образом в соседние клетки, мы сможем обойти всю доску.

4. Пусть a школьников знают все 3 языка, b – только английский и немецкий, c – только английский и французский, d – только немецкий и французский. По условию $a + b > 9(c + d)$, $a + c > 9(b + d)$. Взяв полусумму, получим $a > 9d + 4(b + c)$, тем более $a > 9d$, а это и требовалось.

5. Раскрасим вершины поочередно в белый и черный цвета. Хорды соединяют вершины одного цвета. Значит, N белых вершин разбились на пары, и N четно.

10–11 классы

1. а) Может. Пусть, например, $s = 3$. Обменяв 5 дублонов, получим 2 пистоля, а обменяв пистоли, получим 6 дублонов.
б) Не может. Пусть $s < 1$. Обменяв n дублонов, мы получим $ns^{-1} + \varepsilon$ пистолей, где $|\varepsilon| \le 1/2$. Обменяв их снова на дублоны, получим $\left(ns^{-1} + \varepsilon\right)s < n + 1/2$ дублонов, поэтому больше n дублонов мы не получим уже при первой паре обменов.
Пусть $s > 1$ и после первого обмена мы получим n пистолей. Как показано выше, за два обмена из этих пистолей мы получим не более n пистолей, следовательно, и число дублонов после 4-го обмена не больше, чем после второго.

2. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AO = u$, $BO = x$, $CO = v$, $DO = y$.
а) Как известно, радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $(k + l - m)/2$, где k, l – катеты, m – гипотенуза. Поэтому

$$(u + x - a) + (y + v - c) = = (x + v - b) + (u + y - d) \Leftrightarrow a + c = b + d.$$

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ – описанный.
б) Из теоремы Пифагора легко следует, что $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Отсюда

$$2ac = (a + c)^2 - \left(a^2 + c^2\right) = (b + d)^2 - \left(b^2 + d^2\right) = 2bd .$$

Из равенств $a + c = b + d$, $ac = bd$ следует, что пары (a, c) и (b, d) совпадают. А это и означает симметрию относительно одной из диагоналей.

5. 8 боев.
Обозначим через u_k k-е число Фибоначчи ($u_1 = u_2 = 1$, $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ при $k \ge 3$). Докажем по индукции, что
1) если победитель провел не меньше n боев, то число участников не меньше u_{n+2};
2) существует турнир с u_{n+2} участниками, победитель которого провел n боев.
База ($n = 1$, $u_3 = 2$) очевидна.
Шаг индукции. 1) Пусть победитель A выиграл последний бой у боксера B. Оставшиеся поединки фактически распадаются на два турнира: один из них выиграл A, а второй – B. В первом турнире победитель A провел не меньше $n - 1$ боя, значит, число участников не меньше u_{n+1}. Во втором турнире победитель B провел не меньше $n - 2$ боев, значит, число участников не меньше u_n. А в исходном турнире число участников не меньше

$$u_{n+1} + u_n = u_{n+2} .$$

2) Достаточно свести в заключительном поединке победителя турнира с u_{n+1} участниками, выигравшего $n - 1$ бой, и победителя турнира с u_n участниками, выигравшего $n - 2$ боя.
Поскольку $55 = u_{10}$, сразу получаем ответ.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. *Первое решение.* Отметим на данной прямой l три точки A, B и C так, чтобы AB и BC были меньше диаметра пятака. Прикладывая пятак к отрезкам AB и BC с одной стороны прямой, построим две окружности. Пусть они второй раз пересекутся в точке D. Прикладывая пятак к отрезкам AB и BC с другой стороны, получим две новые окружности, симметричные старым относительно l. Точка пересечения новых окружностей D' симметрична D относительно l, поэтому $DD' \perp l$.
Второе решение. Покажем, как за **три** обведения пятака построить две точки прямой, перпендикулярной данной (рис.9). Отметим на данной прямой точки A и B на расстоянии меньше диаметра пятака. Приложив к ним пятак двумя способами, получим две окружности ω_1 и ω_2 (симметричные относительно данной прямой), проходящие через A и B. Приложив пятак к точке A и к любой точке на данной прямой, отличной от B, получим окружность ω.
Оказывается, вторые точки пересечения ω с ω_1 и ω_2 (отличные от A) лежат на прямой, перпендикулярной дан-

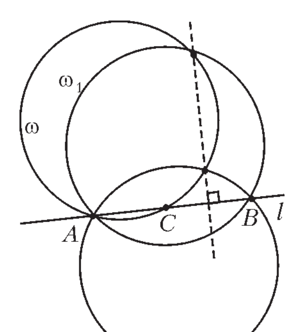

Рис. 9

ной. Это легко следует из следующего известного утверждения.

Утверждение. *Пусть три равные окружности пересекаются в одной точке O. Тогда вторые точки пересечения окружностей образуют треугольник, в котором O – точка пересечения высот.*

Доказательство. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры данных окружностей, а A_1, A_2, A_3 – вторые точки пересечения. Тогда $O_1A_3O_2O$ – ромб, $A_3O_1 \parallel O_2O$ и $A_3O_1 = O_2O$. Аналогично, $A_1O_3 \parallel OO_2$ и $A_1O_3 = OO_2$, т.е. $A_1O_3O_1A_3$ – параллелограмм, и $A_1A_3 \parallel O_1O_3$. Но $A_2O \perp O_1O_3$, а значит, $A_2O \perp A_1A_3$. Аналогично, $A_1O \perp A_3A_2$ и $A_3O \perp A_1A_2$, что и требовалось доказать.

2. Петя прав. Покажем, как он может отметить все $m = k + l - 1$ точек, делящих отрезок на $k + l$ равных частей. Назовем эти точки удачными. Будем считать, что длина каждой части 1. Покажем, что Петя может в любой момент отметить хотя бы одну из неотмеченных удачных точек (разумеется, если такие еще есть). Возьмем какой-нибудь отрезок с концами в отмеченных точках, внутри которого есть только неотмеченные удачные точки. Если он четной длины, то Петя может отметить его середину, которая будет удачной точкой. Если же отрезок нечетной длины $2n + 1$, то он может отметить n-ю точку. Раз Петя все время может отмечать одну из точек, то за m ходов он выполнит требуемое.

3. Решение этой задачи аналогично решению задачи М2209 «Задачника «Кванта».

4. *Первое решение.* Достаточно доказать, что в любых двух доминошках, граничащих по отрезку, проведенные диагонали выходят либо обе из правых нижних, либо обе из левых нижних углов. Предположим противное и найдем *плохую пару*: две соприкасающиеся доминошки с диагоналями разных направлений. Ясно, что общий отрезок не может быть целой стороной обеих доминошек. Принципиально возможны лишь два случая (рис.10). В обоих случаях однозначно определяются *центр* (конец диагонали на середине стороны) и *направление* пары (направление от центра к концу другой диагонали на той же стороне) – на рисунке это *жирная точка* и *стрелка*. Рассмотрим плохую пару, чей центр ближе всего к стороне, на которую показывает направление пары.

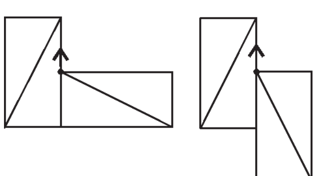

Рис. 10

Заметим, что положение доминошки, примыкающей к плохой паре в ее центре, и диагональ в этой доминошке тоже определены однозначно (рис.11). Но тогда возникает новая плохая пара, чей центр ближе к указанной стороне. Противоречие доказывает, что плохих пар нет.

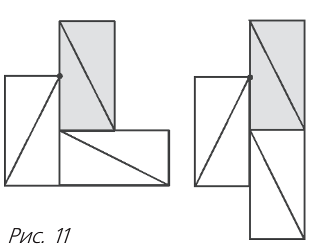

Рис. 11

Второе решение. 1) Пусть левый нижний угол не является концом диагонали доминошки. Рассмотрим следующую доминошку, примыкающую к нижней стороне. Легко видеть, что диагональ в ней имеет то же «направление», что и в угловой. Это верно и для следующей справа доминошки и т.д. Значит, из *правого нижнего угла* выходит диагональ. Итак, доказано, что *хотя бы из одного угла* диагональ доминошки выходит.

2) Пусть из левого нижнего угла A выходит диагональ AB *первой* доминошки. К первой доминошке обязательно примыкает (по стороне или половине стороны) *вторая* доминошка, для которой B также служит вершиной. Поэтому диагональ второй доминошки имеет то же направление, что и AB. Заметим также, что сумма «координат» правой верхней вершины (C) у второй доминошки больше, чем у первой. Ко второй доминошке примыкает *третья*, для которой C является вершиной, и рассуждения можно повторить. В результате будет построена *цепь* из доминошек с диагоналями одного направления, соединяющая левый нижний и правый верхний углы прямоугольника. Следовательно, в правый верхний угол также входит диагональ доминошки.

3) Пусть из правого нижнего угла также выходит диагональ. Тогда можно построить цепь доминошек, соединяющую правый нижний и левый верхний углы прямоугольника. Эта цепь должна «пересечься» с ранее построенной цепью, т.е. имеет с ней общую доминошку. Противоречие, так как диагонали доминошек второй цепи «направлены» не так, как в первой.

5. Решение этой задачи аналогично решению задачи М2208 «Задачника «Кванта».

6. Проведем в треугольниках ABP и CBP средние линии $C'C''$ и $A'A''$. Они равны по длине и перпендикулярны AC (так как обе параллельны отрезку BP и равны его половине). Проведем из точки K отрезок KK', сонаправленный с $C'C''$ и $A'A''$ и равный им по длине. Тогда $KC'C''K'$ и $KA'A''K'$ – параллелограммы, откуда $K'C''$ и $K'A''$ – срединные перпендикуляры к сторонам AP и CP треугольника APC. Значит, K' – центр описанной окружности этого треугольника и лежит на срединном перпендикуляре к AC. Но тогда там лежит и точка K (так как прямая KK' перпендикулярна AC).

7. Занумеруем в первый день сидящих рыцарей по часовой стрелке от 1 до N. Порядок за столом будем описывать строкой этих номеров, перечисляя рыцарей по часовой стрелке. Назовем *избранными* порядки вида k, $k - 1$, …, 2, 1, $k + 1$, $k + 2$, …, N для $k = 1, 2, 3, \ldots, N - 1$ (N-й избранный порядок совпадает с $(N - 1)$-м, поэтому он не нужен). Докажем, что из любого порядка можно пересесть в избранный. Для этого осуществим пересадку, при которой *левая* группа k, $k - 1$, …, 2, 1 *максимальная из возможных*. Покажем, что остальные рыцари при этом автоматически сидят в нужном порядке ($k + 1$, $k + 2$, …, N). Пусть это не так. Будем двигать число $k + 1$ по часовой стрелке. Если по пути $k + 1$ упрется в $k + 2$, будем двигать эту пару. Упершись парой в $k + 3$, будем двигать тройку и т. д. В итоге до k доедет «поезд» $k + 1$, $k + 2$, …, $k + m$. При этом $k + m < N$ (иначе никакого движения вообще не было). Прогоним все числа поезда, кроме $k + 1$, сквозь левую группу, а $k + 1$ присоединим к ней. Противоречие с максимальностью левой группы.

Докажем, что, пересаживаясь каждый день в избранном порядке, рыцари повторятся не позже, чем на N-й день. Пусть для произвольного порядка Мерлин выполнит такой обход: двигаясь все время по часовой стрелке, пройдет от 1-го до 2-го, затем до 3-го, до 4-го, …, до N-го и снова до 1-го. Свяжем с порядком *число оборотов* Мерлина вокруг стола. Легко убедиться, что при разрешенной пересадке двух рыцарей число оборотов не меняется. Однако числа оборотов избранных порядков различны (для k-го порядка число оборотов равно k), поэтому избранные порядки с разными k пересадками друг из друга не получаются. Рассаживая рыцарей в очередном избранном порядке, Мерлин может получить первое повторение не ранее N-го дня.

10–11 классы

1. а) Не всегда. Пусть 98 точек лежат на одной прямой l, а две точки A и B – вне нее, причем A и B не симметричны относительно l. Если неизвестно расстояние между A и B, то восстановить его нельзя: при замене точки B на B', симметричную B относительно l, остальные расстояния не изменятся, а расстояние AB' будет отличаться от AB.

б) При $k = 96$.

Покажем, что если количество городов $m \geq 4$, то $k = m - 4$. Для $m = 4$ утверждение легко проверяется. Пусть оно верно для $m = n$, докажем его для $m = n + 1$.
Если для некоторого города A стерты его расстояния для $n - 2$ городов, то его можно симметрично отразить – с сохранением всех известных расстояний – относительно прямой, соединяющей остальные два города (назовем их B и C). Неизвестные нам расстояния при этом изменятся, так как на прямой, соединяющей B и C, не находится никакой другой город. Поэтому $k \leq n - 3$.
Пусть стерто не более $n - 3$ записей. Выберем город A, для которого стерто хотя бы одно расстояние до другого города, и рассмотрим остальные n городов. Между ними стерто не более $n - 4$ расстояний, и по предположению индукции можно восстановить все эти расстояния, а тогда – и взаимное расположение этих городов (углы между соединяющими их отрезками). Для города A известны расстояния по крайней мере до 3 городов, и это позволяет однозначно восстановить его расположение на плоскости, а тем самым, и расстояния до остальных городов.
Решение для знатоков. Рассмотрим граф со 100 вершинами и 96 ребрами, соответствующими *стертым* записям. Этот граф содержит не менее 4 компонент связности. Зафиксируем по вершине (A, B, C, D) в каждой из этих 4 компонент. Все расстояния между этими вершинами известны.
Рассмотрим произвольную вершину первой компоненты. Известны ее расстояния до точек B, C, D, следовательно, положение соответствующего города на плоскости определено однозначно. Аналогична ситуация с вершинами оставшихся компонент.
4. а) Нет. Пусть первый маг всегда применяет заклинание с наибольшей разностью $b - a$. Тогда после ответного хода разность высот первого и второго как минимум 0. В результате после нескольких ходов разность всегда неотрицательна и, значит, второй не выигрывает.
б) Да, это возможно.
Первое решение. Рассмотрим произвольную убывающую последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, где $a_n < 50$ (например $a_n = 1/n$), и пусть в n-м заклинании $a = a_n$, $b = 100 - a_n$. Ответив на n-е заклинание заклинанием с номером $m > n$, второй маг выиграет: высота первого станет равной $a_m - a_n < 0$, а высота второго $a_n - a_m > 0$.
Второе решение. Годится набор заклинаний, состоящий из всех заклинаний, подходящих под условие задачи: ($0 < a < b < 100$). На заклинание (a, b) второй ответит $((100 - b)/2,\ 100 - a)$.
6. Индукцией по $m + n$ докажем более общее утверждение. Пусть в каждой клетке таблицы, где менее 2^m строк и менее 2^n столбцов, стоит нуль или единица. Тогда можно либо оставить не более m столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один нуль, либо оставить не более n строк так, что в каждом столбце будет хотя бы одна единица.
База (таблица 1×1) очевидна. *Шаг индукции*. Пусть в таблице Т единиц не меньше, чем нулей. Тогда есть строка, где единиц не меньше половины. Отметим эту строку и оставим только столбцы, где в ней стоят нули (если таких нет, то все доказано). В полученной таблице T_1 столбцов меньше, чем 2^{n-1}, и по предположению индукции в T_1 можно оставить не более m «хороших» столбцов (которые будут такими и для Т) или не более $n - 1$ «хорошей» строки. В последнем случае, вернув этим строкам исходную длину и добавив отмеченную строку, получим «хороший» набор строк для Т.
7. Решение этой задачи аналогично решению задачи М2213 «Задачника «Кванта».

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

(см. «Квант» №5 за 2010 г.)

1. Сломан один из пикселей в правой части равенства, так что знак факториала «!» превратился в единицу.

2. Речь идет о рулоне бумаги с дыркой в центре: требуется найти длину листа, скатанного в рулон толщиной 3 см. Пусть толщина самого листа равна a см, а радиус дырки в центре рулона равен r см. Мысленно поставим рулоны на стол и посмотрим на них сверху. Площадь кольца у первого рулона (толщиной 1 см) равна $\pi(r+1)^2 - \pi r^2 = \pi(2r+1)$. Но эта же площадь равна $900a$, так как рулон скатан из листа длиной 900 м и толщиной a. Значит, $\pi(2r+1) = 900a$. Аналогично, посчитав двумя способами площадь кольца у второго рулона (толщиной 2 см), получим $\pi(4r+4) = 2700a$. Из этих двух соотношений найдем $r = 0{,}5$ см и $900a = 2\pi$. Поэтому площадь кольца у третьего рулона (толщиной 3 см) равна $\pi(r+3)^2 - \pi r^2 = \pi(6r+9) = 12\pi = 6 \cdot 900a = 5400a$, т.е. длина листа равна 54 метрам.
3. По условию веревка имеет толщину, и ее запас не ограничен. Поэтому веревкой можно просто завалить весь ров!
4. Скошенные ведра можно вставлять друг в друга, при этом стопка получается низкой, и ее удобно транспортировать и хранить. По аналогичному принципу сделаны одноразовые стаканчики для напитков и тележки в супермаркетах.