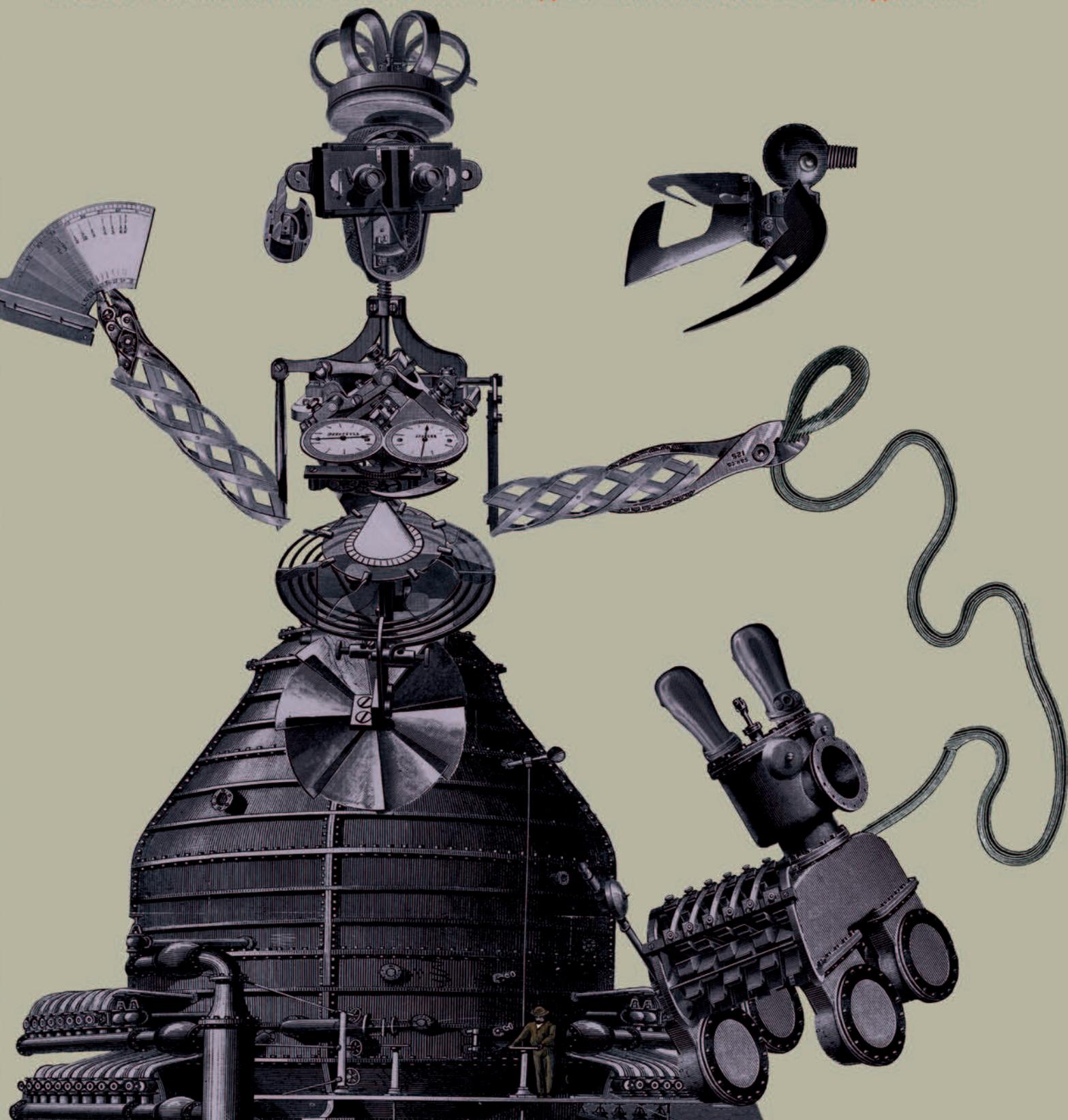


МАЙ/ИЮНЬ

ISSN 0130-2221  
2009 · №3

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



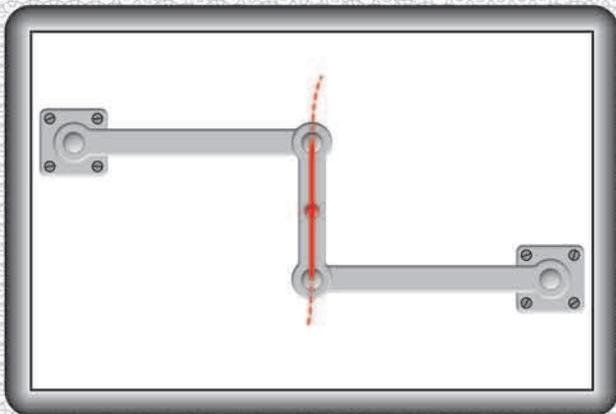


рис. 1

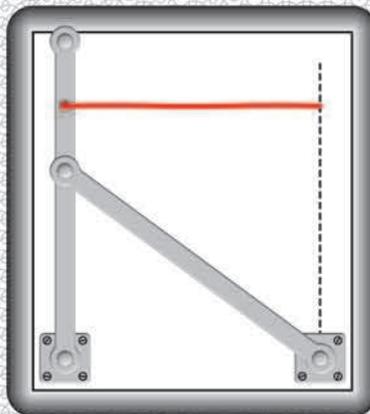


рис. 2

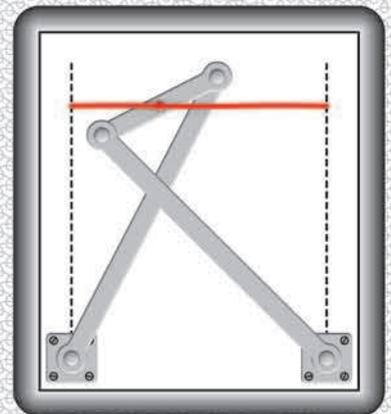


рис. 3

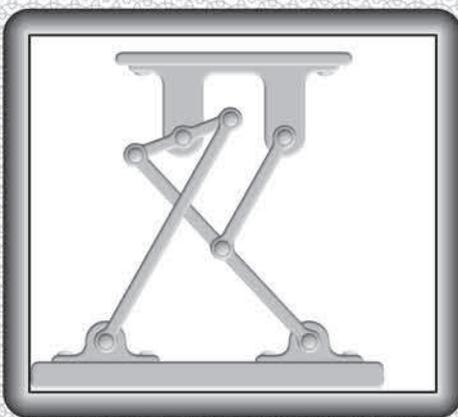


рис. 4

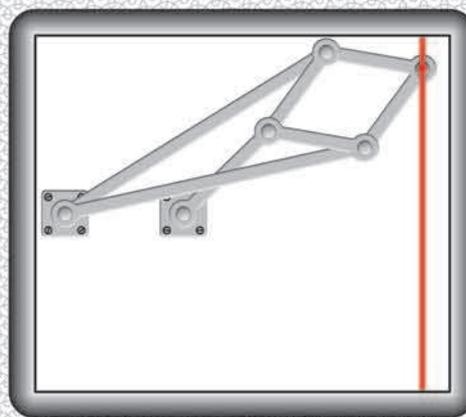


рис. 5

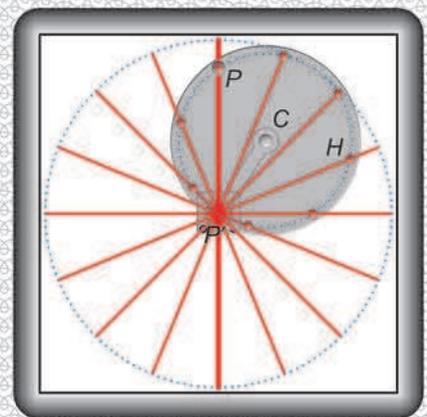


рис. 6

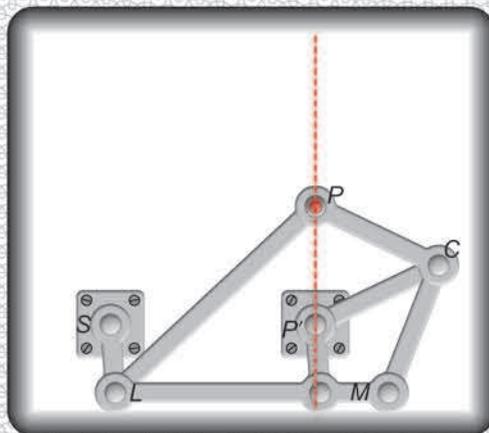


рис. 7

## КАК НАРИСОВАТЬ ПРЯМОЮ?

Для механика-практика иногда необходимо, чтобы некоторая точка перемещалась точно по прямой линии. Если пользоваться направляющими рельсами, то неизбежны износ от трения и температурных деформаций, а значит, и потеря точности. В 1877 году А.Кемпе написал книгу «Как нарисовать прямую» ("How to draw a straight line?"), в которой собрал многие технические решения этой задачи с использованием шарнирных механизмов. На сайте <http://www.math.ru/teacher/kempe/index.htm> представлены изготовленные М.Пановым мультфильмы-иллюстрации, которые показывают в действии механизмы из книги Кемпе.

(Продолжение – на странице 41 внутри журнала)

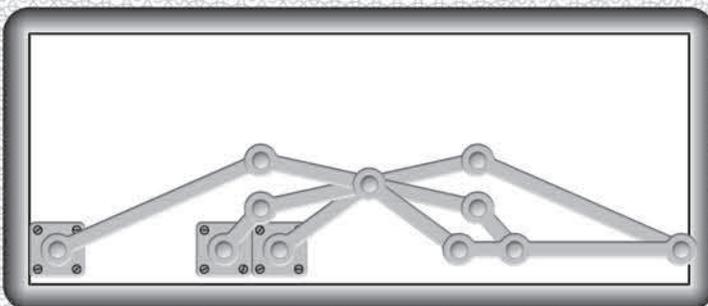


рис. 8

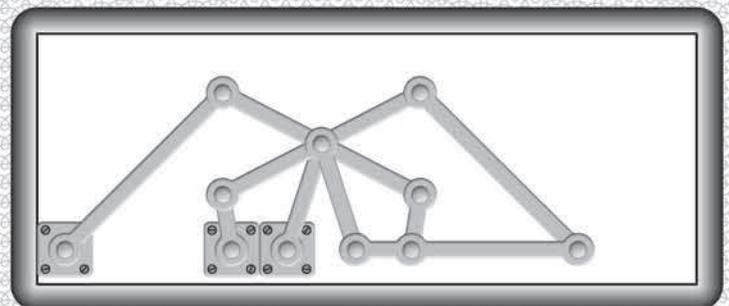


рис. 9

журнал©  
**Квант** МАЙ 2009 №3  
ИЮНЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

главный редактор

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Конвалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

главный редактор

**И.К.Кикоин**

первый заместитель  
главного редактора

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

Бюро  Квантум

© 2009, РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Рассказы о современной механике. *Г.Чёрный*  
8 Теорема Хелли и вокруг нее. *В.Протасов*  
15 Плазма и ... немного биологии. *А.Минеев*

НАШИ ИНТЕРВЬЮ

- 18 Интервью с А.Б.Сосинским

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 25 Задачи М2131–М2138, Ф2138–Ф2144  
26 Решения задач М2111–М2115, Ф2123–Ф2129

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Потoki

К М Ш

- 34 Задачи  
35 Стабильные браки. *В.Уфнаровский*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 37 Гравитационное «отталкивание». *В.Воронов*  
39 Загадки магнитной стрелки. *И.Леенсон*  
41 «Нулевые» линзы. *В.Дроздов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 42 О лемнискате Бернулли. *А.Акопян*  
44 Формула крюков. *А.Спивак*

ЕСТЬ ИДЕЯ?!

- 48 Упругость, текучесть, трение... *А.Стасенко*

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 50 Из плоскости – в пространство

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 51 Поток магнитной индукции. *К.Рыб*

ОЛИМПИАДЫ

- 54 XVII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

ИНФОРМАЦИЯ

- 58 Заочное школа СУНЦ НГУ  
60 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Г.Чёрного*  
II *Кванты Интернета*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*



В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает  
ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»



# Рассказы о современной механике

Г. ЧЁРНЫЙ

## Введение

Мы, люди, как и многие другие живые существа, живем на нашей прекрасной планете Земля. Все, что происходит вокруг нас и внутри нас – движение автомобилей на улицах, полет лайнера в небе, внезапные катастрофические наступления ледников и обвалы снежных лавин, изгибание стального листа под штампом, взрывы угольной пыли в шахтах, пляска пылинок в солнечных лучах, парение орла и стремительное плавание дельфина, неустанное биение сердца и ток крови в живом организме, – все это связано с движением или взаимодействием одних тел или сред с другими, с изменением их свойств при движении. Изучение движения и взаимодействия материальных объектов в природе и в творениях человеческих рук и есть предмет механики. Исключение составляет лишь микромир, им занимаются специальные разделы физики. Отчасти исключение составляет и астрономия, занимающаяся изучением нашей звезды Солнца и окружающих его планет и других космических тел, а также звездных систем и отдельных звезд. Правда, еще в самом начале оформления механики как науки в знаменитом труде И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» возникла ее отдельная ветвь, изучающая движение космических тел, – небесная механика, продолжающая развиваться и приносить результаты и в настоящее время. Уместно напомнить, что одним из первых выдающихся достижений механики в этой области стало знаменитое открытие «на кончике пера» планеты Нептун независимо и почти одновременно Дж.Адамсом в Англии в 1843 году и У.Лeverье во Франции в 1845–46 годах. Эта планета была обнаружена 23 сентября 1846 года астрономом Берлинской обсерватории И.Галле точно в месте, указанном Лeverье.

Механика является научной основой большинства, если не всех, областей техники, промышленности, строительства, транспорта (сухопутного, водного, воздушного, космического), техники сельскохозяйственного производства, военной техники. Может ли кто-нибудь оспаривать, что все существующие виды вооружения, обычные и ядерные, несмотря на большую

*Эта статья написана по материалам лекций, прочитанных академиком Г.Г.Чёрным в ноябре 2005 года в школе имени А.Н.Колмогорова (СУНЦ МГУ) в рамках Научно-образовательной программы Института механики МГУ и в марте 2008 года в Политехническом музее в рамках чтений Академического клуба.*

роль в их развитии и применении компьютерных и информационных технологий, прежде всего и в основном это продукты развития механики? Без механики создание современных высокотехнологичных видов вооружения просто немыслимо. Конечно, значительная часть перспективных технологий основана на новейших достижениях других наук – физики, химии, биологии. Однако использование всех этих научных достижений абсолютно невозможно без механики и ее самых последних достижений.

Современная механика – не только нестареющая, вечно новая наука, а важнейшая фундаментальная наука со своими теоретическими и экспериментальными подходами к решению задач. Наука быстро развивающаяся, захватывающая все более и более широкий круг явлений и приложений. Наука, не только имеющая выдающиеся исторические достижения, но и в самое последнее время получившая феноменальные, ошеломляющие результаты. Наука, без развития которой абсолютно невозможно использование большинства достижений других естественных наук.

Вся ракетная техника и основанная на ней космонавтика – разве это не триумф механики? Именно механика, разрешив ряд труднейших научных задач, позволила конструкторам создать совершенные системы вывода на орбиты искусственных спутников Земли, межконтинентальных баллистических ракет, космических аппаратов различного назначения. А разве не триумфом механики следует назвать удивительные, ошеломляющие успехи в изучении Солнечной системы?

Завершая введение, отметим, что хотя некоторые основы механики изучаются в школьном курсе физики, но сама механика уже давно выделилась в отдельную от физики науку, науку разностороннюю, включающую множество областей. Целью механики является построение математических моделей движения и взаимодействия материальных объектов, т.е. описание этих явлений средствами математики.

В подтверждение всего сказанного рассмотрим ряд примеров. Среди них будут и примеры естественнонаучного содержания, которые говорят о вторжении механики в области исследования других наук и об успехе и плодотворности такого вторжения.

## Разрушение Такомоского моста

Висячие мосты обладают рядом неоспоримых достоинств по сравнению с конструкциями мостов других типов. Однако уже давно было замечено, что висячие

мосты весьма ненадежны при сильном ветре. Одной из крупнейших в истории мостостроения катастроф стало обрушение моста через реку Такома (США) 7 ноября 1940 года. Строительство этого моста (рис.1) было закончено летом 1940 года. Пролет – третий в мире по длине – имел длину 854 м. Большого движения не ожидалось, и мост был построен очень узким – шириной 11,9 м. Проезжая часть была рассчитана на 2 ряда автомобилей. Полотно дороги было подвешено на двух стальных канатах со стрелой провеса 70,7 м.

Сразу после постройки была обнаружена большая чувствительность моста к действию ветра – амплитуды (размахи) колебаний моста достигали 1,5 м. Было сделано несколько попыток устранить эти большие колебания путем введения дополнительных связей и установки гидравлических демпферов (амортизаторов) на пилоны – так называются столбы, поддерживающие основные (несущие) тросы висячих мостах. Но это не предотвратило катастрофы.

Начиная с 8 часов утра 7 ноября наблюдались не очень сильные вертикальные многоузловые (в форме нескольких волн) изгибные колебания с частотой 0,8 Гц. Примечательно, что ветер имел не очень большую скорость – около 17 м/с, тогда как до этого были случаи, когда мост выдерживал более сильный ветер. Около 10 часов утра скорость ветра несколько возросла (до 18,7 м/с), и установились одноузловые (в форме одной волны) изгибно-крутильные колебания со значительно меньшей частотой (0,2 Гц) и весьма большими амплитудами. Когда закрутка достигала максимума, проезжая часть наклонялась к горизонту под углом 45 градусов. Резкое изменение частоты колебаний произошло, по-видимому, вследствие обрыва каких-то важных связей в конструкции. Мост выдерживал эти колебания около часа, после чего большой участок проезжей части полотна отломился и упал в воду. Весь процесс был заснят на киноленту, что явилось ценным материалом для исследования причин обрушения.

Катастрофа привлекла огромное внимание исследователей. Уже через две недели после свершившегося известный механик Т.фон Карман дал объяснение причин катастрофы и даже указал скорость ветра, при которой это может случиться. Разрушение произошло при скорости ветра порядка 18–19 м/с, а Карман расчетом получил 22,2 м/с. Так что даже это можно назвать успехом механики.

Какие выводы отсюда сделали механики? Сейчас через реку Такома построен другой мост. Его ширина увеличена более чем в 1,5 раза и составляет 18 м, изменено также сечение проезжей части. Кроме того, сплошные балки заменены сквозными фермами, что значительно уменьшает силу давления ветра. Современные висячие мосты – это легкие конструкции, подвешенные на стальных канатах, называемых вантами. Они выдерживают большие ветры и прочие нагрузки и нормально функционируют уже много лет. Известно, что таких катастроф, какая была с Такомым мостом, здесь произойти не может. Механики сумели понять, что может произойти и как это предотвратить.

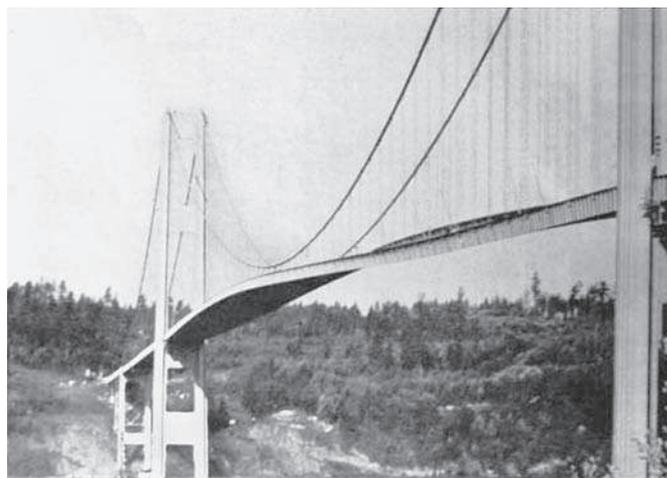


Рис.1. Мост через реку Такома (США)

По прогнозам специалистов, XXI век – это век жестоких техногенных катастроф, стихийных и экологических бедствий. Все чаще приходится слышать сообщения о падении ракет, самолетов, о взрывах на экологически опасных промышленных объектах, об обрушениях зданий. Среди прочих причин трагедий называются ошибки проектирования, связанные с недостаточным знанием законов механики, с использованием неверных математических моделей.

Яркий пример – обрушение в Московском аквапарке. В первоначальных заключениях следственных комиссий обнаруживались и следы терроризма, и плохое качество цемента, и нехватка поддерживающих крышу колонн. И только после обрушения второго здания, спроектированного тем же авторским коллективом (здания Басманного рынка), причины трагедии стали очевидными для всех. Последнюю черту под расследованиями подвело телезаявление руководителя проектов Н.Канчелли, в котором, в частности, говорилось, что во всем виновата компьютерная программа, с помощью которой выполнялись расчеты прочности.

Вообще, надо заметить, что достижения механики в строительстве не всегда освещаются в средствах массовой информации. Например, немногие знают, что самый большой в мире мост Мийо во Франции имеет 7 опор высотой 343 м, длину 2460 м, массу 400000 т (из них 350000 т бетона и 40000 т стали), а в его строительстве стоимостью 500 миллионов долларов участвовали 7 европейских стран. Или, что еще одним примером успешного научного и инженерного решения проблемы взаимодействия конструкций с ветровыми нагрузками является Останкинская телебашня.

### Шагающие роботы

Одной из важных разновидностей роботов являются шагающие роботы, предназначенные для перемещения по труднопроходимой местности. В отличие от колесных и гусеничных машин, шагающий аппарат при движении использует для опоры лишь некоторые участки поверхности. Поэтому он существенно меньше повреждает почвенный покров, что может оказаться

важным для экологии некоторых районов (например, тундры).

Однако указанные преимущества шагающего аппарата определяют его высокую сложность и большое энергопотребление. Аппарат имеет большое число управляемых степеней свободы, т.е. количество углов, определяющих положения звеньев всех ног. А это приводит к сложным конструкциям, использованию высокоэффективных приводов, специальному строению стоп, рассеивающих энергию удара, и т.д. Система управления должна обеспечить обработку информации о местности, принятие решений о характере движения, контроль за их выполнением. Именно создание системы управления аппаратом – центральная проблема шагающего робота. Существующие виды приводов по своим качествам все еще уступают двигательным аппаратам животных и человека.

Для одного из первых в мире шагающих аппаратов, созданных в Институте механики МГУ в 70-е годы прошлого столетия, была выбрана схема «шестиножки» (рис.2). В качестве биологического аналога робота

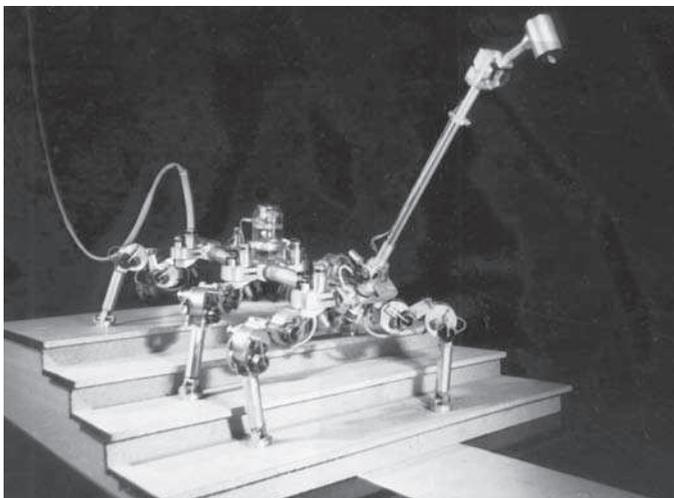


Рис.2. Робот-шестиножка «МаШа» с расположенным на штативе «глазом» (системой технического зрения)

использовался рыжий таракан (пруссак). Ноги таракана – это универсальный биологический объект изучения для создания шагающей машины. Бег таракана можно проследить с помощью кинокамеры. Для этого таракана помещают в стеклянную пробирку и, закрепив ее, снимают бегающего таракана кинокамерой. Основным типом походки таракана является походка 3–3 (трешками). Он идет так, что всегда опирается на три ноги, образующие опорный треугольник, внутри которого располагается центр тяжести его тела. Это существенно облегчает проблему устойчивости, так как опор аппарата на три ноги оказывается устойчивым.

Каждая конечность робота имеет три степени свободы и приводится в движение с помощью трех двигателей с редукторами. На конечностях установлены позиционные датчики, измеряющие углы поворота звеньев ноги друг относительно друга. Система управления двигателями шагающего аппарата построена по иерархическому принципу. Она создает управляющие сигналами,

обеспечивающие движение аппарата с автоматической приспособляемостью к малым неровностям поверхности по командам оператора (или верхнего уровня), задающего основные характеристики ходьбы и движения корпуса аппарата (например, ходьба вперед, назад, вбок, разворот на месте и т.п.).

После появления «шестиножки» в Институте механики МГУ, которая получила имя «МаШа» (МАшина ШАгающая), началось своего рода соревнование между США и СССР, что было нормально для того времени. В ответ на «МаШу» американцы предложили свою версию шестиногого робота. Позже стали появляться и другие шестиногие роботы, например построенные в Германии.

«МаШа» содержала много пионерских научных решений, опередивших свое время, и дала начало созданию умных роботов с иерархической системой управления. Она может действовать самостоятельно, выбирая себе путь по пересеченной местности. Оказалось, что без информации о силах и моментах сил, возникающих между ногами и подстилающей поверхностью, организовать «гладкое» управление ходьбой практически невозможно. С этой целью была разработана система так называемых тактильных датчиков, которые снимают информацию о возникающих силах и посылают ее в систему управления робота. Только благодаря этому можно организовать плавное, а не толчками, движение робота.

Американцы официально объявили, что к 2050 году в их действующих войсках не будет людей. В 2005 году в США был создан четырехногий робот «БигДог» (Большая собака) (рис.3). Этот робот может ходить, бегать и прыгать, преодолевать пересеченную местность, он прекрасно перемещается и по снегу, и по камням, и по грязи. За счет хорошо организованной системы управления он очень устойчив: если его толкнуть, то он, подобно человеку или животному, переставит ноги и не упадет. Энергию роботу дает бензиновый мотор, приводящий в действие гидравлическую систему. Ноги робота в точности скопированы с конечностей животных. В их конструкцию включены амортизаторы,



Рис.3. Навьюченный четырехногий робот «БигДог»

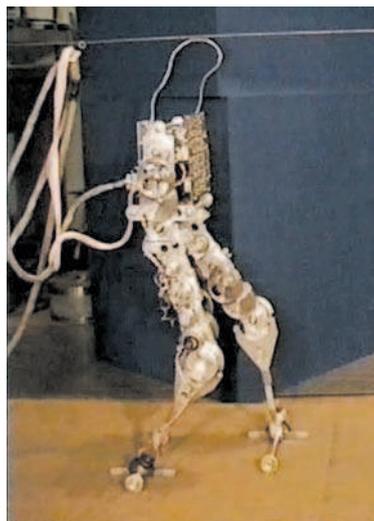


Рис.4. Макет пятизвенного антропоморфного шагающего аппарата

ры, гасящие энергию удара. Длина робота 1 м, рост 70 см, вес 75 кг, что соответствует размерам крупной собаки. Робот снабжен бортовым компьютером, управляющим его передвижением в соответствии с окружающей обстановкой. Многочисленные датчики позволяют оператору робота отслеживать его местоположение, расположение своих и вражеских сил, контролировать состояние бортовых систем робота. «Киберсобака», которая будет «служить» в морской пехоте США, может идти со скоростью 5 км/ч и преодолевать подъемы и спуски до 35 градусов. Она может нести вооружение или иной полезный груз общей массой свыше 40 кг.

Не менее богатую историю, по сравнению с другими шагающими механизмами, имеют и двуногие машины. Так, в 1972 году в Институте механики МГУ разработали модель робота, которая получила имя «Рикша». В движение она приводилась с помощью двух ног и одновременно имела еще и два колеса сзади (отсюда и произошло название робота). Но главной задачей было создание человекоподобного (антропоморфного) робота. Основная проблема и сложность управления двуногой ходьбой заключается в необходимости придания устойчивости неустойчивой конфигурации, которая при выключенном управлении не может быть реализована. Например, «выключение» вестибулярного аппарата человека даже на одну секунду приводит к его падению.

В 1976–82 годах в Институте механики МГУ исследовали механико-математическую модель двуножного робота, представляющего собой плоский пятизвенный механизм, который состоит из корпуса и двух идентичных двухзвенных ног. Ходьба аппарата, как и человека, представляет собой последовательность чередующихся одноопорной и двухопорной фаз. В одноопорной фазе аппарат опирается на одну ногу (опорную), другая нога при этом переносится. В двухопорной фазе он опирается на обе ноги. Одноопорное движение считается баллистическим (пассивным), т.е. это движение происходит по инерции. На аппарат действуют только сила тяжести и, разумеется, силы реакции опоры. А вот приложение каких-либо активных воздействий (моментов сил) в шарнирах («суставах») механизма происходит в двухопорной фазе. При ходьбе человека фаза двойной опоры занимает примерно 20% времени всего шагового цикла, в рассмотренной же модели робота двухопорная фаза считается мгновенной. В 1990-х годах были сконструированы два

макета двуножного шагающего робота: один с двумя телескопическими ногами, другой – антропоморфный (рис.4), и разработаны алгоритмы управления ими на основе предложенного метода баллистического управления ходьбой.

Японцы объявили, что к 2050 году они намерены создать команду полностью самостоятельных человекоподобных роботов, способную выиграть у чемпиона мира по футболу среди людей.

### Биомехатроника

В настоящее время среди новых технологий, сулящих огромные изменения нашему обществу, важное место занимает биомехатроника. Это – новая наука, целью которой является изучение взаимодействия биологических организмов со встроенными мехатронными системами.

История появления термина «биомехатроника» обычно связывается с исследованиями по разработке протезов нижних конечностей группой биомехатроники Массачусетского технологического института в США. Созданный этой группой так называемый магнитореологический протез обеспечивает требуемую походку пациента благодаря использованию информации о силах и моментах, возникающих между протезом и примыкающей к нему оставшейся частью ампутированной конечности.

Сейчас разрабатываются (в частности, в Институте механики МГУ) системы так называемых тактильных роботов. Врач при ряде заболеваний первым делом производит ощупывание пальцами и на основании ощущений делает медицинские выводы о состоянии того или иного органа. Тактильные роботы снабжены тактильными датчиками (подобными тем, которые стоят на обычных шагающих роботах), с помощью которых они могут «ощупывать» разные органы, в том числе места, недоступные для человеческих пальцев (внутри желудка, бронха, кишки, малого таза, брюшной полости, грудной клетки). Полученная информация преобразуется в электронный вид, обрабатывается и анализируется на компьютере. В дальнейшем сигнал может передаваться на другой компьютер по сети Интернет и восприниматься специальным устройством. Это устройство передает ощущение на руку исследователя или врача. Таким образом, наблюдатель, находящийся в непосредственной близости от предмета исследования или же удаленный от него на любое расстояние, в реальном или усиленном (увеличенном) виде будет ощущать то, что робот ощупывает там, внутри пациента. Ну разве это не удивительно?! Ощупывает там и другое устройство, а чувствуете вы и здесь.

На основе тактильных роботов могут быть разработаны и внедрены медицинские лечебные и диагностические аппараты, такие как прибор для использования во время хирургической операции или снабженные тактильными датчиками эндоскопы (гастроскоп, колоноскоп, бронхоскоп), позволяющие определить свойства стенки полого органа, плотность прилегающих тканей и т.д. Кроме того, становится возмож-

ным использование целого ряда инструментов с новыми лечебными возможностями (массажер для внутренних органов, проведение «под контролем пальца» лазерного световода для разрушения опухоли).

### Механика материалов

Сейчас модно говорить и писать о нанотехнологиях. Объекты изучения с пространственным наномасштабом имеются во многих науках – в физике, химии, биологии и медицине. В традиционных задачах механики этот масштаб очень мал, если не сказать пренебрежимо мал, а в ряде задач физики, химии, биологии наномасштаб, наоборот, весьма велик.

В подходах к изучению частиц и процессов наномасштаба у физиков и механиков есть существенное различие. Физики хотят изучать соответствующие процессы, исходя из «основных» принципов – атомно-молекулярной структуры вещества и законов взаимодействия между ними (метод молекулярной динамики). Механики же продолжают рассматривать поведение материалов с наноструктурой как объект механики сплошной среды – науки, которая изучает сплошные среды (твердые, жидкие и газообразные), исходя из специфических для них определяющих соотношений, т. е. связей между деформационными характеристиками и механическими напряжениями. Эти связи всегда заимствуются из соответствующих экспериментов или специально развиваемых теорий. Простейший пример определяющего соотношения – знаменитый закон Гука в теории упругости. Впрочем, этого закона недостаточно, поскольку он относится только к статическим деформациям и не учитывает сил, которые возникают в результате изменения деформаций со временем, например в результате изменения длины пружины. Итак, механики рассматривают наноматериалы как сплошные среды, но с новыми, специфическими для них определяющими соотношениями.

Эти два подхода можно продемонстрировать на примере образования в материале дефектов – наномасштабных трещин – явления, очень важного при разработке теории прочности материалов, одного из важнейших разделов механики твердых деформируемых сред.

Физикам пока удалось решить следующую задачу – сформулирую ее для простоты достаточно приблизительно. Допустим, две противоположные грани кубика из твердого материала начинают раздвигаться, сохраняя свою форму. В одной из боковых граней кубика в направлении, перпендикулярном направлению растяжения, сделан надрез – зачаток или зародыш трещины. Кубик заполнен достаточно большим числом взаимодействующих атомов вещества. Нужно определить минимальную силу растяжения, при которой конец трещины стронется с места – трещина начнет расти. Максимальное число атомов, при котором авторам удалось провести расчеты на современных суперкомпьютерах, равнялось 32 миллионам. С учетом того, что расстояние между атомами в кристалле находится обычно в диапазоне 1,5–3 Å (один ангстрем равен одной десятиллионной доле милли-

метра), размер грани кубика составлял всего-навсего около  $5 \cdot 10^{-5} - 10^{-4}$  мм. Например, для кристалла поваренной соли, решетка которого имеет кубическую форму с расстоянием 2,8 Å между соседними атомами, получим длину ребра, равную  $8,9 \cdot 10^{-5}$  мм. При этом развитие трещины удалось рассчитать лишь на первоначальной стадии, когда трещина еще очень мала по сравнению с размером кубика.

В связи с решением этой задачи были предприняты исследования возможностей применения методов механики сплошных сред либо непосредственно, либо в сочетании с методами типа молекулярной динамики для расчета деформирования и разрушения наноструктурных объектов. Моделирование проводилось для слоистых элементов, а также для элементов в форме нанотрубок. Оказалось, что коэффициенты упругости (модули упругости) пакета, содержащего 10–12 атомных слоев, рассчитанные методом молекулярной динамики, уже практически совпадают с модулями упругости макроскопического объема того же материала.

Удалось разработать подход к моделированию и расчету деформирования наноструктурных объектов, в частности нанотрубок и нанослоев. Этот подход основан на замене (моделировании) исходной атомной системы, образующей рассматриваемый наноструктурный объект, конструкцией из стержней (стержневой системой). Коэффициенты упругости стержней определяются из условия совпадения энергий деформации атомной модели и ее стержневого аналога. Указанный подход применим, поскольку возможно построение такой стержневой системы, эквивалентной по энергии деформации исходной атомной системе. Преимущество подобных моделей в том, что они позволяют при сравнительно маломощных вычислительных средствах проводить расчеты для весьма сложных систем с элементами разных масштабов. В частности, можно выполнить моделирование поведения материала, наполненного нанотрубками.

Механика деформируемого твердого тела и механика материалов все в большей мере становятся фундаментальной основой проектирования материалов с повышенными характеристиками деформирования, прочности и сопротивления развитию трещин. Модели механики позволяют понять причины влияния структуры материала на процессы его деформирования и разрушения. Поэтому они позволяют рассчитать зависимости свойств материала от структуры и механических свойств элементов структуры. Появляется возможность создавать материалы с желаемыми свойствами, подбирая нужные характеристики их структуры. А переход к нанотехнологиям открывает новые возможности для создания материалов с заданной структурой и приводит к необычным эффектам в их механическом поведении.

До сих пор речь шла о возможностях применения моделей и методов механики сплошных сред для моделирования механического поведения наноструктурных объектов. Однако взаимосвязи механики сплошных сред с наноматериалами и нанотехнология-

ми этим не ограничиваются. Имеются экспериментальные (а в некоторых случаях и теоретические) данные, свидетельствующие о влиянии механических воздействий на электромагнитные и оптические свойства наноструктурных и (или) наномасштабных объектов. Например, показано, что механические напряжения растяжения или сжатия существенно влияют на электропроводимость в полупроводниковых приборах нано- и микромасштаба, в частности – на характеристики работы полевого транзистора. Эти эффекты требуют исследования и разработки соответствующих физико-механических моделей, что позволит прогнозировать работу тех или иных изделий наноэлектроники. Использование механических воздействий весьма перспективно для некоторых областей техники.

Подчеркнем, что изделия нано- и микроэлектроники представляют собой, с точки зрения механики, весьма сложные конструкции. Поэтому используемые для расчетов модели также сложны.

В заключение отметим, что развитие нанотехнологий приводит к необходимости экспериментального

контроля не только физико-химических, но и механических свойств наноизделий. Возникла новая область механики, связанная с разработкой и моделированием схем, методов и устройств для проведения испытаний по определению деформационных, прочностных свойств и сопротивления разрушению наноструктурных и наномасштабных объектов. Ввиду сложности осуществления самих испытаний, стало актуальным новое направление – компьютерное моделирование механических испытаний (виртуальные механические испытания). Заметим, что этот метод давно используется почти во всех традиционных областях техники. Так, прежде чем строить и испытывать самолет, что обходится очень дорого, проводят компьютерное моделирование его испытаний.

Можно утверждать, что механика займет достойное место в ряду фундаментальных наук, которые обеспечивают прогресс в развитии общества, основанный на использовании нанотехнологий.

*(Продолжение следует)*

## ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

### Кучевые облака

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

Довольно легко оценить высоту, на которой происходит конденсация пара в «стандартной атмосфере», где температура при подъеме на каждый километр уменьшается на  $6,5^\circ\text{C}$ . Пусть, например, относительная влажность воздуха у поверхности земли  $50\%$ , а его температура  $20^\circ\text{C}$ . Тогда, используя зависимость давления насыщенных водяных паров от температуры (рис.1), можно заключить, что конденсация начнется при  $10^\circ\text{C}$ . Легко вычислить, что температура «стандартной атмосферы» понижается на  $10^\circ\text{C}$  на высоте около  $1,5\text{ км}$ , что приблизительно соответствует высоте плывущих над нами кучевых облаков при таких условиях.

Рис. 1 Температура,  $^\circ\text{C}$

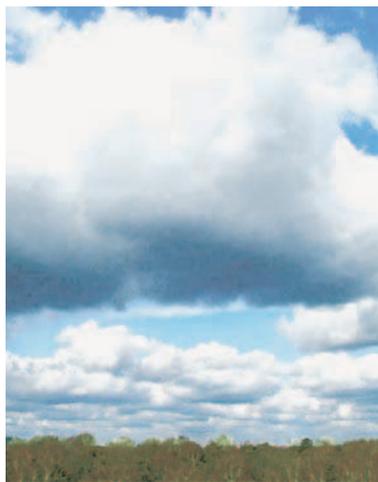


Рис. 2

Очевидно, что чем «влажнее» воздух, тем ниже будут образовываться кучевые облака. Из всех этих рассуждений следует, что кучевое облако должно иметь форму плоского слоя, например блина. Однако при конденса-



Рис.3

ции пара на высоте, которую мы оценили выше, происходит выделение огромного количества тепла. Это тепло нагревает окружающий воздух и содержащийся в нем пар, временно прекращая процесс его конденсации. Нагретый воздух, содержащий значительный процент пара, продолжает подниматься вверх, и конденсация его паров происходит на большей высоте. И так далее. В результате над плоским основанием кучевого облака образуется шапка, которая, как правило, имеет форму «кучи», откуда и происходит название этого типа облаков.

Заметим, что кучевые облака могут иметь самые различные формы (рис.2). Когда усиливается ветер и сталкиваются массы воздуха различной влажности и температуры, форма облаков и их размер изменяются (рис.3).

*К.Богданов*



# Теорема Хелли и вокруг нее

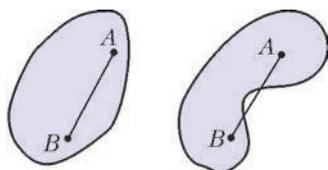
В.ПРОТАСОВ

*Трудно с тремя... Потом число уже не имеет значения.*

В.Черных. Москва слезам не верит

**Н**ЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ ИМЕЮТ собственные имена. Теорема Виета, прямая Эйлера... Любой студент-математик к моменту окончания университета знает их столько, что вполне мог бы сдавать специальный экзамен: какое имя что означает. Если Йенсен – то неравенство, если Фредгольм – то альтернатива, а если Грёбнер – то базис. Австрийский математик Хелли оставил после себя три великие теоремы. Одна из них является теперь неотъемлемой частью выпуклой геометрии, две другие прочно легли в фундамент теории функций. Все три одинаково важны и полезны. Поэтому математики, не вдаваясь в подробности, так и называют их по номерам: первая, вторая и третья теоремы Хелли. Случай, насколько нам известно, уникальный. Об удивительной судьбе автора трех теорем мы еще поговорим, а пока – о математическом содержании. Статья посвящена первой теореме Хелли. Эта теорема относится к красивейшей области математики – выпуклой геометрии.

Неужели выпуклые множества так интересны, что для них создано отдельное направление математики? Да, хотя поняли это люди не сразу. Один из первых результатов выпуклой геометрии – теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников, открытая в 1813 году (о ней можно прочитать, например, в статье Н. Долбилина в «Кванте» № 5–6 за 2001 г.). К середине XX века было установлено множество интересных геометрических свойств, присущих только выпуклым фигурам. Свойства эти касаются объемов, сечений, особых точек, общей структуры выпуклых тел. Так усилиями Минковского, Радона, Фенхеля, Александра, Крейна, Шнирельмана, Болтянского, Рокафеллара, Грюнбаума и многих других математиков выпуклая геометрия оформилась в отдельную дисциплину (см. об этом статью В. Тихомирова в «Кванте» № 4 за



Выпуклое множество

Невыпуклое множество

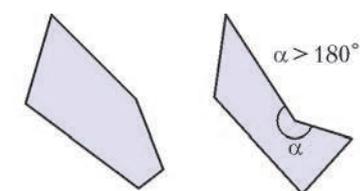
Рис. 1

2003 г.). И первая теорема Хелли заняла в ней достойное место.

Множество называется *выпуклым*, если для любой пары его точек оно целиком содержит отрезок между этими точками (рис.1).

Выпуклые множества мы также будем называть выпуклыми фигурами или выпуклыми телами. Одна точка, круг, треугольник, полу-

плоскость, вся плоскость – выпуклые фигуры. Четырехугольник – выпуклый, если все его внутренние углы меньше  $180^\circ$  (это, впрочем, верно и для любого многоугольника; рис.2). Докажите (это совсем легкое упражнение), что пересечение любого, даже бесконечно-



Выпуклый многоугольник

Невыпуклый многоугольник

Рис. 2

го, числа выпуклых множеств – выпукло. Для множеств в пространстве определение выпуклости остается таким же. Шар, тетраэдр, полупространство – выпуклы. Надеемся, это не очень усложнит восприятие статьи, если мы будем формулировать все результаты в общем случае, для пространства  $\mathbb{R}^d$ , где  $d = 1, 2$  или  $3$  – его размерность. Так,  $\mathbb{R}^1$  – прямая,  $\mathbb{R}^2$  – плоскость, а  $\mathbb{R}^3$  – пространство. Мы ограничимся только этими случаями, хотя читатель, знакомый с понятием  $d$ -мерного евклидова пространства (это – материал первого курса института), легко перенесет все доказательства и на общий случай.

## Первая теорема Хелли

**Теорема 1** (Хелли, 1913). *В пространстве  $\mathbb{R}^d$  дано конечное семейство выпуклых множеств. Известно, что любые  $d + 1$  множеств пересекаются. Тогда все они пересекаются.*

Итак, если любые, какие ни взять,  $d + 1$  множеств нашего семейства имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку. Если  $d = 1$ , то  $\mathbb{R}^1$  – прямая линия. Любое выпуклое множество на прямой – это числовой промежуток, либо конечный (отрезок  $[a;b]$ , интервал  $(a;b)$  или полуинтервал:  $[a;b)$  или  $(a;b]$ ), либо бесконечный: луч или вся прямая. Теорема Хелли в этом случае утверждает, что если на прямой дано конечное семейство промежутков, причем любые два пересекаются, то и все они пересекаются. Доказать это несложно. Пусть, для простоты, все наши промежутки – отрезки  $[a_i; b_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Среди всех левых концов  $a_i$  этих отрезков возьмем наибольший, пусть это будет  $a_k$ . Среди всех правых концов возьмем наименьший, пусть это будет  $b_m$ . Если  $a_k \leq b_m$ , то каждый из данных отрезков  $[a_i; b_i]$  содержит отрезок  $[a_k; b_m]$ , и все доказано. Ну а случай  $a_k > b_m$  невозможен: тогда отрезки  $[a_k; b_k]$  и  $[a_m; b_m]$  не пересекаются.

Московский государственный университет, механико-математический факультет, e-mail: v-protassov@yandex.ru

**Упражнение 1.** Докажите теорему Хелли в случае  $d = 1$  для любых промежутков.

Сложности начинаются с размерности  $d = 2$ . В этом случае теорема Хелли утверждает, что если на плоскости дано конечное семейство выпуклых множеств, причем любые три пересекаются, тогда и все они пересекаются.

**Доказательство теоремы Хелли** мы проведем для случая  $d = 2$ , а случай  $d = 3$  оставим в качестве упражнения. Итак, на плоскости даны выпуклые множества  $A_1, \dots, A_n$ , любые три из них пересекаются. Надо доказать, что все они пересекаются. Применим метод математической индукции по числу множеств  $n$ . Если  $n = 3$ , то доказывать нечего. Пусть  $n \geq 4$ , и дано, что любые  $n - 1$  множеств пересекаются (это – предположение индукции, примененное к любым  $n - 1$  множествам нашего семейства). Докажем, что пересекаются все  $n$ . Предположим обратное: они не пересекаются. Тогда для любого  $i$  найдется точка  $M_i$ , принадлежащая всем множествам  $A_1, \dots, A_n$ , кроме  $A_i$ . Нам понадобятся только первые четыре из этих точек:  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$ . Если эти точки являются вершинами выпуклого четырехугольника  $M_1M_2M_3M_4$ , то возьмем точку пересечения его диагоналей  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  и обозначим ее через  $M$  (рис.3). Для каждого  $k$ , отличного от 1 и 3, точки  $M_1$  и  $M_3$  принадлежат множеству  $A_k$ , значит (в силу выпуклости!), и весь отрезок  $M_1M_3$  лежит в  $A_k$ , поэтому  $M \in A_k$ . Итак,  $M \in A_k$  для всех  $k$ , отличных от 1 и 3. Так же рассматриваем и вторую диагональ  $M_2M_4$ , и получаем, что  $M \in A_k$  для всех  $k$ , отличных от 2 и 4. Итак, точка  $M$  принадлежит всем  $A_k$ . Если же точки не являются вершинами выпуклого четырехугольника, то одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в трех других (почему?). Пусть точка  $M_4$  принадлежит треугольнику  $M_1M_2M_3$  (рис.4). Множество  $A_4$  содержит все три вершины  $M_1M_2M_3$ , а значит, содержит весь треугольник (вновь пользуемся выпуклостью). Следовательно,  $M_4 \in A_4$ . Но, с другой стороны, по определению  $M_4 \in A_k$  при всех  $k \neq 4$ . Потому  $M_4$  – общая точка всех множеств  $A_1, \dots, A_n$ . Это завершает доказательство индуктивного перехода от  $n - 1$  к  $n$ , а значит, и всей теоремы при  $d = 2$ .

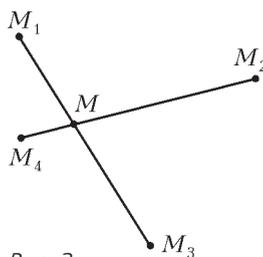


Рис. 3

Если же точки не являются вершинами выпуклого четырехугольника, то одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в трех других (почему?). Пусть точка  $M_4$  принадлежит треугольнику  $M_1M_2M_3$  (рис.4). Множество  $A_4$  содержит все три вершины  $M_1M_2M_3$ , а значит, содержит весь треугольник (вновь пользуемся выпуклостью). Следовательно,  $M_4 \in A_4$ . Но, с другой стороны, по определению  $M_4 \in A_k$  при всех  $k \neq 4$ . Потому  $M_4$  – общая точка всех множеств  $A_1, \dots, A_n$ . Это завершает

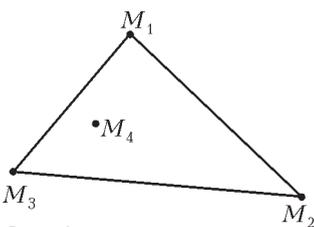


Рис. 4

доказательство индуктивного перехода от  $n - 1$  к  $n$ , а значит, и всей теоремы при  $d = 2$ .

**Упражнения**

2. Примените то же рассуждение для доказательства теоремы Хелли в  $\mathbb{R}^3$ .

3. Приведите пример, показывающий, что теорема Хелли не выполняется для невыпуклых множеств.

Эта теорема верна и для бесконечного семейства выпуклых множеств. Правда, с одним дополнитель-

ным условием: все множества должны быть не только выпуклы, но еще и ограничены и замкнуты. С ограниченностью все понятно: множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре. А что значит замкнутость? Множество  $A$  называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Это означает, что если последовательность точек  $x_k, k \in \mathbb{N}$ , каждая из которых принадлежит  $A$ , стремится (т.е. неограниченно приближается) к некоторой точке  $x$ , то предельная точка  $x$  также принадлежит  $A$ . Например, одна точка – замкнутое множество. Круг без границы (открытый круг) не замкнут, а с границей – замкнут. Но если выколотить из круга любую точку, он перестает быть замкнутым. Для выпуклых множеств можно сказать проще: замкнутые – это множества, взятые со своей границей. Итак,

*Теорема Хелли верна и для бесконечных семейств выпуклых множеств, если все множества ограничены и замкнуты.*

Доказывать мы этого не будем, отметим только, что и ограниченность и замкнутость существенны. Например, в семействе лучей  $A_k = [k; +\infty), k \in \mathbb{N}$ , на прямой  $\mathbb{R}^1$  все множества выпуклы и замкнуты, и любые два пересекаются, но все они не имеют общей точки. Здесь не выполнено условие ограниченности. А если не выполнено условие замкнутости, контрпример дает

семейство интервалов  $A_k = \left(0; \frac{1}{k}\right), k \in \mathbb{N}$ .

**Кто вы, мистер Хелли?**

Жизнь Эдварда Хелли – столь же яркая и необычная, как и его теоремы. Казалось бы, злая судьба делала все, чтобы не дать ему заниматься наукой. Хотя начало жизни обещало блистательную карьеру. Защитив в 1907 году диссертацию в Венском университете, 23-летний ученый был направлен на годовую стажировку в Германию, в Геттингенский университет – центр мировой математики того времени. Его учителями стали Гильберт, Минковский, Клейн. Вернувшись в Вену, он занялся новым передовым направлением – теорией функций. В 1912 году Хелли публикует работу «Über lineare Funktionaloperationen» (О линейных функциональных операторах), где доказывает две фундаментальные теоремы, которые стали потом называться второй и третьей теоремами Хелли, а кроме того, доказывает один из основополагающих результатов теории функций – теорему Хана–Банаха (за 15 лет до Хана и за 20 – до Банаха!). Хелли осознает исключительную важность выпуклой геометрии и через год доказывает «первую теорему Хелли». Да, да, первая теорема Хелли появилась на год позже второй и третьей! Но опубликовать он ее не успел. В 1914 году грянула первая мировая война, и подданный Австро-Венгерской империи Эдвард Хелли был призван на восточный фронт – воевать с Россией. После года тяжелых боев лейтенант Хелли получил смертельное ранение: пуля прошла через легкое. Он чудом выжил, попал в русский плен, несколько лет провел в русских госпиталях, а затем в лагерях для военнопленных в Сибири. В 1918 году война закончилась. Для всех, но

не для пленных на территории России. Поскольку, как писали западные историки, «русские армии, вместо того чтобы сложить оружие, начали воевать друг с другом». В России началась гражданская война, голод, неразбериха. Хелли добрался до Владивостока, оттуда – в Японию, через всю Азию – домой. Лишь в 1920 году ему удалось вернуться в Вену, где он (после шестилетнего перерыва!) возвращается к научным занятиям и получает ряд сильных результатов. Несмотря на это, устроиться на преподавательскую работу он не смог: все места в университетах были заняты молодыми, и тридцатисемилетний инвалид войны оказался никому не нужным. Но Хелли не сдаётся: зарабатывает репетиторством, пишет «решебники», даже работает в банке, а после – в страховой компании. Постепенно его жизнь устраивается, служба в страховой компании приносит хороший доход, оставляя время для научных исследований, которые он не прекращает ни на день. Казалось бы – черная полоса в жизни прошла. Но в 1938 году в Вену входят нацисты (печально известный «аншлюс Австрии»), и еврея Хелли увольняют, подвергают преследованиям. Он принимает решение эмигрировать с семьей в США. Если бы он этого не сделал, то, вероятно, оказался бы в газовой камере. Жизнь в Америке поначалу была нелегкой: страна переполнена учеными из Европы, бежавшими от фашизма. Лишь поддержка и помощь Альберта Эйнштейна позволили Хелли получить работу в университете, где он наконец-то смог полностью сконцентрироваться на научной работе.

### Приложения теоремы Хелли

Мы начнем с применений теоремы Хелли к задачам элементарной геометрии.

**Задача 1.** На плоскости дано произвольное множество точек. Любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Тогда<sup>1</sup> и все множество можно накрыть кругом радиуса 1.

**Решение.** Применим теорему Хелли к семейству замкнутых кругов единичного радиуса с центрами в точках данного множества. Любые три круга пересекаются (их общая точка – центр единичного круга, который покрывает три соответствующие точки). Значит, все круги имеют некоторую общую точку  $O$ . Тогда единичный круг с центром  $O$  содержит все точки нашего множества.

Решение задачи 1 с применением теоремы Хелли появилось впервые в 1941 году в работе Блюментала и Валина. Однако в том же году его независимо получил ученик 182 московской школы Миша Бонгард. Случилось это так. Задача 1 была предложена на седьмой Московской математической олимпиаде школьников весной 1941 года. Ее авторы предполагали другое решение. Однако М.Бонгард свел задачу к теореме Хелли, которую, конечно же, не знал, но достаточно быстро доказал для случая, когда все выпуклые фигуры – одинаковые круги. В том же году талантливый

<sup>1</sup> В формулировках задач и упражнений мы будем опускать слова «Докажите, что...»

школьник поступил в университет, но начавшаяся война прервала все жизненные планы. Он ушел на фронт, был ранен. После войны Михаил Моисеевич Бонгард стал крупнейшим математиком, одним из основоположников математического моделирования и теории распознавания образов.

Вот еще одно применение теоремы Хелли к геометрической задаче. Дан произвольный выпуклый семиугольник. Рассмотрим всевозможные выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника. Сколько всего таких пятиугольников? Ровно 21. В самом деле, каждому пятиугольнику соответствует пара вершин (семиугольника), которые он не содержит. Поэтому пятиугольников столько, сколько пар вершин у семиугольника, что равно числу сочетаний из 7 по 2, а это  $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ . Оказывается, все эти пятиугольники имеют общую точку!

**Задача 2.** Для произвольного выпуклого семиугольника все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.

**Решение.** Каждый пятиугольник не содержит ровно две вершины семиугольника, поэтому любые три пятиугольника имеют общую вершину, а значит – пересекаются. Остается применить теорему Хелли.

Следующий пример – из алгебры. Напомним, что линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида  $ax + by + c < 0$  (строгое неравенство) или  $ax + by + c \leq 0$  (нестрогое).

**Задача 3.** Дана система из 100 линейных неравенств. Если любые три из них имеют общее решение, то и вся система имеет решение.

**Решение.** Множество точек  $(x; y)$ , удовлетворяющих линейному неравенству, является полуплоскостью, либо, в исключительном случае, когда  $a = b = 0$ ,  $c < 0$  (или  $c \leq 0$ ), плоскостью. В любом случае это множество выпукло. Теперь применяем теорему Хелли.

**Задача 4.** На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Известно, что для любых трех отрезков найдется прямая, их пересекающая. Тогда существует прямая, пересекающая все эти отрезки.

Формулировка этой задачи вполне элементарна, а вот решение – нет. Нужно будет рассмотреть выпуклые множества, состоящие не из точек, а из прямых. С этим приемом мы встретимся и в дальнейшем.

**Решение.** Введем систему координат так, что ось  $Oy$  параллельна данным отрезкам. Любой из отрезков состоит из точек  $(x; y)$ , для которых  $x = x_0$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$ , где  $x_0, y_1, y_2$  – некоторые числа. Прямая  $y = kx + b$  пересекает этот отрезок, если  $y_1 \leq kx_0 + b \leq y_2$ . Поставим этой прямой в соответствие точку  $(k; b) \in \mathbb{R}^2$ . Множество точек-прямых  $(k; b)$ , пересекающих данный отрезок, удовлетворяет двум линейным неравенствам, а значит – выпукло. Любые три таких множества пересекаются, поскольку существует прямая, пересекающая три отрезка. Поэтому все множества имеют общую точку, т.е. существует прямая, пересекающая все отрезки.

**Упражнения**

4. Сформулируйте и докажите аналог задачи 1 в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

5. На координатной плоскости дано несколько вертикальных отрезков. Если для любых трех отрезков существует парабола  $y = x^2 + px + q$ , которая их пересекает, то найдется такая парабола, пересекающая сразу все отрезки.

**Теорема Минковского–Радона**

Теперь перейдем к более значимым приложениям теоремы Хелли, составляющим вполне самостоятельные и важные теоремы. Первая из них была доказана в 1911 году великим немецким математиком Германом Минковским (1864–1909), одним из основателей выпуклой геометрии и выпуклого анализа, а затем усилена его учеником Иоганесом Радонам (1887–1956). Эта теорема устанавливает одно общее геометрическое свойство всех выпуклых множеств.

**Теорема 2** (Минковский, 1911; Радон, 1916). *Внутри произвольного ограниченного выпуклого множества в пространстве  $\mathbb{R}^d$  найдется точка  $M$ , обладающая следующим свойством: для любой хорды  $AB$ , проходящей через  $M$ , имеем  $\frac{AM}{BM} \leq d$ .*

Для данного ограниченного выпуклого множества  $G$  наименьшее число  $\gamma$ , для которого найдется точка  $M$  такая, что  $\frac{AM}{BM} \leq \gamma$  для любой хорды  $AB$ , проходящей через  $M$ , называется константой Минковского–Радона. Мы будем обозначать эту константу  $\gamma(G)$ . Ясно, что всегда  $\gamma(G) \geq 1$ . В самом деле, для произвольной хорды можем считать, что  $\frac{AM}{BM} \geq 1$ , иначе поменяем местами точки  $A$  и  $B$ . С другой стороны, например, для круга на плоскости  $\gamma(G) = 1$ , то же – для шара в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Это же верно для любой центрально-симметричной выпуклой фигуры, поскольку, поместив точку  $M$  в центр симметрии, получим  $\frac{AM}{BM} = 1$  для любой хорды. Поэтому для прямоугольника или для куба константа Минковского–Радона равна 1. Верно и обратное: если  $\gamma(G) = 1$ , то фигура  $G$  имеет центр симметрии (упражнение 6). Таким образом, константа Минковского–Радона – это своего рода мера несимметричности фигуры. Теорема 2 утверждает, что «слишком несимметричных» выпуклых фигур не бывает, для каждой из них  $\gamma \leq d$ . Так, у любой плоской фигуры  $\gamma \leq 2$ , а у любой пространственной  $\gamma \leq 3$ .

**Доказательство** проведем для плоскости ( $d = 2$ ). Для каждой точки  $A \in G$  обозначим через  $G_A$  фигуру, гомотетичную  $G$  с коэффициентом  $\frac{2}{3}$  относительно точки  $A$ . Иными словами,  $G_A$  получается из фигуры  $G$  сжатием относительно точки  $A$  с коэффициентом  $\frac{2}{3}$ . Для любых трех точек  $A_1, A_2, A_3 \in G$  фигуры  $G_{A_1}, G_{A_2}$  и  $G_{A_3}$  имеют общую точку  $K$  – точку пересечения медиан треугольника  $A_1A_2A_3$  (рис.5). В самом деле, если  $P$  – середина отрезка  $A_2A_3$ , то по свойству медиан  $\frac{A_1K}{A_1P} = \frac{2}{3}$ , а так как  $P \in G$  (выпуклость!), то  $K \in G_{A_1}$ .

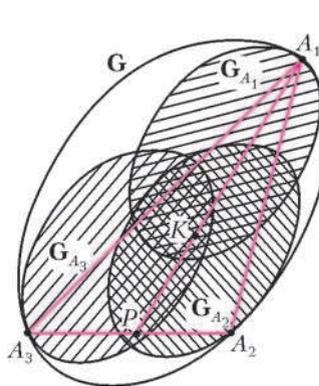


Рис. 5

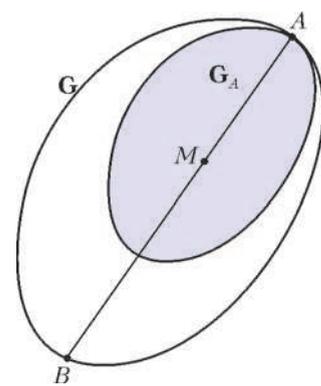


Рис. 6

Аналогично,  $K \in G_{A_2}$  и  $K \in G_{A_3}$ . Применив теорему Хелли, получаем, что все фигуры  $G_A, A \in G$ , пересекаются в некоторой точке  $M$  (рис.6). Если провести через  $M$  произвольную хорду  $AB$ , то  $\frac{AM}{AB} \leq \frac{2}{3}$ , поскольку  $M \in G_A$ , а значит,  $\frac{AM}{BM} \leq 2$ .

Какая же фигура является самой несимметричной, т.е. у какой фигуры  $\gamma = d$ ? Ответ вполне ожидаем: на плоскости – это треугольник, причем любой, а в пространстве – тетраэдр (упражнение 8). Удивительно другое. Оказывается, это – единственные фигуры (в размерностях 2 и 3), для которых константа Минковского–Радона равна  $d$ , у всех остальных фигур она меньше!

**Упражнения**

- 6. Если константа Минковского–Радона замкнутого выпуклого множества равна 1, то множество имеет центр симметрии.
- 7. Докажите теорему Минковского–Радона в  $\mathbb{R}^3$ .
- 8. Для любого треугольника  $\gamma = 2$ , а для любого тетраэдра  $\gamma = 3$ .
- 9. Вычислите константу Минковского–Радона
  - а) для трапеции со сторонами 1,1,1 и 2;
  - б) для прямого кругового конуса;
  - в) для правильной треугольной призмы.
- 10. Приведите пример плоской фигуры, у которой  $\gamma = \frac{3}{2}$ .
- 11\*. Если для плоской фигуры  $\gamma = 2$ , то это треугольник. Если для выпуклого тела в  $\mathbb{R}^3$   $\gamma = 3$ , то это тетраэдр. (Фигуру и тело считаем замкнутыми.)

**Неравенство Юнга**

Возьмем произвольное множество на плоскости, конечно или бесконечное, выпуклое или нет. Известно, что расстояние между любыми двумя его точками не превосходит 1. Интересно, кругом какого радиуса можно накрыть это множество? Чтобы строго поставить задачу, мы ограничимся замкнутыми множествами (это сделано для удобства и, вообще говоря, существенно) и введем два обозначения.

Диаметром ограниченного замкнутого множества называется наибольшее расстояние между двумя его точками. Диаметр множества мы будем обозначать буквой  $D$ , а наименьший радиус круга (в  $\mathbb{R}^3$  – шара), в котором помещается это множество, – через  $R$ . Ясно, что всегда  $R \leq D$ . В самом деле, круг (шар) радиуса

$D$  с центром в любой из точек данного множества содержит все множество. Можно ли обойтись меньшим радиусом – вот вопрос. Для некоторых множеств – да. Например, прямоугольник диаметра  $D$  можно накрыть кругом радиуса  $D/2$ . Действительно, диаметр прямоугольника равен его диагонали, а радиус описанного круга равен ее половине. Так что для прямоугольника  $R = D/2$ . На самом деле это верно для любого множества, имеющего центр симметрии (упражнение 12). А вот для равностороннего треугольника радиус накрывающего круга чуть больше:  $R = \frac{\sqrt{3}}{3}D$ . Оказывается, что такого радиуса хватит не только для треугольника, но и для любого плоского множества. Эта теорема была доказана в 1901 г. немецким математиком Генрихом Юнгом.

**Теорема 3** (Юнг, 1901). Любое ограниченное замкнутое множество  $A \subset \mathbb{R}^d$  диаметра  $D$  можно поместить в шар радиуса  $\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}D$ .

Итак,  $R \leq \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}D$ . Это – неравенство Юнга

между диаметром множества и радиусом накрывающего шара. Так, для любого плоского множества

$R \leq D \sqrt{\frac{2}{2(2+1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}D$ . Как мы видели, равенство достигается для правильного треугольника. А для

любого множества в  $\mathbb{R}^3$  получаем  $R \leq D \sqrt{\frac{3}{2(3+1)}} = \sqrt{\frac{3}{8}}D$ , что в точности соответствует правильному тетраэдру.

Неравенство Юнга доказано за 12 лет до появления теоремы Хелли. Но математика не всегда подчиняется хронологии. И неравенство Юнга – естественное следствие теоремы Хелли. А увидеть это нам поможет задача 1 (см. выше). Мы докажем теорему 3 пока только для плоских множеств, т.е. при  $d = 2$ .

**Доказательство теоремы 3.** Обозначим  $R_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}D$  и докажем, что любые три точки множества  $A$  можно накрыть кругом радиуса  $R_2$ . Воспользовавшись задачей 1, получим, что множество  $A$  целиком накрывается кругом радиуса  $R_2$ , что и нужно. Возьмем любые три точки множества  $A$ . Они являются вершинами треугольника  $\Delta$ , все стороны которого не превосходят  $D$ . Если  $\Delta$  – прямоугольный или тупоугольный (включая вырожденный случай, когда вершины лежат на одной прямой), то круг, построенный на его наибольшей стороне как на диаметре, содержит  $\Delta$ . Радиус этого круга не превосходит  $D/2$ , что даже меньше, чем нужно. Если же  $\Delta$  – остроугольный, то наибольший из его углов  $\geq 60^\circ$ , и по теореме синусов радиус его описанного круга не превосходит  $\frac{D}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}D$ .

Теперь вполне ожидаемо было бы упражнение для читателя «докажите теорему 3 в пространстве  $\mathbb{R}^3$ ».

Однако, в отличие от предыдущих примеров, сделать это не так просто, трехмерный случай здесь сильно отличается от плоского. Причем начало доказательства совпадает почти дословно: с помощью теоремы Хелли теорема 3 сводится к четырем точкам (упражнение 4), т.е. к следующему утверждению:

*Тетраэдр, все ребра которого не превосходят  $D$ , содержится в круге радиуса  $R_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}D$ .*

Осталось «всего лишь» это доказать. Здесь, однако, нас подстерегают трудности. Наше рассуждение с треугольником нельзя прямо перенести на тетраэдр. Неясно, что значит «тупоугольный тетраэдр», и нет теоремы синусов, с помощью которой можно было бы найти радиус описанной сферы через длину ребра. Придется идти другим, более длинным путем.

**Читатель может пропустить это рассуждение и сразу перейти к упражнениям или к следующему разделу.** А для тех, кто все же хочет разобраться с трехмерным неравенством Юнга, мы наметим контуры доказательства.

1) Возьмем шар наименьшего радиуса, содержащий данный тетраэдр  $\Delta$ . Это, невинное на первый взгляд, предположение вызовет протест у всякого математика. А почему такой шар существует, почему наименьший радиус достигается? Этот факт требует объяснения! В данном случае наименьший шар действительно существует, и математик скажет, что «это следует из соображений компактности». Мы не будем приводить строгого доказательства, это завело бы нас слишком далеко в область математического анализа. Проверим, что наименьший шар существует.

2) Итак, у каждого тетраэдра  $\Delta$  есть шар наименьшего радиуса, его содержащий. Обозначим радиус этого шара как  $R(\Delta)$ . Среди всех тетраэдров, у которых длины ребер не превосходят  $D$ , найдется тетраэдр с наибольшим значением  $R(\Delta)$ . Мы вновь опустим доказательство того, что этот тетраэдр существует, скажем только, что это опять «следует из соображений компактности». Назовем этот тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ . Нам нужно доказать, что  $R(\Delta) \leq R_3$ .

3) Если ни одна из вершин тетраэдра не лежит на поверхности наименьшего шара, то радиус шара можно уменьшить так, чтобы он по-прежнему содержал тетраэдр. Значит, шар – не наименьший. То же, если только одна вершина лежит на поверхности шара. Если ровно две вершины, например  $A_1$  и  $A_2$ , лежат на поверхности шара, то  $A_1A_2$  – его диаметр, иначе радиус шара вновь можно уменьшить. Следовательно, в этом случае  $R(\Delta) = \frac{1}{2}A_1A_2 \leq \frac{1}{2}D < R_3$ . Наконец, если ровно три вершины, например,  $A_1, A_2$  и  $A_3$ , лежат на поверхности шара, то его центр лежит в плоскости  $A_1A_2A_3$ , а сечение шара этой плоскостью есть круг наименьшего радиуса, содержащий треугольник  $A_1A_2A_3$ , в противном случае опять радиус шара можно уменьшить. Согласно доказанному нами неравенству Юнга для плоскости, радиус круга, а значит и равный ему радиус шара, не превосходит  $R_2$ , что меньше  $R_3$ . Итак, остался последний случай: все четыре вершины тетраэдра лежат на поверхности шара, т.е. он является описанным шаром тетраэдра.

4) Если тетраэдр  $\Delta$  – правильный с длиной ребра  $D$ , то радиус его описанного шара как раз равен  $R_3$ . Если же тетраэдр не правильный, то одно из его ребер, например  $A_3A_4$ , меньше  $D$ . Зафиксируем грань  $A_1A_2A_3$ , а грань  $A_1A_2A_4$  будем поворачивать относительно ребра  $A_1A_2$ . Таким образом, мы меняем двугранный угол между гранями, а

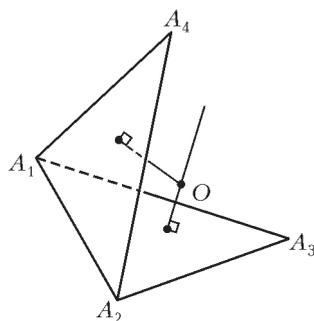


Рис. 7

сами грани не изменяем. По какой линии будет двигаться при этом центр  $O$  описанного шара тетраэдра? По перпендикуляру, восставленному к грани  $A_1A_2A_3$  в центре ее описанной окружности (рис.7). Чем ближе точка  $O$  к плоскости грани, тем меньше радиус описанного шара, а чем дальше – тем больше. Значит, немного изменив двугранный угол – либо увеличив, либо уменьшив его, можно переместить точку  $O$  дальше от грани, а значит, увеличить радиус описанного шара. Причем, так как двугранный угол изменился мало, ребро  $A_3A_4$  как было, так и останется меньше  $D$ , а длины остальных ребер не поменялись вовсе. Значит, тетраэдру  $\Delta$  не соответствовал наибольший радиус шара. Получили противоречие, чем и завершается доказательство.

#### Упражнения

12. Для любого центрально-симметричного множества  $R = D/2$ .

13. Верно ли, что если  $R = D/2$ , то множество имеет центр симметрии?

14. Верно ли, что если для выпуклого плоского множества  $R = \frac{\sqrt{3}}{3}D$ , то это – правильный треугольник?

#### Звездные множества и теорема Красносельского

Представим себе, что мы попали в комнату весьма причудливой формы, не прямоугольную и даже не выпуклую. Из каждого места в комнате мы можем разглядеть лишь некоторую ее часть. Если же нам удалось найти точку, из которой видна вся комната, то комната называется *звездной* относительно этой точки. Итак, ограниченное замкнутое множество  $G$  называется

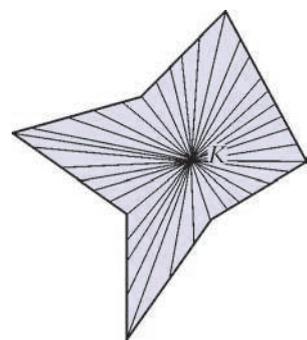


Рис. 8

звездным, если оно содержит некоторую точку  $K$ , из которой видна все множество (рис.8). Это означает, что для любой точки  $X \in G$  отрезок  $KX$  лежит в  $G$ . Говорят еще, что  $G$  звездно относительно точки  $K$ . Например, множество, состоящее из нескольких отрезков, выходящих из одной точки, звездно (относительно этой точки), хотя оно не выпукло. А выпуклые множества – это те, которые звездны относительно каждой своей точки.

Зачем нужны звездные множества? Во многих задачах математики интересующее нас множество не является выпуклым, но часто обладает каким-то другим, более слабым свойством. Звездность – одно из таких свойств. Как определить, является ли множество звездным? Для этого есть следующий замечательный критерий, доказанный Марком Александровичем Красносельским (1920–1997), выдающимся советским математиком. Получил он этот результат будучи еще совсем молодым человеком, когда, призванный в Красную

Армию, преподавал в артиллерийском училище в городе Талгар, близ Алма-Аты. Эта теорема – один из первых результатов Красносельского, принесших ему всемирную известность. Мы сформулируем ее только для плоскости, хотя точно так же она доказывается и для множеств в пространстве (надо только в формулировке заменить «три точки» на «четыре»).

**Теорема 4** (Красносельский, 1946). *Если любые три точки плоского множества  $G$  видны из некоторой его точки, то найдется точка, из которой видно все множество (т.е.  $G$  – звездно).*

Вернувшись к аналогии с комнатой, представим, что на ее стенах везде висят картины. Тогда если любые три картины можно одновременно увидеть из подходящего места в комнате, то найдется точка, из которой видны сразу все картины.

Родство с теоремой Хелли видно сразу: «если каждые три – то и все...» Но до доказательства еще далеко, сначала нужна предварительная работа. Первое – нам понадобится понятие выпуклой оболочки.

Выпуклой оболочкой множества  $A$  называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих  $A$ . Для получения выпуклой оболочки нужно взять все выпуклые множества, содержащие  $A$ , и пересечь. Получим выпуклое множество (как пересечение выпуклых множеств). Любое выпуклое множество, содержащее  $A$ , содержит и его выпуклую оболочку (докажите это). Итак, выпуклая оболочка – это наименьшее выпуклое множество, содержащее  $A$ . Несколько примеров показано на рисунке 9.

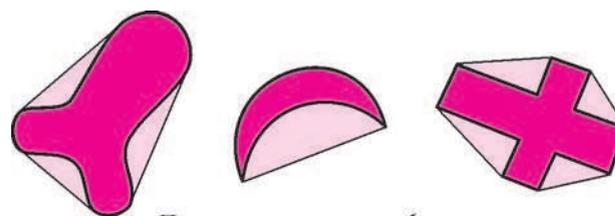


Рис. 9 Примеры выпуклых оболочек

И еще один факт, который мы используем в доказательстве. Для любых ограниченных замкнутых множеств  $A$  и  $B$  среди всех отрезков, соединяющих точку из  $A$  с точкой из  $B$ , существует самый короткий. Иными словами, расстояние между двумя ограниченными замкнутыми множествами всегда достигается.

**Доказательство теоремы 4.** Для каждой точки  $X \in G$  обозначим через  $V_X$  геометрическое место точек множества  $G$ , из которых видна точка  $X$ . По условию, любые три множества  $V_{X_1}, V_{X_2}$  и  $V_{X_3}$  пересекаются. На этом месте можно вспомнить гоголевскую Агафью Тихоновну: «Ах, если бы губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмича...» Ах, если бы эти множества были выпуклы! Тогда из теоремы Хелли немедленно получилось бы, что все они имеют общую точку, из которой было бы видно все множество  $G$ . Но, увы! Они могут быть невыпуклы (рис. 10).

Попробуем обойти эту трудность. Рассмотрим не сами множества  $V_X$ , а их выпуклые оболочки. К ним мы можем применить теорему Хелли. Получаем, что существует точка  $C$ , принадлежащая выпуклым обо-

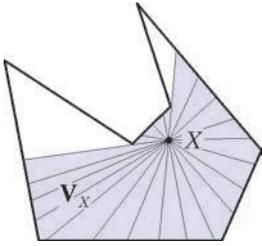


Рис. 10

лочкам всех множеств  $V_X$ ,  $X \in G$ . Но будет ли все множество  $G$  видно из точки  $C$ ? Оказывается, да. Хотя пока не очевидно даже, что точка  $C$  принадлежит множеству  $G$ , ведь это множество не выпукло! Итак, докажем от противного, что множество  $G$  звездно относительно точки  $C$ . Пусть это не так, и некоторая точка  $N \in G$  не видна из  $C$ . Это значит, что некоторая точка  $A$  отрезка  $CN$  не принадлежит  $G$ . Пусть  $\rho > 0$  – расстояние от  $A$  до множества  $G$ , т.е., расстояние от точки  $A$  до ближайшей к ней точки  $G$ . Пусть также  $B$  – ближайшая к  $A$  точка отрезка  $NA$ , принадлежащая  $G$ . Отложим на отрезке  $BA$  отрезок  $BP = \frac{1}{2}\rho$ . Поскольку  $\rho \leq BA$ , точка  $P$  лежит на отрезке  $BA$ . Наконец, пусть  $V$  – ближайшая к множеству  $G$  точка отрезка  $PA$ , а  $U \in G$  – ближайшая к  $V$  точка множества  $G$ . Заметим, что  $V$  отлична от  $A$  (это важно!). Кроме того, угол  $UVA$  – не острый. В противном случае, если  $\angle UVA < 90^\circ$ , на отрезке  $VA$  можно взять близкую к  $V$  точку  $V'$ , для которой угол  $\angle UV'A$  также острый. Но тогда в треугольнике  $UV'V$  сторона  $UV$  лежит напротив тупого угла, а значит – наибольшая. Получаем  $V'U < VU$ , что противоречит определению точки  $V$ , как ближайшей к множеству  $G$  точке отрезка  $PA$ .

Проведем теперь через точку  $U$  прямую, перпендикулярную  $VU$ , и назовем  $H$  полуплоскость, ограниченную этой прямой, не содержащую точку  $V$  (рис. 11). Докажем, что множество  $V_U$  целиком лежит в  $H$ . Если это не так, то найдется точка  $X$ , не лежащая в  $H$ , для которой весь отрезок  $UX$  лежит в  $G$  (рис. 12). Так как угол  $VUX$  – острый, то на отрезке  $UX$  можно взять близкую к  $U$  точку  $U'$ , для которой угол  $VU'X$  также острый, и получаем  $VU' < VU$ , что противоречит определению точки  $U$ , как ближайшей к  $V$  точке множества  $G$ . Итак, множество  $V_U$  лежит в полуплоскости  $H$ . Но тогда и его выпуклая оболочка лежит в  $H$ , ведь полуплоскость – выпуклое множество! Значит, и точка  $C$  лежит в  $H$ , что невозможно, поскольку  $\angle UVC \geq 90^\circ$ . Итак, мы предположили, что существует точка, которая не видна из точки  $C$ , и пришли к противоречию. Теорема доказана.

### Теория приближений

Еще одна область применения теоремы Хелли – теория приближений. Она изучает, как имеющиеся «неудобные» функции или числовые данные (например, полученные в результате эксперимента) приближать более простыми и удобными. Допустим, некоторый физический процесс может быть описан функцией  $F(x)$ . Сама функция нам неизвестна, но мы можем узнать ее значение в любой точке. Мы хотим приблизить ее квадратичной функцией  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где коэффициенты  $a, b, c$  неизвестны. Для этого выбираем  $n$  чисел  $x_1, \dots, x_n$  и узнаем значения  $F(x_1), \dots, F(x_n)$ . Необходимо определить, существует

ли квадратичная функция  $f(x)$  такая, что  $|f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$  для всех  $k = 1, \dots, n$ , где  $\varepsilon > 0$  – нужная нам точность приближения.

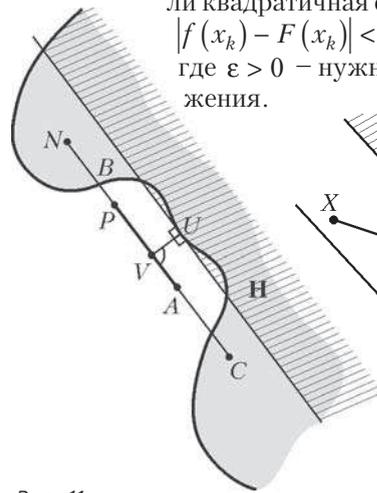


Рис. 11

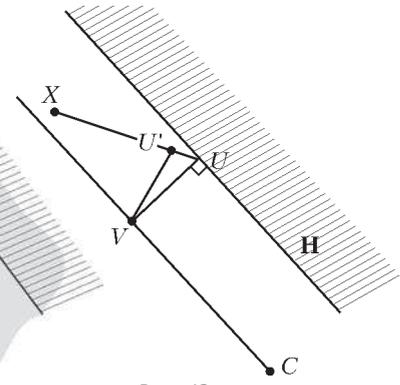


Рис. 12

### Упражнения

**15.** Для данного набора точек  $x_1, \dots, x_n$  искомая квадратичная функция  $f(x)$  существует тогда и только тогда, когда такая функция существует для любых четырех точек из этого набора.

*Указание.* Каждой квадратичной функции  $f$  поставим в соответствие точку  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  и для каждого  $k$  определим множество таких точек, для которых  $|f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$ . Докажите, что эти множества выпуклы, и примените теорему Хелли.

**16.** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение, если вместо квадратичных функций приближать функциями вида  $f(x) = A \sin(x + \varphi)$ .

### Еще несколько задач

Мы заканчиваем знакомство с теоремой Хелли несколькими задачами для самостоятельного решения.

### Упражнения

**17.** На плоскости дано конечное семейство прямых. Известно, что любые три прямые можно пересечь кругом радиуса  $r$ . Тогда все прямые семейства можно пересечь кругом радиуса  $r$ .

**18.** Сформулируйте и докажите аналоги утверждения из упражнения 17

- для семейства прямых в пространстве;
- для семейства плоскостей в пространстве.

**19.** Внутри ограниченной выпуклой фигуры всегда найдется точка, обладающая следующим свойством: любая прямая, проходящая через эту точку, делит площадь фигуры на части, отношение которых не превосходит 2.

**20.** На плоскости лежат несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (не обязательно одинаковых), каждые два из которых пересекаются. Тогда все прямоугольники имеют общую точку.

**21.** Если несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покроют всю плоскость.

**22.** Сформулируйте и докажите аналоги утверждений из упражнений 19–21 для пространства  $\mathbb{R}^3$ .

### Заключение

Сколько же, оказывается, интересного связано с одной лишь первой теоремой Хелли! А ведь есть еще вторая и третья ...

# Плазма и... немного биологии

А.МИНЕЕВ

**К**АЗАЛОСЬ БЫ, ЧТО ОБЩЕГО МЕЖДУ ФИЗИКОЙ плазмы (а именно с ней связала профессиональная деятельность автора статьи – прим. ред.) и биологией? Однако, если присмотреться повнимательнее, поражает множество сходных в обеих науках идей и возникающих аналогий.

## Плазма

Слово «плазма» часто встречается в нашей жизни. Плазменные панели телевизоров и осветительные приборы – в быту, разряды молнии и полярные сияния – в природе. Излучение Солнца, обеспечивающее нам жизнь, также обязано реакциям, происходящим в плазме. Если взглянуть немного шире, за пределы Земли, то в состоянии плазмы находится более 90% вещества во Вселенной. Там это естественное состояние.

Любое вещество переходит в состояние плазмы, если его нагреть до ионизованного состояния, когда атомы распадаются на составляющие – электроны и ионы. Температура, при которой это происходит, может составлять тысячи градусов – тогда речь идет о низкотемпературной плазме или многие миллионы градусов – в случае высокотемпературной плазмы. Так, характерная температура в центре звезд (типа Солнца) – десятки миллионов градусов, при этом происходит интенсивное протекание реакций синтеза легких ядер.

А вот несколько терминов из биологии, близких плазме по написанию:

- плазма крови (желтоватая полупрозрачная составляющая крови, без эритроцитов, лейкоцитов и тромбоцитов),
- протоплазма (жидкое содержимое живой клетки),
- плазматическая мембрана (клеточная мембрана, окружающая протоплазму),
- плазмодии (это, простите, паразиты, обитающие в эритроцитах млекопитающих).

Как можно видеть, смысл биологических «плазменных» словообразований совсем другой. К тому же и диапазоны температур существования биологических объектов и плазмы совершенно различны. Однако рассмотрим поподробнее ряд более общих аналогий между биологией и физикой плазмы.

## Похожие зависимости

При нагревании твердого тела оно претерпевает ряд фазовых переходов: твердое тело → жидкость → газ → плазма, что качественно изображено на рисунке 1.



Рис.1. Характерная зависимость температуры вещества от подводимой энергии (количества теплоты)

Из рисунка следует, что в ходе фазового перехода температура тела остается постоянной (вся подводимая энергия тратится на перевод вещества в новое фазовое состояние), а между фазовыми переходами сохраняется монотонная зависимость температуры от подводимой энергии.

Приведем пример подобной зависимости из физики плазмы. Как известно, материальными стенками (из обычного вещества) длительно удерживать плазму невозможно. За пределами Земли (в звездах) плазма удерживается силами гравитации, а на Земле уменьшить уход энергии горячей плазмы на стенки можно только при использовании магнитного поля. Наибольшие успехи в нагреве и удержании горячей плазмы достигнуты на тороидальных магнитных установках типа ТОКАМАК, идея которых была предложена в начале 1950-х годов И.Е.Таммом и А.Д.Сахаровым. (Более подробно об особенностях таких систем можно прочесть в книге Г.С.Воронова «Штурм термоядерной крепости» – М.: Наука, серия «Библиотечка «Квант», выпуск 37.) В нашей стране были построены и первые токамаки, после впечатляющих результатов на которых установки такого типа стали строить во всем мире. А недавно, в 2006 году, принято решение о сооружении первого международного экспериментального реактора типа токамака – ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) с участием России, Европы, США, Китая, Индии и Южной Кореи.

Казалось бы, с момента появления идеи токамаков прошло уже около 60 лет, а исследования по удержанию и нагреву горячей плазмы продвигаются очень медленно. Однако это впечатление обманчиво. На рисунке 2 приведена эволюция так называемого интегрального параметра токамаков  $n\tau_E T$  (здесь  $n$  и  $T$  – концентрация и температура плазмы, в единицах

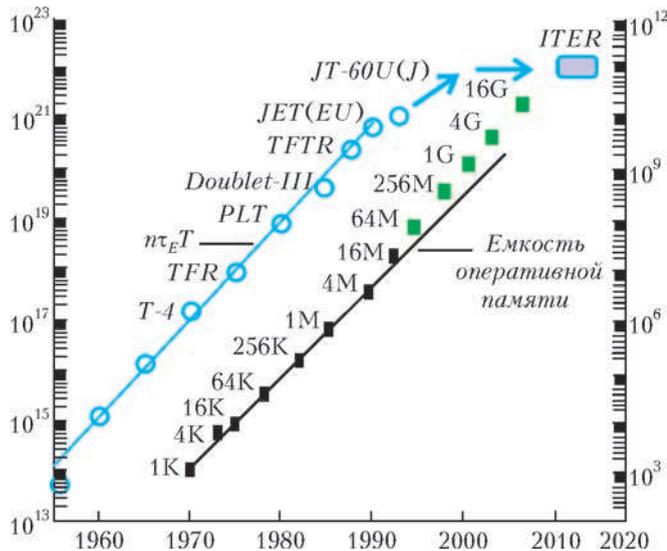


Рис.2. Динамика роста интегрального параметра  $n\tau_E T$  токамаков и оперативной памяти персональных компьютеров

$10^{20} \text{ м}^{-3}$  и кэВ соответственно,  $\tau_E$  – энергетическое время удержания плазмы, в секундах), характеризующего близость параметров плазмы к требуемым в реакторе, в сравнении с ростом объема оперативной памяти персональных компьютеров – с одной из самых быстро растущих величин. Из рисунка видно, что скорости роста соответствующих параметров в обоих случаях примерно одинаковы.

А теперь – о зависимости «с изломом» (типа фазового перехода), характерной при описании удержания энергии в токамаках. В тороидальной геометрии токамака из-за неоднородности магнитного поля появляется два сорта заряженных частиц – запертые, их траектория имеет вид банана, и пролетные, их траектория близка к круговой. При небольшой частоте соударений частиц уход энергии из плазмы определяется частицами с бананообразными траекториями, при очень большой – частицами с круговыми траекториями. В результате зависимость коэффициента теплопроводности от частоты соударений имеет вид, изображенный на рисунке 3. Отметим, что время жизни плазмы  $\tau_E$  определяется

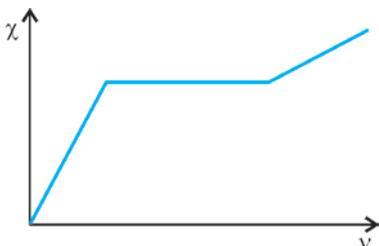


Рис.3. Зависимость коэффициента теплопроводности плазмы от частоты соударений частиц в токамаке

простым соотношением  $\tau_E \sim 1/\chi$ .

Обратимся к биологии и приведем зависимость относительной высоты дерева от его диаметра из статьи «О высоких деревьях». (См. статью А.Минева в «Кванте» №3 и 4 за 1992 г.– Прим.ред.) График, приведенный на рисунке 4, характеризуется наличием плато, когда максимальное значение отношения  $h/d$  при умеренном диаметре дерева примерно постоянно и равно 50, увеличением отношения  $h/d$  для невысо-

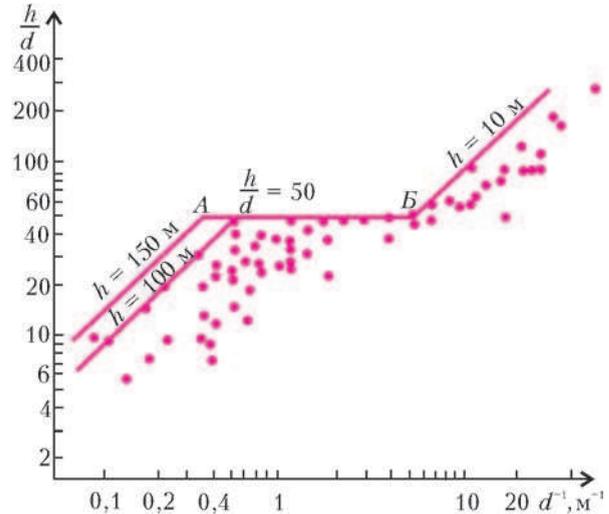


Рис.4. Зависимость относительной высоты дерева от его диаметра

ких деревьев ( $h < 10 \text{ м}$ ) и снижением этого отношения для очень высоких деревьев (с диаметром ствола  $d > 2 - 2,5 \text{ м}$ ), так что максимальная высота деревьев на Земле не превышает величины  $h_{\text{max}} = 150 \text{ м}$ .

Но ведь это тот же самый вид зависимости, что и на рисунке 3 для плазмы! А что если и в случае деревьев по мере увеличения диаметра ствола (или, что то же самое, по мере уменьшения величины  $d^{-1}$ ) происходит появление какого-то нового механизма – типа фазового перехода, как на рисунке 1, или нового механизма ухода энергии, как на рисунке 4?

В упомянутой статье подробно исследованы причины такого типа зависимости. Основной вклад дала механика (рис.5): ограничения на прочность дерева при сильном изгибе для тонких деревьев объяснили правую часть зависимости, сильный ветер ответствен за наличие плато, а некоторое уменьшение отношения  $h/d$  для очень толстых деревьев объясняется устойчивостью формы ствола дерева под действием собственного веса.

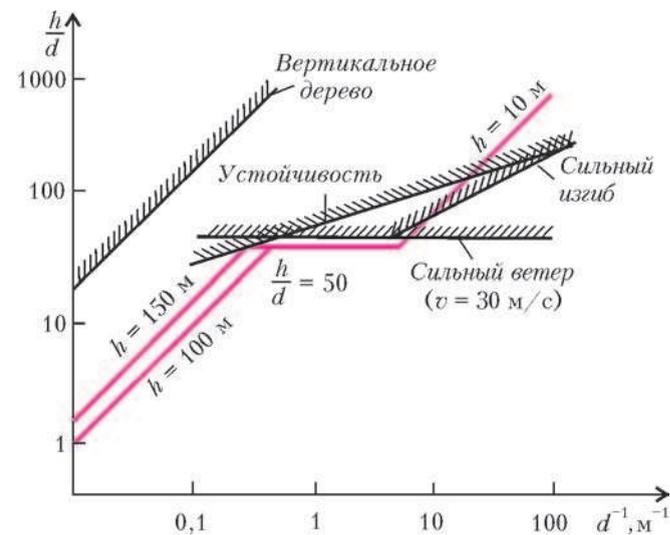


Рис.5. Ограничения, связанные с механическими параметрами дерева

Тем не менее, выяснилось, что природа ограничения высоты дерева ( $h_{\max} = 150$  м) – вне рамок механики и механической прочности. Анализ площади годовых колец (за десятки лет) привел к выводу о том, что для взрослых деревьев годовые кольца имеют одинаковую площадь. Это означает примерно линейный закон роста массы ствола со временем:  $M \sim t$  и (поскольку  $h/d \approx \text{const}$ ) приводит к следующему закону роста высоты дерева:

$$h \sim M^{1/3}, \quad h \sim t^{1/3}.$$

Видно, что рост дерева со временем сильно замедляется, и за время жизни оно просто не успевает дорасти до высоты  $h > 150$  м.

Полученные результаты оказались достаточно правдоподобными и в последнее время получили дополнительное подтверждение – как теоретическое, так и экспериментальное. Например, в статье 1999 года из журнала «Nature» (G.W.West, J.H.Brown, B.J.Enquist, «A general model for the structure and allometry of plant vascular systems») развита модель, согласно которой зависимость высоты дерева от массы его ствола оказывается еще более медленной:

$$h \sim M^{1/4},$$

и дерево действительно просто не успевает вырасти слишком высоким.

В еще одной статье, теперь уже 2004 года, из журнала «Nature» (G.W.Koch, S.C.Sillett, G.M.Jennings, S.D.Davis, «The limits to tree height») приведены результаты очень изящных измерений характеристик кроны наиболее высоких секвой в северной Калифорнии (для этого пришлось научиться брать пробы с высоты более 100 м). Измерения показали, что по мере увеличения высоты дерева уменьшаются длина хвоинок и угол их наклона к ветке (рис.6), в итоге жизнь

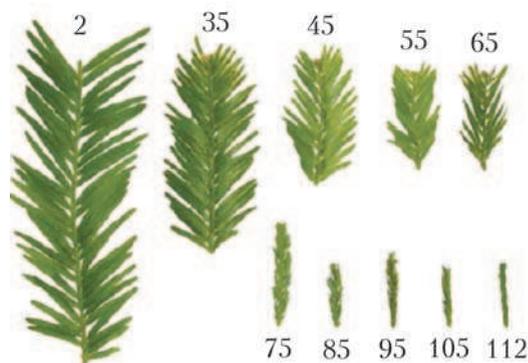


Рис.6. Изменение размеров и структуры хвои в зависимости от высоты секвойи (цифры – высота дерева в метрах)

на большой высоте как бы замирает. Полученные экспериментальные зависимости приводят к предельной высоте деревьев  $h_{\max} \approx 130$  м.

### Ограничения на потребление и высвобождение энергии

В статье «Фауна и Флора» (см. статью А.Минеева в «Кванте» №4 за 2001 г. – Прим.ред.) проанализированы ограничения, связанные со скоростью потерь тепла

животными, и показано, что постоянство температуры тела приводит к ограничениям на их массу: сверху порядка 100–200 тонн (при большей массе организм перегревается при движении) и снизу порядка нескольких грамм (при меньшей массе тепло не удержат, организм очень быстро охлаждается, приходится все время «грызть пищу»). Условие постоянства температуры можно записать в виде равенства

$$P = \frac{W}{\tau},$$

где  $P$  – мощность, вырабатываемая в организме,  $W$  – отводимая тепловая энергия,  $\tau$  – время потерь тепла.

Такое же уравнение энергобаланса «работает» и в плазме, для которой  $P$  – мощность, выделяющаяся в результате реакций синтеза в плазме,  $W$  – тепловые потери энергии плазмы,  $\tau$  – энергетическое время жизни плазмы. Имеющиеся экстраполяции времени жизни приводят к наличию минимального размера плазмы в реакторе (если размеры будут еще меньше, то условие энергобаланса не будет выполнено). Для систем с магнитным удержанием это метры – так, в реакторе ITER малый радиус тора составляет 2 м, а объем плазмы около 1000 м<sup>3</sup>.

### Ограничения на размеры снизу

Наименьшая структурная единица, из которой построены живые организмы, это клетка. Она имеет характерный размер около 10 микрон. (Аргументы, приводящие к такому значению диаметра клеток, приведены, в частности, в статье А.Минеева «От мыши до слона» в «Кванте» №11/12 за 1993 г. – Прим. ред.)

Ограничение снизу на размеры имеется и у плазмы. Плазма, с одной стороны, представляет собой газ заряженных частиц, а с другой (на макроскопических расстояниях), она должна быть в целом нейтральной. Это противоречие снимается тем, что заряд на больших расстояниях экранируется из-за присутствия расположенных рядом других заряженных частиц. В результате потенциал заряженной частицы вместо обычного кулоновского  $\phi = \frac{q}{r}$  в плазме приобретает вид

$$\phi = \frac{q}{r} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda_D}},$$

т.е. он остается кулоновским на малых расстояниях  $r$  и эффективно экранируется на масштабах, превышающих так называемый дебаевский радиус  $\lambda_D$ . (Заметим, что формулы для потенциала записаны в гауссовой системе единиц, активно используемой физиками. – Прим. ред.) По мере увеличения концентрации заряженных частиц плазмы дебаевский радиус уменьшается (заряженные частицы ближе, экранирование лучше). В общем случае его можно выразить через концентрацию  $n$  и температуру  $T$  плазмы следующим образом:

$$\lambda_D \approx 2,4 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{\frac{T}{n}},$$

где размерность дебаевского радиуса  $[\lambda_D] = \text{м}$ , температуры  $[T] = \text{кэВ}$ , а концентрация  $n$  измеряется в

единицах  $10^{20} \text{ м}^{-3}$ . Как правило, дебаевский радиус довольно мал (так, для плазмы реактора ITER с  $T = 10 \text{ кэВ}$  и  $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$  величина  $\lambda_D$  составляет около 100 микрон) и существенно меньше размера самой плазменной области.

### Ограничения на предельные возможности теплоотвода

В живых организмах, обитающих на Земле, уровень интенсивности циркулирующих тепловых потоков задается Солнцем. От Солнца до поверхности Земли доходит тепловой поток порядка  $1 \text{ кВт/м}^2$ , из которых поглощается около  $300 \text{ Вт/м}^2$ .

В случае высоких деревьев этот поток тепла запускает главный механизм подъема воды по стволу дерева наверх (при испарении воды через устьица). При этом оказывается, что, хотя площадь, занимаемая устьицами, составляет всего около 1% площади листа, испарение через них происходит примерно с той же скоростью, как и с открытой поверхности. (О природе этого парадокса рассказано в статье А.Минеева «Листья улыбаются» в «Кванте» №4 за 2006 г. – *Прим. ред.*)

Величина удельного теплового потока, отводимого через кожу животных при испарении, в целом того же порядка. Так, для человека в спокойном состоянии она составляет примерно  $50 \text{ Вт/м}^2$ . При максимальных физических нагрузках, например, рекордсмена-спринтера отношение выделяемой при беге тепловой мощности к площади поверхности тела бегуна может достичь  $2 \text{ кВт/м}^2$ . Такую величину теплового потока человеческое тело уже не успевает отвести

(через кожу отводится до  $1 \text{ кВт/м}^2$ ), и в ходе бега температура тела такого рекордсмена-спринтера должна расти.

А каких величин могут достигать тепловые потоки в плазменных устройствах? В энергетическом реакторе плазму нужно догреть до температуры порядка 100 млн градусов с помощью ввода извне определенной мощности нагрева через специальные окна ввода. Достигнутые удельные тепловые потоки составляют при этом  $10 - 50 \text{ МВт/м}^2$  (в виде пучков частиц или электромагнитных волн). Основная часть энергии синтеза приходится на нейтроны (например, в реакции  $D^+ + T^+ \rightarrow He^{++} + n$  нейтрон уносит энергию  $\sim 14 \text{ МэВ}$ ), для них удельный тепловой поток на окружающие плазму стенки составляет  $1 - 3 \text{ МВт/м}^2$ .

Следует отметить, что параллельно с термоядерной установкой в реакторе ITER будет создаваться специальный стенд для испытания материалов под действием термоядерных нейтронов. Этот стенд представляет собой большой ускоритель, пучок дейтронов из которого попадает на литиевую мишень. В мишени по реакции  $D + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^8\text{Be} + n$  образуются нейтроны со спектром, близким к термоядерному. Для того чтобы достичь требуемой для испытания материалов нейтронной нагрузки порядка  $1 - 2 \text{ МВт/м}^2$ , нужно, чтобы поток тепла от атомов дейтерия на литиевую мишень достигал  $1000 \text{ МВт/м}^2$ ! Такие величины удельных тепловых потоков можно отвести только при использовании струи жидкого лития, движущейся по транспортеру специальной конструкции с большой скоростью ( $\sim 20 \text{ м/с}$ ).

## НАШИ ИНТЕРВЬЮ

### Интервью с А.Б.Сосинским

Алексей Брониславович Сосинский – известный математик, автор научных и научно-популярных книг и статей, среди которых монография (совместная с В.В.Прасоловым) «Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия», научно-популярная книга (переведенная на 6 языков) «Узлы. Хронология одной математической теории». Много лет Алексей Брониславович был редактором отдела математики «Кванта». Он – один из постоянных авторов нашего журнала, выдающийся лектор и преподаватель. На сайте mathnet.ru можно посмотреть его фильм-лекцию «Теорема Гёделя». Советуем вам также познакомиться с докладом «Математика жонглирования», прочитанным Жаном-Кристофом Новелли и Флораном Ивером, в котором А.Б.Сосинский выступил в роли переводчика (см. сайт msste.ru). Это не случайно: Алексей Брониславович с детства говорит по-французски и по-английски. Многие российские математики учились писать научные статьи на английском языке по книге А.Б.Сосинского «Как написать математическую статью по-английски».

Алексей Брониславович – человек интересной судьбы, и мы рады представить нашим читателям его рассказ о себе, о математиках и математике.

– *Может быть, вы расскажете сначала о вашей семье, кто ваши родители...*

– Совсем коротко о моей родословной. Отец – из безземельных дворян (его отец, мой дед, был очень известным железнодорожным инженером), воевал против большевиков, после окончания гражданской войны эмигрировал и на долгие годы осел в Париже. Там он познакомился с моей мамой, Ариадной Черновой, дочкой Виктора Михайловича Чернова, лидера и главного теоретика партии социалистов-революционеров, председателя Учредительного Собрания до его разгона большевиками. О жизни родителей и о моем детстве рассказывать читателям «Кванта», я думаю, нет смысла.

Давайте я начну сразу с того момента, когда я оказался на мехмате МГУ. Я был принят на мехмат в девятнадцатилетнем возрасте сразу на второй курс. До этого я жил и учился за границей. Родился я во Франции, а уже первую университетскую степень получил в Штатах в 1957 году – степень бакалавра Нью-Йоркского университета. Тогда же мне было предложено поступить в аспирантуру Математического института Куранта, но я отказался, понимая, что в тот момент, т.е. в середине 50-х годов, Москва (и в частности, Московский государственный университет) являлась одним из ведущих – если не самым сильным – математическим центром в мире.

– *А сейчас это так?*

– К сожалению, нет. Все знают, что большое количество очень сильных российских математиков уехали за границу. Можно сказать, что почти все звездные российские математики либо

постоянно находятся за границей, либо работают за границей и только изредка появляются в России. Кроме того, что касается механико-математического факультета, то его уровень тоже очень упал по сравнению с тем, что было, скажем, в 60-е годы.

– Сейчас многие уезжают, а уж в 50-е годы немало людей в России мечтало о том, как бы уехать на преуспевающий Запад. А вы чуть ли не единственный человек, которого я знаю, кто приехал. Вы не жалеете об этом? Все двигались в одну сторону (по крайней мере мечтали), а вы – в другую?

– Я прекрасно понимал, что я еду «не в ту сторону». Но совершенно не жалею о том, что приехал, хотя дальнейшие события разворачивались не так, как я тогда наивно думал. Я тогда предполагал, что скоро уберут Хрущева и вместо него будет либеральный, умный правитель, появится в России «социализм с человеческим лицом», а получилось все ровно наоборот. Но несмотря на это, я никогда не жалел о своем приезде: в то время механико-математический факультет был абсолютно уникальным оазисом, где находились люди самого высокого профессионального уровня, а также самого высокого уровня культуры.

– Вы помните свою школу? Ваши учителя повлияли на ваш выбор профессии?

– Я учился во французской средней школе, у меня первые учителя математики были довольно слабые, но как только у нас появилась «алгебра с буквами» вместо арифметики и появилась геометрия, я страшно увлекся. Тогда мне было 13 лет, и я считал, что понимаю гораздо больше, чем мои педагоги. Поэтому повлияла сама математика, а не учитель. Однако уже в выпускных классах французского лицея, у меня был великолепный учитель математики, а перед этим, в другом лицее, в течение полугода был уникальный, оригинальный и сильный преподаватель этого предмета. Безусловно, они очень повлияли на мой окончательный выбор. Потому что то увлечение, которое у меня возникло в 13 лет, могло бы исчезнуть, если бы не эти замечательные учителя.

– Значит, в 12 лет вы были еще, что называется, обычным ребенком, не вундеркиндом? О вас не говорили лет в шесть, что у вас выдающиеся математические способности?

– На самом деле я действительно был несколько вундеркиндистый, но настоящий интерес к математике у меня возник лет в 13. Я был на год моложе своих одноклассников, проскочив один класс средней школы.

– Во сколько лет вы пошли в школу?

– Видимо, с шести; но в военные годы я находился на оккупированной территории Франции, там школы иногда функционировали, а иногда нет. Я временами ходил в начальные подготовительные классы.

– Значит не было домашнего обучения?

– Нет, было домашнее обучение, конечно. Притом очень серьезное. Но мои родители к точным наукам, к арифметике меня не приучали, и обучение было гуманитарным. Где-то начиная с четырехлетнего возраста я уже умел писать по-русски, а по-французски писать научился несколько позже, уже в школе. Мои родители, люди очень образованные, сумели заинтересовать меня русской литературой и поэзией.

– Как они этого добились? Как сделать, чтобы ребенок стал умным?

– Ну, я думаю, что тут в большей степени влияет генетика, а не обучение. Когда я был совсем маленький, мы жили очень большой дружной семьей. Это был своеобразный матриархат – моя бабушка, ее три дочери, их мужья, если они там присутствовали, потому что во время войны не все они были с нами, и много

детей. В нашей семье принято было читать вслух. При этом не было никакого принуждения, никто меня не заставлял слушать, когда читали. Иногда мама специально для меня читала, и мне всегда было это интересно. А интерес к литературе, к культуре, к живописи впитывался сам собой, через воздух.

– В семье говорили на двух языках?

– Нет, в семье говорили только по-русски. А французский язык я освоил, как только я смог выйти во двор, я себя не помню не знающим французского языка. Где-то в два-три года я уже говорил на двух языках.

– А английский уже потом?

– Английский позже. Я оказался в Штатах в десятилетнем возрасте и тогда очень быстро освоил английский язык. Родители сразу послали меня в американскую школу, я два года там учился, но новых знаний не получил. Известно, что американская школа – и тогда, и сейчас – находится на катастрофически низком уровне. Но зато я выучил язык и приспособился к американской жизни.

После этого родители перевели меня во французский лицей в Нью-Йорке.

– Были ли в то время, когда вы учились, математические олимпиады?

– Олимпиады во Франции до сих пор не существует. В Америке, когда я был студентом, уже проводился конкурс Патнама (Putnam contest), и я в нем участвовал. Что касается французской традиции, там есть так называемый Concours General (буквально – генеральный конкурс), который учредил Наполеон. Этот конкурс состоит из решения трудных задач по продвинутым разделам школьной программы, а не из «олимпиадных» задач на сообразительность; впрочем, в нем я как раз не участвовал.

– Когда вы поняли, что будете ученым?

– Примерно в 14 лет.

– Уже? И так уверенно?

– Да, уверенно. Могу рассказать следующую историю. Когда мне было 14 лет, я размышлял о геометрии и пришел к выводу, что евклидова геометрия противоречива. И что правильная геометрия устроена так, что если линии продолжать, то они в итоге замыкаются.

– Выходит, вы придумали проективную геометрию?

– Скорее, сферическую. То, что эта геометрия неориентируема, я не очень четко понимал. И я написал каллиграфическим почерком свое первое математическое сочинение, где я привел некий софизм, «доказывающий» противоречивость евклидовой геометрии. И немножко там объяснял, как устроена «настоящая» геометрия. Ну, например, что сумма углов больше, чем 180 градусов, я понимал. В целом это было совсем глупое сочинение.

– Какой был софизм?

– Он был связан с гиперболой. Элемент проективного мыш-



ления. Я считал, что асимптоты естественно должны соединиться. Не в этом был софизм, но я написал какие-то формулы, я уже знал, что гипербола имеет вид «единица, деленная на  $x$ »; из этих формул «следовало», что асимптоты должны замкнуться, и кривая станет овалом. Текст я положил в конверт и запечатал. Тогда под влиянием Сент-Экзюпери я считал, что взрослые все равно не в состоянии понять важное и глубокое. По крайней мере моя учительница не в состоянии понять мои «новаторские» мысли. И я решил, что когда я вырасту, я распечатаю конверт и скажу, что вот когда-то я все это обнаружил. А дальнейшее развитие сюжета такое. Мне подарили замечательную книжку Кагана про Лобачевского на русском языке. Из нее я узнал, как обстоит дело на самом деле, мне стало очень стыдно, я порвал свое первое математическое сочинение и выбросил его. Вот такая у меня была смешная история.

– *Информацию вы тогда получали в основном от учителей из книг?*

– Только от учителей. У меня никаких математических книг, кроме учебников, не было. Первая математическая книга – это книга Кагана о Лобачевском. До поступления в университет я не прочитал ни одной математической книги, кроме учебников. И Кагана. А широко читать про математику я стал позже, уже будучи студентом Нью-Йоркского университета.

– *И что же вы читали?*

– Во «взрослой» математике меня впервые заинтересовала проективная геометрия. Видимо, это было как-то связано с моими детскими увлечениями. И я прочитал какие-то книжки по проективной геометрии, и у меня даже были собственные изыскания по этому поводу, которые закончились следующим образом. Когда меня рекомендовали в аспирантуру в институт Куранта, меня пригласили на собеседование с Липманом Берсом (известным классиком многомерного комплексного анализа). На собеседовании он спросил, какие курсы я слушал, стал мне задавать разные вопросы по геометрии и по анализу. Я быстро и точно отвечал и явно Берсу понравился. И тогда он спросил, не занимаюсь ли я вообще чем-нибудь вне контекста обязательных курсов. И я, скромно потупившись, сказал, что – да, я немножко интересовался некоторыми вопросами комплексной проективной геометрии – и собирался сказать, чем я занимался. Берс развел руками и сказал: «Как же вы не понимаете, проективная геометрия давно умерла. После работ Веблена там ничего не осталось, там нету нерешенных задач, это мертвая наука, нельзя этим заниматься!» Я очень смутился и больше не занимался проективной геометрией. Насколько я был неправ, я понял, когда, будучи топологом и аспирантом в МГУ, познакомился с Семеном Гиндикиным и Геннадием Хенкиным, которые вслед за Роджером Пенроузом сделали гениальные работы именно по комплексной проективной геометрии, которая мне была указана как мертвая наука.

– *Не могли бы вы кратко объяснить школьникам, что такое топология?*

– Топологию можно многими способами охарактеризовать. Например, таким образом. В евклидовой геометрии главное – это расстояние между точками. В аффинной геометрии главное – это отношение расстояний между точками. В проективной геометрии главное – это так называемое двойное отношение четырех точек на прямой. В евклидовой геометрии при движениях не меняется расстояние. А в топологии такого простого инварианта, как расстояние, нет. Можно себе представить, что вы изучаете геометрическую фигуру, сделанную из резины. Вы можете ее растягивать, вы можете ее сжимать, вы можете ее деформировать. И топология изучает самые глубокие свойства геометрических фигур, а именно те, которые не меняются при таких деформациях. А какие бывают

инварианты в топологии? Самый простой и известный многим читателям «Кванта» – это эйлерова характеристика. Если вы возьмете бублик, то как вы его ни будете деформировать, в нем будет оставаться дырка. Наличие этой дырки является инвариантом, а этот инвариант (количество дырок называют родом поверхности) можно описать алгебраически. Это и делается в алгебраической топологии, но как именно – в двух-трех фразах не скажешь.

– *Бывают ли мертвые науки?*

– Очень трудно выносить той или иной ветви науки смертный приговор, однако иногда это делается. В моем поколении мы, топологи, вынесли смертный приговор общей, или теоретико-множественной, топологии. Мы дружно все объявили, что это мертвая наука. Но нельзя гарантировать, что она не воскреснет.

– *Смертный приговор все еще действует?*

– Сейчас бывшие общие топологи переключились на более алгебраическое изучение основ топологии, связанных не с конкретными геометрическими объектами, а с очень общими абстрактными пространствами. Классическая абстрактная топология школы Павла Сергеевича Александрова в Москве, расцвет которой пришелся на сороковые годы, сейчас вышла из моды. В мире есть лишь небольшая горстка исследователей, которые продолжают работать в этом направлении. Но я бы был осторожен. Потому что никогда не известно, что в математике может пригодиться. Может вдруг оказаться, что общая топология будет востребована.

– *А скажем, теория множеств?*

– Теория множеств сейчас продолжает быть в центре основной математики, безусловно. Она играет очень важную роль, как ни странно, в вопросах, связанных с компьютерами, потому что факты из так называемой дескриптивной теории множеств постепенно переработались в замечательные теоремы теории алгоритмов. Так, теорема Гёделя имеет глубокие приложения к компьютерной науке: из нее следует, что ряд задач никакой компьютер не может решить в принципе. Кроме того, ряд конструкций теории множеств, полученных в первой половине XX века, сейчас нашел неожиданное применение в теории динамических систем, в частности, в связи с так называемыми странными аттракторами. Так что вряд ли можно считать теорию множеств мертвой наукой.

– *Как вы считаете, должна ли математика иметь приложения? Как соотносятся прикладная и так называемая чистая математика?*

– По этому поводу мне просто хочется привести точку зрения Андрея Николаевича Колмогорова. Когда я ему задал этот вопрос, он мне сказал следующее. Не бывает ни чистой математики, ни прикладной. Математика бывает хорошая и плохая. Хорошая математика может взяться прямо с кончика пера, из головы математика, который развивает математику ради самой математики, просто из чистого любопытства. Но если то, что он делает, содержательное, интересное и хорошее, это рано или поздно найдет серьезное приложение. А если это плохая математика, об этом все через поколение забудут. Что же касается тех результатов, которые возникают при решении практической прикладной задачи, то здесь тоже нужно различать сильный результат от рядового. Если, решая какую-то прикладную задачу, математик копнул очень глубоко и придумал принципиально новый метод решения, то из него затем возникнет теория. И это будет такая же значительная математическая теория, как наилучшие абстрактные теории, которые взялись из умозрительных рассуждений математиков. Так что мне кажется, что очень важно не отделять математику прикладную и практическую от так называемой чистой математики. И это, кстати, очень хорошая черта рус-

ской математической школы. Все крупнейшие русские математики не вдавались ни в одну, ни в другую крайность. Из работающих сегодня математиков достаточно назвать Владимира Игоревича Арнольда. Работы Арнольда бывают абсолютно чисто математические, как, например, его недавние результаты по теории чисел. С другой стороны, у него есть работы, и очень много, по динамическим системам, по теории бифуркаций, которые нельзя назвать прикладными, они не решают конкретные практические задачи, но их полезность для решения конкретных задач безусловна и очевидна.

– А Ю.И.Манин?

– Манин сейчас и последние 20 лет занимается в первую очередь теоретической физикой. Уже этот факт говорит о том, что он перестал быть «чистым» математиком. Но то, что наилучшая часть его творчества, как по «чистой» математике, так и по теорфизике, вероятно, останется, и даже что-то будет иметь вполне конкретные приложения, вполне ожидаемо. Как и то, что что-то другое, наоборот, отомрет, как временное и ненужное.

– А физика вам нравится?

– Я всю жизнь очень любил физику, но мне не повезло с учителями. У меня никогда не было хороших учителей физики. Никогда: ни в школе, ни в Нью-Йоркском университете, ни когда я учился на мехмате. Лекции, которые читали мне профессора с физфака, были просто очень плохие. И я изучал теоретическую физику у математиков. Кроме того, теория узлов, которой я занимаюсь много лет, оказалась востребованной именно физиками.

– В.И.Арнольд говорит, что математика – это часть физики. Вы согласны с этим?

– Арнольд говорит не только, что математика часть физики, он добавляет, что это та часть физики, где эксперименты стоят очень дешево. Это очень важное добавление. Сам Арнольд, особенно в последние годы, очень любит демонстрировать, что математика – это экспериментальная наука, а математик – это человек, который экспериментирует. Про себя он говорит: я экспериментирую руками, считаю, провожу эксперименты и потом из этих экспериментов делаю выводы. Но можно проводить эксперименты и на компьютере. Деятельность математика как раз и связана с проведением таких недорогостоящих экспериментов. Однако Арнольд своим словам придает более глубокий, я бы сказал, философский смысл. И в этом отношении он себя позиционирует как ученик Андрея Николаевича Колмогорова. Арнольд верит в реальность того, что изучают математики. Он считает, что математика – это в какой-то мере наука про окружающий мир.

В 1990 году я брал интервью у Владимира Игоревича (интервью опубликовано в «Кванте» №7 за 1990 году), и задал ему такой вопрос: «Когда вы доказываете теорему, вы ее создаете или вы ее открываете?» Он ответил следующей цитатой из А.К.Толстого:

Тщетно, художник, ты мнишь, что творений своих ты создатель! Вечно носились они над землею, незримые оку...

Много в пространстве невидимых форм и неслышимых звуков, Много чудесных в нем есть сочетаний и слова и света.

– Можете ли вы объяснить школьникам, какие бывают практические приложения у современной математики – не математики Ньютона и Эйлера, а той, что была создана в последние десятилетия? Есть ли такие примеры?

– Таких примеров много, нетрудно перечислить некоторые из них, однако понятно объяснить школьникам суть дела – совсем не просто. Я назову, не вдаваясь в подробности, три примера, в надежде на то, что «Квант» найдет авторов, которые сумеют доходчиво объяснить основы соответствующих математических

теорий и понятно описать, как эти теории работают на практике.

Первый пример – алгебраическая геометрия над конечным полем и криптография. Математическую теорию можно описать как геометрию эллиптических кривых в многомерном пространстве, но рассматриваемых не над полем вещественных или комплексных чисел, а над конечными полями. Эта теория позволяет строить то, что по-английски называется «one-way functions» – основу так называемой «шифровки с открытым кодом». Этот способ шифровки используется в обыкновенных банковских картах. Жулик, даже знающий способ шифровки вашей карты, не сможет расшифровать информацию, необходимую для снятия денег.

Второй пример – операторные методы (и связанные с ними теория лагранжевых многообразий и индекс Маслова) и предсказания цунами и торнадо. Здесь речь идет о работах Виктора Павловича Маслова и его школы, изначально относящихся к теоретическому исследованию уравнений в частных производных. Эти работы позволили построить достаточно точные модели распространения таких явлений, как циклон, торнадо и цунами. Ученик Маслова Сергей Доброхотов сумел найти, используя теорию, разработанную в последнее десятилетие, очень эффективную и реалистичную модель торнадо. Интересно, что лаборатория Института проблем механики, в которой работает Доброхотов, называется Лабораторией механики природных катастроф. Я бы не взялся объяснить школьникам, даже очень продвинутым, ни теорию, ни математическое описание модели торнадо. Однако можно рассказать, что такое индекс Маслова, благо для этого инварианта Арнольд придумал эквивалентное достаточно наглядное геометрическое определение.

Третий пример – бесконтекстные грамматики Хомского и языки программирования. Американский математический лингвист Наум Хомский придумал класс формальных языков, которые он назвал бесконтекстными. Эти языки – формальные математические объекты, основанные на формальных грамматиках, ныне носящих имя Хомского. Именно их использование совершило революцию в программировании – переход от программирования в кодах к языкам высокого уровня. В связи с этим примером стоит отметить, что еще раньше, когда только создавались первые цифровые электронные машины, исходной точкой их архитектуры послужила идея универсальной машины Тьюринга, придуманная английским математиком Аланом Тьюрингом (во время второй мировой войны он работал, как-то, в шпионском ведомстве MI-5).

– Что такое профессия математика?

– Все знают, что бывают физики-теоретики. Все знают, что бывают ученые-биологи. Но, как ни странно, большинство людей, даже многие школьные учителя математики, не знают, что существует профессия «математик-исследователь». Многие думают, что математика – это большой корпус знаний, который развивался особенно бурно в семнадцатом-восемнадцатом-девятнадцатом веке, а теперь представляет из себя устоявшийся массив знаний, очень полезный для практики. Однако это совершенно неверная точка зрения, потому что математика, так же как и теоретическая физика, продолжает интенсивно развиваться. И развивают ее люди, которых и называют математиками-исследователями.

Как устроена их жизнь? Часть математиков-исследователей работает при университетах, и тогда они преподают. Деньги им платят именно за преподавание. Но они это рассматривают как отнюдь не главную часть своей работы, а главной работой своей они считают доказательство новых теорем, придумывание новых теорий, решение старых, но до сих пор не решенных задач.

Кроме того, сейчас в мире имеется несколько институтов, где математикам платят деньги просто затем, чтобы они развивали математику.

Профессия эта тяжелая. Зарплаты сравнительно маленькие, а в России пока ничтожные. Конечно, человек, сильный в математике, будет зарабатывать гораздо больше денег, если он поступит в какую-нибудь крупную финансовую компанию в качестве финансового консультанта.

– *Посоветуете ли вы нашим молодым читателям идти в эту профессию?*

– Я решительно советую им туда не идти. А те, кто захотят, – они все равно пойдут. Не послушают моего совета.

– *Вы часто читаете лекции. На одной из них у вас выступал жонглер.*

– Да, был такой случай лет пять тому назад. В это время я заведовал франко-русской математической лабораторией, и в этой лаборатории по моему приглашению работали два молодых французских математика, специалисты по комбинаторике и по теории представлений. И оказалось, что один из них очень хороший жонглер. Вместе со своим коллегой – они дружили и вместе у нас работали – они изучили теорию жонглирования с точки зрения математики. И прочитали абсолютно изумительную лекцию. Теорию излагал один из них, я переводил на русский язык, а другой демонстрировал те способы жонглирования, которые были изложены теоретически. Там доказывалась некая теорема классификации жонглирования разных типов с разным количеством объектов.

Я еще хочу сказать, что очень известный специалист по комбинаторике, крупный американский математик Рон Грэхем, – тоже был очень сильный жонглер. Он мог жонглировать шестью мячами. Это близко к пределу человеческих возможностей. (Интервью с Роном Грэхемом опубликовано в «Кванте» № 4 за 1988 год.)

– *Вы работали с А.Н. Колмогоровым в ФМШ.*

– Да, Андрей Николаевич меня пригласил в ФМШ уже со второго года ее существования, и я там проработал около шести или семи лет очень интенсивно. Сначала я вел упражнения за лекциями Андрея Николаевича, а потом с какого-то момента стал возглавлять очередной поток. Там были двухгодичные и одногодичные потоки, и я с огромным удовольствием работал в интернате в первые годы.

– *Расскажите что-нибудь интересное о том времени.*

– Изначальный подбор людей, преподающих математику, осуществлялся Андреем Николаевичем. И он подбирал только таких математиков, у которых, кроме математических познаний, умения преподавать и интереса к работе со школьниками, был бы какой-нибудь еще один талант. Мы все со своими школьниками своим талантом делились. Был, скажем, такой преподаватель, как Дима Гордеев, который был серьезным художником. Женя Гайдуков прекрасно играл на скрипке. Андрей Николаевич проводил замечательные музыкальные вечера, где он ставил пластинки классической музыки. Был замечательный литератор Николай Иванович Герасимов, который вел настолько интересные занятия по литературе, что я всегда договаривался с диспетчером, чтобы мне устраивали расписание таким образом, чтобы где-то у меня было окно, во время которого я бы мог ходить на его занятия. Основную славу ФМШ в те времена составлял Юлий Ким, знаменитый бард. Он устраивал прекрасные театральные представления, сейчас мы бы сказали – мюзиклы, силами школьников, чрезвычайно удачно. Они были немножечко рискованные. Очень трудно было тогдашнему директору интерната. Директором была замечательная женщина, Раиса Аркадьевна Острая, фронтовик, окончившая ИФЛИ, человек глубокой гуманитарной культуры. И у нее было очень трудное положение, потому что надо было, чтобы все было чинно с точки зрения советской власти, в то время как молодые математики и другие преподаватели

тяготели к либеральным ценностям, не апробированным в те времена коммунистическим начальством. Власть очень внимательно следила за происходящим. Что касается моего собственного преподавания в интернате, оно кончилось тем, что партийное бюро мехмата мне запретило этим заниматься. Та же самая участь постигла нескольких других преподавателей, и примерно лет через десять после открытия интерната по тем или иным причинам почти все преподаватели, которых привел Андрей Николаевич, уже больше там не работали. А позже я ушел и из университета, и с 1975 года работал в «Кванте», вновь по приглашению Колмогорова. Параллельно я занимался переводами.

– *Вы написали книгу «Как написать математическую статью по-английски»*

– Это произошло в самом начале перестройки. Дело в том, что я свободно владею английским языком и много в своей жизни читал математических текстов по-английски. Я понимал, что в начале перестройки, когда открылись границы, наши математики оказались в чрезвычайно невыгодном положении. Практически никто из ведущих математиков международного уровня не мог сделать доклад по математике и тем более написать статью. Очень часто статьи возвращались с рецензиями такого содержания, что, возможно, это очень интересная работа, но она так плохо написана по-английски, что понять там ничего не возможно и нужно, чтобы эту работу отредактировал естественный носитель языка. И я счел, что моя роль состоит в том, чтобы помочь людям, т.е. моим коллегам, русскоязычным математикам, преодолеть этот барьер. И написал эту книжку. Это оказалось очень успешным экспериментом, я до сих пор встречаю людей, которые говорят: «А, Вы тот самый Сосинский, который написал эту книжку!» Люди, которые меня не знают по моим математическим работам, знают меня как автора этой книжки.

– *Кстати, почему сейчас гораздо меньше переводится книжек по математике?*

– На русский язык? Понятно, почему: во-первых, профессиональные математики все сейчас читают по-английски, им все равно, что по-русски, что по-английски. Это раз. Второе. В советское время мы находились в полной изоляции. Никто к нам не приезжал, после того как на мехмат перестали брать абитуриентов еврейской национальности, мировая общественность возмутилась, и в Россию западные математики почти совсем не приезжали. А за границу нас не пускали. Поэтому люди английский язык не знали. Но когда границы открылись, по-прежнему осмысленно было переводить книжки, доступные студентам, а монографии уже почти никто не переводит. Хотя некоторые издательства переводят, например издательство МЦНМО. Вообще-то это западные издательства должны переводить наши научно-популярные книжки, мы в этом плане, как в песне поется, шагаем впереди планеты всей...

– *На планете правда нет книг, которые надо перевести?*

– Нет, есть, сколько угодно, и понемножку это делается. Но я замечу, что сейчас имеются замечательные популяризаторы науки в Америке: Сергей Табачников, Дмитрий Фукс, Григорий Гальперин, Александр Соيفер... Там есть и свои, но их меньше.

– *Ну, все-таки еще есть Гарднер.*

– Гарднер – великий человек, спору нет, но его-то почти все книжки переведены.

– *Может быть, мы просто замкнуты в своем кругу: знаем того же Фукса, Гальперина и поэтому считаем, что мы лучше всех?*

– Нет, нет. Сейчас все-таки Россия очень открытая страна, и во всяком случае о том, что касается математики – как науки, так и научно-популярной ее части, – мы в общем неплохо осведомлены. Я бы сказал так: если сравнивать рос-

сийских математиков с французскими, то мы значительно больше знаем о том, что делается за границей, чем французы – вне Франции.

– Но почему тогда первое место на международной олимпиаде получает Китай, причем все время? Или это явление имеет совсем другие причины?

– Во-первых, не все время, иногда мы тоже. Прошлым летом, например. Но я хочу сказать следующее: результаты на олимпиадах совершенно не коррелируют с уровнем популяризации математики в данной стране. И вообще, с моей точки зрения, международные олимпиады испортились, и очень давно. Произошло это вот почему. Ведущие страны, т.е. те страны, которые занимали традиционно высокие места на международных олимпиадах, выработали чрезвычайно эффективную систему тренировки школьников для выступления в олимпиадах. Олимпиады стали политическим действием. Когда американцы победили на олимпиаде, их пригласили в Белый дом, им пожимал руку президент. То же самое у нас. Это стало очень важным политическим актом. И ведущие страны научились тренировать олимпиадников. Особенно преуспели в этом в Китае. Выбор огромный, китайцы очень трудолюбивы, очень толковы, очень способные к математике. Но при этом руководители этих делегаций – т.е. те, кто отбирают задачи на олимпиаду, – стали действовать, исходя из целесообразности, т.е. отбирать те задачи, по которым они были уверены, что их школьники сумеют их решить. И поэтому сейчас отдается предпочтение технически сложным задачам, которые используют уже известные хитрые математические приемы и про которые руководители знают, что их школьники точно их решат. А когда вдруг появляется простенькая с виду задача, для решения которой требуются новые идеи, они боятся: а вдруг наши не сообразят?

– Комбинаторика – это наука?

– Израиль Моисеевич Гельфанд лет 25 тому назад, выступая на своем семинаре, сказал, что математическая наука состоит из следующих частей: анализа, алгебры, геометрии и комбинаторики, и самая главная из этих наук – это комбинаторика, но ее пока еще нет.

– И это остается справедливым?

– Нет, комбинаторикой занимается очень много людей в мире, притом ведущие математики. Например, если взять последний конгресс в Мадриде, то две из четырех филдсовских медалей были получены математиками, которые очень сильно опираются на комбинаторику или фактически занимаются комбинаторикой. Это выдающийся американский математик китайского происхождения Теренс Тао и наш Андрей Окуньков. В их работах происходит удивительный симбиоз между комбинаторикой и другими науками. Например, у Тао, может быть, комбинаторика на первом месте, но сам он себя считает специалистом по гармоническому анализу и в сильной степени использует теорию вероятностей для того, чтобы доказывать элементарно формулируемые теоремы из теории чисел! Его основной результат – о существовании сколь угодно длинных арифметических прогрессий, составленных из простых чисел, – понятен любому читателю «Кванта», а в доказательстве используется чрезвычайно разнообразный и сложный арсенал математических понятий и, в частности, в нем почти центральную роль играет комбинаторика. Кстати, вот еще тема для публикации в «Кванте».

– Не могли бы вы что-то пояснить про гипотезу Пуанкаре?

– Можно объяснить школьнику, что это такое. Сферы бывают разной размерности. Одномерная сфера – это окружность. Двумерная сфера – это то, что вы и называете сферой. Трехмерная сфера – уже труднее представить себе, что это такое, но можно объяснить с помощью системы координат: она задается

уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$  в четырехмерном пространстве, это трехмерный объект, она как бы толстая, но в четырехмерном пространстве она худая. Гипотеза Пуанкаре связана с характеристикой сферы. Как можно охарактеризовать двумерную сферу? Если мы нарисуем любой замкнутый путь на двумерной сфере, то его можно стянуть непрерывно в точку. Пуанкаре высказал гипотезу, что связное компактное пространство, локально устроенное как трехмерное евклидово пространство, будет трехмерной сферой тогда и только тогда, когда оно обладает тем же свойством – что любая замкнутая кривая стягивается в точку. Эта гипотеза на самом деле не так уж значительна, но она приобрела огромный интерес у математиков, потому что ее пытались доказать многие великие математики и долго никак не могли это сделать.

Ситуация, аналогичная ситуации с теоремой Ферма. Теорема Ферма, собственно говоря, является совершенно несущественным мелким утверждением из теории чисел, никакого большого математического значения она не имеет, однако она приобрела огромное историческое значение, потому что куча гениальных людей пытались это доказать, но до английского математика Эндрю Уайлса никто не преуспел.

Возвращаясь к гипотезе Пуанкаре, отмечу, что американский математик Уильям Тёрстон придумал некоторую другую гипотезу, которая называется гипотезой геометризации. Заодно Тёрстон доказал, что из гипотезы геометризации следует гипотеза Пуанкаре. А уже гипотеза геометризации имеет огромное концептуальное значение для всей математики. Она утверждает, что некоторая совокупность трехмерных объектов имеет геометрическую структуру. Эти объекты задаются топологически и тем не менее они имеют геометрическую структуру.

Именно гипотезу геометризации и доказал Григорий Перельман. Это действительно исключительная работа, гениальная работа, в которой используется анализ, топология, геометрия. Перельман опубликовал последовательно три статьи, но в интернете, а не в журналах. Тексты этих работ были достаточно короткими. Поначалу не нашлось в мире ни одного специалиста, который мог бы проверить все. И некоторые говорили, что там не все доказано, не до конца сделано, но когда стали разбираться, постепенно пришли к выводу, что это не так. Отсутствуют лишь детали. Детали в каждом конкретном месте специалист из данной области может восстановить.

А кстати, я знаю, что Гриша Перельман решал задачи из «Задачника «Кванта».

– Значит, Перельман – уникальный математик, знающий самые разные области науки. Таких людей сейчас, наверное, очень мало.

– Ну вот Тао и Окуньков тоже такие люди. Кстати, Окуньков не решал задач из «Задачника «Кванта», не участвовал в олимпиадах, Окуньков сначала служил в армии. Это для российской ситуации очень редкое явление. Когда он поступил на мехмат, его однокурсники, закончившие всякие там элитные школы, смотрели на него свысока и фыркали, – этот Окуньков вот, значит, глупый, из армии пришел...

– Правда ли, что математики делятся на два типа: те, которые любят решать конкретные задачи, и те, которые любят разрабатывать теории, или это очень условно?

– В какой-то мере это так, т.е. бывают и решатели, и построители теорий, но если посмотреть на крупных математиков, они чаще всего проявляли себя в обеих ипостасях. Более верно будет сказать, что большинство математиков тяготеет к тому или другому, но пример самых крупных математиков показывает, что есть обе стороны. Единственное яркое исключение – это Эрдеш, который ни одной теории не создал и всю жизнь занимался решением задач. В этом плане он, по-моему, стоит особняком.

– *Математика как-то все время расширяется, появляются, разные теории, миллионы статей выходят в год. Чем все это кончится? Математики перестанут понимать друг друга окончательно?*

– Сейчас уже математики друг друга плохо понимают, и почти нет математиков-универсалов, которые были бы в курсе всего. Но удивительным образом, несмотря на огромное расширение, разветвление, количество статей по математике – лучшие, выдающиеся математики нашего времени не являются узкими специалистами. Они одновременно в своих работах используют много разных кусков математики и как бы демонстрируют, что математика – единая наука. Если взять последних четырех филдсовских лауреатов, то Тао и Окуньков абсолютно разносторонние математики, непонятно, к какому разделу математики относятся их работы. Что касается Перельмана, то он решает топологическую задачу, и, казалось бы, он тополог, но основная идея его доказательства идет из теории дифференциальных уравнений. Он использует и анализ, и топологию, и геометрию, и замечательные работы А.Д.Александрова по геометрии. И наконец, Вендолин Вернер – впервые специалист по теории вероятностей получил филдсовскую медаль – но он не узкий специалист, он и комплексный анализ очень сильно использует, и комбинаторику, т.е. его работу нельзя отнести только к теории вероятности. Но конечно, количество статей, которые публикуются по математике, становится чудовищным. Например, меня считают специалистом по теории узлов. Я сейчас не успеваю прочитать и десятую часть тех статей, которые по этой теме выходят. Имеется специализированный журнал, выходящий раз в два месяца, в котором имеется по двадцать статей по теории узлов. А кроме этого, в ведущих журналах по топологии и других математических журналах тоже выходят статьи по теории узлов и ее приложениям, о связи этой теории с физикой. Даже специалисты не успевают следить за тем, что происходит в их собственной области. Это приводит к разным казусам, когда теоремы переоткрываются по многу раз, и, конечно, это создает большие практические трудности. Но тем не менее, как это ни удивительно, математика в своих лучших проявлениях усиленно демонстрирует свое единство.

– *Не могли бы вы привести список из нерешенных задач – вроде того, что сделал Гильберт сто с небольшим лет назад? Есть ли сейчас подобный список?*

– Сейчас существует в Америке благотворительный математический институт, он называется институтом Клея. Его создал миллиардер, который в юности занимался математикой, а потом перешел в бизнес. В конце жизни ему захотелось ностальгически вернуться к своим первым занятиям. Этот институт собрал лучших математиков мира и предложил им отобрать семь основных современных проблем математики. Это и было сделано. За решение каждой из этих проблем институт Клея обещает заплатить миллион долларов. Среди этих проблем гипотеза Пуанкаре, о которой мы только что говорили.

– *Но институт Клея почему-то не платит пока этот миллион Перельману.*

– Дело в том, что заплатить эти деньги сейчас нельзя, потому что по правилам нужно, чтобы прошло два года после публикации, и есть проблема с публикацией, ибо текст, сброшенный в интернет, публикацией не считается. Получается, что у Перельмана вообще нет журнальных публикаций по этой теме.

– *А он не хочет печататься?*

– Он не собирается печатать свою работу в журналах. Перельмана замучили недобросовестные журналисты, которые ради сенсации или по некомпетентности перепутали медаль Филдса с премией Клея, они писали, что Перельман отказался от миллиона долларов. Он не отказывался – никто ему миллиона

долларов не давал. Отказался же Перельман от медали Филдса, и как он себя поведет, если – когда – ему этот миллион предложат, я не знаю.

– *Когда я задавал вопрос, я имел в виду несколько другое. Хотелось бы рассказать читателям «Кванта» о нерешенных задачах из списка института Клея.*

– Среди этих задач большинство нельзя сформулировать для читателей «Кванта», потому что они требуют слишком большой подготовки. Есть, однако, одна, которая, собственно говоря, относится не столько к математике, сколько к теоретической информатике, и формулируется очень коротко:  $N \neq NP$ , и смысл этой формулы можно объяснить читателям «Кванта». Кроме того, в список задач Клея не вошла, пожалуй, самая знаменитая задача из теории чисел – гипотеза Гольдбаха (о том, что любое четное число, большее двух, – сумма двух простых чисел), которую легко объяснить любому школьнику, не только читателям «Кванта».

– *А какие еще нерешенные задачи, не обязательно старые, вы бы могли назвать?*

– Попробую сформулировать еще пару таких задач.

Первая – такая: пусть в пространстве имеется механизм, состоящий из стержней, соединенных шарнирами. Например – каркас тетраэдра или куба. Нужно найти необходимые и достаточные условия жесткости такого механизма. (Так, тетраэдр – жесткий, куб – нет, он изгибается в параллелепипед.) Задача эта – очень трудная, и поэтому даже частичные продвижения к ее решению представляют интерес.

А вот и вторая: придумать «нормальную форму» для узлов вместе с непрерывным изгибанием, приводящим каждый узел к своей нормальной форме. Здесь тоже частичные решения представляют интерес. Частный случай тривиальных узлов (задача о распутывании) уже весьма труден, возможно, какие-то частные результаты можно получить с помощью так называемой «энергии узлов» (о ней тоже можно было бы написать и для «Кванта»).

– *Приведите, пожалуйста, примеры одной-двух красивых элементарных задач, которые вам нравятся.*

– Пожалуйста, сколько угодно. Во-первых, я назову задачу для первого класса. Задача такая. У Маши на восемь яблок больше, чем у Саши. Маша отдала Саше одно яблоко. На сколько теперь у нее яблок больше? Из любимых задач – имеется река или озеро с прямолинейным берегом, всадник в пункте А. Он должен из пункта А попасть в пункт В и по дороге напоить лошадь. Каким должен быть его кратчайший путь? Еще один пример: из шести спичек сложить граф с шестью ребрами, в котором содержатся четыре треугольника.

– *Есть ли у вас любимая квантовская статья?*

– Моя любимая статья в журнале «Квант», как ни странно, – крохотная. Это статья Володи Дубровского по поводу того, как строить поверхности отрицательной кривизны с помощью некоторого конструктора. Совершенно замечательная статья (см. «Квант» №7 за 1979 г.). Это раз. Очень люблю статью Николая Борисовича Васильева по поводу алгебраических кривых, «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые» («Квант» №8 за 1987 г.).

– *Как вы относитесь к ЕГЭ?*

– Резко отрицательно. Конечно, исходная идея – иметь объективную инстанцию для определения уровня выпускников школы – совсем неплохая, но реализована она безобразно.

Во-первых, катастрофически плохо, если по математике даются вопросы с множественными ответами. Я думаю, что насколько это глупо и вредно для обучения математике, нет необходимости объяснять читателям «Кванта». Второе, что я бы

(Окончание см. на с. 31)

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2131» или «Ф2138». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2131–M2134, M2136 и M2138 предлагались на весеннем туре XXX Турнира городов.

Задачи Ф2138–Ф2141 предлагались на заключительном этапе XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

## Задачи M2131–M2138, Ф2138–Ф2144

**M2131.** Пусть  $a^b$  обозначает число  $a^b$ . В выражении  $7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}$  надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет 5 пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?  
*А.Толыго*

**M2132.** На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Известно, что любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает четное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит четное число отрезков.  
*И.Богданов, Г.Гальперин*

**M2133.** Замок обнесен круговой стеной с девятью башнями, на которых дежурят рыцари. По истечении каждого часа все они переходят на соседние башни, причем каждый рыцарь движется все время либо по часовой стрелке, либо против. За ночь каждый рыцарь успевает подежурить на каждой башне. Известно, что был час, когда на каждой башне дежурили хотя бы два рыцаря, и был час, когда ровно на пяти башнях дежурили ровно по одному рыцарю. Докажите, что был час, когда на одной из башен вообще не было рыцарей.  
*М.Мурашкин*

**M2134.** Три плоскости разрезают параллелепипед на восемь шестигранников, все грани которых – четырехугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не

пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.

*В.Произолов*

**M2135.** Натуральное число называется *хорошим*, если из него можно получить полный квадрат, приписав к его десятичной записи слева некоторое число, оканчивающееся ровно на 2009 нулей. Для каких  $n$  существует  $n$ -значное хорошее число, которое не является полным квадратом?

*Н.Агаханов*

**M2136.** Пусть  $C_n^k$  обозначает количество способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  различных предметов (способы, отличающиеся только порядком выбора предметов, считаются одинаковыми). Докажите, что если натуральные числа  $k$  и  $l$  меньше  $n$ , то числа  $C_n^k$  и  $C_n^l$  имеют общий делитель, больший 1.

*Фольклор*

**M2137.** Дан остроугольный неравнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором точка  $H$  – точка пересечения высот, точки  $I$  и  $O$  – центры вписанной и описанной окружностей. Известно, что точки  $A, O, I, H$  лежат на одной окружности  $\omega$ . Докажите, что окружность  $\omega$  проходит через одну из вершин  $B$  и  $C$ .

*П.Кожевников*

**M2138\*.** В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер  $n$  он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и  $n$ . Дока-

жите, что на любом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число.

*М. Франк*

**Ф2138.** Подъемный кран медленно поднимает с помощью троса плавающее в воде бревно (рис.1). Трос прикреплен к одному концу бревна, которое можно

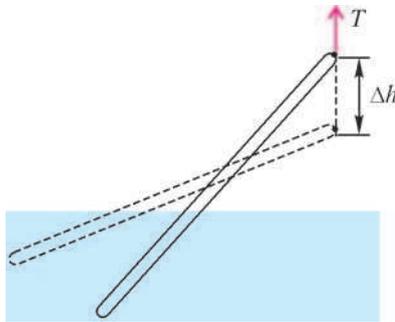


Рис. 1

считать тонким цилиндром с постоянной плотностью. Масса бревна  $m$ , длина  $L$ . Отношение плотностей воды и древесины  $\gamma = 4/3$ . Ускорение свободного падения  $g$ . 1) Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить крану, чтобы полностью вытащить бревно из воды? 2) Постройте график зависимости силы натяжения  $T$  троса от высоты над водой  $h$  приподняемого конца бревна. Укажите характерные точки графика. 3) Какую работу  $A_{\Delta h}$  совершит кран при переводе бревна из одного наклонного положения в другое наклонное положение, в котором верхний конец бревна поднялся на высоту  $\Delta h = L/5$ ?

считать тонким цилиндром с постоянной плотностью. Масса бревна  $m$ , длина  $L$ . Отношение плотностей воды и древесины  $\gamma = 4/3$ . Ускорение свободного падения  $g$ . 1) Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить крану, чтобы полностью вытащить бревно из воды? 2) Постройте график зависимости силы натяжения  $T$  троса от высоты над водой  $h$  приподняемого конца бревна. Укажите характерные точки графика. 3) Какую работу  $A_{\Delta h}$  совершит кран при переводе бревна из одного наклонного положения в другое наклонное положение, в котором верхний конец бревна поднялся на высоту  $\Delta h = L/5$ ?

*В. Чивилёв*

**Ф2139.** В открытом космосе три небольших астероида из-за гравитационного притяжения сближаются друг с другом вдоль общей прямой, неподвижной относительно звезд. Отношение

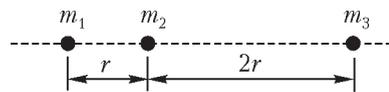


Рис. 2

расстояний от среднего астероида до крайних остается равным  $n = 2$  вплоть до их столкновения (рис.2). Масса левого астероида  $m_1$ , центрального  $m_2$ . Найдите массу  $m_3$  правого астероида.

расстояний от среднего астероида до крайних остается равным  $n = 2$  вплоть до их столкновения (рис.2). Масса левого астероида  $m_1$ , центрального  $m_2$ . Найдите массу  $m_3$  правого астероида.

*И. Воробьев*

**Ф2140.** Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли  $pV$ -диаграмму замкнутого циклического процесса

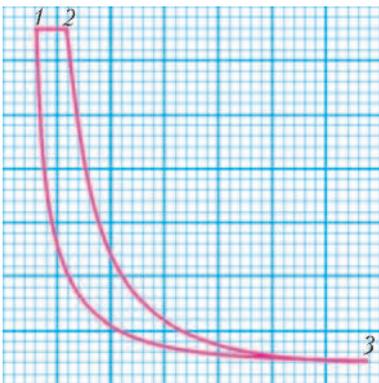


Рис. 3

тепловой машины (рис.3). Процесс 1–2 – изобара, процесс 2–3 – адиабата, 3–1 – изотерма. От времени чернила выцвели, и координатные оси на диаграмме исчезли. Известно, что рабочим веществом машины был идеальный газ (гелий) количеством  $\nu = 2$  моль. Масштаб по оси давлений: 1 мал. кл. = 1 атм, по оси объемов: 1 мал. кл. = 1 л. 1) Восстановите положение координатных осей и вычислите максимальное давление газа в данном циклическом про-

тепловой машины (рис.3). Процесс 1–2 – изобара, процесс 2–3 – адиабата, 3–1 – изотерма. От времени чернила выцвели, и координатные оси на диаграмме исчезли. Известно, что рабочим веществом машины был идеальный газ (гелий) количеством  $\nu = 2$  моль. Масштаб по оси давлений: 1 мал. кл. = 1 атм, по оси объемов: 1 мал. кл. = 1 л. 1) Восстановите положение координатных осей и вычислите максимальное давление газа в данном циклическом про-

цессе. 2) Вычислите максимальную и минимальную температуры газа в цикле. 3) Найдите работу  $A_T$  газа на изотерме 3–1. 4) Найдите КПД цикла  $\eta$ .

*Примечание.* Универсальная газовая постоянная  $R = 0,082$  л.атм/(моль · К).

*А. Шеронов*

**Ф2141.** В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 4, напряжение между зажимами  $C$  и  $D$  равно  $U_{CD} = 15$  В. Известно, что  $R \gg r$ . 1) Определите

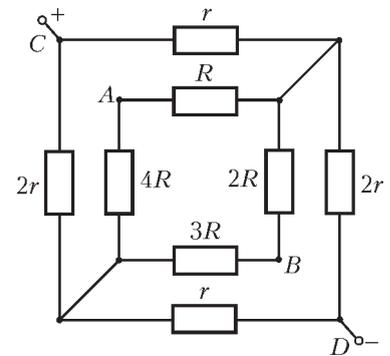


Рис. 4

показание идеального вольтметра, подключенного к клеммам  $A$  и  $B$ . 2) Предположим, что к клеммам  $A$  и  $B$  подключен идеальный амперметр. Укажите направление тока, текущего через каждый из резисторов и амперметр.

*М. Проскурин*

**Ф2142.**  $N = 2009$  одинаковых конденсаторов емкостью  $C = 10$  мкФ каждый зарядили до одинаковых напряжений  $U = 10$  В и соединили последовательно, причем  $n = 100$  штук оказались подключенными в одной полярности, а остальные – в другой. Концы получившейся цепочки соединили резистором сопротивлением  $R = 1$  кОм. Какой полный заряд протечет по резистору и сколько в нем выделится тепла?

*З. Рафаилов*

**Ф2143.** На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью сложенным вдвое изолированным тонким проводом намотана катушка с большим числом витков, получились две одинаковые катушки – одна с выводами  $A$  и  $B$ , другая – с выводами  $B$  и  $\Gamma$ . Индуктивность катушки  $AB$  равна 1 Гн. К точкам  $B$  и  $\Gamma$  подключили резистор сопротивлением 1000 Ом, а к выводам  $A$  и  $B$  присоединили источник синусоидального напряжения частоты 1000 Гц с амплитудой 1 В. Какой ток течет через резистор? Как изменится ток, если выводы  $B$  и  $\Gamma$  поменять местами?

*А. Зильберман*

**Ф2144.** Зрительная труба имеет объектив с фокусным расстоянием 1 м и окуляр с фокусным расстоянием 5 см. Линзы находятся на расстоянии 106 см друг от друга, на объектив падает широкий пучок лучей, параллельный главной оптической оси. Найдите угол расхождения выходящего пучка. Диаметр окуляра 0,5 см.

*А. Простов*

**Решения задач M2111 – M2115, Ф2123–Ф2129**

**M2111.** Одна из клеток бесконечной клетчатой плоскости окрашена. Вначале фишка находится на расстоянии  $n$  клеток от окрашенной. Бросается иг-

ральная кость, и в случае выпадения  $k$  очков ( $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ) фишка перемещается на  $k$  клеток по направлению к окрашенной клетке. Процесс продолжается, пока фишка не попадает в окрашенную клетку (выигрыш) или пока она не проскочит окрашенную клетку (проигрыш). При каком натуральном  $n$  вероятность выигрыша  $p_n$  наибольшая? Найдите это наибольшее значение вероятности.

**Ответ:** наибольшее значение вероятности равно

$$p_6 = \frac{7^5}{6^6}.$$

Сначала можем последовательно найти

$$p_1 = \frac{1}{6},$$

$$p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 = p_1 + \frac{1}{6}p_1 = \frac{7}{6}p_1,$$

$$p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 = p_2 + \frac{1}{6}p_2 = \frac{7}{6}p_2,$$

...

$$p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \dots + \frac{1}{6}p_5 = p_5 + \frac{1}{6}p_5 = \frac{7}{6}p_5,$$

значит,

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 = \frac{7^5}{6^6}.$$

За один ход с вероятностью  $\frac{1}{6}$  фишка перемещается на 1, 2, ..., 6 клеток по направлению к окрашенной, поэтому для любого  $k \geq 7$  справедливо равенство

$$p_k = \frac{p_{k-1} + p_{k-2} + p_{k-3} + p_{k-4} + p_{k-5} + p_{k-6}}{6}. \quad (*)$$

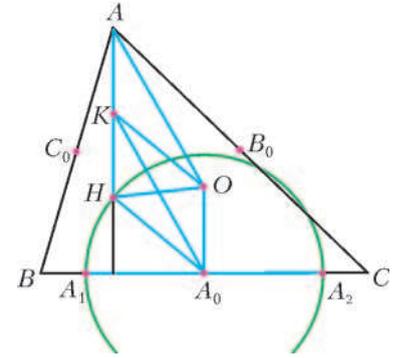
Следовательно, при  $n \geq 7$  величина  $p_n$  не превосходит наибольшего из чисел  $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_{n-6}$  и даже строго меньше одного из них, так как иначе  $p_n = p_{n-1} = p_{n-2} = \dots = p_{n-6}$ , и, продолжив применять (\*) для  $k = n, k = n - 1, \dots, k = 7$ , мы получили бы  $p_n = p_{n-1} = p_{n-2} = p_{n-3} = \dots = p_{n-6} = p_{n-7} = \dots = p_1 = \frac{1}{6}$ , что неверно. Имеем цепочку неравенств  $p_n < p_{n-i_1} < p_{n-i_1-i_2} < \dots$ , где  $i_j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ , которая остановится на одном из чисел  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ . Таким образом, (строгий) максимум  $p_n$  достигается для некоторого  $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ . Значит, максимальное значение равно  $p_6 = \frac{7^5}{6^6}$ .

Процессы, подобные описанному в данной задаче, изучаются в теории *цепей Маркова*, из которой, в частности, следует, что предел последовательности  $p_n$  равен  $\frac{2}{7}$  (это интуитивно понятно, так как  $\frac{2}{7}$  – величина, обратная средней длине хода фишки).

В.Лецко

**M2112.** Пусть  $H$  – точка пересечения высот остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность с центром в середине стороны  $BC$ , проходящая через точку  $H$ , пересекает прямую  $BC$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Аналогично, окружность с центром в середине стороны  $CA$ , про-

ходящая через точку  $H$ , пересекает прямую  $CA$  в точках  $B_1$  и  $B_2$ , и окружность с центром в середине стороны  $AB$ , проходящая через точку  $H$ , пересекает прямую  $AB$  в точках  $C_1$  и  $C_2$ . Докажите, что точки  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  лежат на одной окружности.



Пусть  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $O$  и  $R$  – центр и радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,  $A_0, B_0, C_0$  – середины сторон  $BC, CA, AB$  соответственно (см. рисунок). Докажем, что точка  $O$  равноудалена от точек  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ . По теореме Пифагора

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \quad (1)$$

Заметим, что  $O$  является ортоцентром треугольника  $A_0B_0C_0$ , поэтому при гомотетии, переводящей треугольник  $ABC$  в треугольник  $A_0B_0C_0$ , точка  $H$  переходит в точку  $O$ . Поскольку коэффициент этой гомотетии равен  $1/2$ , отношение соответствующих отрезков  $A_0O$  и  $AH$  равно  $1/2$ , иначе говоря,  $AH = 2A_0O$ .

Пусть  $K$  – середина отрезка  $AH$ . Так как  $AH \perp BC$ ,  $OA_0 \perp BC$  и  $AK = HK = OA_0$ , то  $AKA_0O$  и  $KHA_0O$  – параллелограммы. Получаем  $KA_0 = AO = R$ , а так как в параллелограмме  $KHA_0O$  сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, имеем

$$2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + KA_0^2 = OH^2 + R^2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает равенство  $OA_1^2 = (OH^2 + R^2)/2$ . Аналогично доказываются равенства

$$OA_2^2 = OB_1^2 = OB_2^2 = OC_1^2 = OC_2^2 = (OH^2 + R^2)/2.$$

А.Гаврилюк, П.Кожевников

**M2113.** Многочлен степени  $n > 1$  имеет различные вещественные корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а его производная – корни  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Докажите, что среднее арифметическое чисел  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$  больше, чем среднее арифметическое чисел  $y_1^2, y_2^2, \dots, y_{n-1}^2$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  – средние арифметические квадратов корней многочлена  $f$  и его производной  $f'$  соответственно.

Без ограничения общности считаем, что  $f$  имеет старший коэффициент, равный 1:  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . Из условия следует, что  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ . Приравнявая коэффициенты при  $x^{n-1}$  и при  $x^{n-2}$ , получаем следующие формулы Виета:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$ ,  $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2$  (в левой части последнего равенства стоит сумма всех попарных произведений  $x_i x_j$  для  $1 \leq i < j \leq n$ ). Отсюда

$$X = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = \frac{a_1^2}{n} - \frac{2a_2}{n}. \quad (1)$$

Отметим, что из *неравенства о средних* вытекает, что

$$X = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left( \frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{n} \right)^2 \geq \left( \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}{n} \right)^2 = \frac{a_1^2}{n^2}.$$

Поскольку числа  $x_1, \dots, x_n$  различны, один из знаков нестрогого неравенства превращается в знак строгого неравенства, что дает

$$X > \frac{a_1^2}{n^2}. \tag{2}$$

Далее, имеем

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-1}$$

и

$$f'(x) = n(x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_{n-1}),$$

откуда

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} = -\frac{(n-1)a_1}{n},$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + \dots + y_{n-2}y_{n-1} = \frac{(n-2)a_2}{n}$$

(при  $n > 2$ ). Получаем, что при  $n > 2$  выполнено равенство

$$(n-1)Y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 = \left( \frac{(n-1)a_1}{n} \right)^2 - \frac{2(n-2)a_2}{n}. \tag{3}$$

Проверка показывает, что равенство (3) верно и при  $n = 2$ .

Преобразуем (3), используя (1):

$$(n-1)Y = \frac{(n-1)^2 a_1^2}{n^2} + (n-2) \left( X - \frac{a_1^2}{n} \right) = (n-2)X + \frac{a_1^2}{n^2}.$$

Применение неравенства (2) дает

$$(n-1)Y < (n-2)X + X \Leftrightarrow Y < X,$$

что и требовалось.

*П. Кожевников*

**M2114.** Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов, не оканчивающихся нулем, в которых любая отличная от нуля цифра – нечетная.

Рассмотрим число  $n = 3 \cdot 10^{2k} + 5 \cdot 10^k + 1$ , где  $k \geq 2$  – натуральное. Имеем

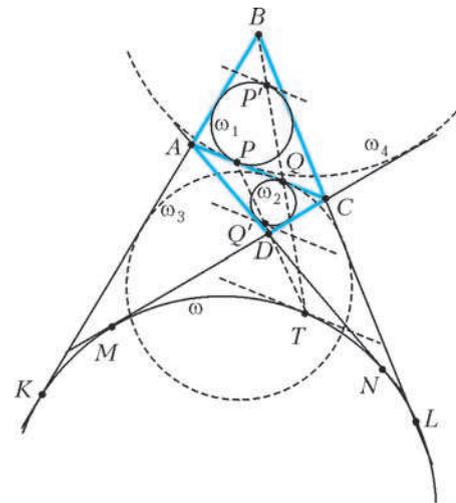
$$n^2 = 9 \cdot 10^{4k} + 25 \cdot 10^{2k} + 1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^{3k} + 2 \cdot 3 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot 5 \cdot 10^k = 9 \cdot 10^{4k} + 3 \cdot 10^{3k+1} + 31 \cdot 10^{2k} + 10^{k+1} + 1 = \overline{9 \underbrace{000 \dots 003}_{k-1 \text{ цифр}} \underbrace{0 \underbrace{000 \dots 003}_{k-1 \text{ цифр}}}_{k-1 \text{ цифр}} \underbrace{1 \underbrace{000 \dots 001}_{k-1 \text{ цифр}}}_{k-1 \text{ цифр}} \underbrace{0 \underbrace{000 \dots 000}_{k-1 \text{ цифр}}}_{k-1 \text{ цифр}} 1}.$$

Можно построить и другие примеры, допустим, поменять в построенном числе  $n$  цифры 3 и 1 местами.

*В. Сендеров*

**M2115\*.** Пусть  $ABCD$  – выпуклый четырехугольник, в котором  $BA \neq BC$ . Обозначим окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$ , через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Предположим, что существует окружность  $\omega$ , которая касается продолжения отрезка  $BA$  за точку  $A$ , продолжения отрезка  $BC$  за точку  $C$  и касается прямых  $AD$  и  $CD$ . Докажите, что общие внешние касательные к окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются на окружности  $\omega$ .

Пусть  $K, L, M, N$  – точки касания окружности  $\omega$  с прямыми  $AB, BC, CD, DA$  соответственно (см. рисунок). Пусть окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются отрезка  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Пусть  $\omega_3$  и  $\omega_4$  – вневписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $ADC$ , касающиеся отрезка  $AC$  в точках  $Q_1$  и  $P_1$  соответственно.



Из условия  $AB \neq BC$  вытекает, что точки  $P$  и  $Q_1$  не совпадают.

Из равенства отрезков касательных имеем  $AB + AD = BK - AK + AN - DN = BK - DN = BL - DM = BL - CL + CM - DM = CB + CD$ . Так как  $AP = (AC + AB - BC)/2$  и  $AP_1 = (AC + CD - AD)/2$ , получаем  $AP = AP_1$ , и поэтому  $P = P_1$ . Аналогично,  $Q = Q_1$ .

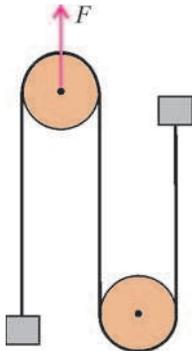
Пусть  $TT', PP', QQ'$  – диаметры, соответственно, окружностей  $\omega, \omega_1, \omega_2$ , проведенные перпендикулярно  $AC$  (пусть точки  $T$  и  $T'$  обозначены так, что  $T$  ближе к прямой  $AC$ , чем  $T'$ ). Касательные к окружностям  $\omega, \omega_1, \omega_2$ , проведенные через точки  $T, P', Q'$  соответственно, параллельны прямой  $AC$ . Окружности  $\omega, \omega_1$  и  $\omega_2$  гомотетичны с центром  $B$ , поэтому соответственные точки  $T, P', Q'$  этих окружностей лежат на прямой, проходящей через точку  $B$ , т.е. точки  $B, P', Q', T$  лежат на одной прямой. Так же, поскольку окружности  $\omega, \omega_2$  и  $\omega_4$  гомотетичны с центром  $D$ , точки  $D, P, Q', T$  лежат на одной прямой. Из доказанного следует, что существует гомотетия  $h$  с центром  $T$ , переводящая точку  $Q$  в точку  $P'$ . Заметим, что  $QQ' \parallel P'P$ , а прямая  $PQ'$  проходит через точку  $T$  и отлична от прямой  $P'Q$ , поэтому под действием гомотетии  $h$  отрезок  $QQ'$  переходит в отрезок  $P'P$ . Гомотетия  $h$  переводит окружность  $\omega_2$ , построенную

на отрезке  $QQ'$  как на диаметре, в окружность, построенную на отрезке  $P'P$  как на диаметре, т.е. в окружность  $\omega_1$ . Тогда центр  $T$  гомотетии  $h$  принадлежит общим внешним касательным окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Таким образом, точка  $T$  на окружности  $\omega$  и является точкой пересечения общих внешних касательных к окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

*Замечание.* Нетрудно показать, что утверждение задачи справедливо и в случае  $AB = BC$ .

В.Шмаров, И.Богданов

**Ф2123.** На гладком горизонтальном столе лежат два блока – тонкие легкие диски. Ось одного из них закреплена, так что двигаться он не может, но может вращаться в горизонтальной плоскости. Кусок легкой нерастяжимой нити охватывает блоки, к концам нити прикреплены одинаковые грузы массой  $M$  каждый. В начальный момент нить натянута, свободные куски нити параллельны друг другу. На ось «подвижного» блока начинает действовать сила  $F$  (см. рисунок; вид сверху). Найдите ускорение этого блока, если при движении свободные куски нити остаются параллельными. Во сколько раз отличаются скорости вращения блоков? Нить не проскальзывает относительно блоков.



Сила натяжения нити равна  $T = F/2$ , ускорения грузов направлены в разные стороны – левого вверх, а правого вниз, – одинаковы по величине и равны

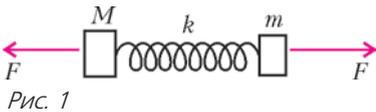
$$a = \frac{F}{2M}.$$

Ясно, что ускорение оси подвижного блока тоже равно  $a$ .

Подвижный блок, в отличие от закрепленного, не вращается.

А.Блоков

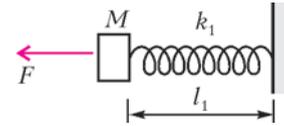
**Ф2124.** Грузы с массами  $M$  и  $m$  связаны очень легкой пружинкой жесткостью  $k$ . На грузы начинают действовать одинаковые по величине и противоположные по направлению силы  $F$  (рис.1). Найдите максимальную скорость груза массой  $M$ . Найдите также максимальное смещение груза массой  $m$ . В начальный момент пружина не деформирована, грузы неподвижны.



Ускорение центра масс системы равно нулю. Если пружинка однородная, то неподвижной будет точка, находящаяся на расстоянии  $l_1 = l \frac{m}{M+m}$  от груза массой  $M$ . Жесткость этого куска пружинки равна  $k_1 = k \frac{M+m}{m}$ , жесткость второго куска равна, соответственно,  $k_2 = k \frac{M+m}{M}$ . Для первого куска пружинки

можно записать (рис.2)

$$Fx_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2},$$



где  $x_1$  – положение равновесия,  $v_1$  – максимальная скорость груза массой  $M$ . Отсюда находим искомую скорость:

$$v_1 = \frac{F}{\sqrt{k_1 M}} = F \sqrt{\frac{m}{k(M+m)M}}.$$

Для максимального смещения  $x_2$  груза массой  $m$  получим

$$Fx_2 = \frac{k_2 x_2^2}{2}, \text{ и } x_2 = \frac{2F}{k_2} = \frac{2FM}{k(M+m)}.$$

А.Простов

**Ф2125.** Моль гелия при нормальных условиях находится внутри эластичной оболочки. Наружные условия изменяются так, что к некоторому моменту газ получает 100 Дж тепла, а температура газа увеличивается при этом на 10 К. Оцените изменение объема газа.

Видно, что при такой небольшой тепловой добавке (по сравнению с начальной внутренней энергией порции газа) изменение объема газа будет совсем малым (это придется проверить!). Тогда запишем

$$p \approx \text{const} = p_0 \text{ и } Q = p_0 \Delta V + \frac{3}{2} \nu R \Delta T,$$

откуда

$$p_0 \Delta V = Q - \frac{3}{2} \nu R \Delta T =$$

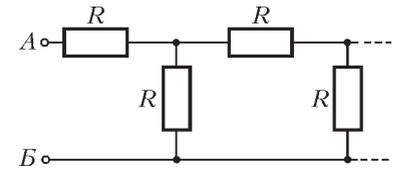
$$= 100 \text{ Дж} - \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 8,3 \cdot 10 \text{ Дж} \approx -25 \text{ Дж},$$

$$\Delta V = \frac{p_0 \Delta V}{p_0} = \frac{-25 \text{ Дж}}{10^5 \text{ Па}} = -0,25 \text{ л}.$$

Итак, в данном процессе объем уменьшается примерно на 0,25 л, что существенно меньше начального объема этой порции газа  $V_0 = 22,4 \text{ л}$ .

З.Повторов

**Ф2126.** На рисунке изображена известная бесконечная цепочка, состоящая из резисторов с одинаковыми сопротивлениями. Все знают, как посчитать ее сопротивление, измеренное между точками А и Б. А что если взять не бесконечную цепочку, а цепочку, состоящую ровно из 50 звеньев, – как посчитать ее сопротивление? Понятно, что сделать это «в лоб» трудно, проще считать цепь бесконечной... Какую погрешность мы при этом получим? Сильно ли сопротивление урезанной цепи отличается от сопротивления бесконечной цепочки? Зададим конкретный вопрос: эти отличия меньше миллионной доли процента или намного больше?



Легко обычным способом посчитать сопротивление бесконечной цепочки:

$$R_0 = \frac{R(\sqrt{5} + 1)}{2} \approx 1,618033999R.$$

Сопротивление цепочки, которая содержит определенное число звеньев, несколько больше, при этом чем больше звеньев, тем оно ближе к указанному сопротивлению бесконечной цепочки. Конечно, считать «в лоб» сопротивление цепочки из 50 звеньев очень не хочется. Попробуем сделать проще. В условии задачи идет речь о миллионной доле процента, поэтому умножим сопротивление бесконечной цепочки на  $(1 + 1 \cdot 10^{-8})$  – получится  $1,618034R$ . Будем последовательно увеличивать число звеньев цепочки и считать полученное сопротивление, надеясь на то, что нужный результат – меньше полученного выше – будет достигнут не слишком поздно...

Итак, для одного звена сопротивление равно  $2R$ , для двух звеньев будет  $5R/3 = 1,66R$ . Далее получим  $1,625R$ ,  $1,619048R$ ,  $1,61818R$ ,  $1,618055R$ ,  $1,618037R$ ,  $1,6180344R$ ,  $1,61803405R$ ,  $1,61803399R$  – уже при 10 звеньях получается почти такое же сопротивление, как у бесконечной цепи.

Как видно, увеличение числа звеньев быстро приводит к результату – достаточно даже 10 звеньев, а уж при указанных 50 разница между сопротивлениями урезанной цепи и бесконечной цепочки будет совершенно ничтожной.

Конечно, при другом соотношении сопротивлений резисторов звена результат может быть совершенно иным. Так, при «коэффициенте деления» больше 2 (например, при сопротивлениях  $10R$  и  $R$ ) результат будет достигнут намного раньше. А вот при меньшем «коэффициенте деления» все будет наоборот.

*А. Цепочки*

**Ф2127.** Потенциалы точек А, В и В поддерживаются постоянными:  $\varphi_A = 100 В$ ,  $\varphi_B = 200 В$ ,  $\varphi_V = 500 В$ .

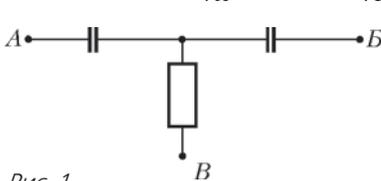


Рис. 1

Два одинаковых конденсатора емкостью  $10 \mu\text{Ф}$  каждый и резистор сопротивлением  $1 \text{ Мом}$  соединяем «звездой» и подключаем одновременно свободными выводами к точкам А, В и В (резистор – к точке В; рис.1). Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

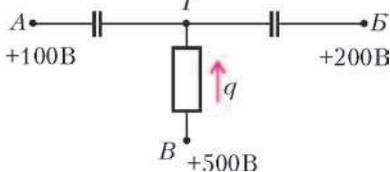


Рис. 2

Сразу после подключения потенциал точки Г (рис.2) станет равным  $\varphi_G = +150 В$ , а затем начнет медленно увеличиваться до значения  $\varphi_B = +500 В$ . Пусть к некоторому моменту по резистору протечет заряд  $q$ , тогда получим

$$C(\varphi_G - \varphi_A) + C(\varphi_G - \varphi_B) = q,$$

или

$$\varphi_G = \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B) + \frac{1}{2} \frac{q}{C},$$

т.е. потенциал точки Г линейно зависит от величины  $q$ . Найдем теперь зависимость разности потенциалов между выводами резистора от величины протекаемого по нему заряда:

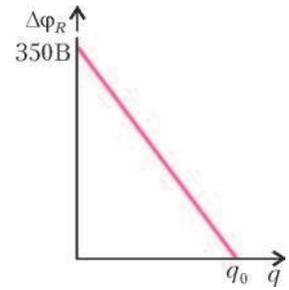


Рис. 3

$$\Delta\varphi_R = \varphi_B - \varphi_G = 350 В - \frac{q}{2C}$$

и нарисуем соответствующий график (рис.3). Здесь  $q_0 = 2C\left(\varphi_B - \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}\right) = 7 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$  – значение заряда, при котором разность потенциалов на резисторе равна нулю (к сожалению, в опубликованном условии в значении емкости конденсатора допущена опечатка). Площадь под этим графиком дает величину выделившегося в резисторе количества теплоты:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 350 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,225 \text{ Дж}.$$

*З. Рафаилов*

**Ф2128.** Две одинаковые катушки соединены последовательно, параллельно одной из них подключен конденсатор, а к выводам цепи подсоединена батарейка напряжением  $U$  (рис.1). Найдите максимальное напряжение конденсатора. Элементы цепи считать идеальными.

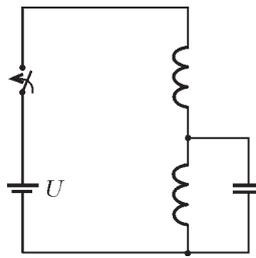


Рис. 1

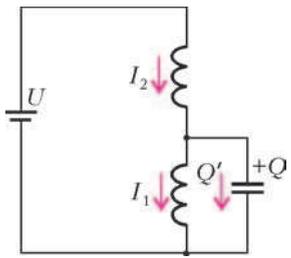


Рис. 2

Обозначим ток нижней катушки через  $I_1$ , заряд конденсатора – через  $Q$  (рис.2). Тогда ток верхней катушки будет

$$I_2 = I_1 + Q'.$$

Для получившегося колебательного контура запишем

$$LI_2' + \frac{Q}{C} = U, \quad LI_1' = \frac{Q}{C}, \quad LI_1' + LQ'' + \frac{Q}{C} = U,$$

$$Q'' + \frac{2}{LC} Q = \frac{U}{L}.$$

Тут есть слагаемое в правой части последнего уравнения, но от него легко избавиться, чтобы получилось обычное уравнение гармонических колебаний. Для этого достаточно добавить к неизвестной величине постоянную:

$$z(t) = Q(t) - \frac{CU}{2}, \quad z'' + \frac{2}{LC} z = 0, \quad z'' + \omega^2 z = 0.$$

Полученное уравнение решаем обычным способом, с

учетом того, что сразу после подключения батарейки заряд конденсатора равен нулю, нулю равен и ток через конденсатор – его ограничивает верхняя катушка индуктивности. Находим окончательное выражение для заряда конденсатора:

$$Q(t) = 0,5CU(1 - \cos \omega t),$$

откуда следует, что максимальное напряжение конденсатора равно напряжению батарейки.

Этот результат можно получить и намного быстрее – при помощи метода «эквивалентного источника». Заменяем батарейку и две подключенные к ней катушки эквивалентным источником из батарейки половинного напряжения и последовательно с ней соединенной эквивалентной катушки индуктивностью  $L/2$ . Получается совсем простая схема – к батарейке подключен обычный последовательный  $LC$ -контур. В этом случае максимальный заряд, а значит и максимальное напряжение, конденсатора находится совсем просто.

*Р.Александров*

**Ф2129.** В трех вершинах квадрата с длиной стороны 2 м расположены одинаковые маленькие громкоговорители, в четвертой вершине находится очень маленький всенаправленный микрофон. К громкоговорителям поочередно подключают источники переменного напряжения частотой 100 Гц и регулируют их уровни так, чтобы напряжение на выходных зажимах микрофона составляло в каждом случае ровно 1 мВ. Какое напряжение выдаст микрофон, если включить одновременно два соседних громкоговорителя? А если

включить все три громкоговорителя? Рассмотрите два разных варианта: используются независимые источники напряжения (три звуковых генератора и три усилителя низкой частоты) и используется один генератор, «размноженный» на три усилителя.

При независимых источниках звука можно просто складывать мощности, тогда для двух источников получим

$$U_2 = U\sqrt{2} \approx 1,4 \text{ мВ},$$

для трех источников –

$$U_3 = U\sqrt{3} \approx 1,7 \text{ мВ}.$$

При одном «размноженном» источнике излучатели будут когерентными, складывать волны нужно будет с учетом фазовых сдвигов. Для случая двух соседних громкоговорителей разность хода равна  $\Delta l = 2\sqrt{2} \text{ м} - 2 \text{ м} \approx 0,82 \text{ м}$ . При частоте 100 Гц и скорости звука 330 м/с длина волны равна  $\lambda = 3,3 \text{ м}$  и разность фаз составляет

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = 1,56 \text{ рад} \approx 90^\circ.$$

Тогда для двух громкоговорителей получится почти столько же, сколько и в первом случае:

$$U_2 = U\sqrt{2} \approx 1,4 \text{ мВ}.$$

Для трех громкоговорителей две амплитуды просто складываются, и к их сумме нужно прибавить вектор со сдвигом фаз  $90^\circ$ :

$$U_3 = U\sqrt{2^2 + 1^2} = U\sqrt{5} \approx 2,2 \text{ мВ}.$$

*А.Зильберман*

## Интервью с А.Б.Сосинским

*(Начало см. на с. 18)*

хотел сказать, и это очень важно, – первоначальный замысел ЕГЭ состоял в том, чтобы бороться с коррупцией на вступительных экзаменах в некоторые вузы. К сожалению, очевидно, что этот аргумент в пользу ЕГЭ абсолютно несостоятелен. Дело в том, что гораздо проще подделать ответы абитуриента с помощью компьютера, чем это сделать на обычных письменных или даже устных экзаменах. Статистика, которую, кстати, министерство просвещения пытается скрыть от общественности, все-таки частично известна; она показывает, например, что количество максимальных баллов ЕГЭ по математике в Дагестане во много раз больше, чем количество таких же баллов в Москве и Московской области, хотя население Дагестана на пару порядков меньше, чем население Москвы. При всем уважении к учителям математики в Дагестане, ясно, что без активной коррупционной деятельности при проверке экзамена такой результат не мог быть достигнут. Вместо того, чтобы бороться с этим новым видом коррупции, министерство тщательно скрывает это обстоятельство от общественности.

*– Вы много лет работали в «Кванте». Что для вас было самым важным, и что вы пожелаете нынешним авторам, редакторам, читателям?*

*– Я работал в «Кванте» в эпоху, когда происходил настоящий расцвет интереса к физико-математическому образованию у многих школьников, и это также совпало с эпохой расцвета журнала «Квант». Когда я пришел, там был тираж больше 200 тысяч экземпляров, т.е. более чем в пятьдесят раз больше, чем*

сегодня. И этот тираж держался до конца восьмидесятых годов.

*– На максимуме было 380 тысяч.*

*– 380, да. Но я пришел уже позже, я пришел в 75-м году. В «Кванте» был замечательный коллектив работников. Активный интерес к журналу проявляли оба его основателя, и Исаак Константинович Кикоин, и Андрей Николаевич Колмогоров. Кикоин каждую неделю приходил в журнал. Колмогоров иногда журналом очень увлекался и много им занимался, иногда его оставлял сотрудникам. Разительное отличие от современного представлял раздел «Задачник «Кванта», которым заведовал Николай Борисович Васильев. Николай Борисович также вел раздел «Математический кружок» и вообще был, так сказать, ведущим математиком в журнале. Задачи решали тысячи школьников... или пытались решить тысячи школьников, это более точно. Было много хороших авторов. Сравнить ситуацию с журналом тогда и сегодня просто некорректно. Появились интернет, десятки телепрограмм, компьютерные игры, просто компьютеры, и для тех школьников, которые интересуются математикой, «Квант» не является основным и часто не является даже одним из основных источников информации. Это, конечно, с одной стороны, грустно, а с другой стороны – это объективная реальность, и «Квант» сегодня пытается выполнить ту миссию, которая ему доступна, т.е. все-таки давать читателям живые образцы популярных статей по физике и математике. Что я хочу пожелать нынешней редакции и авторам – то же самое, что мы желали сами себе, но не сумели выполнить, когда я там работал, а именно – чтобы статьи были одновременно и интересные, и яркие, и доступные.*

*Вопросы задавали С.Дориченко, А.Спивак*

*В среде, в которой распространяется волна, появляется в направлении ее распространения давящая сила, которая во всякой точке численно равна количеству находящейся там энергии, отнесенной к единице объема.*

Джеймс Клерк Максвелл

*Насколько движение энергии и движение сжимаемого вещества обуславливаются законом их сохранения, настолько мы имеем право уподоблять движение энергии движению подвижного и сжимаемого вещества.*

Николай Умов

*Имеется общий закон переноса энергии, согласно которому энергия в любой точке движется перпендикулярно к плоскости, содержащей линии электрических и магнитных*

*сил... Направление же потока совпадает с направлением движения правого винта.*

Джон Генри Пойнтинг

*...если магнитный поток, проходящий через петлю, ...меняется со временем, то ЭДС равна скорости изменения потока. Мы будем в дальнейшем называть это «правилом потока».*

Ричард Фейнман

*...свойства света лучше всего выявляются в предельных условиях развития явления или его исследования: при изучении предельно слабых световых потоков...*

Сергей Вавилов

## А так ли хорошо знакомы вам ПОТОКИ?

Конечно, если ограничить себя поверхностным пролистыванием школьных учебников, то не сразу и обнаружишь, где там встречается понятие потока. Да, есть поток магнитной индукции, еще есть плотность потока электромагнитной энергии. И все? Разумеется, нет.

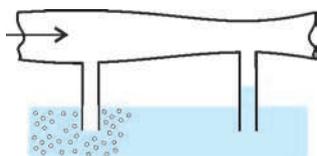
Понятие потока пронизывает практически все разделы физики, в большинстве случаев скромно оставаясь в тени. Например, при рассмотрении движения жидкостей и газов прежде всего бросается в глаза перенос вещества, но с ним связано, хотя и не столь очевидное, течение импульса и энергии. При протекании электрического тока в первую очередь мы следим за переносом заряда, не всегда догадываясь, за счет чего нагревается проводник. А как распространяется энергия в процессе теплопроводности, как распределяется она в потоках волн различной природы?

Продолжив более внимательное путешествие по главам курса физики, мы найдем в нем еще немало любопытных проявлений универсального понятия потока. Кроме того, с ним приходится многократно сталкиваться и далеко за рамками учебников: массо- и теплоперенос в химических реакторах; потоки вырывающихся из двигателей реактивных струй; перекачка по трубопроводам нефти и газа; потоки заряженных частиц, искусственно созданных в ускорителях или летящих к нам из космоса; потоки света от Солнца, звезд и осветительных приборов; океанические течения и циркуляция атмосфер Земли и других планет...

Однако, довольно примеров. Пора понятию потока выйти на авансцену нашего «Калейдоскопа» — мы рассчитываем, что вам будет интересно не только распознать участие понятия потока в разнообразных проблемных ситуациях, но и разрешить их с его помощью.

### Вопросы и задачи

**1.** В сквозных проемах под высокими зданиями, в арках и подворотнях скорость ветра порой достигает такой величины, что его напор может сбить человека с ног. Чем это вызвано?



**2.** Если через горизонтальную трубку продувать воздух, как показано на рисунке, то при некоторой

его скорости в правой вертикальной трубке начнет подниматься вода, а из левой будут выходить пузырьки воздуха. Почему?

**3.** Если два корабля идут параллельными курсами на близком расстоянии друг от друга, то они начинают сближаться. Как это объяснить?

**4.** Идеальная, т.е. несжимаемая и лишенная вязкости, жидкость обтекает шар. Покажите, что сила, с которой жидкость действует на шар, равна нулю.

**5.** Почему тонкая медная проволока плавится в пламени свечи, а толстый медный стержень даже не нагревается до красного каления?

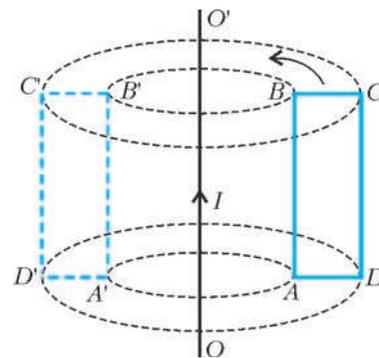
**6.** Будет ли кипеть вода в маленькой кастрюле, которая плавает в большой кастрюле с кипящей водой? А если воду в большой кастрюле предварительно прокипятить?

**7.** Какие термосы выгоднее при одной и той же высоте и вместимости: круглого или квадратного сечения?

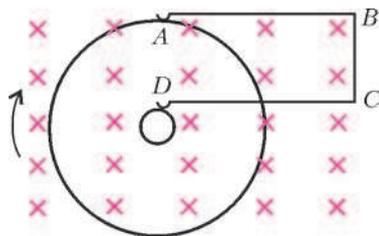
**8.** Вода в сосуде нагревается на электрической плитке постоянной мощности. Что требует большего времени: нагревание от 10 до 20 °C или от 80 до 90 °C?

**9.** В раствор медного купороса опущены два угольных стержня, на одном из которых в процессе электролиза осаждается медь. Почему наиболее толстый слой меди получается на той части его поверхности, которая обращена к другому стержню?

**10.** Будет ли в рамке  $ABCD$  возникать индукционный ток, если рамку: а) вращать относительно неподвижного проводника с током  $OO'$ , как показано на рисунке; б) вращать вокруг стороны  $AB$ ; в) вращать вокруг стороны  $BC$ ; г) двигать поступательно в вертикальном направлении; д) двигать поступательно в горизонтальном направлении?



**11.** Вращающийся медный диск связан с неподвижным проводником  $ABCD$  при помощи скользящих контактов  $A$  и  $D$ , как изображено на рисунке. Диск и



проводник находятся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости чертежа. Изменяется ли при вращении диска магнитный поток через контур  $ABCD$ ? Течет ли по проводнику  $ABCD$  ток?

**12.** В коротко замкнутую катушку вдвигают магнит: один раз быстро, а другой — медленно. В каком случае в катушке выделяется больше тепла? А в каком случае через катушку проходит больший заряд?

**13.** Сверхпроводящее кольцо с током переключают, превращая его в «восьмерку» из двух одинаковых колец. Затем «восьмерку» складывают так, что получается одно двойное кольцо. Как изменится индукция магнитного поля в центре кольца по сравнению с первоначальной?

**14.** Во сколько раз надо увеличить частоту колебаний электромагнитной волны, чтобы при удалении от источника на расстояние, вдвое большее первоначального, интенсивность волны не изменилась?

**15.** Почему увеличение дальности радиосвязи с космическими кораблями в 2 раза требует увеличения мощности передатчика в 4 раза, а увеличение дальности радиолокации в 2 раза требует увеличения мощности передатчика в 16 раз? Поглощением энергии средой пренебречь.

**16.** На круглое отверстие в непрозрачном экране падает параллельный пучок электромагнитного излучения. Почему при увеличении радиуса отверстия в некоторой точке на оси отверстия может наблюдаться уменьшение интенсивности излучения, хотя его поток через отверстие при этом возрастает?

**17.** М.В.Ломоносов утверждал, что телескоп не только увеличивает видимые размеры далеких предметов, но и усиливает воспринимаемое глазом количество света, испускаемого источником. Как это можно объяснить?

**18.** Как следует разместить электрическую лампу, вогнутое зеркало и собирающую линзу, чтобы получить наиболее интенсивный световой поток?

### Микроопыт

Наполните горячей водой ванну и стакан. Проследите с помощью термометра и часов, где вода охладится быстрее. Объясните ваше наблюдение.

### Любопытно, что...

...Даниил Бернулли, которому впервые удалось описать движение идеальной жидкости, черпал разнообразие гидродинамических задач в том числе и в физиологии. В молодости, изучая медицину, он интересовался вопросами определения скорости потоков крови в сосудах и влияния величины кровяного давления на характер этого движения.

...сущность так называемого парадокса Д'Аламбера — Эйлера заключена в том, что поток лишённого внутреннего трения газа (идеальной «жидкости») действует на тело любой формы с силами, сумма которых равна нулю. В воздухе, утратившем вязкость, не смогли бы взлететь ни самолет, ни вертолет, поскольку подъемная сила крыла и сила тяги воздушного винта оказались бы нулевыми.

...одно из фундаментальных явлений механики жидкости и газа — это отрыв потока, когда среда вблизи обтекаемых тел, например крыльев летательных и плавающих аппаратов, перестает двигаться вдоль их поверхности и отходит от нее. Научиться управлять этим явлением

— насущная задача, поскольку срыв потока может сопровождаться резким снижением подъемной силы крыла, увеличением его сопротивления, что порой приводит к катастрофическим последствиям.

...в своих исследованиях по электричеству Ом вдохновлялся работой Фурье «Аналитическая теория тепла». Ому пришла мысль, что механизм теплового потока, о котором шла речь в этом труде, можно уподобить току в проводнике, и в одной из формулировок своего закона он ввел понятие плотности тока, иначе говоря, плотности потока электрического заряда.

...защита в 1874 году докторской диссертации российским ученым Умовым сопровождалась шестичасовым диспутом. Критику оппонентов вызвали предложенные Умовым новые понятия скорости и направления движения энергии, потока энергии и ее плотности в данной точке среды. Через 10 лет английский физик Пойнтинг ввел вектор плотности потока электромагнитной энергии. Сегодня этот вектор известен как вектор Умова—Пойнтинга.

...интенсивность видимого излучения стоваттной лампы на расстоянии 3 м равна примерно  $2 \cdot 10^{-6}$  Вт/см<sup>2</sup>. Для сравнения, среднее значение так называемой солнечной постоянной — интенсивности потока солнечного света вблизи земной поверхности — немногим выше 0,1 Вт/см<sup>2</sup>, а при фокусировке луча от непрерывно генерирующего лазера можно достичь интенсивности  $10^{10}$  Вт/см<sup>2</sup>. Используемые в экспериментах по термоядерному синтезу титан-сапфировые лазеры способны производить ультракороткие импульсы с интенсивностью до  $10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>.

...минимальная интенсивность звукового потока, которую может еще почувствовать ухо человека, составляет около  $10^{-16}$  Вт/см<sup>2</sup> при частоте звука 3 кГц. Порог чувствительности глаза примерно такой же — глаз способен реагировать на потоки световой энергии порядка  $3 \cdot 10^{-17}$  Вт/см<sup>2</sup>. А современные радиоприемники могут «услышать» станцию, интенсивность волн которой в месте приема достигает лишь  $10^{-18}$  Вт/см<sup>2</sup>.

...«звездные величины» и «блеск» — характеристики небесных объектов, используемые в астрономии, — представляют собой ни что иное как разновидности определения энергии потоков излучения, т.е. их интенсивности. Возникли они еще до появления понятий «световой поток» и «освещенность».

### Что читать в «Кванте» о потоках

(публикации последних лет)

1. «Откуда течет энергия: открытие за открытием» — 2003, №5, с.31;
2. «Калейдоскоп «Кванта» — 2004, №3, с.32; 2005, №5, с.32; 2007, №5, с.32; 2008, №1, с.32; №3, с.32; №5, с.32;
3. «Магнитный поток сверхпроводника» — 2004, Приложение №4, с.38;
4. «Как в землю казан закопали» — 2004, Приложение №4, с.72;
5. «Этот ужасный космический холод» — 2005, Приложение №6, с.180;
6. «Закон электромагнитной индукции» — 2006, №5, с.36;
7. «Радиоволны переносят энергию и импульс» — 2007, Приложение №1, с.22;
8. «Магнитная сила и закон электромагнитной индукции» — 2008, №5, с.38;
9. «Лазер — новый источник света» — 2009, Приложение №2;
10. «Поток магнитной индукции» — 2009, №3, с.51.

Материал подготовил А.Леонович

# Задачи

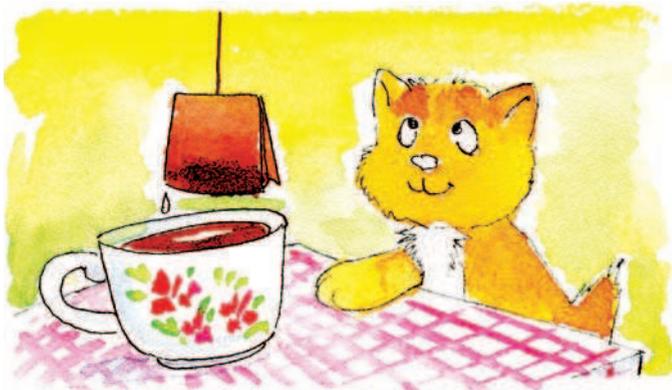
1. Вдоль дороги длиной 60 км стоят несколько пеньков (больше одного). Первый турист идет по дороге со скоростью 5 км/ч и возле каждого пенька отдыхает одно и то же целое число часов. Второй турист едет на велосипеде со скоростью 12 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого туриста. Вышли и пришли туристы одновременно. Сколько пеньков у дороги?

*О.Иванова, К.Кохась*



2. Опустив в кружку с водой чайный пакетик, поднимите его за ниточку над кружкой – пакетик начнет вращаться. Почему это происходит?

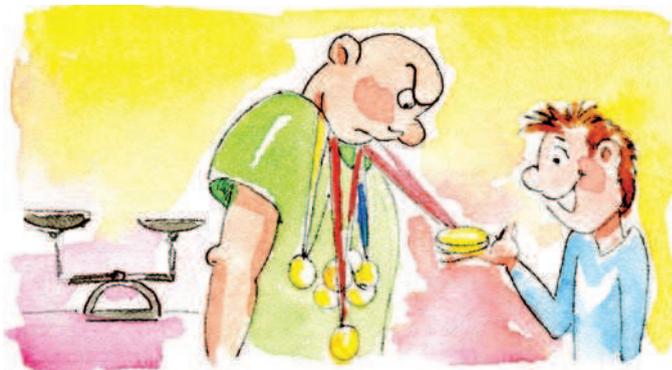
*А.Ковальджи*



3. Есть 1 золотая, 3 серебряных и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая: легче настоящей. Настоящие медали из одного металла весят одинаково (а из разных – не одинаково). Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

*А.Шаповалов*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



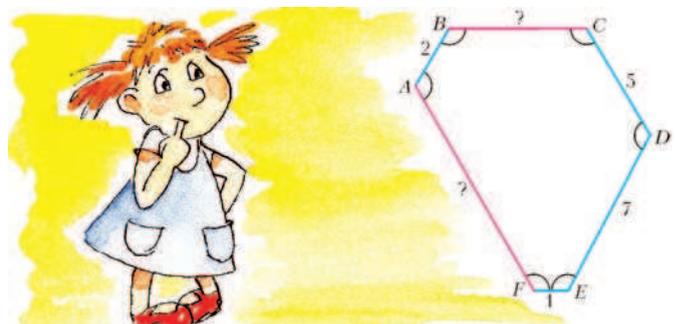
4. В деревне живут 250 хоббитов. Каждый хоббит живет в отдельном домике. По вечерам они ходят друг к другу в гости. За один вечер каждый хоббит, если он идет в гости, посещает всех, кого можно застать дома, причем у себя дома в этот вечер уже не появляется. За какое наименьшее число вечеров может случиться так, что среди любых двух жителей деревни хотя бы один побывал в гостях у другого?

*А.Эвнин*



5. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все внутренние углы равны. Известно, что  $AB = 2$ ,  $CD = 5$ ,  $DE = 7$ ,  $EF = 1$ . Найдите  $BC$  и  $AF$ .

*Фольклор*



Иллюстрации Д.Гришуковой

# Стабильные браки

*В. УФНАРОВСКИЙ*

— СЕГОДНЯ СТАРТОВАЛ НАШ ДОЛГИЙ КОСМИЧЕСКИЙ полет, — так начал свою речь капитан первого межзвездного корабля «Земля — Андромеда». — Нас здесь, как вы знаете, 50 мужчин и 50 женщин, а лететь нам 50 лет. Так что всем следует завести семьи. Каждый из вас не женат и должен вступить в брак здесь: таково было условие приема в экспедиционный корпус.

— Мы помним, и многие из нас будут рады жениться уже сегодня. Мы знаем друг друга не меньше года.

— Хорошо. Но я думаю, что жениться должны все, причем так, чтобы на этом корабле не было никаких супружеских измен.

Все рассмеялись от души.

— Капитан, вы идеалист, — сказал кто-то.

— Я вполне реалистичен, — улыбнулся капитан. — Это невозможно на Земле, но мы вполне можем осуществить это здесь.

— Как это? — все продолжали смеяться.

— Могу я спросить, — капитан был несгибаем, — почему это женатый мужчина А изменяет своей жене с замужней леди О?

— Что же здесь непонятного, капитан? Потому что они нравятся друг другу больше, чем их собственные супруги.

— И А запросто находит красотку О, которая предпочтет его собственному мужу?

— Проще некуда! — некоторые уже просто покатывались от хохота.

— Но это на Земле! — Капитан строго осмотрел на команду, и смех сам собой пропал. — А я намерен женить нас так, чтобы никакому мужчине А не удалось найти такую женщину О, которая бы нравилась ему больше собственной жены и которая предпочла бы его собственному супругу.

— Вы имеете в виду, капитан, что каждой такой женщине, которая нравится А больше, чем его половина, сам А не нравится? По крайней мере не больше собственного мужа.

— Именно. И наоборот, А предпочитает свою жену всем тем, которые с радостью сменили бы своих партнеров на него.

— Хорошая идея, капитан! Если вам это удастся, вы решите вековую проблему стабильности в браке. Но нам все равно кажется, что это невозможно.

— Но могу я попробовать? — спросил капитан вкрадчиво.

— Отчего же нет, это будет забавно!

— Прекрасно! Тогда начнем немедленно. Сегодня каждый мужчина должен выбрать ту женщину, которая ему нравится больше всех, и написать ей письмо: попросить ее руки.

— Но тогда все выберут Диану. — Диана Браун была

признанной красавицей. Многие были влюблены в нее, но мало кто надеялся стать ее мужем.

— Во-первых, не все. Например, не я. Кроме того, это не играет никакой роли. Вы должны посвататься, даже если у вас нет никакого шанса. Выберите ту женщину, о которой мечтаете. Однако это — только начало. Мы продолжим завтра. А сейчас вы должны написать свое первое письмо. И не думайте о возможном отказе. Только выберите самую желанную женщину. И помните: это — приказ. Каждый должен выбрать и посвататься!

Не много мужчин смогли уснуть в эту ночь. Выбрать женщину своей мечты. Не так-то это просто! К тому же она может и отказать. Пожалуй, хорошо, что это был приказ, многие иначе и не осмелились бы посвататься. И многие выбрали Диану.

Капитану тоже не спалось. Мэри, в которую он тайно был влюблен, давно уже предпочитала другого.

— Но я должен написать Мэри, — тяжело вздохнул капитан и начал свое письмо.

На следующее утро после завтрака все собрались в зале. Многие женщины были тихи и печальны.

— Вижу, далеко не все получили письма, — заметил капитан. Несколько вздохов были ему ответом. — А кто-то получил больше одного письма. — Некоторые женщины радостно кивнули. Краем глаза он увидел, что и Мэри кивнула тоже. — Теперь ваш черед выбирать! Каждая женщина, которая получила больше чем одно письмо, должна выбрать только одного мужчину.

— И выйти за него замуж?

— Нет, этого я не говорил. Но вот что вы должны сделать, так это ответить всем остальным, что вы никогда не сможете выйти за них. Я думаю, это естественно. Они должны знать, что есть кто-то, кто вам нравится больше.

— Только это?

— Только это. И ждать завтрашнего дня.

— Тогда Диане придется писать много писем! — пошутил кто-то в зале. Но самой ей, похоже, было не до шуток.

— А можно я всем отвечу? — спросила она.

«Видать, не получила она того письма, которого ждала», — подумал капитан, а вслух сказал:

— Нет, ты должна ответить всем, кроме лучшего из них. Это только начало. Мы всего лишь отмечаем заведомо нестабильные браки, — попытался он утешить красавицу. Только в последнюю секунду он осмелился поднять взгляд на Мэри. Она сочувственно улыбнулась ему, и он понял, что завтра получит от нее письмо.

Мало кому удалось легко уснуть и в эту ночь. Женщины, которым было из чего выбирать, размышляли. Те, кому вообще выбирать было не из чего,

плакали. А мужчины... Мужчины ждали и тоже не могли уснуть.

На следующее утро больше половины из них получили письма, и большую часть — от Дианы. Письма были вежливые, но безнадежные. Капитан также получил свое письмо от Мэри. После завтрака все собрались, и капитан сказал:

— Сегодня многие из нас получили письмо. Это означает, что мы, — капитан бросил печальный взгляд на Мэри, — не имеем никаких шансов на стабильный брак с нашими избранницами. И я считаю, что лучше узнать это сейчас, чем после женитьбы.

— Вы правы, капитан! — большинство были согласны.

— А знаете ли вы, что нам делать теперь?

— Нет, не знаем.

— Во-первых, забыть эту женщину. Вы никогда не женитесь на ней. Во-вторых, выбрать самую лучшую женщину из оставшихся и посвататься к ней!

— Значит, мы можем получить новое письмо? — спросили женщины с радостью в голосе.

— Да. И, может быть, не одно.

— И те, что уже получили письма, тоже могут?

— Конечно! С одним лишь исключением: вы не получите писем от тех, кому отказали. Но вряд ли вам нужны эти письма.

— Капитан, вы умнее, чем мы думали!

Новые надежды — новые радости. Женщины были возбуждены.

— А если мужчине не отказали, значит ли это, что он уже может заказывать кольца? — спросил довольный молодой человек. Многие подозревали, что он был единственным, кто написал Диане и не получил никакого письма в ответ.

— Нет, этого капитан не имел в виду. Ты просто имеешь хороший шанс, но надо еще подождать, — ответила Диана ко всеобщему изумлению.

— Совершенно верно, — подтвердил капитан. — Но если хочешь, ты можешь написать той же женщине.

— Я так и сделаю!

Новый выбор — новая надежда. Но на этот раз многие спали хорошо. Только некоторые из тех, кто получил отказ, не могли уснуть. Среди них был и капитан.

— И зачем я это начал? — спрашивал он себя. — Сам же убил свою надежду... Однако в любом случае я должен выбрать новую женщину. И получить еще одно письмо. Потому что я должен быть честным: Диана — лучше всех, если я должен позабыть про Мэри. — И он написал и отослал письмо Диане.

На следующее утро большинство женщин были веселы, а Диана просто светилась от радости.

— «Наверное, она получила то письмо, на которое надеялась», — подумал капитан, а вслух сказал:

— Девушки, те из вас, кто получил больше чем одно письмо, знают, что надо делать?

— Выбрать лучшего и ответить остальным.

— Умницы!

— Но капитан, как долго мы будем писать и выбирать?

— До тех пор, пока каждая из вас не получит хотя бы одно письмо. И тогда лучшее письмо будет от вашего будущего мужа. И это будет стабильный брак. Подумайте, почему.

— Капитан, — сказала Мэри, — кажется, я поняла,

наконец, твою идею. Ты имеешь в виду, что мы, женщины, не будем неверны мужьям по той простой причине, что те, с кем мы могли бы это, возможно, сделать, не любят нас: они не прислали нам письма, у них есть кто-то лучше. А если ни одна женщина не будет неверна, то не будет и неверных мужей.

— Прекрасное рассуждение!

— Можно спросить? — сказала Диана. — Означает ли это, что я буду замужем за тем единственным человеком, которого люблю, если он уже написал мне?

— Ты можешь быть уверена в этом! Всем остальным ты все равно откажешь.

— Зачем же мне тогда ждать?

— Только для того, чтобы все остальные тоже получили свое письмо.

— Но могу я уже сейчас сказать моему будущему спутнику жизни, что я выбрала его до конца своих дней?

— Я думаю, ты должна это сказать и другим: они не будут тогда к тебе свататься и найдут свою пару быстрее.

— Тогда не хочу я больше писать никаких писем! — сказала Диана и нежно поцеловала оторопевшего капитана.

Хочется верить, что читатель понял ту математическую проблему, которая лежит в основе этой сказки. Мы надеемся, читатель согласится, что это — красивое решение, и спросит себя: как его можно использовать? И как решать похожие проблемы? Например, что будет, если женщин больше, чем мужчин, или если есть мужчины, которые скорее умрут, чем женятся? А если женщины будут писать первыми, будет ли решение тем же самым?

Если же читатель задумается: «Правда ли это? Могу ли я, например, доказать, что все найдут себе супруга?» — значит, он начал думать как математик.

А тогда несколько задач должны быть приятным дополнением к сказке.

1. Сформулируйте задачу строго математически. Это может оказаться сложнее, чем ожидалось. Не отступайте! Начните так: даны две квадратные таблицы размером  $n \times n$ . В каждой строке каждой из таблиц стоят все числа от 1 до  $n$  в каком-то порядке...

2. Напишите четкий алгоритм, который соответствует решению в сказке, и покажите, что он всегда работает.

3. Покажите, что бывают случаи, когда задача имеет несколько решений.

4. Предположим теперь, что таблицы бесконечные, занумерованы натуральными числами и что в каждой строке есть все натуральные числа. Можно ли тогда доказать существование решения, если предполагать, что в каждой строке кандидаты расположены в порядке убывания предпочтения (в частности, на первом месте каждой строки стоит номер самого лучшего кандидата)?

5. А если порядок противоположный?

6. Рассмотрите еще и такой алгоритм для исходной (конечной) задачи. Разрешим разводы. Выстроим всех мужчин в очередь. Первый в очереди сватается ко всем женщинам по очереди в порядке своего предпочтения (независимо от того, замужем очередная кандидатура или нет) до тех пор, пока кто-то не согласится. Они женятся, и если женщина была замужем, то она сначала разводится, а ее бывший супруг становится в конец очереди. Верно ли что:

а) такая женщина всегда найдется;

б) процесс закончится;

в) получившиеся браки будут стабильными?

Годится ли такой подход для бесконечных случаев?

# Гравитационное «отталкивание»

**В. ВОРОНОВ**

**ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ** ОТНОСИТСЯ К ЧИСЛУ фундаментальных физических законов. Казалось бы, нет основания сомневаться в справедливости его основного тезиса о взаимном притяжении тел в природе. Однако существуют ситуации, в которых всемирное тяготение приводит к совершенно неожиданным эффектам. Вот об этих необычных случаях и хотелось бы поговорить.

Вообразим бесконечную вселенную, заполненную водой. Как будут взаимодействовать друг с другом различные тела в этой вселенной? Вроде бы, ответ очевиден: они будут притягиваться, подчиняясь закону всемирного тяготения. Но... не стоит торопиться с выводами. Давайте разберем несколько частных случаев.

Для начала исследуем взаимодействие двух свинцовых дробинки. Сразу стоит оговориться, что термин «взаимодействие» здесь не очень подходит, так как на дробинки действуют не только силы взаимного гравитационного притяжения, но и гравитация вселенной, и силы упругости водной среды. В первую очередь, постараемся учесть все силы, имеющие гравитационную природу.

**Учет гравитационного взаимодействия.** Рассмотрим силы, действующие на дробинку 1 (рис. 1). Проведем через ее центр

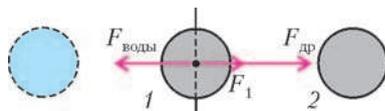


Рис. 1

плоскость, перпендикулярную линии, соединяющей обе дробинки. Она разделит вселенную на две полувселенные. Для удобства назовем их левой и правой. Эти две полувселенные симметричны относительно разделяющей их плоскости, но в правой есть дополнительная дробинка 2. Симметричные части полувселенных действуют на дробинку 1 с совершенно равными силами притяжения. Результирующая сила является итогом действия двух различающихся сферических элементов. В правой части это дробинка, а в левой – вода в объеме дробинки. Так как масса дробинки больше массы соответствующего элемента воды, то полная сила  $\vec{F}_1$ , действующая на дробинку 1, будет направлена вправо, но окажется меньше силы гравитационного притяжения к дробинке 2. Рассчитаем эту силу:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{др} - F_{воды} = G \frac{m_{др} m_{др}}{r^2} - G \frac{m_{др} m_{воды}}{r^2} = \\ &= G \frac{m_{др}}{r^2} (m_{др} - m_{воды}) = G \frac{m_{др}^2}{r^2} \left( 1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}} \right), \end{aligned}$$

где  $r$  – расстояние между дробинками.

Легко показать, что эта формула в случае разных по массе дробинки преобразуется к виду

$$F_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left( 1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}} \right),$$

а в случае взаимодействия частиц любого вещества в любой бесконечной среде принимает вид

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left( 1 - \frac{\rho_{среды}}{\rho_{вещества}} \right).$$

Выражение, стоящее до скобок, полностью совпадает с законом всемирного тяготения, и если плотность среды положить равной нулю, то мы получаем стандартную формулировку закона. (Что и должно произойти, поскольку в этом случае формула описывает гравитационное взаимодействие тел в вакууме.)

Если плотность среды постепенно увеличивать, то сила взаимного притяжения будет уменьшаться, пока не обратится в ноль при равенстве плотностей среды и вещества. Если же плотность среды будет больше плотности помещенных в нее элементов вещества, то сила станет отрицательной, что соответствует отталкиванию этих элементов. Так, два деревянных шарика в водной вселенной будут отталкиваться с силой

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{дерева}} \right|.$$

Таким образом, тяготение способно породить *отталкивание!*

Этот эффект взаимного отталкивания можно пояснить, вводя в рассмотрение «поля», порождаемые внесением в бесконечную однородную среду элементов вещества с иной плотностью. Появление более плотного вещества приводит к созданию «поля» тяготения. Причем тяготение создается только за счет «избыточной» плотности в объеме вещества. Если же плотность вещества меньше плотности среды, то возникает «поле» отталкивания. Особенность этих «полей» в том, что они проявляют свои свойства вне зависимости от того, на какое вещество (с плотностью большей или меньшей плотности среды) они действуют. Напряженность такого «поля» можно рассчитать по формуле (речь идет о центральном поле)

$$E = G \frac{m_{вещества}}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{среды}}{\rho_{вещества}} \right|.$$

Теперь попробуем исследовать более сложный случай. До сих пор мы рассматривали элементы вещества, имеющие одну и ту же плотность. А как будут взаимодействовать тела с различными плотностями? Для определенности выберем деревянный шарик и свинцовую дробинку и воспользуемся понятиями «полей» отталкивания и тяготения. Дробинка, имея избыточную плотность, создает «поле» тяготения и поэтому будет притягивать деревянный шарик (рис. 2). А

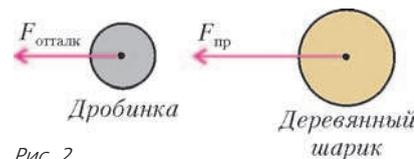


Рис. 2

этот шарик, обладая недостаточной плотностью, создает «поле» отталкивания и потому будет отталкивать свинцовую дробинку. Таким образом, силы, действующие на дробинку и шарик, будут направлены *в одну сторону*. Можно показать, что в этом случае модуль каждой силы, при соответствующей замене индексов 1 (для дробинки) и 2 (для шарика), рассчитывается по формуле

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{среды}}{\rho_2} \right|.$$

Но нарушение третьего закона Ньютона (силы не только не направлены навстречу друг другу, но, в общем случае, и не равны по модулю), как и закона всемирного тяготения, только кажущееся. Дело в том, что силы, описываемые последней формулой, не являются силами *взаимодействия*. Наряду с гравитационным взаимодействием тел эта формула учитывает гравитационное влияние вселенной, порожденное ее асимметрией по отношению к каждому из тел. И различие в силах «взаимодействия» порождается именно различным влиянием вселенной на находящиеся в ней элементы.

Подводя промежуточный итог, можно заметить, что учет всех сил, имеющих гравитационную природу, показывает, что закон всемирного тяготения вызывает не только притяжение тел. Но необходимо помнить, что мы пока не принимали во внимание наличие сил упругости водной среды. Этим и займемся.

**Учет архимедовой силы.** Кажется вполне очевидным, что в однородной водной вселенной давление во всех точках одинаково. Архимедова сила возникает только тогда, когда появляется неоднородное включение. Рассчитаем эту силу для случая, когда она вызывается появлением свинцовой дробинки.

Рассмотрим произвольно выбранный элемент воды (рис.3). Он находится в состоянии покоя, а значит, сила, действующая

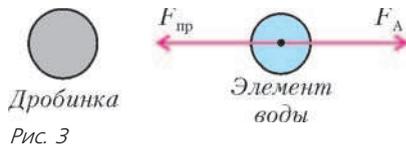


Рис. 3

щая со стороны «поля» тяготения дробинки, полностью компенсируется архимедовой силой. Найдем эту силу:

$$F_A = F_{\text{пр}} = m_{\text{эл-та воды}} E_{\text{«поля»}} = \rho_{\text{воды}} V_{\text{эл-та воды}} E_{\text{«поля»}}.$$

Очевидно, что эта формула, так напоминающая классический школьный вариант  $F_A = \rho V g$ , может использоваться и для «поля» отталкивания (в этом случае она также будет направлена против «поля»).

А теперь можно попробовать учесть все силы. Вернемся к случаю двух свинцовых дробинки. Полная сила  $\vec{F}_1$ , действующая на первую дробинку, равна векторной сумме силы, вызванной «полем» второй дробинки, и архимедовой силы (рис.4):

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{\text{«поля»2}} - F_A = m_1 E_{\text{«поля»2}} - \rho_{\text{воды}} V_1 E_{\text{«поля»2}} = \\ &= \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}}\right) m_1 E_{\text{«поля»2}} = \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}}\right) m_1 G \frac{m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}}\right) = \\ &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}}\right)^2. \end{aligned}$$

Полная симметрия этой формулы относительно индексов показывает, что полная сила, действующая на вторую дробинку, будет по величине такой же:  $F_2 = F_1$ . Наличие

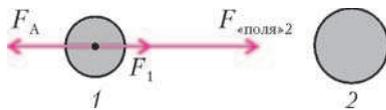


Рис. 4

квадрата выражения в скобках в этой формуле тоже не случайно. Если плотность среды оказывается больше плотности вещества, то знак силы не меняется. А значит, два

деревянных шарика в водной вселенной тоже будут притягиваться. И тогда последнюю формулу можно переписать в более общем виде:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещества}}}\right)^2.$$

Однако и эту формулу нельзя использовать для расчета сил, действующих на тела с различными плотностями. Вернемся к ситуации с деревянным шариком и свинцовой дробинкой. Найдем силу, действующую на свинцовую дробинку.

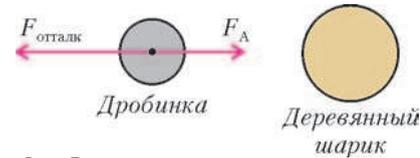


Рис. 5

Деревянный шарик создает силу отталкивания, но в противоположную сторону действует архимедова сила (рис.5). Полную силу  $\vec{F}_{\text{др}}$  найдем как векторную сумму соответствующих сил:

$$\begin{aligned} F_{\text{др}} &= F_A - F_{\text{отталки}} = \rho_{\text{воды}} V_{\text{др}} E_{\text{отталки}} - m_{\text{др}} E_{\text{отталки}} = \\ &= \left(\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} - 1\right) m_{\text{др}} E_{\text{отталки}} = \\ &= \left(\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} - 1\right) m_{\text{др}} G \frac{m_{\text{древяна}}}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{древяна}}}\right) = \\ &= G \frac{m_{\text{древяна}} m_{\text{др}}}{r^2} \left(\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} - 1\right) \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{древяна}}}\right). \end{aligned}$$

Мы видим, что  $F_{\text{др}} < 0$ , а значит, сила отталкивания больше архимедовой силы. Таким образом, деревянный шарик и свинцовая дробинка будут отталкиваться друг от друга. Можно показать, что такая же по модулю, но противоположно направленная сила будет действовать и на деревянный шарик.

Итак, общая формула, описывающая «взаимодействие» двух тел в бесконечной жидкой среде, имеет следующий вид:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(\frac{\rho_{\text{вещ1}} - \rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещ1}}}\right) \left(\frac{\rho_{\text{вещ2}} - \rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещ2}}}\right).$$

Очевидно, что в частном случае, когда плотности тел одинаковы, вне зависимости от их соотношения с плотностью среды эти тела будут притягиваться друг к другу ( $F > 0$ ). Притяжение будет наблюдаться и в том случае, когда плотности не равны, но *обе* либо больше, либо меньше плотности среды. Тогда выражения в скобках в последней формуле будут одного знака, и сила будет положительной. Отталкивание тел возможно лишь тогда, когда плотность одного тела больше плотности среды, а плотность другого – меньше. В этом случае сила меняет знак на отрицательный, что говорит об отталкивании тел. Если же плотность одного из тел совпадает с плотностью среды, то сила обращается в ноль.

# Загадки магнитной стрелки

И. ЛЕЕНСОН

**Т**РУДНО НАЙТИ ЧЕЛОВЕКА, НИ РАЗУ НЕ ВИДЕВШЕГО компас. Этот простенький прибор необходим и путешественнику, и охотнику, и даже грибнику, идущему за грибами в незнакомый лес. Какие же тайны может скрывать в себе такой прибор? Синий конец стрелки компаса показывает на север, красный показывает на юг – казалось бы, вот и весь секрет. Оказывается, не все так просто, и с этого лишь начинается наша серия загадок про магнитную стрелку.

**Загадка первая.** *Всегда ли синий конец стрелки компаса показывает на север?*

Далее. Многие видели подковообразные или полосовые магниты. Если полосового магнита нет, но есть сильный подковообразный, с его помощью легко намагнитить стальную полоску (или просто длинную иголку), сделав из нее полосовой магнит. Концы магнита, где обнаруживаются наиболее сильные магнитные действия, называют полюсами магнита. Слово «полюс» происходит от греческого *pólos* – ось, поэтому в дальнейшем вместо «конец стрелки» или «конец магнита» будем говорить «полюс». У каждого магнита, как и у земного шара, есть два полюса: северный и южный, только эти полюса называются магнитными. По традиции, ту половину магнитной стрелки, которая показывает на север, окрашивают в синий цвет и ее конец называют северным полюсом магнита; его обозначают буквой N. Ту же половину магнитной стрелки, которая показывает на юг, окрашивают в красный цвет и ее конец называют южным полюсом магнита; его обозначают буквой S. Так же окрашивают и обозначают любые постоянные магниты. Такое обозначение пришло в русский язык из голландского во времена правления Петра I.

А при чем тут голландцы? Дело в том, что когда-то Голландия была владычицей морей и соперничала с Англией. Так, 21 августа 1673 года около голландского острова Тексель состоялось морское сражение между голландским и объединенным англо-французским флотами; в это время шла уже третья англо-голландская война (1672–1674). В бою, длившемся весь день, голландцы одержали победу, хотя численный перевес был на стороне противника. Голландия захватила в те времена обширные колонии, особенно в Юго-Восточной Азии. До сих пор в государстве Суринам в Южной Америке голландский – это официальный язык.

Если у вас есть два магнита или один магнит и компас (его стрелка – тот же магнит, только маленький и легкий), то легко убедиться в том, что синий полюс одного магнита притягивает красный полюс другого, а одинаково раскрашенные полюса друг от друга отталкиваются. Если подвесить полосовой магнит точно за его середину на нитке подальше от железных предметов, нитку к чему-нибудь привязать и подождать, пока магнит перестанет раскачиваться, то мы увидим, что полоска повернулась так же, как и стрелка компаса. Иными словами, одним концом она будет

показывать на север, другим – на юг. Значит, наша намагниченная полоска – тоже компас, только большой и неудобный.

Теперь – следующая загадка.

**Загадка вторая.** *Что будет, если намагниченную полоску разрезать пополам точно посередине?*

И еще одна загадка.

**Загадка третья.** *Можно ли намагнитить шар?*

Если есть загадки, должны быть и разгадки. Действительно, откуда стрелка компаса знает, где у Земли север, а где юг? Оказывается, Земля – тот же магнит, только шарообразный. Пришли к такому пониманию люди далеко не сразу (как и не сразу догадались, что наша Земля не плоская, а шарообразная). Вот как это произошло.

Древнегреческий философ Фалес в VI веке до новой эры описал удивительное явление, известное людям, вероятно, задолго до этого. Это явление – магнетизм. По одной из легенд, такое название оно получило от греческого города Магnezия (ныне он называется Манисса и находится в Турции), где был найден минерал, способный притягивать железо. Сейчас этот минерал называется магнетитом, или магнитным железняком; он представляет собой соединение железа и кислорода. А вот кто и когда изобрел компас, неизвестно, хотя это изобретение – одно из величайших открытий человека. Возможно, кто-то случайно обнаружил, что если кусок магнетита вытянутой формы подвесить на нитке или пустить плавать на деревянной дощечке, то один его конец всегда будет показывать на север, а другой – на юг, как бы мы ни крутили нитку или дощечку. Раньше считали, что компас изобрели китайцы чуть ли не пять тысяч лет назад, однако первый китайский документ, в котором упоминается компас, датирован XI веком новой эры. Во всяком случае, еще в Средние века этим старинным открытием широко пользовались мореплаватели, определяя по примитивному компасу свой путь в открытом море. Со временем обнаружилось, что кусок магнетита может передавать свое «волшебное» свойство стальным предметам – например, иголке, и из нее получится более удобный компас.

В 1269 году француз Пьер де Мерикур, по прозвищу Перегрин, написал книжку «Письма о магните», в которой собрал различные сведения о магните – как известные ранее, так и открытые им лично. Именно Перегрин, экспериментируя с магнитами, обнаружил, что у них есть два особых конца – два полюса. Поскольку они показывали на север и на юг, их так и назвали северным и южным полюсами магнита. Когда Перегрин подвесил на нитках близко друг к другу две магнитные стрелки, оказалось, что их одноименные полюса отталкиваются, а разноименные притягиваются. Перегрин обнаружил еще одно важнейшее свойство магнитов: если



Старинный китайский компас



Уильям Гильберт

разломить постоянный магнит на две части, получатся два новых магнита с двумя полюсами – северным и южным – у каждого. Получить какой-нибудь один полюс не удалось ни Перегрину, ни кому-либо после него. Это и есть ответ на вторую загадку. Почему так получается, будет рассмотрено во второй части статьи.

А теперь – ответ на третью загадку: намагнитить шар можно, и это обнаружил английский физик и врач Уильям Гильберт. В 1600 году он опубликовал книгу «О магните, магнитных телах и о большом магните – Земле». В ней он рассказал о своих экспериментах с магнитами. Вот что он обнаружил:

Магнит обладает в различных частях различной притягательной силой; на полюсах эта сила наиболее заметна. Магнит имеет два полюса: северный и южный, они различны по своим свойствам; разноименные полюса притягиваются, одноименные отталкиваются. Магнит, подвешенный на нитке, располагается определенным образом в пространстве, указывая север и юг. Невозможно получить магнит с одним полюсом: сколько ни разламывай магнит, каждый вновь полученный кусочек всегда будет иметь два полюса. Земной шар – большой магнит. При сильном нагревании магнитные свойства у природных и искусственных магнитов исчезают. Магниты оказывают свое действие через стекло, кожу и воду.

Но самый замечательный опыт Гильберт провел с намагниченным шаром, выточенным из минерала магнетита. У него тоже оказались два полюса – северный и южный, и, находясь около этого шара, стрелка компаса всегда показывала на эти полюса, т.е. вела себя так же, как в отношении Земли. Поэтому Гильберт назвал свой шар «тереллой», т.е. маленькой землей. Слово это происходит от латинского terra – земля; в русском языке немало слов с этим корнем: территория, терраса (уступ на склоне горы), террариум (помещение для земноводных), террикон (куча земли и пустой породы), терракота (обожженная глина), терренкур (размеченные дорожки для лечебной ходьбы, обычно в гористой местности), а также terra инкогнита – неведомая земля. Гильберт впервые догадался, что земной шар – тоже магнит, поэтому намагниченная стрелка компаса и показывает на полюса этого гигантского магнита.

А всегда ли стрелка компаса одним концом показывает на север, а другим – на юг? Оказывается – и это ответ на первую загадку, – не всегда. Если идти (ехать, плыть, лететь) к северному или южному географическому полюсу, то пока

путешественник от него далеко, со стрелкой компаса обычно никаких неожиданностей не происходит. Но при приближении к полюсу стрелка начинает понемногу «сходить с ума». И моряки давно это заметили. В начале XVI века, когда была открыта Америка и корабли начали заплывать далеко на север, обнаружилось странное явление. Моряки знали, что в ясную ночь никакой компас им не нужен: направление на север показывает Полярная звезда. Но когда они сравнили это направление с показанием компаса, обнаружилось удивительное явление: чем дальше они заплывали на север, тем сильнее синяя стрелка компаса отклонялась от севера! Угол между осью стрелки компаса и точным направлением на полюс (оно совпадает с географическим меридианом) назвали магнитным склонением. Это склонение различно в разных точках земного шара. Что же происходит с компасом на Северном полюсе? Оказывается, синяя часть стрелки показывает в сторону северной части Канады. Там, на некоторой глубине, и находится в настоящее время один из магнитных полюсов Земли; другой же магнитный полюс расположен в Антарктике.

Почему так происходит, в точности неизвестно. Более того, установлено, что магнитные полюса Земли медленно передвигаются. Так, в Париже в 1580 году наблюдалось максимальное магнитное склонение к востоку от меридиана, оно составляло  $9,5^\circ$ . А через 230 лет, в 1810 году, было зафиксировано уже максимальное склонение в другую сторону – к западу от меридиана, и составило оно целых  $22,3^\circ$ . Значит, магнитные полюса Земли «гуляют», перемещаясь с места на место. Более того, очень редко – раз в тысячи лет – они меняются местами. Ученые не исключают, что в ближайшие сто-двести лет такое может вновь произойти. И трудно предсказать, как это отразится на живых существах.

Магнитное склонение часто имеет и местные отклонения – иногда очень сильные; их называют девиацией (от латинского deviatio – уклонение от пути). Например, знаменитая Курская магнитная аномалия вызвана залежами магнитной руды, которая действует на стрелку. Маленькие «магнитные аномалии» легко обнаружить и у себя дома, если неподалеку от компаса будут находиться железные предметы. Можно только представить, сколько неприятностей и даже несчастий приносили мореплавателям такие «местные аномалии». Ведь даже на деревянных парусных судах всегда было много железных предметов: пушки, ядра, якоря. Положение усугубилось после того, как на смену парусным судам пришли железные пароходы. В 1854 году страшное несчастье потрясло Великобританию: на восточном берегу Ирландии разбилось судно «Тэйлор» водоизмещением 2000 тонн с несколькими сотнями эмигрантов, направлявшихся в Америку. Большая часть пассажиров и команды погибла. А ведь это было новое судно, легко выдержавшее двухдневный шторм в начале плавания. Расследование показало, что виной всему – неправильное показание компаса, вызванное девиацией. Надо сказать, что современные компасы имеют специальные приспособления для уничтожения девиации.

А вот и последняя загадка. Если синий полюс магнита называют северным, а красный – южным, то синий конец стрелки компаса должен показывать не на север, а на юг: ведь притягиваются только разноименные полюса! Почему же синяя половинка стрелки компаса показывает не на юг, а на север? Если синий конец стрелки показывает на север, следовательно, там находится южный магнитный полюс Земного шара, а в южном полушарии – северный магнитный полюс!?

**Загадка четвертая.** Какой же магнитный полюс находится на севере земного шара?

*(Продолжение следует)*

# «Нулевые» ЛИНЗЫ

**В. ДРОЗДОВ**

ЛИНЗОЙ НАЗЫВАЮТ ПРОЗРАЧНОЕ ТЕЛО, ОГРАНИЧЕННОЕ двумя поверхностями, преломляющими световые лучи, которое способно создавать оптические изображения предметов. Наиболее просты в изготовлении линзы со сферическими поверхностями. Если толщина линзы значительно меньше радиусов кривизны ее поверхностей, линза называется *тонкой*. Как известно, оптическая сила такой линзы  $D$  находится по формуле

$$D = (n - 1) \left( \pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $n$  – относительный показатель преломления материала линзы,  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны сферических поверхностей. Перед слагаемыми в скобке знаки выбираются так: для выпуклой поверхности – «плюс», для вогнутой – «минус».

Приведенному определению линзы удовлетворяет, например, прозрачное тело, изображенное на рисунке 1. Одна его поверхность выпуклая, другая – вогнутая, радиусы кривизны поверхностей равны:  $R_1 = R_2 = R$ , а толщина мала:  $l \ll R$ . (Разумеется, при этом центры кривизны обеих поверхностей не совпадают, а смещены на  $l$ .) Значит, в соответствии с приведенной формулой, оптическая сила этой линзы равна нулю. Поскольку данная линза не будет ни собирающей, ни рассеивающей, назовем ее «нулевой».

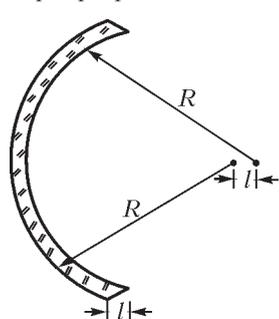


Рис. 1

Очевидно, что двояковыпуклая тонкая линза «нулевой» быть не может. Если, конечно, не поместить ее в жидкость с показателем преломления, равным показателю преломления стекла. Но здесь мы молчаливо предполагаем, что наша линза находится в воздухе.

Интересно, а не существует ли двояковыпуклая «нулевая» линза среди *толстых* линз? Допустим, что существует, и

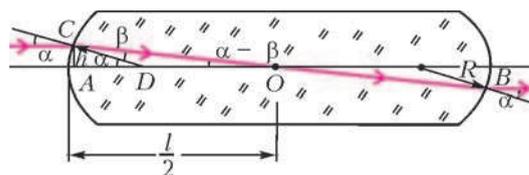


Рис. 2

изобразим ее такой, как показано на рисунке 2. Возьмем радиусы кривизны сферических поверхностей одинаковыми:  $R_1 = R_2 = R$ , а толщину линзы обозначим  $l$ . Очевидно, что линза симметрична относительно плоскости, проходящей перпендикулярно ее главной оптической оси через точку  $O$  – середину отрезка  $AB$ .

Пусть на линзу луч, параллельный главной оптической оси и находящийся на расстоянии  $h \ll R$  от нее (параксиальный луч). Если после преломления луч пройдет через точку  $O$ , то, по соображениям симметрии, из линзы он выйдет параллельно входящему лучу. Это означает, что при таком условии толстая линза фокусировать лучи не будет, т.е. ее оптическая сила будет равна нулю.

Рассчитаем толщину нашей толстой «нулевой» линзы, т.е. выразим  $l$  через  $R$  и  $n$ . При этом синусы и тангенсы малых углов заменим значениями этих углов в радианной мере. По закону преломления луча, в точке  $C$  имеем  $\alpha = n\beta$ . Из треугольников  $AOC$  и  $ADC$  находим

$$\alpha - \beta = \frac{h}{(l/2)} = \frac{2h}{l}, \quad \alpha = \frac{h}{R}.$$

Делим почленно левые и правые части этих равенств:

$$1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2R}{l}.$$

Из закона преломления выражаем отношение углов  $\beta$  и  $\alpha$ :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}.$$

Дальнейшее ясно:

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{2R}{l}, \quad \text{и} \quad l = \frac{2Rn}{n-1}.$$

Если взять, например, значение  $n = 1,5$ , то окажется, что  $l = 6R$ , т.е. «нулевая» линза будет весьма толстой.

Оказывается, линзы с нулевой оптической силой (афокальные линзы) находят свое практическое применение. Такие линзы хотя и не рассеивают и не собирают световые пучки, но создают аберрации, т.е. искажения оптических изображений предметов по сравнению с самими предметами. Поэтому их используют в сложных объективах в качестве компенсаторов аберраций.

## КВАНТЫ ИНТЕРНЕТА

### Как нарисовать прямую?

(Начало см. на 2-й странице обложки)

В 1784 году Дж. Уатт изобрел механизм, названный впоследствии «паралелограммом Уатта» (рис. 1). На показанных пунктиром участках траектории середина среднего звена отклоняется от прямой довольно сильно, но участок, показанный сплошной линией, дает достаточную во многих практических задачах точность.

Другое приближенное решение предложил П.Л.Чебышёв. Если подобрать длины звеньев так, как показано на рисунке 2, то отмеченная точка движется по линии, которая хотя и не является отрезком прямой, но на глаз почти неотличима от отрезка (рис. 3). Используя этот механизм («прямоугольник Чебышё-

ва»), а также «лямбда-образный механизм Чебышёва», можно изготовить «табуретку» (рис. 4), «сидение» которой перемещается почти параллельно земле.

В 1864 году М.Поселье предложил механизм для точного рисования отрезка, основанный на свойствах инверсии (рис. 5).

При движении круга, касающегося изнутри окружности вдвое большего радиуса (рис. 6), любая точка границы круга (в частности, точки  $P$  и  $H$ ) движется по диаметру неподвижной окружности. Это факт (теорема Коперника) используется в механизме рисунка 7: точка  $P$  движется вертикально.

Аналогичный шарнирный механизм (рис. 8, 9) реализует точное параллельное перемещение отрезка: правое нижнее звено движется горизонтально.

Материал подготовили М.Панов, А.Спивак

# О лемнискате Бернулли

А.АКОПЯН

## Что такое лемниската?

Лемнискатой с фокусами  $F_1, F_2, \dots, F_n$  называется кривая на плоскости, обладающая тем свойством, что для любой точки на ней произведение расстояний до фокусов постоянно. На рисунке 1 приведено семейство лемнискат с тремя фокусами.

Уравнение лемнискаты с  $n$  фокусами имеет степень  $2n$ .

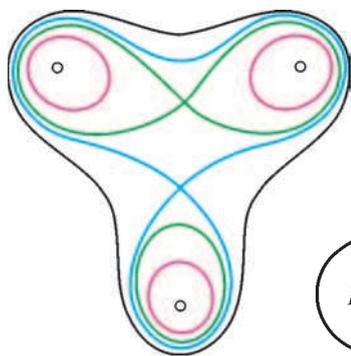


Рис. 1

**Упражнение 1.** Напишите это уравнение.

Лемнискаты с двумя фокусами называются *о-валами Кассини*. Среди них наибольший интерес представляет *лемниската Бернулли*

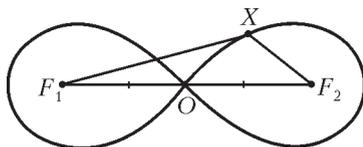


Рис. 2

нулли (рис.2) – такая кривая, что для любой точки на ней произведение расстояний до фокусов равно квадрату половины расстояния между ними:  $F_1X \cdot F_2X = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$ . Очевидно, что эта лемниската проходит через середину отрезка с концами в своих фокусах. Эта точка называется *узловой*, или *двойной точкой* лемнискаты.

Лемниската Бернулли обладает множеством очень интересных свойств. Например, площадь, ограничиваемая ею, равна  $\frac{1}{2} F_1F_2^2$ . Здесь мы докажем несколько других интересных свойств, при этом постараемся использовать только «геометрические аргументы», т.е. доказывать факты по возможности без вычислений.

## Как построить лемнискату Бернулли?

Существует очень простой способ нарисовать лемнискату Бернулли с помощью следующей конструкции из трех скрепленных шарнирами «палочек». Первые две палочки  $F_1A$  и  $F_2B$ , прикрепленные к точкам  $F_1$  и  $F_2$  соответственно, имеют длину  $\frac{1}{\sqrt{2}} F_1F_2$ , причем точки  $A$  и  $B$  всегда лежат по разные стороны от прямой  $F_1F_2$ . Третья палочка соединяет точки  $A$  и  $B$  и имеет длину  $F_1F_2$  (рис.3).

Рис. 3

Оказывается, что при

«вращении» этих палочек *середина  $AB$  будет двигаться по лемнискате Бернулли с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ .*

Давайте докажем это. Обозначим середину  $AB$  через  $X$  (рис. 4). Заметим, что  $F_1AF_2B$  – равнобокая трапеция. Кроме того, треугольники  $AF_1X$  и  $ABF_1$  подобны, поскольку угол  $A$  у них общий, а  $\frac{AF_1}{AX} = \frac{AB}{AF_1} = \sqrt{2}$ . По тем же

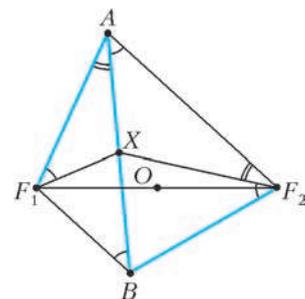


Рис. 4

самым причинам подобны и треугольники  $BXF_2$  и  $BF_2A$ , так как у них общий угол  $B$  и отношение длин сторон при угле  $B$  равно  $\sqrt{2}$ . Поэтому мы можем выписать следующую цепочку равенств углов:

$$\angle AF_1X = \angle ABF_1 = \angle BAF_2 = \angle XF_2B.$$

Обратим также внимание на то, что углы при  $A$  и  $F_2$  у трапеции  $F_1AF_2B$  равны, а поскольку равны и углы  $AF_1X$  и  $XF_2B$ , получаем, что равны и углы  $F_1AX$  и  $XF_2A$ . Следовательно, треугольники  $F_1AX$  и  $F_2AX$  подобны, откуда

$$\frac{F_1X}{AX} = \frac{AX}{XF_2} \Rightarrow XF_1 \cdot XF_2 = AX^2 = F_1O^2.$$

Итак, произведение расстояний от точки  $X$  до  $F_1$  и  $F_2$  равно квадрату половины расстояния между  $F_1$  и  $F_2$ . А значит, точка  $X$  движется по лемнискате Бернулли. Можно доказать, что траекторией точки  $X$  будет вся лемниската Бернулли. Интуитивно это понятно, поскольку точка  $X$  движется непрерывно и «появляется» во всех «крайних» точках лемнискаты.

**Упражнение 2.** Какова будет траектория точки  $X$ , если от конструкции потребовать, чтобы точки  $A$  и  $B$  всегда лежали по одну сторону от  $F_1F_2$ ?

Пусть  $O$  – середина отрезка  $F_1F_2$  – узловая точка лемнискаты. Обозначим через  $M$  и  $N$  середины отрезков  $F_1A$  и  $F_1B$  соответственно (рис.5). Сдвинем точку  $O$  на вектор  $\vec{NF}_1$ , получившуюся точку обозначим через  $O'$ . Заметим, что треугольники  $F_1MO'$  и  $NXO$  равны, кроме того, выполнено равенство

$$F_1M = F_1O' = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1O.$$

Таким образом, точки  $M$  и

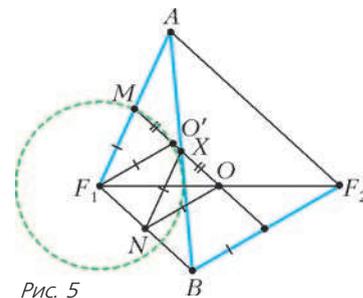


Рис. 5

$O'$  лежат на окружности с центром в  $F_1$  и радиусом  $\frac{1}{\sqrt{2}} F_1O$ . Из этого можно получить еще один элегантный способ построения лемнискаты Бернулли.

А именно, **метод Маклорена**. Давайте построим окружность с центром в одном из фокусов и радиусом  $\frac{1}{\sqrt{2}} F_1O$  (рис.6). Далее, на каждой секущей  $ABO$  (где  $A$  и  $B$  – это точки пересечения секущей и окружности) выберем такие точки  $X$  и  $X'$ , что

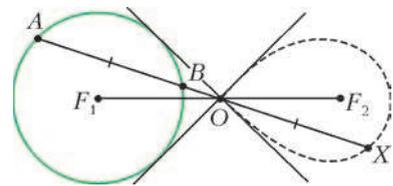


Рис. 6

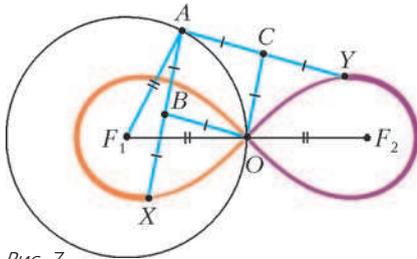


Рис. 7

Данная конструкция изображена на рисунке 7. Длина палочки  $F_1A$  равна  $F_1O$ . Точка  $A$  также является концом палочек  $AX$  и  $AY$ , длина каждой из которых равна  $\sqrt{2}F_1O$ . Кроме того, середины этих палочек – точки  $B$  и  $C$  – соединены с  $O$  палочками длины  $\frac{AX}{2}$ . При вращении точки  $A$  по окружности каждая из точек  $X$  и  $Y$  описывает половину лемнискаты Бернулли с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ .

**Упражнение 3.** Докажите это.

**Лемниската и равносторонняя гипербола**

Гораздо более известной фигурой является гипербола – множество точек  $X$  таких, что величина  $|F_1X - F_2X|$  постоянна. Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами гиперболы. Среди гипербол следует выделить *равностороннюю гиперболу* – множество точек  $X$  таких, что  $|F_1X - F_2X| = \frac{F_1F_2}{\sqrt{2}}$ .

**Упражнение 4.** Докажите, что уравнение  $y = \frac{1}{x}$  задает равностороннюю гиперболу, и найдите ее фокусы.

Оказывается, лемниската Бернулли является инверсным образом равносторонней гиперболы. Напомним, что такое инверсия.

**Определение.** Инверсией относительно окружности с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$  называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку  $X$  в точку  $X^*$ , лежащую на луче  $OX$  и такую, что  $OX \cdot OX^* = r^2$ .

Инверсия обладает одним очень удобным свойством – при инверсии окружности переходят в окружности или прямые. Подробнее про инверсию можно прочесть, например, в книге [1]. Мы же здесь докажем следующую лемму, которая пригодится нам в дальнейшем.

**Лемма.** Пусть  $A$  – проекция точки  $O$  на некоторую прямую  $l$ . Тогда при инверсии относительно окружности с центром  $O$  прямая  $l$  перейдет в окружность с диаметром  $OA^*$ , где  $A^*$  – инверсный образ точки  $A$ .

**Доказательство.** Пусть  $B$  – произвольная точка на прямой  $l$ , а  $B^*$  – ее инверсный образ (рис.8). Поскольку

$$OA^* = \frac{r^2}{OA} \text{ и } OB^* = \frac{r^2}{OB},$$

получаем, что треугольники  $OAB$  и  $OB^*A^*$  подобны. Следовательно, угол  $OB^*A^*$  прямой, и точка  $B^*$  лежит на окружности с диаметром  $OA^*$ . Стоит также отметить, что центром этой окружности будет точка  $O_1^*$ , инверсная точке  $O_1$ , симметричной  $O$  относительно прямой  $l$ .

Докажем теперь, что лемниската Бернулли с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  и равносторонняя гипербола с

Рис. 8

фокусами  $F_1$  и  $F_2$  инверсны относительно окружности с центром в  $O$  и радиусом  $OF_1$ .

Для этого воспользуемся результатами, полученными при доказательстве корректности построения лемнискаты Бернулли с помощью трех палочек (см. рис.4). Обозначим через  $P$  точку пересечения прямых  $F_1A$  и  $F_2B$ , а через  $Q$  – точку, симметричную ей относительно прямой  $F_1F_2$  (рис.9).

Заметим, что

$$F_2Q - F_1Q = F_2P - F_1P = AP - F_1P = F_1A = \frac{F_1F_2}{\sqrt{2}}.$$

Значит, точки  $P$  и  $Q$  лежат на равносторонней гиперболы с центрами в  $F_1$  и  $F_2$ . Осталось показать, что точки  $X$  и  $Q$  инверсны относительно окружности с центром в  $O$  и радиусом  $OF_1$ . Для начала докажем, что треугольники  $F_1XO$  и  $PF_1O$  подобны.

Во-первых, заметим, что  $F_1XOB$  – трапеция, поэтому  $\angle OXF_1 + \angle XF_1B = 180^\circ$ , кроме того, выполнено равенство  $\angle AF_1O + \angle OF_1P = 180^\circ$ . А поскольку углы  $XF_1B$  и  $AF_1O$  равны, получаем, что равны и углы  $OXF_1$  и  $OF_1P$ .

Далее, поскольку углы  $XF_2B$  и  $XF_1A$  равны, то  $\angle XF_1P + \angle PF_2X = 180^\circ$ , т.е. четырехугольник  $PF_1XF_2$  вписанный. Следовательно,

$$\angle F_2F_1X = \angle F_2PX = \angle F_1PO.$$

Последнее равенство верно в силу того, что точки  $O$  и  $X$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к  $F_1B$ .

Итак, треугольники  $F_1XO$  и  $PF_1O$  подобны по двум углам. Из этого следует, что углы  $F_1OX$  и  $F_1OP$  равны, а значит, точка  $Q$  лежит на луче  $OX$ . Кроме того, из подобия треугольников  $F_1XO$  и  $QF_1O$  (который симметричен  $\Delta PF_1O$ ) следует, что

$$\frac{OX}{OF_1} = \frac{OF_1}{OQ} \Rightarrow OX \cdot OQ = OF_1^2.$$

А это и означает, что точки  $Q$  и  $X$  инверсны относительно окружности с центром в  $O$  и радиусом  $OF_1$ .

Из рисунка 9 можно сделать еще одно наблюдение, а именно, что точки  $X$  и  $O$  лежат на окружности с центром в точке  $P$ . Оказывается, что эта окружность касается лемнискаты Бернулли (про две кривые говорят, что они касаются в некоторой точке, если касательные к кривым в этой точке совпадают). Давайте докажем это.

Рассмотрим прямую  $l$  – касательную к гиперболе в точке  $Q$  (рис. 10). Из леммы следует, что при инверсии относительно окружности с центром  $O$  и радиусом  $OF_1$  прямая  $l$  должна перейти в окружность  $\omega_1$ , проходящую через точку  $O$ , а также касающуюся лемнискаты в точке  $X$ , поскольку точка  $X$  инверсна  $Q$ . Из леммы следует также, что центр этой окружности лежит на прямой, проходящей через  $O$  и перпендикулярной  $l$ . Покажем, что эта прямая  $OP$  симметрична прямой  $OQ$  отно-

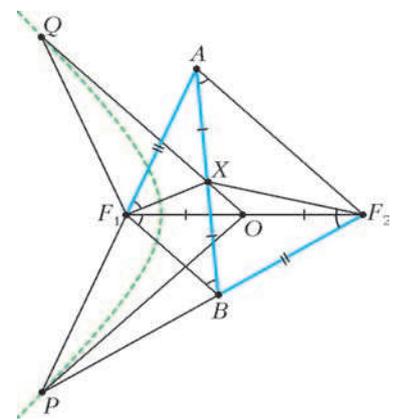


Рис. 9

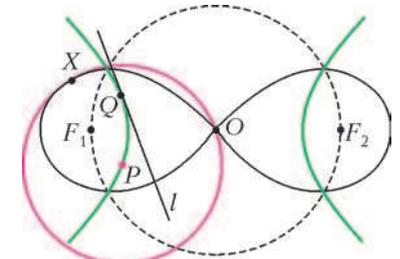


Рис. 10

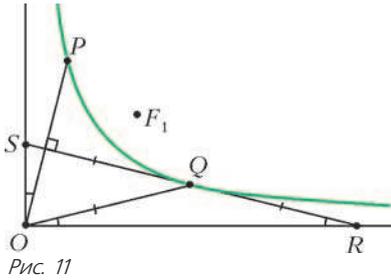


Рис. 11

нительно  $F_1F_2$ . Из этого будет следовать, что точка  $P$  является центром окружности  $\omega_l$ .  
 Перейдем в систему координат, в которой формула соответствующей гиперболы будет записываться как  $y = \frac{1}{x}$ . Пусть прямая  $l$  пересекает ось абсцисс и ось ординат в точках  $R$  и  $S$  соответственно (рис.11). Как известно, производная функции  $\frac{1}{x}$  в точке  $x_0$  равна  $-\frac{1}{x_0^2}$ . Отсюда легко получить, что точка  $Q$  является серединой отрезка  $RS$ , а  $OQ$  – медианой прямоугольного треугольника  $ROS$ . (Подробнее об этом можно прочитать в статье А.Заславского «Аффинная геометрия» в «Кванте» №1.) Следовательно, углы  $QOR$  и  $QRO$  равны. Но поскольку равны и углы  $POS$  и  $QOR$ , получаем, что прямая  $OP$  перпендикулярна  $RS$ . Что и требовалось.

Заметим также, что поскольку окружность  $\omega_l$  касается лемнискаты в точке  $X$ , радиус  $PX$  этой окружности будет нормалью (перпендикуляром к касательной) к лемнискате в точке  $X$  (рис.12). В силу того, что треугольник  $XPO$  равнобедренный, а прямые  $XO$  и  $PO$  симметричны относительно  $F_1O$ , можно выписать следующую цепочку равенств углов:  $\angle PXO = \angle XOP = 2\angle PO F_1$ . Это дает нам очень простой способ построения нормали к лемнискате Бернулли. А именно, для любой точки  $X$  проведем прямую, образующую с прямой  $OX$  угол  $2\angle XO F_1$ .

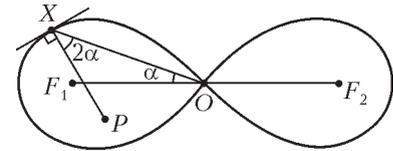


Рис. 12

Эта прямая и будет нормалью к лемнискате.

**Список литературы**

1. А.А. Заславский. *Геометрические преобразования*. – М.: МЦМНО, 2004.
2. Маркушевич А.И. *Замечательные кривые*. – М.: Гостехиздат, 1952.

# Формула крючков

**А. СПИВАК**

*Что для нас – головоломка,  
 духом тайны разум будит –  
 очевидно, для потомка  
 просто школьным курсом будет.*

И.Губерман

**Д**ИАГРАММЫ И ТАБЛИЦЫ АЛЬФРЕДА ЮНГА (1873–1940) изучаются в математике уже более ста лет. Современная комбинаторика немыслима без них.

Появившись сначала в работах по разбиениям чисел на слагаемые, а затем в важной и довольно трудной области алгебры – теории представлений симметрических групп, диаграммы Юнга стали обнаруживаться в самых разных областях математики. В этой статье рассказывается об одной знаменитой формуле для количества таблиц Юнга данной формы – о формуле крючков.

Пользоваться ею в вычислениях сможет и пятиклассник, так что каждый читатель журнала что-то из этой статьи почерпнет. Но лучше, конечно, понять излагаемое здесь ее доказательство, которое замечательно тем, что при решении чисто комбинаторной задачи будут использованы антисимметрические многочлены. Что это такое – тоже рассказано в статье.

**Первые примеры**

На рисунке 1 показаны все существующие 16 способов так заполнить диаграмму, состоящую из 6 клеток, числами от 1 до 6, что числа возрастают при движении слева направо и сверху вниз. На рисунке 2 – пять заполнений диаграммы из 5 клеток (других способов, как легко убедиться, нет); на рисунке 3 – два заполнения диаграммы из 3 клеток; на рисунке 4 – единственный способ заполнить «столбик» высотой 5 (очевидно, способ единственный и при любой другой высоте столбика).

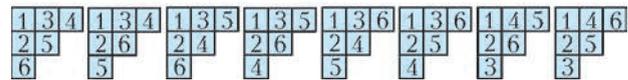
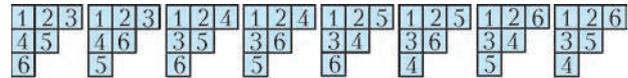


Рис. 1



Рис. 2

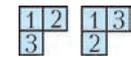


Рис. 3



Рис. 4

**Определения**

Чтобы понять, что такое диаграмма Юнга, представьте себе лист бумаги (какого угодно размера) в клеточку и отрежьте от него несколько клеток, соблюдая условие: вместе с любой отрезанной клеткой отрезаем и все клетки, расположенные ниже или правее нее.

Другими словами, *диаграмма Юнга* состоит из своего левого верхнего угла – некоторой клетки  $A$  – и обладает следующим свойством: вместе с любой своей клеткой  $B$  она содержит и все клетки прямоугольника, левым верхним углом которого является клетка  $A$ , а правым нижним – клетка  $B$ .

*Таблица Юнга* – это диаграмма из  $n$  клеток, заполненная числами от 1 до  $n$  так, что числа возрастают при движении слева направо и сверху вниз (далее мы будем рассматривать только такие заполнения).

**Числа сочетаний**

Рассмотрим диаграмму, состоящую из  $m + n + 1$  клеток,  $m + 1$  из которых расположены в верхней строке, а  $n + 1$  – в левом столбце. Пример для  $m = 3$  и  $n = 2$  – рисунок 5; число 1 в любом случае расположено в левом верхнем углу; заполнение однозначно определено тем, какие именно три числа стоят в незаполненных клетках верхней строки. Интересующее нас количество заполнений обозначают  $C_{m+n}^m$  и называют числом сочетаний из  $m + n$  по  $m$ . *Число сочетаний* – это количество способов выбрать  $m$  элементов из множе-

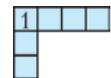


Рис. 5

ства  $\{2, 3, \dots, m + n + 1\}$ , состоящего из  $m + n$  элементов. Треугольник Паскаля, образованный числами  $C_{m+n}^m$ , и свойства этих чисел в высшей степени важны для комбинаторики. Одна из важнейших ее формул – формула

$$C_{m+n}^m = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Как только мы сформулируем формулу крюков, станет ясно, что она является глубоким обобщением этой формулы.

**Числа Каталана**

В предыдущем номере нашего журнала опубликована статья «Разрезания на треугольнички», посвященная числам Каталана. Доказанная там формула – тоже частный случай формулы крюков.

Напомню вкратце, о чем речь. Числа Каталана почти столь же знамениты, как числа Фибоначчи: в статье «Числа Каталана» («Квант» №3 за 2004 год) дано три десятка разных определений, а науке известно более сотни.

Вот одно из самых коротких определений: *число Каталана* – это количество таблиц Юнга размером  $2 \times n$ .

То же можно сказать и другими словами. Любой такой таблице можно сопоставить последовательность из  $2n$  скобок, если ставить открывающие скобки на позиции, номера которых стоят в верхней строке, а закрывающие скобки – на остальные места: на рисунке 6 изображены все 5 существующих расстановок для  $n = 3$  вместе с соответствующими

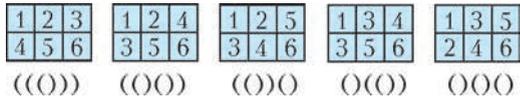


Рис. 6

системами скобок. Возникающие так последовательности правильные в том смысле, что при чтении слева направо ни в какой момент количество открывшихся скобок не оказывается меньше количества закрывшихся, а после прочтения последней (закрывающей) скобки эти количества становятся равными  $n$ .

**Упражнения**

1. Убедитесь, что: а) заполнений прямоугольной таблицы размером  $2 \times 3$  столько же, сколько заполнений таблицы рисунка 2; б) заполнений таблицы размером  $2 \times 2$  столько же, сколько заполнений таблицы Юнга с диаграммой рисунка 3.
2. Найдите все заполнения таблицы размером  $2 \times 4$ .

**Отбрасывание клеток**

Выясним, сколько существует заполнений диаграммы рисунка 7. Не советую выписывать все таблицы подряд: ответ слишком велик, чтобы вы получили удовольствие от такой работы. А главное – мы хотим найти не ответ для одной конкретной диаграммы, а общие закономерности.

Начнем. Где может стоять число 9? В клетке, ни правее, ни ниже которой ничего нет. Такие клетки на рисунке 7 помечены стрелочками. Отбрасывая их по одной, получаем диаграммы рисунка 8. Для каждой из них мы посчитаем количество способов и сложим результаты.

Число 8 в левой диаграмме рисунка 8 может стоять на одной из двух отмеченных стрелочками клеток, а в централь-

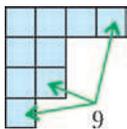


Рис. 7

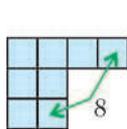
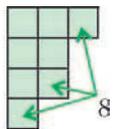
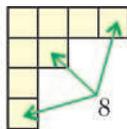


Рис. 8



ной и правой таблиц таких клеток по три. Значит, достаточно решить задачу для каждой из восьми диаграмм рисунка 9 и сложить результаты. Облегчает работу то, что результаты для первой, третьей, пятой и седьмой диаграмм не отличаются; не отличается и вторая диаграмма от шестой.

Количество заполнений четвертой диаграммы равно  $C_6^3 = 20$ . При помощи рисунков 10, 11 и 12 легко найти ответы – числа  $4 + 5 + 10 + 16 = 35$ ,  $16 + 5 = 21$  и  $5 + 5 +$

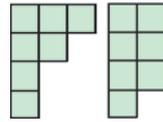
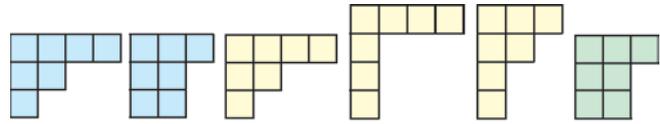


Рис. 9

$+ 4 = 14$  – для первой, второй и восьмой диаграмм рисунка 9 соответственно. Таким образом, для рисунка 7 существует  $4 \cdot 35 + 20 + 2 \cdot 21 + 14 = 216$  заполнений.

Ответ найден. Нам не пришлось рисовать все 216 таблиц одну за

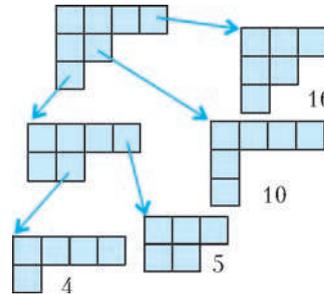


Рис. 10

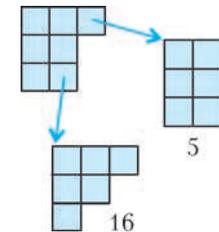


Рис. 11

другой. Но наш способ не самый быстрый.

Быстрее дает ответ открытая в 1954 году *формула крюков*.

**Крюки**

*Крюк* клетки – это она сама, а также клетки, расположенные справа от нее, и клетки, расположенные снизу. *Длина крюка* – это количество его клеток. На рисунке 13 для некоторых из встретившихся нам диаграмм указаны длины крюков (в каждой клетке записана длина крюка, содержащего эту клетку) и показано, как для каждой из них выглядит формула крюков.

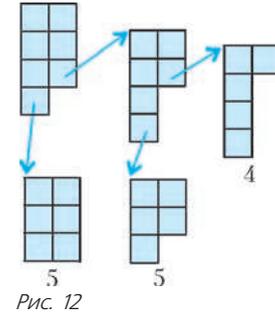


Рис. 12

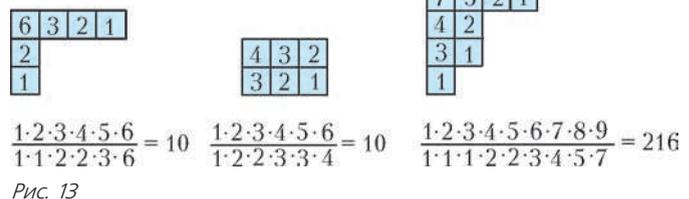
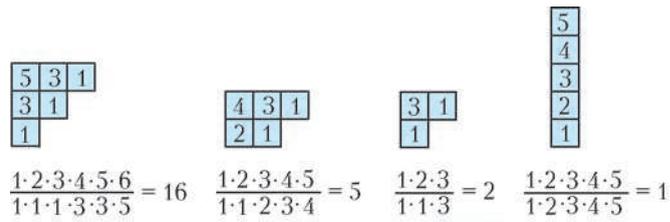


Рис. 13

**Формула крюков.** Количество заполнений диаграммы равно факториалу количества ее клеток, деленному на произведение длин всех ее крюков.

Доказательство, которое вы вскоре узнаете, основано на свойствах антисимметрических многочленов. Сначала введем удобные обозначения.

**Упражнения**

3. Выведите из формулы крюков формулы для: а) чисел сочетаний; б) чисел Каталана.

4. При помощи формулы крюков вычислите, сколькими способами можно расставить числа от 1 до: а) 9; б) 16 в виде квадратной таблицы так, чтобы числа возрастали и при движении слева направо, и при движении сверху вниз.

**Обозначения**

Обозначим буквой  $k$  количество строк рассматриваемой диаграммы;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  – их длины, причем нумеруем сверху вниз: первая строка самая длинная, вторая той же длины или короче первой, и так далее,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ . Например, для диаграммы рисунка 14 имеем:  $\lambda_1 = 13, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 7, \lambda_4 = 4, \lambda_5 = 4, \lambda_6 = 4, \lambda_7 = 4, \lambda_8 = 4, \lambda_9 = 1$  и  $\lambda_{10} = 1$ .



Рис. 14

Длина крюка верхней левой (угловой) клетки равна  $\lambda_1 + k - 1$ . Длина крюка клетки, расположенной непосредственно под ней, равна  $\lambda_2 + k - 2$ . Вообще, длина  $l_m$  крюка  $m$ -й сверху клетки левого столбца равна  $l_m + k - m$ . Очевидно, последовательность длин крюков  $l_1, l_2, \dots, l_k$  строго убывающая:  $l_1 > l_2 > \dots > l_k$ .

**Крюки клеток первой строки и левого столбца**

Среди длин крюков верхней строки рисунка 14 отсутствуют числа 4, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20 и 21. Заметьте:  $22 - 18 = 4, 22 - 14 = 8, 22 - 13 = 9, 22 - 9 = 13, 22 - 8 = 14, 22 - 7 = 15, 22 - 6 = 16, 22 - 2 = 20$  и  $22 - 1 = 21$ . Интересно и неожиданно, не правда ли?

**Лемма 1.** Среди длин крюков чисел верхней строки присутствуют все числа от 1 до  $l_1$ , кроме разностей  $l_1 - l_m$ , где  $1 < m \leq k$ .

**Идея доказательства.** При движении вдоль верхней строки рисунка 14 справа налево сначала длины крюков – последовательные числа 1, 2 и 3. Первое отсутствующее число – 4. Разность количеств клеток крюка длины 22, состоящего из всех клеток верхней строки и левого столбца, и желтого крюка длины 18 равна количеству зеленых клеток – числу 4.

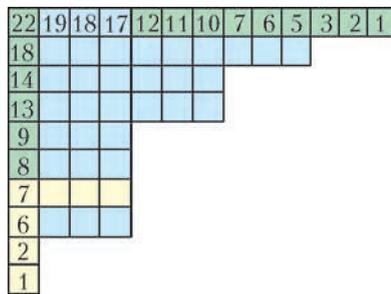


Рис. 15

Разность между числом 22 и числом 7 – количеством клеток желтого крюка рисунка 15 – равна количеству зеленых клеток этого рисунка. Надеюсь, больше ничего объяснять не нужно – вы уже все поняли.

**Упражнение 5.** Порисуйте, подумайте – и завершите доказательство.

**Новый вид формулы крюков**

Вследствие леммы 1, произведение длин крюков первой строки диаграммы равно числу  $l_1!$ , деленному на произведение  $(l_1 - l_2)(l_1 - l_3) \dots (l_1 - l_k)$ .

Отбросив верхнюю строку, мы получаем диаграмму, к верхней строке которой – второй строке исходной диаграммы – применима та же лемма. Таким образом, длины крюков второй строки – числа от 1 до  $l_2$ , кроме разностей  $l_2 - l_3, \dots, l_2 - l_k$ . Рассуждая так же для третьей, четвертой и всех следующих строк, приходим к выводу: произведение длин крюков всех клеток диаграммы равно произведению факториалов  $l_1! l_2! \dots l_k!$ , деленному на произведение всевозможных разностей  $l_j - l_m$ , где  $1 \leq j < m \leq k$ .

Поэтому формула крюков означает, что интересующее нас количество расстановок равно величине

$$F(l_1, l_2, \dots, l_k) = \frac{n! \prod_{1 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m)}{l_1! l_2! \dots l_k!},$$

где

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k =$$

$$= l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1} + l_k - (k-1) - (k-2) - \dots - 2 - 1.$$

Обратите внимание на последнее равенство: оно будет использовано в конце доказательства формулы крюков.

**Умножение на ноль**

*Как часто предсказывают конец света! – и ведь ни разу не сбылось...*

В числителе дроби  $F$  присутствуют все разности вида  $l_j - l_m$ . Поэтому величина  $F(l_1, l_2, \dots, l_k)$  равна нулю, если в последовательности  $l_1, l_2, \dots, l_k$  есть совпадающие числа:  $l_j = l_m$  при  $j \neq m$ . Вы помните, что  $l_1 > l_2 > \dots > l_k$ . Тем не менее, высказанное – истина, хотя наверняка пока кажется, что она не ко двору.

Сформулируем это свойство функции  $F$  чуть иначе. Поменяем местами  $l_1$  и  $l_2$ . Разность  $l_1 - l_2$  заменится на  $l_2 - l_1 = -(l_1 - l_2)$ , а другие множители числителя и знаменателя поменяются друг с другом местами или останутся неизменными. Значит,  $F(l_1, l_2, \dots, l_k) = -F(l_2, l_1, l_3, \dots, l_k)$ .

Немного подумав, вы поймете, что величина  $F$  меняется на противоположную не только при замене  $l_1$  на  $l_2$  и  $l_2$  на  $l_1$ , но и при перестановке любых двух аргументов – так называемой транспозиции. Такие функции  $F$  называют *антисимметрическими*.

*Симметрическими* называют функции, не меняющие свое значение ни при какой перестановке аргументов.

В зависимости от того, как перестановка действует на антисимметрический многочлен – меняет его знак на противоположный или сохраняет многочлен неизменным, – перестановку называют, соответственно, *нечетной* или *четной*.

Нетрудно доказать, что множество  $S_k$  всех перестановок множества первых  $k$  натуральных чисел можно разбить на две равные половины. Все перестановки  $\sigma$  одной из них – нечетные перестановки – обладают тем свойством, что

$$F(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)}) = -F(l_1, l_2, l_3, \dots, l_k).$$

Перестановки из другой половины – четные – удовлетворяют равенству

$$F(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)}) = F(l_1, l_2, l_3, \dots, l_k).$$

Для доказательства формулы крюков нам потребуются следующие две леммы.

**Лемма 2.** Если многочлен  $g(x, y)$  антисимметричен, то  $g(x, x) = 0$ .

**Доказательство.** Меняя местами букву  $x$  с буквой  $y$  (да, это не опечатка, мы меняем букву с такой же в точности буквой!), получаем равенство  $g(y, x) = -g(x, y)$ , откуда и следует равенство  $g(x, x) = 0$ .

**Лемма 3.** Если многочлен  $g(x, y)$  антисимметричен, то существует такой симметрический многочлен  $h(x, y)$ , что  $g(x, y) = (x - y)h(x, y)$ .

**Доказательство.** Поделив уголко<sup>1</sup> многочлен  $g(x, y)$  на разность  $x - y$ , получаем некоторое частное  $h(x, y)$  и некоторый остаток  $f(y)$ . Это значит, что верно тождество

$$g(x, y) = (x - y)h(x, y) + f(y).$$

Подставив в это тождество  $y = x$ , получаем

$$g(x, x) = (x - x)h(x, x) + f(x).$$

В силу леммы 2 имеем  $g(x, x) = 0$ ; следовательно,  $f(x) = 0$ ; лемма 3 доказана.

Множественно применяя лемму 3, приходим к следующему утверждению.

**Следствие из леммы 3.** Всякий антисимметрический многочлен  $g(l_1, l_2, \dots, l_k)$  представим в виде произведения всевозможных разностей вида  $l_j - l_m$ , где  $1 \leq j < m \leq k$ , и некоторого симметрического многочлена.

#### Вычитание нуля

*Робкий человек чуть было не прослыл решительным. Характера не хватило.*

С.Лузан

Пусть  $l_k = 0$ . (Вы помните, что такого не бывает. Но я хочу рассмотреть эту ситуацию – как ни странно, она нам пригодится!) Поскольку  $l_1 - 0 = l_1$ ,  $l_2 - 0 = l_2, \dots, l_{k-1} - 0 = l_{k-1}$  и  $n = l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1} + 0 - (k-1) - (k-2) - \dots - 2 - 1 =$

$$= (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \dots + (l_{k-1} - 1) - (k-2) - \dots - 2 - 1,$$

то

$$F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, 0) = F(l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_{k-1} - 1).$$

#### Индукционный переход

Для  $k = 1$  и  $\lambda_1 = 1$  формула крюков тривиальна:  $1 = \frac{1!}{1!}$ .

Применим индукцию. Предположив, что формула крюков верна для всех диаграмм, состоящих из  $n - 1$  клеток, докажем ее для  $n$ -клеточной диаграммы. Воспользуемся приемом, который мы уже обсуждали, – отбрасыванием клеток.

Переход от диаграмм рисунка 7 к диаграммам рисунка 8 соответствует формуле

$$F(7, 4, 3, 1) = F(6, 3, 2) + F(7, 4, 2, 1) + F(6, 4, 3, 1).$$

Поскольку  $F(6, 3, 2) = F(7, 4, 3, 0)$  и  $F(7, 3, 3, 1) = 0$ , ее можно записать в виде

$$F(7, 4, 3, 1) = F(6, 4, 3, 1) + F(7, 3, 3, 1) + F(7, 4, 2, 1) + F(7, 4, 3, 0).$$

По очереди каждый аргумент уменьшаем на 1. В общем виде формула такова:

$$F(l_1, l_2, \dots, l_k) = F(l_1 - 1, l_2, \dots, l_k) + F(l_1, l_2 - 1, \dots, l_k) + \dots + F(l_1, l_2, \dots, l_k - 1). (*)$$

В правой части  $k$  слагаемых: мы как бы по очереди отбрасываем из каждой строки ее самую правую клетку (хотя на

<sup>1</sup> При делении  $g(x, y)$  рассматриваем как многочлен от  $x$ , коэффициенты которого – многочлены от  $y$ .

самом деле следует отбрасывать самые правые клетки не все подряд, а только те, под которыми нет клеток таблицы, – «лишние» слагаемые все равно нулевые).

**Лемма 4.** Если функция  $F$  антисимметрична, то антисимметрична и функция

$$F(l_1 - 1, l_2, \dots, l_{k-1}, l_k) + F(l_1, l_2 - 1, \dots, l_{k-1}, l_k) + \dots + F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1} - 1, l_k) + F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, l_k - 1).$$

**Доказательство.** Меняя местами  $l_1$  и  $l_2$ , получаем

$$F(l_2 - 1, l_1, \dots, l_k) + F(l_2, l_1 - 1, \dots, l_k) + \dots + F(l_2, l_1, \dots, l_{k-1} - 1, l_k) + F(l_2, l_1, \dots, l_k - 1).$$

Очевидно,

$$F(l_2 - 1, l_1, \dots, l_k) = -F(l_1, l_2 - 1, \dots, l_k),$$

$$F(l_2, l_1 - 1, \dots, l_k) = -F(l_1 - 1, l_2, \dots, l_k),$$

...

$$F(l_2, l_1, \dots, l_{k-1} - 1, l_k) = -F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1} - 1, l_k),$$

$$F(l_2, l_1, \dots, l_k - 1) = -F(l_1, l_2, \dots, l_k - 1).$$

При любой другой транспозиции ситуация аналогична. Лемма доказана.

Ни правая, ни левая части равенства (\*) – не многочлены: «мешаются» факториалы. Однако, разделив обе части на  $(n - 1)!$  и домножив на  $l_1! l_2! \dots l_k!$ , приходим к необходимости доказать тождество

$$n \prod_{1 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m) = l_1 \prod_{1 < m \leq k} (l_1 - l_m) \prod_{2 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m) + l_2 (l_1 - (l_2 - 1)) \prod_{2 < m \leq k} (l_1 - l_m) \prod_{2 < m \leq k} (l_2 - 1 - l_m) \prod_{3 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m) + \dots + l_k \prod_{1 \leq j < m < k} (l_j - l_m) \prod_{1 \leq j < k} (l_j - (l_k - 1)). (**)$$

Выписано оно шика ради. А принципиально то, что вследствие леммы 4 правая часть (\*\*) – антисимметрический многочлен от  $l_1, l_2, \dots, l_k$ , так что правая часть делится на всевозможные разности этих переменных, а частное от деления – симметрический многочлен  $h(l_1, l_2, \dots, l_k)$  первой степени. (Первой – поскольку степень правой части на единицу больше степени левой части вследствие наличия множителей  $l_1, l_2, \dots, l_k$ , соответственно, в каждом из  $k$  слагаемых правой части.)

Любой симметрический многочлен первой степени от  $l_1, l_2, \dots, l_k$  имеет вид  $a(l_1 + l_2 + \dots + l_k) - b$ , где  $a$  и  $b$  – числа. Осталось их найти.

Коэффициент при  $l_1^k$  в правой части формулы (\*\*) равен произведению  $\prod_{2 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m)$ , а коэффициент при  $l_1^{k-1}$  в

многочлене  $\prod_{1 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m)$  ровно такой же. Следовательно,

$a = 1$  и  $h(l_1, l_2, \dots, l_k) = l_1 + l_2 + \dots + l_k - b$ , где величина  $b$  зависит только от  $k$ , а не от  $l_1, l_2, \dots, l_k$ .

#### Последний удар

*Когда хорошо подумаешь – и говорить не о чем.*

Осталось сделать последний шаг – обосновать равенство

$$b = 1 + 2 + \dots + (k - 1).$$

Удивительным образом никаких вычислений не требуется! Поскольку для любого натурального  $k$  формула крюков верна для столбика высотой  $k$ , то для обеспечения правильного перехода от столбика высотой  $k - 1$  к столбику высотой  $k$  величина  $b$  именно такая, как надо!

Предлагаемая статья написана одним из самых давних и любимых авторов нашего журнала профессором Московского физико-технического института А.Л.Стасенко. Много лет он является ведущим раздела «Школа в «Кванте» и чаще всего пишет небольшие заметки-эссе именно для этой рубрики. Почему же на этот раз редколлегия решила опубликовать статью А.Л.Стасенко в разделе «Есть идея?!»? Дело в том, что эта статья необычна как для самого автора, так и для журнала. Как правило, мы публикуем материалы, посвященные популярному изложению вопросов, прошедших ранее апробацию на страницах научных журналов и книг и признанных научным сообществом. В предлагаемой же статье автору захотелось пофантазировать на тему о том, как на основе научных соображений и аргументов можно придумать, «сконструировать» формулу для коэффициента трения. Нам кажется, что читателям будет интересно познакомиться со свободным научным фантазированием, которое является необходимым звеном в поиске новых истин. Мы предлагаем вам поразмышлять над полученной автором статьи формулой, сравнить ее с любыми доступными вам данными и, может быть, предложить свою (возможно, более удачную) формулу или теорию.

# Упругость, текучесть, трение...

**А. СТАСЕНКО**

*...в механике твердых тел применяется  
...технически необходимое, но физически плохо  
распознаваемое понятие о внешнем трении.*

Р. Поль

ЭТО СЛЕГКА ПЕССИМИСТИЧЕСКОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ ПРИнадлежит известному немецкому демонстратору физических явлений. Попробуем внести свою лепту в понимание столь повсеместного процесса, как трение.

Представим себе брусок весом  $P$ , лежащий на горизонтальной плите из того же материала (рис. 1). В реальности оба тела шероховаты, так что они соприкасаются в некотором числе контактных областей (в принципе, для равновесия

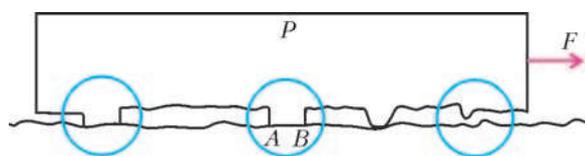


Рис. 1

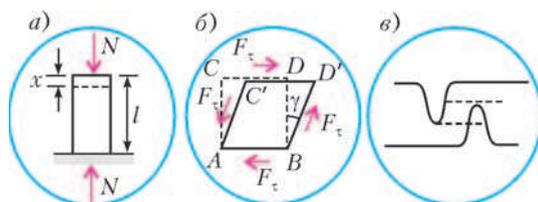


Рис. 2

достаточно трех), суммарная площадь которых много меньше видимой. Прежде всего рассмотрим возможные типы деформации, которой подвержены контактные выступы («бугорки» шероховатости), считая их в недеформированном состоянии вертикальными цилиндриками или брусками.

При осевом сжатии стержня начальной высоты  $l$  и сечения  $S$  под действием силы  $N$  наблюдается его укорочение на

величину  $x$  (рис.2,а), которое выражается в виде хорошо известного закона Гука

$$x = \frac{l}{E} \frac{N}{S}.$$

Здесь величина  $E$  называется модулем продольной упругости, или модулем упругости первого рода, или (сокращенно) модулем упругости, или модулем Юнга. Приведенное выражение можно переписать в виде, привычном для школьника и характеризующем пружину:

$$N = \frac{ES}{l} x = kx.$$

Таким образом, мы уподобили упругий стержень пружине жесткостью  $k = ES/l$ .

Закон Гука утверждает линейную зависимость относительной деформации стержня  $x/l$  от механического напряжения (нормальной силы, приходящейся на единицу площади)  $\sigma = N/S$ . И серьезные исследователи, и школьники очень любят такие зависимости за их простоту. Например, закон Ома дает линейную зависимость между силой тока  $I$  и разностью потенциалов  $U$  на концах проводника длиной  $l$  и сечением  $S$ :

$$U = \frac{l}{\lambda S} I.$$

Сравнивая это выражение с законом Гука, видим, что электропроводность проводника  $\lambda$  формально аналогична модулю Юнга  $E$ .

Однако, при увеличении механического напряжения простая линейная зависимость перестает быть справедливой: при некотором значении  $\sigma_{\tau} = N_{\max}/S$  наступают необратимые деформации – сжатая пружина-стержень не распрямится после снятия нагрузки. Значение  $\sigma_{\tau}$  называется пределом текучести. С помощью этой величины можно определить, например, наибольшую высоту  $h$  гор на Земле. В самом деле, считая гору конусом и приравнивая давление породы ее пределу текучести:

$$\frac{1}{3} \rho g h \lesssim \sigma_{\tau},$$

получим

$$h \lesssim \frac{3\sigma_{\tau}}{\rho g} \sim \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^3 \cdot 10} \text{ м} = 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}.$$

Здесь плотность базальтовой породы принята равной  $3000 \text{ кг/м}^3$ , а ее предел текучести – порядка  $10^8 \text{ Па}$ . Как известно, самая высокая гора на Земле имеет высоту  $8,848 \text{ км}$ . Отсюда же можно заключить, к примеру, что на Луне могли бы существовать горы в 6 раз выше.

Но линейное сжатие и растяжение – не единственный вид деформации. Существует еще деформация сдвига. Представим себе упругий брусок  $ABDC$ , нижняя грань которого  $AB$  приклеена к абсолютно жесткой поверхности (рис.2,б).

Под действием касательной силы  $F_{\tau}$  его верхняя грань  $CD$  примет положение  $C'D'$ , а вертикальные грани наклонятся на угол  $\gamma$ . (На рисунке расставлены силы так, чтобы деформированный брусок остался в равновесии.) Аналогично случаю сжатия, закон Гука при сдвиге выражается в виде

$$\gamma = \frac{\sigma_{\tau}}{G},$$

где  $\sigma_{\tau}$  – напряжение сдвига, или касательная сила в расчете на единицу площади, а величина  $G$  называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода и, естественно, имеет ту же размерность, что и модуль Юнга, и механическое напряжение ( $[G] = \text{Н/м}^2$ ).

Но при чем здесь трение? Несомненно, еще первобытный человек, таща тушу мамонта или бревно к костру, убедился, что его усилиям противодействует тангенциальная сила  $F$  тем большая, чем больше вес  $P$  мамонта или бревна. Прошло немало времени, прежде чем Амонтон отважился записать (1699 г.) линейную зависимость между этими силами:

$$F = \mu P,$$

а коэффициент  $\mu$  назвать коэффициентом трения. И прошло еще немало лет, пока физики осознали, что макроскопический эффект, называемый трением, есть результат множества микроскопических взаимодействий молекул, атомов, электронов соприкасающихся тел. Были написаны сотни (а может быть, и тысячи) диссертаций, в которых исследовались различные аспекты проблемы трения. И тем не менее, даже в энциклопедии вошли пессимистические нотки: «...коэффициенты трения часто являются лишь грубой и условной характеристикой сил трения. Кроме того, величина коэффициента трения существенно изменяется при изменениях (часто с трудом поддающихся контролю) физических условий на поверхности соприкосновения». Здесь имеется в виду наличие пленок окислов, адсорбированных слоев газов, паров и жидкостей; кроме того, локальная температура в местах контактов при скольжении одного тела по другому может быть гораздо более высокой (например, несколько сот градусов), чем средняя температура обоих тел. А еще – крупные бугорки, сталкиваясь друг с другом, просто препятствуют движению и должны быть срезаны активной силой  $F$  (на рисунке 1 справа и на рисунке 2, в изображены два таких бугорка, которые готовятся встретиться друг с другом). В результате коэффициент трения зависит еще и от качества обработки поверхностей – не напрасно ведь в машиностроении тщательно шлифуют трущиеся детали.

Всеми этими факторами объясняется разброс значений коэффициентов трения, приводимых в различных литературных источниках. Например, значение  $\mu = 0,18$  для случая трения металла по металлу приведено в учебнике позапрошлого века с пышным названием «Начальная физика в объеме гимназического преподавания с 766-ю политипажами в текстѣ, задачами, репетиторіумомъ и вопросами для упражненій» Н. Любимова (Москва, 1876. Лицей Цесаревича Николая).

В «Механике, акустике и учении о теплоте» упомянутого выше Роберта Вихарда Поля указано, что численное значение коэффициента трения покоя лежит большей частью между 0,2 и 0,7, коэффициент трения скольжения в большинстве случаев лежит между 0,2 и 0,5, а с возрастанием скорости он может снизиться на 20% от начальной величины, имеющей при малой скорости.

В других источниках можно найти такие значения коэффициента трения: для санок по твердому снегу  $\mu = 0,05$ ; между деревом и льдом  $\mu = 0,09$ ; для стали по чугуну  $\mu = 0,15 - 0,18$ ,

а для стали по стали  $\mu = 0,44$ ; для колес тормозящего трамвая  $\mu = 0,2$  и т.д.

В этих условиях вполне оправдано предложить какую-либо простую зависимость, описывающую столь сложное и неопределенное явление. Для этого и воспользуемся введенными выше понятиями модулей упругости и предела текучести.

Картина, изображающая взаимодействие поверхностей двух соприкасающихся тел (см. рис.1), наглядно иллюстрирует как упругую деформацию одних «бугорков» шероховатостей, так и неупругую других, как их линейное сжатие (см. рис.2, а), так и сдвиговую деформацию (см. рис.2, б), которая в конце концов приводит к разрыву «спаек» в области неупругой деформации (с последующим образованием новых спаек в процессе движения). Значит, коэффициент трения должен, в принципе, зависеть от всех рассмотренных нами макроскопических характеристик вещества:  $E$ ,  $G$ ,  $\sigma_{\tau}$ .

Прежде всего выпишем в таблицу (в первые три столбца) характерные значения всех нужных нам величин для некоторых металлов и сплавов. Обратим внимание на то, что модули упругости  $E$  и  $G$  даны в гигапаскалях ( $1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}$ ), а пределы текучести  $\sigma_{\tau}$  – в единицах, в тысячу раз меньших, т.е. в мегапаскалях ( $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ ):

	$E$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\sigma_{\tau}$ , МПа	$\mu = (\sigma_{\tau}/\sqrt{EG})^{1/3}$
Алюминий				
и сплавы	70–80	26–30	20–500	0,08–0,22
Медь и сплавы	100–130	40–47	30–700	0,08–0,21
Свинец	16	5,6	5–10	0,08–0,1
Сталь	190–210	230	75–80	0,12

Из этой таблицы виден разброс данных, приведенных в различных справочниках. Тем не менее, значения предела текучести для всех веществ оказываются на два-три порядка меньше значений модулей упругости

В сложных вопросах физики часто прибегают к помощи теории размерностей и подобия. Но в данном случае из перечисленных характеристик материалов  $\sigma_{\tau}$ ,  $E$ ,  $G$ , имеющих одну и ту же размерность ( $\text{Н/м}^2$ ), можно составить бесконечное число безразмерных комбинаций. Как тут быть? Воспользуемся дополнительными разумными соображениями. Во-первых, поскольку при деформации бугорков имеет место как их сжатие, так и сдвиг, целесообразно ввести  $\sqrt{EG}$  вместо  $E$  или  $G$  в отдельности. Разумеется, этот корень имеет тот же порядок величины, что и стоящие под ним множители. Во-вторых,  $\sigma_{\tau}$ , как уже было отмечено, на два-три порядка меньше  $\sqrt{EG}$ , а величина  $\mu$  находится где-то вблизи 0,1. Отсюда разумно предложить такую зависимость для коэффициента трения:

$$\mu \sim \left( \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{EG}} \right)^{1/3}.$$

Конечно, это не вывод и не доказательство, и предлагаемая формула носит отпечаток произвола. Но ведь она дает разумные значения  $\mu$ ! Как тут не вспомнить английский физик и математик Оливера Хевисайда, который сказал, что не может отказаться от вкусного обеда только потому, что не знает, как тот приготовлен. Или Марка Блока, историка: «...если бы физики не были так дерзки в своей профессии, много ли достигла бы физика?»

Наши вдумчивые читатели могут «испытать» эту формулу и для других веществ, выписав из справочников их физико-механические данные, а также найдя в литературе (или измерив) соответствующие коэффициенты трения. Правда, тонкие эксперименты показали, что сила трения существует и в случае, когда не происходит упруго-пластических изме-

нений поверхности. Эта сила связана с так называемой адгезией (от лат. *adhaesio* – прилипание). Именно для описания этого явления Кулон «подправил» закон Амонтона и ввел дополнительное слагаемое, связанное не с прижимающей силой, а с взаимодействием приповерхностных атомов и молекул (см. статью А. Стасенко «Не пренебрежем трением качения...» в Кванте №1 за 2008 г. – *Прим. ред.*). Здесь мы не будем рассматривать эту нежную добавку, а вернемся к нашей таблице.

В последнем столбце таблицы приведены значения  $\mu$ , рассчитанные по предлагаемой формуле. При этом брались крайние левые или крайние правые значения из интервалов для  $E$ ,  $G$  и  $\sigma_T$  (т.е. принималось, что более жесткие тела обладают и более высоким пределом текучести). Таким

образом, предлагаемая простая связь между макроскопическими физико-механическими характеристиками материалов, несмотря на громадный разброс табличных данных, дает правдоподобное значение коэффициента трения между двумя телами (по крайней мере, из одного и того же материала).

В одном американском учебнике по физике говорится: «... учет трения – это, в сущности, бухгалтерский учет: если какая-то часть энергии уходит в бесполезной для нас форме, то мы можем назвать это трением». Конечно, это не означает, что окончательно разобраться с трением можно после месячных бухгалтерских курсов. Пожалуй, для этого неплохо поступить в Московский физико-технический институт, чего вам и желаем.

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

### Из плоскости – в пространство

Может быть, вы уже писали ЕГЭ, а может, еще нет, но в любом случае следует знать, что это тяжелая работа. Скажем, по физике за 3,5 часа нужно решить 36 задач. Факти-

взглядом на розовый бланк ответов ЕГЭ (рис. 1). Посмотрел туда, где расположены квадратики, в которых нужно отмечать номера правильных ответов. Мне показалось, что бланк приобрел глубину – сантиметра 2–3, не меньше.

Позже, уже после экзамена, я понял, что это было проявлением стереоскопического эффекта. Вот в чем тут дело (рис. 2). Если мы смотрим обоими глазами на один и тот же квадрат, то угол между лучами зрения велик. Если же мы

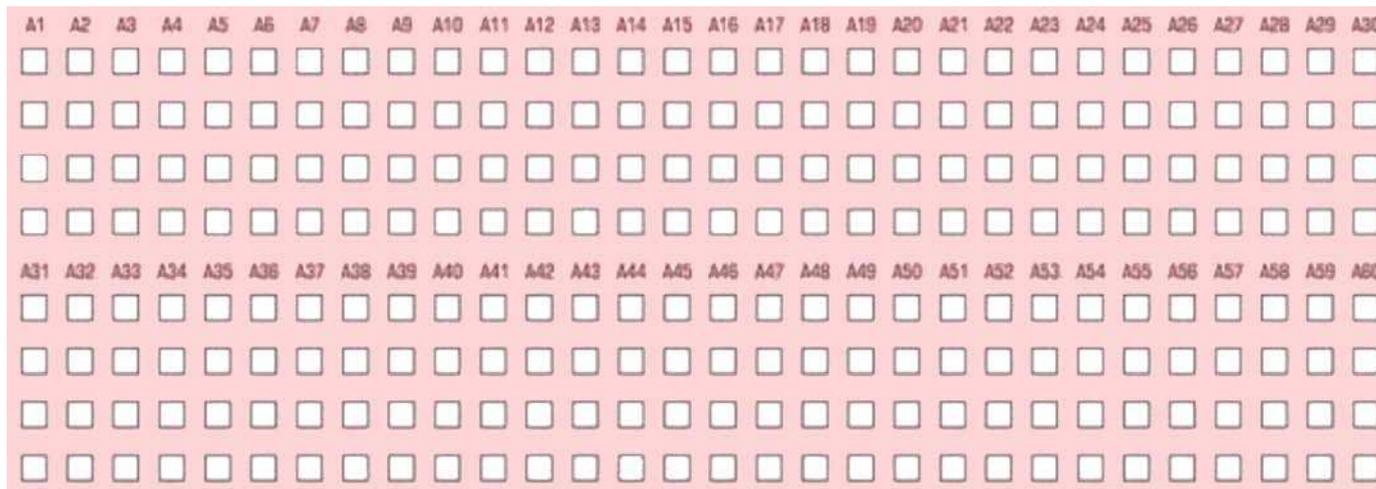


Рис. 1

чески невозможно проработать такой большой отрезок времени без передышки, без вольных или невольных отвлечений. В один из таких моментов я и посмотрел рассеянным

смотрим на два соседних квадрата – левым глазом на левый и правым на правый, то угол между лучами зрения становится меньше. И если все-таки нам удастся убедить себя, что оба глаза видят один и тот же квадрат, то этот квадрат будет казаться более удаленным.

Существуют определенные методики достижения такого самообмана. Вот одна из них. Приблизьте рисунок 1 к себе и расслабьте глаза – расфокусируйте свое зрение, не пытаясь разглядеть какие-либо мелкие детали рисунка. Теперь начните медленно удалять рисунок, все так же не пытаясь сфокусировать зрение. В некоторый момент должна возникнуть иллюзия объема.

Надеюсь, вы лишний раз убедились в том, что глубину можно искать везде – даже там, где ее нет.

А. Панов

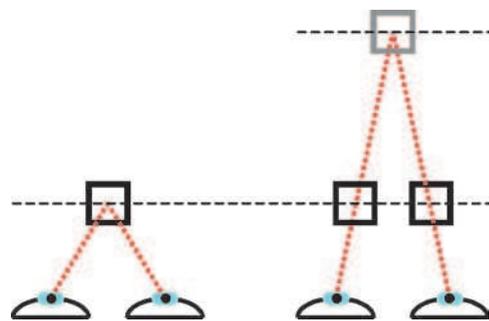


Рис. 2

# Поток магнитной индукции

К.РЫБ

ОПИСАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ основано на двух основных законах – на законе электромагнитной индукции и теореме Гаусса. Оба закона используют одну и ту же физическую величину – поток магнитной индукции, или просто магнитный поток. Поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через поверхность площадью  $S$  равен произведению модуля вектора магнитной индукции на эту площадь и на косинус угла  $\alpha$  между вектором  $\vec{B}$  и нормалью к поверхности:

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Согласно закону электромагнитной индукции, электродвижущая сила индукции в замкнутом контуре равна по модулю скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром:

$$\mathcal{E}_i = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

Теорема Гаусса для потока магнитной индукции выражает одно из фундаментальных свойств магнитного поля – его вихревой характер. Она формулируется так: алгебраическая сумма потоков магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равна нулю. Принято считать, что выходящие из поверхности магнитные линии дают положительный поток, а входящие – отрицательный.

Обратимся к примерам конкретных задач, предлагавшихся на конкурсных экзаменах и на олимпиадах.

**Задача 1.** В неоднородном магнитном поле, симметричном относительно оси  $OZ$ , осевая составляющая индукции магнитного поля  $B_z$  меняется по линейному закону:

$B_z = B_0 \left( 1 + \frac{1}{H_0} z \right)$ . Определите угол, который образует вектор индукции магнитного поля с направлением оси  $OZ$  в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $R$  от оси и на расстоянии  $H_A$  от плоскости  $XOY$ .

**Решение.** Окружим ось  $OZ$  цилиндрической поверхностью радиусом  $R$  и шириной  $\Delta z$ . Поверхность включает точку  $A$ . Суммарный магнитный поток представим как сумму потоков через торцы и через боковую поверхность цилиндра. Так как по теореме Гаусса суммарный поток вектора индукции через замкнутую поверхность равен нулю, то

$$\Delta B_z \cdot S_{\text{тор}} = B_r \cdot S_{\text{бок}}, \text{ или } -\frac{B_0}{H_0} \Delta z \cdot \pi R^2 = B_r \cdot 2\pi R \Delta z.$$

Отсюда получаем

$$B_r = -\frac{B_0 R}{2H_0}.$$

Теперь очевидно, что искомый угол равен

$$\gamma = \arctg \frac{B_r}{B_z} = \arctg \frac{R}{2(H_0 + H_A)}.$$

**Задача 2.** Вблизи северного полюса вертикально расположенного намагниченного стержня находится тонкая кольцевая катушка массой  $m = 10$  г. Катушка может свободно перемещаться вдоль вертикальной оси  $OZ$ . Катушку заставляют колебаться около полюса по гармоническому закону с амплитудой  $A = 5$  мм и частотой  $\nu = 50$  Гц. При этом на ее разомкнутых концах появляется переменная электродвижущая сила с амплитудой  $\mathcal{E}_0 = 1$  В. Какой постоянный ток  $I_0$  нужно пропустить через катушку, чтобы она зависла в исходном положении?

**Решение.** Требуемое условие зависания катушки обеспечивается компенсацией силы тяжести вертикальной составляющей силы Ампера, которая, в свою очередь, определяется радиальной составляющей индукции магнитного поля:

$$mg = F_{Ay}, \quad F_{Ay} = I_0 \cdot 2\pi RN \cdot B_r,$$

где  $R$  и  $N$  – радиус и число витков катушки. При колебаниях катушки ее смещение вдоль оси  $OZ$  изменяет поток магнитной индукции и создает ЭДС индукции, которая определяется скоростью изменения потока:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = N\pi R^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = N\pi R^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta z} v.$$

При амплитудном значении скорости  $v$  колебаний катушки максимальна и ЭДС:

$$v_0 = 2\pi\nu A, \quad \mathcal{E}_0 = N\pi R^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \cdot 2\pi\nu A.$$

Теорема Гаусса позволяет установить связь между радиальной составляющей магнитной индукции и быстротой изменения индукции вдоль вертикальной оси. Катушка при колебаниях «вырезает» в пространстве цилиндр радиусом  $R$  и высотой  $\Delta z$ . По теореме Гаусса потоки через торцы и через боковую поверхность этого цилиндра равны:

$$\frac{\Delta B_z}{\Delta z} \cdot \Delta z \cdot \pi R^2 = B_r \cdot 2\pi R \cdot \Delta z,$$

откуда

$$\frac{\Delta B_z}{\Delta z} = \frac{2B_r}{R}.$$

Теперь из выражения для максимальной ЭДС индукции получим

$$B_r = \frac{\mathcal{E}_0}{4\pi^2 RN\nu A},$$

а из условия равновесия катушки найдем

$$I_0 = \frac{mg}{2\pi RN B_r} = \frac{2\pi mg\nu A}{\mathcal{E}_0} = 0,15 \text{ А}.$$

Важным примером применения закона сохранения потока магнитной индукции является оценка индукционного тока, наводимого внешним магнитным полем в сверхпроводящем контуре. Здесь необходимо учитывать изменения потоков магнитной индукции через площадь сверхпроводящего контура как внешнего поля, так и поля, создаваемого индукционным током. Действительно, изменение потока магнитной индукции через площадь контура порождает в нем ЭДС индукции. А если контур сверхпроводящий, то чем ограничивается возникающий в нем индукционный ток? Оказывается, в таком случае нельзя пренебрегать магнитным полем, созданного этим индукционным током. В соответствии с теоремой Гаусса, алгебраическая сумма потоков магнитной индукции внешнего поля и поля индукционного тока через площадь сверхпроводящего контура остается неизменной. Иначе говоря, изменение потока внешнего поля вызывает

такое изменение тока в сверхпроводящем контуре, что создаваемый индукционным током поток магнитной индукции компенсирует это изменение.

**Задача 3.** Сверхпроводящее кольцо индуктивностью  $L$ , в котором течет ток  $I_0$ , вносят в однородное магнитное поле с индукцией  $B_0$ . Найдите ток, который будет протекать по кольцу. Нормаль к плоскости кольца составляет с направлением поля угол  $\alpha$ . Радиус кольца  $R$ .

**Решение.** Изменение внешнего магнитного потока через площадь кольца компенсируется потоком индукционного тока, т.е. изменением собственного магнитного потока кольца:

$$\Delta\Phi_{\text{вн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}} = 0.$$

Изменение внешнего магнитного потока равно

$$\Delta\Phi_{\text{вн}} = B_0 \pi R^2 \cos \alpha.$$

Ток в контуре и созданный им магнитный поток связаны друг с другом через индуктивность контура  $L$ :

$$\Phi = LI.$$

В нашем случае изменение собственного магнитного потока будет равно

$$\Delta\Phi_{\text{соб}} = L\Delta I = L(I - I_0),$$

где  $I$  – искомый ток. Таким образом, получаем

$$B_0 \pi R^2 \cos \alpha = L(I_0 - I),$$

откуда находим

$$I = I_0 - \frac{B_0}{L} \pi R^2 \cos \alpha.$$

**Задача 4.** Квадратная сверхпроводящая рамка покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Масса рамки  $m$ , длина стороны  $d$ , индуктивность  $L$ . Вся система находится в неоднородном магнитном поле, вертикальная составляющая которого зависит от координаты  $x$  следующим образом:  $B_z = B_0(1 + \alpha x)$ . Рамке толчком сообщают скорость  $v_0$  вдоль оси  $OX$ . Установите закон движения рамки.

**Решение.** При перемещении рамки магнитный поток внешнего поля через контур рамки изменяется. Возникающий индукционный ток создает свой магнитный поток, компенсирующий изменение потока внешнего поля, так как суммарный магнитный поток через контур сверхпроводника измениться не может:

$$\Delta\Phi_{\text{вн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}} = 0, \text{ или } B_0 d^2 \alpha \Delta x + Li = 0.$$

Отсюда для индукционного тока получаем

$$i = -\frac{B_0 d^2 \alpha}{L} \Delta x.$$

На все стороны рамки с индукционным током действуют силы Ампера. Равнодействующая этих сил, направленная по оси  $OX$ , равна

$$F = i B_0 d \alpha ((x + d + \Delta x) - (x + \Delta x)) = i B_0 d^2 \alpha = -\frac{B_0^2 d^4 \alpha^2}{L} \Delta x.$$

Это – квазиупругая сила. Следовательно, рамка будет совершать гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \frac{B_0 d^2 \alpha}{\sqrt{Lm}}.$$

Так как начальная скорость  $v_0$  – амплитудная, для амплитуды колебаний получим

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Тогда уравнение колебаний рамки примет вид

$$x(t) = \frac{v_0 \sqrt{Lm}}{B_0 d^2 \alpha} \sin \frac{B_0 d^2 \alpha}{\sqrt{Lm}} t.$$

Интересным проявлением закона сохранения потока магнитной индукции является согласованное изменение токов в катушках индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением при их параллельном соединении. Изменения токов могут быть вызваны, скажем, разрядкой конденсатора, включенного параллельно катушкам. Рассмотрим этот пример подробнее.

Пусть параллельно соединенные катушки имеют индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ . Создаваемые токами потоки магнитной индукции в катушках равны  $\Phi_1 = L_1 i_1$  и  $\Phi_2 = L_2 i_2$ . Допустим, что в момент замыкания ключа конденсатор заряжен, а тока в катушках нет. ЭДС самоиндукции, возникающая при разрядке, препятствует нарастанию токов. Выделим контур, содержащий две катушки с пренебрежимо малым активным сопротивлением. По второму правилу Кирхгофа для этого контура можно записать

$$L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0, \text{ или } L_1 (i_1 - i_{01}) = L_2 (i_2 - i_{02}).$$

Перегруппируем слагаемые и получим

$$L_1 i_1 - L_2 i_2 = L_1 i_{01} - L_2 i_{02} = \text{const}.$$

Если потоку с током, текущим против направления обхода контура, приписывать отрицательный знак, то полученное соотношение формулируется так: при изменениях токов в параллельных идеальных катушках алгебраическая сумма потоков магнитного поля в контуре остается неизменной.

Проверим этот вывод на других ситуациях.

Пусть ключ подключает катушку индуктивностью  $L_2$  в момент, когда ток в катушке индуктивностью  $L_1$  достигает значения  $I_1$ . Тогда по второму правилу Кирхгофа получим

$$L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0, \text{ или } L_1 i_1 - L_2 i_2 = L_1 i_0 = \text{const}.$$

Прежняя формулировка справедлива.

Усложним ситуацию: допустим, ключ замыкают в момент полной разрядки конденсатора, когда ток в первой катушке  $i_{01}$  максимален. Возникающая ЭДС противоположной полярности приведет к убыли тока  $i_1$  в первой катушке и росту тока  $i_2$  противоположного направления во второй катушке. ЭДС в катушках по-прежнему разнятся знаками, но теперь уже сама величина  $\frac{\Delta i_1}{\Delta t}$  отрицательна. Поэтому второе правило Кирхгофа примет вид

$$-L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0.$$

Отсюда следует

$$-(L_1 i_1 - L_1 i_{01}) = L_2 i_2, \text{ или } L_2 i_2 + L_1 i_1 = L_1 i_{01} = \text{const}.$$

Для этого случая по отношению к направлению обхода оба потока положительны – формулировка закона сохранения потока выполняется. Ее можно применить, например, для установления соотношения между мгновенными значениями токов в катушках. Проиллюстрируем это.

**Задача 5.** Конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до напряжения  $U_0$ , разряжается через катушку индуктивностью  $L_1$  (рис.1). Какой максимальный ток можно получить в катушке индуктивностью  $L_2$ , если замкнуть ключ  $K$  в момент, когда ток в катушке индуктивностью  $L_1$  максимален?

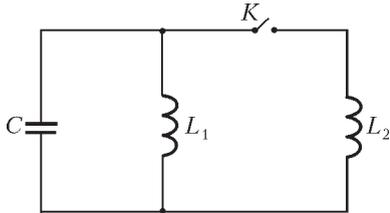


Рис. 1

**Решение.** Моменту замыкания ключа соответствует максимум тока в первой катушке, значит, конденсатор в этот момент полностью разряжен. Из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_{1\max}^2}{2},$$

откуда

$$I_{1\max} = \sqrt{\frac{C}{L_1}} U_0.$$

После замыкания ключа конденсатор перезаряжается, ток через первую катушку убывает, а ток через вторую катушку возрастает, но направлен по-другому. Поэтому запишем

$$-L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}.$$

Учитывая изменения токов в катушках, получим закон сохранения магнитного потока в виде

$$L_1 (I_{1\max} - i_1) = L_2 i_2, \text{ или } L_1 i_1 + L_2 i_2 = L_1 I_{1\max} = \text{const}.$$

Согласно первому правилу Кирхгофа, конденсатор будет заряжаться до выравнивая токов в катушках. При равенстве токов  $i_1 = i_2 = I_3$  конденсатор будет максимально заряжен, значит,

$$L_1 I_{1\max} = (L_1 + L_2) I_3,$$

откуда

$$I_3 = \frac{L_1 I_{1\max}}{L_1 + L_2}.$$

В последующую четверть периода ток через вторую катушку будет продолжать увеличиваться до своего максимального значения, равного

$$I_{2\max} = 2I_3 = \frac{2\sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2} U_0.$$

**Задача 6.** В момент, когда ток в катушке индуктивностью  $L_1$  (рис.2) был  $I_1$ , ключ  $K$  замкнули. Какое количество теплоты выделится в резисторе  $R$  после замыкания ключа? Индуктивность  $L_2$  второй катушки считать известной.

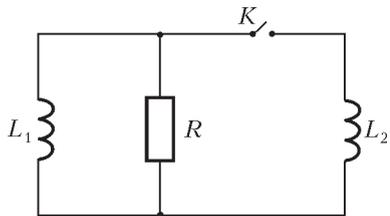


Рис. 2

**Решение.** Ток через резистор будет проходить до выравнивания токов в катушках (по первому правилу Кирхгофа). Этому моменту соответствует нулевое падение напряжения на резисторе, а значит, и нулевая ЭДС индукции. Дальше токи в катушках останутся неизменными. По закону сохранения потока магнитной индукции,

$$(L_1 + L_2) I_2 = L_1 I_1,$$

откуда

$$I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I_1.$$

Тепловая энергия, выделившаяся в резисторе, определяется убылью энергии магнитного поля при переходе из начально-

го состояния в состояние с одинаковыми токами в катушках:

$$\frac{L_1 I_1^2}{2} - \frac{L_1 + L_2}{2} I_2^2 = Q.$$

Подставляя сюда выражение для  $I_2$ , получим

$$Q = \frac{L_1 L_2 I_1^2}{2(L_1 + L_2)}.$$

**Задача 7.** В схеме на рисунке 3 величины  $\mathcal{E}$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  и  $R$  заданы. Сначала замыкают ключ  $K_1$ , а через некоторое время, когда ток через резистор достигает значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определите установившиеся значения токов через катушки. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

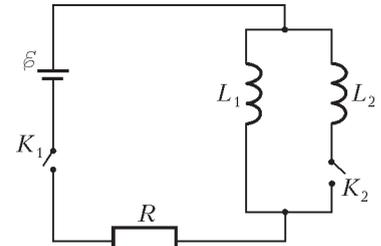


Рис. 3

**Решение.** Ток через резистор будет нарастать до значения  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . В соответствии с первым правилом Кирхгофа, он будет складываться из токов, проходящих через катушки:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = I_1 + I_2.$$

Из одинаковости мгновенных значений ЭДС индукции на параллельных катушках следует закон сохранения магнитного потока:

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = L_1 I_0.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем искомые токи:

$$I_1 = \frac{L_1 I_0 + L_2 \mathcal{E}/R}{L_1 + L_2}, \quad I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left( \frac{\mathcal{E}}{R} - I_0 \right).$$

**Упражнения**

**1\*.** Равномерно заряженное кольцо радиусом  $R$  с линейной плотностью заряда  $\rho$  движется соосно аксиально-симметричному магнитному полю со скоростью  $v$ . Радиальная составляющая индукции магнитного поля на расстоянии  $r$  от оси равна  $B_r$ . Определите момент сил, действующих на кольцо. Докажите, что приращение момента импульса кольца пропорционально приращению потока магнитной индукции через него.

**2.** Сверхпроводящий виток радиусом  $R = 3$  см вносят в неоднородное магнитное поле соленоида. При этом в некоторой точке  $A$  сила тока в витке оказывается равной  $I_A = 10$  А. При смещении витка на расстояние  $l = 1$  см ток в нем уменьшается на 1%. С какой силой действовало на виток магнитное поле соленоида в точке  $A$ ? Индуктивность витка можно вычислить по формуле  $L = \mu_0 \pi R / 2$ , где  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

**3.** При замкнутом ключе  $K$  (рис.4) ток в катушке индуктивностью  $L_1$  равен  $I_1$ , а ток в катушке индуктивностью  $L_2$  равен  $I_2$ . Определите, в каких пределах будут меняться токи в катушках после размыкания ключа.

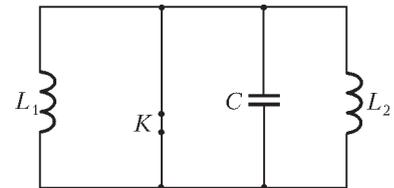


Рис. 4

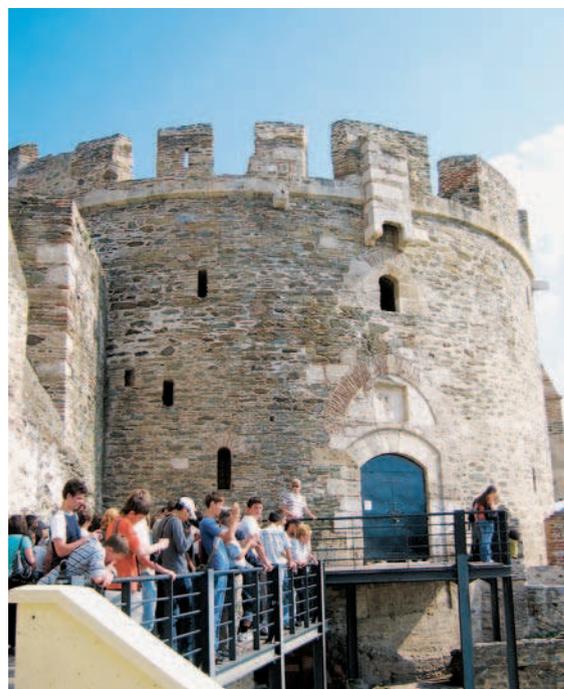
# XVII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии Мэрии департамента Пиерия (Греция), МГУ им. М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон» и «1С», Издательского дома «Первое сентября» и журнала «Квант» провел очередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 5 по 12 октября 2008 года в Греции, недалеко от знаменитой горы Олимп. На олимпиаду приехали участники из разных регионов России, Белоруссии, Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В олимпиаде также участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2008» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда Классического лицея 1 города Ростова-на-Дону (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований — Суперкубок. Команда была также лучшей в турах по физике и математике. Второе место в общем зачете заняла команда города Альметьевска (Россия). Она также заняла первое место по истории научных идей и открытий. На третье место вышла команда из города Павлодара (Казахстан), которая также стала третьей по математике и физике.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Алексей Кожевников, ученик 11 класса Классического лицея 1 из Ростова-на-Дону. Ему были вручены большая золотая медаль и малые золотые медали за первые места по математике и физике. Вторым призером в общем зачете стал Sondre Andreas Engebraten из Норвегии, ему была вручена большая серебряная медаль. Большую бронзовую медаль в общем зачете и малую бронзовую медаль за третье место по физике завоевала Айгуль Салахова, представляющая город Альметьевск. Жадра Шайкенова (г. Павлодар, Казахстан) получила малую серебряную медаль за второе место по физике, Юрий Пастухов (г. Альметьевск) был награжден малой серебряной медалью за второе место по



математике, а Евгений Солоневич (г. Барановичи, Белоруссия) — малой бронзовой медалью за третье место по математике.

Все победители и призеры получили разнообразные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XVIII Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2009 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп. 2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: [gluon@yandex.ru](mailto:gluon@yandex.ru) (см.также сайт: [www.gluon.ru](http://www.gluon.ru))

## Задачи олимпиады

### ПИСЬМЕННЫЙ ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ТУР

#### Математика

1. Можно ли число  $\frac{1}{2009}$  представить в виде суммы трех различных чисел, обратных нечетным числам?
2. Несколько горизонтальных и вертикальных прямых разбивают данный большой прямоугольник на меньшие прямоугольники, каждый из которых имеет целочисленный периметр. Верно ли, что периметр большого прямоугольника тоже целый, если количества вертикальных и горизонтальных прямых: а) равны; б) различны?
3. Решите уравнение  $\sqrt{4x - y^2} = \sqrt{y + 2} + \sqrt{4x^2 + y}$ .
4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  ортоцентр (точка пересечения высот)  $H$  делит высоту  $CC_1$  в отношении 3 : 1,



считая от вершины  $C$ . Найдите угол  $AMB$ , где  $M$  – середина высоты  $CC_1$ .

5. Пусть  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  – целые числа. Найдите наибольшее значение  $|b|$ , если известно, что  $|f(x)| \leq 1$  при всех  $x \in [0; 1]$ .

6. На плоскости провели  $n$  прямых так, что любые две прямые пересекаются и никакие 4 прямые не проходят через одну точку. Всего имеется 16 точек пересечения, причем через 6 из них проходят по три прямые. Найдите количество прямых  $n$ .

7. Существуют ли: а) три; б) четыре; в)  $n$  натуральных чисел таких, что сумма любых двух из них нацело делится на их разность?

### Физика

**Задача 1. «Торможение частицы».** Заряженная частица вылетает из источника частиц с некоторой скоростью  $v$ . Пролетев с этой скоростью по прямолинейной траектории расстояние  $L$ , частица попадает в однородное тормозящее поле и летит до остановки с ускорением  $a$  вдоль той же прямой. При каком значении скорости  $v$  время движения частицы до остановки будет наименьшим?

**Задача 2. «Два бруска и пружина».** Брусок (массой  $M$ ), покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика (массой  $m$ ) и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный блок (рис. 1). Коэффициент трения между бруском и столом  $\mu = 0,25$ . Грузик маятника совершает колебания с периодом  $T = 0,5$  с вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими, составляет  $A_{\max} = 4,0$  см. Чему равно отношение массы бруска к массе грузика?

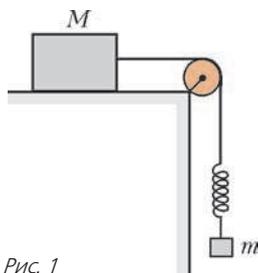


Рис. 1

**Задача 3. «Вертолет».** Модель вертолета, изготовленная в  $1/10$  натуральной величины, удерживается в воздухе при помощи двигателя мощностью  $P = 30$  Вт. Оцените, какой должна быть мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель.

**Задача 4. «Температура паров».** Из баллона, в котором находятся сильно разреженные пары рубидия, через узкую горизонтальную трубку выходит пучок атомов. Оцените температуру паров, если на горизонтальном пути  $l = 1$  м среднее смещение атомов по вертикали составляет  $h = 2$  мкм.

**Задача 5. «Законы электростатики».** В далеком космосе для проверки законов электростатики три маленьких одинаковых шарика массой  $m = 8$  г и зарядом  $q = 2$  мКл каждый соединили шелковыми нитями так, что образовался равнобедренный треугольник со стороной  $l = 300$  м. Одну нить пережгли. Каким должно быть ускорение среднего шарика при справедливости законов электростатики?

**Задача 6. «Посадка на Луну».**

Космический корабль массой  $M = 12$  т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте  $h = 100$  км над поверхностью Луны. Для перехода на посадочную орбиту на короткое время включается тормозная двигательная установка. Скорость истечения га-

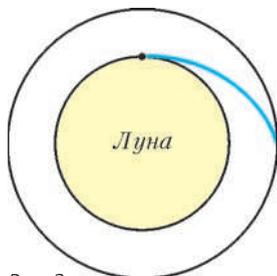


Рис. 2

зов из двигателя  $u = 10^4$  м/с, масса израсходованного топлива  $m = 1,2$  т. Какую скорость будет иметь корабль в момент посадки в точке, указанной на рисунке 2? Радиус Луны  $R_L = 1700$  км, ускорение свободного падения у поверхности Луны  $g_L = 1,7$  м/с<sup>2</sup>.

**Задача 7. «Монета».** При рассматривании монеты в лупу диаметр монеты увеличивается в два раза. Во сколько раз увеличивается ее толщина? Плоскость монеты параллельна плоскости лупы.

### УСТНЫЙ КОМАНДНЫЙ ТУР

#### Математика

1. Существуют ли такие положительные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1?$$

2. На стороне  $BC$  правильного треугольника  $ABC$  взяли точки  $K$  и  $L$  так, что  $BK = KL = LC$ , а на стороне  $AC$  взяли точку  $M$  так, что  $AM = \frac{1}{3}AC$ . Найдите сумму углов  $AKM$  и  $ALM$ .

3. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки часов взаимно перпендикулярны?

4. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные его сторонам. Отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, имеют одинаковую длину. Найдите эту длину, если стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

5. Двое играют в такую игру. На шахматной доске размером  $m \times n$  клеток стоит ладья. Игрок своим ходом может передвинуть ее на любое количество клеток вправо или вверх. Первоначально ладья стоит в левом нижнем углу доски. Кто выигрывает при правильной игре, если проигравшим считается игрок, который не может сделать очередной ход?

6. Найдите наименьшее значение дроби  $\frac{x}{y}$ , если  $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$ .

7. Дан прямоугольный сектор  $OAB$  ( $OA$  и  $OB$  – взаимно перпендикулярные радиусы окружности с центром в точке  $O$ ; рис. 3). Пусть  $C$  – середина дуги сектора, а радиус  $OC$  пересекает полукруг, построенный на радиусе  $OB$  как на диаметре, в точке  $D$ . Пусть, наконец,  $S_1$  – площадь криволинейного треугольника  $OBD$ , отсеченного радиусом  $OC$  от полукруга, а  $S_2$  – площадь части  $OACD$  сектора  $AOC$ , лежащей вне полукруга. Что больше:  $S_1$  или  $S_2$ ?

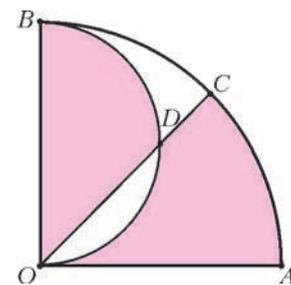


Рис. 3

8. По окружности расположены, чередуясь, 10 гирек различных масс и 10 шариков, причем масса шарика равна разности масс двух соседних с ним гирек. Можно ли разложить шарики на 2 кучки равной массы?

9. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность, центр  $O$  которой лежит внутри него. Найдите площадь  $ABCD$ , если углы  $BAO$  и  $DAC$  равны, а диагонали  $AC$  и  $BD$  равны  $m$  и  $n$  соответственно.

10. Сумма 120-х степеней 2008 натуральных чисел делится на 7. Что можно сказать о числе слагаемых в этой сумме, которые не делятся на 7?

#### Физика

**Задача 1. «Книга».** На столе лежит книга размером  $a \times a$ . Наименьшая работа, необходимая, чтобы раскрыть книгу на середине, равна  $A$ . Чему равна масса книги?

**Задача 2. «Кит».** Одна из древних моделей мира утверждала, что Земля расположена на спине кита, плавающего в океане. Оцените размеры этого кита, считая его брусом квадратного сечения, у которого длина в 10 раз больше стороны квадрата, лежащего в поперечном сечении, а плотность составляет  $\rho_k = 0,9 \text{ г/см}^3$ . Землю можно считать полушаром радиусом  $R_3 = 6400 \text{ км}$  и плотностью  $\rho_3 = 5,5 \text{ г/см}^3$ .

**Задача 3. «Шар на рельсах».** Шар катится без проскальзывания по двум горизонтальным рельсам со скоростью  $v$  (рис. 4). Длина хорды  $AB$  равна радиусу шара. У каких точек шара скорость наибольшая? Чему равна эта скорость?

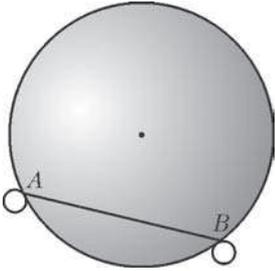


Рис. 4

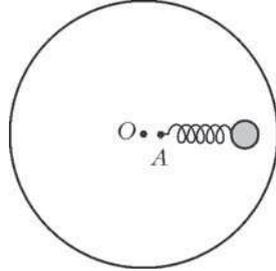


Рис. 5

**Задача 4. «Вращающаяся пружина».** В точке  $A$  горизонтального диска, вращающегося вокруг вертикальной оси  $O$ , прикреплен пружина, на другом конце которой закреплен шарик массой  $m = 10 \text{ г}$  (рис. 5). Жесткость пружины  $k = 1 \text{ Н/см}$ . Расстояние  $OA$  равно  $l = 3 \text{ см}$ , длина пружины в нерастянутом состоянии  $L = 5 \text{ см}$ . Определите угловую скорость вращения диска, при которой шарик будет находиться в равновесии при любом удлинении пружины.

**Задача 5. «Шарики на стержнях».** Два одинаковых шарика закреплены на концах двух одинаковых спиц. Спицы установлены вертикально свободными концами на горизонтальной плоскости. Конец одной спицы шарнирно закреплен, конец другой может скользить без трения по поверхности. Шарик выводит из равновесия. Какой из них быстрее коснется плоскости?

**Задача 6. «Шарик в конденсаторе».** Электрическое поле образовано двумя неподвижными, вертикальными, параллельными и разноименно заряженными непроводящими пластинами. Пластины расположены на расстоянии  $d = 9 \text{ см}$  друг от друга. Напряженность поля между пластинами  $E = 10^4 \text{ В/м}$ . Между пластинами на равном расстоянии от них помещен шарик с зарядом  $q = 2 \text{ мкКл}$  и массой  $m = 1 \text{ г}$ . В некоторый момент шарик отпускают. Какую скорость будет иметь шарик, когда коснется одной из пластин?

**Задача 7. «Шар в стакане».** В стакане, доверху наполненном водой и закрытом сверху крышкой, плавает деревянный шарик. Как изменится давление шарика на крышку, если стакан будет двигаться с ускорением  $a$ , направленным вверх?

**Задача 8. «Цикл Отто».** Покажите, что коэффициент полезного действия теплового двигателя, работающего по термодинамическому циклу, состоящему из двух адиабат и двух изохор (цикл Отто), зависит от выбора рабочего тела. Рассмотрите случай идеального газа.

**Задача 9. «Выпрямитель».** В электротехнике и радиоэлектронике часто применяют устройство, предназначенное для преобразования переменного напряжения в постоянное. Это – однополупериодный выпрямитель, его схема приведена на рисунке 6. Выпрямитель состоит из диода  $D$  и конденсатора емкостью  $C$ , а полезная нагрузка в виде резистора сопротивлением  $R$  подключается параллельно конденсатору. Будем рассматривать источник электрической энергии, который вырабатывает прямоугольные импульсы с

периодом  $T$ , длительностью  $T/2$  и амплитудой напряжения  $U_0$  (рис. 7). Напряжение на нагрузке получается не совсем постоянным, а немного изменяется относительно постоянной составляющей – пульсирует. Считая диод идеальным, пренебрегая внутренним сопротивлением источника электрической энергии, сопротивлением и индуктивностью конденсатора и емкостью и индуктивностью резистора, оцените относительные пульсации (отношение амплитуды колебаний к значению постоянной составляющей выпрямленного напряжения).

**Задача 10. «Щит Архимеда».** Античные историки утверждают, что Архимед смог зажечь вражеские корабли, составив из медных щитов воинов – защитников города Сиракузы – криволинейное зеркало и направив сфокусированные солнечные лучи на корабли римлян. На протяжении веков ученые спорят, могло ли в действительности произойти такое событие. Оцените возможность этого события, полагая, что из медных щитов было собрано сферическое зеркало. Расстояние до корабля  $L = 200 \text{ м}$ . Угловой размер Солнца  $\alpha = 30'$ , поверхностная плотность мощности солнечного излучения  $N = 500 \text{ Вт/м}^2$ . Температура воспламенения дерева  $t = 270 \text{ }^\circ\text{C}$ , плотность дерева  $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ , его удельная теплоемкость  $c = 2,5 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$ . Считайте, что солнечное излучение, падающее на дерево, полностью поглощается в поверхностном слое толщиной  $h = 0,1 \text{ мм}$ .

## ИСТОРИЯ НАУЧНЫХ ИДЕЙ И ОТКРЫТИЙ

### Математика

**1.** Арабский астроном, математик и врач IX века Сабит ибн Курра внес свою лепту в коллекцию доказательств теоремы Пифагора. Одно из двух его доказательств иллюстрируется следующими двумя чертежами (рис. 8). Оно интересно тем, что его нетрудно обобщить и получить теорему косинусов.

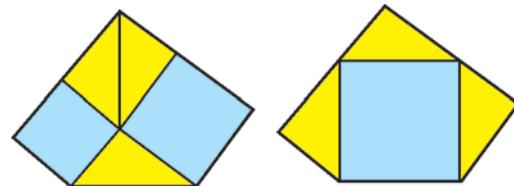


Рис. 8

Восстановите доказательство ибн Курры и преобразуйте его в доказательство теоремы косинусов.

**2.** В 2006 году высшей награды международного союза математиков – Филдсовской премии – был удостоен молодой американский математик Теренс Тао. Награда была ему присуждена за доказательство следующей удивительной теоремы: существует сколь угодно длинная арифметическая прогрессия, состоящая из простых чисел. О трудности этой задачи свидетельствует, например, то обстоятельство, что арифметическая прогрессия, состоящая из 250 простых чисел, имеет разность, приблизительно равную  $3 \cdot 10^{98}$ . Самое поразительное в доказательстве Т.Тао – это то, что оно является, по существу, вероятностным!

Найдите и вы арифметическую прогрессию из простых чисел длины: а) 3; б) 5; в) 6.

**3.** В середине XIX века усилиями многих математиков (Г.Штейнер, К.Вейерштрасс и др.) была доказана замеча-

тельная теорема о том, что из всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг (так называемая изопериметрическая задача). Это позволило, в частности, решить и пришедшую к нам из глубокой древности задачу Дидоны.

*Решите ее и вы: располагая веревкой длины  $l$ , отгородите от прямолинейного морского берега участок наибольшей площади.*

4. Английский математик Э. Варинг в 1770 году высказал гипотезу о том, что для любого натурального числа  $k$  существует такое натуральное число  $n$ , зависящее только от  $k$ , что любое натуральное число  $a$  можно представить в виде суммы не более чем  $n$   $k$ -х степеней натуральных чисел:

$$a = a_1^k + a_2^k + \dots + a_s^k,$$

где  $s \leq n$ . Например, каждое натуральное число есть сумма не более чем 4 квадратов (Л. Лагранж, 1770). Общее решение проблемы было дано в 1909 году Д. Гильбертом. Для случая  $k = 3$  немецкий математик Виферих в 1909 году установил, что для представления всякого натурального числа достаточно не более 9 кубов, причем только для двух чисел их ровно 9, а для остальных – меньше.

*Найдите меньшее из этих двух чисел.*

5. В 1826 году великий русский математик Н. И. Лобачевский опубликовал свою «Новую геометрию», в которой заменил знаменитый пятый постулат Евклида другим. Его геометрия основана на тех же аксиомах, что и обычная евклидова, кроме пятого постулата. Пятый постулат Евклида – утверждение, эквивалентное такому: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, лежащей с данной в одной плоскости и не пересекающей ее». Н. И. Лобачевский заменил этот постулат другим: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее». Геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и привычная нам геометрия Евклида. В «абсолютной геометрии» (названной так венгерским математиком Я. Бойяи) – общей части этих геометрий (не содержащей ни пятого постулата Евклида, ни постулата Лобачевского) – доказано, что сумма углов всякого треугольника не превосходит  $180^\circ$ . И так, в геометрии Лобачевского, как и в геометрии Евклида: а) на плоскости существуют прямые, не имеющие общих точек (например, два перпендикуляра к одной и той же прямой); б) верны три первых признака равенства треугольников; в) измерение углов аналогично евклидову. В геометрии Лобачевского доказано, что сумма углов произвольного треугольника меньше  $180^\circ$ .

*Докажите, что отсюда следует такой признак равенства прямоугольных треугольников: если два острых угла одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум острым углам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны.*

### Физика

1. В 1918 году Нобелевская премия по физике была вручена в знак признания заслуг в деле развития физики благодаря открытию квантов энергии. Ученый, получивший премию, начал свою научную деятельность работами по термодинамике. Применяв термодинамический подход к электромагнитному излучению, он сформулировал идею существования для излучения каждой частоты минимальной порции энергии – кванта энергии. Этим он спас физику от ультрафиолетовой катастрофы и заложил фундамент современной физики. Однако еще в течение многих лет он считал идею квантования излучения только техническим приемом, приводящим в соответствие теоретические пред-

ставления и экспериментальные результаты. Отличный музыкант, вдумчивый ученый, состоявший во многих академиях наук мира, автор глубокомысленных философских работ, в высшей степени порядочный человек, прожил долгую жизнь. Его именем названо научное общество и система научных институтов в одной из европейских стран.

*а) Кто этот ученый? б) В какой стране он жил? в) В чем сущность ультрафиолетовой катастрофы? г) В каком году он сформулировал квантовую гипотезу?*

2. Вопрос устройства мира занимал людей с давних пор. Уже в античное время ученые разделились на сторонников и противников идеи атомизма. С обеих сторон приводились убедительные аргументы и строились теории. Спор между ними завершился только в XX веке.

*Назовите выдающихся ученых – сторонников гипотезы атомизма, укажите наиболее важные результаты, полученные ими, и назовите их оппонентов: а) в античное время; б) в XVII – XVIII веках; в) в XIX веке.*

*Какие особенности современной атомистической теории вам известны?*

3. Для изучения строения материи современная физика использует как теоретические, так и экспериментальные методы. Для исследования взаимодействий элементарных частиц необходимы источники частиц высоких энергий. За последние полвека построены ускорители элементарных частиц с различными энергиями частиц в пучке. В 2008 году произведен пуск и осуществляется отладка нового, самого на сегодня мощного ускорителя, который, как ожидается, позволит экспериментально проверить теоретические предположения физики высоких энергий.

*а) Какой ускоритель запущен в 2008 году? б) Где он расположен? в) На какую энергию частиц рассчитан ускоритель? г) Какие планируемые эксперименты вам известны?*

4. Два древнегреческих ученых – учитель и ученик. Они жили в городе Абдеры в V веке до н. э. Были сторонниками идеи множественности существующего. Утверждали, что элементы существующего разделены пустотой, сами же элементы однородны, непрерывны и неделимы. Ученик сформулировал эту идею как цельную теорию и стал известнее учителя. Ученик много путешествовал и потратил на это деньги, полученные по наследству. В Абдерах растрата наследства преследовалась по закону. На суде ученый прочитал свой труд «Великий мирострой», написанный по итогам путешествий. Суд оправдал его, решив, что наследство израсходовано не зря. Он часто уединялся и разговаривал сам с собой. По решению сограждан его обследовал великий Гиппократ, признав здоровым, а его странности отнес за счет погружения в мудрые мысли.

*Назовите этих двух великих древнегреческих ученых.*

5. Эта идея к началу XIX века была принята почти всеми химиками мира. В 1860 году на Всемирном съезде химиков в Карлсруэ были окончательно сформулированы химические аспекты этой идеи. Однако почти все физики считали ее в лучшем случае неплохой расчетной моделью, но не картиной физической реальности. Известные физики Гельмгольц и Мах полагали, что эта идея лишена физического основания, утверждая, что материя непрерывна. Только такие выдающиеся физики, как Максвелл, Больцман, Эйнштейн, Резерфорд и некоторые другие, уверенно утверждали, что эта идея определяет наши воззрения на строение материи. XX век подтвердил их правоту.

*Сформулируйте эту идею. Какие решения съезда 1860 года сформулированы в рамках этой идеи?*

*Публикацию подготовили В. Альминдеров, А. Егоров, А. Кравицов, В. Крыштон, Ж. Раббот, Л. Шляпочник*

### Заочная школа СУНЦ НГУ

При Новосибирском государственном университете в составе Специализированного учебно-научного центра физико-математического и химико-биологического профиля (СУНЦ НГУ) уже более 45 лет работает созданная по инициативе академика М.А.Лаврентьева Заочная физико-математическая школа для учащихся 6–11 классов общеобразовательных школ.

Организованная в 1963 году как физико-математическая, в настоящее время Заочная школа (ЗШ) насчитывает 9 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое, русского языка, психологии, английского, немецкого и французского языков. Обучение в ЗШ способствует развитию самостоятельного и логического мышления, расширяет кругозор учащихся.

Лучшие ученики ЗШ ежегодно приглашаются в Летнюю школу для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников ЗШ.

Преподаватели обычных и гимназических классов в школах России и стран СНГ могут вести занятия по программам Заочной школы СУНЦ НГУ (по математике – начиная с 6 класса, по физике и химии – начиная с 9 класса, по биологии – с 10 класса). Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении, если преподаватель общеобразовательного учреждения сообщит в ЗШ СУНЦ НГУ о своем желании организовать факультативную группу и предоставит поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью, с указанием класса *текущего* учебного года), телефон, факс и e-mail. Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как факультативные занятия по предоставлению ЗШ СУНЦ НГУ соответствующих сведений. Факультативные группы по химии, биологии и физике обучаются бесплатно.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются *все желающие*, независимо от возраста. Прием в школу ведется *круглогодично*. Учащиеся частично возмещают расходы на свое обучение. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах, детей-инвалидов. Для учеников сельских школ и детей из малообеспеченных многодетных семей устанавливается более низкий уровень оплаты.

Чтобы стать учащимся ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой бандеролью. На обложке тетради нужно указать: отделение; номер задания; фамилию, имя, отчество (полностью, печатными буквами); класс, в котором учитесь в своей школе; подробный домашний адрес, с указанием индекса почтового отделения, телефон (с кодом города), e-mail. Можно присылать работы и по электронной почте.

Подробную информацию и первые задания всех отделений ЗШ СУНЦ НГУ можно найти на сайте:

<http://zfmsh.nsu.ru>

Наш почтовый адрес:

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-4066

E-mail: [distant@sesc.nsu.ru](mailto:distant@sesc.nsu.ru)

Ниже приводится первое (вступительное) задание на математическое и физическое отделения ЗШ СУНЦ НГУ.

### Первое задание

Математическое отделение

9 класс

1. Решите систему уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_3 + x_4 + x_1 = 3, \quad x_4 + x_1 + x_2 = 4.$$

2. Рыбаки поймали не менее 30 и не более 100 рыб, из которых 48% составляли окуни. Пять рыб были отпущены в озеро, после чего окуни стали составлять 50%. Сколько рыб поймали рыбаки?

3. Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части. Найдите все углы треугольника.

4. Из произвольной точки  $M$  внутри острого угла  $A$  опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на его стороны. Из вершины  $A$  опущен перпендикуляр  $AN$  на отрезок  $PQ$ . Докажите, что  $\angle PAN = \angle MAQ$ .

5. В кубе с ребром 13 отмечены 2009 точек. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной отмеченной точки?

6. Докажите, что для подходящего  $n$  сумма  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$  окажется больше числа 2009.

10 класс

1. Решите систему уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 2, \quad x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$

$$x_4 + x_5 + x_1 = 4, \quad x_5 + x_1 + x_2 = 5.$$

2. Сколькими нулями оканчивается число  $9^{2009} + 1$ ?

3. Внутри квадрата  $ABCD$  расположен квадрат  $A'B'C'D'$ . Докажите, что середины отрезков  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  и  $DD'$  также являются вершинами квадрата.

4. Докажите, что для любых положительных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  справедливо неравенство

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

5. Из произвольной точки на окружности, описанной около треугольника, опустили перпендикуляры на стороны треугольника или на их продолжения. Докажите, что основания всех трех перпендикуляров лежат на одной прямой.

6. Семь многоугольников площадью 1 расположены внутри круга радиуса 1. Докажите, что по крайней мере два из этих многоугольников имеют общую часть, площадь которой не меньше чем  $\frac{1}{7}$ .

11 класс

1. Внутри прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 расположены две одинаковые окружности так, что первая касается гипотенузы и меньшего катета, вторая касается гипотенузы, большего катета и первой окружности. Найдите радиус окружностей.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1.$$

3. Шар касается всех ребер куба. Определите объем части шара, заключенной внутри куба, если его ребро равно  $a$ .

4. Докажите неравенство

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

где  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – произвольные действительные числа.

5. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A' B' C' D'$  диагональ  $AC'$  перпендикулярна плоскости, проходящей через точки  $A'$ ,  $B'$  и  $D$ . Докажите, что параллелепипед является кубом.

6. Докажите, что для любого натурального  $n$  найдется натуральное число, записанное только нулями и единицами и делящееся на  $n$ .

Физическое отделение

9 класс

1. В коробку с квадратным дном размером  $10 \times 10$  см налили сантиметровой слой воды. Сколько железных кубиков с ребром 3 см нужно поставить на дно коробки, чтобы они полностью покрылись водой?

2. В заполненной водой кастрюле цилиндрической формы плавает тонкостенный стакан (рис.1). Когда в стакан налили

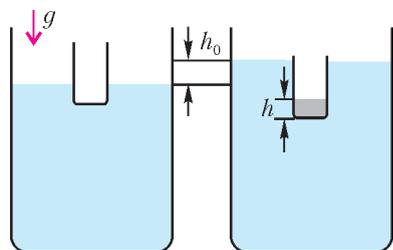


Рис. 1

слой жидкости высотой  $h$ , уровень воды в кастрюле повысился на  $h_0$ . Чему равна плотность  $\rho$  налитой в стакан жидкости? Сечение кастрюли  $S_0$ , сечение стакана  $S$ , плотность воды  $\rho_0$ .

3. Из проволоки изготовили правильный треугольник  $ABC$  (рис.2). Сопротивление между двумя его вершинами, например  $A$  и  $B$ , равно  $R$ . Чему равно сопротивление между серединами двух сторон треугольника, например  $D$  и  $E$ ? А между вершиной и серединой противоположной стороны, например  $A$  и  $F$ ?

4. Из морозильной камеры холодильника достали  $m_0 = 100$  г льда и бросили его в калориметр с водой. Температура воды уменьшилась от  $t_1 = 80^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ . Когда бросили еще 100 г льда, температура воды уменьшилась от  $t_2 = 60^\circ\text{C}$  до  $t_3 = 42^\circ\text{C}$ . Сколько воды было первоначально в калориметре? Теплоемкостью калориметра пренебречь.

10 класс

1. Решите задачу 2 для 9 класса.

2. Два зайца находятся рядом. Вначале стартует первый заяц с ускорением  $a$ . Через промежуток времени  $\tau$  после этого стартует второй заяц, но с ускорением  $2a$ . На каком расстоянии  $s$  от места старта второй заяц догонит первого?

3. Человек, находящийся на вершине вышки, отпустил камень. Когда тот пролетел половину пути, вслед ему

бросили второй камень со скоростью  $v_0$ , направленной вниз. Оба камня упали на землю одновременно. Определите высоту вышки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Два небольших тела расположили симметрично на краю гладкой полусферической лунки и одновременно отпустили (рис.3). После упругого взаимного удара одно из тел вылетает из лунки и поднимается на высоту, в 3 раза превышающую радиус лунки. Во сколько раз масса этого тела  $m_1$  меньше массы второго тела  $m_2$ ?

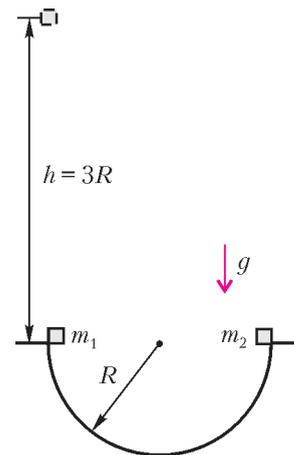


Рис. 3

5. На бруске массой  $m$  находится тело такой же массы  $m$ , связанное с бруском сжатой на  $x_0$  пружиной жесткостью  $k$  (рис.4). Нить, удерживающую пружину в сжатом состоянии, пережигают. Определите максимальное перемещение бруска, если коэффициент трения между телом и бруском  $\mu$ . Трением между бруском и полом пренебречь.

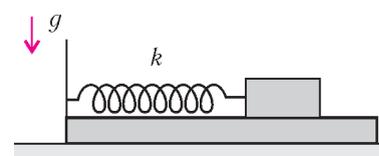


Рис. 4

11 класс

1. Решите задачу 2 для 10 класса.

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. Расстояние между дном и поршнем, перекрывающим пробирку, увеличивается в  $N$  раз, если пробирку перевернуть (рис.5). Масса поршня  $m$  его сечение  $S$ . Определите внешнее давление газа. Температура газа не меняется, трением поршня о стенки пробирки пренебречь.

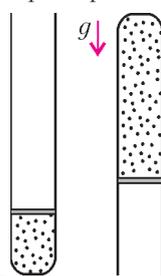


Рис. 5

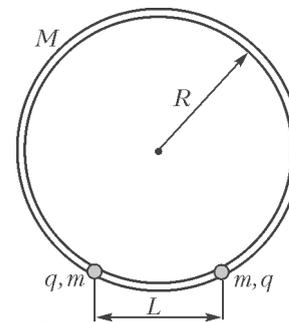


Рис. 6

4. Две бусинки, массой  $m$  и зарядом  $q$  каждая, нанизаны на тонкое гладкое кольцо массой  $M$  и радиусом  $R$  (рис.6). Вначале бусинки удерживают на расстоянии  $L$  друг от друга. Какую максимальную скорость приобретет кольцо, если бусинки отпустить? Трением и силой тяжести пренебречь.

5. Конденсатор емкостью  $C$ , имеющий вначале разность потенциалов на обкладках  $U$ , разряжается через два резистора сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , которые соединены параллельно (рис.7). Какое количество теплоты выделится на сопротивлении  $R_2$  в процессе разрядки? Получите численный ответ для  $C = 1000$  мкФ,  $U = 100$  В,  $R_2/R_1 = 2$ .

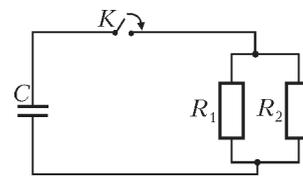


Рис. 7

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КМШ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Результаты матчей показаны в таблице:

	A	B	C	D	Очки	Место
A		1	3	3	7	I
B	1		1	1	3	II
C	0	1		1	2	III-IV
D	0	1	1		2	III-IV

Команда, занявшая «чистое» второе место, могла заработать 3 очка двумя способами: 1) выиграть один матч; 2) три матча сыграть вничью. Первый случай невозможен, поскольку тогда у двух команд, которым она проиграла, тоже есть как минимум три очка. Во втором случае команды, занявшие третье и четвертое места, не имеют побед и не могли набрать более двух очков. Значит, между собой они сыграли вничью, а победителю группы проиграла.

2. Пусть шенок пробежал  $x$  метров навстречу Лене и  $y$  метров навстречу Кате. Тогда всего он пробежал  $x + y$  метров и в результате сместился на  $y - x$  метров по направлению к Кате. Нам известно, что  $x + y = 85$  и  $y - x = 13$ . Складывая уравнения, получаем  $2y = 98$ , т.е.  $y = 49$ , а значит,  $x = 36$ .

3. Наша прямоугольная клякса превратится за 4 минуты в фигуру, изображенную на рисунке 1,а. (Для построения контура этой фигуры надо из каждой точки контура начальной

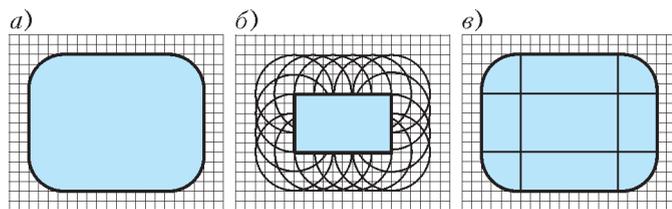


Рис. 1

«прямоугольной кляксы» провести окружность радиусом 4 клетки, как это показано на рисунке 1,б.) Мысленно разрезав эту фигуру на прямоугольники и четвертинки круга (рис.1,в), получаем ответ: искомая площадь равна

$$6 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 10 \cdot 4 + \pi \cdot 4^2 = 188 + 16\pi.$$

4. Разберемся сначала со случаем 5 слоников. Занумеруем их массы по возрастанию:  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ . Тогда контролеру достаточно убедиться, что  $C_1 + C_4 = C_2 + C_3$ ,  $C_1 + C_5 = C_2 + C_4$  и  $C_2 + C_5 = C_3 + C_4$ . Эти равенства равносильны равенствам  $C_4 - C_3 = C_2 - C_1$ ,  $C_2 - C_1 = C_5 - C_4$  и  $C_5 - C_4 = C_3 - C_2$  соответственно, т.е. тому, что разности масс соседних слоников равны.

Если слоников всего 4, то контролер не сможет проверить, отвечают ли слоники стандарту, потому что, например, наборы масс 10, 11, 12, 13 и 10, 11, 13, 14 дадут при любых взвешиваниях одинаковый результат (убедитесь в этом!).

5. К восьмиугольнику примыкают 8 прямоугольных треугольников с одинаковыми гипотенузами. В любых двух соседних треугольниках есть по одинаковому углу (равны как вертикальные), а значит все треугольники равны (по признаку равенства прямоугольных треугольников). Отметив равные стороны этих треугольников, видим, что  $P$  и  $Q$  – равные квадраты. Предположим, что их центры не совпадают. Сдвинем параллельно один квадрат так, чтобы его центр совместился с центром второго квадрата. При этом у нашего восьмиугольника в некоторой паре противоположных сторон одна увеличится, а другая – уменьшится, т.е. противоположные стороны станут разными. С другой стороны, из соображений симметрии

в новом восьмиугольнике противоположные стороны будут одинаковыми. Полученное противоречие показывает, что центры квадратов совпадают.

## КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2008 г.)

11. В треугольниках  $BA'C'$  и  $AB'C'$  равны углы при вершинах  $A'$  и  $B'$  (по условию) и при вершинах  $A$  и  $B$  (оба равны  $60^\circ$ ), а значит, равны углы  $AC'B'$  и  $BC'A'$ . Продлим отрезок  $B'C'$  за точку  $C'$  и рассмотрим угол, вертикальный углу  $AC'B'$ . По доказанному, он равен углу  $BC'A'$ , откуда  $C'B$  – биссектриса внешнего угла при вершине  $C'$  треугольника  $B'C'A'$ , следовательно, точка  $B$  равноудалена от прямых  $C'A'$  и  $C'B'$ . Аналогично доказываем, что точка  $B$  равноудалена от прямых  $C'A'$  и  $A'B'$ . Но тогда точка  $B$  равноудалена от прямых  $C'B'$  и  $A'B'$ , откуда  $B$  лежит на биссектрисе угла  $A'B'C'$ , что и требовалось доказать.

12. Уменьшаемое имеет вид  $9^m$ , где  $m$  делится на 3, т.е.  $m = 3k$ , где  $k$  – натуральное. Вычитаемое имеет вид  $8^n$ , где  $n$  – натуральное. Воспользуемся таким фактом: при делении на 7 произведение нескольких чисел дает такой же остаток, как и произведение их остатков. Значит,  $9^m$  дает при делении на 7 такой же остаток, как и  $2^m$ , а  $2^m = 2^{(3k)} = 8^k$  дает при делении на 7 такой же остаток, как и  $1^k$ , т.е. 1. Остаток 1 при делении на 7 дает и число  $8^n$ . Значит, разность  $9^m - 8^n$  дает при делении на 7 остаток 0, что и требовалось доказать.

13. Найдем количество всевозможных направлений, которые могут быть у ребер нашей ломаной (считаем, что параллельные отрезки одинаково направлены). Каждое ребро может быть либо вертикальным, либо горизонтальным, либо являться диагональю прямоугольника  $a \times b$ , где  $a$  и  $b$  – целые числа от 1 до 6. Всего таких прямоугольников  $6 \cdot 6 = 36$ . Заметим, что если стороны двух прямоугольников пропорциональны, то их диагонали дают одинаковые направления. Значит, из прямоугольников  $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 5 \times 5, 6 \times 6$  надо учесть только один. Точно так же только один прямоугольник надо учесть из следующих наборов прямоугольников:  $1 \times 2, 2 \times 4$  и  $3 \times 6$ ;  $2 \times 1, 4 \times 2$  и  $6 \times 3$ ;  $1 \times 3$  и  $2 \times 6$ ;  $3 \times 1$  и  $6 \times 2$ ;  $2 \times 3$  и  $4 \times 6$ ;  $3 \times 2$  и  $6 \times 4$ . Остаются  $36 - 5 - 2 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 = 23$  прямоугольника, их диагонали дают  $23 \cdot 2 = 46$  направлений. Добавляя вертикальное и горизонтальное направления, получаем всего 48 возможных направлений. Но ребер у нашей ломаной 49. Значит, обязательно какие-то два ребра имеют одинаковые направления, т.е. параллельны.

14. а). Можно. Спрашиваем у первого компьютера: «Ты бы ответил «да», если бы у тебя спросили, является ли второй компьютер российским?» Заметим, что и американский и китайский компьютеры оба ответят на этот вопрос «да», если второй компьютер российский, и оба ответят «нет», если второй компьютер не российский. Поэтому, если мы услышим ответ «да», то либо первый компьютер российский, либо второй компьютер российский. Значит, третий компьютер не российский. Если же мы услышим ответ «нет», то либо первый компьютер российский, либо второй компьютер не российский. В каждом из случаев мы можем выбрать не российский компьютер.

б) Нельзя. Докажем от противного. Пусть мы придумали вопрос и выбрали компьютер (скажем, первый). Он может оказаться китайским, поэтому в случае по крайней мере одного из возможных ответов мы должны выбрать другой (т.е. второй или третий) компьютер. Однако если опрашиваемый компьютер – российский, он может дать именно этот ответ вне зависимости от того, какой из двух других компьютеров

китайский, а какой – американский. Значит, мы не сможем гарантированно выбрать не китайский компьютер. Противоречие.

15. На рисунке 2 показан способ, при котором в коробку помещается 41 батарейка (в нижнем ряду – 5 батареек, в следующем – 4, в следующем – 5 и так далее, всего 9 рядов). Центры кругов на рисунке расположены в вершинах треугольной решетки. Примем радиус круга за 1. Тогда

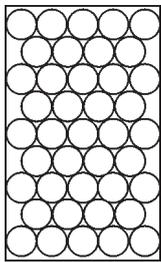


Рис. 2

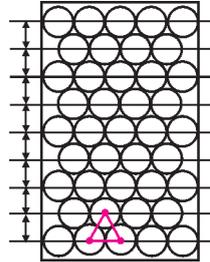


Рис. 3

длинная сторона нашей коробки равна 16. Расстояние между прямой, на которой лежат центры кругов первого ряда, и прямой, на которой лежат центры кругов второго ряда, равно высоте равностороннего треугольника со стороной 2, т.е. равно  $\sqrt{3}$  (рис.3).

Поэтому для размещения 41 батарейки достаточно, чтобы длинная сторона коробки была не короче  $8\sqrt{3} + 2$ . Но  $16 > 8\sqrt{3} + 2$  (поскольку  $196 = 14^2 > 64 \cdot 3 = 192$ ).

**КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»**

**Вопросы и задачи**

1. Сужение потока воздушных масс всегда приводит к возрастанию его скорости.
2. Явление объясняется разностью давлений в потоке воздуха в узкой и широкой частях горизонтальной трубки.
3. Относительная скорость воды между кораблями будет больше, чем снаружи; давление воды на корабли изнутри оказывается ниже, чем извне, и перепад давлений создает

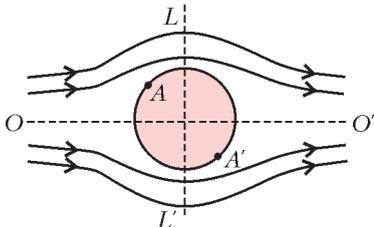


Рис. 4

силу, толкающую корабли друг к другу.

4. Поток, обтекающий шар, симметричен относительно линии  $OO'$  и плоскости  $LL'$  (рис.4). На любую пару точек шара, симметричных относительно его центра, например  $A$  и  $A'$ , будут

оказываться равные давления, поскольку скорости жидкости в этих точках одинаковы. Тем самым, уравновешиваются все силы давления, действующие на шар со стороны жидкости.

5. Поток тепла, передаваемого стержню от пламени, пропорционален площади его боковой поверхности, т.е. радиусу стержня. Теплоотвод же вдоль стержня пропорционален площади его поперечного сечения, т.е. квадрату радиуса. Поэтому тепловое равновесие толстого стержня наступает при значительно меньшей температуре по сравнению с тонкой проволокой.

6. Когда температура воды в маленькой и большой кастрюлях достигнет  $100^\circ\text{C}$ , поток тепла в малую кастрюлю прекратится: значит, вода в ней не закипит. Если воду в большой кастрюле предварительно прокипятить, то из воды будет изгнан воздух и температура ее кипения теперь будет выше, чем у сырой воды. В этом случае возможен поток тепла в маленькую кастрюлю и возможно закипание воды в ней.

7. Потери тепла термосом происходят в основном через боковые стенки. Боковая поверхность у цилиндрического термоса меньше, чем у квадратного. Значит, первый термос выгоднее.

8. Плитка расходует энергию на нагревание воды и окружающей среды. Поток тепла от стенок сосуда наружу зависит от

разности температур воды и воздуха. Поскольку этот поток больше при нагревании воды от  $80$  до  $90^\circ\text{C}$ , то и времени для нагревания при этом потребуется больше.

9. В этом месте наибольшая плотность тока.

10. Индукционный ток возникает при изменении магнитного потока, пронизывающего рамку, т.е. в случаях б), в) и д).

11. Участок диска между точками  $D$  и  $A$  непрерывно пересекает линии магнитной индукции, поэтому в нем возбуждается ЭДС индукции и, значит, по цепи течет ток. Магнитный поток, пронизывающий контур  $ABCD$ , меняться не будет.

12. В обоих случаях по катушке проходит один и тот же заряд, так как одинаково изменяется поток магнитной индукции. А вот тепла выделится больше в первом случае, так как ЭДС индукции при этом будет больше.

13. Магнитный поток сверхпроводника сохраняется. Поскольку общая площадь контура уменьшилась в два раза, индукция магнитного поля во столько же раз увеличилась.

14. Интенсивность, или плотность потока энергии, прямо пропорциональна частоте колебаний в четвертой степени и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

Следовательно, частоту надо увеличить в  $\sqrt{2}$  раз.

15. Плотность потока энергии точечного излучателя уменьшается пропорционально квадрату расстояния от источника.

Объект локации также можно рассматривать как точечный источник, но отраженного сигнала. Если увеличение дальности радиосвязи в  $n = 2$  раза требует увеличения мощности передатчика в  $n^2 = 4$  раза, то при радиолокации потребуется увеличение мощности в  $(2n)^2 = 16$  раз.

16. Из-за интерференции волн происходит перераспределение энергии, что может привести к уменьшению интенсивности излучения в одних точках и увеличению в других.

17. Световой поток на выходе из окуляра телескопа гораздо уже широкого потока, падающего на объектив; это и приводит к росту интенсивности воспринимаемого света.

18. См. рис.5. Центры всех приборов следует разместить на одной прямой, причем расстояние от зеркала до линзы должно быть равно радиусу зеркала, а лампа должна находиться в фокусе линзы.

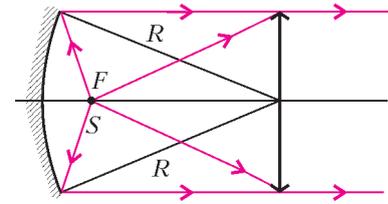


Рис. 5

**Микроопыт**

Вода быстрее охладится в стакане.

**ПОТОК МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ**

1. Суммарный момент сил Ампера равен  $M = 2\pi R^2 \rho B_r v$ .
2.  $F_A = \frac{0,01\mu_0 \pi R I_A^2}{2l} = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$ .
3.  $\Delta i_1 = \frac{2L_2(I_1 - I_2)}{L_1 + L_2}$ ,  $\Delta i_2 = \frac{2L_1(I_1 - I_2)}{L_1 + L_2}$ .

**XVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»**

**Письменный индивидуальный тур**

*Математика*

1. Можно. Поскольку  $2009 = 41 \cdot 49$ , попробуем представить число в таком виде:

$$\frac{1}{2009} = \frac{1}{x} + \frac{1}{41x} + \frac{1}{49x}$$

Из этого уравнения получаем  $x = 2099$ .

*Замечание.* Найденное представление не единственно возможное. Например, можно искать ответ как решение уравнения

$$\frac{1}{2009} = \frac{1}{y} + \frac{1}{49y} + \frac{1}{7 \cdot 41y},$$

откуда получим  $y = 2057$ .

2. а) Верно; б) не всегда.

а) Большой прямоугольник разбит проведенными прямыми на одинаковое количество вертикальных и горизонтальных полос, в каждой из которых имеется одинаковое количество меньших прямоугольников. Выберем в первой (левой) вертикальной полосе самый нижний меньший прямоугольник, во второй – второй снизу и т.д., в последней (правой) вертикальной полосе – самый верхний меньший прямоугольник. Сумма периметров выбранных меньших прямоугольников, с одной стороны, целочисленна, а с другой – равна периметру большого прямоугольника.

б) Пусть прямоугольник составлен из шести квадратов с длиной стороны  $\frac{1}{4}$  (на одной стороне прямоугольника помещается 2 квадрата, а на другой – три). Очевидно, периметры квадратов равны 1, а периметр прямоугольника равен  $\frac{5}{2}$ .

3.  $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ . Возведем обе части данного уравнения в квадрат и преобразуем результат. Уравнение примет вид

$$(2x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 2\sqrt{y + 2}\sqrt{4x^2 + y} = 0.$$

Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю только тогда, когда каждое из них равно нулю, т.е.

$$2x - 1 = 0, y + 1 = 0, \begin{cases} y + 2 = 0 \\ 4x^2 + y = 0. \end{cases}$$

Решив полученную систему, получим ответ.

4.  $90^\circ$ . Пусть  $D$  – середина отрезка  $C_1B$ . Тогда отрезок  $MD$  параллелен стороне  $BC$ , и поэтому высота  $AH$  исходного треугольника – одновременно и высота треугольника  $AMD$ , а значит,  $H$  – ортоцентр и этого треугольника. С другой стороны, из условия следует, что  $H$  – середина отрезка  $MC_1$ , поэтому высота  $DH$  треугольника  $AMD$  параллельна отрезку  $BM$ . Итак, искомый угол – прямой.

5. 8. Подставим в данное неравенство  $|f(x)| \leq 1$  значения  $x$ , равные 1, 0,  $\frac{1}{2}$ . Получится система ограничений на коэффициенты данного трехчлена:

$$\begin{cases} -1 \leq a + b + c \leq 1, \\ -1 \leq c \leq 1, \\ -1 \leq \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq -a - b - c \leq 1, \\ -3 \leq -3c \leq 3, \\ -4 \leq a + 2b + 4c \leq 4. \end{cases} \Rightarrow -8 \leq b \leq 8.$$

Пример трехчлена  $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ , удовлетворяющего условию  $|f(x)| \leq 1$  при всех  $x \in [0; 1]$ , приводит к ответу.

6. 8 прямых. Рассмотрим одну из шести «тройных» точек пересечения прямых. Легко видеть, что можно слегка «сдвинуть» одну из прямых так, чтобы сдвинутая прямая и две оставшиеся по-прежнему попарно пересекались, но каждая пара – в своей точке. При этом общее число точек пересечения всех прямых увеличится на 2. Проведем это преобразование с каждой из 6 тройных точек, мы получим систему из того же количества  $n$  прямых, попарно пересекающихся в  $16 + 12 = 28$  точках. С другой стороны, количество точек пересечения, как легко понять, равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Получается уравнение, которое легко решить.

7. а), б), в) существуют.

а) Пример: числа 1, 2, 3. б) Пример: числа 6, 7, 8, 9.

в) Предположим, что мы нашли систему  $a_1, a_2, \dots, a_k$  из  $k$  чисел, удовлетворяющих условию задачи: сумма двух любых из них делится на их разность. Докажем, что тогда можно построить и систему из  $k + 1$  чисел, обладающую таким же свойством. Пусть  $A = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$  – произведение всех найденных ранее чисел. В качестве искомой системы возьмем числа  $A, A + a_1, A + a_2, \dots, A + a_k$ . Их количество равно  $k + 1$ . Рассмотрим сумму двух любых из них, скажем  $x = A + a_i$  и  $y = A + a_j$ . Тогда, если обозначить через  $A^p$  отношение числа  $A$  к числу  $a_p$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{x + y}{x - y} &= \frac{2A + a_i + a_j}{a_i - a_j} = \frac{A^j \cdot 2a_j + a_i + a_j}{a_i - a_j} = \\ &= \frac{A^j ((a_i + a_j) - (a_i - a_j)) + (a_i + a_j)}{a_i - a_j} = \\ &= \frac{A^j (a_i + a_j)}{a_i - a_j} - A^j + \frac{a_i + a_j}{a_i - a_j}. \end{aligned}$$

Дроби – первое и третье слагаемые последней суммы – можно сократить на знаменатель в силу свойств системы из  $k$  выбранных ранее чисел, поэтому сумма  $x + y$  делится на разность  $x - y$ . В силу принципа полной математической индукции утверждение доказано.

#### Физика

$$1. v = \sqrt{aL}. \quad 2. \frac{M}{m} \geq \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{4\pi^2 A_{\max}}{gT^2} \right) \approx 6,5.$$

$$3. P_d = 300 \text{ кВт.}$$

$$4. T = \frac{Mgl^2}{6hR} = 13500 \text{ К (здесь } M \text{ – молярная масса паров, } R \text{ – универсальная газовая постоянная).}$$

$$5. a = \frac{\sqrt{3}q^2}{20\pi\epsilon_0 ml^2} = 17,6 \text{ м/с}^2. \quad 6. v \approx 840 \text{ м/с.}$$

7. В 4 раза.

#### Устный командный тур

##### Математика

1. Не существуют. Предположим, что такие числа нашлись. Уменьшим левую часть данного равенства, увеличив каждый знаменатель на недостающее в нем число. Получим

$$1 = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} > \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{z+x+y} + \frac{z}{x+y+z} = 1.$$

Противоречие.

2.  $30^\circ$ . Обозначим угол  $AKM$  через угол 1, а угол  $ALM$  – через угол 2. Поскольку  $BK : KC = AM : MC (= 1 : 2)$ , прямые  $KM$  и  $AB$  параллельны, поэтому угол  $BAK$  равен углу 1.

Из равенства треугольников  $ABK$  и  $ALC$  следует, что угол  $LAM$  равен углу  $BAK$  и, значит, тоже равен углу 1.

Искомая сумма углов 1 и 2 – сумма двух внутренних углов треугольника  $ALM$ , она равна внешнему углу  $LMC$  этого треугольника, который, в свою очередь, равен  $30^\circ$  как угол между биссектрисой  $ML$  правильного треугольника  $MKC$  и его стороной  $MC$ .

3. 44 раза. В начале суток часовая и минутная стрелки часов совпадают. Поскольку угловая скорость часовой стрелки равна  $\frac{1}{12}$  оборота в час, а минутной – 1 обороту в час, в следующий раз они совпадут через  $t$  часов, где  $t$  удовлетворяет уравнению

$$t \cdot 1 - t \cdot \frac{1}{12} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{12}{11}.$$

Между такими совпадениями стрелки будут взаимно перпен-

дикулярны дважды: минутная стрелка сначала обгонит часовую на  $90^\circ$ , а затем – на  $270^\circ$ . Аналогичная ситуация повторится между каждыми двумя следующими совпадениями стрелок. Всего за сутки интервалов между совпадениями стрелок будет  $24 : \frac{12}{11} = 22$ , а искомым положений – в 2 раза больше.

4.  $\frac{2abc}{ab + ac + bc}$ . Пусть  $ABC$  – данный треугольник,  $P$  – его внутренняя точка, через которую проходят равные отрезки  $DE$ ,  $FG$  и  $LH$ , соответственно параллельные сторонам  $AB = c$ ,  $BC = a$  и  $AC = b$ . Обозначим длины равных отрезков через  $x$ .

Данный треугольник разбивается проведенными отрезками на три треугольника и три параллелограмма.

Поскольку  $DE = DP + PE = AH + GB$ ,  $AG = AH + HG$ ,  $HB = HG + GB$ , а  $AH + HG + GB = AB$ , то

$$DE + AG + HB = 2AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} + \frac{AG}{AB} + \frac{HB}{AB} = 2.$$

Из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{DE}{AB} = \frac{x}{c}, \quad \frac{AG}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{x}{a}, \quad \frac{HB}{AB} = \frac{HL}{AC} = \frac{x}{b},$$

поэтому

$$\frac{x}{c} + \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2abc}{ab + ac + bc}.$$

5. При правильной игре в случае квадратной доски выигрывает второй игрок, а в случае прямоугольной – первый.

Пусть сначала доска квадратная. Тогда второй игрок выиграет, если будет все время после хода первого игрока возвращать ладью на диагональ доски, идущую из нижнего левого угла в правый верхний.

Если же доска прямоугольная, ситуация меняется. Проведем «диагональ» доски из правого верхнего угла. Она может пересечь как нижний, так и левый край доски. В любом случае первый должен своим первым ходом прийти на эту диагональ, и тогда он выиграет – ведь он поставит второго в положение, в котором был он сам в случае квадратной доски.

6. Наименьшее значение дроби равно  $\frac{1}{2}$ .

Заметим, что данное уравнение имеет смысл, если обе переменные не меньше 1; с другой стороны, слагаемые его левой части неотрицательны и поэтому каждое из них не превосходит 1, откуда следует, что имеет место система ограничений

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

На координатной плоскости указанная система задает квадрат со сторонами, параллельными осям координат и равными 1, причем его вершины  $K(1; 2)$  и  $M(2; 1)$  лежат на графике данного уравнения. Отсюда следует, что график данного уравнения – кривая, соединяющая точки  $K$  и  $M$  и не выходящая за пределы указанного квадрата.

Заметим также, что для любой точки  $P$  координатной плоскости отношение ее абсциссы к ординате равно котангенсу угла, образованного отрезком  $OP$  с осью абсцисс ( $O$  – начало координат).

Для любой точки рассматриваемого квадрата отрезок, соединяющий ее с началом координат, заключен между отрезками  $OM$  и  $OK$  и находится внутри угла  $KOM$ . Поэтому наибольший из углов, под которыми эти отрезки наклонены к оси абсцисс (именно у такого угла наименьший котангенс), равен углу, образованному отрезком  $OK$  с осью  $OX$ , а его котангенс равен  $\frac{1}{2}$ .

7. Эти площади одинаковы.

Пусть  $r$  – радиус данного сектора (тогда  $\frac{r}{2}$  – радиус полуокруга). Площадь данного сектора равна  $\frac{\pi r^2}{4}$  и равна площади построенного полукруга. Поскольку радиус  $OC$  делит сектор на две равные части, то сколько полукруг отрезает от сектора  $AOC$ , столько же полукруг отрезает от сектора  $COB$ .

8. Можно. Пусть  $m_1, x_1, m_2, x_2, m_3, x_3, \dots, m_{10}, x_{10}$  – массы чередующихся гирек и шариков. Очевидно, что

$$(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + (m_3 - m_4) + \dots + (m_{10} - m_1) = 0.$$

По условию, это равенство можно переписать так:

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_{10} = 0,$$

где знак « $\pm$ » означает, что возможен один из знаков, но нам неизвестно, какой, причем на самом деле в левой части последнего равенства встречается и плюс, и минус.

Перенеся все члены со знаком « $-$ » в правую часть последнего равенства, получим искомое разбиение шариков на две группы равной массы.

9.  $\frac{mn}{2}$ . Пусть угол  $BAO$  равен  $\alpha$ . Тогда в равнобедренном треугольнике  $ABO$  ( $OA = OB$ ) центральный для окружности угол  $BOA$  равен  $180^\circ - 2\alpha$ , поэтому вписанный в окружность угол  $BDA$ , опирающийся на ту же дугу, вдвое меньше, т.е. равен  $90^\circ - \alpha$ . Но угол  $BCA$  опирается на ту же дугу окружности, значит, он тоже равен  $90^\circ - \alpha$ . По условию, угол  $DAC$ , а значит, и равный ему угол  $CBD$  тоже равны  $\alpha$ . Следовательно,  $\angle BEC = 90^\circ$ , где  $E$  – точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ , т.е. диагонали данного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Отсюда получаем ответ.

10. Количество таких чисел равно  $7k$ , где целое число  $k$  может быть любым от 0 до 286.

Легко проверить, что шестая степень любого целого числа от 1 до 6 дает при делении на 7 в остатке 1. Значит, и 120-е степени любых натуральных чисел, кроме чисел, кратных 7, при делении на 7 дают в остатке 1. Поэтому количество таких чисел должно быть кратно 7.

Поскольку  $2008 = 286 \cdot 7 + 6 = 2002 + 6$ , чисел, не делящихся на 7, может быть любое число, кратное 7, от 0 до 2002.

Физика

1.  $m = \frac{4A}{ga}$ .

2. Сторона квадрата  $a = \sqrt[3]{\frac{\pi R_3^3 \rho_3}{\rho_k + \rho_{\text{воды}}}} \approx 1,6 \cdot 10^7$  м.

3. Наибольшую скорость имеет точка шара, наиболее удаленная от хорды  $AB$  (мгновенной оси вращения); эта скорость

равна  $u = v \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2,15v$ .

4.  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ с}^{-1}$ . 5. «Скользкий».

6.  $v = \sqrt{\frac{qEd}{m} + \frac{mg^2d}{qE}} \approx 4,3 \text{ м/с}$ .

7. Давление возрастет в  $\frac{g+a}{g}$  раз.

8. КПД зависит от показателя адиабаты, а значит, и от выбора рабочего тела.

9.  $\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{T}{2RC}$ . 10. Событие возможно.

## История научных идей и открытий

## Математика

1. Теорема Пифагора вытекает из равенства площади всей фигуры и трех равных прямоугольных треугольников на левом рисунке (см. рис.8 в статье), соответственно, площади всей фигуры и трех равных прямоугольных треугольников на правом рисунке (треугольники слева и справа равны), а также из того, что площадь квадрата равна квадрату стороны.

2. а) Пример легко подбирается: 3; 5; 7 (первый член, очевидно, должен быть нечетным, пробуем – и находим).

б) Если первый член прогрессии четен, то это число 2. Тогда, если разность четна, то остальные члены прогрессии четны и не являются простыми числами, а если разность нечетна, то члены прогрессии через 1 будут четными – противоречие с условием. Итак, первый член должен быть нечетен, а разность прогрессии, как легко понять, – четна. Далее, если разность прогрессии не кратна 3, то через 3 шага мы получим член прогрессии, делящийся на 3 – составное число. Поэтому разность прогрессии кратна числу 6. Пример: 5, 11, 17, 23, 29.

в) Соображения, аналогичные указанным в п. б), приводят к тому, что разность искомой прогрессии должна делиться на 30 (к делимости на 6 добавляется делимость на 5). Пример: 7; 37; 67; 97; 127; 157. («Случайно  $157 + 30 = 187$  – делится на 11, иначе было бы 7 членов прогрессии.)

3. Участок – полукруг радиуса  $\frac{l}{\pi}$ ; его площадь равна  $\frac{\pi l^2}{2}$ .

Отразим искомый участок симметрично относительно берега и рассмотрим задачу: располагая веревкой длины  $2l$ , отгородите от плоскости участок наибольшей площади. Ее решение, как говорит указанная в условии теорема, дает круг с длиной окружности  $2l$ , а половина его площади займет искомый участок.

4.  $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$ .

Понятно, что искать надо число после  $2^3 = 8$  (до него слишком мало натуральных чисел), но до  $3^3 = 27$  (между 8 и 27 «добирать» восьмерками и единицами).

Замечание: второе число равно  $239 = 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1^3 = 5^3 + 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 2^3 + 1^3$ ; как видите, это представление даже неоднозначно!

5. Наложим прямоугольный треугольник  $A_1B_1C_1$  с прямым углом  $C_1$  на прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$  так, чтобы вершина  $A_1$  совпала с вершиной  $A$ , сторона  $A_1C_1$  пошла по стороне  $AC$ , а сторона  $A_1B_1$  – по стороне  $AB$  (это возможно в силу равенства углов  $A$  и  $A_1$ ). Предположим, что точка  $C_1$  не совпала с точкой  $C$ ; например, оказалась между точками  $A$  и  $C$  (второй случай рассматривается аналогично). Тогда в четырехугольнике  $CC_1B_1B$  углы  $C$  и  $C_1$  – прямые, а углы  $B_1$  и  $B$  в сумме составляют  $180^\circ$  (угол  $B_1$  рассматриваемого четырехугольника – смежный с углом  $B_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$ , равный, по условию, углу  $B$ ). Мы получаем, что сумма внутренних углов четырехугольника  $CC_1B_1B$  равна  $360^\circ$ . Проведем диагональ  $CB_1$ , имеем два треугольника, сумма углов одного из которых не меньше  $180^\circ$  (если у обоих треугольников сумма углов меньше  $180^\circ$ , то и у четырехугольника она меньше  $360^\circ$ , чего нет). Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

## Физика

1. а) Макс Планк. б) Германия. в) Противоречие теории теплового излучения Рэлея–Джинса опытным фактам. г) 1900 год.

2. а) Стронники: Зенон, Эмпедокл, Анаксагор, Левкипп, Демокрит; оппоненты: Гераклит, Платон, Аристотель.

б) Стронники: Ньютон, Ломоносов; оппоненты: Галилей, Торричелли, Гюйгенс, Лавуазье.

в) Стронники: Дэви, Менделеев, Максвелл, Больцман; оппоненты: Гельмгольц, Мах, Юнг, Френель, Фарадей. Взаимодействие частиц осуществляется через непрерывное поле, являющееся квантовым объектом.

3. а) Большой адронный коллайдер. б) Швейцария и Франция. в) 14 ТэВ. г) Изучение топ-кварков, кварк-глюонной плазмы, фотон-адронных столкновений, поиск суперсимметричных частиц.

4. Левкипп и Демокрит.

5. Молекулярно-кинетическая теория строения вещества. На съезде были сформулированы определения атома и молекулы.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

seemat.ru

# Квант

 журнал ©

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина,  
В.М.Хлебникова**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

### Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

# МАТЕМАТИКА НА 64 КЛЕТКАХ

В задачах и головоломках на шахматной доске дело редко обходится без участия фигур. Однако и сама доска – интересный математический объект.

Среди математических развлечений на шахматной доске популярны задачи на ее разрезание. Одна из них связана с такой легендой. Один восточный властелин был таким искусным игроком, что за всю жизнь потерпел всего четыре поражения. В честь своих победителей он велел вставить в доску четыре алмаза – на те поля, где был заматован его король (на рисунке 1 на месте алмазов стоят кони). После смерти властелина его сын, слабый игрок и жестокий деспот, решил отомстить игрокам, позволившим себе объявить мат его отцу. Наследник приказал им разрезать доску с алмазами на четыре

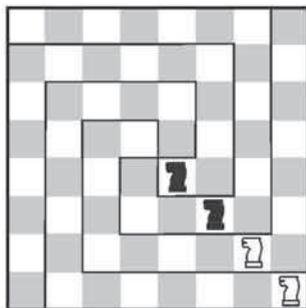


Рис. 1

одинаковые части, чтобы каждая заключала в себе по одному алмазу. Хотя они выполнили это требование, новый властелин все равно лишил их жизни.

Итак, возникает головоломка, которая часто встречается в занимательной литературе.

*На доске стоят четыре коня. Разрежьте доску на четыре одинаковые части так, чтобы на каждой было по коню (разрезы проходят только вдоль границ между вертикалями и горизонталями доски).*

Одно из решений показано прямо на рисунке 1.

Располагая четырех коней на различных полях, получаем множество подобных задач. Интересно не только нахождение конкретного разреза, но и подсчет числа способов разрезания. Установлено, что наибольшее число решений – 800 – задача имеет при расположении коней в четырех углах доски.

В ситуации, изображенной на рисунке 2,а, требуется выполнить сразу три задания: одно математическое (на разрезание) и два чисто шахматных.

а) Разрежьте нестандартную доску на четыре одинаковые части (их

можно переворачивать, цвет полей в расчет не принимается);

б) белые начинают и ставят мат как можно быстрее;

в) черные начинают и помогают белым поставить мат как можно быстрее (кооперативная задача).

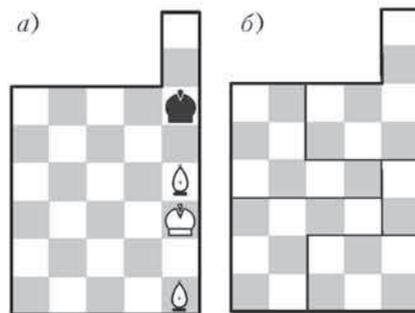


Рис. 2

а) Необходимый разрез доски показан на рисунке 2,б. б) Белые матуют в 12 ходов: 1. ♖b4 ♘e5 2. ♘d3 ♘e6 3. ♘c4 ♘e5 4. ♖c2 ♘e6 5. ♖b3 ♘e5 6. ♘c3 ♘e4 7. ♖d6 ♘e3 8. ♖d5 ♘e2 9. ♘c2 ♘e1 (e3) 10. ♖c5(+) ♘e2 11. ♖c4+ ♘e1 12. ♖b4x (все ходы черного короля, кроме одного, вынужденные). в) При нормальной игре следует 1... ♘e7, и мата нет, так как король скрывается в укромном уголке: 2. ♖b4+ ♘e8 с угрозой пата. При кооперативной игре цель достигается всего за 3 хода: 1... ♘d6 2. ♘d4 ♘e7 3. ♖b4+ ♘e6 4. ♖d5x.

Другую тему, имеющую прямое отношение к доске, проиллюстрируем следующей старинной головоломкой.

*Можно ли покрыть костями домино 2×1 квадрат 8×8, из которого вырезаны противоположные угловые клетки?*

Можно было бы заняться алгебраическим анализом, однако шахматное решение и проще, и изящнее. Окрасим наш урезанный квадрат в черно-белые цвета, превратив его в доску без угловых полей a1 и h8 (рис.3). При любом покрытии каждая кость домино очевидно, занимает одно белое и одно черное поле, и значит, весь набор костей (в количестве 31 штуки) покрывает одинаковое число белых и черных

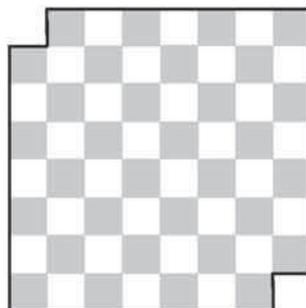


Рис. 3

полей. Но на нашей урезанной доске черных полей на два меньше, чем белых, следовательно, необходимого покрытия не существует!

В рассмотренной задаче существенно не то, что удалены угловые поля, а то, что они одного цвета.

*Пусть на доске вырезаны поля разного цвета. Всегда ли можно покрыть доску с двумя «дырками» 31 костью домино?*

Убедитесь самостоятельно, что это можно сделать всегда.

*Какое наименьшее число полей надо вырезать, чтобы полученную «дырявую» доску нельзя было покрыть ни одной костью домино?*

Достаточно вырезать 32 поля одного цвета, и на доске не останется места для домино.

Головоломки о доске и домино лежат в основе целого направления занимательной математики под названием полимино. В общем случае вместо домино используются фигурки полимино, состоящие из связанных между собой квадратов. С точки зрения шахматиста, связность означает, что все квадраты можно обойти ходом ладьи. В зависимости от числа квадратов полимино бывают самого разного типа.

Во всех предложенных задачах цвет полей доски был очень важен. А в следующей, чисто шахматной, задаче С.Белокоя на доске 7×7 (рис.4) он имеет решающее значение.

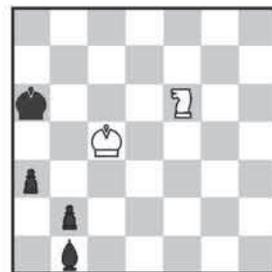


Рис. 4. Ничья

Доска 7×7 не случайна – этюд был составлен специально для конкурса «Спортлото». Шесть фигур на 49-клеточной доске символизируют выбор шести счастливых номеров из 49 возможных. Особенность доски проявляется в решении.

1. ♘b3 ♖d3 2. ♘c4+ ♖:c4+ 3. ♘:a3 b1 ♖+! При превращении пешки в ферзя или ладью – пат. 4. ♘b2 ♖d3 5. ♘a1 Черным удалось сохранить обе легкие фигуры, но все углы доски черного цвета, и при белопольном слоне поставить мат невозможно! (На обычной доске слон и конь матуют только в том углу, какого цвета слон.)

Е. Гук

# КУЧЕВЫЕ ОБЛАКА



*Продукты с физикой*



*Продукты с физикой*

В тихую погоду над нами часто плывут кучевые облака. Они образуются из водяных паров, которые вместе с теплым воздухом поднимаются от поверхности земли вверх и на высоте, соответствующей точке росы, конденсируются в мельчайшие капельки тумана размером около 10 мкм.

*(Продолжение – на странице 7 внутри журнала)*