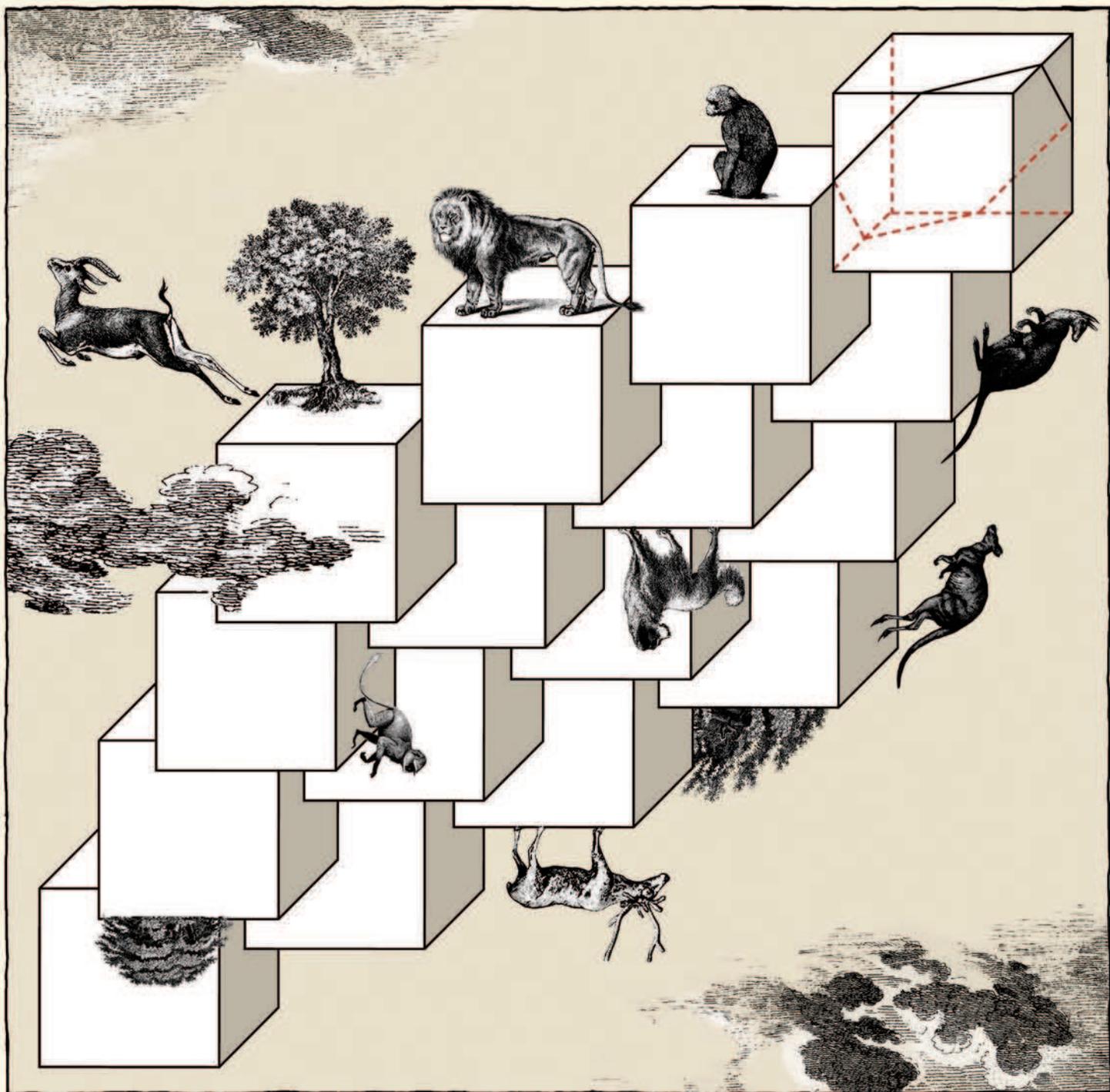


ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221
2009 · №1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Развертка = { кусок картона
условия склейки границ





журнал© Квант ЯНВАРЬ 2009 №1 ФЕВРАЛЬ 2009

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

главный редактор
С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбиллин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегии*), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегии*), С.П.Конвалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

главный редактор
И.К.Кикоин

первый заместитель
главного редактора

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2009, РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 На пути к квантовому компьютеру. *А.Варламов, Ю.Гальперин*
8 Аффинная геометрия. *А.Заславский*
13 «Электроны, фононы, магны». *М.Каганов*
15 Метод интерпретаций. *А.Анджанс, Д.Бонка*

НОВОСТИ НАУКИ

- 19 Премия за нарушения

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 20 Самозаклинивающиеся структуры. *А.Белов*
24 Интервью с А.Кузнецовым

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 25 Задачи М2116–М2123, Ф2123–Ф2129
26 Решения задач М2096–М2100, Ф2108–Ф2117

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Частицы и поля

К М Ш

- 34 Задачи
35 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
35 Математическая сказка
36 Абу-л-Вафа и циркуль постоянного раствора. *Г.Филипповский*
38 Несколько рифмованных физических задач. *В.Акимов*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 40 Метод эквивалентных деформаций. *В.Эпштейн*
41 От точки росы до точки кипения. *В.Птушенко, А.Пятаков*
43 Легенда об искажении сигнала. *С.Дворянинов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 44 Парадоксы командных соревнований. *Л.Ильков*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 47 Отражение от тонких цилиндрических зеркал. *А.Андреев, А.Панов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 50 Силы сопротивления в задачах динамики. *В.Лосев, В.Плис*
53 Параллельное проектирование в задачах. *В.Мирошин*

ОЛИМПИАДЫ

- 56 XXX Турнир городов

ИНФОРМАЦИЯ

- 57 Заочное отделение Малого мехмата МГУ
59 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (46, 55)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Белова*
II *Математические этюды*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*



В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»



На пути к квантовому компьютеру

А.ВАРЛАМОВ, Ю.ГАЛЬПЕРИН

Папенька поставил на стол табакерку. «Поди-ка сюда, Миша, посмотри-ка», – сказал он. Миша был послушный мальчик; тотчас оставил игрушки и подошел к папеньке. Да уж и было чего посмотреть! Какая прекрасная табакерка! пестренькая, из черепахи. А что на крышке-то! Ворота, башенки, домик, другой, третий, четвертый, – и счесть нельзя, и все мал мала меньше, и все золотые...

В.Одоевский. Городок в табакерке

НА РИСУНКЕ 1 ВЫ ВИДИТЕ ЗНАМЕНИТЫЙ РОЗЕТТСКИЙ камень, найденный в 1799 году в Египте, близ города Розетта. На плите из темного гранита размером 114 × 72 см в честь годовщины вхождения на престол фараона Птолемея V Епифана (196 до н.э.)

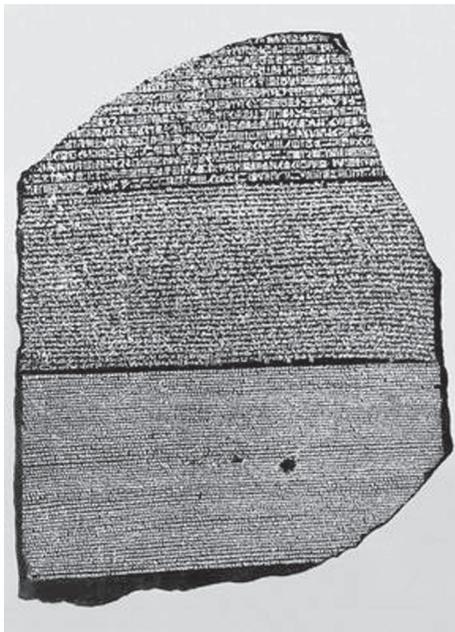


Рис.1. Розеттский камень

были высечены благодарственные слова: «Новому царю, получившему царство от отца...» К счастью, текст этот был написан трижды: древнеегипетскими иероглифами – священными знаками, употреблявшимися жрецами, египетским демотическим письмом – широко распространенной в ту эпоху скорописью и на древнегреческом. Это и позволило в 1822 году Ж.Ф.Шампольону разгадать тайну египетских иероглифов.

В 1970 году инженеры Японской электрической компании (NEC) создали первый динамический элемент памяти – чип (рис.2). Он состоял из 1024 ячеек (маленькие прямоугольнички), расположенных по 32

ячейки в ряд, всего 32 таких ряда. Размер этого элемента памяти составлял 0,28 × 0,35 см, и в нем

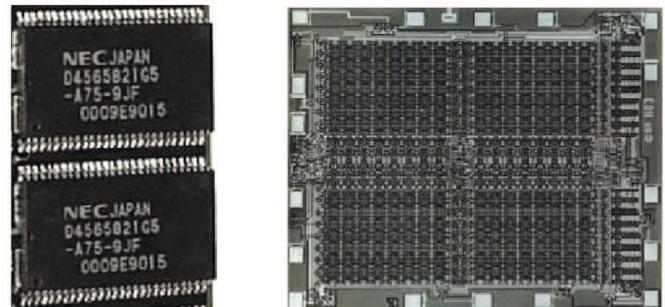


Рис.2. Первый динамический элемент памяти

нашлось место для всей информации, записанной на Розеттском камне. Сам процесс записи информации на чип занимал около 300 микросекунд.

Вехи компьютерной эры

Принципиально новый подход к хранению и переработке информации был сформулирован в 1936 году Аланом Тьюрингом в статье «О вычислительных числах применительно к проблеме выбора решений». В ней автор излагает основные идеи логического устройства универсальной вычислительной машины, которая впоследствии получила название машины Тьюринга.

Первое поколение вычислительных машин, «реализованное в железе», появилось через десять лет. Основным рабочим элементом в них являлись вакуумные лампы – такие же, какие использовались и в старинных телевизорах. Это были доисторические времена компьютерной эры. Большинство из этих вычислительных машин предназначались для проверки того или иного теоретического утверждения и являлись, по существу, экспериментальными установками. Вес и размеры этих «динозавров» были огромны: часто под них строили отдельные здания.

Примерно в это же время качественный прогресс был достигнут и в электронике. Так, в 1947 году Уолтер Браттейн, Уильям Шокли и Джон Бардин изобретают

первый полупроводниковый транзистор (за что в 1956 году удостоиваются Нобелевской премии по физике). Он был создан с помощью точечного контакта на полупроводниковой подложке и имел размеры порядка сантиметра. Вскоре такие транзисторы начинают активно использоваться в электронике в качестве усилителей электрических сигналов или управляемых электрическими сигналами прерывателей и практически повсеместно вытесняют вакуумные лампы. В 1958 году Джек Кирби создает первый полупроводниковый чип (микросхему), состоящий всего из двух транзисторов. Проходит совсем немного времени, и появляются микросхемы, объединяющие на общей подложке уже десятки и сотни транзисторов. Одновременно с прогрессом в создании на основе полупроводниковой электроники процессоров для переработки данных развиваются также и способы их хранения. В качестве таких запоминающих устройств начинают использоваться магнитные сердечники и барабаны, далекие предки современных жестких дисков.

Наряду с бурным развитием материальных элементов вычислительных машин существенно меняются и логические решения при проведении вычислений, а также архитектура используемых программ. Выдающийся математик Джон фон Нейман в 1946 году представляет работу «Предварительное рассмотрение логической конструкции электронно-вычислительного устройства», в которой не только описывает саму электронно-вычислительную машину, но также подробно обсуждает и используемую в ее работе логику, обосновывает использование двоичной системы для представления данных в ЭВМ. С этого момента компьютеры становятся объектом научного исследования, и даже сегодня некоторые ученые продолжают называть компьютер «машиной фон Неймана».

Все эти фундаментальные открытия и изобретения знаменуют начало второго периода компьютерной эры (1955–1964).

На основе интегральных схем создаются компьютеры третьего поколения (1965–1974). Массивные магнитные накопители информации заменяются более миниатюрными и в то же время более емкими полупроводниковыми запоминающими устройствами. Они и сегодня используются в персональных компьютерах в качестве оперативных запоминающих устройств. Достигнутые в последней трети XX века успехи теоретической кибернетики, физики и технологии способствовали быстрому развитию компьютерной техники, ее миниатюризации и резкому удешевлению. Все это сделало компьютер доступным широкой публике. С середины 70-х годов компьютеры становятся важным элементом повседневной жизни. Неслыханный прогресс в технологии позволяет сегодня на той же площади в 3 квадратных сантиметра, которую использовал Кирби, размещать в больших интегральных схемах десятки миллионов транзисторов. Так, современные элементы памяти позволяют хранить содержимое всей коллекции одной из крупнейших библиотек мира – библиотеки Конгресса США (а это 150 миллионов книг и документов) – в одном ноутбуке. Широко известный

закон Мура (эмпирическое наблюдение, сделанное в 1965 году Гордоном Муром) в одной из своих формулировок устанавливает экспоненциальный рост со временем емкости новых элементов памяти и числа транзисторов в процессоре. Его «действие» на протяжении тридцати лет представлено на рисунке 3.

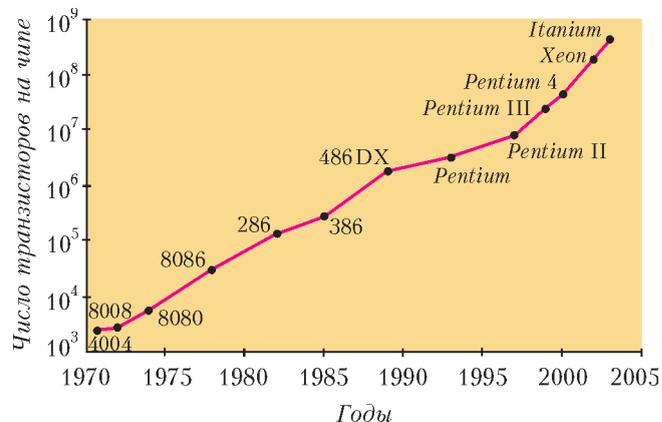


Рис.3. Иллюстрация закона Мура: рост числа транзисторов в микропроцессоре с годами (время удвоения – 2 года)

Больше транзисторов на квадратный сантиметр, более высокая тактовая частота (характеризующая быстродействие компьютера) – эти требования стали навязчивой идеей производителей. В 2004 году интеловский процессор Prescott, выполненный по 90-нанометровой технологии (это означает, в частности, что на одном квадратном сантиметре его площади было расположено несколько миллионов транзисторов), содержал в себе 150 миллионов транзисторов и работал с тактовой частотой 3,4 ГГц. В 2007–2008 году производители уже перешли на 45-нанометровую технологию, а к 2013 году ожидается переход на 25-нанометровую. Тем не менее, этот прямой путь повышения быстродействия и объема памяти компьютеров рано или поздно исчерпывается. Например, одним из очевидных ограничений на пути дальнейшей миниатюризации является конечность скорости распространения электромагнитного сигнала в цепи: ее конкретная величина зависит от специфики технической реализации процессора, однако определено не может превысить скорость света $c = 300000 \text{ км/с}$. Хотя эта величина представляется недостижимо большой, давайте все-таки сделаем простую оценку. Тактовая частота $\nu = 3,4 \text{ ГГц}$ означает, что интервал времени между двумя последовательными операциями оказывается порядка $t = 1/\nu \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ с}$, т.е. элементы процессора, в которых проводятся две последовательные операции, не могут находиться на расстоянии, превышающем $L = ct \approx 10 \text{ см}$. И это, заметьте, даже в идеальном случае, когда сигнал распространяется со скоростью света в вакууме! Таким образом, неизбежным условием увеличения тактовой частоты (а следовательно, и увеличении числа транзисторов в процессоре) является дальнейшая миниатюризация. И инженеры уже давно идут по этому пути.

Однако недалек тот момент, когда миниатюризация вступит в конфликт с фундаментальными физически-

ми свойствами базовых элементов процессора (во всяком случае, сегодняшних). Главным бедствием является перегрев процессора из-за возрастающей плотности выделения джоулева тепла – даже если токи, протекающие в сотнях миллионов транзисторов, и чрезвычайно малы. Другим существенным ограничением на миниатюризацию является рост величины электрического поля в изолирующем оксидном слое между электродами транзистора: в слишком тонкой прослойке может случиться электрический пробой. Третье ограничение накладывает характерным масштабом флуктуации в плотности распределения примесей – а именно, эти флуктуации должны успевать самоусредняться на размере самых малых элементов процессора. Таким образом, чем миниатюрнее процессор, тем более слабые токи должны в нем протекать. Однако уменьшать напряжение совсем до нуля тоже нельзя: начиная с некоторого предела полезные токи (сигналы) оказываются столь малыми, что просто теряются на фоне различного рода шумов, всегда присутствующих в электрических схемах. Поэтому проектировщики новых процессоров вовсе не заинтересованы специально понижать напряжение, однако они вынуждены это делать при дальнейшей миниатюризации.

Таким образом, мы видим, что не за горами то время, когда концепция дальнейшего увеличения быстродействия процессора за счет миниатюризации и роста числа транзисторов в нем будет исчерпана.

XXI век: в поисках новой парадигмы

Ввиду указанных трудностей, возникших на пути прямого увеличения тактовой частоты традиционного процессора, два ведущих производителя Intel и AMD с 2005 года были фактически вынуждены перейти к реализации принципиально новой архитектуры «мозга компьютера» – многоядерному процессору. Сначала это были двухядерные процессоры, а теперь на подходе процессоры с четырьмя и более ядрами. Такие устройства объединяют два и более независимых процессоров, имеющих при этом общую сверхоперативную память и ее контроллер. Такая архитектура позволяет существенно увеличивать быстродействие компьютера без увеличения тактовой частоты и, следовательно, избегать перечисленных выше проблем. Однако не следует думать, что с двумя ядрами быстродействие просто возрастает вдвое. Ситуация оказывается гораздо более сложной: производительность многоядерного процессора существенно зависит от типа решаемой задачи, от программного обеспечения, основанного на новых (использующих преимущества параллелизма) алгоритмах. В некоторых случаях быстродействие действительно возрастает почти вдвое, в других задачах – это не так.

Хотя развитие многоядерных технологий – эффективное инженерное решение, оно остается полумерой, не является качественно новым направлением дальнейшего развития компьютерной техники. Нужно ясно осознавать, что, оставаясь в рамках старой парадигмы, современная технология вплотную приближается к пределам макромира, где становятся неприменимыми

уже сами законы классической физики, явно или неявно используемые при разработке новых процессоров.

Вот почему на протяжении последнего десятилетия ученые пытаются разработать принципиально новые идеи создания вычислительной техники, основанные на иной, по сравнению с Тьюрингом и фон Нейманом, логике и новой элементной базе. Это и развитие новых так называемых квантовых алгоритмов вычисления (квантовый компьютер), и создание новых размером в нанометры приборов (нанопизика, нанотехнология). Ниже мы попытаемся дать читателю представление о некоторых идеях, стоящих за этими словами.

Где лежат границы между макро- и микромирами?

Как уже говорилось, ближайшим технологическим новшеством в компьютерных технологиях ожидается переход на 25-нанометровую технологию. Много это или мало по сравнению с масштабами квантового мира? Для того чтобы дать ответ на этот вопрос, давайте взглянем на рисунок 4, где представлены характерные масштабы нанопизики.

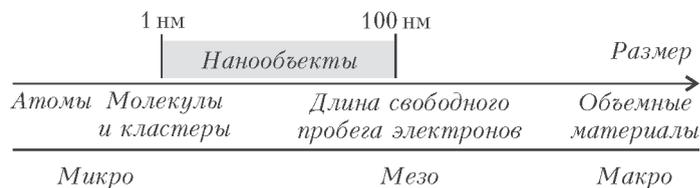


Рис.4. Характерные масштабы нанопизики ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$)

Первой микроскопической длиной, которую следует иметь в виду при миниатюризации элементарных блоков процессора, является длина свободного пробега электронов l_e при их движении внутри металлических слоев. Напомним, что закон Ома основан на предположении о диффузном характере движения, в процессе которого электрон, двигаясь по проводнику, испытывает многократные рассеяния на примесях или других дефектах. При этом становится несущественным конкретное расположение дефектов – транспортные свойства определяются длиной свободного пробега электронов l_e , усредненной по положению примесей. Поэтому металлические мостики между элементарными транзисторами в микросхеме можно считать обычными резисторами, подчиняющимися закону Ома лишь до тех пор, пока их размеры L остаются гораздо большими длины свободного пробега электронов: $L \gg l_e$ (в используемых в микросхемах напыленных металлических пленках l_e оказывается порядка нанометров). В противоположном пределе, $L \ll l_e$, движение электрона имеет баллистический характер, т.е. электроны вместо диффузии с постоянной средней скоростью просто ускоряются электрическим полем на протяжении всего проводника. Понятно, что свойства таких «нанопроводов» будут существенно отличаться от свойств обычных омических элементов электрических цепей.

Следующим важным масштабом, указывающим на

границу между классическим макромиром и квантовым микромиром, служит дебройлевская длина волны электрона $\lambda_F = h/p_0$ (здесь h – постоянная Планка, а p_0 – импульс электрона). Характерными свойствами квантового мира являются квантование и интерференция. Поэтому, как только наименьший из размеров проводника L_{\min} сравнивается с дебройлевской длиной волны ($L_{\min} \sim \lambda_F$), электрон оказывается как бы «запертым» в этом направлении и ведет себя согласно законам квантовой механики. В этом случае можно сказать, что рассматриваемый нанопроводник становится «квантовой ямой», движение электрона в которой квантуется. Величина λ_F существенно зависит от концентрации электронов в металле. Для нормального металла она оказывается порядка нескольких ангстрем, т.е. атомного масштаба. В полупроводниках, однако, λ_F может оказаться намного большей, и квантование движения электронов в таких нанопроводниках может существенно изменить их свойства по сравнению с массивными образцами, выполненными из того же материала. Например, квантование поперечного движения лишь в одном из направлений позволяет создать новый объект – двумерный электронный газ, который служит элементарным строительным блоком для современных электронных приборов.

Еще одним важным масштабом длины, отсутствующим в классическом макромире, является так называемая длина когерентности l_ϕ . Дело в том, что импульс электрона меняет свое направление при рассеянии на примесях, однако сохраняет свою абсолютную величину, а значит, сохраняется и энергия электрона. Такое рассеяние называют упругим. Заметим, что в квантовой механике помимо энергии существует еще одна важная характеристика – фаза волновой функции. Обычно даже после многих актов упругого рассеяния электрон сохраняет свою фазу и, следовательно, может по-прежнему участвовать в процессах квантовой интерференции. Наряду с упругим рассеянием электрона на примесях может происходить также его неупругое рассеяние на колебаниях кристаллической решетки (фононах). В результате изменяется энергия электрона, а с ней и фаза – поэтому электрон больше не может участвовать в процессах интерференции. Аналогично, на фазу волновой функции электрона влияют и столкновения с переворотом спина, переводящие электрон в квантовое состояние, обращенное во времени. Характерная длина, на которой фаза волновой функции электрона из-за рассеяния изменяется на 2π (что означает полную потерю фазовой памяти), называется длиной фазовой когерентности l_ϕ . Если геометрические размеры элемента процессора становятся меньше l_ϕ , в приборе могут проявляться интерференционные явления.

Напомним, наконец, что в классической физике величина заряда электрона рассматривается как бесконечно малая, и поэтому поток заряда в процессе зарядки или разрядки конденсатора предполагается непрерывным. Понятно, что если емкость C единичного элемента процессора настолько мала, что электростатическая энергия одного электрона на нем $e^2/(2C)$

становится сравнимой с другими энергетическими масштабами (тепловая энергия kT или энергия электрона eV в поле приложенного к конденсатору потенциала), то в системе могут проявиться себя новые явления, связанные с так называемым одноэлектронным туннелированием.

Выбор при конструировании элементов наноэлектроники различных соотношений между их геометрическими размерами, в сравнении с перечисленными выше масштабами квантового мира, приводит к появлению многочисленных новых возможностей для реализации принципиально нового, по сравнению с классической микроэлектроникой, квантового транспорта в таких системах. Их качественно новые свойства могут дать совершенно неожиданные возможности для применений. Ниже мы кратко обсудим лишь некоторые из кандидатов на базовые элементы будущей наноэлектроники.

Квантовые провода и квантовые точечные контакты

Рассмотрим, как электрический заряд протекает через так называемый квантовый провод – очень тонкий проводящий канал,

содержащий носители заряда, однако свободный от примесей или иных дефектов кристаллической решетки (рис.5). Как уже говорилось, при $L_{\min} = L_\perp \lesssim \lambda_F$ электрон оказывается запертым в квантовой яме, и его движение в поперечном направлении оказывается квантованным. Это означает, что часть кинетической энергии, соответствующая поперечному движению, может принимать

только определенные дискретные значения E_n , в то время как движение электрона вдоль провода остается свободным. Так как полная энергия электрона E есть величина постоянная, то, чем больше оказывается величина E_n , тем меньшая часть кинетической энергии соответствует продольному движению. Чем меньше энергия, тем меньше соответствующая составляющая импульса и, следовательно, тем больше длина волны. Таким образом, каждому уровню поперечного квантования E_n соответствует своя плоская волна с длиной λ_n – волновая мода.

Электрон, двигаясь в квантовом проводе, скорее напоминает совокупность различных мод в волноводе, чем частицу, диффундирующую сквозь примеси в обычном проводнике (рис.6). Каждая мода дает свой вклад в перенос заряда. Полная же проводимость определяется суммой всех этих вкладов. Вклад единич-

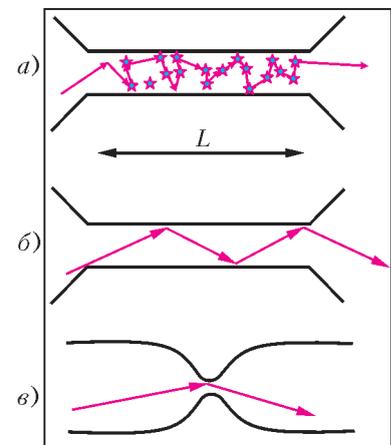


Рис.5. а) Обычный резистор с примесями; б) баллистическое движение в квантовом проводе; в) квантовый точечный контакт

ного квантового канала в перенос заряда можно оценить привычным нам методом размерностей. В идеальном случае его проводимость не должна зависеть от свойств самого квантового провода,

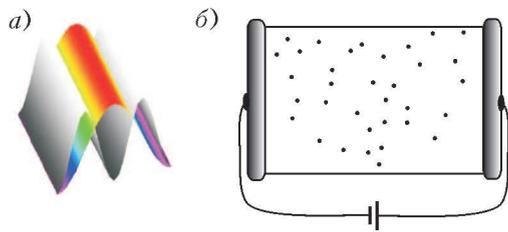


Рис.6. а) Волновые моды в квантовом проводе; б) обычный резистор с примесями

а должна быть просто комбинацией универсальных физических постоянных. Единственная такая комбинация с размерностью сопротивления – это h/e^2 , которой, понятно, в классической физике возникнуть было бы неоткуда. Оказывается, что e^2/h является предельной величиной проводимости, которая в принципе может быть реализована при распространении одной моды в квантовом проводе. На рисунке 7 пред-

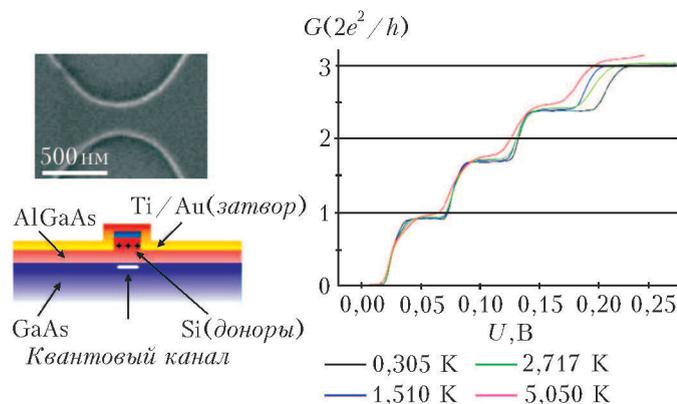


Рис.7. Экспериментальное воплощение квантового точечного контакта и зависимость его проводимости от напряжения на затворе при различных температурах

ставлен реальный квантовый точечный контакт. Его проводимость G при температуре жидкого гелия $T = 1,7$ К вместо того чтобы быть постоянной, в согласии с представлениями классической электронной теории, дискретно изменяется в зависимости от напряжения на затворе, которое контролирует эффективную ширину проводящего канала. Высота каждой такой ступеньки соответствует $2e^2/h$. Квантование проводимости точечного контакта обычно исчезает при $L \gtrsim 2$ нм; оно также размывается и с ростом температуры.

Кулоновская блокада и одноэлектронный транзистор

Рассмотрим свойства так называемой квантовой точки – малой металлической капли (ее размер должен быть порядка 1 нм или даже еще меньше), расположенной на изолирующей подложке (рис.8). Металлические электроды выполняют разные функции. Первый электрод – это затвор, меняющий электростатический

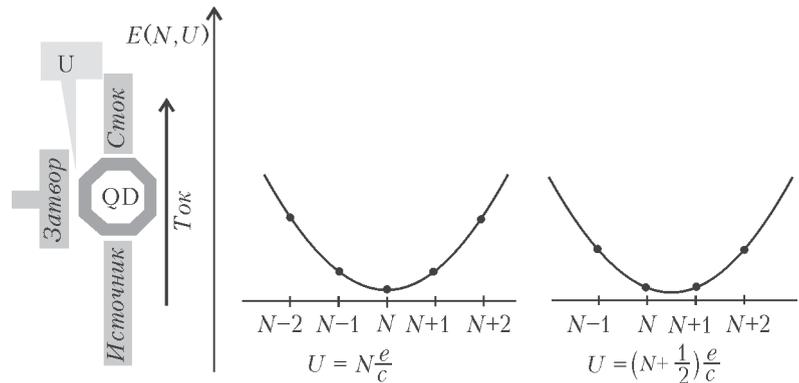


Рис.8. Квантовая точка (QD) – малая металлическая капля, расположенная на изолирующей подложке; вокруг нее – металлические электроды

потенциал квантовой точки. Вторая пара электродов – это источник и сток, которые поставляют и удаляют электроны с квантовой точки.

Предположим, что на квантовой точке присутствует N избыточных электронов и, таким образом, ее полный заряд $Q = Ne$. В отсутствие внешнего электростатического поля этому заряду соответствует электростатическая энергия квантовой точки $Q^2/(2C) = N^2e^2/(2C)$, где C – емкость квантовой точки (обычно очень малая). Эта энергия возникает благодаря отталкиванию распределенных по поверхности точки избыточных зарядов.

Если к затвору приложено конечное напряжение U , то электростатическая энергия квантовой точки складывается из двух слагаемых – найденной выше энергии электростатического отталкивания избыточных зарядов и работы внешнего электрического поля по переносу этих зарядов из бесконечности на квантовую точку:

$$E(N, U) = \frac{N^2e^2}{2C} - UNe.$$

Как видно, $E(N, U)$ является квадратичной функцией от числа электронов N . Формально ее минимум достигается при $N = CU/e$ – там, где производная dE/dN равна нулю.

Тут самое время вспомнить, что N должно быть целым числом. Поэтому в зависимости от напряжения на затворе, возможны различные ситуации (см. рис.8). В первом случае, когда $U = Ne/C$, минимум параболы действительно соответствует реальному состоянию с целым числом электронов N . Однако когда напряжение на затворе достигает величины $U = (N + 1/2)e/C$, минимум полной энергии должен был бы соответствовать полуполному числу электронов, что невозможно. Ближайшие по энергии к этому формальному минимуму реализуемые состояния – это состояния с целыми числами электронов N и $N + 1$. Важно, что оба этих состояния имеют одну и ту же энергию:

$$\begin{aligned} E\left(N = \frac{CU}{e} - \frac{1}{2}, U\right) &= E\left(N = \frac{CU}{e} + \frac{1}{2}, U\right) = \\ &= \frac{CU^2}{2} + \frac{e^2}{8C}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что при значении напряжения на затворе $U = Ne/C$ состояния квантовой точки с N и $N + 1$ электронами разделены энергетической щелью $e^2/(2C)$, и, следовательно, закон сохранения энергии как бы блокирует перенос электронов между источником и стоком – квантовая точка оказывается «запертой». Наоборот, при напряжении $U = (N + 1/2)e/C$ электроны можно переносить на квантовую точку «бесплатно», так как состояниям с N и $N + 1$ электронами соответствует одно и то же значение энергии – квантовая точка оказывается «открытой».

Итак, мы видим, что металлическая капля размером порядка десяти ангстрем может работать как эффективный транзистор – то пропускает ток, то запирается. При низких температурах, $kT \ll e^2/(2C)$, ток, протекающий сквозь такой, «одноэлектронный транзистор», чрезвычайно мал при всех напряжениях на затворе, кроме особых значений $U(N) = (N + 1/2)e/C$. Вблизи этих значений в проводимости должны наблюдаться резкие всплески. Вы можете их увидеть на экспериментально измеренной зависимости дифференциальной

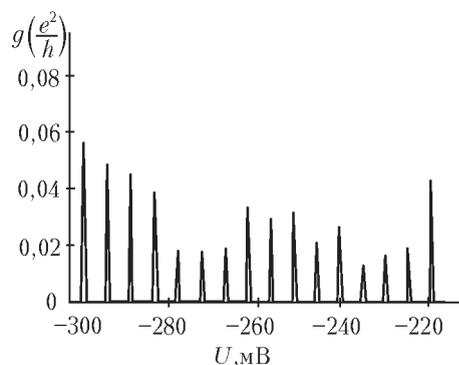


Рис.9. Экспериментально измеренная зависимость дифференциальной проводимости квантовой точки от напряжения на затворе

проводимости квантовой точки g от напряжения на затворе U , представленной на рисунке 9.

Можно надеяться, что одноэлектронные транзисторы позволят в скором будущем создать логические схемы, работающие со слабейшими из возможных токов и, соответственно, в которых энергия будет рассеиваться минимально.

* * *

Мы дали очень короткий и поверхностный обзор всего лишь нескольких вопросов увлекательной области современной науки. По-английски она называется nanoscience (нано-наука), по-русски мы говорим о нанофизике, нанохимии и других нанодисциплинах. Назовем еще несколько других возможных «кандидатов» в строительные блоки наноприборов, исследование свойств которых сегодня находится на переднем крае науки. Среди них графен – монослой графита, в котором электроны образуют двумерный газ с релятивистским спектром (т.е. движутся подобно квантам света); углеродные и неуглеродные нанотрубки; нано-электромеханические системы; гибридные приборы для квантовых вычислений, основанные на сверхпроводящих и нормальных элементах; так называемые спинтронные приборы, действие которых основано на манипуляциях с отдельными электронными и атомными спинами; наносверхпроводники, наномангниты и многие другие. Для полного понимания свойств этих систем необходимо решить целый ряд фундаментальных и прикладных проблем. Главные из них связаны с особенностями квантового транспорта, влияния на него процессов рассеяния на дефектах, фононах, а также электрон-электронного взаимодействия, учета роли контактов и окружающей наноприбор электромагнитной среды. Все эти задачи еще далеки от завершения. Поэтому исследованию каждой из этих систем посвящено много научных работ, формирующих передний край современной науки и техники.

НАША ОБЛОЖКА

Сколько лучей у солнечного блика?

(См. 4-ю с. обложки)

Оптические приборы (кино- и фотоаппараты, телескопы, микроскопы и т.п.) всегда искажают изображаемые ими объекты. Например, на фотографиях ярких ламп, вспышек электросварки или солнечных бликов эти яркие объекты часто окружены симметрично расходящимися лучами. Если на фотографии таких объектов несколько, то число расходящихся лучей и их ориентация одинаковы.

Причиной появления на фото лучей вокруг ярких объектов является дифракция света – способность электромагнитных волн огибать границы препятствий и проникать в область геометрической тени. В оптических приборах дифракция происходит, как правило, на краях диафрагмы, используемой для изменения освещенности и глубины резкости изображений.



Рис.1. Объектив фотоаппарата с ирисовой диафрагмой из семи (слева) или шести (справа) лепестков

Чаще всего диафрагма состоит из нескольких заходящих друг за друга тонких непрозрачных серповидных пластинок-лепестков, образующих отверстие в виде пра-

(Продолжение см. на с. 12)



Аффинная геометрия

А. ЗАСЛАВСКИЙ

ХОТЯ ВСЕ ШКОЛЬНИКИ ПРОХОДЯТ ГЕОМЕТРИЮ, мало кто может четко сформулировать, что именно они при этом изучают. Задавая школьникам этот вопрос, я обычно получал в ответ что-нибудь вроде: «Геометрия изучает геометрические свойства фигур». При этом на следующий вопрос: «А какие именно свойства фигур являются геометрическими?» – ответа получить уже не удавалось.

На самом деле, объектом изучения традиционной школьной геометрии являются те свойства фигур, которые не меняются при преобразованиях подобия. Например, два правильных треугольника, один из которых нарисован мелом на доске, а другой карандашом в тетради, с точки зрения геометрии одинаковы. Однако часто интерес представляют более глубокие

свойства (например, параллельными), в результате чего на стене возникает изображение этого чертежа. Если плоскости стекла и стены параллельны, изображение в точности повторяет чертеж, но в противном случае оно может подвергаться значительным искажениям. Например, равные отрезки могут перейти в неравные, не сохраняются величины углов и т.д. Однако нетрудно видеть, что следующие свойства чертежа сохраняются и на изображении.

1. Любой прямой чертежа соответствует прямая на изображении, причем параллельным прямым соответствуют параллельные.

2. Сохраняются отношения длин параллельных отрезков.

3. Отношение площади любой фигуры к площади ее образа постоянно для всех фигур.

Отметим еще одно важное свойство параллельной проекции.

Утверждение 1. Любой треугольник можно параллельной проекцией перевести в правильный.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC , лежащий в плоскости π . Возьмем плоскость π' , пересекающую π по прямой AB , и расположенный в ней правильный треугольник ABC' . Очевидно, что проекция π на π' параллельно прямой CC' – искомая.

Упражнение. Докажите, что любой треугольник можно перевести в любой другой композицией (последовательным применением) нескольких параллельных проекций.

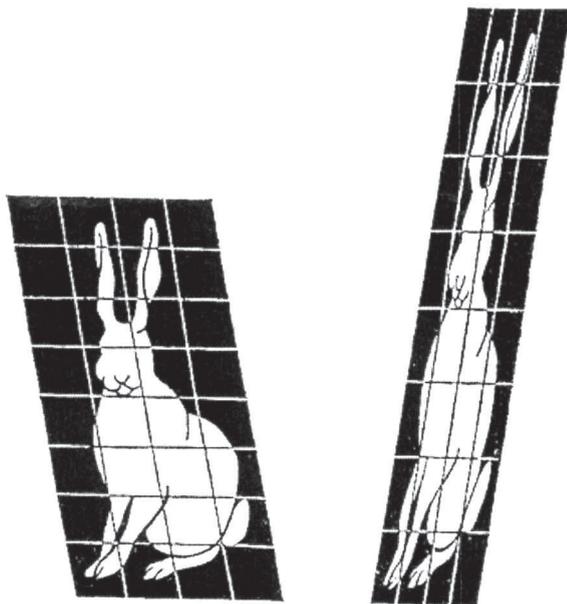
Указание. Покажите, что композицией двух проекций можно перевести один правильный треугольник в другой.

Из утверждения 1 вытекает, что любое свойство треугольника, которое относится только к отношениям длин параллельных отрезков или площадей, достаточно доказать для треугольника специального вида, например, правильного. Аналогичное утверждение верно для параллелограммов, так как можно разрезать каждый параллелограмм диагональю на два равных треугольника и спроецировать «половину» одного параллелограмма в «половину» другого. В частности, совершенно очевидной становится теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делят друг друга в отношении $2 : 1$ – поскольку в ней говорится лишь об отношениях отрезков, лежащих на одной прямой, а эти отношения при параллельной проекции не меняются, достаточно доказать ее для правильного треугольника.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Решение. Пусть боковые стороны трапеции AB и CD



свойства, которые сохраняются не только при подобиях, но и при других преобразованиях. В первую очередь это относится к так называемым аффинным преобразованиям, с которыми приходится иметь дело даже в обычной школьной программе. Например, делая чертеж куба, мы не пытаемся, да и не смогли бы изобразить все его грани квадратами, но рисуем их в виде параллелограммов, т.е. существенным свойством для нас является не равенство или перпендикулярность ребер куба, а их параллельность.

Параллельная проекция и ее свойства

Предположим, что некоторый чертеж, сделанный на стекле, освещается солнцем (солнечные лучи считают-

пересекаются в точке E . Спроецировав треугольник AED в равнобедренный, переведем данную трапецию также в равнобедренную, для которой четыре указанных точки лежат на оси симметрии.

В некоторых учебниках утверждение этой задачи называется теоремой о трапеции. Заметим также, что, решая задачу, мы фактически доказали еще одно свойство трапеции: отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой пополам.

Задача 2. На сторонах параллелограмма $ABCD$ площади S взяты точки A', B', C', D' , такие что $BC' = \frac{AB}{3}$, $CD' = \frac{BC}{3}$, $DA' = \frac{CD}{3}$, $AB' = \frac{DA}{3}$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AA', BB', CC', DD' .

Решение. Достаточно решить задачу для квадрата со стороной 1. В этом случае указанный четырехугольник тоже будет квадратом. При этом длина отрезка BB' равна $\frac{\sqrt{10}}{3}$, а отношение отрезков, на которые он делится прямыми AA' и CC' , равно 1 : 6 : 3. Поэтому сторона маленького квадрата равна $\frac{\sqrt{10}}{5}$, а его площадь $\frac{2}{5}$ (рис.1).

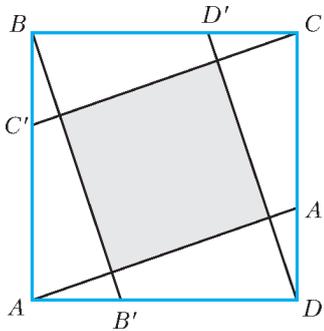


Рис. 1

Задача 3. На основании AB треугольника ABC отложены равные отрезки $AA' = BB' = a$ и через точки A' и B' проведены прямые, параллельные сторонам BC и AC соответственно. Какую линию описывает точка пересечения этих прямых при изменении величины a ?

Задача 4. Вершины треугольника $A'B'C'$ лежат на сторонах треугольника ABC и делят их в одном и том же отношении. Докажите, что центры тяжести, т.е. точки пересечения медиан, обоих треугольников совпадают.

Задача 5. Через каждую вершину треугольника ABC проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что три прямые, соединяющие противоположные вершины полученного шестиугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. В правильном треугольнике эти три прямые совпадают с его осями симметрии, следовательно, в общем случае они совпадут с медианами данного треугольника.

Отметим еще несколько свойств описанной конфигурации. Занумеруем прямые, соединяющие вершины треугольника с точками на противоположных сторонах, цифрами 1–6 и обозначим точку пересечения прямых i и j как P_{ij} . Тогда треугольники $P_{14}P_{25}P_{36}$ и $P_{16}P_{23}P_{45}$ гомотетичны данному относительно его центра тяжести, стороны шестиугольника $P_{13}P_{46}P_{15}P_{24}P_{35}P_{26}$ параллельны сторонам данного тре-

угольника, а прямые, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в его центре тяжести (рис.2). Доказательства этих свойств полностью аналогичны решению задачи.

Задача 6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B' так, что $\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{1}{3}$. Докажите, что площадь треугольника, образованного прямыми AA', BB' и CC' , равна $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC .

Решение. Пусть ABC – правильный треугольник со стороной 1. Тогда $AA' = BB' = CC' = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Обозначим точки пересечения прямых AA' и BB' , BB' и CC' , CC' и AA' через C'', A'', B'' . Треугольники $A'C''B$ и $B'CB$ подобны с коэффициентом $k = \frac{A'B}{B'B} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Следовательно, $BC'' = \frac{1}{\sqrt{7}}$, $B'A'' = C''A' = \frac{1}{3\sqrt{7}}$, $A''C'' = C''B'' = B''A'' = \frac{1}{\sqrt{7}}$, т.е. площадь треугольника $A''B''C''$ в 7 раз меньше площади ABC (рис.3). Это отношение остается верным для любого треугольника.

Задача 7. Докажите, что, пользуясь только линейкой, нельзя построить правильный треугольник.

Подробнее о свойствах параллельной проекции можно прочесть в статье «Параллельная проекция» (см. «Квант» № 4 за 2001 г.).

Определение и основные свойства аффинных преобразований

Свойство 1 параллельной проекции принимается за основу следующего определения.

Определение и основные свойства аффинных преобразований

Определение. Аффинным (от латинского affinis – родственный) называется преобразование (т.е. взаимно однозначное отображение) плоскости, переводящее каждую прямую в прямую.

Из определения сразу следует, что параллельные прямые при аффинном преобразовании переходят в параллельные. Действительно, в противном случае точка пересечения образов прямых не соответствовала бы никакая точка плоскости.

Аффинная геометрия изучает свойства геометрических фигур, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях. В этой статье мы опишем эти свойства и

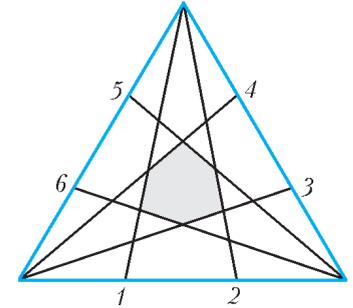


Рис. 2

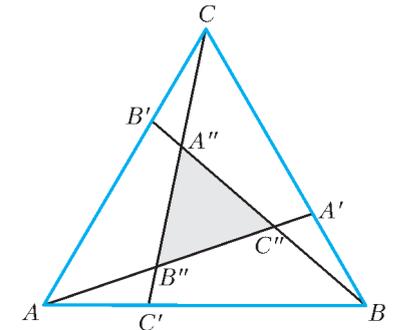


Рис. 3

покажем, как аффинные преобразования помогают при решении задач.

Из определения сразу вытекает, что композиция (последовательное применение) двух аффинных преобразований также будет аффинным преобразованием и преобразование, обратное аффинному, тоже аффинное. Совокупность преобразований, удовлетворяющая этим свойствам, называется **группой**. Очевидно, что группа аффинных преобразований включает, в частности, все подобия. Однако подобиями эта группа не исчерпывается, что показывает следующая теорема.

Теорема 1. Для любых данных треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A' , B в B' , C в C' .

Доказательство. Существование искомого преобразования фактически доказано утверждением 1. Докажем единственность. На прямой AC отметим все точки, расстояние от которых до точки C кратно длине отрезка AC , и проведем через них прямые, параллельные BC . Аналогично, на прямой BC отметим точки, расстояние от которых до C кратно BC , и проведем через них прямые, параллельные AC . В результате вся плоскость разобьется на параллелограммы со сторонами, равными AC и BC , и углом, равным углу ACB . Докажем, что вершины этих параллелограммов переходят в вершины параллелограммов, построенных аналогичным образом по треугольнику $A'B'C'$. Действительно, четвертая вершина D параллелограмма с вершинами A, B, C перейдет в четвертую вершину D' параллелограмма с вершинами A', B', C' , так как прямые AD и BD , параллельные BC и AC , перейдут в прямые $A'D'$ и $B'D'$, параллельные $B'C'$ и $A'D'$. Прямая, проходящая через D параллельно AB , перейдет в прямую, проходящую через D' параллельно $A'B'$, а ее точки пересечения с AC и BC , являющиеся вершинами параллелограммов первой решетки, – в аналогичные вершины параллелограммов второй решетки. Повторяя это рассуждение, построим образы всех вершин параллелограммов. Очевидно, что центры всех параллелограммов первой решетки переходят в центры соответствующих параллелограммов второй решетки. Проведя через них прямые, параллельные сторонам параллелограммов, получим решетки из параллелограммов вдвое меньшего размера, которые также соответствуют друг другу (рис.4).

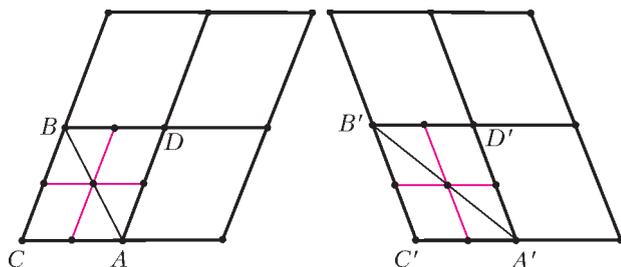


Рис. 4

Этот процесс уменьшения сторон параллелограммов можно повторять неограниченно. Рассмотрим теперь произвольную точку M плоскости. Она определяет последовательность вложенных параллелограммов пер-

вой решетки с неограниченно уменьшающимися сторонами, каждый из которых содержит точку M . Этой последовательности соответствует аналогичная последовательность параллелограммов второй решетки, которая определяет единственную принадлежащую всем параллелограммам последовательности точку M' .

Следовательно, образ любой точки определяется однозначно. Теорема доказана.

Примечание. На самом деле, проведенное рассуждение является неполным, так как в нем предполагается, что при аффинном преобразовании близкие точки остаются близкими, т.е. аффинное преобразование непрерывно. Непрерывность аффинного преобразования можно вывести из его определения, но здесь мы этого делать не будем.

Фактически, при решении задач предыдущего раздела мы пользовались утверждением существования из теоремы 1. В следующем разделе мы, используя утверждение единственности, покажем, как устроено произвольное аффинное преобразование, и с помощью этого решим еще несколько задач.

Вопрос для самопроверки: при каких условиях будут аффинно эквивалентны

- два параллелограмма;
- две трапеции;
- два четырехугольника?

Примеры аффинных преобразований

Выясним теперь, как устроено произвольное аффинное преобразование. Прежде всего приведем пример аффинного преобразования, не являющегося подобием.

Определение. Сжатием относительно прямой l с коэффициентом k называется преобразование, переводящее произвольную точку M в такую точку M' , что точки M и M' лежат по одну сторону от l , прямая MM' перпендикулярна l и $OM' = kOM$, где O – точка пересечения MM' и l .

Следует отметить, что при $k > 1$ сжатие относительно прямой не «сжимает», а наоборот «растягивает» плоскость.

Утверждение 2. Сжатие относительно прямой является аффинным преобразованием.

Доказательство. Очевидно, что сжатие относительно l сохраняет параллельность и перпендикулярность прямых прямой l . Поэтому рассмотрим прямую AB , наклонную к l и пересекающую ее в точке O . Опустим перпендикуляры AM и BN на l , построим образ A' точки A при сжатии и найдем точку B' пересечения прямых OA' и BN . Из подобия треугольников OAM и $OB'N$, $OA'M$ и $OB'N$ вытекает, что B' – образ точки B , т.е. сжатие переводит прямую в прямую. Отношение тангенсов углов AOM и $A'OM$ не зависит от положения точки O и равно k , следовательно, параллельные прямые переходят в параллельные (рис.5).

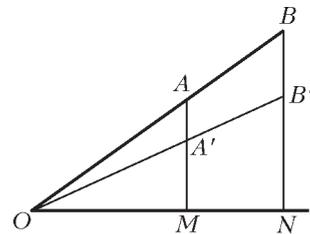


Рис. 5

Сжатием относительно прямой можно считать применяемую в черчении ортогональную проекцию. Если две не перпендикулярные плоскости π и π' пересекаются по прямой l , то отношение расстояний до l от любой точки X плоскости π и ее проекции X' на π' постоянно. Кроме того, проекции X и X' на l , очевидно, совпадают. Поэтому, если считать π и π' двумя экземплярами одной плоскости, то ортогональная проекция будет сжатием относительно l с коэффициентом, равным косинусу угла между плоскостями. Оказывается, однако, что сжатием относительно прямой в определенном смысле является любое аффинное преобразование. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 2. Любое аффинное преобразование можно представить как композицию сжатия относительно прямой и подобия.

Доказательство. Возьмем на плоскости произвольную квадратную решетку. Данное аффинное преобразование переводит ее в решетку из параллелограммов. Если эти параллелограммы являются прямоугольниками, утверждение теоремы очевидно. В противном случае рассмотрим некоторый квадрат решетки $OACB$. Пусть в соответствующем параллелограмме $O'A'C'B'$ угол $A'O'B'$ острый. Будем поворачивать квадратную решетку вокруг точки O . Параллелограмм $O'A'C'B'$ при этом будет поворачиваться вокруг O' , меняя свою форму. Когда квадратная решетка повернется на прямой угол, точка A' перейдет в B' , а B' в вершину параллелограмма, смежного с $O'A'C'B'$, при этом угол $A'O'B'$ станет тупым (рис.6). Поэтому существует

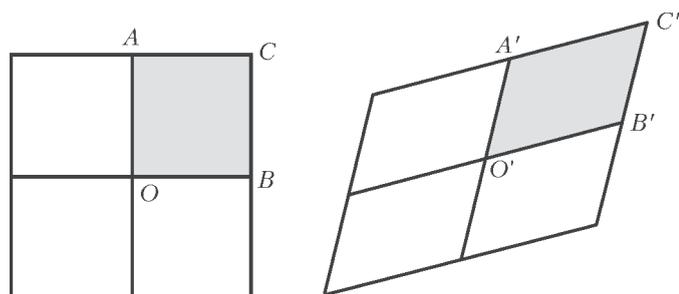


Рис. 6

промежуточное значение угла поворота, при котором этот угол прямой. Соответствующая этому углу квадратная решетка переходит в прямоугольную, что и доказывает теорему.

Отметим, что сжатие относительно прямой легко реализовать с помощью рассмотренного в начале статьи параллельного проецирования. Действительно, если направление проецирования перпендикулярно линии пересечения плоскостей стекла и стены, результатом проецирования будет сжатие относительно этой линии. Изменяя угол между плоскостями и направление проецирования, можно добиться, чтобы коэффициент сжатия принял любое заданное значение. Таким образом, параллельное проецирование можно считать универсальным примером аффинного преобразования.

Следующая задача легко решается применением теоремы 2.

Задача 8. Докажите, что аффинное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, является подобием.

Решение. Опишем вокруг данной окружности квадрат и повернем его так, чтобы данное преобразование переводило его в прямоугольник. Окружность, являющаяся образом данной, будет вписана в этот прямоугольник. Но в прямоугольник, отличный от квадрата, вписать окружность нельзя. Поэтому данное преобразование переводит квадратную решетку в квадратную и, значит, является подобием.

Приведем еще два интересных примера аффинных преобразований. Выберем на плоскости систему координат и рассмотрим преобразование, переводящее точку с координатами (x, y) в точку (x', y') , где $x' = kx$, $y' = y/k$, $k > 0$. Это преобразование является аффинным, так как его можно представить в виде композиции двух сжатий к осям координат. Кроме того, очевидно, что $xy = x'y'$. Это означает, что любая гипербола с уравнением $xy = c$ переходит в себя, причем, выбирая значение параметра k , можно перевести любую точку гиперболы в любую другую ее точку (рис.7). Таким образом, под действием данного преобразования каждая такая гипербола как бы скользит сама по себе подобно тому, как скользят сами по себе под действием поворота вокруг начала координат окружности с уравнениями $x^2 + y^2 = R^2$. Поэтому такое преобразование называется *гиперболическим поворотом*.

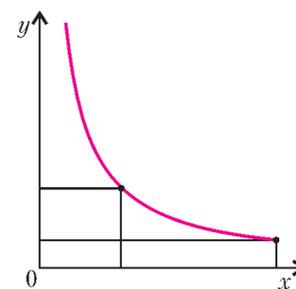


Рис. 7

Задача 9. Касательная к гиперболе пересекает оси координат в точках X, Y . Докажите, что площадь треугольника OXY не зависит от точки касания.

Указание. Докажите, что гиперболический поворот сохраняет площади.

Задача 10. Прямая пересекает гиперболу в точках A, B , а оси координат в точках X и Y . Докажите, что $AХ = BY$.

Решение. Гиперболическим поворотом переведем точки A, B в точки A', B' , симметричные относительно биссектрисы угла XOY . Затем симметрией относительно биссектрисы поменяем точки A', B' местами и обратным гиперболическим поворотом переведем их в точки B, A . В результате отрезки $AХ$ и BY перейдут друг в друга, а их отношение сохранится, что возможно только при $AХ = BY$.

Рассмотрев вырожденный случай этой задачи, когда прямая касается гиперболы, получим, что точка касания делит отрезок $XУ$ пополам.

Рассмотрим теперь преобразование, переводящее точку (x, y) в точку (x', y') , где $x' = x + v/2$, $y' = vx + y + v^2/4$. Непосредственно проверяется, что это преобразование переводит прямые в прямые, причем $y' - x'^2 = y - x^2$. Следовательно, данное преобразование сохраняет параболы с уравнениями $y = x^2 + c$.

Соответственно, оно называется *параболическим поворотом*.

Задача 11. Найдите геометрическое место середин параллельных хорд параболы.

Решение. Выбрав соответствующий параметр параболического поворота, можно перевести данные две точки параболы в точки, симметричные относительно ее оси. Следовательно, данное семейство параллельных хорд можно перевести в семейство хорд, перпендикулярных оси параболы. Геометрическим местом середин этих хорд является ось параболы. Значит, геометрическим местом середин хорд данного семейства является луч с вершиной на параболе. Причем этот луч будет параллелен оси, так как в противном случае он пересекал бы параболу еще в одной точке.

Аналогично доказывается, что середины параллельных хорд гиперболы лежат на одной прямой, проходящей через ее центр.

Заключение

Аффинная геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях, т.е. при параллельном проектировании. Однако иногда инте-

рес могут представлять какие-то другие свойства фигур. Например, если заменить параллельное проектирование центральным, возникает так называемая проективная геометрия, прочесть о которой можно, скажем, в статье «Некоторые факты проективной геометрии» (см. «Квант» №1 за 1996 г.). Таким образом, ключевым понятием для геометрии является совокупность преобразований, которая и определяет изучаемые свойства фигур (нетрудно видеть, что для получения содержательных результатов эта совокупность должна быть группой). При этом, чем больше группа рассматриваемых преобразований, тем меньше остается существенных с точки зрения соответствующей геометрии свойств. Такой подход к геометрии был впервые сформулирован в 1872 году немецким математиком Феликсом Клейном, работавшим тогда в городе Эрлангене, и получил название «Эрлангенской программы». Именно после этого стала активно развиваться и рассматриваться как отдельное направление аффинная геометрия.

Автор благодарит В.Протасова и С.Маркелова за полезные замечания, позволившие существенно улучшить первоначальную версию статьи.

Сколько лучей у солнечного блика?

(Начало см. на с. 7)

вильного многоугольника (рис.1). Вращая диафрагменное кольцо объектива и связанные с ним рычаги, можно изменять размер этого отверстия. Такую диафрагму называют ирисовой, так как ее действие напоминает то, как радужная оболочка (iris по-английски) глаза изменяет входящий световой поток.

Дифракция света происходит на каждом из прямолинейных краев ирисовой диафрагмы. Если источник света достаточно удален от диафрагмы, то падающую на нее световую волну можно считать плоской, т.е. поверхности равной фазы (волновые поверхности) этой волны представляют собой плоскости. Дифракция такой волны на краю непрозрачного экрана приводит к возникновению лучей света, перпендикулярных границе экрана и направленных за него и в сторону от него. Возникшие в результате дифракции лучи, падая на фотопленку или на светочувствитель-



Рис.2. Знаменитый Биг Бен ночью

ную матрицу цифрового фотоаппарата, оказываются рядом с изображением яркого объекта и «пририсовывают» ему две яркие линии, перпендикулярные одному из краев диафрагмы.

Легко догадаться, что если у ирисовой диафрагмы нечетное число лепестков N , то



Рис.3. Солнечный блик на стекле автомобиля



Рис.4. Яркая вспышка электросварки

число лучей на изображении яркого объекта будет равно $2N$ (рис.2). При четном числе лепестков лучи, возникшие от дифракции на противоположных и параллельных краях диафрагмы, будут накладываться друг на друга, давая в результате только N лучей (рис.3 и 4).

К. Богданов



«Электроны, фононы, магноны»

(неопубликованное предисловие ко второму изданию книги)

М.КАГАНОВ

ПЕРЕЧИТЫВАЯ КНИГУ ¹, НАПИСАННУЮ МНОЮ приблизительно 30 лет назад, я испытывал несколько странное чувство. С одной стороны, книгу, несомненно, написал я. Узнаю свои мысли, свое отношение к тому или другому явлению, открытию. Так безошибочно узнаешь себя, глядя на старую фотографию, хотя в зеркале видишь совсем другое лицо. С другой стороны, благодаря прошедшим годам возникает некая отчужденность, позволяющая оценивать прочитанное объективно или почти объективно. Это разрешает мне сказать: «Электроны, фононы, магноны» – хорошая книга, она мне понравилась при перечитывании. Если бы это было не так, не дал бы согласия на ее переиздание.

Конечно, в квантовой теории твердого тела, популярному изложению которой посвящена книга, за прошедшие годы произошло много событий. Но мне кажется, происходившее правильно назвать *развитием*. Основы квантовой теории твердых тел не были пересмотрены. Без знания того, о чем говорится в книге, нельзя понять, в частности, и тех изменений, которые произошли за годы, прошедшие между первым и вторым изданиями.

Квантовые свойства разных твердых тел все более активно используются в технике. Писалась бы книга теперь, с большой вероятностью встречались бы в ней упоминания наноструктур, высокотемпературных сверхпроводников и многих интереснейших открытий, сделанных сравнительно недавно. Признаюсь, я задумывался, не стоит ли сделать вставки или подстрочные примечания с подобными упоминаниями, и пришел к выводу, что делать этого не надо. Сколько-нибудь серьезно рассказать о том, чего не знали в 70-е годы прошлого века, в рамках этой книги невозможно, а знаний, которые можно почерпнуть, прочитав «Электроны, фононы, магноны», будет достаточно для того, чтобы воспользоваться информацией, заполняющей публикации в научно-популярных журналах, в Интернете и в других доступных источниках.

¹ М.И.Каганов. «Электроны, фононы, магноны». Издание 2-е. (М.: Издательство ЛКИ, 2008.) Первое издание книги вышло в Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука» в 1979 году. По неизвестным автору причинам специально написанное для второго издания предисловие в книгу не вошло.

Вот на что стоит обратить внимание. В книге нередко упоминается время, прошедшее после какого-либо научного события, или говорится в «настоящее время», «теперь» и т.п. Надо помнить, что от момента написания книги до того, как она попала к вам, прошло много лет. Надо в уме произвести сложение, либо мысленно перенестись лет на 30 назад. Такие «выкладки», читая, делал и я.

* * *

За прошедшие годы изменилась не только физика твердого тела. Углубилось и изменилось представление о Мире, о его структурных единицах – элементарных частицах, претерпели изменение даже представления о структуре Вселенной, о ее рождении и судьбе.

Вот один пример из далекой от физики твердого тела области – из физики элементарных частиц: в книге ни разу не упоминаются кварки. В те годы, когда книга писалась, кварки были модной темой; много спорили, реальны ли кварки или это только удобный способ описания многих частиц и, главное, обнаруженных нестандартных свойств симметрии. Давно завершились споры. Кварки всеми признаны. Кварки – элементарные частицы, из которых состоят нуклоны и некоторые из мезонов. При этом возникло понимание того, что кварки не существуют как свободные частицы в вакууме, вне барионов. Несомненно, это событие огромного значения. Оно, возможно, изменит наше мировоззрение. Если дальнейшее дробление частиц невозможно и именно кварки – истинно элементарные частицы, то человечество, наконец, обнаружило то, из чего состоит все. И все же, повторю, кварки в книге не встречаются, хотя нуклоны (и протоны, и нейтроны) в книге упоминаются многократно. Но что нужно знать об этих частицах физике твердого тела? Их массу, заряд и магнитный момент. Пожалуй, все. Их внутренняя структура, существенная не только при изучении взаимодействий между частицами, но и для понимания структуры мироздания, непосредственно в физике твердого тела роли не играет (возможно, пока).

Одна из черт окружающего нас Мира и, как следствие, науки о Мире – своеобразная иерархичность. О ней упомянуто в книге. Строительной механике от



физики твердого тела необходимо получить справочные сведения о прочностных и упругих характеристиках строительных материалов в разных условиях. Электротехнике – электрические характеристики используемых проводников и изоляторов. При исследовании конденсированных тел физики (теоретики и экспериментаторы) пользуются результатами атомной физики и не могут без них обойтись. Недостаточно знать, что тело построено из атомов или молекул. Для понимания природы свойств макроскопических тел и явлений, происходящих в них, необходимо знать устройство тех «кирпичиков», из которых они построены. Но о частицах – строительном материале молекул и атомов, об электронах, протонах и нейтронах – достаточно знать то, что можно почерпнуть из любого справочника. Более того, я думаю, что даже для объяснения феномена жизни этого знания вполне достаточно. Понятно, это не означает, что уже сейчас мы можем ответить на все вопросы, которые ставит молекулярная биология. Предстоят многие годы интенсивных исследований. И, главное, нужно ждать появления новых идей. За последние десятилетия у молекулярной биологии, которая впитала в себя многое из физики твердого тела, есть блестящие достижения. Физических знаний о структуре молекул, из которых построены все живые организмы, пока совершенно достаточно. Думаю, хотя и не все имеют такое мнение, что какого-то специального углубления в физику элементарных частиц для развития молекулярной биологии не потребуется никогда. По-прежнему молекулярным биологам, как и физикам, занятым твердыми телами, достаточно будет знать об электронах, протонах и нейтронах то, что прекрасно известно сегодня.

* * *

Читая книгу, не мог не вспоминать. Во введении к первому изданию книги я не без удовольствия вспомнил, как зародилась мысль написать «Электроны, фононы, магноны». А теперь я с неменьшим удовольствием вспоминаю, как книга писалась.

Большая часть была написана в Пущино, где я проводил отпуск, который совпал с перерывом в чтении лекций в МГУ. В Пущино – уютном городе на берегу Оки – была удобная гостиница. Но главное, в Пущино жил друг моей юности Иосиф Захарович Гольденберг, или Графчик, как называют его все друзья. Обаятельный человек, поэт и прекрасный педагог, он работал в библиотеке Института белка АН СССР и имел возможность помочь в бронировании номера в гостинице. В те годы это было ох, как не просто! Друзья пользовались помощью Графчика. Удобство проживания сопровождалось изоляцией от московской суеты, роскошью человеческого общения и прогулками по берегу Оки, по березовой роще... В Пущино я написал многое из того, что вошло в книгу, и придумал нестандартное расположение материала, за которое меня попрекали, но, и перечитывая, я не разочаровался в своем замысле. Может быть, он возник из разговоров с Иосифом Захаровичем о романе

Хулио Кортасара «Игра в классики», но, откровенно говоря, я этого уже не помню.

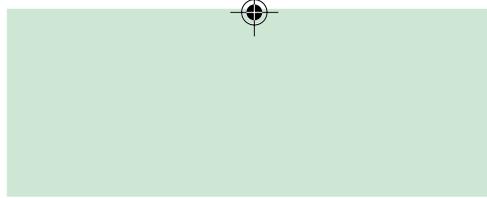
И еще одно воспоминание. Очень важное. В том же 1979 году, когда вышла книга «Электроны, фононы, магноны», в журнале «Успехи физических наук» был опубликован обзор «Электронная теория металлов и геометрия» – последняя совместная публикация с моим учителем академиком Ильей Михайловичем Лифшицем. Он ушел из жизни в 1982 году безвременно рано – ему было 65 лет. Многие годы я работал под руководством Ильи Михайловича. Невозможно переоценить, что дало мне его руководство. Думая о написанных мною и в соавторстве с И.М.Лифшицем научно-популярных статьях и книгах, я чувствую, сколь важна была роль Ильи Михайловича в формировании моего физического мировоззрения. Перечитывая некоторые абзацы, я слышал голос своего учителя. А воспроизведенный здесь рисунок (4) из книги, важный для понимания места физики твердого тела среди наук, я впервые увидел нарисованным на доске



Каждая из механик имеет свою область применения, которую удобно изобразить в виде диаграммы. На этой диаграмме по вертикали откладывается отношение скорости частицы v к скорости света в вакууме c . По горизонтали откладывается отношение постоянной Планка \hbar к удвоенному действию частицы S . Действие – некоторая физическая величина, имеющая размерность постоянной Планка. Оценить действие можно, перемножив характерный путь, проходимый частицей при заданном движении, и характерный импульс частицы. Пунктирные линии на рисунке – условные границы между механиками

Ильей Михайловичем при чтении им научно-популярной лекции в Харьковском лектории. Потом рисунок появился в нашей статье, которая так и называлась «Физика твердого тела на карте науки». Опубликована она была в сборнике «Будущее науки». Серию сборников под таким названием выпускало общество «Знание».

Вспоминать можно до бесконечности. И, казалось бы, есть вполне законный повод – переиздание книги, вышедшей из печати много лет назад. Но, предаваясь воспоминаниям, не следует все же забывать, что написанное в ней не устарело. И сегодня книга «Электроны, фононы, магноны» может быть весьма полезной для понимания природы процессов и явлений, происходящих в твердых телах.



Метод интерпретаций

А.АНДЖАНС, Д.БОНКА

1. Введение

На занятии математического кружка однажды обсуждалась следующая задача.

«Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – положительные числа. Может ли дробь

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad (1)$$

быть больше одновременно всех дробей $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}$?»

Вот как несколько детей решали эту задачу. (Впрочем, все они получили ответ «нет, не может».)

Юрис, больше всех ценивший силу алгебраических преобразований, решал задачу «от противного»: предположив, что при $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место

$$\frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n} > \frac{b_i}{a_i},$$

он сложил все неравенства $a_i(b_1 + \dots + b_n) > b_i(a_1 + \dots + a_n)$ и получил явное противоречие: $\sum a_i \cdot \sum b_i > \sum b_i \cdot \sum a_i$.

Гунарс, имеющий склонность к последовательным конструкциям, решил задачу методом математической индукции (он рассматривал базис индукции при $n = 1$ и $n = 2$). Это вы, наверно, можете сделать и без приведения здесь его решения. Кстати, можно пользоваться как стандартным индуктивным переходом от n к $n + 1$, так и индукцией «туда и обратно».

Петерис, имеющий привычку использовать комбинаторные рассуждения, обратился к методу экстремального элемента (см., например, [1]). Предположим, что k – наибольшее из отношений $\frac{b_i}{a_i}, i = 1, 2, \dots, n$. Это значит, что $b_i \leq a_i \cdot k, i = 1, 2, \dots, n$. Сложив эти неравенства, получаем $\sum b_i \leq k \cdot \sum a_i$, или $\frac{\sum b_i}{\sum a_i} \leq k = \frac{b_j}{a_j}$, где j – тот индекс, для которого достигается максимум k . Это показывает, что ситуация, описанная в вопросе задачи, невозможна.

Андрис, увлеченный геометрией, представил следующий рисунок (рис.1).

Он с явной гордостью заявил, что $MO = \sum a_i$, $NO = \sum b_i$, $\frac{NO}{MO} = \text{tg} \angle NMO$ и что, очевидно,

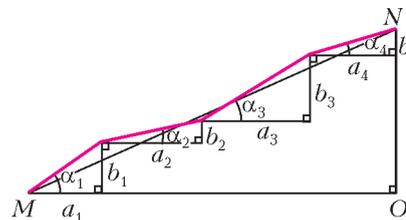


Рис. 1

$\text{tg} \angle NMO$ не может быть больше всех тангенсов $\text{tg} \alpha_1, \text{tg} \alpha_2, \dots, \text{tg} \alpha_n$ (в чем авторы с ним вполне согласны). На вопрос приверженца строгой логики Карлиса «а все же почему этого не может быть, и как это доказать?» Андрис по образу древних греков написал под своим рисунком слово «СМОТРИ!» и был награжден аплодисментами.

Однако на занятии присутствовали также член химического кружка Имантс и любитель физики Дзинтарс. Вот что они сказали.

Дзинтарс: «пусть автомашина прошла путь b_i за время $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Тогда дробь (1) – средняя скорость машины, а $\frac{b_i}{a_i}$ – скорости на отдельных участках. Ясно ведь, что средняя скорость не может быть выше, чем скорости на всех отдельных этапах!»

Имантс: «пусть имеется n пробирок с растворами соли. Количества растворов в них a_i , количества соли – $b_i, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\frac{b_i}{a_i}$ – концентрация соли в отдельных пробирках, а дробь (1) – концентрация общей смеси. Ясно, что концентрация всей смеси не может быть выше всех отдельных концентраций – а то какой могучий метод добывания соли (или в аналогичной ситуации даже золота) мы бы имели!»

Это рассуждение было принято даже более громкими аплодисментами, чем выступление Андриса.

2. Что мы видели на самом деле?

Во-первых, мы убедились, что задачу можно решить многими разными способами. (Кстати, мы это знали и раньше.) Но способы эти были весьма разными. Три алгебраических решения – весьма традиционные. Но геометрическое, химическое и физическое решение содержали особый элемент – «перевод задачи на другой язык» и решение уже переведенной вместо исходной.

Схематически это можно изобразить так (рис.2).

Затемненная область – условное изображение затруднений, отделявших нас от цели вначале, которую

Агнис Анджанс, Латвийский университет, agnis@lanet.lv
Даце Бонка, Латвийский университет, dace.bonka@lu.lv

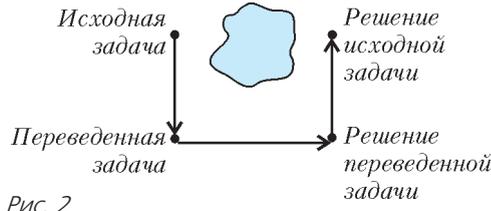


Рис. 2

мы указанным способом удачно обошли и которые преодолеть впрямую было бы, может быть, очень трудно.

Этот способ решения задачи иногда называют «методом интерпретаций»: задача одной области математики интерпретируется в другой области, где она или яснее, или больше соответствует нашей интуиции, или допускает применение более мощных средств, и т.д. Литовский математик Р.Кашуба однажды как-то сказал, что метод интерпретаций способствует распространению демократии, так как развивает способность изменить точку зрения.

3. Красивые примеры

В этом пункте собрано несколько примеров, которые нам кажутся и характерными, и эстетически привлекательными.

3.1. Алгебра → векторы.

Пусть a, b, c, d, e, f, g, h – ненулевые числа. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh$ неотрицательно.

Решение. Рассмотрим векторы $(a, b), (c, d), (e, f), (g, h)$. Рассматриваемые выражения – их попарные скалярные произведения. Отложив векторы от одной точки, мы увидим, что какие-то из них образуют тупой угол. Эти векторы и их скалярное произведение и надо рассматривать.

3.2. Алгебра → длина.

Пусть $a > 0, b > 0, c > 0$. Докажите, что $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

Решение. Пусть $OA = a, OB = b, OC = c, \angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ (рис. 3). Тогда по теореме

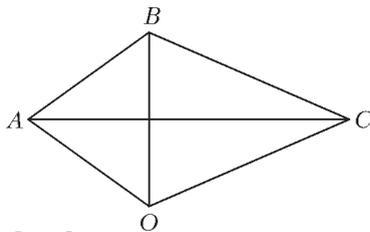


Рис. 3

косинусов

$$AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}, \quad BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2},$$

$$AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

и нужно следует из неравенства треугольника для $\triangle ABC$.

3.3. Алгебра → площади.

Пусть n – натуральное число, $n > 1$. Докажите, что

$$\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < 0,8n^2.$$

Решение. Сравните площадь закрашенной фигуры с площадью четверти круга; вспомните, что $\frac{\pi}{4} < 0,8$ (рис.4).

3.4. Алгебра → тригонометрия.

Пусть $a_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ и $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ при $n \in \mathbb{N}$. Для скольких разных α мы имеем $a_{2004} = 0$?

Решение. Из равенства $a_{n+1} = 1 - (1 - 2a_n)^2$ легко вытекает: если $0 \leq a_{n+1} \leq 1$, то $0 \leq a_n \leq 1$. Следовательно, и все искомые значения α лежат в интервале $[0; 1]$. Обозначим $\alpha = \sin^2 \omega$. Тогда

$$a_2 = 4 \sin^2 \omega (1 - \sin^2 \omega) = (2 \sin \omega \cos \omega)^2 = \sin^2 2\omega$$

и т.д., $a_{2004} = \sin^2 2^{2003} \omega$; так как $a_{2004} = 0$, то $\sin 2^{2003} \omega = 0, 2^{2003} \omega = \pi k (k \in \mathbb{Z}), \omega = \frac{\pi k}{2^{2003}}, k \in \mathbb{Z}$.

Это дает $2^{2002} + 1$ разных значений $\sin^2 \omega$.

3.5. Суммирование → геометрия на клетчатой бумаге.

Докажите, что для чисел Фибоначчи ($F_1 = 1; F_2 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ при $n \geq 1$) имеет место равенство

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Решение. См. рисунок 5.

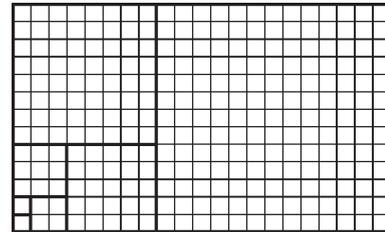


Рис. 5

3.6. Суммирование → подсчет вариантов.

Докажите, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. Допустим, что Марису страшно понравилась Эллина. Он хочет сделать три вещи:

- а) пригласить ее на бал,
- б) впервые поцеловать,
- в) признаться в любви.

В его распоряжении есть $n + 1$ дней. При этом признании в любви должно произойти только тогда, когда уже в предыдущие дни были и бал, и поцелуй; бал же и поцелуй могут быть как в разные дни, так и в один и тот же день. Сколько есть разных расписаний для Мариса?

Математически говоря, мы ищем количество троек целых чисел x, y, z , для которых $1 \leq x, y < z \leq n + 1$. Однако любовь гораздо привлекательнее целых чисел.

Признание в любви может произойти в день с номером 2, 3, 4, ..., $n + 1$. Если это происходит в i -й день, то для бала и поцелуя есть $(i - 1)^2$ возможностей. Поэтому разных распорядков есть $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Подсчитаем теперь это же количество другим способом. Сначала: сколько есть распорядков, использующих два дня – один для признания, другой для бала и поцелуя? Ясно, что их количество равно C_{n+1}^2 . Далее: сколько есть распорядков, использующих три дня? Их количество равно $2C_{n+1}^3$. Здесь множитель 2 появляется из-за того, что за два первых выбранных дня бал и поцелуи могут следовать в двух разных вариантах.

Получаем, что

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = C_{n+1}^2 + 2C_{n+1}^3,$$

что после преобразований дает нужное равенство.

3.7. Алгебра → теория вероятностей.

Пусть p и q – такие положительные числа, что $p + q = 1$. Пусть m и n – натуральные числа, $m \geq 2$, $n \geq 2$.

Докажите, что $(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geq 1$.

Решение. Рассмотрим таблицу с m строками и n столбцами, состоящую из одинаковых квадратных клеток. «Организуем» вероятностный процесс, в котором каждая клетка независимо от других красится в белый или красный цвет: в белый – с вероятностью p , в красный – с вероятностью q .

Тогда, на основании элементарных законов теории вероятностей, для любого наперед заданного столбца p^m – вероятность того, что он весь белый; $(1 - p^m)$ – вероятность того, что в нем есть красная клетка. Поэтому $(1 - p^m)^n$ – вероятность того, что в любом из n столбцов есть красная клетка.

Аналогично, $(1 - q^n)^m$ – вероятность того, что в любой из m строк есть белая клетка.

Наше неравенство можно переписать в форме

$$\left[1 - (1 - p^m)^n\right] + \left[1 - (1 - q^n)^m\right] \leq 1.$$

Ясно, что $\left[1 - (1 - p^m)^n\right]$ – вероятность того, что имеется белый столбец, а $\left[1 - (1 - q^n)^m\right]$ – вероятность того, что имеется красная строка.

Так как оба последних события не могут произойти одновременно (что находилось бы на пересечении белого столбца и красной строки?), то сумма их вероятностей не превосходит 1, что и требовалось доказать.

Примечание. Так как возможны раскраски, не имеющие ни белого столбца, ни красной строки, то на самом деле доказываемое неравенство – строгое.

3.8. Геометрия → физический процесс.

Докажите, что любой выпуклый многогранник можно пересечь плоскостью так, чтобы и его объем, и площадь поверхности делились этой плоскостью пополам.

Решение. Сделаем сосуд в форме рассматриваемого многогранника и наполним его водой ровно наполови-

ну. Тогда, как бы ни повернуть сосуд, поверхность воды определит плоскость, делящую объем многогранника пополам. Нам надо доказать, что сосуд можно повернуть так, чтобы вода покрывала ровно половину площади его стенок.

Поставим сосуд в любое положение и повернем потом его «вверх ногами». Если вначале вода покрывала половину стенок, все уже было хорошо. В противном случае можем допустить, что она покрывала **меньше** половины стенок. Так как в конечном положении вода занимает как раз ту часть сосуда, которая вначале была пустой (почему?), то в конце вода покрывает больше половины стенок. Так как площадь, покрытая водой, в процессе перевертывания изменяется непрерывно, то был момент, когда вода покрывала ровно половину площади стенок. Этого мы и добивались!

3.9. Один процесс → другой процесс.

Через ручеек упала тонкая тростинка. С одного берега по тростинке направились пять черных муравьев, с другого берега – пять красных. Скорости муравьев одинаковы, расстояния между ними могут и различаться. Как только два муравья встречаются, они тотчас поворачивают обратно и с теми же скоростями направляются в противоположные стороны. Сколько встреч состоится, пока все муравьи не уйдут обратно на свои начальные берега?

Решение. Вместе с данным процессом рассмотрим другой, который отличается от данного в задаче только тем, что муравьи не поворачивают обратно, а «проскальзывают» друг через друга и продолжают движение вперед. Ясно, что и в «настоящем», и в «воображаемом» процессе муравьи находятся на тростинке в одних и тех же местах (только это разные муравьи!). Про воображаемый процесс же ясно, что там произойдет $5 \times 5 = 25$ встреч. Значит, столько же встреч произойдет и в «настоящем» процессе.

Мы больше примеров приводить не будем. Вне статьи остались интерпретации комбинаторных задач с помощью графов, ставшие уже повседневной практикой; физические интерпретации, использующие понятия о центре тяжести и потенциальной энергии (см., например, [2] и [3]), интерпретации стереометрией планиметрических задач (см., например, [4]), интерпретация одной планиметрической задачи при помощи другой с использованием параллельной или центральной проекции (см., например, [5]) и многое другое.

4. Сильные стороны, слабые стороны, риски

Нельзя отрицать, что приведенные решения просты и убедительны. Нам они кажутся даже красивыми. Но насколько они корректны? Довольно легко заметить, что в любом из примеров где-то пришли мы в рассуждении к ситуации, когда с сияющей улыбкой смогли заявить: «И это же очевидно!» Скептик мог бы качать головой и комментировать: «Ну, это уж какие у кого глаза...». И тогда, например, мы в примере 3.5 добавили бы рассуждение с математической индукцией, в примере 3.9 нудно доказывали бы непрерывность изменения покрытой водой поверхности, и т.д. Но надо ли это делать?

Великий физик Нильс Бор говорил: «Глубокая истина – это такая, отрицание которой тоже есть глубокая истина».

Доказательства важны, жизненно важны для математики. Но доказательства – не цель. Цель есть понимание.

Доказательство на математической практике – это рассуждение, которое убеждает. Никто не доводит доказательство сложных теорем до аксиом теории множеств или арифметики Пеано – иначе не могла бы быть опубликована ни одна научная или даже методическая статья. Любой математик на каком-то месте всегда говорит (открыто или скрыто): «Ну, а это, уж извините, ясно как день». Это же самое делается при использовании метода интерпретаций.

Но, разумеется, как всюду, так и здесь есть свои заторы, подводные камни и иные опасности. Про наиболее важные полезно знать.

4.1. Надо заботиться, чтобы интерпретация «перекрыла» все возможные случаи. Например, при решении системы уравнений

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1, \\ y = 2z^2 - 1, \\ z = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

недостаточно заявить: обозначим $x = \cos \alpha$; тогда $z = \cos 2\alpha$, $y = \cos 4\alpha$ и $x = \cos 8\alpha$, откуда $\cos \alpha = \cos 8\alpha$, $8\alpha = \mp \alpha + 2\pi n$ и $\alpha = \frac{2\pi n}{9}$, $\alpha = \frac{2\pi n}{7}$ ($n \in \mathbb{Z}$), откуда получаем возможные значения неизвестных. Хотя на такую интерпретацию явно указывает форма уравнений системы, она упускает возможность $|x| > 1$. (К счастью, этот случай легко решается другим путем: при $|x| > 1$ имеем $|z| > |x|$, $|y| > |z|$, $|x| > |y|$, значит, $|x| > |x|$ – противоречие. Следовательно, при $|x| > 1$ решений у системы нет.)

4.2. Иногда интерпретация – явно упрощенная, и тогда приходится решить, насколько существенны эти упрощения. Например, при решении примера 3.8 мы предположили, что поверхность воды – плоскость; на самом деле это не так – вспомните и про выпуклость земной поверхности, и про капиллярные явления около стенок сосуда и т.д. Кроме того, так как окружающий нас мир (и уж, конечно, вода) состоит из дискретных частиц, то ни один процесс вообще не проходит непрерывно в математическом смысле слова.

4.3. А иногда даже могут возникнуть сомнения, соответствует ли вообще употребляемой интерпретации что-то реальное. Припомним пример 3.7. А есть ли вообще в мире что-то случайное? И, если есть, то возможно ли организовать описанный процесс для любых p и q (их-то, вообще говоря, континуум)? Какие природные процессы могут быть использованы при организации такого процесса – не бросание же монеты? Так что вопросов тут больше, чем ответов.

Но одно неоспоримо: даже самые «сомнительные» интерпретации могут дать толчок к пониманию, каков ответ на самом деле. А зная, каков он, доказать-то мы

его как-нибудь уж докажем... даже строго, если нас хорошо попросят.

5. Границы метода интерпретаций

В «большой науке» метод интерпретаций встречается сплошь да рядом. Любая математическая модель на самом деле есть интерпретация природного, общественного, мыслительного процесса на математическом языке.

Говоря про «внутриматематические интерпретации», кроме уже названной теории графов следует упомянуть аналитическую геометрию, средство инженерной математики – преобразование Лапласа, быстрое преобразование Фурье, теорию кодирования. Решающую роль в развитии теоретической кибернетики (theoretical computer science) сыграла интерпретация общего алгоритмического процесса машиной Тьюринга в 1936 году. Это мы упомянули лишь малую часть важных интерпретаций. Есть ли предел?

Не вдаваясь в подробности, упомянем о знаменитой теореме Геделя о неполноте (она была доказана в 1930 году). Из этой теоремы вытекает следующее. В любой «достаточно интересной» математической теории, построенной на основе аксиом и содержащей формальное понятие о доказательстве на основе их,

- или существуют доказательства утверждений, которые хотя бы в некоторых «разумных» интерпретациях неверны;

- или же существуют утверждения, которые верны во всех «разумных» интерпретациях этой теории, но которые нельзя доказать при помощи допустимых формальных средств.

(Слова, поставленные в кавычках, разумеется, должны быть уточнены, но это потребовало бы отдельной статьи.)

Следовательно, метод интерпретаций, равно как и математическое моделирование, не может быть приведен в полное согласие с понятием формального доказательства.

Тем не менее мы рекомендуем его к использованию всюду, где вы видите такую возможность.

6. Литература

1. *A. Engel*. Problem-Solving Strategies. (Springer, 1999)
2. *М.Б. Балк*. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. (М.: Физматгиз, 1959)
3. *Д. Пойя*. Математика и правдоподобные рассуждения. (М.: Наука, 1975)
4. *И. Шарыгин*. Выход в пространство. (Квант, 1975, №5, с.45–49)
5. *И.М. Яглом*. Геометрические преобразования II. (М.: ГИТТЛ, 1956)

7. Об авторстве примеров

Задача из введения, примеры 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9 – авторские. Примеры 3.3 и 3.7 были опубликованы ранее в «Кванте». Пример 3.4 – фольклор, встречался (с другими числами вместо 2004) во многих олимпиадах.

ПРЕМИЯ ЗА НАРУШЕНИЯ

Нобелевская премия по физике в 2008 году присуждена за фундаментальные теоретические исследования по нарушению глобальных симметрий в мире элементарных частиц. Сама премия также несимметрична. Половину премии получил 87-летний американский физик японского происхождения Йоичиро Намбу (Институт Энрико Ферми Чикагского университета, США). Свою главную работу он выполнил более 50 лет назад (совместно с итальянским физиком Джованни Йона-Лазиньо) в университете города Осака (Япония). Формулировка награждения – «за пионерские идеи о возможности спонтанного нарушения киральной симметрии». Вторую половину премии разделили два японских физика – Макото Кобаяши (Исследовательский центр ускорителя высоких энергий, Цукуба, Япония) и Тошихидэ Маскава (Институт теоретической физики Киотского университета, Япония) – «за открытие природы нарушенной симметрии, которое предсказывает существование в природе по крайней мере трех семейств кварков».

Нелегко разобратся в этих формулировках. Казалось бы, в проблеме нарушения симметрии само понятие «симметрия» не так уж сложно. Однако речь идет при этом не о тривиальных пространственных симметриях, например в кристаллах. Еще в 1927 году создатель геохимии, естествоиспытатель и философ В.И.Вернадский писал: «Новым в науке явилось не выявление принципа симметрии, а выявление его всеобщности». Современное понятие симметрии включает: а) объект или явление, симметрия которого рассматривается; б) преобразования, по отношению к которым рассматривается симметрия; в) инвариантность (неизменность, сохранение) каких-то свойств объекта, выражающую рассматриваемую симметрию. Такое понятие симметрии шире понятия «законы природы». Можно сказать, что симметрия создает законы, лежит в их основе. Например, симметрии параллельного переноса в пространстве (иначе говоря, однородности пространства) соответствует закон сохранения импульса, симметрии переноса начала времени (однородности времени) соответствует закон сохранения энергии.

Гораздо более сложные и не совсем очевидные симметрии удастся обнаружить в мире элементарных частиц.

Киральная (в химии это право- или левовинтовая) симметрия в случае субатомных частиц – это инвариантность уравнений, описывающих их поведение, относительно изменения так называемой скрытой винтообразности частиц.

Согласно гипотезе Намбу, из-за взаимодействия частиц с физическим вакуумом эта внутренняя симметрия с конечной вероятностью может самопроизвольно нарушиться. Объектами преобразованных свойств в модели Намбу были гипотетические очень мелкие частицы, из которых в случае нарушения симметрии могли «образоваться» мезоны, барионы и гипероны. Последних к тому времени неоткрывали на ускорителях уже многие десятки, а вскоре их число переваляло за три сотни – появился целый «зоопарк», как тогда шутили физики. Работа Намбу и Йона-Лазиньо была первой попыткой навести порядок в этом «зоопарке», выявить наиболее фундаментальные «кирпичики бытия». Она подготовила появление через 10 лет (1964 г.) кварковой модели адронов.

Работа Кобаяши и Маскава связана с нарушением двух других симметрий в мире элементарных частиц – пространственной и зарядовой. Пространственная симметрия в этом случае связана с зеркальным отображением. В обыденной жизни мы привыкли к тому, что в зеркале левое меняется на правое и наоборот. Про микробъекты современной физики, которые после преобразования отражения превращаются в своих «антиподов», говорят, что они нечетные (их «четность» равна -1). В мире элементарных частиц есть как четные, так и нечетные. Правила, связанные с сохранением четности в процессах микромира, рассматриваются как проявление Р-симметрии (от английского *parity* – четность). Под зарядовой симметрией понимают сохранение суммарных зарядов, каждого по отдельности – электрического, барионного и лептонного, в процессах взаимодействия объектов между собой. У частиц и античастиц эти заряды имеют противоположные знаки. Зарядовая симметрия обозначается как С-симметрия (*charge* – заряд). В 1956 году было обнаружено нарушение четности – оказалось, что правило сохранения четности не является законом. Тогда в 1957 году была сформулирована гипотеза сохранения «комбинированной четности», так называемая СР-инвариантность – если меняется четность, то вместе с ней должны измениться знаки зарядов, т.е. частицы должны заместиться на античастицы (Л.Ландау, Т.Ли, А.Салам и Ч.Янг). Незамедлительно последовало экспериментальное подтверждение (талантливая физик-экспериментатор Ц.Ву). Гипотеза стала законом.

Когда в 1964 году появилась 3-кварковая гипотеза Гелл-Мана и Цвейга, она учитывала этот закон. И вдруг в это же время был обнаружен случай нарушения СР-инвариантности (в экспериментах по изучению распада нейтрального К-мезона). Казалось, что кварковая гипотеза опровергнута. Но именно тогда Кобаяши и Маскава выдвинули свою гипотезу о возможности самопроизвольного (спонтанного) нарушения этой симметрии. Для этого им пришлось предположить, что в природе существуют не три кварка, а шесть – три пары кварков. Сегодня физики говорят о трех «семействах» кварков и о соответствующих им трех «семействам» лептонов. В этом заключается сущность современной так называемой стандартной модели микромира.

Итак, три физика, две работы, обе – предшественницы будущих открытий и обе связаны с нарушениями симметрии. Нобелевская «награда за нарушения», пусть и спустя много лет, нашла своих героев.



Макото Кобаяши

Тошихидэ Маскава

Йоичиро Намбу

Л.Белопухов

Самозаклинивающиеся структуры

А. БЕЛОВ

ВОЛИМПИАДНОМ ФОЛЬКЛОРЕ ХОДИЛА ТАКАЯ ЗАДАЧА (не очень простая):

Если на плоскости расположить несколько выпуклых фигур, то одну из них можно выдвинуть так, чтобы не задеть другие.

Упражнение 1. Попробуйте решить эту задачу.

А что в пространстве? Многие математики пытались доказать ее пространственное обобщение. Были получены некоторые продвижения. В частности, было показано, что если выпуклые тела – шары (в пространстве любой размерности), то одно из них можно выдвинуть, не задев остальные.

Упражнение 2*. Докажите это утверждение в размерности три.

Указание. Отметьте центры шаров и для каждой отмеченной точки рассмотрите ее *область Вороного* – множество точек пространства, для которых эта отмеченная точка ближе, чем любая другая отмеченная точка. Покажите, что можно выдвинуть целую область Вороного.

Поскольку казалось «очевидным», что ответ положительный, прошло несколько лет, прежде чем был построен контрпример (независимо Гальпериным и Кузьминых). История вопроса изложена в книге А.Боровика «Mathematics under the Microscope» (ее можно скачать из интернета по адресу <http://micromath.wordpress.com>). Этой задаче и связанным с ней вопросам была посвящена неопубликованная заметка А.Боровика, отчасти вошедшая впоследствии в его книгу. Я получил ее от Н.Б.Васильева, и она меня вдохновила.

Первые примеры, как это зачастую бывает в математике, оказались довольно сложными и искусственными. Захотелось получить более изящные конструкции. Если создать самозаклинивающуюся структуру в слое между двумя концентрическими сферами, задача будет решена. Если же радиусы сфер будут очень большими, а слой между ними – тонким, то ситуация будет очень похожа на случай слоя между двумя плоскостями.

Так родилась задача для LXIII Московской городской математической олимпиады (2000 г., 11 кл., задача 6):

Можно ли расположить в слое между двумя плоскостями семейство одинаковых выпуклых тел так, чтобы ни одно из них нельзя было сдвинуть, не задев остальные?

Эту задачу решило 20 участников. Интересно, однако, что среди них не было учеников физматшкол!

А.Белов, Московский институт открытого образования, kanel@msste.ru

Рисунки к статье, принадлежащие А.Дыскину и Е.Пастернак, взяты из статьи [3], а фотографии – из статьи [8].

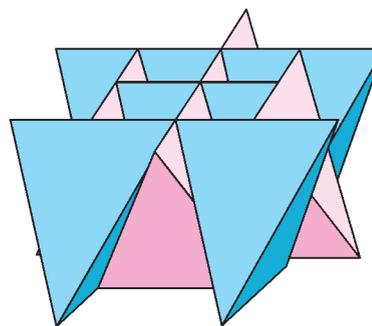


Рис. 1

Фрагмент такого семейства показан на рисунке 1.

Докажем, что ни один из тетраэдров нельзя выдвинуть. Заменяем один из них вписанным в него шаром S и покажем, что этот шар нельзя выдвинуть. Вращать шар бесполезно, поэтому ограничимся рассмотрением параллельных переносов.

Рассмотрим плоскость грани Γ другого тетраэдра, которая касается S . Множество векторов сдвига, разрешенных гранью Γ , задается множеством векторов, идущих из Γ в сторону S . Такие векторы образуют полупространство направлений, а множество возможных сдвигов шара есть пересечение множеств направлений (полупространств), разрешенных гранями тетраэдров укладки, касающихся S . Легко видеть, что оно пусто. Поэтому шар, а значит и тетраэдр, в который он вписан, не вынимается.

Придумывалась эта конструкция так. Рассмотрим слой из обычных кубов, раскрашенных в шахматном порядке, так что в срединном сечении образуется бесконечная шахматная доска. Рассмотрим черный куб. Наклоним его боковые «северные» и «южные» грани так, чтобы они сходились наверху (они не дадут ему двигаться вверх), а «западные» и «восточные» – так, чтобы они сходились внизу (они не дадут ему двигаться вниз). С каждым белым кубом поступим наоборот – наклоним его «северные» и «южные» грани так, чтобы они сходились внизу, а «западные» и «восточные» – так, чтобы они сходились наверху (рис.2). При этом грани черных и белых кубов останутся в контакте. Если убрать основания кубов, то

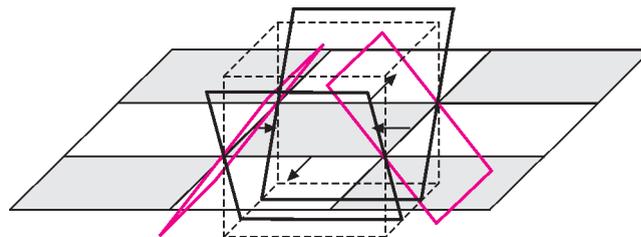


Рис. 2

при подходящих углах наклона возникает слой из правильных тетраэдров (см. рис.1)!

Если сечение многогранника двигать снизу вверх с постоянной скоростью, то сам многогранник можно рассматривать как процесс эволюции многоугольника во времени (ось времени будет перпендикулярна плоскости сечения). При этом стороны сечения также движутся с постоянной скоростью. (Например, можно рассматривать

тетраэдр как эволюцию плоского сечения, параллельного паре противоположных ребер, при движении вверх. Вначале появляется отрезок. Далее отрезок становится прямоугольником, одна сторона которого растет, другая – уменьшается. Прямоугольник становится квадратом, когда растущая сторона становится равной коллапсирующей, и в конце концов он вырождается в отрезок и исчезает.)

Упражнения

3. Назовем грань *контактной*, если она имеет общий участок поверхности с другим многогранником («блоком»). Рассмотрим многогранник как эволюционирующий многоугольник M сечения. Пусть M' есть многоугольник, образованный продолжением контактных сторон M , т.е. пересечениями плоскости сечения с продолжениями контактных граней.

Докажите, что если M' вырождается при движении вверх, то многогранник заклинен сверху (т.е. его нельзя убрать вверх параллельным переносом, не трогая остальных), а если M' вырождается при движении вниз, то многогранник заклинен снизу. Докажите, что обратное тоже верно.

4. Рассмотрев тонкий слой между двумя сферами (или лучше торами), придумайте такое расположение тетраэдров, чтобы ни один из них не выдвигался.

Замечание. Техническая реализация этой конструкции несколько затруднительна, мы отсылаем читателя к материалам 14-й конференции Турнира городов (см. сайт <http://www.turgor.ru/lktg/2002/index.php>).

Попробуем немного по-другому описать конструкцию плоского самозаклинивающегося слоя тетраэдров. Посмотрим еще раз, как выглядит сечение тетраэдра плоскостью, параллельной паре противоположных ребер, если эту плоскость двигать вверх с постоянной скоростью. Это многоугольник, стороны которого также движутся с постоянной скоростью. Направление движения стороны можно изобразить стрелкой (вектором), ей перпендикулярной. Длина вектора указывает на скорость движения, а направление – на направление.

Снова рассмотрим бесконечную шахматную доску, являющуюся срединным сечением слоя из кубов. Нарисуем на сторонах квадратиков стрелки единичной длины, ведущие либо внутрь, либо наружу так, чтобы для каждого квадратика внутренние и наружные стрелки чередовались (рис.3).

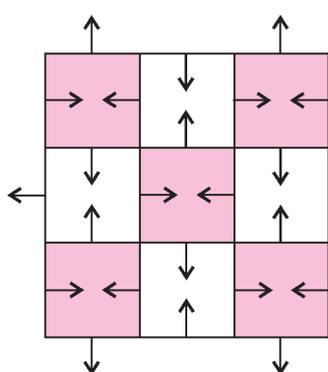


Рис. 3

Если у двух квадратиков есть общая сторона, то стрелка, ей отвечающая, для одного из квадратиков ведет внутрь, а для другого – наружу. Теперь наклоним боковые грани кубов.

Если стрелка ведет внутрь, то боковую грань, образующую соответствующую сторону, наклоняем сверху внутрь; если стрелка ведет наружу – то наклоняем грань сверху наружу. Продолжения боковых граней при подходящем угле наклона дадут слой из правильных тетраэдров.

Если стрелка ведет внутрь, то боковую грань, образующую соответствующую сторону, наклоняем сверху внутрь; если стрелка ведет наружу – то наклоняем грань сверху наружу. Продолжения боковых граней при подходящем угле наклона дадут слой из правильных тетраэдров.

Этот взгляд позволяет придумать и другую структуру. На плоскости есть еще одна интересная решетка – правильная шестиугольная (пчелиные соты). Если расставить стрелки перпендикулярно сторонам шестиугольников так, чтобы для каждого из них стрелки, ведущие внутрь и наружу, чередовались (рис.4), рассмотрим

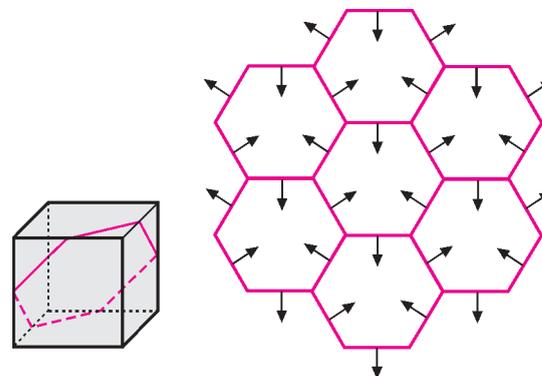


Рис. 4

систему правильных шестиугольных призм и наклонить их боковые грани в соответствии со стрелками, в продолжении боковых граней при подходящем угле наклона неожиданно получаются кубы!

Упражнения

5. а) Рассмотрите движение плоскости, перпендикулярной главной диагонали куба. Какие многоугольники возникают? Тот же вопрос для четырехмерного куба. Что получается в его срединном сечении?

б) Что получается в сечении, если стандартную решетку единичных кубов пересечь плоскостью, проходящей через центр одного из кубов и перпендикулярной его главной диагонали? Тот же вопрос для решетки четырехмерных кубов.

6. Придумайте систему из самозаклинивающихся четырехмерных кубов.

Эта конструкция имеет и такое описание. У куба есть сечение, являющееся правильным шестиугольником (а именно, плоскостью, являющейся срединным перпендикуляром к его главной диагонали). Рассмотрим правильный шестиугольный паркет («пчелиные соты») и расположим кубы так, чтобы эти шестиугольники образовывали бы их сечения, а сами кубы отличались бы параллельным переносом (рис.5 и первая страница обложки). Похоже, что такое расположение кубов не было известно человечеству!

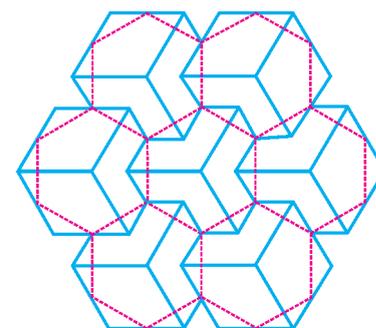


Рис. 5

Как видите, научная работа может не требовать знаний, выходящих за рамки средней школы.¹

¹ Автор не призывает вас на этом основании отказаться от дальнейшей учебы.

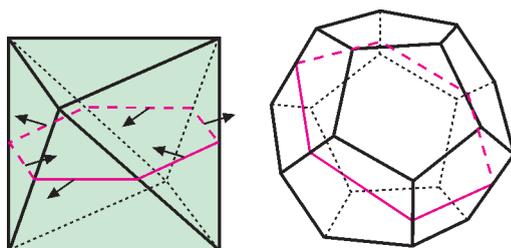


Рис. 6

Заметим, что октаэдр и додекаэдр (рис.6) также имеют правильные шестиугольные сечения, так что получаются аналогичные конструкции из октаэдров и додекаэдров (рис.7, 8).

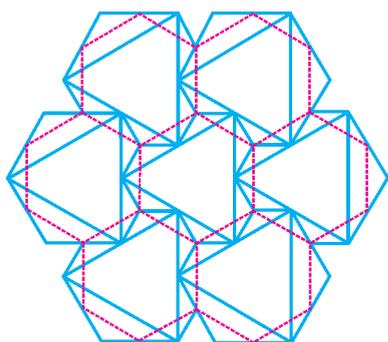


Рис. 7

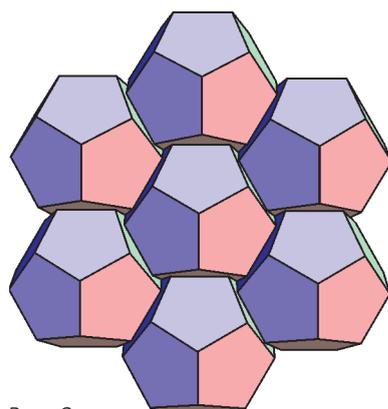


Рис. 8

Теперь рассмотрим расположение правильных десятиугольников, как показано на рисунке 9. Заметим, что икосаэдр, додекаэдр, а также усеченный икосаэдр (форма молекулы фуллена C_{60}) имеют правильное десятиуголь-

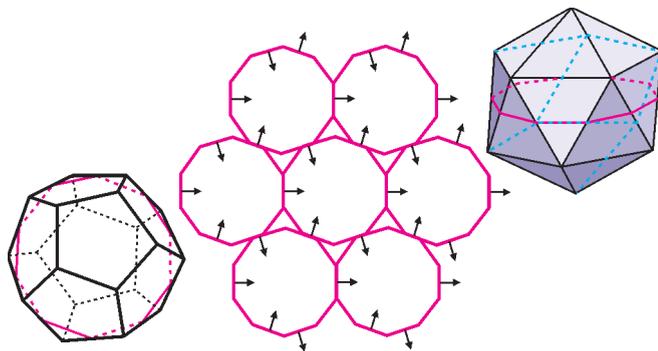


Рис. 9

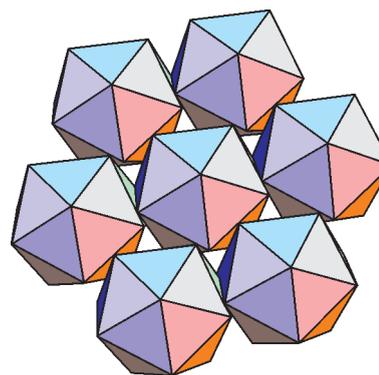


Рис. 10

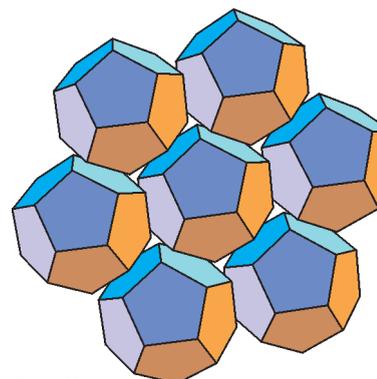


Рис. 11

ное сечение. Получается кладка из самоаклинивающихся икосаэдров (рис.10), новая кладка из додекаэдров (рис. 11) и кладка из усеченных икосаэдров (рис.12).

Мы несколько раз, казалось бы, немного изменяли описание конструкций. Однако всякий раз такое изменение приводило к новым результатам. Язык стрелок, позволяющий описывать наклоны граней, привел к появлению конструкции из кубов, описание самоаклинированной кладки из кубов через шестиугольное сечение позволило обобщить конструкцию, построить системы из октаэдров и додекаэдров, а затем – и других тел. Рассуждения с движением сторон сечения позволяют строить самоаклиненные конструкции регулярным образом. Наличие языка очень важно в математике, и точные слова, несмотря на кажущуюся «незначительность» переформулировок, приводят к новым результатам.

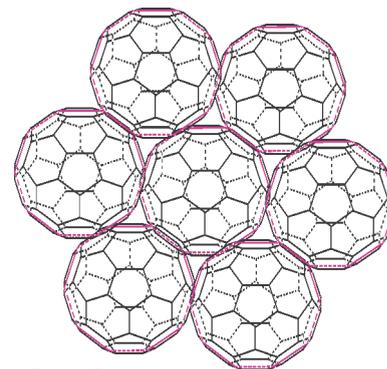


Рис. 12

Довольно хорошо известен арочный эффект, когда из камней без цемента еще в древности складывали арку (рис.13). Однако теоретически возможно создать не только классическую выпуклую, но и вогнутую арку!

Упражнение 7. Придумайте конструкцию вогнутой арки.

Указание. Рассмотрите слой между двумя концентрическими сферами. В малом он устроен как слой между двумя плоскостями, и его можно сделать заклиненным в обе

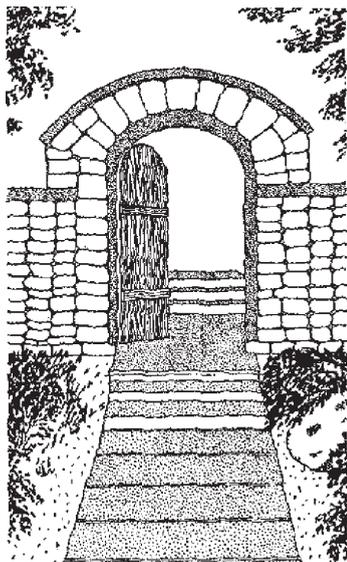


Рис. 13

книге была изложена концепция ключевого блока. Ключевые блоки – это те блоки, которые не заклинены остальными и могут двигаться внутри выработки. Для обеспечения безопасности выработки достаточно осуществить крепление только таких блоков. Там же содержались рассуждения с пересечением пространств направлений, задаваемых гранями. (Авторы книги, видимо, и представить себе не могли, что ключевых блоков может просто не быть вообще!)

После защиты диссертации я к горному делу не возвращался. Однако, узнав из заметки А.Боровика, что из выпуклых тел можно составить выпуклое тело так, чтобы ни одно из них нельзя было выдвинуть, придумал ту самую задачу для Московской олимпиады.

История имела занятное продолжение. Когда я был в Израиле в мае 2000 года, нашел бывшего научного руководителя по аспирантуре МГИ. На какую тему сделать доклад? Пришла идея. Известно, что прочность материала на микроуровне более чем на три порядка выше его прочности на макроуровне². Однако если сделать материал зернистым так, чтобы зерна заклинили друг друга, то трещина, зародившись в зерне, остановится на его поверхности и не будет расти дальше. Если зерна маленькие, можно добиться того, чтобы процентное содержание «плохих» зерен (т.е. зерен, содержащих зародыш – микротрещину) было небольшим. Поэтому возникает возможность создавать композитные материалы, в которых плохо распространяются трещины. Они могут выдерживать высокое давление и обладают другими интересными свойствами. Данная идея заинтересовала специалистов. Ими были предложены разнообразные формы и расположения зерен, исследованы различные возможности их применения (см. список литературы). В качестве примера на рисунке 14 показано разрушение сплошной пластины, а на рисунке 15 – разрушение составной блочной структуры.

Оказалось, что вопросы, связанные с пространственной

² Об этом можно прочитать, например, в статье И.И.Кикоина «Абрам Федорович Иоффе», опубликованной в выпуске 106 «Библиотечки «Квант», с.211–212.

стороны, в том числе и в сторону внешней сферы.

Подборка исследовательских задач, посвященных самозаклинивающимся структурам, предлагалась на 14-й конференции Турнира городов в 2002 году.

Расскажу, как я встретился с этими вопросами.

В свое время я поступил в аспирантуру московского Горного Института. Там я занялся изучением равновесия блочных массивов скальных пород, прочел книгу R.Googman and Shi-gen-Hua «Introduction to Rock Mechanics». В этой

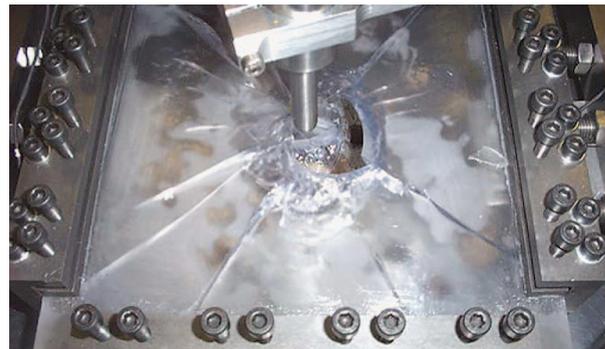


Рис. 14



Рис. 15

организацией структурных элементов при создании композитных материалов, в должной мере не исследованы, не говоря уже об эффекте самозаклинивания зерен. В данный момент ведется работа вместе с материаловедами и специалистами по механике. Теория самозаклинивающихся структур изложена в статье [3].

Эта статья написана по итогам совместной деятельности с А.Дыскиным, И.Ивановым-Погодаевым, Ю.Эстриным, Е.Пастернаком. Всем им автор выражает свою благодарность.

Литература

1. Гальперин Г.А. Непрерывные движения в пространстве конфигураций твердых звездчатых тел. (Успехи математических наук, 1985, 40:5(245), 251–252)
2. Канель А.Я. История одной олимпиадной задачи. (Математическое просвещение, 2001, вып. 5, 207–208)
3. Kanel-Belov A.J., Dyskin A.V., Estrin Y., Pasternak E., Ivanov I.A. Interlocking of convex polyhedra: towards a geometric theory of fragmented solids. (Mosc. Math. Journ. to appear)
4. Dyskin A.V., Estrin Y., Kanel-Belov A.J., Pasternak E. A new concept in design of materials and structures: Assemblies of interlocked tetrahedron-shaped elements. (Scripta Materialia, 2001, 44, 2689–2694)
5. Dyskin A.V., Estrin Y., Kanel-Belov A.J., Pasternak E. Toughening by fragmentation – How topology helps. (Advanced Engineering Materials, 2001, 3, Issue 11, 885–888)
6. Dyskin A.V., Estrin Y., Kanel-Belov A.J., Pasternak E. Topological interlocking of platonic solids: A way to new materials and structures. (Phil. Mag. Letters 2003, Vol.83, No. 3, 197–203)
7. Estrin Y., Dyskin A.V., Pasternak E., Khor H.C., Kanel-Belov A. J. Topological interlocking of protective tiles for Space Shuttle. (Phil. Mag. Letters, 2003, 83, 351–355)
8. Dyskin A.V., Estrin Y., Pasternak E., Khor H.C., Kanel-Belov A. J. Fracture resistant structures based on topological interlocking with non-planar contacts. (Advanced Engineering Materials, 2003, 5, No.3, 116–119)

ИНТЕРВЬЮ С А.КУЗНЕЦОВЫМ

14 июля 2008 года в Амстердаме на Европейском математическом конгрессе наш соотечественник, сотрудник Математического института им. В.А.Стеклова РАН Александр Геннадьевич Кузнецов получил премию Европейского математического общества (ЕМО) для молодых математиков.

Предлагаем вашему вниманию беседу Александра Геннадьевича с членом редколлегии нашего журнала Николаем Петровичем Долбиным.

1. *Расскажите об истории премии ЕМО для молодых ученых. Кто из наших ученых ее удостоивался?*

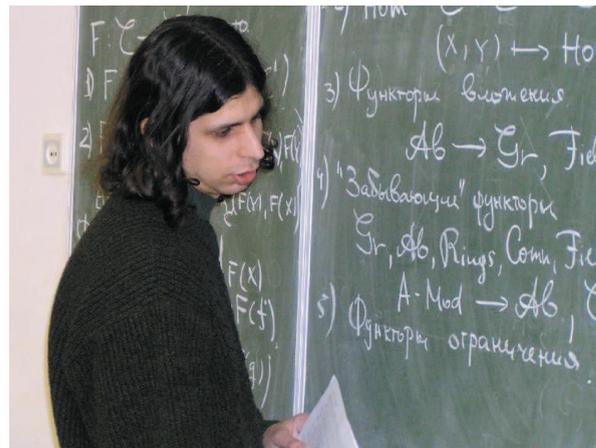
Премия Европейского математического общества является аналогом самой престижной международной математической премии – медали Филдса (как известно, Нобелевская премия математикам не вручается), поэтому естественно было бы вначале сказать пару слов о ней. Начиная с 1897 года раз в каждые четыре года проводится Международный конгресс математиков, на котором специально выбранная комиссия, состоящая из самых известных математиков, выбирает четырех лауреатов (иногда их может быть и меньше), которым и вручаются медали. Критерий выбора очень простой – награды удостоиваются ученые, работы которых внесли наиболее значимый вклад в развитие математики. При этом есть ограничение на возраст – рассматриваются только математики моложе 40 лет.

Шестнадцать лет назад по образцу и подобию Международного математического союза было создано Европейское математическое общество, которое, естественно, учредило свой аналог медали Филдса. Однако между этими двумя наградами есть существенные различия. Во-первых, премия ЕМО вручается математикам не старше 35 лет. Во-вторых, претенденты должны являться европейцами (в довольно мягком смысле – либо по рождению, либо по гражданству, либо по месту работы). Наконец, премий ЕМО значительно больше – на каждом конгрессе (которые тоже проходят раз в четыре года, в точности посередине между международными конгрессами) присуждается 10 премий.

Поскольку премия ЕМО вручается относительно недавно, а ограничение по возрасту довольно жесткое, фамилии лауреатов не слишком на слуху. Пожалуй, наиболее известен Максим Концевич, получивший премию в 1992 году.

2. *Какие Ваши работы были удостоены этой премией? Можно ли рассказать читателям «Кванта» о них и, вообще, о Ваших научных интересах?*

Я занимаюсь алгебраической геометрией. Это область математики, находящаяся на стыке алгебры и геометрии (что следует из названия), но при этом имеющая очень тесные связи с другими математическими дисциплинами и даже с физикой. Алгебраическая геометрия изучает свойства алгебраических многообразий, т.е. тел (геометрия!), которые можно задать полиномиальными уравнениями (алгебра!). Простейшие алгебраические многообразия изучаются еще в школе – это точка, прямая, плоскость, трехмерное пространство. Можно также рассматривать пространства более высоких размерностей. Окружность, эллипс, гипербола и парабола также являются алгебраическими многообразиями (так как задаются на плоскости квадратичными уравнениями). Более сложные многообразия получаются рассмотрением большего числа уравнений более высокой степени в пространствах более высокой размерности (например – пересечение эллипсоида и гиперболического параболоида в трехмерном пространстве). Оказывается, многие геометрические свойства алгебраических многообразий можно выражать



Александр Кузнецов читает лекцию в Независимом московском университете

через разные связанные с ними алгебраические структуры. Одной из таких структур является производная категория когерентных пучков – основной объект изучения в моих работах.

3. *Как Вы стали математиком? Какова роль семьи, школы, возможно, математических олимпиад, дополнительной литературы, «Кванта»? Кто из математиков-профессионалов оказал на Вас решающее влияние?*

Как правило, математиком становятся в результате обучения на математическом отделении какого-либо университета или института (случается, правда, что математиками становились люди, получившие, скажем, физическое образование). В моем случае таковым стал механико-математический факультет МГУ. Но, конечно, все началось со школы. Первые семь лет я учился в обычной школе (в 5 минутах от дома), затем перешел в математическую школу № 57, где провел три замечательных года (в то время в школе учились 10 лет, а не 11, как сейчас).

То, что я стану математиком, я понял довольно рано. Может, я и не чувствовал поначалу к математике особого интереса (трудно испытывать интерес к науке, если совершенно не понимаешь, в чем она состоит), но, по крайней мере, математика мне всегда очень легко давалась. Например, в последний год перед школой я много болел (постоянно простужался) и поэтому подолгу сидел дома. Мне в руки попался учебник математики для первого класса, и я его почти весь прорешал. К задачам у меня было отношение как к интересным головоломкам. Через пару лет после этого (учась во втором классе) я нашел задачник по физике, который меня очень удивил тем, что там я совершенно никаких задач решить не мог. Там было много непонятных слов («параллельно», «перпендикулярно» и т.п.). Я помню, меня это очень задело, и я в течение нескольких следующих лет регулярно его доставал и смотрел, стало ли мне что-нибудь понятнее. Когда же я начал понимать (кажется, это было уже в 6 классе), мне это очень понравилось, и я, наверное в течение года, перечитал весь школьный курс физики. Конечно, учебники 9 и 10 класса были непонятны (там встречались совершенно загадочные для меня на тот момент понятия производной, а также дифференциальные уравнения), но я к тому моменту научился, пропуская непонятное, получать тем не менее удовольствие от такого чтения. В тот момент я был почти уверен, что стану физиком.

Перелом в моей жизни произошел довольно случайно. Однажды (я учился в тот момент в 7 классе) я уже собирался

(Продолжение см. на с. 31)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2116» или «Ф2123». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2118 и M2121 предлагались на IV Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, задачи M2119, M2120 и M2123 – на XXX Турнире городов.

Задачи M2116–M2123, Ф2123–Ф2129

M2116. Полный набор домино выкладывается на столе в замкнутую цепь, и для всех пар соседних доминошек вычисляется модуль разности очков на клетках, которыми они соприкасаются. Обозначим через S сумму всех таких модулей разностей. Ясно, что наименьшее значение S равно 0 (это происходит в том случае, когда замкнутая цепь выложена по правилам домино). А какое наибольшее значение может принимать сумма S ?

А.Грибалко

M2117. Существует ли арифметическая прогрессия из 2008 различных натуральных чисел, произведение которых равно точной 2009-й степени натурального числа?

Г.Гальперин

M2118. Докажите, что в треугольнике ABC с углом A , равным 120° , расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения высот равно $AB + AC$.

В.Протасов

M2119. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, \dots число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности все числа положительны, причем каждое натуральное число встречается в ней бесконечно много раз.

А.Заславский

M2120. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) + P(n) = 0$ имеет

бесконечно много решений в целых числах m и n . Докажите, что график функции $y = P(x)$ имеет центр симметрии.

А.Шаповалов

M2121. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Назовем его «высотами» векторы с концами на прямых, содержащих противоположные стороны, перпендикулярные им и направленные от AB к DE , от EF к BC и от CD к AF . Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его «высот» равна нулевому вектору.

А.Заславский

M2122. а) Докажите, что любое натуральное число n , большее 17, можно разложить в сумму трех натуральных попарно взаимно простых слагаемых, каждое из которых больше 1.

б*) Выясните, конечно или бесконечно множество натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех взаимно простых в совокупности натуральных слагаемых, любые два из которых не взаимно просты.

В.Лецко

M2123. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?

В.Клепцын

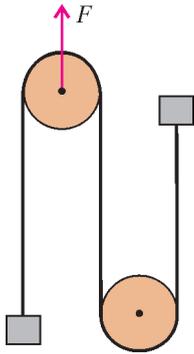


Рис. 1

Ф2123. На гладком горизонтальном столе лежат два блока – тонкие легкие диски. Ось одного из них закреплена, так что двигаться он не может, но может вращаться в горизонтальной плоскости. Кусок легкой нерастяжимой нити охватывает блоки, к концам нити прикреплены одинаковые грузы массой M каждый. В начальный момент нить натянута, свободные куски нити параллельны друг другу. На ось «подвижного» блока начинает действовать сила F (рис.1; вид сверху). Найдите ускорение этого блока, если при движении свободные куски нити остаются параллельными. Во сколько раз отличаются скорости вращения блоков? Нить не проскальзывает относительно блоков.

А.Блоков

Найдите ускорение этого блока, если при движении свободные куски нити остаются параллельными. Во сколько раз отличаются скорости вращения блоков? Нить не проскальзывает относительно блоков.

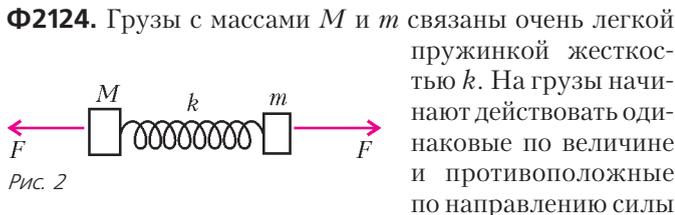


Рис. 2

Ф2124. Грузы с массами M и m связаны очень легкой пружиной жесткостью k . На грузы начинают действовать одинаковые по величине и противоположные по направлению силы F (рис.2). Найдите максимальную скорость груза массой M . Найдите также максимальное смещение груза массой m . В начальный момент пружина не деформирована, грузы неподвижны.

А.Простов

Ф2125. Моль гелия при нормальных условиях находится внутри эластичной оболочки. Наружные условия изменяются так, что к некоторому моменту газ получает 100 Дж тепла, а температура газа увеличивается при этом на 10 К. Оцените изменение объема газа.

З.Повторов

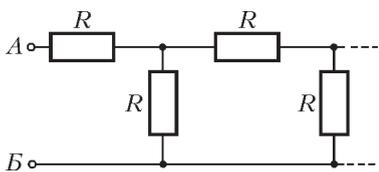


Рис. 3

Ф2126. На рисунке 3 изображена известная бесконечная цепочка, состоящая из резисторов с одинаковыми сопротивлениями. Все знают, как посчитать ее сопротивление, измеренное между точками A и B . А что если взять не бесконечную цепочку, а цепочку, состоящую ровно из 50 звеньев, – как посчитать ее сопротивление? Понятно, что сделать это «в лоб» трудно, проще считать цепь бесконечной... Какую погрешность мы при этом получим? Сильно ли сопротивление урезанной цепи отличается от сопротивления бесконечной цепочки? Зададим конкретный вопрос: эти отличия меньше миллионной доли процента или намного больше?

А.Цепочкин

Ф2127. Потенциалы точек A , B и V поддерживаются постоянными: $\phi_A = 100$ В, $\phi_B = 200$ В, $\phi_V = 500$ В. Два одинаковых конденсатора емкостью 10 мФ каж-

дый и резистор сопротивлением 1 МОм соединяем «звездой» и подключаем одно временно свободными выводами к точкам A , B и V (резистор – к точке V ; рис.4). Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

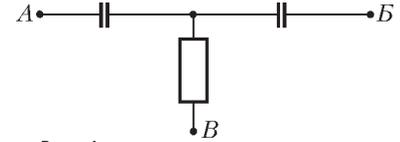


Рис. 4

З.Рафаилов

Ф2128. Две одинаковые катушки соединены последовательно, параллельно одной из них подключен конденсатор, а к выводам цепи подсоединена батарейка напряжением U (рис.5). Найдите максимальное напряжение конденсатора. Элементы цепи считайте идеальными.

Р.Александров

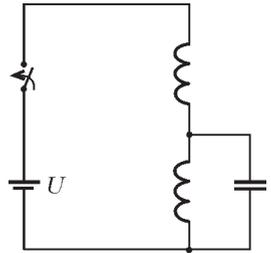


Рис. 5

Ф2129. В трех вершинах квадрата с длиной стороны 2 м расположены одинаковые маленькие громкоговорители, в четвертой вершине находится очень маленький всенаправленный микрофон. К громкоговорителям поочередно подключают источники переменного напряжения частотой 100 Гц и регулируют их уровни так, чтобы напряжение на выходных зажимах микрофона составляло в каждом случае ровно 1 мВ. Какое напряжение выдаст микрофон, если включить одновременно два соседних громкоговорителя? А если включить все три громкоговорителя? Рассмотрите два разных варианта: используются независимые источники напряжения (три звуковых генератора и три усилителя низкой частоты) и используется один генератор, «размноженный» на три усилителя.

А.Зильберман

Решения задач M2096–M2100, Ф2108–Ф2117

M2096. Депутаты парламента образовали 2008 комиссий, каждая – не более чем из 10 человек. Известно, что любые 11 комиссий имеют общего члена. Докажите, что все комиссии имеют общего члена.

Предположим, что, напротив, для каждого депутата найдется комиссия, в которую он не входит. Возьмем первую комиссию A , состоящую из депутатов a_1, a_2, \dots, a_k , где $k \leq 10$. Для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ найдем комиссию A_i , в которую не входит депутат a_i . Тогда комиссии A, A_1, A_2, \dots, A_k не имеют общего члена, что противоречит условию.

Ф.Петров

M2097. Найдите все такие простые числа p вида $a^2 + b^2 + c^2$ (где a, b, c – натуральные), что $a^4 + b^4 + c^4$ делится на p .

Ответ: $p = 3$.

Очевидно, $p = 3$ подходит.

Пусть $a \geq b \geq c$ и $a^4 + b^4 + c^4$ делится на $p = a^2 + b^2 + c^2$. Имеем следующее сравнение по

модулю p :

$$\begin{aligned} 0 &\equiv p^2 \equiv (a^2 + b^2 + c^2)^2 \equiv \\ &\equiv 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \equiv 2(a^2b^2 + c^2(-c^2)) \equiv \\ &\equiv 2(ab + c^2)(ab - c^2) \pmod{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Значит, $2(ab + c^2)(ab - c^2)$ делится на p . Так как $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$, то $ab - c^2 = 0$, т.е. $a = b = c$. Получили: $p = 3a^2$ делится на 3, поэтому $p = 3$.

Замечание. Существует бесконечно много таких простых чисел $p = a + b + c$, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на p . Для доказательства достаточно (подумайте, почему) установить, что существует бесконечно много простых чисел вида $p = a^2 + ab + b^2$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Доказательство последнего факта следует из задач в книге А.В.Спивака «Арифметика-2» (Приложение к журналу «Квант» № 5 за 2008 г., задачи 42 и 44 на с.34).

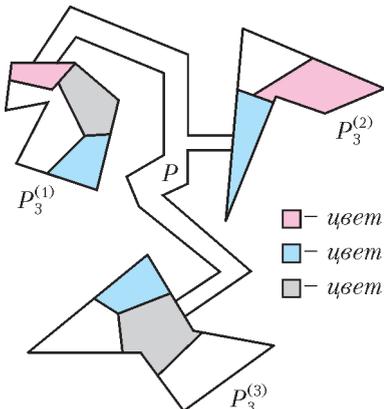
В.Сендеров

M2098. Двое играют в игру, делая ходы по очереди: первый рисует на плоскости многоугольник, не налегающий на уже нарисованные, а второй ответным ходом раскрашивает его в один из 2008 цветов. Второй игрок хочет, чтобы любые два многоугольника, граничащие по отрезку стороны, имели разные цвета. Сможет ли первый игрок помешать ему?

Ответ: сможет.

Докажем индукцией по n , что первый может играть так, что нарисованные им многоугольники будут давать в объединении некоторый многоугольник P_n , на границу которого выходят многоугольники не менее n цветов. Отсюда будет следовать, что никакого конечно-го числа цветов недостаточно.

База индукции очевидна. Пусть утверждение верно для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Из предположения индукции следует, что первый игрок может играть так, чтобы нарисованные многоугольники давали в объединении k многоугольников $P_k^{(1)}, P_k^{(2)}, \dots, P_k^{(k)}$, на границу каждого из которых выходят многоугольники не менее k цветов. На границе многоугольника $P_k^{(1)}$ выделим отрезок Δ_1 некоторого цвета 1, на границе многоугольника $P_k^{(2)}$ выделим отрезок Δ_2 некоторого цвета 2, отличного от 1, и т.д., на границе многоугольника $P_k^{(k)}$



выделим отрезок Δ_k некоторого цвета k , отличного от уже определенных цветов $1, 2, \dots, k - 1$. Пусть теперь первый нарисует многоугольник P , пересекающийся с многоугольником $P_k^{(i)}$ по части отрезка Δ_i для всех $i = 1, 2, \dots, k$ (см. рисунок). Второго иг-

рок должен раскрасить многоугольник P в цвет, отличный от цветов $1, 2, \dots, k$. Тогда на границу многоугольника, являющегося объединением многоугольников $P, P_k^{(1)}, P_k^{(2)}, \dots, P_k^{(k)}$, выходят не менее $k + 1$ цветов. Переход индукции доказан.

Замечания. Строгое доказательство существования многоугольника P из решения задачи далеко не просто (хотя интуитивно все очевидно), оно следует из известной топологической теоремы Жордана.

Отметим, что вопрос, поставленный в задаче, уже рассматривался в «Задачнике «Кванта» для случая, когда первому игроку позволяет рисовать многоугольники лишь специального вида (см. задачу M1205). Результат этой задачи интересно сопоставить также со знаменитой теоремой о четырех красках, согласно которой для раскрашивания *правильным* образом любой карты на плоскости достаточно лишь четырех цветов.

Е.Гук, П.Кожевников

M2099. Пусть $a_0 > a_1 > \dots > a_s = 0$ — такая последовательность целых чисел, что натуральные числа a_0 и a_1 взаимно просты, а при $i \geq 1$ число a_{i+1} равно остатку от деления a_{i-1} на a_i с неполными частными $t_i = \left[\frac{a_{i-1}}{a_i} \right]$. Построим последовательность b_0, b_1, \dots, b_s с помощью соотношения $b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$, положив $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$. Докажите, что $b_s = a_0$.

Заметим, что

$$1 = \text{НОД}(a_0, a_1) = \text{НОД}(a_1, a_2) = \dots = \text{НОД}(a_{s-1}, a_s) = 1.$$

Так как $a_s = 0$, то $a_{s-1} = \text{НОД}(a_{s-1}, a_s) = 1$. Положим $d_i = a_{i-1}b_i + a_i b_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Из рекуррентных соотношений

$$a_{i+1} = a_{i-1} - t_i a_i \text{ и } b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$$

следует, что

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i = \\ &= a_i (b_{i-1} + t_i b_i) + (a_{i-1} - t_i a_i) b_i = a_{i-1} b_i + a_i b_{i-1} = d_i. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = d_1 = d_2 = \dots = d_s = \\ &= a_{s-1} b_s + a_s b_{s-1} = b_s, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В.Быковский

M2100. В угол с вершиной O вписаны две окружности ω_1 и ω_2 . Луч с началом O пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1 , а ω_2 — в точках A_2 и B_2 так, что $OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$ (рис. 1). Окружность γ_1 касается внутренним образом окружности ω_1 и каса-

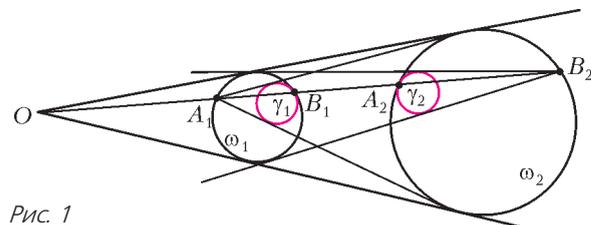


Рис. 1

тельных к ω_2 , проведенных из A_1 . Окружность γ_2 касается внутренним образом окружности ω_2 и касательных к ω_1 , проведенных из B_2 . Докажите, что окружности γ_1 и γ_2 равны.

Пусть радиусы окружностей $\omega_1, \omega_2, \gamma_1$ и γ_2 равны R_1, R_2, r_1 и r_2 соответственно. Из гомотетии h с центром O , переводящей ω_1 в ω_2 , следует, что

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (1)$$

В решении будем пользоваться известной теоремой о трех гомотетиях: композиция гомотетий с центрами O_1 и O_2 ($O_1 \neq O_2$) и коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией с центром в точке на прямой O_1O_2 и коэффициентом k_1k_2 .

Пусть C_1 – точка касания ω_1 и γ_1 . Тогда композиция гомотетии с центром C_1 , переводящей γ_1 в ω_1 , и гомотетии h – это гомотетия h_1 с коэффициентом $\frac{R_2}{r_1}$, переводящая γ_1 в ω_2 . Точка A_1 является центром гомотетии h_1 , и по теореме о трех гомотетиях точки C_1, O и A_1 лежат на одной прямой. Это означает, что $C_1 = B_1$. Кроме того, из гомотетии h_1 получаем соотношение

$$\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{R_2}{r_1}. \quad (2)$$

Аналогично доказывается, что окружности ω_2 и γ_2 касаются в точке A_2 и что

$$\frac{A_1B_2}{A_2B_2} = \frac{R_1}{r_2}. \quad (3)$$

Поделив соотношение (2) на равенства (1) и (3), получаем $\frac{r_2}{r_1} = 1$, что и требуется.

Замечание. К данной задаче можно свести следующую известную задачу об арбелосе Архимеда.

Задача. Пусть окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω внутренним образом в диаметрально противоположных точках A и B и касаются друг друга внешним образом в точке C (рис.2).

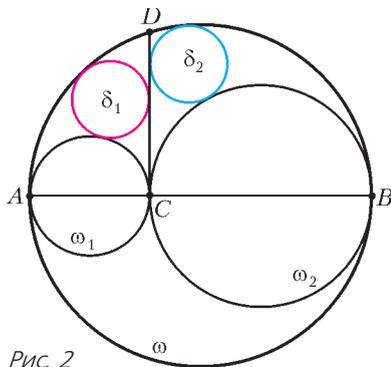


Рис. 2

Пусть перпендикуляр к AB , проведенный через C , пересекает ω в точке D . Тогда окружности δ_1 и δ_2 , вписанные в криволинейные треугольники ACD и $B CD$, равны.

Решение. Пусть δ_1 касается окружности ω_1 и прямой CD в

точках K и L (рис. 3). Тогда, как известно (см., например, задачу М438 «Задачника «Кванта»), прямая BK является общей касательной к ω_1 и δ_1 . Пусть BK пересекает CD в точке M . Впишем в угол BMC окружность γ_2 , касающуюся MC в точке C . Из равенства касательных $MC = MK$ вытекает, что окружности δ_1 и γ_2 , вписанные в вертикальные углы KML и BMC , равны. Из симметрии относительно диаметра AB сле-

дует, что γ_2 касается касательных к ω_1 , проведенных из B . Аналогично, окружность γ_1 , которая касается внутренним образом ω_1 и касательных к ω_2 , проведенных из A , равна окружности δ_2 . Но из задачи М2100 следует равенство окружностей γ_1 и γ_2 .

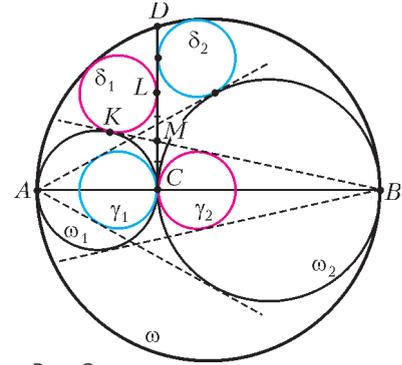


Рис. 3

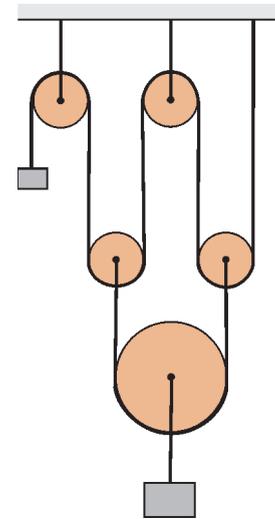
П.Кожевников

Ф2108. Вдоль оси X движется точка. В пределах заданной дистанции скорость точки обратно пропорциональна расстоянию от нее до начала координат. Во сколько раз больше времени она тратит на прохождение второй дистанции по сравнению с первой?

Движение точки не равноускоренное, готовых формул тут нет. Но можно решить задачу совсем просто. Построим график зависимости величины $1/v$ (обратной скорости) от координаты x – получится прямая. Площадь под этой прямой, точнее – под участком графика между координатами x_1 и x_2 , есть время движения от x_1 до x_2 . Это легко доказать, но достаточно просто и сообразить. Получается отношение нужных нам площадей 3:1. Итак, время прохождения второй половины дистанции втрое больше, чем первой.

А.Простов

Ф2109. В системе, изображенной на рисунке, большой груз вдвое тяжелее малого. Блоки одинаковые, очень легкие. Нити нерастяжимые, массы нитей пренебрежимо малы, свободные куски нитей вертикальны. Найдите ускорение большого груза.



Обозначим натяжение верхней нити T . Тогда на нижний груз массой $2M$ действует сила натяжения $4T$. Малые подвижные блоки имеют одинаковые ускорения – блоки одинаковые, силы одинаковые (впрочем, можно считать их ускорения и не одинаковыми, решение будет более громоздким, но ответ не изменится). Если обозначить эти ускорения буквой a , то ускорение нижнего груза тоже будет равно a , а ускорение верхнего груза массой M составит $4a$ и будет направлено вверх. Может быть, при решении ускорение получится отрицательным – там будет видно...

Теперь запишем уравнения динамики для обоих грузов:

$$T - M \cdot g = M \cdot 4a, \quad 2M \cdot g - 4T = 2M \cdot a.$$

Решая эту простую систему, получим

$$a = -\frac{g}{9}.$$

И в самом деле ускорение отрицательное.

Итак, ускорение большого груза направлено вверх и составляет по величине $g/9$.

А.Повторов

Ф2110. Яма имеет полусферическую форму, ее радиус $R = 1$ м, стенки гладкие. На уровне горизонтального диаметра приклеено очень маленькое тело. Оно отклеивается и начинает скользить вниз без начальной скорости. Внизу небольшой кусочек поверхности шероховатый, коэффициент трения там $\mu = 0,1$, шероховатый кусочек имеет форму круга, его радиус $r = 1$ см, центр круга находится около самой нижней точки поверхности ямы. Какая часть начальной потенциальной энергии тела выделится при первом преодолении шероховатого кусочка?

Скорость тела перед шероховатым кусочком внизу – он совсем мал, поэтому разность высот примем равной радиусу сферы R – равна

$$v = \sqrt{2gR}.$$

Тогда сила нормальной реакции составляет

$$N = mg + \frac{mv^2}{R} = 3mg.$$

Сила трения практически постоянна:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu \cdot 3mg,$$

и потери энергии равны

$$\Delta W = F_{\text{тр}} \cdot 2r = 6\mu mgr.$$

Доля потерь составляет

$$\delta = \frac{\Delta W}{W} = \frac{6\mu mgr}{mgR} = 0,6\%.$$

Приближения оправданы.

Р.Теплов

Ф2111. В сосуде находится смесь одинаковых масс криптона и гелия при давлении 1 атм и температуре 300 К. Проследим за одним атомом криптона. Оцените число его соударений с другими частицами за 1 час.

Атомы криптона намного тяжелее атомов гелия, поэтому при расчете ударов можно учитывать только соударения атомов криптона с атомами гелия. (Удары атомов криптона о стенки и друг о друга происходят гораздо реже, мы их просто не будем учитывать – в рамках очень приближенной модели соударений частиц это вполне допустимо.) Итак, мы должны посчитать удары тяжелых частиц о легкие, однако намного понятнее, как посчитать число ударов легких частиц о тяжелые (это те же самые удары!). При расчете будем считать тяжелые частицы неподвижными – тогда нужно просто найти боковую поверхность этой (тяжелой) частицы и считать удары так же, как считают удары о стенки сосуда.

Примем диаметр атома криптона равным 0,6 нм, диаметр атома гелия 0,2 нм (эти данные легко найти в справочниках, можно поискать их в Интернете – я там их нашел за 3 минуты). В таком случае площадь

поверхности одного атома криптона примерно равна $S = 1 \cdot 10^{-18}$ м². В задаче не задан объем сосуда – это, может быть, ошибка, ведь при достаточно большом интервале времени (а 1 час – это большой интервал, за это время атомы успеют многократно побывать во всех местах сосуда, а не только в какой-то малой его части, определяемой скоростями частиц и длиной свободного пробега) объем сосуда нам может понадобиться. Заддим объем сосуда самостоятельно – возьмем, скажем, 1 л. Количество частиц в сосуде найдем обычным способом: $N = N_A pV / (RT) = 2,4 \cdot 10^{22}$, при этом концентрация частиц получится $n = 2,4 \cdot 10^{25}$ 1/м³. При равных массах газов на долю тяжелого криптона приходится примерно 1/22 общего количества атомов, т.е. примем число атомов криптона равным $1 \cdot 10^{21}$. Теперь подсчитаем (очень приблизительно!) число ударов:

$$N_{\text{уд}} = 0,5nSv_x\tau = \\ = 0,5 \cdot 2,4 \cdot 10^{25} \cdot 1 \cdot 10^{-18} \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 3600 = 3,5 \cdot 10^{14},$$

где $v_x = 8 \cdot 10^2$ м/с – соответствующая проекция скорости для атомов гелия при этой температуре.

Проверим – а нужно ли было задавать объем сосуда? Можно провести расчет для сосуда побольше, например для 1000 л, получится практически то же число ударов! Проверим теперь формулы – объем сосуда там сокращается:

$$N_{\text{уд}} = 0,5 \frac{p}{kT} S \sqrt{\frac{RT}{M}} \tau$$

(здесь M – молярная масса гелия). Действительно, в эту формулу объем сосуда не входит.

Можно было и сразу догадаться написать общую формулу и увидеть все, а можно было вот так – методом проб и без ошибок.

З.Рафаилов

Ф2112. Давление разреженного газа в сосуде убывает от 1 атм до 0,2 атм при увеличении объема от 2 л до 20 л, при этом зависимость давления от объема линейная. Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. Минимальная температура газа в процессе 200 К.

Ясно, что минимальная температура получится на одном из концов отрезка прямой, который изображает процесс на pV -диаграмме. Сравнивая произведения pV , найдем, что минимальная температура соответствует давлению 1 атм и объему 2 л. Можно брать эти величины в любых единицах, мы будем только сравнивать эти произведения. Итак, температура 200 К соответствует произведению 2 атм · л.

Продолжим отрезок до пересечения с осями диаграммы – получим давление 49/45 атм при нулевом объеме и объем 49/2 л при нулевом давлении. Максимальная температура соответствует середине этого расширенно-го отрезка:

$$\frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}} = \frac{(49/90)(49/4)}{2}, \text{ и } T_{\text{max}} = \frac{49 \cdot 49 \cdot 200}{90 \cdot 4 \cdot 2} \text{ К} \approx 667 \text{ К}.$$

А.Повторов

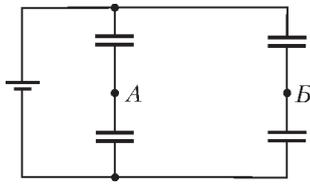
Ф2113. Вольтметр и миллиамперметр соединены последовательно и подключены к батарее, при этом приборы показывают 6,1 В и 1 мА. Параллельно миллиамперметру подключают второй вольтметр – показания первого вольтметра увеличиваются до 6,3 В, а второй вольтметр (он того же типа, что и первый) показывает 0,4 В. Какой ток теперь течет через миллиамперметр? Батарею можно считать идеальной.

Ток через вольтметр пропорционален напряжению, которое он показывает. При напряжении 6,1 В ток через первый вольтметр был равен 1 мА, тогда для искомого тока можно записать

$$I = 1 \text{ мА} \frac{6,3 \text{ В}}{6,1 \text{ В}} - 1 \text{ мА} \frac{0,4 \text{ В}}{6,1 \text{ В}} \approx 0,97 \text{ мА}.$$

Р.Александров

Ф2114. В схеме, изображенной на рисунке, три конденсатора одинаковые и имеют емкость C каждый, а



один имеет втрое большую емкость. Между точками А и В включают катушку индуктивностью L . Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Батарея имеет напряжение U .

Пусть, для определенности, конденсатор емкостью $3C$ находится внизу справа. Энергию конденсаторов до подключения катушки легко найти: общая емкость системы $C_1 = 5C/4$ и энергия

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{5}{8} C U^2.$$

После подключения катушки по ней начинает течь ток, заряды конденсаторов меняются, ток течет и через батарею – в балансе энергий нужно учитывать и ее работу. При максимальном токе через катушку ЭДС индукции нулевая, нижние конденсаторы соединены параллельно, верхние – тоже. Полная емкость при этом $C_2 = 4C/3$, энергия конденсаторов

$$W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{2}{3} C U^2.$$

Батарея «протокнула» дополнительный заряд $q = (C_2 - C_1)U = CU/12$ и совершила работу

$$A = qU = \frac{1}{12} C U^2.$$

Максимальный ток катушки найдем из баланса энергий:

$$\frac{LI^2}{2} = A - (W_2 - W_1) = \frac{1}{24} C U^2, \text{ и } I = \frac{U}{2} \sqrt{\frac{C}{3L}}.$$

А.Мостиков

Ф2115. Катушка индуктивностью $L = 2$ Гн и резистор сопротивлением $R = 100$ Ом соединены параллельно. В некоторый момент к этой цепочке подключают источник постоянного тока силой $I_0 = 3$ А («источник постоянного тока» создает в нагрузке

постоянный по величине ток, не зависящий от свойств нагрузки). Найдите количество теплоты, которое выделится в резисторе за большое время.

Сразу после подключения источника ток через катушку не течет, весь ток I_0 протекает через резистор. Затем ток через катушку понемногу увеличивается, спустя очень большое время после подключения ток через резистор станет пренебрежимо малым, а ток через катушку практически достигнет величины I_0 .

Обозначим ток через резистор I – это функция времени, тогда ток через катушку $I_L = I_0 - I$. Напряжение резистора равно величине ЭДС индукции:

$$-L \frac{\Delta I_L}{\Delta t} = RI, \text{ или } L \Delta I = RI \Delta t.$$

Умножим обе части этого уравнения на величину I – мы хотим получить в правой части количество теплоты, выделившееся в резисторе за малый интервал времени Δt . В левой части получается выражение, которое легко преобразовать (учитывая малость Δt):

$$LI \Delta I = L \Delta \left(\frac{I^2}{2} \right).$$

Суммируя полученные слева и справа малые «дольки», получим в левой части произведение индуктивности на разность квадратов токов через катушку в конце и в начале процесса, а в правой части – суммарное количество теплоты Q , выделившееся в резисторе. Тогда окончательно

$$Q = \frac{LI_0^2}{2} = 9 \text{ Дж}.$$

З.Катушкин

Ф2116. Вдоль прямого участка дороги стоят люди – они встречают дорогого гостя из далекой страны. Интервал между встречающимися составляет 0,5 м. Один из встречающих делает шаг в сторону и тут же возвращается на место. Через 2 с то же самое делает его сосед справа, и так далее. С большой высоты кажется, что вдоль шеренги бежит волна. Определите скорость этой волны и ее длину.

Фронт этой волны проходит расстояние 0,5 м за 2 с – скорость волны получается 0,25 м/с. А вот длину волны найти не получится – колебания в этой волне не гармонические. Можно их представить в виде суммы гармонических волн разных длин – «гармоник». Длина самой длинноволновой гармоники окажется равной расстоянию между соседями в ряду, т.е. 0,5 м.

А.Гостев

Ф2117. До сих пор любители высококачественного звучания используют усилители звуковой частоты на электронных лампах – они уверены, что качество звучания музыки в этом случае намного лучше, чем при использовании транзисторов (автор задачи не разделяет их уверенности). Рассмотрим практический случай: громкоговоритель имеет сопротивление 4 Ом и для его подключения к усилителю требуется понижающий трансформатор. Выходной каскад усилителя низкой частоты (УНЧ) содержит одну мощную электронную лампу – ее анодный ток может

быть в пределах от 20 до 100 мА, напряжение на аноде этой лампы при таких изменениях анодного тока должно находиться в пределах от 40 до 300 В. Какая «выходная мощность» может быть у такого усилителя? Каков должен быть коэффициент трансформации у выходного трансформатора для получения этой мощности?

Если подключить громкоговоритель прямо в анодную цепь, то звуковая мощность получится совсем малой. Если, как обычно делается, оценивать эту мощность на гармоническом, синусоидальном сигнале – на вход усилителя от генератора низкой частоты подается синусоидальный сигнал (как правило, используют сигнал с частотой 1000 Гц – впрочем, это не принципиально). Для того чтобы искажения усиливаемого сигнала не были недопустимо большими, удвоенная амплитуда тока в анодной цепи должна укладываться в диапазон токов 20 – 100 мА (при сопротивлении громкоговорителя 4 Ом в диапазон допустимых напряжений мы заведомо укладываемся), т.е. амплитуда тока через громкоговоритель не должна превышать примерно

28 мА. Это дает «выходную» мощность

$$P = 0,5 \cdot (0,028)^2 \cdot 4 \text{ Вт} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Малость этой величины связана с тем, что мы не используем возможного «размаха напряжения».

Включим громкоговоритель через понижающий трансформатор с отношением числа витков первичной обмотки к числу витков вторичной обмотки n . В этом случае напряжение на громкоговорителе уменьшится в n раз, а ток возрастет во столько же раз – по сравнению с величинами в анодной цепи. Для удвоенных максимальных амплитуд тока и напряжения получим простое соотношение, откуда найдем n :

$$80 \cdot 10^{-3} \cdot n = \frac{260}{n}, \quad n^2 = \frac{260}{80 \cdot 10^{-3}} = 3250, \quad n = 57.$$

Именно таким должен быть коэффициент трансформации у выходного трансформатора. В этом случае выходная мощность получится

$$P' = \frac{80 \cdot 10^{-3} \cdot 260}{16} \text{ Вт} = 1,3 \text{ Вт}.$$

А.Зильберман

Интервью с А.Кузнецовым

(Начало см. на с. 24)

идти домой из школы, когда прибежал мой одноклассник, который сказал, что завтра будет районная олимпиада по математике и что мне туда обязательно надо пойти. Конечно, может быть, и без этого мне кто-нибудь позвонил бы и сообщил эту информацию, но может и нет. На районной олимпиаде я занял второе место, в результате чего получил приглашение на вступительные экзамены в 57-ю школу. Экзамены я успешно сдал и поступил в 8 класс. Эта школа многое мне дала. Во-первых, знания, которые мне очень помогли – например, за это время мы успели пройти почти полный курс первого года обучения на мехмате (и еще часть второго), что в дальнейшем позволило на первом курсе изучать более продвинутые вещи. Во-вторых, я познакомился со многими сверстниками, разделяющими мое увлечение математикой, а вместе учиться всегда легче. В-третьих, я увидел много замечательных людей среди учителей, которые стали для меня примером в дальнейшем (особенно здесь мне хотелось бы отметить моего учителя математики Рафаила Калмановича Гордина).

Следующее важное событие произошло так. Во время учебы в старших классах я исправно ходил на олимпиады (математические и физические). Очень больших успехов у меня там не было (максимальное достижение – третье место на городской олимпиаде), но общий уровень, видимо, был достаточно неплохим. Поэтому летом после окончания школы и после вступительных экзаменов в университет меня пригласили в летний лагерь Турнира городов. Летний лагерь – это замечательное мероприятие, придуманное (как и сам Турнир городов) Николаем Николаевичем Константиновым. Туда приглашаются школьники-старшеклассники, хорошо выступающие в олимпиадах, а также студенты-младшекурсники, хорошо выступавшие на олимпиадах в недавнем прошлом. Школьникам предлагаются задачи, которые они решают под руководством студентов. В этом лагере я познакомился с несколькими второкурсниками, которые мне в дальнейшем очень помогли. Игорь Пак и Саша Постников стали моими первыми соавторами, а статья, которую мы с

ними через два года написали, была развитием задачи, которую я решал в этом лагере. А Сережа Архипов очень мне помог в дальнейшем обучении и в выборе научного руководителя. В частности, он мне посоветовал ходить на семинар Израиля Моисеевича Гельфанда, где я увидел много замечательных математиков (таких как Саша Бейлинсон, Витя Гинзбург, Боря Фейгин) и познакомился с Леной Посицельским. Ему, в тот момент третьекурснику, Гельфанд поручил обучать младшекурсников «математике», т.е. вещам, которые не входят в программу обучения на мехмате, но совершенно необходимы для научных исследований. Лена меня научил очень и очень многому. Уверен, что без его «спецкурсов» мне пришлось бы намного сложнее.

Самое большое влияние на меня, конечно же, оказал мой научный руководитель – Алексей Игоревич Бондал. И прежде всего следует сказать даже не о знаниях, которые я от него получил, а о способе мышления, умении широко и правильно взглянуть на поставленную задачу.

4. Как много времени Вы уделяете профессиональной деятельности? Как используете компьютер?

В идеале математик работает все время. На самом деле, если задача, которую вы решаете, вам интересна, то ваши мысли все равно вольно или невольно к ней возвращаются. Но в реальности, конечно, так не получается. Всегда находится множество дел, отвлекающих от работы. А компьютер для математика имеет второстепенное значение. Конечно, он незаменим для написания статей (раньше обходились бумагой и ручкой, но сейчас уже другие времена), а также для поиска и просмотра нужных статей и книг. Кроме того, некоторые математики используют компьютер для вычислений.

5. Какие у Вас увлечения помимо математики?

Во время учебы в школе и университете я регулярно ходил в походы. Сейчас у меня редко возникает такая возможность, но если удастся, я с удовольствием ею пользуюсь.

Мы поздравляем Александра Геннадьевича и желаем ему новых ярких математических открытий!

Так как катодные лучи несут заряд отрицательного электричества, они отклоняются электростатической силой, как если бы они были отрицательно наэлектризованы, и на них действует магнитная сила таким образом, как эта сила действовала бы на отрицательно наэлектризованное тело, движущееся по траектории этих лучей.

Джозеф Джон Томсон

...ко мне пришел страшно возбужденный Гейгер и сказал: «Нам удалось наблюдать α -частицы, возвращающиеся назад». Это было самым невероятным событием, которое мне пришлось пережить.

Эрнест Резерфорд

На снимках обнаруживались время от времени прямые пути частиц неизвестного происхождения, почти не отклоняемые магнитным полем, но по своему ионизирующему действию не отличающиеся сколько-нибудь от быстрых β -лучей.

Дмитрий Скобельцын

Такие устройства, как циклотрон и синхротрон, ускоряют частицу до высоких энергий, заставляя ее многократно проходить через сильное электрическое поле. А на своей орбите частицу удерживает магнитное поле.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ?

Практически всякий раз фрагменты из работ выдающихся ученых, предваряющие очередной выпуск нашей рубрики, выстраиваются в своеобразный «краткий курс» истории того или иного физического направления. Нынешняя же тема оказалась настолько обширна и необъятна, что на нее нанизываются почти все ответвления современной физики, хронологическим рубежом которой называют самый конец XIX века, когда одно за другим последовали блестящие достижения – такие, как открытия электрона и радиоактивности.

Можно сказать, что обнаружение элементарных заряженных частиц – мельчащих структурных составляющих материи – словно подхлестнуло исследователей к дальнейшему поиску, сулившем совершенно новое представление об окружающем нас мире. Но не только: для изучения и управления микроскопическими «невидимками» потребовались такие хитрые сочетания полей, такая аппаратура, такие технологии, которые буквально на глазах стали менять производство и быт, энергетику и средства связи – одним словом, привели к промышленной и информационной революции, плоды которой мы пожинаем до сих пор.

Вот и сегодня, накануне запуска в Швейцарии самого крупного и самого мощного ускорителя элементарных частиц, когда-либо созданного разумом руками человека, мы ожидаем беспрецедентных открытий, развивающих, а, может быть, и переворачивающих наши знания о строении вещества и об устройстве Вселенной.

В расчете на то, что и на вашу долю достанется еще немало сложных и интересных проблем, касающихся частиц и полей, начнем с более простых, но не менее увлекательных задач.

Вопросы и задачи

1. Почему в комнатных условиях, даже при всех мерах предосторожности, электроскоп обязательно разрядится?

2. Металлический незаряженный диск приводится в быстрое вращение. Электромметр, присоединенный с помощью контактов к центру и к периферии диска, показывает, что между ними возникла разность потенциалов. Каков ее знак?

3. Какую траекторию опишет электрон, пролетая между пластинами плоского конденсатора, на которые подано: а) постоянное напряжение; б) переменное напряжение достаточно высокой частоты?

4. Две пересекающиеся плоскости равномерно заряжены отрицательным зарядом. В некоторой точке между плоскостями помещен радиоактивный источник. Что представляют собой траектории движения положительно и отрицательно заряженных частиц, испускаемых источником?

5. При отсутствии внешнего электрического поля электроны, вылетающие из катода вакуумного диода, не рассеиваются в окружающем пространстве, а большей частью возвращаются на поверхность катода. Чем это можно объяснить?

6. Скорость движения электронов между электродами вакуумного диода достигает тысяч километров в секунду, а в металлических проводниках анодной цепи – миллиметров в секунду. Одинаковы ли силы тока в диоде и в проводниках?

7. Коллимированный пучок заряженных частиц, т.е. пучок, в котором все частицы имеют одно и то же направление скорости, под влиянием кулоновских сил постепенно расходится. Как зависит этот эффект от скорости частиц?

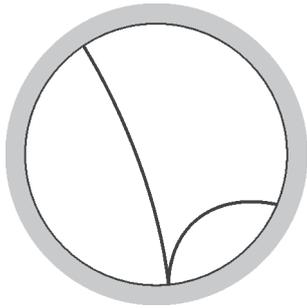
8. От каких характеристик частицы зависит форма ее траектории при движении в гравитационном поле, электрическом поле, магнитном поле?

9. Как будет изменяться радиус траектории заряженной частицы, движущейся по окружности в однородном магнитном поле, с увеличением ее удельного заряда?

10. По длинному прямому металлическому проводу течет электрический ток. Можно ли избавиться от его магнитного поля, устремившись вдоль провода со скоростью, равной средней скорости упорядоченного движения электронов в нем?

11. Почему частица, обращающаяся в неоднородном магнитном поле, «отражается» от области, где индукция этого поля увеличивается?

12. Можно ли считать дугой окружности траекторию движения заряженных частиц, влетевших в камеру

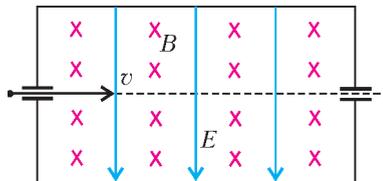


Вильсона перпендикулярно линиям однородного магнитного поля?

13. На рисунке представлены следы электрона и позитрона, полученные в камере Вильсона, находившейся в магнитном поле, направленном от читателя перпендикулярно рисунку. Какой из следов принадлежит электрону, а какой –

позитрону? Какая частица имеет большую кинетическую энергию?

14. Увеличение скорости заряженных частиц в циклотроне осуществляется исключительно за счет воздействия на частицы электрического поля. Зачем же утяжеляют и удорожают эти установки, заботясь о действии на частицы еще и магнитного поля?



15. Как действует изображенный на рисунке «фильтр скоростей»? Внутри прибора созданы однородные электрическое и магнитное поля, направленные перпендикулярно друг к другу и к начальной скорости частиц.

16. Почему в Канаде северные сияния бывают чаще, чем в Сибири, расположенной на той же географической широте?

17. Для инициирования ядерных реакций деления чаще всего используется бомбардировка ядер нейтронами. А почему для этой цели менее пригодны, скажем, протоны или электроны?

Микроопыт

Наклейте на обычную осветительную лампу полоску металлической фольги и присоедините ее проводком к электроскопу. Зарядите электроскоп положительно и включите ток в лампе. Повторите опыт, зарядив электроскоп отрицательно. Чем объяснить, что в первом случае при включении тока листки электроскопа спадают, а во втором – нет?

Любопытно, что...

...знаменитым опытам Дж.Дж.Томсона с катодными лучами предшествовала почти сорокалетняя работа физиков разных стран по изучению электрического разряда в разреженных газах. Считалось, что эти лучи – либо поток молекул, зарядившихся отрицательно при столкновении с катодом, либо новый вид электромагнитных волн, отклоняющихся, в отличие от обычного света, магнитным полем. Лишь Томсону в длинной серии экспериментов удалось добыть к 1897 году решающие доказательства того, что катодные лучи состоят из электронов. Так была открыта первая элементарная частица.

...задача по определению заряда и массы α - и β -частиц, возникшая сразу после обнаружения радиоактивности, привела со временем к созданию масс-спектрографов – приборов, использующих электрическое и магнитное поля для измерения масс мельчайших ионов. Первый из них был построен в 1919 году Фрэнсисом Астоном, учеником Дж.Дж.Томсона, открывшего за

семь лет до этого события существование изотопов.

...вращение заряженных частиц в магнитном поле открыл еще в 1895 году английский физик Джозеф Лармор. В дальнейшем идея удержания частиц с помощью этого поля была очень хорошо отработана при создании ускорителей – в них частицы совершают миллионы оборотов по круговой орбите и могут жить на ней многие часы. А вот проблему магнитного удержания – изоляции – высокотемпературной плазмы в термоядерных реакторах не удалось еще окончательно решить.

...применение магнитных полей с определенными сложными конфигурациями в опытах на ускорителях позволяет фокусировать пучки частиц подобно тому, как оптические линзы фокусируют световые лучи.

...открытые в 1910 году космические лучи стали интенсивно изучаться в том числе и с помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле. Именно она позволила наблюдать аномальные следы, приведшие к обнаружению в 1932 году позитрона – «электрона с положительным зарядом».

...в отличие от переменных потоков солнечных космических лучей, галактические и метagalacticкие лучи – это мало изменяющиеся во времени потоки атомных ядер. Самая важная их особенность – энергия частиц, достигающая 10^{21} эВ, что на несколько порядков выше энергий, получаемых на рукотворных установках. Таким образом, Вселенная оказывается как бы гигантским ускорителем атомных ядер.

...в 1985 году с острова Керселен в Индийском океане стартовала геофизическая ракета с небольшим ускорителем частиц. На определенной высоте он испустил поток электронов, в дальнейшем двигавшихся вдоль линии земного магнитного поля и вызвавших искусственное полярное сияние над Архангельской областью. Эти эксперименты предназначались для изучения механизма возникновения северных сияний, структуры магнитного поля Земли, процессов в ее ионосфере и их влияния на погоду.

...о масштабах современных исследований в физике элементарных частиц можно судить по параметрам Большого адронного коллайдера, готовящегося к пуску в Женеве. Периметр его кругового туннеля, залегающего на глубине примерно 100 метров под землей, составляет 27 километров; сверхпроводящие магниты разгонят протоны до энергии 7 ТэВ и затем будут сталкивать их друг с другом с частотой 800 миллионов раз в секунду; в планировании и финансировании строительства коллайдера приняли участие более двух десятков стран, в числе которых и Россия.

Что читать в «Кванте» о частицах и полях

(публикации последних лет)

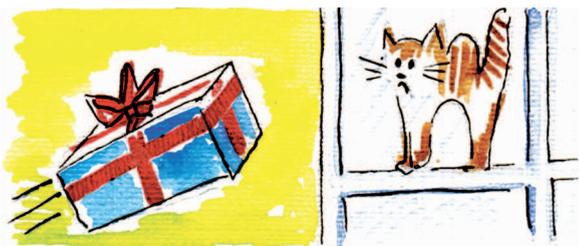
1. «Следы в камере» – 2003, № 3, с. 40;
2. «Магнитное поле» – 2004, № 4, с. 47;
3. «Калейдоскоп «Кванта» – 2005, № 1, с. 32;
4. «Заряженные частицы в магнитном поле» – 2006, № 4, с. 40;
5. «Движение заряда в магнитном поле» – 2007, № 5, с. 42;
6. «Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия» – 2008, № 5, с. 47.

Материал подготовил А.Леонвич

Задачи

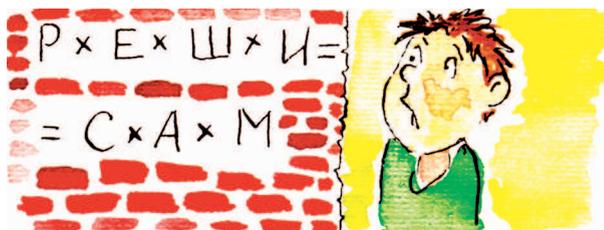
1. Назовем кирпичом прямоугольный параллелепипед, у которого длина, ширина и высота различны. Можно ли поверхность какого-нибудь кирпича оклеить без перекрытий пятью бумажными квадратами? (Квадраты разрешается перегибать через ребра, размеры их не обязательно одинаковы.)

А.Шаповалов



2. Может ли быть верным равенство $P \times E \times \text{Ш} \times И = C \times A \times M$, если в нем каждая буква заменяет некоторую цифру, причем разные буквы заменяют разные цифры?

Ю.Эвнин



3. Десять точечных кузнечиков сидят на столе, образуя некоторую фигуру. Известно, что каждый из кузнечиков может отдельно от остальных перепрыгнуть из начального положения на некоторое новое



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

место (а другие при этом останутся неподвижными) так, что снова получится та же самая фигура (только, возможно, по-другому расположенная). Как такое может быть?

Фольклор

4. В кинотеатре «Будь здоров!» 20 рядов по 25 мест в каждом и все места заняты. В кинотеатре принято правило: если зритель чихнет во время сеанса, то он должен отдать каждому из своих соседей по рублю. Вначале у всех было одинаковое количество денег. Дима чихнул и расплатился. Какое наименьшее число раз должны еще чихнуть зрители, чтобы у всех снова стало поровну денег? (Соседями считаются сидящие спереди, сзади, слева и справа, у каждого зрителя может быть от двух до четырех соседей.)

Д.Калинин



5. У меня есть двое электронных часов – наручные и настенные, идут они всегда правильно (время показывают цифрами). Стоя у зеркала, я взглянул на наручные часы – было 12:05. Я перевел взгляд на



зеркало: в нем отражались и наручные, и настенные часы, но показывали они в зеркале разное время и ни одно не совпадало с реальным. Как такое могло быть?

А.Толпыго

Иллюстрации Д.Гришуквой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. Можно ли отметить несколько клеток на поверхности кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы на каждом кольце из 12 клеток, опоясывающем кубик, было отмечено ровно по 5 клеток?

А.Грибалко

17. В треугольном парке есть три дорожки: синяя, зеленая и красная. Каждая дорожка делит парк на две части равной площади. Вместе дорожки делят парк на 7 частей: четыре «треугольных» и три «четырёхугольных» (рис.1). Может ли так быть, что из двух частей, примыкающих к одной и той же стороне парка, «четырёхугольная» всегда не меньше по площади, чем «треугольная»?

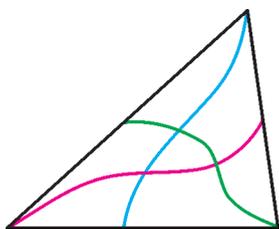


Рис. 1

Может ли так быть, что из двух частей, примыкающих к одной и той же стороне парка, «четырёхугольная» всегда не меньше по площади, чем «треугольная»?

Г.Гальперин

18. Дан восьмиугольник «лесенка» (рис.2). Можно ли из нескольких одинаковых «лесенок» сложить

восьмиугольник той же формы, но большего размера?

С.Маркелов

19. Имеются 1000 бутылок с вином, в одной из них вино испорчено. Имеются также 10 белых мышей, с помощью которых нужно обнаружить плохое вино. Если мышь выпьет плохого вина, ровно через 10 минут она приобретет яркую фиолетовую окраску. Разрешается накапать вина из разных бутылок каждой мыши и дать им выпить одновременно, а потом ждать. Придумайте способ, позволяющий через 10 минут и 1 секунду определить бутылку с испорченным вином.

Г.Гальперин

20. Положительные числа a и b удовлетворяют равенству $a + b + 1 = 3ab$. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$.

Р.Пиркулиев

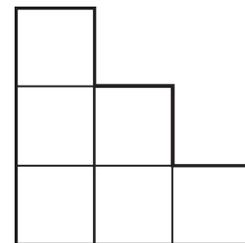


Рис. 2

Математическая сказка

УЦАРЯ-БЮРОКРАТА ПОДДАННЫЕ ОБЪЕДИНЯЮТСЯ В ТАЙНЫЕ ОБЩЕСТВА. Каждое подмножество подданных рассматривается как тайное общество. Для эффективного контроля царь хочет, чтобы на каждое тайное общество кто-то доносил. Однако каждый в состоянии писать доносы только на одно тайное общество. Докажите, что царю для этой цели не хватит людей, даже если население страны бесконечно.

Решение. Назовем человека *порядочным*, если он доносит только на то тайное общество, членом которого он не состоит.

Порядочные люди существуют. Иначе каждому пришлось бы доносить на общество, состоящее только из него самого (любой, кто доносит на общество, состоящее из единственного другого гражданина, порядочен по определению). Такая ситуация не только про-

тиворечит здравому смыслу, но и невозможна математически — другие подмножества окажутся неохваченными.

Кто доносит на множество всех порядочных людей?

Если он порядочен, то он доносит на общество, членом которого состоит, т.е. непорядочен. Если же он непорядочен, то он доносит на общество, членом которого не является, — т.е. порядочен. Противоречие.

Сказка — ложь, да в ней намек: множество всех подмножеств любого множества имеет большую мощность, чем исходное множество.

Замечание. Если подданных не больше одного, то затея царя не осуществится, если для полноты отчетности он будет требовать, чтобы доносили и на пустое множество.

И.Рубанов, А.Канель-Белов

Абу-л-Вафа и циркуль постоянного раствора

Г. ФИЛИППОВСКИЙ

МАТЕМАТИК И АСТРОНОМ ИЗ ХОРАСАНА (ИРАН) Абу-л-Вафа (940–998) с 20 лет жил и работал в Багдаде – крупнейшем научном центре арабского халифата. Он написал руководство по практической арифметике, в котором показал, как работать с обыкновенными дробями, и первым в Багдаде стал использовать отрицательные числа. Абу-л-Вафа написал комментарии к Евклиду, Птолемею, Диофанту. В своих астрономических трудах он впервые пользуется секансом и косекансом, составляет более точные таблицы синусов, тангенсов и котангенсов, доказывает теорему синусов.

Что касается геометрии, то здесь Абу-л-Вафа пишет оригинальное сочинение: «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений». В ней он приводит разнообразные построения, применявшиеся в архитектуре, технике, землемерии. Одна из глав книги посвящена решению задач на составление квадрата из нескольких квадратов. Вот пример такой задачи, носящей сегодня его имя:

Задача Абу-л-Вафы. *Способом разрезания составьте квадрат из трех данных равных квадратов.*

Решение. Возьмем два данных квадрата, разрежем их по диагонали. Полученные части приложим диагоналями к сторонам третьего квадрата $ABCD$ (рис.1,а). Поскольку $\triangle KTE = \triangle NTA$ – по стороне и двум углам (рис.1,б), – то треугольником KTE можно заполнить

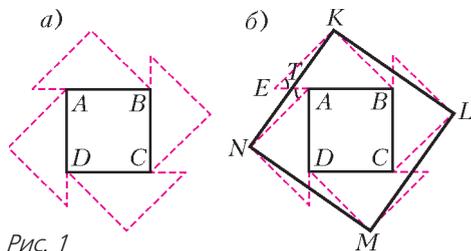


Рис. 1

пустоту на месте треугольника NTA . Выполнив аналогичные операции еще три раза, получим квадрат $KLMN$.

Однако наибольший интерес для нас в геометрии представляют задачи Абу-л-Вафы на построение, в которых, помимо линейки, используется циркуль постоянного раствора («заржавленный» циркуль, как позже скажет Леонардо да Винчи). Циркулем постоянного раствора пользовались и в Индии, и в Древней Греции. Это было обусловлено тем, что при измерениях на местности часто неудобно (или даже невозможно) проводить окружности разных радиусов.

Тем не менее, именно Абу-л-Вафа впервые систематизировал задачи с циркулем постоянного раствора, поместив в своей книге по практической геометрии около 15 таких задач. О некоторых из них мы и поведем

дальнейший рассказ, где наряду с решениями Абу-л-Вафы будут представлены более поздние и даже современные решения. Все следующие задачи выполняются с помощью линейки и циркуля постоянного раствора, равного R .

Задача 1. *Через данную точку K проведите прямую, параллельную к прямой l (рис.2).*

Решение. На прямой l дважды отложим отрезки, равные R ($AB = BC = R$). Порядок дальнейших операций укажем лишь цифрами (так, на первом шаге проводим прямую AK , на втором – проводим через точку C произвольную прямую, пересекающуюся с AK , и так далее). KN – искомая прямая (почему?).

Задача 2. *Разделите данный отрезок: а) пополам;*

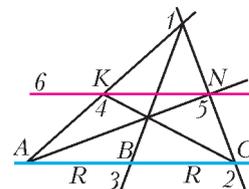


Рис. 2

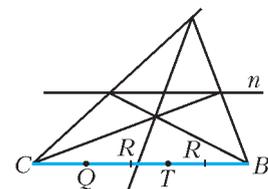


Рис. 3

б) на n равных частей; в) в отношении $m:n$.

Решение. а) Пусть дан отрезок BC . Отложив на прямой BC два отрезка, равных R ($BT = TQ = R$), проведем прямую $n \parallel BC$, как мы делали это в задаче 1 (рис.3). Затем, как и в задаче 1, воспользуемся **леммой о трапеции**: *середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.*

б) Пусть, например, $n = 5$.

Проведем произвольный луч f , выходящий из точки C . Отложим на луче f пять отрезков, равных R (рис.4). Соединим последнюю точку деления E с B . Проведя через точки деления F, G, K, N прямые, параллельные BE , получим требуемое. Таким образом, построение совпадает с классическим.

в) Как и в пункте б), откладываем на луче f отрезок R всего $m + n$ раз. Например, на рисунке 4 показано, как разделить BC в отношении $3:2$ и $4:1$.

Задача 3. *Постройте биссектрису угла.*

Решение. Решение показано на рисунке 5.

Задача 4. *Постройте угол, равный данному углу BAC .*

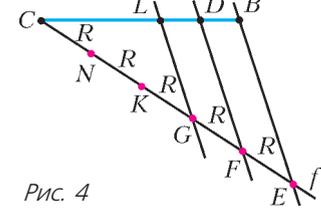


Рис. 4

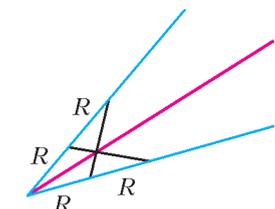


Рис. 5

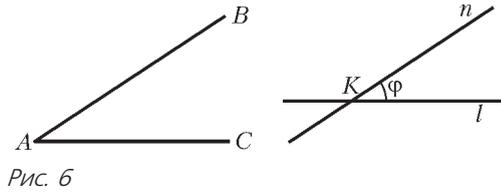


Рис. 6

Решение. Через произвольную точку K проводим $n \parallel AB$ и $l \parallel AC$ согласно задаче 1 (рис.6). Очевидно, что $\varphi = \angle BAC$.

Задача 5. Из точки T вне прямой l проведите перпендикуляр к l , а из точки K , лежащей на прямой l , восставьте перпендикуляр к l .

Решение. Строим на прямой l отрезки $AB = BC = CD = R$ (рис.7). Окружности с центрами в B и C пересекаются в точках E и F . Нетрудно показать, что $EF \perp l$ (покажите!). Тогда остается через точки T и K провести прямые параллельно EF (задача 1).

Задача 6. Постройте центр данной окружности ω , радиус которой больше R .

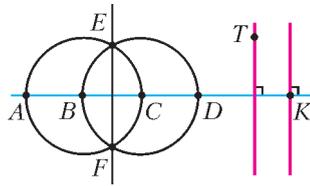


Рис. 7

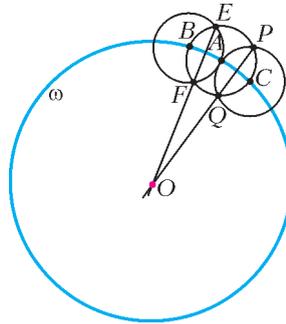


Рис. 8

Решение. Из произвольной точки A на ω строим окружность радиуса R . Она пересекает ω в точках B и C (рис.8). Из B и C как из центров строим такие же окружности. Пусть равные окружности попарно пересекаются в точках E и F , P и Q . Остается доказать, что прямые EF и PQ пересекаются в центре O окружности ω (докажите!).

Задача 7. На данной прямой l отложите отрезок, равный данному отрезку BC .

Решение. Через C проводим произвольную прямую f , не параллельную l . Пусть она пересекает l в точке D (рис.9). Через D проводим прямую, параллельную BC , а через B — параллельную f (задача 1). При этом $DT = BC$ ($BCDT$ — параллелограмм). Далее строим биссектрису $\angle TDQ$ (задача 3). Из T проводим к ней перпендикуляр TN (задача 5), который при продолжении пересекает l в точке K . Очевидно, $DK = DT = BC$.

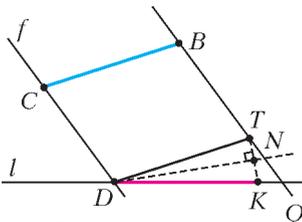


Рис. 9

Задача 8. На данном отрезке BC постройте правильный треугольник ABC .

Решение. Строим равносторонние треугольники BEF и CNK со стороной R (рис.10). Прямые BF и CN пересекутся в искомой вершине A .

Задача 9. В данный круг впишите: а) квадрат; б) правильный шестиугольник.

Решение. а) Находим центр O данного круга (задача

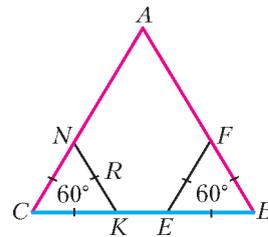


Рис. 10

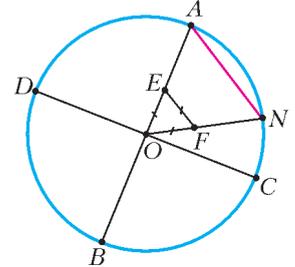


Рис. 11

б) и проводим произвольно диаметр AB (рис.11). Через O проводим перпендикуляр к AB , который пересекает окружность в точках C и D . Тогда $ACBD$ — квадрат, вписанный в данную окружность.

б) От точки O откладываем угол 60° (к отрезку AO) — например, построив равносторонний треугольник OEF со стороной R (рис. 11). Проведенный луч пересекает окружность в точке N . Тогда AN — сторона правильного шестиугольника. Дальнейшее построение проведите самостоятельно.

Задача 10. В данный квадрат $ABCD$ впишите равносторонний треугольник BKN .

Решение. На стороне CD квадрата строим равносторонний треугольник CED (задача 8), а на стороне AD — равносторонний треугольник AFD (рис.12). Прямые BE и BF в пересечении с AD и CD соответственно дадут недостающие вершины K и N равностороннего треугольника BKN (покажите, что $\angle ABK = \angle CBN = 15^\circ$).

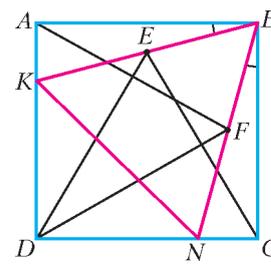


Рис. 12

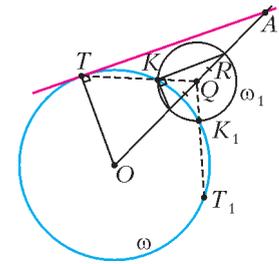


Рис. 13

Задача 11. Из точки A вне окружности ω проведите касательную к ω .

Решение. Находим центр O окружности ω (задача 6). Делим отрезок OA пополам (задача 2,а) — получаем точку Q (рис.13). Из точки Q как из центра радиусом, равным R , строим окружность ω_1 . Пусть ω_1 пересекает ω в точках K и K_1 . Прямые QK и QK_1 пересекут окружность ω в искомых точках касания T и T_1 (покажите это при помощи гомотетии).

Предложите способ построения касательной в случае, когда окружность ω_1 радиуса R с центром в Q не будет пересекать ω .

Задачи для самостоятельного решения

12. Удвойте данный отрезок.

13. На данном отрезке постройте: а) квадрат; б) правильный шестиугольник.

14. В данную окружность впишите правильные n -угольники: а) $n = 3$; б) $n = 8$; в) $n = 10$.

15. В данный равносторонний треугольник впишите квадрат.

Несколько рифмованных физических задач

В. АКИМОВ

Условия задач

1. Кораблик на реке

По реке плывет кораблик,
Он плывет издалека.
Вдруг порывом ветра сдуло
Бескозырку с моряка.

Четверть часа пролетело,
Пока в том разобрались
И с такой же быстротой
За фуражкой погнались.

Где догнать ее сумели?
Вот вопрос для знатока,
Если на четыре мили
Утекает в час река.



2. Спичка в руках

Разломишь спичку пополам,
Часть ты сломай опять.
Скажи же, почему трудней
Второй-то раз ломать?

3. Сизифов труд

Сизиф свой камень в гору тащит
Испокон, как водится.
Для него ведь никогда
Не будет безработицы.

Под камень он рычаг
подсунул:
Часть четвертую его.
Выиграл в три раза в силе.
Это вроде ничего!

С каким выигрышем будет,
Одолее ли «врага»,
Если он теперь возьмется
За второй край рычага?



4. Клоун на канате

Ходит клоун по канату.
В руках держит
полбревна.
Для артиста что важнее –
Вес бревна или длина?

5. Мячик на горке

В горку мы катнули мячик.
Не пойдем до сей поры:
Куда двигался он дольше –
В гору иль опять с горы?

6. Карандаш в графине

В графин с водой уронила
Карандаш Мальвина.
Карандаш не утонул,
Заметил Буратино.

Погрузился карандашик
На три четверти всего.
А теперь скажи, какая
Была плотность у него?



7. Ручной бегемот

Дело было в Африке,
рассказывал мне кто-то.
Может, где сейчас Тунис,
а может... где Лесото?

Собирал прежадный вождь подати с народа
С помощью священного ручного бегемота.

Приплывал на лодке он с весами и солдатом.
Народ уравнивал бегемота златом.
Раскормил животное, и весы сломались.
Над жадностью правителя люди посмеялись.

Тут взбесился вождь. Обязал солдата,
Чтоб отмерил дань воин до заката!
На сложное задание хватило простоты.
А как же в этом случае поступил бы ты?

8. Клад в кувшине

Плакал в лодке рыбак, что
удачи все нет,
Бросил на воду взгляд свой
сконфуженный.
Вдруг увидел на волнах
какой-то предмет
Почти полностью в воду
погруженный.

В реку бросился он,
весь промок и продрог.
Скоро в лодку поднял
из пучины
С печатью сургучной
на пробке кувшин
Трехлитровый,
старинный, из глины.

Распечатав кувшин,
наш герой обомлел,
Душа пела как тысяча дудок –
«Золотые» катились. Отныне семья
Не уснет на голодный желудок.



Вот уж деньги в мешке, кувшин тронулся в путь,
Лишь на треть из воды выступая.
Не завидуя парню, вам надо смекнуть –
У денежек масса какая?

9. Диск в кружке

Давайте опыт проведем
(Мысленный, конечно) –
Фанерный в кружку диск кладем,
Водю заливаем спешно.

Весьма нетрудно предсказать,
Где будет диск потом.
А если опыт повторять
Со ртутью и стеклом?

10. Шуба в жару

В Египет чукча прилетел,
Жара под сорок пять.
Зачем же шубу он надел?
Попробуй угадать.

11. Цунами на суше

В океане цунами
Не ощущаются нами.
Почему же у суши
Они так непослушны?

12. Чайник для заварки

Чайник для заварки чая
Выполнен весьма хитро:
Из фарфора, в форме шара,
Совсем белое нутро.

Сбоку ручка, крышка
с дыркой,
Носик с решетом внутри.
Ты все эти «заковырки»
По науке рассмотри!



Решения задач

1. В системе отсчета, связанной с водой, скорость кораблика постоянна по величине, поэтому до бескозырки он доплывет за четверть часа. Значит, время нахождения бескозырки в воде составляет полчаса. Перейдем теперь в систему отсчета, связанную с берегом. Поскольку время в обеих системах течет одинаково, бескозырка за полчаса уплывет на две мили.

2. При повторном разламывании рычаг становится короче, следовательно, требуется большая сила.

3. В первом случае выигрыш в силе получился не в четыре, а только в три раза. Это означает, что сам рычаг – весомый. Записав условие равновесия рычага, найдем, что масса рычага в шесть раз меньше массы камня. Тогда во втором случае выигрыш в силе получится в 1,2 раза.

4. Шест нужен канатоходцу для сохранения равновесия. То, что шест должен быть тяжелым, это очевидно, и с этим никто не спорит. Однако если распо-

ложить шест не поперек каната, а вдоль него, то уравнивающее свойство шеста исчезает. Значит, важны и его геометрические размеры. При этом оказывается, что для сохранения устойчивости длина шеста играет большую роль, нежели его вес.

5. Когда мячик поднимается в горку, его скорость уменьшают две силы: сила тяжести и сила трения. Когда же мячик спускается с горки, его движению препятствует только сила трения. Это означает, что скатываться с горки мячик будет дольше.

6. Ясно, что плотность карандаша составляет три четверти от плотности воды, т.е. 750 кг/м^3 .

7. Нужно поставить бегемота в лодку и отметить глубину ее погружения. Затем надо убрать бегемота и нагружать лодку золотом до тех пор, пока глубина погружения не станет прежней. В таком случае масса груза будет равна массе бегемота.

8. В первом случае выталкивающая сила уравнивает силу тяжести кувшина и силу тяжести золота. Во втором случае выталкивающая сила, уменьшившаяся на одну треть, уравнивает только силу тяжести кувшина. Отсюда получается, что масса золота составляет 1 кг.

9. Вода, смачивая фанеру, подтечет под диск, появится выталкивающая сила, и фанерный диск всплывет. Ртуть же стекло не смачивает, поэтому она не будет подтекать под стеклянный диск, архимедовой силы не появится, и стеклянный диск останется лежать на дне.

10. Если температура на улице выше температуры человеческого тела, то имеет смысл носить одежду, не пропускающую тепло. Тогда под одеждой температура будет не 45 градусов, а только 36,6.

11. Когда в океане на большой глубине происходит землетрясение, большая масса воды начинает двигаться с небольшой скоростью – как в широкой трубе. У берега – мелководье, «труба» сужается, но объем воды, протекающий через поперечное сечение, должен оставаться неизменным, поэтому скорость движения воды возрастает, со всеми вытекающими отсюда последствиями.

12. Рассмотрим все вопросы по порядку. Для того чтобы чай заварился, в чайнике должна сохраняться высокая температура достаточно продолжительное время – вот почему чайник сделан из вещества с плохой теплопроводностью (фарфор). Чем меньше площадь поверхности тела (при прочих равных условиях), тем оно медленнее остывает, а наименьшая площадь поверхности – у шара. Белый цвет внутренней поверхности чайника предотвращает потери тепла за счет излучения. Ручка нужна для удобства переноски горячего чайника. Если крышка чайника плотно прилегает к корпусу, то при выливании чая внутри чайника образуется объем воздуха с пониженным давлением и заварка перестает вытекать – во избежание этого и делают в крышке отверстие. И наконец, решето в носике мешает попаданию чаинков в чашку.

Метод эквивалентных деформаций

В.ЭПШТЕЙН

МАТЕМАТИКА ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ЕСТЕСТВЕННЫЙ язык, на котором формулируются и решаются физические задачи. И, тем не менее, для понимания элементарных (а может быть, и фундаментальных) оснований науки об окружающем нас мире полезно познакомиться с задачами, решение которых не требует проведения математических расчетов. Так, метод эквивалентных деформаций предполагает ряд мысленных изменений конфигурации (т.е. геометрических размеров и формы) тел, при которых основные характеристики системы остаются неизменными, но ход исследуемых процессов становится очевидным. Вашему вниманию предлагается несколько таких задач.

Задача 1. В небольшом бассейне плавает лодка. Изменится ли (и если изменится, то как) уровень воды в бассейне, если лежащий на дне лодки камень бросить в воду?

Расчетные методы решения этой задачи предложены во многих учебных пособиях. Можно, однако, обойтись и без расчетов.

Подумаем: зависит ли ответ на вопрос, поставленный в задаче, от формы дна лодки, на котором лежит камень? Ясно, что такой зависимости быть не может: в законе Архимеда форма тела, погруженного в жидкость, никакой роли не играет. Тогда будем мысленно «продавливать» камень через дно лодки. Последовательные стадии этого процесса представлены на рисунке 1. На одном из этапов

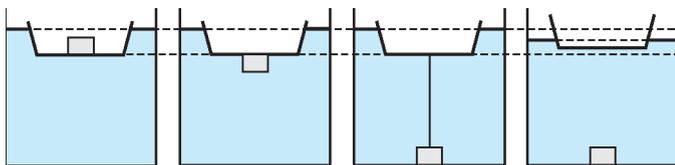


Рис. 1

камень можно представить подвешенным на веревке, привязанной ко дну лодки. Уровень воды, естественно, не изменится, если удлинить веревку так, чтобы камень коснулся дна бассейна. Если же веревку теперь перерезать, то, очевидно, лодка всплывет, и, следовательно, уровень воды понизится.

Задача 2. В стакане плавает кусок льда, содержащий: а) пузырек, наполненный воздухом; б) кусочек пробки; в) стальную гайку. Как изменится уровень воды в стакане, когда лед растает?

Заметим для начала, что если лед однороден, то после его таяния уровень воды не изменится: лед вытесняет ровно столько воды, сколько сам весит и, следовательно, сколько получится при плавлении.

Ясно, что решение задачи не зависит от места расположе-

ния указанных объектов в куске льда. В случае а), к примеру, пузырек можно переместить к поверхности льда (рис.2). Таким образом, наличие пузырька эквивалентно изменению формы однородного льда, плавление которого, как уже говорилось, уровня воды не изменяет.

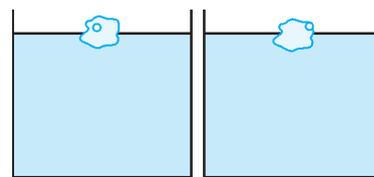


Рис. 2

Следует отметить, что, строго говоря, сказанное выше справедливо лишь в том случае, если плотность влажного воздуха в пузырьке совпадает с плотностью окружающего атмосферного воздуха. В состоянии термодинамического равновесия это возможно только в так называемой тройной точке, т.е. при таких значениях температуры и давления, при которых лед, вода и водяной пар находятся в равновесии ($t \approx 0,01^\circ\text{C}$, $p \approx 4,6$ мм рт. ст.).

Таяние льда с вмержшей пробкой – случай б) – уровень воды не изменит, так как пробку можно мысленно выдавить изо льда и пустить в самостоятельное плавание на тонкой ледяной нити.

В случае в) гайку, как и в первой задаче, «продавим» сквозь лед до дна стакана, а затем перережем связывающую ледяную нить. Лед всплывет, уровень воды понизится и уже не изменится после плавления льда.

Задача 3. Закрытый пробкой сосуд, вес которого равен выталкивающей силе, покоится на дне стакана с водой. Почти не совершая работы, его можно поднять к поверхности воды. Если теперь вынуть пробку, то сосуд наполнится водой и утонет. При этом он может совершить некоторую работу. Если же вынуть пробку, когда сосуд лежит на дне, он также наполнится водой, но работы не совершит. Как согласовать полученные результаты с законом сохранения энергии?

Обсудим, в чем суть парадокса.

В первой части задачи речь идет о том, что при падении сосуда, заполненного водой, работа совершается несмотря на то, что для поднятия тела не пришлось затратить никакой энергии. Произведем, однако, с сосудом в исходном состоянии эквивалентную деформацию: мысленно деформируем лежащий на дне сосуд так, как показано на рисунке 3. «Выдавим» массу стенок в перемещенную часть, а пустую часть сосуда отделим от заполненной.

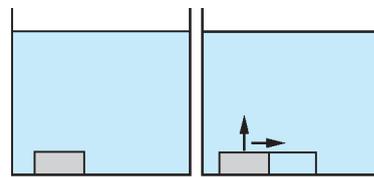


Рис. 3

Вода окажется «захваченной» стенками сосуда и, таким образом, будет находиться внутри сосуда. Теперь сосуд и «воздух» можно поднимать отдельно. Поднимая сосуд, мы совершаем работу. Поднятие «воздуха» эквивалентно опусканию некоторого объема воды (массы этой воды и сосуда равны). Ситуация совершенно аналогична повороту равноплечного рычага с равными грузами на концах. Поднимая один груз, мы опускаем другой (рычаг находится в положении безразличного равновесия – работа не совершается). Затем мы можем перерезать нить, которой привязан поднятый груз. При падении этого груза сила тяжести совершит работу.

Применяя этот же метод во второй части задачи, мы не видим существенных различий с уже рассмотренным случаем. Наполнение водой сосуда эквивалентно перемещению известного объема воды от поверхности до дна стакана.

Работа при этом выполняется такая же, что и в первом случае (при перемещении сосуда).

Отличие условий первой части задачи от второй сводится, таким образом, всего лишь к порядку действий. Нарушения закона сохранения энергии не обнаруживается.

Задача 4. Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте h от дна сосуда. Как изменится эта высота, когда лед растает?

Эта задача была опубликована в «Задачнике «Кванта» (Ф113) в 1971 году. В журнале приведено строгое математическое решение этой (не очень сложной) задачи. Можно, однако, обойтись и без расчетов.

В случае, когда лед оказывается под поверхностью керосина, ответ очевиден: вода, полученная после плавления льда, занимает меньший объем, значит, верхний уровень керосина понизится.

Интерес представляет анализ ситуации, когда лед выступает над поверхностью керосина. Идея эквивалентных деформаций порождает соблазн деформировать лед так, чтобы его вершина оказалась под поверхностью керосина. Таким образом, казалось бы, можно свести рассматриваемую задачу к предыдущей. Однако этот «фокус» не проходит: погружение выступающей части льда в керосин сопровождается повышением уровня жидкости, а после плавления уровень понижается – следовательно, конечный результат не будет очевидным. Итак, деформация оказывается неэквивалентной.

Но если эквивалентная деформация льда не проходит, не стоит ли двинуться в противоположном направлении: оставить лед в покое, а «деформировать» жидкости? Попробуем.

Для этого слой керосина толщиной H_1 заменим таким слоем воды, который сохраняет положение льда неизменным (рис.4). Поскольку плотность воды больше плотности керосина, высота этого слоя $H_2 < H_1$. При плавлении льда уровень воды (как было замечено выше) не меняется. Если теперь осуществить обратную замену и вернуть на место керосин (для этого следует оставить след поверхности льда, как показано на рисунке 5), то выяснится, что слой керосина над поверхностью, которую ранее образовывала вода, растекается по большей площади и уровень керосина понижается (по сравнению с исходным).

Итак, уровень керосина понижается независимо от того, покрывает керосин ледяную глыбу полностью или частично. Несмотря на то, что эквивалентную деформацию льда осуществить не удалось, сама идея метода оказалась плодотворной.

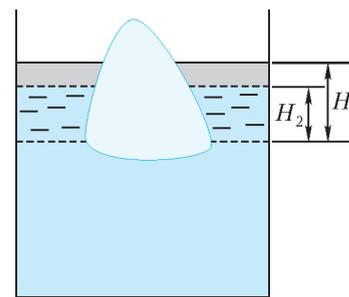


Рис. 4

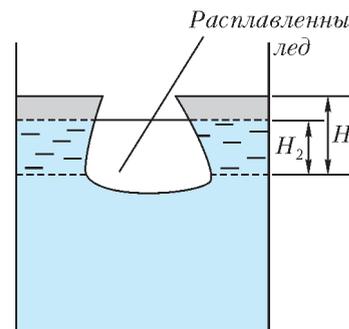


Рис. 5

От точки росы до точки кипения

В. ПТУШЕНКО, А. ПЯТАКОВ

Есть разница меж них. И есть единство.

И.Бродский

РАЗНООБРАЗНЫМ НЕОБЫЧНЫМ (ДА И САМЫМ ОБЫЧНЫМ тоже) свойствам воды и водяного пара в «Кванте» было посвящено много статей – от сугубо практических, например о заваривании чая, о русской бане или сохранении урожая в поле в холодные осенние ночи, до почти романтической «истории одной росинки».¹ А с чего начинается история росинки? Этот нехитрый вопрос, на кото-

¹ См. статьи И.Мазина «Приглашение в парную» («Квант» №8 за 1985 г.), А.Варламова и А.Шапиро «Пока чайник не закипел...» («Квант» №8 за 1987 г.), А.Абрикосова (мл.) «История росинки» («Квант» №7 за 1988 г.), А.Стасенко «Костры в поле и русская баня» («Квант» №1 за 2002 г.).

рый, наверное, без труда ответит любой читатель, таит в себе если и не загадки, то уж подвохи точно. Вот ему мы и посвятим нашу статью.

Итак, с чего же все-таки начинается история росинки? С конденсации, конечно, это всем известно. Поэтому уточним вопрос: а когда и при каких условиях начинается конденсация? Давайте обсудим все по порядку.

У воды, как у всякого вещества, есть три агрегатных состояния – твердое, жидкое и газообразное. Логично ожидать, что между тремя состояниями имеются две температурные границы: температура плавления и температура кипения. А теперь задумаемся: при какой температуре газообразная вода превращается в жидкую? Если горячий водяной пар, взятый при температуре выше 100 °С, начать охлаждать, то первые росинки (жидкость) появятся в нем... ну конечно, в точке росы – недаром же эта температура так называется! Поймите, а что же тогда такое точка кипения? Почему же не в ней – в этой пограничной точке между жидким состоянием и газообразным – происходит превращение газа в жидкость? В каком же тогда смысле она является границей?

Прежде чем ответить на эти вопросы, подумаем: а при какой температуре вода как жидкость превращается в пар? Да при любой! И из чашки с горячим чаем поднимается пар, и из блюдца с холодной водой, которое вы оставили для котенка, вода рано или поздно испарится. Даже мокрая простыня на морозном зимнем ветру успевает высохнуть быстрее, чем замерзнуть и «превратиться в камень». В чем же тогда особенность температуры кипения? Ответ хорошо известен: при температуре кипения происходит не просто испарение, а именно кипение, т.е. интенсивное испарение по всему объему жидкости.

Это короткое формальное определение, подобно сказочному ларцу, внутри содержит гораздо больше, чем можно предположить, глядя снаружи. Внутри этого «ларца» прячется одно из основных представлений физики – понятие равновесия. Чтобы жидкость могла долгое время просуществовать, она должна находиться в равновесии со своим окружением. Но разных видов равновесия может быть много – столько же, сколько существует разных видов «движения», т.е. любого *изменения* системы жидкость–газ. Например, есть механическое равновесие между всеми силами, действующими на жидкость изнутри и снаружи. Есть тепловое равновесие, стремясь к которому, горячий чай остывает до комнатной температуры. А еще есть физико-химическое равновесие с кислородом, который из воздуха стремится проникнуть в воду и раствориться в ней, давая жизнь вашим аквариумным рыбкам... Так какие же виды равновесия важны в данном случае?

Давайте посмотрим на жидкость под микроскопом: мы увидим в ней мельчайшие пузырьки воздуха. Водяной пар норовит заполнить собой эти пузырьки и «взорвать» жидкость изнутри. Сделать это ему не позволяют водяной пар вместе с воздухом, находящиеся снаружи, над поверхностью жидкости: они «сдавливают» жидкость, это давление передается внутрь от одного слоя к другому, «ощущается» в каждом уголке заполненного жидкостью объема и сдерживает рост пузырьков.

Кроме опасности быть взорванной изнутри, жидкости грозит еще одна опасность – улечься, молекула за молекулой, через открытую поверхность в окружающее пространство. Но этому может помешать водяной пар, который уже заполняет это пространство над поверхностью жидкости. Молекула за молекулой, он может возвращаться обратно в жидкость, т.е. конденсироваться, компенсируя испарение. Такое фазовое равновесие наступает, например, в банке, накрытой крышкой, в которой находится вода, а над ней – влажный воздух с *насыщенным* водяным паром. Роль крышки могут играть также неподвижные воздушные массы при соответствующих атмосферных условиях, и тогда на земле долго не высыхают лужи, а белье на веревках остается влажным, нарушая все планы хозяек.

А что же происходит при кипении? При температуре кипения давление насыщенного пара становится слишком большим – вырастает до атмосферного, пузырьки растут неудержимо, из-под крышки вырывается пар. Нарушаются оба типа равновесия жидкости. Крышка подпрыгивает и позвякивает, напоминая об этом. Можно, конечно, крышку «укрепить», чтобы не прыгала, – тогда получится скороварка², оба равновесия восстановятся, но только давление под крышкой будет уже больше атмосферного.

Обратите внимание: для поддержания фазового равновесия жидкости с открытой поверхностью важен только ее *собственный* пар, его *парциальное* давление, а какие еще газы есть в атмосфере и в каком количестве – совершенно не важно. А вот для сохранения равновесия пузырьков, для того чтобы не происходило кипения, необходимо над поверхностью жидкости иметь еще какой-нибудь газ, кроме самого водяного пара. Если вы ухитритесь из-под закрытой крышки откачать весь сухой воздух, оставив там только водяной пар, то жидкость вскипит. Ничего удивительного: вы понизили внешнее давление до величины, создаваемой лишь одним насыщенным водяным паром, т.е. как раз создали условия кипения.

² Подробнее о принципе работы скороварки см. в упомянутой статье А.Варламова и А.Шапиро.

Вот здесь-то и кроется подвох, который часто мешает пониманию процессов кипения и испарения. При их объяснении главную роль играют парциальное давление водяного пара и полное (атмосферное) давление. Полное внешнее давление, как правило, считается неизменной величиной, в то время как парциальное давление водяного пара, наоборот, может изменяться по мере испарения воды. И действительно, в кухне, где долго кипит чайник, вы можете вполне явственно ощутить повышение влажности, в то время как имеющийся в кухне барометр показывает все то же атмосферное давление. Почему же это давление не повышается? В обычных условиях потому, что уменьшаются остальные слагаемые: водяной пар, заполняя кухню, частично вытесняет из нее азот и кислород, их парциальные давления падают, и суммарное давление остается неизменным. А в необычных условиях – например, в уже упоминавшейся нами скороварке, в подземных камерах гейзеров и т.п. – рост парциального давления водяного пара вполне может приводить и к росту суммарного давления, так что оно уже перестает быть постоянным и изменяется, например с температурой.

Теперь мы можем вернуться к вопросам, с которых начала статью. Только сделаем последний шаг – чтобы наглядней сопоставить определения точек росы и кипения, слегка переформулируем одно из них. (Переформулировать классические определения – неблагодарное дело. Но, надеемся, читатель оценит методический смысл этого приема и простит нам эту «фамильярность» по отношению к классике.) Как известно, точка росы – это температура, при которой водяной пар, содержащийся в атмосфере (наряду с азотом, кислородом и пр.), будет насыщенным. А точку кипения определим как температуру, при которой был бы насыщенным водяной пар, целиком «единолично» образующий атмосферу. Отсюда сразу понятно, что точка кипения – это верхняя граница для точки росы и граница для существования жидкости (при заданном внешнем давлении, как правило атмосферном). Поэтому, охлаждая горячий влажный воздух, вы можете обнаружить первые капли жидкости *при любой температуре, но только ниже точки кипения*: если влаги в воздухе немного, то заставить молекулы воды «собраться вместе» удастся, лишь сильно понизив температуру. Если почти весь объем воздуха заполнен паром, то точка росы может оказаться довольно близко к точке кипения (вспомните, как выходящий из кипящего чайника пар покрывает капельками даже очень горячие на ощупь крышку или носик).

Подведем итог сказанному. Процессы испарения и кипения жидкости определяются двумя разными факторами: взаимодействием жидкости с ее *собственным паром* и с *атмосферой в целом*. Суммарное атмосферное давление газа над жидкостью определяет равновесие между жидкостью и образующимися внутри нее пузырьками, т.е. возможность ее вскипания. А парциальное давление пара определяет равновесие жидкости с окружающим паром, т.е., в частности, возможность ее полного испарения или, наоборот, начала конденсации в точке росы.

Будем надеяться, что наша статья поможет читателю увереннее ориентироваться в этих, хотя и очень привычных, однако все же не всегда простых для понимания вопросах. Но если она породит новые вопросы – будет еще лучше!

Авторы благодарны Георгию Евгеньевичу Пустовалову за исключительную поддержку и внимание к данной работе.

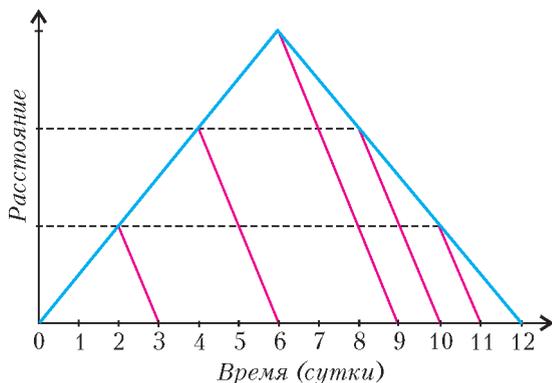
Легенда об искажении сигнала

С.ДВОРЯНИНОВ

ОДНАЖДЫ ФАРАОН СНАРЯДИЛ ЭКСПЕДИЦИЮ ДЛЯ РАЗВЕДКИ нового торгового пути, строго-настрога приказав начальнику отряда отправлять гонца с донесением в первопрестольную через каждые двое суток. Не смели ослушаться подчиненные этого приказа. Точно по расписанию садился очередной гонец на коня и направлялся в столицу к фараону. Каково же было изумление начальника отряда, когда после удачного возвращения могущественный владыка встретил его с мрачным видом и обвинил в непослушании. Оказывается, гонцы начали прибывать к нему с интервалом в трое суток, а под конец ни с того ни с сего вдруг стали появляться через каждые сутки.

История умалчивает о дальнейшей судьбе начальника экспедиции. А какое можно было бы придумать оправдание, оказавшись на его месте?

Приведем один из возможных вариантов. На рисунке показаны графики движения экспедиции (синяя ломаная) и



гонцов (красные отрезки). Скорость гонцов в два раза превышает скорость экспедиции. Из рисунка видно, что гонцы с донесением отправлялись точно в соответствии с приказом фараона через двое суток, а прибывали в столицу сначала с интервалом в трое суток, а затем через сутки.

История грозного фараона является красивой наглядной иллюстрацией известного физического эффекта — *эффекта Доплера* (точнее — продольного эффекта Доплера), который имеет огромное научное и практическое значение.

В 1842 году Кристиан Доплер (1803–1853) дал математическое описание следующему наблюдаемому эффекту. Пусть имеются источник, испускающий волну, и наблюдатель, принимающий эту волну. Тогда если источник или наблюдатель движутся относительно неподвижной среды так, что расстояние между ними меняется, то частота (период) волны, принимаемой наблюдателем, отличается от частоты излучаемой волны. Так, если расстояние между источником и наблюдателем уменьшается, то частота принимаемой вол-

ны оказывается больше, чем частота испускаемой, т.е. частота увеличивается, а если расстояние увеличивается, то частота уменьшается. Именно этот эффект проявился в описанной выше правдивой истории: пока отряд (источник сигналов-гонцов) удалялся от фараона (неподвижного наблюдателя), частота приема сигнала уменьшалась, а когда отряд стал приближаться к фараону, частота увеличивалась. Правда, в тексте речь шла не о частоте испускания и приема сигналов, а об обратной величине — периоде, т.е. об интервале времени между испускаемыми или принимаемыми сигналами.

Какими же формулами описывается эффект Доплера? Начнем с нашей истории, т.е. со случая, когда источник движется, а наблюдатель неподвижен. Пусть v_n — скорость, с которой источник удаляется от наблюдателя, T_n — период испускания сигналов, V — скорость сигнала. К моменту испускания следующего сигнала предыдущий сигнал перемещается в сторону наблюдателя на расстояние $V T_n$, а сам источник проходит в противоположном направлении расстояние $v_n T_n$. Значит, расстояние между двумя сигналами (двумя гонцами, двумя гребнями волны) равно $\lambda = (v_n + V) T_n$. Поскольку оба сигнала движутся со скоростью V , то интервал времени между приемами этих сигналов неподвижным наблюдателем равен

$$T_n = \frac{\lambda}{V} = T_n \frac{V + v_n}{V}.$$

Если источник приближается к наблюдателю, то скорость источника в этой формуле надо считать отрицательной. В описанной истории скорость отряда v_n была в два раза меньше скорости гонцов V , поэтому период приема (время между прибытиями гонцов) сначала в полтора раза увеличивался, а потом в два раза уменьшался.

Рассмотрим теперь второй вариант: источник неподвижен, а наблюдатель удаляется от него со скоростью v_n (если наблюдатель приближается к источнику, то $v_n < 0$). Такому варианту соответствовала бы история, в которой фараон путешествует, а его помощники шлют к нему из столицы гонцов с информацией. В этом случае изменение периода описывается немного другой формулой. Расстояние между сигналами равно теперь $\lambda = V T_n$, а время между приемами двух последовательных сигналов составляет

$$T_n = \frac{\lambda}{V - v_n} = T_n \frac{V}{V - v_n}.$$

Если, как и в первой истории, скорость отряда с фараоном будет в два раза меньше скорости гонцов, то при удалении отряда период увеличивается в два раза, а при приближении отряда к столице период приема уменьшается и составляет $2/3$ от периода испускания (отправки гонцов из столицы).

Если же движутся и источник, и наблюдатель, то изменение периода описывается такой общей формулой:

$$T_n = T_n \frac{V + v_n}{V - v_n},$$

где v_n — скорость удаления источника от наблюдателя, v_n — скорость удаления наблюдателя от источника. Соответствующая формула для частоты $\nu = 1/T$ имеет вид

$$\nu_n = \nu_n \frac{V - v_n}{V + v_n}.$$

Отметим, что все приведенные формулы относятся к случаю движения вдоль одной прямой.

Эффект Доплера для звуковых волн легко, например, обнаружить, наблюдая за приближающейся электричкой.

Если мимо железнодорожной платформы проносится гудящий поезд, то сначала слышен высокий звук (частота звуковой волны на слух воспринимается как высота звука), затем, по мере удаления поезда, звук становится все ниже и ниже.

Эффект Доплера проявляется и по отношению к электромагнитным волнам, в частности – к распространению света. Правда, в этом случае формулы для эффекта Доплера несколько видоизменяются. Электромагнитные волны распространяются в вакууме, а не в среде, и в ответ может входить только относительная скорость наблюдателя и источника v . Поэтому вместо двух формул – для движения наблюдателя и для движения источника – остается только одна:

$$v_n = v_n \sqrt{\frac{V - v}{V + v}}$$

Эта формула выводится в рамках специальной теории относительности.

Представим, что на коне мчится всадник, держащий в руках фонарь зеленого цвета. Частоты световых волн воз-

растают при переходе от красного цвета к фиолетовому. Так вот, если всадник с фонарем удаляется от нас, то цвет воспринимаемого нами света будет казаться нам менее зелеными и более желтым. Но об этом можно говорить только теоретически: дробь $\frac{v}{V}$ для скоростей света $V = 300000$ км/с и всадника $v \ll V$ настолько мала, что ее вряд ли стоит принимать в расчет. Другое дело – космические объекты: галактики, удаляющиеся от нас с огромными скоростями. В световом спектре галактик приборы регистрируют смещение в сторону красного цвета, значит, галактики разбегаются друг от друга, что свидетельствует о расширении Вселенной.

Поскольку эффект Доплера позволяет измерять скорость недоступного источника излучения волн по смещению их спектральных линий, то он становится удобным инструментом во многих областях науки и техники: в астрофизике, спектроскопии, радио- и гидролокации и других.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Парадоксы командных соревнований

Л.ИЛЬКОВ

МЫ БУДЕМ РАССМАТРИВАТЬ КОМАНДНЫЕ СОРЕВНОВАНИЯ в индивидуальных видах спорта, например, в шахматах. Для упрощения ситуации предположим, что все команды состоят из «идеальных» игроков: у каждого игрока есть рейтинг, отражающий его силу, игрок всегда побеждает игрока с меньшим рейтингом и играет вничью с равным по силе.

Есть два способа проведения (два типа) командных соревнований:

I. В каждой команде игроки упорядочиваются «по доскам», обычно в порядке убывания рейтинга, и каждый игрок участвует только в одной партии с соответствующим членом другой команды (всего N партий, где N – количество игроков в команде).

II. Каждый игрок играет со всеми игроками другой команды (всего N^2 партий).

Парадокс 1

Команда, победившая в матче одного типа, может проиграть в матче другого типа.

Приведем такой пример. Ниже указаны две команды по 5 игроков в каждой (даны рейтинги игроков):

A: 6 4 3 3 2

B: 5 4 4 3 1

В матче I типа побеждает команда A, в матче II типа – команда B. Действительно, составим таблицу соревнований:

	5	4	4	3	1	Σ
6	1	1	1	1	1	5
4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	3
3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
2	0	0	0	0	1	1

В первом столбце таблицы – рейтинги игроков команды A, в первой строке – команды B. Результаты матча II типа показаны в клетках пересечения соответствующих строк и столбцов: 1 – выигрыш игрока команды A, 0 – проигрыш, $1/2$ – ничья. По диагонали в таблице выделены результаты матча I типа. Последний столбец – суммы очков игроков команды A для матча II типа. Как видим, в матче I типа у команды A – 3 очка из 5, у команды B – 2; побеждает команда A. Для матча II типа общая сумма очков команды A – 12 из 25 возможных, а у команды B – 13; побеждает команда B.

В дальнейшем для удобства мы будем часто вместо «команда A побеждает команду B» писать просто $A > B$.

Задача 1. Докажите, что если количество игроков в командах менее 5, этот парадокс невозможен.

Указание. Воспользуйтесь ограничениями, которые накладываются на расположение результатов в таблице упорядоченностью ее строк и столбцов по рейтингу.

Парадокс 2

Существуют тройки команд, из которых каждая выигрывает у одной из соперниц, но проигрывает другой (отсутствие транзитивности).

Операция сравнения чисел обладает следующим свойством: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Это свойство называется

транзитивностью. Им обладают и наши «идеальные» игроки, если сравнивать их рейтинги.

Но оказывается, что транзитивность в групповых играх выполняется далеко не всегда. Ниже указаны три команды по три игрока в каждой (даны рейтинги игроков):

A: 5 2 2
B: 4 4 1
C: 3 3 3

Эти команды при любом способе проведения соревнований обыгрывают друг друга циклически. Действительно, в I случае результаты игр таковы: $A : B = B : C = C : A = 2 : 1$. Во II случае $A : B = 5 : 4$, $B : C = C : A = 6 : 3$.

Между тем, существуют тройки команд, обладающие транзитивностью только для одного способа проведения соревнований. Так, команды

A: 6 3 3 2
B: 5 5 3 1
C: 4 4 3 3

обыгрывают друг друга циклически, соревнуясь I способом: $A > B$, $B > C$, $C > A$. При II способе цикличности нет, но и транзитивности тоже нет: $A = B$, $B > C$, $C > A$. Если из этих команд убрать игроков третьей доски (у них одинаковый рейтинг 3), то соотношение команд в I случае, конечно, не изменится, а во II случае тоже появится цикличность: $A > B$, $B > C$, $C > A$.

Этот пример показывает, что цикличность – «крайний» случай нарушения транзитивности: отсутствие транзитивности не обязательно сопровождается цикличностью.

Команды
A: 5 2 2
B: 4 3 1
C: 3 3 2

обладают цикличностью во II случае: $A > B$, $B > C$, $C > A$. В I случае нет ни цикличности, ни транзитивности: $A > B$, $B = C$, $C = A$.

В соревнованиях команд, состоящих из двух игроков, цикличность невозможна, хотя нарушения транзитивности наблюдаются.

Задача 2. Докажите, что для команд из двух игроков цикличность невозможна.

Парадокс 3

Существуют тройки команд с разнонаправленной для разных типов соревнований цикличностью.

Этот парадокс как бы объединяет в себе парадоксы 1 и 2. Пример – команды

A: 11 9 6 3 1
B: 10 7 5 5 4
C: 8 7 7 5 2.

В соревнованиях I типа $A > B$, $B > C$, $C > A$; в соревнованиях же II типа – $A < B$, $B < C$, $C < A$. Везде преимущество минимальное – 1 очко.

Задача 3. Найдите еще один или более примеров этого парадокса для команд из пяти игроков.

Примечание. Решение должно существенно отличаться от приведенного примера. Легко построить «новое» решение из приведенного, лишь изменив рейтинги игроков так, чтобы ни один результат личных встреч не изменился. Это достигается, например, сдвигом рейтингов или умножением их на некоторый коэффициент.

Поэтому вводится дополнительное условие: все рейтинги – целые положительные числа и занимают без пропусков некоторый диапазон целых чисел $1 : k$ (в примере – $1 : 11$).

Для решения этой задачи можно составить компьютерную программу; без компьютера задача кажется трудной. С помощью такой программы было установлено, что в соревнованиях команд, состоящих из трех игроков, цикличность возможна, если количество различных рейтингов игроков $k \geq 5$. Для команд из четырех игроков уже при $k = 4$ возможна цикличность, но только в соревнованиях II типа. При $k \leq 3$ цикличность невозможна для команд любого размера.

Проблема 1. Доказать, что в соревнованиях команд из трех игроков при количестве различных рейтингов игроков $k \leq 4$ цикличность невозможна.

Проблема 2. Доказать, что в соревнованиях II типа команд из четырех игроков при количестве различных рейтингов игроков $k \leq 4$ цикличность невозможна.

Проблема 3. Доказать, что при количестве различных рейтингов игроков $k \leq 3$ цикличность невозможна в соревнованиях команд любого размера.

«Волшебные» кубики (игральные кости)

Представьте себе, что у вас есть три кубика. Обычные шестигранные кубики, на каждой грани которых написаны некоторые числа. Вы предлагаете своему партнеру взять любой кубик, который ему больше понравился, а себе выбираете один из двух оставшихся кубиков. Далее вы начинаете играть: каждый бросает свой кубик, и выигрывает тот, на чьем кубике выпадет большее число. Так вот, кубики могут быть такими, что при большом числе бросаний в среднем вы будете в выигрыше, то есть будете чаще выигрывать у партнера. Даже если партнер поменяет кубик, например, возьмет кубик, которым играли вы, то он все равно будет проигрывать, если вы воспользуетесь правом выбрать себе кубик из двух оставшихся.

Может ли такое быть? Оказывается, может. Весь секрет в числах, которые расставлены на гранях кубиков. Задача заключается в том, чтобы найти эти числа и расставить их на гранях трех кубиков так, чтобы кубики обладали описанным выше «волшебным» свойством. Интересно, что решением этой задачи может служить частный случай цикличности в командных соревнованиях. Действительно, возьмем три команды по шесть игроков, циклически обыгрывающие соперников в соревнованиях II типа. Это легко сделать, например, «удвоив» игроков в первом примере парадокса 2:

A: 5 5 2 2 2 2
B: 4 4 4 4 1 1
C: 3 3 3 3 3 3

Далее возьмем три кубика, используемые в азартных играх, и вместо цифр 1 – 6 нанесем на их грани рейтинги трех команд. Теперь кубики стали «волшебными» – они обладают описанным выше свойством, помогающим их обладателю выигрывать у партнера. Какой бы кубик ни выбрал ваш партнер, среди двух оставшихся всегда имеется один, который дает вам больше шансов выиграть, чем партнеру. Для этого вам нужно выбирать кубик, чья «команда» сильнее «команды» партнера.

Действительно, одновременное бросание двух кубиков – это выбор одной из 36 партий соревнования II типа. Если «ваша команда» обыгрывает «команду партнера» со счетом $m : n$, где $m > n$, $m + n = 36$, то из 36 возможных исходов бросания вы выигрываете в m случаях, а партнер – в n случаях. Вероятность вашего выигрыша $P = m/36$, $P > 1/2$.

Результаты «командных игр» для наших кубиков следующие:

$A : B = 20 : 16$, $B : C = C : A = 24 : 12$.

Таким образом, в наихудшем случае, когда ваш партнер выбирает кубик B , а вы – кубик A , вероятность вашего выигрыша $P = 20/36 = 5/9$. В остальных случаях эта вероятность будет больше.

Проблема 4. Какую наибольшую вероятность выигрыша (в случае использования самой «плохой» пары) может обеспечить владельцу наилучший набор из трех волшебных кубиков?

Примечание. Конечно, можно с помощью компьютерной программы перебрать все варианты (так как имеется всего конечное число существенно различных вариантов – смотрите предыдущее примечание). Интересно, однако, определить эту вероятность или хотя бы получить для нее оценки снизу и сверху чисто математически.

Задача 4. Сконструируйте тройку «волшебных кубиков» так, чтобы на всех гранях кубиков фигурировали только четыре числа 1, 2, 3, 4 (разумеется, с повторениями).

(Выше приведен пример «волшебных кубиков» с числами 1, 2, 3, 4, 5. Четыре числа, согласно утверждению проблемы 3, – это минимальный набор).

Задача 5. Сконструируйте тройку «волшебных кубиков» так, чтобы на всех 18 гранях были различные числа.

О логичных и нелогичных турнирах

В 1997 году в журнале «Квант» (№5) была опубликована статья А.Заславского с таким названием. В статье изучаются некоторые свойства таблиц соревнований, проводящихся по *круговой системе*, когда каждый участник соревнований встречается со всеми остальными участниками. Вводится величина – *степень нелогичности* турнира, равная количеству нетранзитивных троек в таблице результатов, и выводятся формулы для вычисления этой величины через результаты участников.

В конце статьи указывается, что величина степени нелогичности используется в теории экспертных оценок для определения компетентности экспертов, оценивающих качество каких-либо объектов. Эксперту предлагается оценить группу однотипных объектов путем их полного парного сравнения. Чем больше степень нелогичности таблицы оценок (т.е., чем больше в таблице нетранзитивных троек), тем менее компетентным признается эксперт. Напрашивается следующая мысль: при такой оценке компетентности эксперта считается, что правильная оценка объектов любого типа должна быть транзитивной, а любая нетранзитивная тройка в таблице – следствие ошибки эксперта. В действительности все не так просто.

Предположим, что объекты имеют несколько независимых *характеристик* (например, вкус, цвет, запах и тому подобное). При сравнении пары объектов лучшим будем считать тот из них, который имеет большее количество лучших характеристик. Таким образом мы сводим сравнение пары объектов к командному соревнованию I типа, где объекты становятся командами, а игроками являются характеристики этих объектов. Мы видели, что в таких соревнованиях транзитивность не соблюдается, и следовательно, такая оценка объектов не является транзитивной. Ситуация не изменится, если считать, что характеристики не равнозначны, и суммировать «победы» с некоторыми весами. В этом случае в нашей модели нужно считать, что в «команде» есть несколько «игроков» каждого типа (равной «силы»), и их количество пропорционально весу соответствующей характеристики.

Исследуя соревнования I типа, мы всегда упорядочивали игроков в команде по рейтингу. Здесь это не требуется, и, более того, это невозможно. Ранее предполагалось, что каждый игрок может, в принципе, сыграть на любом месте

(на любой доске). Здесь команда является как бы набором игроков, играющих в разные игры, и игроки в командах упорядочиваются по названиям «игр» (вкус, цвет, запах). Это только облегчает построение примеров нетранзитивности.

Мы можем сделать следующие выводы:

1. Наличие нетранзитивных троек в таблице «правильных» оценок группы сложных многофакторных объектов вполне закономерно и определяется внутренними свойствами этих объектов.

2. «Степень нелогичности» таблицы оценок таких объектов ни в коей мере не может служить мерилем компетентности эксперта, поскольку она зависит еще и от свойств самих объектов. Судить о компетентности эксперта по «степени нелогичности» таблицы его оценок можно лишь в том случае, если оценивалась группа простых однофакторных объектов, единственная характеристика которых допускает «одномерную» оценку.

Задача 6. Постройте нетранзитивную тройку объектов с двумя характеристиками (дайте рейтинги характеристик каждого объекта).

Заключение

Мы рассмотрели упрощенную модель соревнований. Результат партии между «идеальными» игроками полностью определяется их рейтингами. В турнирной таблице таких игроков не может быть нетранзитивных троек.

Реальный мир сложнее и интереснее. Рейтинги реальных игроков влияют лишь на вероятность исхода партии и определяют статистику результатов в достаточно большой серии встреч. И отличие не только в этом. Реальный игрок является сложным «объектом», на игру которого влияют несколько независимых факторов (в шахматах это, например, дебютная подготовка, умение вести позиционную борьбу, умение комбинировать, знание эндшпилей, способность играть в цейтноте и прочее). Поэтому даже статистика партий между двумя отдельными игроками не всегда соответствует их рейтингам, поскольку рейтинг отражает среднюю силу игрока в полной совокупности всех его противников, а из-за особенностей «многофакторных» качеств игрока у него появляются «удобные» и «неудобные» противники.

Автор благодарит В.К.Титова, который с помощью волшебных кубиков заинтересовал его тематикой статьи и активно участвовал в ее написании.

Вниманию наших читателей!

Поправка

В «Кванте» №6 за 2008 год в статье «Новый прием в школы-интернаты при университетах» во вступительном задании по математике для поступающих в 11 класс в задаче 2 допущена опечатка. Приводим правильное условие задачи.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Найдите площадь четырехугольника, если углы BAO и DAC равны, а диагонали AC и BD равны m и n соответственно.

Отражение от тонких цилиндрических зеркал

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

В обыденной жизни мы чаще всего имеем дело с плоскими зеркалами, в оптических приборах используются сферические и параболические зеркала, а вот с цилиндрическими зеркалами мы сталкиваемся редко. Разве что в аттракционе под названием «комната смеха» или в анаморфоскопах – приборах для рассматривания специально искаженных (анаморфных) изображений (рис.1). В то же время, большое количество предметов вокруг нас имеют именно цилиндрическую форму – это всевозможные цилиндрические емкости, трубы, ветки деревьев, троллейбусные провода и многое другое. Некоторые из них являются хорошими отражателями.

Тонкие цилиндрические зеркала. Проще всего исследовать отражение от *тонкого* цилиндрического зеркала, радиус поперечного сечения которого достаточно мал по сравнению с расстоянием до наблюдателя. Хорошим примером таких зеркал могут служить троллейбусные провода, освещенные автомобильными фарами или уличными фонарями.

Рассмотрим простейший случай, когда на тонкое цилиндрическое зеркало падает тонкий пучок параллельных лучей, полностью перекрывающий зеркало по диаметру. Оказывается, что отраженные световые лучи образуют конус, осью которого является зеркало, а одной из образующих – продолжение падающего светового пучка. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться принципом Ферма.

А вот и экспериментальное подтверждение – оно представлено на рисунке 2. Тонким цилиндрическим зеркалом здесь служит обычная иголка, на которую падает лазерный луч.

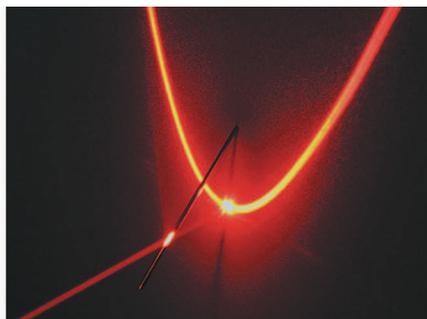
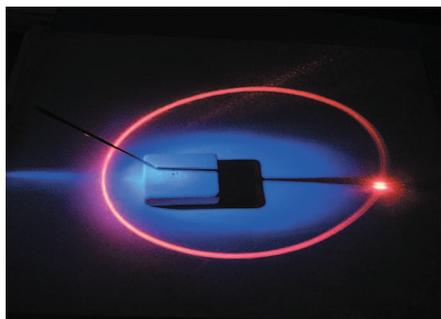


Рис.2. Тонкое цилиндрическое зеркало – иголка: слева на экране эллипс, справа – гипербола

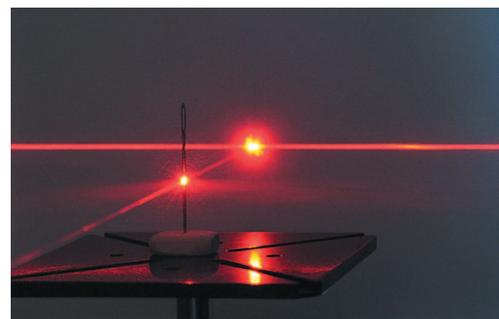


Рис.3. Когда падающий луч перпендикулярен зеркалу, отраженные лучи заполняют целую плоскость



Рис.1. Использование цилиндрического зеркала в качестве анаморфоскопа

Пересечением конуса отраженных лучей с плоским экраном может быть любое коническое сечение – эллипс, парабола или гипербола, все зависит от расположения экрана. Если же падающий луч перпендикулярен зеркалу, то отраженный конус превращается в плоскость (рис.3).

Опишем несколько простых ситуаций, где используется вышесказанное нами утверждение.

Легко представить себе, что происходит, когда все протяженное тонкое цилиндрическое зеркало освещено пучком параллельных лучей. В этом случае все пространство окажется заполненным одинаковыми конусами, состоящими из отраженных лучей, а цилиндрическое зеркало будет общей осью этих конусов. Если же зеркало освещается точечным источником, то мы тоже получим систему соосных конусов, только они уже не будут одинаковыми. В ближайшей к источнику точке зеркала конус будет представлять собой плоскость, т.е. иметь угол раствора 180° . По мере удаления вершины конуса от источника угол раствора конуса будет уменьшаться до 0° . Если цилиндрическое зеркало – это отрезок тонкого провода, то провод можно изогнуть, и при отражении от такого изогнутого цилиндрического зеркала мы опять получим систему конусов. Но они уже не будут соосными, а осью каждого отраженного конуса будет служить касательная к зеркалу – прямая, которая вместе с точкой отражения содержит и маленький отрезок провода.

Светящиеся круги из веток. Мокрые оголенные ветки многих пород деревьев являются хорошими отражателями. Если посмотреть через крону такого дерева на уличный фонарь, то можно обнаружить, что отражающие участки веток образуют узор, складывающийся в систему концентри-



Рис.4. Отражающие участки веток формируют узор из concentрических окружностей

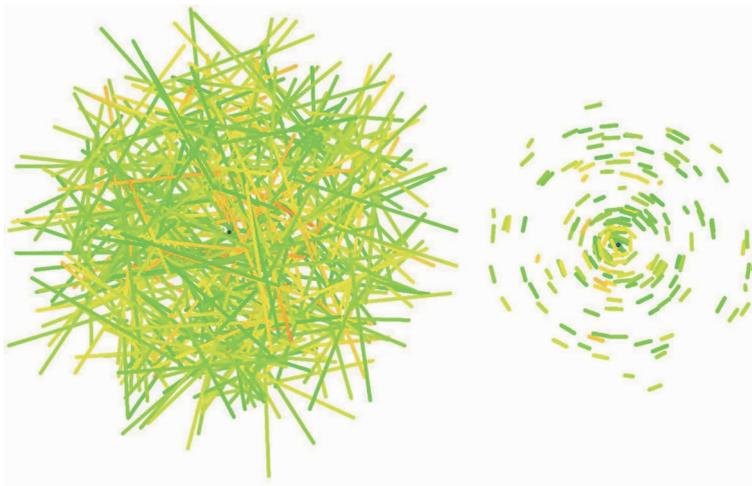


Рис.5. Слева – «крона» дерева, справа – отражающие участки «ветвей»

ческих окружностей (рис.4). Одно из объяснений этого факта содержится в известной книге М.Миннарта «Свет и цвет в природе». Мы приведем здесь другое рассуждение, основанное на том, что каждую ветку в отдельности можно считать тонким цилиндрическим зеркалом.

Компьютерная модель. Смоделируем крону дерева случайным набором тонких цилиндрических зеркал – отрезков единичной длины, расположенных между точечным источником и наблюдателем. Каждая точка такого отрезка после отражения излучает конус. Мы хотим найти на этом отрезке такую точку, чтобы одна из образующих соответствующего конуса попала в глаз наблюдателя. На самом деле, из-за протяженности источника нужное нам отражение будет происходить не только от этой точки, но и от небольшого участка ветки, содержащего эту точку. На рисунке 5 слева изображена крона, представленная набором случайных единичных отрезков, ось источник-наблюдатель перпендикулярна плоскости рисунка. Справа оставлены небольшие (длиной $1/10$) участки отрезков, отражающие лучи в глаз наблюдателя. В целом эти участки действительно складываются в узор, сходный с тем, что изображен на рисунке 4.

Отметим еще, что в «кроне» имеются отдельные отрезки, которые не укладываются вдоль concentрических окружностей. Но все они имеют небольшую длину, а это значит, что они почти что параллельны оси источник-наблюдатель.

Модель из булавок. Вот если бы все ветки лежали в плоскости, перпендикулярной указанной оси, то их участки, которые отражают в глаз наблюдателя, были бы касательны-

ми к concentрическим окружностям. Это следует из того, что в точке отражения, откуда световой луч приходит к наблюдателю, падающий луч перпендикулярен к ветке и отраженный конус представляет собой плоскость, перпендикулярную ветке. Вот еще одна модель, на этот раз физическая, которая подтверждает этот факт (рис.6). Здесь в качестве отражателей использованы обычные булавки, лежащие на стекле.

Царапины на стекле. К слову сказать, и булавки вовсе не обязательны, можно обойтись одним лишь куском стекла – отражать будут имеющиеся на нем царапины (рис.7).

Этот пример тоже описан в книге Миннарта, и автор добавляет, что царапины на стекле уже достаточно тонки, чтобы при взаимодействии с ними свет мог проявить свои волновые свойства. Свет дифрагирует на них, и мы видим их окрашенными в цвета спектра.

Взгляд сквозь моток проволоки. Наконец, последняя модель. Мы уже говорили, что цилиндрическое зеркало можно изогнуть. Возьмем на этот раз в качестве отражателя целый моток запутанной проволоки и посмотрим через него на источник света (рис.8). Мы видим те же самые кольцевые узоры и убеждаемся, что моток проволоки точно так же успешно моделирует отражающие свойства кроны дерева.

Проволока, используемая нами в эксперименте, достаточно тонка – ее диаметр составляет всего 0,2 мм. Поэтому и здесь возникает соответствующая дифракционная картина. Чтобы увидеть ее, нужно аккомодировать глаз (или настроить объектив фотоаппарата) на бесконечность. Мы не будем входить в детали (этот эксперимент подробно обсуждается в



Рис.6. В качестве отражателей здесь использованы булавки



Рис.7. Светящиеся кольца из царапин на стекле

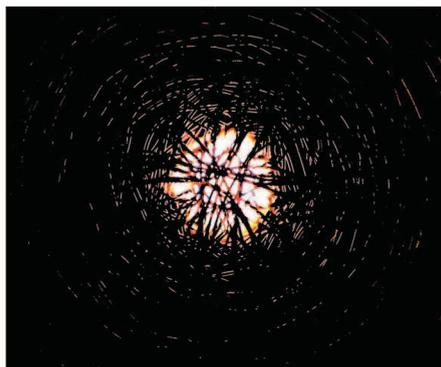
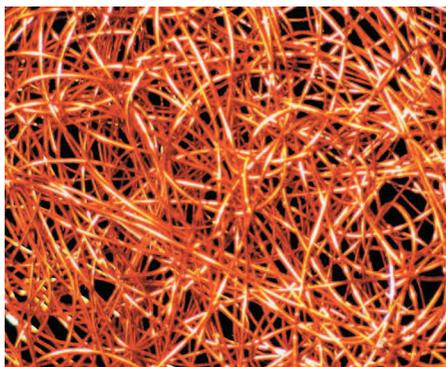


Рис.8. Слева – моток проволоки, освещенный со стороны наблюдателя, справа – вид на источник света через этот моток проволоки

Рис.9. Тот же самый моток проволоки, но фотоаппарат сфокусирован на бесконечность

статье Н.Ростовцева «Как с помощью проволоки измерить длину световой волны» – см. «Квант» № 8 за 1977 г. или выпуск 4 «Библиотечки «Квант»», а ограничимся соответствующей картинкой (рис.9).

До сих пор мы имели дело с цилиндрическими отражателями, которые были расположены хаотически – ветки деревьев или разбросанные булавки. Посмотрим, что может произойти, когда отражатели расположены упорядоченным образом.

Линия на крыше. В последнее время на многих подмосковных железнодорожных платформах появились большие полупрозрачные крыши, имеющие цилиндрическую форму. В ясную погоду на таких крышах возникает любопытное изображение солнца, имеющее вид своеобразно изогнутой дуги (рис.10). Мы можем применить наши соображения по поводу отражения от тонких цилиндров для анализа формы этой кривой.

Все дело в конструкции тех полупрозрачных листов, из которых сделана крыша. Каждый такой лист первоначально плоский и составлен из двух параллельных поверхностей, разделенных небольшим промежутком. Этот узкий промежуток заполнен системой тонких длинных цилиндрических ребер, параллельных между собой и скрепляющих обе поверхности. Цилиндрическая форма такому листу обычно придается двумя различными способами. При одном изгибании листа ребра становятся параллелями цилиндра, при другом – его образующими. На железнодорожных платформах ребра – параллели. Именно этот случай мы и будем анализировать. При этом будем считать, что тонкие цилиндрические ребра представляют собой систему тонких цилиндрических зеркал. Заметим, что прозрачные крыши на

троллейбусных и автобусных остановках также делают из подобного материала. На некоторых из них вы тоже сможете увидеть дугообразные линии, на других картина будет иной, но это как раз там, где ребра идут вдоль образующих цилиндрической поверхности.

Итак, посмотрим на крышу железнодорожной платформы. Введем систему координат: ось X пустим вдоль оси большого цилиндра, представляющего крышу, ось Y пусть тоже лежит в горизонтальной плоскости, а ось Z направим вверх. Зададимся радиусом крыши R и будем считать, что наблюдатель находится в точке $P = (0, 0, z_0)$, а от солнца приходит пучок параллельных лучей, направление которого задается вектором $\vec{V} = (u, v, w)$, имеющим единичную длину.

Каждое тонкое цилиндрическое зеркало – это окружность с центром на оси X в точке $O_x = (x, 0, 0)$, а точки M_x , лежащие на таком зеркале, имеют координаты

$$M_x(\varphi) = (x, R \cos \varphi, R \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Задача заключается в том, чтобы на каждом тонком цилиндрическом зеркале найти точку, для которой отраженный конус проходит через глаз наблюдателя, т.е. через точку P . Например, хорошо было бы найти зависимость углового параметра φ отражающей точки, лежащей на зеркале, от величины x . Оказывается, что удобнее выразить x через φ :

$$x(\varphi) = \pm \sqrt{\left(\frac{z_0 \cos \varphi}{w \cos \varphi - v \sin \varphi} \right)^2 - (R^2 - 2Rz_0 \sin \varphi + z_0^2)}.$$

Нарисовав все точки с координатами $x(\varphi)$, $R \cos(\varphi)$, $R \sin(\varphi)$, получим соответствующую пространственную картину, имеющую определенное сходство с фотографией на рисунке 10.

В заключение – несколько вопросов к читателям.

1. На изображении солнца на крыше железнодорожной платформы видны два ярких пятна – одно в направлении самого солнца, другое расположено на симметричной ветви кривой. Объясните появление второго яркого пятна.

2. Пусть параллельные между собой тонкие цилиндрические зеркала заполняют целую плоскость. Какую кривую на таком плоском листе увидит наблюдатель, глядя сквозь него на солнце?

3. Найдите автобусную остановку, где тонкие цилиндрические зеркала являются образующими, и посмотрите, какая «солнечная кривая» видна на крыше остановки.



Рис.10. Яркая линия – изображение солнца на крыше железнодорожной платформы

Силы сопротивления в задачах динамики

В.ЛОСЕВ, В.ПЛИС

НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ И ОЛИМПИАДАХ В ВЕДУЩИХ ФИЗИЧЕСКИХ ВУЗАХ НАШЕЙ СТРАНЫ РЕГУЛЯРНО ПРЕДЛАГАЮТСЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ, В КОТОРЫХ НАРЯДУ С «ТРАДИЦИОННЫМИ» СИЛАМИ: СИЛОЙ ТЯЖЕСТИ, СИЛОЙ АРХИМЕДА, СИЛОЙ ЛОРЕНЦА И Т.Д. НА ТЕЛА ДЕЙСТВУЕТ СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ (ЖИДКОГО ТРЕНИЯ). ТАКАЯ СИЛА ПОЯВЛЯЕТСЯ, НАПРИМЕР, ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ, СОПРИКАСАЮЩИХСЯ СМАЗАННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, А ТАКЖЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ. ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ТАКОМ ДВИЖЕНИИ СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНА ПО СКОРОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА И ПРОПОРЦИОНАЛЬНА ПЕРВОЙ ИЛИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СКОРОСТИ.

Можно указать две причины возникновения этой силы. При очень малых скоростях (или для очень маленьких тел) главный вклад в силу сопротивления дают касательные силы внутреннего трения (вязкости), действующие со стороны потока жидкости или газа на «прилипший» к поверхности тела пограничный слой. Такую силу вязкого трения можно считать пропорциональной первой степени скорости. При больших скоростях эта сила становится несущественной, и главную роль играет сила лобового сопротивления, возникающая за счет различия сил давления на переднюю и заднюю части тела вследствие несимметричности картины обтекания реальной жидкостью или газом даже симметричного тела. Силу лобового сопротивления можно считать пропорциональной квадрату скорости.

Эти и другие причины приводят к тому, что зависимость сил сопротивления от скорости, размеров и т.д. носит в общем случае нелинейный характер. Однако знакомство с действием такого рода сил уместно начинать, как это принято в физике, с простейших модельных зависимостей.

Рассмотрим несколько характерных задач.

Начнем со случая, когда сила сопротивления принимается пропорциональной скорости.

Задача 1. Мяч, брошенный с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с, упал на землю. За время полета скорость мяча уменьшилась по величине на $\delta = 30\%$. Найдите продолжительность T полета мяча. Силу сопротивления считайте пропорциональной скорости: $\vec{F} = -k\vec{v}$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, приращение импульса мяча пропорционально действующей на мяч результирующей силе и происходит по направлению этой силы:

$$m\Delta\vec{v} = (m\vec{g} - k\vec{v})\Delta t.$$

Переходя к проекциям сил и приращения скорости на

вертикальную ось, получаем

$$m\Delta v_y = -mg\Delta t - kv_y\Delta t.$$

Заметим, что элементарное перемещение мяча по вертикали равно $\Delta y = v_y\Delta t$, и перепишем последнее соотношение в виде

$$m\Delta v_y = -mg\Delta t - k\Delta y.$$

Просуммируем все такие соотношения по всему времени полета, т.е. от $t = 0$ до $t = T$:

$$m(\sum \Delta v_y) = -mg(\sum \Delta t) - k(\sum \Delta y),$$

или

$$m(v_y(T) - v_y(0)) = -mgT - k(y(T) - y(0)).$$

Перемещение мяча по вертикали за время полета нулевое: $y(T) - y(0) = 0$, тогда

$$-(1 - \delta)mv_0 - mv_0 = -mgT.$$

Отсюда находим продолжительность полета мяча:

$$T = \frac{v_0}{g}(2 - \delta) = 1,7 \text{ с}.$$

Задача 2. На горизонтальной поверхности покоится брусок. Черепаха перемещается с одного конца этого бруска на другой. Найдите расстояние, пройденное бруском за все время движения черепахи. Силу сопротивления считайте пропорциональной скорости бруска относительно горизонтальной поверхности: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$.

Решение. Рассмотрим систему тел «черепаха + брусок». На каждом элементарном промежутке времени приращение $\Delta\vec{p}$ импульса этой системы равно суммарному импульсу действующих на систему внешних сил, т.е. сил тяжести, силы нормальной реакции опоры и силы сопротивления:

$$\Delta\vec{p} = M\Delta\vec{v}_b + m\Delta\vec{v}_c = ((M + m)\vec{g} + \vec{F}_p - k\vec{v}_b)\Delta t,$$

где M – масса бруска, \vec{v}_b – его скорость, m – масса черепахи, \vec{v}_c – ее скорость.

Сумма сил тяжести и нормальной реакции равна нулю, тогда любое приращение импульса системы равно импульсу силы сопротивления:

$$\Delta\vec{p} = -k(\vec{v}_b\Delta t),$$

т.е. любое элементарное приращение импульса $\Delta\vec{p}$ системы «черепаха + брусок» и элементарное перемещение $\vec{v}_b\Delta t$ бруска отличаются в $(-k)$ раз.

Найдем перемещение бруска за все время движения. Для этого просуммируем все элементарные перемещения бруска по всему времени движения черепахи и бруска от старта – в этот момент $\vec{p}_{\text{нач}} = 0$, до полной остановки – в этот момент $\vec{p}_{\text{кон}} = 0$:

$$s_b = \sum (\vec{v}_b\Delta t) = -\frac{1}{k}(\vec{p}_{\text{кон}}) - \vec{p}_{\text{нач}} = 0.$$

Задача 3. На горизонтальном столе один на другом лежат три длинных бруска (рис.1). Массы брусков m . Бруски смазаны маслом.

При движении сила трения между брусками, а также между нижним бруском и столом пропорциональна относительной скорости:

$\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$. Сначала все

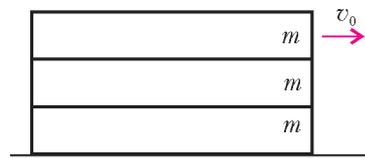


Рис. 1

бруски неподвижны, затем верхнему бруску сообщают горизонтальную скорость \vec{v}_0 . Определите относительные смещения брусков после прекращения движения.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из n ($n = 1, 2, 3$) верхних брусков (бруски нумеруем, начиная с верхнего). Импульс рассматриваемой системы изменяется вследствие действия единственной горизонтальной внешней силы – силы вязкого трения, проекция которой на горизонтальную ось X имеет вид

$$F_{nx} = -k(v_n - v_{n+1}),$$

где v_n и v_{n+1} – скорости брусков в лабораторной системе отсчета. Тогда на каждом элементарном перемещении приращение импульса системы равно импульсу силы вязкого трения:

$$\Delta p_{nx} = -k(v_n - v_{n+1})\Delta t = -k(\Delta x_n - \Delta x_{n+1}) = -k\Delta X_{n\text{отн}},$$

где $\Delta x_n, \Delta x_{n+1}$ – абсолютные перемещения брусков, $\Delta X_{n\text{отн}} = \Delta x_n - \Delta x_{n+1}$ – перемещение n -го бруска в системе отсчета, связанной с $(n + 1)$ -м бруском.

Вследствие рассеяния энергии движение в какой-то момент прекратится. Просуммируем все соотношения вида $\Delta p_{nx} = -k\Delta X_{n\text{отн}}$ по всему времени движения вплоть до остановки:

$$\sum \Delta p_{nx} = -k\sum \Delta X_{n\text{отн}},$$

учтем, что импульс системы в конечном состоянии нулевой, а в начальном состоянии он был равен $m\vec{v}_0$, и получим

$$-mv_0 = -kL_{n\text{отн}}, \text{ или } L_{n\text{отн}} = \frac{mv_0}{k},$$

где $L_{n\text{отн}} = \sum \Delta X_{n\text{отн}}$ – относительное перемещение n -го бруска в системе отсчета, связанной с $(n + 1)$ -м бруском за все время движения.

Все относительные смещения брусков одинаковы. После остановки система будет иметь вид «лесенки» с шагом $\frac{mv_0}{k}$.

В следующем примере сила сухого трения оказывается связанной со скоростью.

Задача 4. На гладкой горизонтальной поверхности в круге, ограниченном шероховатой вертикальной стенкой, находится шайба (рис.2). Если шайбе сообщить произвольную начальную скорость, то, совершив два оборота, она возвращается в точку старта с вдвое меньшей скоростью. Найдите коэффициент μ трения скольжения шайбы по поверхности стенки, считая его постоянным.

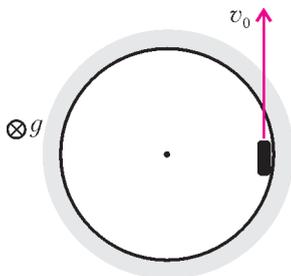


Рис. 2

Указание: при решении воспользуйтесь тем, что при малых приращениях аргумента приращение логарифма аргумента равно относительному приращению аргумента, т.е.

$$\Delta(\ln x) = \frac{\Delta x}{x}.$$

Решение. На шайбу действуют силы тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции вертикальной стенки \vec{N}_1 , нормальной реакции горизонтальной поверхности \vec{N}_2 , а также сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, равная по величине $F_{\text{тр}} = \mu N_1$. В лабораторной системе отсчета шайба движется по окружности радиусом R . По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление:

$$m \frac{v^2}{R} = N_1$$

и на тангенциальное направление:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_{\text{тр}} = -\mu m \frac{v^2}{R},$$

находим

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\mu}{R} v \Delta t.$$

Следуя указанию в условии задачи, левую часть последнего равенства представим в виде $\frac{\Delta v}{v} = \Delta(\ln v)$, а в правой сделаем замену $\Delta s = v \Delta t$. Тогда, суммируя элементарные приращения

$$\sum \Delta(\ln v) = -\frac{\mu}{R} \sum \Delta s$$

по времени совершения двух оборотов, получим

$$\ln \frac{v_0}{2} - \ln v_0 = -\frac{\mu}{R} \cdot 4\pi R.$$

Отсюда находим

$$\mu = \frac{\ln 2}{4\pi} \approx 0,06.$$

Теперь обсудим более сложные случаи зависимости силы сопротивления от скорости.

Задача 5. Парашютист совершает затяжной прыжок – от старта с нулевой начальной скоростью до раскрытия парашюта скорость парашютиста растет, а начиная с некоторого момента становится практически постоянной. Известно, что сила сопротивления F , действующая на парашютиста, является степенной функцией его скорости v и характерного размера r , а также плотности воздуха ρ , т.е. $F = k \cdot \rho^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma$, где k – безразмерный множитель порядка единицы. Оцените установившуюся скорость падения парашютиста.

Решение. Для определения показателей степени α, β, γ воспользуемся соображениями размерности. В Международной системе единиц (СИ) размерности физических величин, входящих в формулу для силы сопротивления, таковы:

$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$, $[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $[r] = \text{м}$. Тогда, сравнивая размерности левой $\left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right)$ и правой $\left(\frac{\text{кг}^\alpha}{\text{м}^{3\alpha}} \cdot \frac{\text{м}^\beta}{\text{с}^\beta} \cdot \text{м}^\gamma\right)$ частей

формулы для силы сопротивления, приходим к следующим соотношениям:

$$1 = \alpha, \quad 1 = -3\alpha + \beta + \gamma, \quad -2 = -\beta.$$

Отсюда находим

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 2.$$

Теперь формула для силы сопротивления принимает такой вид:

$$F = k\rho v^2 r^2.$$

При движении с установившейся скоростью сила тяжести равна по величине силе сопротивления:

$$Mg = k\rho v_{\text{уст}}^2 r^2.$$

Для численной оценки скорости $v_{\text{уст}}$ примем массу парашютиста $M = 100$ кг, плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м³, квадрат

характерного размера $r^2 = 0,25 \text{ м}^2$. Это приводит к окончательному результату

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{Mg}{k\rho r^2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10}{1 \cdot 1,3 \cdot 0,25}} \text{ м/с} \approx 55 \text{ м/с},$$

который хорошо согласуется с опытными данными.

Задача 6. Теннисист подает мяч со скоростью $v_0 = 200 \text{ км/ч}$ с высоты $h = 3 \text{ м}$. Пролетев $L = 20 \text{ м}$, мяч

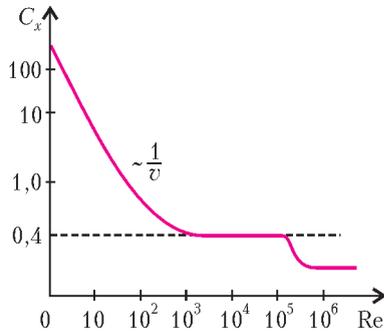


Рис. 3

ударяется о корт. Масса мяча $m = 60 \text{ г}$, радиус мяча $R = 32,5 \text{ мм}$. Оцените скорость мяча v_1 в момент удара и продолжительность полета T . Считайте, что в полете на мяч действует сила сопротивления $F = C_x \frac{\rho v^2}{2} \pi R^2$. На рисунке 3 представлена экспериментальная зависимость безразмерного коэффициента сопротивления C_x шара от безразмерного параметра (числа Рейнольдса) $Re = \frac{\rho v R}{\eta}$, где $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ — плотность воздуха, v — скорость шара, R — его радиус, $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ — коэффициент внутреннего трения (вязкости) воздуха. Вращением мяча следует пренебречь.

Решение. Оценки проведем в два этапа.

Скорость 200 км/ч — это (в СИ) приблизительно 55 м/с , и мяч пролетит 20 м за время $T \approx \frac{L}{v_0} \approx 0,4 \text{ с}$. В начальный момент $Re = \frac{\rho v_0 R}{\eta} \approx 1,3 \cdot 10^5$. Из графика на рисунке 3 следует, что при уменьшении скорости мяча в 100 раз, т.е. практически в течение всего полета, коэффициент сопротивления остается постоянным и равным $C_x = 0,4$. Оценим величину горизонтальной составляющей ускорения мяча в начальный момент:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{C_x \pi \rho R^2 v^2}{2m} \approx 43 \text{ м/с}^2.$$

За время полета скорость уменьшится примерно на

$$\Delta v = aT \approx 17 \text{ м/с}$$

и в момент удара будет равна

$$v_1 = v_0 - \Delta v \approx 38 \text{ м/с}.$$

Конечно, полученный результат верен по порядку величины и демонстрирует технику построения грубых оценок.

Более точный ответ можно получить, суммируя бесконечно малые. Действительно, по второму закону Ньютона,

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -F = -C_x \rho \frac{v_x^2}{2} \pi R^2,$$

или

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} = -\beta v_x \Delta t = -\beta \Delta x, \text{ где } \beta = \frac{C_x \pi \rho R^2}{2m} \approx 0,014 \text{ м}^{-1}.$$

Суммируя элементарные относительные приращения горизонтальной составляющей скорости мяча по всему времени полета, получаем

$$\sum \frac{\Delta v_x}{v_x} = -\beta \sum \Delta x, \text{ или } \ln \frac{v_1}{v_0} = -\beta L.$$

Отсюда находим

$$v_1 = v_0 \cdot \exp(-\beta L) \approx 42 \text{ м/с}.$$

Уточним и продолжительность полета мяча:

$$T = \sum \Delta t = -\frac{1}{\beta} \sum \frac{\Delta v_x}{v_x^2} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right) \approx 0,27 \text{ с}.$$

Рассмотренная задача иллюстрирует известное правило Уилера (американского физика-теоретика): «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлекли простые физические соображения (симметрию! инвариантность!) до того, как начинать подробный вывод ... Будь смелее... Делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют интуицию. Ошибочные предположения дают ей хорошую встряску».

Упражнения

1. Небольшой упругий брусок массой m может двигаться без трения внутри прямоугольной коробки такой же массы. Коробка находится на столе, покрытом тонким слоем масла. В начальный момент коробка покоится, а брусок, находящемуся у одной из стенок, сообщают скорость v_0 , направленную по нормали к стенке. Сколько соударений бруска с коробкой произойдет за все время движения? Расстояние между стенками, с которыми соударяется брусок, равно L . Силу трения считайте пропорциональной скорости коробки: $\vec{F} = -k\vec{v}$, соударения — абсолютно упругими.

2. Маленькая шайба массой m лежит на краю длинной доски массой M , покоящейся на гладкой горизонтальной поверхности. Шайба и доска смазаны маслом. Шайбе сообщают горизонтальную скорость v_0 , направленную вдоль доски. При движении на каждое тело действует сила вязкого трения, пропорциональная относительной скорости: $\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$. Определите перемещение шайбы относительно доски за достаточно большой промежуток времени.

3. Следуя условию задачи 4 в статье, найдите время, за которое шайба совершит первый оборот. Считайте начальную скорость $v_0 = 3 \text{ м/с}$, радиус круга $R = 1 \text{ м}$.

Указание: при решении воспользуйтесь тем, что при малых приращениях аргумента $\Delta \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\Delta x}{x^2}$.

4. Стальной шарик радиусом $r = 0,5 \text{ мм}$ движется в широком сосуде, наполненном глицерином. На шарик действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления, являющаяся степенной функцией его скорости v , радиуса r и коэффициента внутреннего трения (вязкости) η глицерина, т.е. $F = k \cdot \eta^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma$, где $k = 6\pi$ — безразмерный множитель. Воспользуйтесь соображениями размерности и найдите показатели степени α, β, γ . Далее определите скорость v установившегося (равномерного) движения шарика. Плотность глицерина $\rho_1 = 1,26 \text{ г/см}^3$, плотность стали $\rho_2 = 7,8 \text{ г/см}^3$, коэффициент внутреннего трения (вязкости) глицерина $\eta = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$.

Параллельное проектирование в задачах

В.МИРОШИН

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИГУРЫ ИГРАЕТ важную роль в решении большинства стереометрических задач. Существуют общепринятые и часто используемые изображения основных стереометрических объектов – призм, пирамид, конусов и т.д. Но изображение – плоское, и поэтому фигура может изображаться в различных ракурсах.

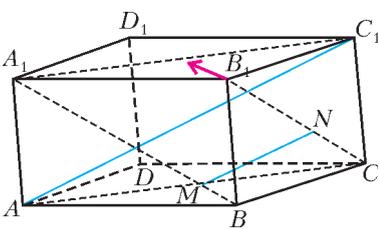


Рис. 1

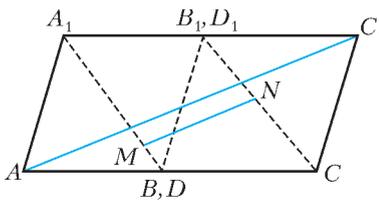


Рис. 2

В рассматриваемых ниже задачах решение получается при построении непривычных изображений многогранников. **Задача 1** (МГУ, мехмат). На диагоналях A_1B и B_1C боковых граней параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда AC_1 (рис. 1). Найдите отношение $MN : AC_1$.

Решение. Посмотрим на параллелепипед «вдоль» диагонали B_1D_1 , спроектировав нужные нам точки в плоскость ACC_1A_1 (рис. 2).

Образы вершин B и D совпадут с серединой AC ; аналогично, образы вершин B_1 и D_1 совпадут с серединой A_1C_1 . При параллельном проектировании образами параллельных прямых являются параллельные прямые, и к тому же отношения отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняются. Поэтому из теоремы Фалеса следует, что образы диагоналей A_1B и B_1C разделят образ AC_1 на три равных отрезка, средний из которых будет равен образу MN . Значит, $MN : AC_1 = 1 : 3$.

Ответ: 1 : 3.

Задача 2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N – середины боковых ребер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках AB_1 и CM расположены точки E и F соответственно так, что $EF \parallel BN$ (рис. 3). Найдите отношение $EF : BN$.

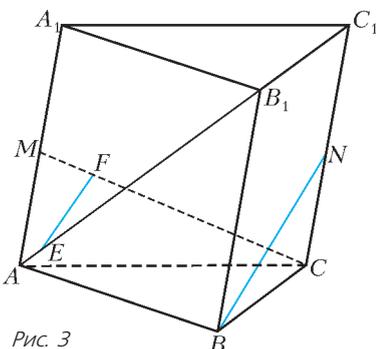


Рис. 3

Решение. Выберем в качестве плоскости проектирования основание призмы ABC , а в каче-

стве прямой проектирования выберем прямую MC . Далее для удобства будем обозначать образ точки при проектировании той же буквой, что ее прообраз, только со штрихом (например, проекцию точки N будем обозначать N'). Образом боковой грани CC_1A_1A призмы будет отрезок, расположенный на прямой AC , а образом боковой грани CC_1B_1B – параллелограмм, одной из сторон которого будет BC (рис. 4).

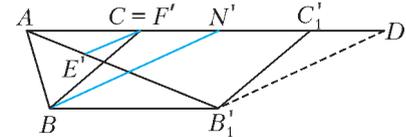


Рис. 4

Так как N – середина ребра, то треугольники $CN'N$ и C_1A_1N равны, поэтому $AC = A_1C_1 = CN'$. Кроме того, так как $CN = NC_1$, то $CN' = N'C_1$. Проведем $B_1'D \parallel BN'$. Получим

$$\frac{EF}{BN} = \frac{E'F'}{BN'} = \frac{E'F'}{B_1'D} = \frac{AF'}{AD} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 1 : 4.

Задача 3. В пирамиде $ABCD$ точки M , F и K – середины ребер BC , AD и CD соответственно. На прямых AM и CF соответственно взяты точки P и Q так, что $PQ \parallel BK$ (рис. 5). Найдите отношение $PQ : BK$.

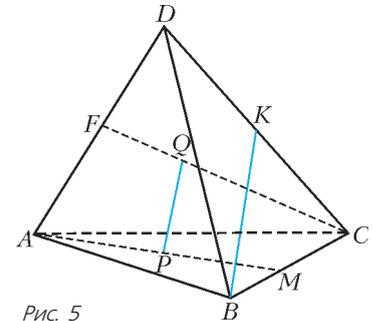


Рис. 5

Решение. Следуя предыдущим примерам, мы должны выбрать плоскость проектирования и прямую проектирования так, чтобы наиболее простым образом найти нужное нам отношение. В качестве плоскости проектирования выберем основание пирамиды ABC , а в качестве прямой проектирования возьмем FC . Образом отрезка FK будет отрезок $CK' = FK = \frac{1}{2} AC$. Образом отрезка PQ будет отрезок $PC \parallel BK'$ (рис. 6).

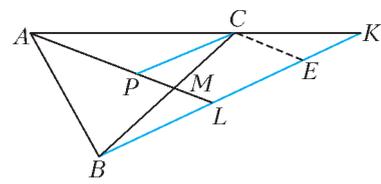


Рис. 6

Продолжим AM до пересечения с BK' в точке L и проведем $CE \parallel AL$. Тогда

$$\frac{BL}{PC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{1}, \quad \frac{K'E}{EL} = \frac{K'C}{CA} = \frac{1}{2}.$$

И так как $PC = EL$, получим, что

$$\frac{PQ}{BK} = \frac{PC}{BK'} = \frac{PC}{BL + LE + EK'} = \frac{2}{2 + 2 + 1} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: 2 : 5.

Задача 4. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что $AM : AD = 1 : 5$ и прямая MN параллельна плоскости BDC_1 (рис. 7). Найдите отношение $CN : CA_1$.

Решение. Как и в первой задаче, построим проекцию параллелепипеда на плоскость AA_1C_1C вдоль прямой BD .

Так как прямая проектирования лежит в плоскости BC_1D , то эта плоскость отобразится в прямую OC_1 ,

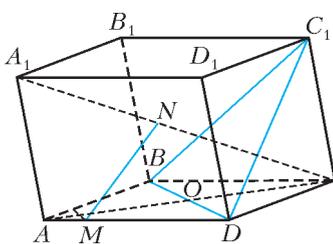


Рис. 7

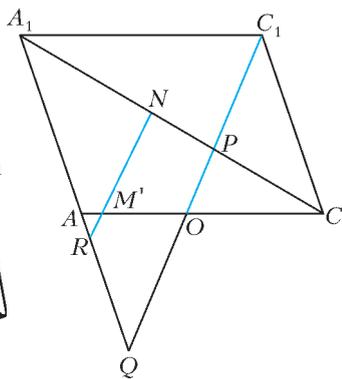


Рис. 8

а отрезок MN , параллельный плоскости, – в отрезок $M'O \parallel OC_1$ (рис.8).

Продолжим C_1O и NM' до пересечения с AA_1 . Имеем

$$\frac{AM'}{M'O} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{4}, \quad \frac{NP}{PC} = \frac{M'O}{OC} = \frac{4}{5}.$$

Так как O – середина AC , то $AQ = AA_1$ и $\frac{AR}{RQ} = \frac{1}{4}$;

$$\frac{A_1N}{NP} = \frac{A_1R}{RQ} = \frac{6}{4}.$$

Следовательно, $\frac{CN}{CA_1} = \frac{5+4}{5+4+6} = \frac{3}{5}$.

Ответ: 3 : 5.

Задача 5 (МФТИ, 1981 г., а также конкурс абитуриентов 2007/2008 года по решению задач вступительных испытаний МФТИ). Точка D – середина ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью треугольника ABC , вершина M лежит на продолжении AC , причем $CM = \frac{1}{2} AC$, ребро SN проходит через точку D , а ребро SP пересекает отрезок BB_1 в точке K (рис.9). В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой K ?

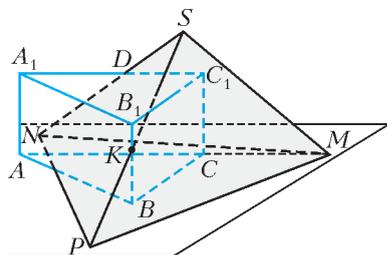


Рис. 9

Решение. Прежде всего, посмотрим «сверху», т.е. спроектируем оба многогранника на их общую плоскость основания. Вершина S пирамиды спроектируется в центр треугольника MNP – точку H (рис.10).

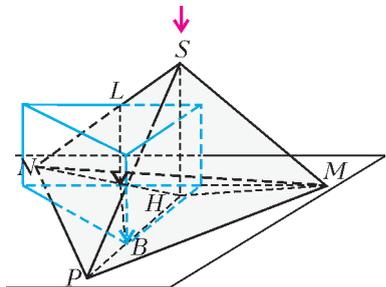


Рис. 10

Образами боковых ребер будут служить радиусы описанной около него окружности, проведенные в вершины. Образы точек D и K будут лежать на перпендикуляре, проведенном к AM из вершины B . Но самое интересное, что точка M , точка B и образ точки D будут видны из образа вершины пирамиды под углами $\frac{2\pi}{3}$. Это следует из того, что

$\angle NHM = \angle MHP = \angle PHN = 120^\circ$, так как H – центр правильного треугольника MNP , а проекции точек D и K лежат на отрезках HN и HP соответственно. Следовательно, H – точка Торричелли для прямоугольного треугольника BMD' (рис.11, D' – образ точки D).

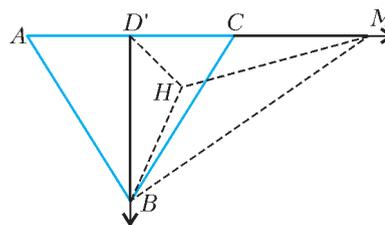


Рис. 11

Напомним свойство точки Торричелли: сумма расстояний от нее до вершин треугольника минимальна. Из условия задачи можно найти отношение $b : a = \operatorname{tg} \varphi = BD' : D'M = 3 : 2$, где $\varphi = \angle D'MB$ (далее это понадобится).

Найдем отношения расстояний от точки H до вершин прямоугольного треугольника $D'BM$. Введем систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось в точке D' , ось абсцисс была направлена по лучу $D'M$, а ось ординат – по лучу $D'B$.

Точка H будет точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников BHD' и $D'HM$, углы в вершинах H которых равны $\frac{2\pi}{3}$ (рис.12). Кроме того, окружность, описанная около первого треугольника, пройдет, очевидно, через точку A . Следовательно, AB – ее диаметр, и ее уравнение

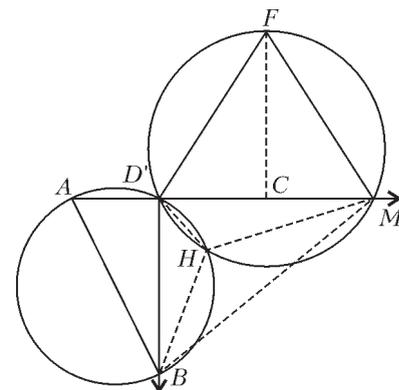


Рис. 12

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4}.$$

Аналогично, вторая окружность будет содержать вершину F равностороннего треугольника $D'MF$, построенного так, чтобы точки B и F лежали в разных полуплоскостях относительно прямой $D'M$. Уравнение второй окружности будет иметь вид

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Для нахождения координат точки H решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ x^2 - ax + y^2 + \frac{a\sqrt{3}}{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ \frac{3a}{2}x = \left(b + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ y = \frac{3\sqrt{3}a}{2(a+b\sqrt{3})}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)}x, \\ x^2 \left(1 + \frac{27}{4(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)^2} \right) + x \left(\frac{a}{2} - \frac{3\sqrt{3}a\operatorname{tg}\varphi}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)} \right) = 0. \end{cases}$$

Понятно, что первое решение системы $(0; 0)$, так как обе окружности проходят через начало координат. Найдем второе решение системы, обозначив $\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi = k$.

$$x \left(\frac{4(1+k)^2 + 27}{4(1+k)^2} \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{2k-1}{1+k} \right) \Leftrightarrow x = a \frac{2(2k-1)(k+1)}{4(k+1)^2 + 27}.$$

Соответственно,

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+k)} a \frac{2(2k-1)(k+1)}{4(k+1)^2 + 27} = a \frac{3\sqrt{3}(2k-1)}{4(k+1)^2 + 27}.$$

Учитывая, что $k = \frac{3}{2}$, получим координаты точки H :

$$x = \frac{5}{26}a, \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+k)} \cdot \frac{5}{26} = a \frac{3\sqrt{3}}{26}.$$

Найдем искомые расстояния:

$$D'H = \sqrt{\frac{25}{676} + \frac{27}{676}}a = \sqrt{\frac{52}{676}}a = \frac{a}{\sqrt{13}};$$

$$HM = \sqrt{\left(\frac{5}{26} - 1\right)^2 + \frac{27}{676}}a = \sqrt{\frac{441+27}{676}} = \frac{3a}{\sqrt{13}};$$

$$HB = \sqrt{\frac{25}{676} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{26} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}a = \sqrt{\frac{325}{676}}a = \frac{5a}{2\sqrt{13}}.$$

Для получения окончательного решения сделаем еще вот что: совместим треугольники SHM , SHP и SHN (рис.13). Так как

$$HD' = \frac{1}{3}HM, \quad HB = \frac{5}{6}HM,$$

$$\text{то } \frac{B_1K}{KB} = \frac{DK}{KM} = \frac{D'B}{BM} = \frac{3}{1}.$$

Действительно, «сверху и сбоку» виднее.

Ответ: 3 : 1.

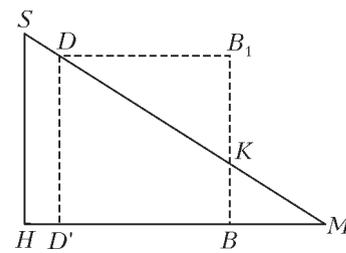


Рис. 13

Упражнения

1. На диагоналях AC и BA_1 боковых граней параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда DB_1 . Найдите отношение $MN : DB_1$.

2. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка M , а на прямой B_1C – точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

3. Точка E – середина ребра MQ правильной четырехугольной пирамиды $SMNPQ$. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расположен так, что плоскость грани $ABCD$ совпадает с плоскостью $MNPQ$, вершина B_1 лежит на ребре SN , точка E лежит на прямой AB , причем $EA = AB$. Прямая SP пересекает ребро CC_1 . В каком отношении отрезок CC_1 делится точкой пересечения?

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ точка D – середина ребра $A_1 C_1$. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью ABC , первое боковое ребро проходит через вершину B , второе – через точку D , а третье пересекает ребро CC_1 . Найдите отношение объема пирамиды к объему призмы.

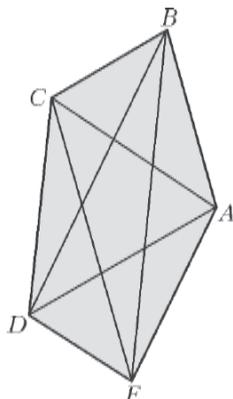
5. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, параллельная диагонали DB_1 . В каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1 ?

Вниманию наших читателей!

Когда диагональ пятиугольника параллельна стороне?

В 11 номере «Кванта» за 1977 год опубликовано довольно сложное решение следующей задачи.

М433. Сторона BC выпуклого пятиугольника $ABCDE$ параллельна диагонали AD , сторона CD – диагонали BE , сторона DE – диагонали AC , а сторона AE – диагонали BD . Докажите, что сторона AB параллельна диагонали CE .



Заметьте, однако, что условие $BC \parallel AD$ можно записать в виде

$$S_{ABC} = S_{DBC}.$$

Аналогично, условия $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ и $AE \parallel BD$ запишем в виде равенств

$$S_{DBC} = S_{DEC}, \quad S_{DEC} = S_{DEA} \quad \text{и} \quad S_{DEA} = S_{BEA}.$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = S_{DBC} = S_{DEC} = S_{DEA} = S_{BEA},$$

откуда $S_{ABC} = S_{BEA}$, т.е. $CE \parallel AB$, что и требовалось доказать.

А. Спивак

Новая книга по физике

В издательстве «Физматлит» в серии «Школьнику и учителю» вышла книга «Краткий курс физики», автором которой является заместитель главного редактора журнала «Квант» по физике А.И.Черноуцан.

Книга содержит краткое, но достаточно полное и подробное изложение всех разделов школьной физики, включенных в программу ЕГЭ. Изложение теории сопровождается многочисленными примерами, вопросами и ответами, а также замечаниями, проясняющими тонкие и трудные моменты. В книге есть подробный предметный указатель, позволяющий использовать ее в качестве справочника.

Книга рекомендована Федеральным институтом педагогических измерений для подготовки к ЕГЭ.

XXX Турнир городов

Турнир городов — соревнование по математике для старшеклассников. Для школьников из каждого города, участвующего в Турнире, это одна из олимпиад, которые проводятся в их городе. Соревнование же между городами — заочное. В первом турнире (1980 г.) приняли участие только Москва и Киев. Ныне число городов-участников достигло примерно сотни (оно несколько колеблется из года в год), причем общее население этих городов — около 100 миллионов человек, а число школьников, решающих эти задачи, — около 10 тысяч. Самая большая группа городов находится в России, далее идут Украина, Белоруссия, Балканские страны, Австралия, Латинская Америка, Канада, Иран, Израиль, Германия и некоторые другие.

Турнир знакомит школьников с интересными красивыми задачами, требующими для своего решения нестандартных подходов. Школьник, которому удалось самостоятельно решить несколько таких задач (не обязательно во время соревнования, а хотя бы дома, в свободное время), начинает смотреть на математику другими глазами — по сравнению с тем, как он ее воспринимал, видя только школьный курс. Привлекает школьников к Турниру и то, что он является спортивным соревнованием. Потребность проверять свои способности и соревноваться вообще лежит в природе людей, в особенности молодых. Но спортивная сторона Турнира вступает в противоречие с научной стороной. Для тех, кто только начинает интересоваться математикой, это противоречие незаметно. Пяти часов слишком много, чтобы начинающий мог использовать все это время. Но для школьников продвинутых, способных в сложном варианте решить труднейшие задачи, пять часов — это слишком мало, и Турнир становится для них соревнованием на скорость. А это уже противоречит духу науки. Чтобы смягчить этот недостаток, в Турнире введено правило зачета по трем лучшим задачам. Каждый год проходят четыре соревнования (базовый и сложный варианты осенью и весной), но они имеют права попыток, из которых выбирается лучший результат.

Организаторы Турнира городов как в Москве, так и в городах-участниках, заинтересованы в том, чтобы увидеть способных молодых людей, которые займут места в соответствующих учебных заведениях (в математических классах и вузах), а впоследствии — и в научных учреждениях.

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2008 год)¹

Базовый вариант

8–9 классы

1(3). В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

П.Кожевников

2(3). Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

В.Произволов

¹ В скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

3(4). В окружность радиуса 2 вписан остроугольный треугольник $A_1A_2A_3$. Докажите, что на дугах A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 можно отметить по одной точке B_1 , B_2 , B_3 соответственно так, чтобы площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ численно равнялась периметру треугольника $A_1A_2A_3$.

Г.Гальперин

4(4). Даны три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других. Может ли произведение этих трех чисел являться точной 2008-й степенью натурального числа?

Г.Гальперин

5(4). Несколько спортсменов стартовали одновременно с одного и того же конца прямой беговой дорожки. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, спортсмен мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце и т.д. В какой-то момент все спортсмены снова оказались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех спортсменов будут продолжаться и впредь.

А.Шаповалов

10–11 классы

1(3). У Алеси есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алеша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Сережа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Сережа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алешей равно количеству различных чисел среди записанных Сережей.

А.Буфетов

2(3). Решите систему уравнений ($n > 2$)

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \dots + x_n} &= \\ &= \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \dots + x_n + x_1} = \dots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \dots + x_{n-1}}; \\ x_1 - x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Б.Френкин

3(4). В окружность радиуса 2 вписан тридцатиугольник $A_1A_2 \dots A_{30}$. Докажите, что на дугах A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{30}A_1$ можно отметить по одной точке B_1, B_2, \dots, B_{30} соответственно так, чтобы площадь шестидесятиугольника $A_1B_1A_2B_2 \dots A_{30}B_{30}$ численно равнялась периметру тридцатиугольника $A_1A_2 \dots A_{30}$.

Г.Гальперин

4(4). Существует ли арифметическая прогрессия из пяти различных натуральных чисел, произведение которых есть точная 2008-я степень натурального числа?

Г.Гальперин

5(4). На клетчатом листе бумаги нарисованы несколько прямоугольников, их стороны идут по сторонам клеток. Каждый прямоугольник состоит из нечетного числа клеток, и никакие два прямоугольника не содержат общих клеток. Докажите, что эти прямоугольники можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы у прямоугольников одного цвета не было общих точек границы.

А.Грибалко

Сложный вариант

8–9 классы

1(4). На шахматной доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате 50×50 находится хотя бы один ферзь.

А.Грибалко

2(6). Есть 4 камня, каждый весит целое число граммов. Есть чашечные весы со стрелкой, показывающей, на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. Можно ли узнать про все камни, сколько какой весит, за 4 взвешивания, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибиться на 1 грамм?

Д.Баранов

3(6). Сережа нарисовал треугольник ABC и провел в нем медиану AD . Затем он сообщил Илье, какова в этом треугольнике длина медианы AD и какова длина стороны AC . Илья, исходя из этих данных, доказал утверждение: угол CAB тупой, а угол DAB острый. Найдите отношение AD/AC (и докажите для любого треугольника с таким отношением утверждение Ильи).

И.Богданов

4(6). Барон Мюнхгаузен рассказывал, что у него есть карта страны Оз с пятью городами. Каждые два города соединены дорогой, не проходящей через другие города. Каждая дорога пересекает на карте не более одной другой дороги и не более одного раза. Дороги обозначены зеленым или красным (по цвету кирпича, которым вымощены), и при обходе вокруг каждого города (по периметру) цвета выходящих из него дорог чередуются. Могут ли слова барона быть правдой?

А.Грибалко

5(8). Даны положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Известно, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1/2$. Докажите, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < 2.$$

С.Слободник

6(9). На сторонах AC и BC неравнобедренного треугольника ABC во внешнюю сторону построены как на основаниях равнобедренные треугольники $AB'C$ и $CA'B$ с одинаковыми углами при основаниях, равными φ . Перпендикуляр, проведенный из вершины C к отрезку $A'B'$, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке C_1 . Найдите угол AC_1B .

А.Заславский

7. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, \dots число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности

а) (5) число 1 встречается бесконечно много раз;

б) (5) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

(Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

А.Заславский

10–11 классы

1(4). Квадратная доска разделена 7-ю прямыми, параллельными одной стороне доски, и 7-ю прямыми, параллельными другой стороне доски, на 64 прямоугольные клетки, которые покрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке. Расстояния между соседними прямыми не обязательно одинаковы, поэтому клетки могут быть разных размеров. Известно, однако, что отношение площади любой белой клетки к площади любой черной клетки не больше 2. Найдите наибольшее возможное отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных.

Ю.Чеканов

2(6). Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для каждого из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань?

И.Богданов

3(6). На столе лежат $N > 2$ кучек по одному ореху в каждой. Двое ходят по очереди. За ход нужно выбрать две кучки, где числа орехов взаимно просты, и объединить эти кучки в одну. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Для каждого N выясните, кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл его противник.

А.Шаповалов

4(6). Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 – это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC , отличная от C . Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1 . Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ – тоже трапеция.

И.Богданов

5(8). См. задачу M2119 «Задачника «Кванта».

6(9). См. задачу M2120 «Задачника «Кванта».

7. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем

а) (5) после 29-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 30-й попытке);

б) (5) после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?

(Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.)

В.Клепцын

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Н.Константинов

ИНФОРМАЦИЯ

Заочное отделение Малого мехмата МГУ

Более 30 лет при механико-математическом факультете МГУ работает Малый механико-математический факультет (МММФ). За эти годы заочное отделение выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами механико-математического и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – углубление знаний по темам школьной программы и расширение математического кругозора за рамки программы средней школы.

В 2009 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2009/10 учебный год в 8 и 9 классы, а также прием на неполный курс обучения в 10 и 11 классы. На заочное отделение принимают учащихся из России, стран

СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. Зачисление индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего школьного преподавателя и может включать не более 15 учащихся из одной параллели (если учащихся, желающих заниматься, больше, то можно сформировать несколько групп). Группа «Коллективный ученик» обучается как *один учащийся*, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу и оплачивает обучение всей группы как обучение одного учащегося.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, летом 2009 года, вместе с комплектом заданий (а коллективным ученикам – несколько позже, в конце сентября – начале октября).

Школьники, успешно закончившие обучение на заочном отделении (с итоговой оценкой «хорошо» или «отлично»), получают свидетельства об окончании Малого мехмата, а закончившие заочное отделение с оценкой «удовлетворительно» – справки об окончании Малого мехмата.

Желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата должны *не позднее 30 апреля 2009 года* выслать в наш адрес письмом или по электронной почте решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

1. Фамилия, имя, отчество учащегося
 2. Класс (*в 2009/10 учебном году*)
 3. Полный домашний адрес *с указанием почтового индекса*
 4. Адрес электронной почты (если он есть)
 5. Телефон (с кодом города)
 6. Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение
- Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу: необходимо лишь *не позднее 15 сентября 2009 года* выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
 2. Фамилии, имена, отчества учащихся (не более 15 человек) в алфавитном порядке
 3. Класс (*в 2009/10 учебном году*)
 4. Полный адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) *с указанием почтового индекса*
 5. Адрес электронной почты (если он есть)
 6. Телефон (с кодом города)
 7. Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение
- Наш адрес: 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ

Электронная почта: vstup@zaoch.ru
 Сайт МММФ: <http://mfm.math.msu.ru>
 Телефон: (495) 939-39-43

Вступительная работа

Задачи 1–10 предназначены для поступающих в 2009 году в 8 или 9 класс (т.е. для нынешних учащихся 7 или 8 класса). Задачи 6–15 предназначены для поступающих в 10 или 11 класс (для нынешних учащихся 9 или 10 класса). За решения задач для других классов баллы не начисляются!

1. Фанерный лист прямоугольной формы обрезали, уменьшив его размеры на 5% по вертикали и на 10% по горизонтали. На сколько процентов уменьшилась площадь листа?

2. Решите неравенство $(2x^2 - 1)^4 - (x^2 + 8)^4 \geq 0$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD . Докажите, что $AB > AD$.

4. Решите в натуральных числах уравнение

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}.$$

5. Какое количество простых чисел может быть среди пяти подряд идущих пятизначных натуральных чисел? Укажите все возможные варианты и докажите, что другие варианты невозможны.

6. Витя готовится к важной контрольной работе по теме «Параллельные прямые». За каждый из вопросов контрольной работы можно получить 0, 1, 2, 3 или 4 балла. Витя посчитал, что если за половину вопросов он получит 3 балла, а за оставшуюся половину 2 балла, то этого как раз хватит для того, чтобы успешно сдать тему. Если же Витя за треть вопросов получит 4 балла, а за остальные вопросы 3 балла, то он наберет на 10 баллов больше, чем необходимо для сдачи этой темы. Сколько вопросов содержит контрольная работа? За какое количество баллов ставят зачет по теме «Параллельные прямые»?

7. Катя и Миша играют в игру. Перед началом игры на доске написано число 1. За один ход разрешается умножить записанное число на любое натуральное число от 2 до 9. Первой ходит Катя, далее ходят по очереди. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре? Укажите выигрышную стратегию.

8. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и B – прямые. Известно, что $BC = q$, $AD = r$, $CD = q + r$. Пусть T – точка пересечения биссектрис углов C и D . Найдите длины всех высот треугольника TCD .

9. Пусть S – сумма цифр числа a , T – сумма цифр числа b . Докажите, что если число $S + T$ делится на 9, то число $a + b$ также делится на 9.

10. Несколько друзей устроили шахматный турнир по круговой системе (каждый сыграл с каждым по разу). За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. Известно, что среди участников мальчиков было втрое больше, чем девочек. После завершения турнира оказалось, что ничьих не было, а число очков, набранных всеми мальчиками, равно числу очков, набранных всеми девочками. Кто победил на турнире: мальчик или девочка?

11. Даны функции $f(x) = \frac{3}{x-5}$, $g(x) = |x-4|$. Постройте график функции $f(g(x))$.

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

13. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны, $AD > BC$. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся стороны CD в точке M . Пусть N – вторая точка пересечения окружности и прямой AM . Известно, что $MN/NA = 3$. Найдите AD/BC .

14. Какое число больше: 8^{92} или 3^{180} ?

15. Лена загадала число: 1, 2 или 3. Костя хочет отгадать это число. Ему разрешается задать Лене один вопрос, на который Лена отвечает либо «да», либо «нет», либо «не знаю». Приведите пример вопроса, получив ответ на который, Костя смог бы однозначно определить загаданное Леной число. Обязательно объясните свое решение.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 4 за 2008 г.)

1. Отложим какие-нибудь 4 монеты – назовем их «группа А». Оставшиеся 36 монет разделим на две группы В и С по 18 монет.

Произведем первое взвешивание, положив В и С на разные чашки весов.

Рассмотрим случай, когда весы оказались в равновесии. Это означает, что или в обеих группах В и С нет фальшивых монет, или фальшивых монет поровну, т.е. по одной. Разделив группу В на две равные части B_1 и B_2 , произведем второе взвешивание. Если весы при этом окажутся в равновесии, то все 18 монет на весах настоящие. Задача решена. Если же, например, часть B_1 окажется легче части B_2 , то это значит, что в части B_2 все 9 монет настоящие. Тогда разделим группу С поровну на части C_1 и C_2 и произведем третье взвешивание, положив на одну чашку весов все 9 настоящих монет части B_2 , а на другую все 9 монет части C_1 . Если весы в равновесии, то все 18 монет на них – настоящие. Если часть C_1 легче, то в ней есть фальшивая монета, но тогда все 9 монет части C_2 настоящие. Вместе с монетами части B_2 они составляют 18 настоящих монет.

Рассмотрим случай, когда при первом взвешивании одна из групп легче другой, например В легче С. Это означает, что число фальшивых монет в группе С меньше, чем в группе В. Поэтому в группе С не более одной фальшивой монеты. Разделим группу С поровну на части C_1 и C_2 и положим их на различные чашки весов – второе взвешивание. Если весы оказались в равновесии, то в группе С нет фальшивых монет, и все 18 монет на весах настоящие. Задача решена.

Если же, например, C_1 легче C_2 , то в группе С есть одна фальшивая монета и она находится в части C_1 . Тогда в C_2 все монеты настоящие. В группе В, следовательно, две фальшивые монеты, но тогда среди четырех ранее отложенных монет (группа А) фальшивых нет. Из части C_1 отложим одну монету, а оставшиеся 8 разделим поровну на части C_3 и C_4 и положим на разные чашки весов (третье взвешивание).

Если весы в равновесии, то все 8 взвешенных монет настоящие и вместе с девятью настоящими монетами части C_2 и четырьмя настоящими монетами группы А получаем 21 настоящую монету. Если C_3 легче, чем C_4 , то в C_4 четыре настоящие монеты, а в C_3 есть фальшивая. Следовательно, отложенная из части C_1 одна монета – настоящая. Эта монета плюс четыре из части C_4 плюс четыре из группы А плюс девять монет из части C_2 дают в сумме 18 монет. Задача решена.

2. Обозначим $a(n)$ – количество подмножеств n -элементного множества, каждое из которых состоит из четного числа элементов, $b(n)$ – количество подмножеств, каждое из которых состоит из нечетного числа элементов. У пустого множества есть единственное подмножество – пустое. Поэтому $a(0) = 1$, $b(0) = 0$.

Пусть $n > 0$. Подсчитаем $a(n)$, опираясь на значения $a(n-1)$ и $b(n-1)$ и предполагая, что к $(n-1)$ -элементному множеству добавили некий n -й элемент P . Подмножества, содержащие четное число элементов, разбиваются на две непересекающиеся группы. В одной из них содержатся подмножества, каждое из которых включает элемент P и, стало быть, содержит нечетное число других, отличных от P , элементов, – таких подмножеств $b(n-1)$. В другую группу входят подмножества, каждое из которых не содержит элемент P и, следовательно, содержит четное число других, отличных от P , элементов, – таких подмножеств $a(n-1)$. Отсюда

$$a(n) = b(n-1) + a(n-1).$$

Из совершенно аналогичных соображений подсчитываем

$$b(n) = a(n-1) + b(n-1).$$

Итак, $a(n) = b(n)$ для всех натуральных n .

3. Нет, нельзя. Пронумеруем все клетки полоски так, как показано на рисунке 1. Будем называть номером фишки номер

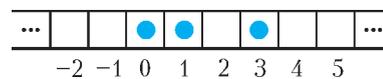


Рис. 1

клетки, на которой она стоит. Рассмотрим произвольные три клетки такие, что одна из них находится посередине между двумя другими. Пусть номер центральной клетки равен n , а крайние отстоят от нее на m клеток, т.е. имеют номера $n-m$, n , $n+m$. Тогда сумма номеров этих клеток равна $3n$. Следовательно, после каждого разрешенного действия остаток от деления на 3 суммы номеров всех фишек, находящихся на полоске, не меняется. Но в начальной позиции этот остаток равен 1, а в позиции, когда на полоске нет ни одной фишки, он равен 0, поэтому убрать все фишки с полоски нельзя.

4. Такое m существует для всех n .

При $n = 2$ можно взять $m = 2$. Действительно, 2 делится на 2, а 3 делится на 1.

Если же $n > 2$, то можно взять $m = n! - n$ (восклицательный знак означает факториал). Действительно, для любого k от 0 до $n-1$ имеем

$$m + k = n! - n + k = n! - (n - k).$$

Это число с очевидностью делится на $n - k$ (ибо $n!$ делится на все натуральные числа, не превосходящие n).

Вместо $n!$ можно взять также любое число, делящееся на НОК(1, 2, 3, ..., n).

5. Да, верно. Перпендикуляры, проведенные к противоположным сторонам параллелограмма, лежат на одной прямой. Отрезки этих прямых являются диагоналями квадрата. Следовательно, эти диагонали взаимно перпендикулярны. Отсюда следует, что стороны исходного параллелограмма перпендикулярны, т.е. исходный параллелограмм – прямоугольник. Кроме того, равны расстояния между противоположными сторонами этого прямоугольника (они равны половине диагонали квадрата). Значит, этот прямоугольник – квадрат.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Воздух под воздействием космического излучения и радиоактивного излучения Земли всегда поддерживается в ионизированном состоянии, т.е. не является изолятором.

2. Вращение вызовет смещение электронов к краю диска, его периферия приобретет отрицательный заряд, центр же диска зарядится положительно.

3. а) Параболу; б) синусоиду.

4. Согласно принципу суперпозиции, напряженность результирующего однородного поля будет направлена параллельно биссектрисе угла, образованного плоскостями. В таком поле заряженные частицы станут двигаться по параболам с осями симметрии, параллельными этой биссектрисе.

5. Вылет электронов вызывает появление на катоде избыточных положительных зарядов. Тормозясь в поле, созданном этими зарядами, большинство электронов возвращаются на катод.

6. Да, одинаковы; различны плотности тока.

7. При росте скорости эффект расхождения пучка проявляется в меньшей степени, так как увеличиваются магнитные силы притяжения между движущимися частицами.

8. В гравитационном поле траектория вообще не зависит от вида частицы, в электрическом и магнитном полях она определяется отношением заряда частицы к ее массе.

9. Радиус окружности обратно пропорционален величине удельного заряда частицы, поэтому при увеличении последнего радиус кривизны траектории будет уменьшаться.

10. Нет, нельзя. Относительно наблюдателя, движущегося вслед за электронами, упорядоченное движение станут совершать положительные ионы кристаллической решетки проводника – это приведет к появлению такого же магнитного поля, какое фиксировалось неподвижным наблюдателем.

11. Продвигаясь в область более сильного магнитного поля, частица испытывает действие силы Лоренца, одна из составляющих которой направлена в противоположную сторону и словно выталкивает частицу в область более слабого поля.

12. Нет, нельзя. Частица при столкновении с молекулами газа расходует свою кинетическую энергию на ионизацию молекул, поэтому радиус кривизны ее траектории постепенно уменьшается.

13. Если частицы влетели в камеру снизу, то правый след принадлежит электрону, а левый – позитрону, причем кинетическая энергия позитрона больше.

14. Ответ практически содержится в словах Фейнмана из эпиграфа. Сила Лоренца, действующая на частицы со стороны магнитного поля, обеспечивает искривление траектории движения частиц и, следовательно, уменьшение размеров ускорителя.

15. Действующие на частицы сила Лоренца и кулоновская сила направлены в противоположные стороны. Если эти силы не уравновешивают друг друга, частицы отклоняются от прямой траектории и не попадают в выходное отверстие. Выйти из прибора смогут лишь частицы с определенной скоростью, зависящей от величин обоих полей.

16. Области Сибири расположены в более низких геомагнитных широтах, поскольку геомагнитный полюс смещен относительно географического и находится как раз на территории Канады.

17. Протонам при сближении с ядром требуется преодолевать отталкивание со стороны его кулоновского поля; электроны же, хотя и притягиваются ядрами, имеют примерно в 2000 раз меньшую, чем у нейтрона, массу и, соответственно, меньшую кинетическую энергию.

Микроопыт

При положительном заряде фольги электроны, испускаемые спиралью лампы, движутся к стеклянной колбе и заряжают ее внутреннюю поверхность отрицательно, т.е. зарядом противоположного знака, отчего отклонение листков электроскопа уменьшается. При отрицательном заряде фольги электроны, тормозясь, не попадают на стенки колбы.

САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ

5. а) При движении плоскости, перпендикулярной главной диагонали трехмерного куба, сперва возникает правильный треугольник, который растет, и затем у него начинают урезаться углы, так что возникает шестиугольник, являющийся пересечением растущего и уменьшающегося треугольников. Когда сечение проходит через центр куба, шестиугольник становится правильным, а когда оно проходит через три вершины – уменьшающимся треугольником, центрально симметричным исходному. Для сечения четырехмерного куба возникает растущий правильный тетраэдр, затем у него обрезаются углы, и возникает фигура, являющаяся пересечением растущего и уменьшающегося правильных тетраэдров. Когда сечение проходит через центр четырехмерного куба, размеры тетраэдров сравниваются, и возникает правильный октаэдр.

б) В трехмерном случае образуется паркет на плоскости сечения из правильных трех- и шестиугольников (рис.2), в четырехмерье – разбиение трехмерного пространства (гиперплоскости сечения) на правильные тетраэдры и октаэдры. (Задача о разбиении пространства на правильные тетраэдры и октаэдры предлагалась на Турнире городов.)

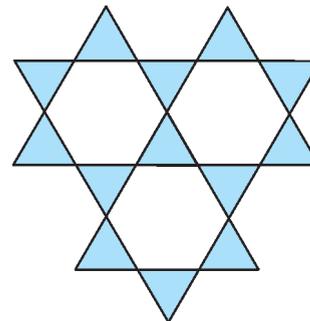


Рис. 2

ПАРАДОКСЫ КОМАНДНЫХ СОРЕВНОВАНИЙ

1. Составим таблицу, расположив по строкам результаты игр команд, победившей в соревновании I типа. Сумма очков на главной диагонали – более 50%. Если строки и столбцы таблицы упорядочены по рейтингу, то в левом нижнем углу любого прямоугольника таблицы находится минимум чисел этого прямоугольника. Поэтому числа главной диагонали определяют некоторый минимум очков в правой верхней половине таблицы. Кроме того, если выделить подтаблицу результатов игроков, имеющих ничьи на главной диагонали, то в этой табличке обе команды набирают половину очков. Возможные варианты подтаблицы для двух игроков:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} \end{array};$$

для трех игроков:

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Детальный разбор с учетом вышеизложенного показывает, что при $N < 5$ сумма очков в таблице будет не менее $\frac{1}{2}N^2$.

2. Обозначим рейтинги игроков следующим образом:

A: a_1 a_2

B: b_1 b_2

C: c_1 c_2

Пусть команда A побеждает команду B, а B побеждает C.

В соревнованиях I типа победившая команда не может проиграть ни одной партии. Поэтому имеем

$$a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2$$

и

$$b_1 \geq c_1, \quad b_2 \geq c_2.$$

Следовательно,

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1 \quad \text{и} \quad a_2 \geq b_2 \geq c_2,$$

а это исключает возможность победы команды C над командой A.

В соревнованиях II типа победитель может проиграть не более одной партии, и это может быть только партия слабейшего игрока (№2) против сильнейшего игрока команды противника (№1). В этом случае мы имеем

$$a_1 \geq b_1, \quad a_1 \geq b_2, \quad a_2 \geq b_2$$

и

$$b_1 \geq c_1, \quad b_1 \geq c_2, \quad b_2 \geq c_2.$$

Из этих неравенств следуют аналогичные неравенства для игроков команд A и C :

$$a_1 \geq c_1, \quad a_1 \geq c_2, \quad a_2 \geq c_2.$$

Победа команды C над командой A исключена и здесь, потому что из трех ничьих, допускаемых последними неравенствами ($a_1 = c_1$, $a_1 = c_2$, $a_2 = c_2$), вытекает и четвертая ничья ($a_2 = c_1$).

3. Один из возможных примеров:

A : 15 13 8 3 1

B : 14 11 6 5 4

C : 12 10 9 7 2

Здесь, в отличие от примера в тексте, все рейтинги различные, и ничьих в таблицах нет. Но суммарные результаты – такие же.

4. Один из возможных вариантов решения:

A : 4 4 3 2 1 1

B : 3 3 3 3 2 1

C : 4 3 2 2 2 2

Здесь $B : C = 20 : 16$, $C : A = A : B = 18,5$. Этот набор кубиков обеспечивает минимально возможную вероятность выигрыша $P = 18,5/36 = 37/72$, что гораздо хуже, чем для примера в тексте.

5. Один из возможных вариантов решения:

A : 18 14 10 9 5 1

B : 17 13 12 8 4 3

C : 16 15 11 7 6 2

Здесь $A : B = B : C = C : A = 19 : 17$. Вероятность выигрыша $P = 19/36$ для любой пары кубиков.

6. Простейший пример:

A : 3 2

B : 1 3

C : 2 1

$A = B$, $B = C$, $C < A$.

СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

1. Число соударений равно $2n + 1$, где n – наибольшее целое, удовлетворяющее условию $n < \frac{mv_0}{kL}$.

2. $L = \frac{v_0}{k} \frac{mM}{m + M}$.

3. $T_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\mu} \frac{R}{v_0} = 2,5 \text{ с}$.

4. $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$; $v = \frac{2}{9} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\eta} gr^2 = 0,26 \text{ см/с}$.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ

1. 1 : 3. 2. 1 : 3. 3. 5 : 1. 4. 16 : 21. 5. 5 : 1, считая от точки B .

XXX ТУРНИР ГОРОДОВ

Базовый вариант

8–9 классы

- См. решение задачи 3 «Кванта» для младших школьников из «Кванта» № 6 за 2008 год.
- См. решение задачи 2 «Кванта» для младших школьников из «Кванта» № 6 за 2008 год.
- Пусть точки B_1, B_2, B_3 – середины дуг A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 соответственно, O – центр окружности. Площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ равна сумме площадей четырехугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$ и $OA_3B_3A_1$. Но у этих четырехуголь-

ников диагонали перпендикулярны, а значит, площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Искомая

сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}OB_3 \cdot A_3A_1$.

Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, что нам и нужно.

4. См. решение задачи M2117 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

5. Изобразим беговую дорожку в виде левой половины некоторой окружности. Будем считать, что бегун, добегая до конца дорожки, не поворачивает обратно, а бежит дальше по правой половине этой окружности. Тогда все бегуны просто бегут по этой окружности. Условие того, что бегуны оказываются в одной точке исходной беговой дорожки, означает, что они находятся на прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности.

Пусть через время t после начала забега бегуны встретились (находятся на соответствующей прямой). Тогда бегуны на левой половине находятся на некотором расстоянии x от точки старта, и бегуны на правой половине тоже находятся на расстоянии x от точки старта (рис.3).

При этом каждый бегун на левой половине пробежал некоторое целое число кругов и еще расстояние x , а каждый бегун на правой половине не добегал до некоторого целого числа кругов расстояние x . Где будут бегуны через время $2t$ от начала забега? Каждый бегун на левой половине пробежит некоторое целое число кругов и еще расстояние $2x$, а каждый бегун на правой половине не добегит до некоторого целого числа кругов расстояние $2x$. Но это как раз и означает, что они находятся на некоторой прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности (поскольку находятся на одинаковом расстоянии вдоль окружности от точки старта). Значит, на исходной дорожке бегуны снова встретятся через время $2t$, аналогично – через время $3t$ и так далее.

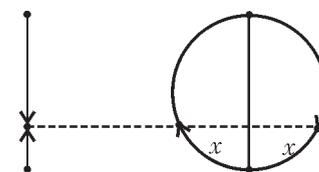


Рис. 3

10–11 классы

1. Расположим коробки в ряд так, чтобы число пирожных в них убывало слева направо. Теперь нарисуем на клетчатой бумаге «лесенку», где высота первого столбика (шириной в одну клетку) равна числу пирожных в первой слева коробке, высота второго столбика равна числу пирожных во второй слева коробке и т.д. (рис.4). Лесенка разделится на ступеньки. Первая (самая левая) ступенька будет состоять из самых высоких столбиков, вторая ступенька – из следующих по высоте столбиков, и т.д., последняя (самая правая) ступенька будет состоять из самых низких столбиков. Количество различных чисел в записях Алеши равно числу ступеней этой лесенки (самые полные коробки соответствуют самой высокой ступеньке, и т.д.). Но этому же числу равно и количество различных чисел среди записанных Сережей. В самом деле, можно считать, что, выбирая по пирожному из каждой коробки, мы просто срезаем у нашей лесенки нижний слой квадратиков. Тогда, заполнив подносы с наибольшим числом пирожных, мы срежем несколько слоев так, что пропадет целая ступенька (самая низкая), и число ступенек уменьшится на 1. Когда мы заполним подносы со следующим количеством

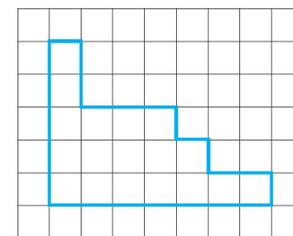


Рис. 4

пирожных (по величине), мы срежем еще одну ступеньку, и т.д.

$$2. x_1 = 1, x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Возведем в квадрат равенство

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \dots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \dots + x_n + x_1},$$

вычтем из обеих частей сумму $x_1 + \dots + x_n$ и снова возведем в квадрат. Получим $x_1(x_2 + \dots + x_n) = x_2(x_3 + \dots + x_n + x_1)$, откуда $(x_1 - x_2)(x_3 + \dots + x_n) = 0$. Так как $x_1 - x_2 = 1$, получаем, что $x_3 + \dots + x_n = 0$. Поскольку из чисел x_3, \dots, x_n извлекается квадратный корень, то они неотрицательны, и раз их сумма равна 0, то каждое из них равно 0.

Пусть $x_2 \neq 0$, т.е. $x_2 - x_3 \neq 0$. Рассмотрев суммы с $\sqrt{x_2}$ и $\sqrt{x_3}$ и рассуждая как выше, получаем $x_1 = 0$. Тогда

$x_2 = -1$, но существует $\sqrt{x_2}$ – противоречие. Значит,

$x_2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, и тогда все условия выполнены.

3. Пусть точки B_1, B_2, \dots, B_{30} – середины дуг

$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{30}A_1$ соответственно, O – центр окружности.

Площадь шестидесятиугольника $A_1B_1A_2B_2 \dots A_{30}B_{30}$ равна сумме площадей четырехугольников $OA_1B_1A_2, OA_2B_2A_3, \dots, OA_{30}B_{30}A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит, площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Заметим, что один из этих четырехугольников может оказаться невыпуклым (если центр окружности лежит снаружи исходного тридцатиугольника), но его площадь все равно вычисляется так же (проверьте).

Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \dots$

$\dots + \frac{1}{2}OB_{30} \cdot A_{30}A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = \dots$

$\dots = OB_{30} = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots$

$\dots + A_{30}A_1$, что нам и нужно.

4. См. решение задачи M2117 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

5. Можно считать, что наши прямоугольники нарисованы на бесконечной клетчатой плоскости. Разобьем мысленно плоскость на квадраты размером 2×2 клетки и пронумеруем клетки каждого квадратика цифрами 1, 2, 3, 4 по часовой

	1	2	1	2	1
	4	3	4	3	4
	1	2	1	2	1
	4	3	4	3	4

Рис. 5

стрелке, начиная с левого верхнего угла квадратика (рис.5). Так как обе стороны каждого нашего прямоугольника нечетны, в углах любого прямоугольника будут стоять одинаковые цифры. Занумеруем тогда цифрами 1, 2, 3, 4 четыре различных цвета, и каждый прямоугольник выкрасим в цвет, номер которого стоит в углах этого прямоугольника. Нетрудно убедиться, что цифры в углах любых двух примыкающих друг к другу прямоугольников будут различны.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Доска состоит из четырех угловых квадратов 50×50 : левого верхнего, левого нижнего, правого верхнего и правого нижнего. Предположим, что в одном из угловых квадратов, скажем в левом верхнем, нет ферзей. Пусть в правом нижнем квадрате всего x ферзей. В левом нижнем квадрате тогда находится не более $50 - x$ ферзей (так как ферзи левого и правого нижних квадратов находятся в 50 строчках прямоугольника 50×100). Аналогично, в правом верхнем угловом квад-

рате находится не более $50 - x$ ферзей. Общее количество ферзей на доске не превосходит тогда $x + 50 - x + 50 - x = 100 - x$. Но ферзей всего 100, а x неотрицательно – это возможно лишь при $x = 0$. Значит, в правом нижнем квадрате ферзей тоже нет, т.е. все ферзи находятся в левом нижнем и правом верхнем квадратах.

Рассмотрим у нашей доски клетчатую диагональ, соединяющую левую нижнюю и правую верхнюю клетки, а также все диагонали, параллельные этой и пересекающие левый нижний и правый верхний квадраты. Их будет ровно 99, и все 100 ферзей находятся на этих диагоналях. Тогда какие-то два ферзя находятся на одной диагонали и, значит, бьют друг друга – противоречие.

2. Можно.

Пусть гири весят a, b, c, d граммов.

Первое решение. Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири a, b , на другой – c, d ;

2) на одной чаше гири a, c , на другой – b, d ;

3) на одной чаше гири a, d , на другой – b, c ;

4) одна чаша пустая, на другой – a, b, c, d .

Пусть $b = a + x, c = a + y, d = a + z$. Из первых трех взвешиваний (сложив результаты) мы знаем разность между $3a + (b + c + d)$ и $2(b + c + d)$, т.е. $x + y + z$, либо точно, либо с ошибкой в 1. Из последнего взвешивания мы знаем $a + b + c + d = 4a + (x + y + z)$ либо точно, либо с ошибкой в 1.

Причем ошибка на 1 может быть только в одном из этих случаев. Значит, мы знаем разность $(x + y + z)$ и $4a + (x + y + z)$, т.е. $4a$, с точностью до 1. Тогда легко найдем a из делимости на 4. Аналогично найдем b, c, d .

Второе решение. Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири a, b, c , на другой – d ;

2) на одной чаше гири a, b, d , на другой – c ;

3) на одной чаше гири a, c, d , на другой – b ;

4) на одной чаше гири b, c, d , на другой – a .

Из показаний весов мы получаем следующие числа (одно, возможно, с ошибкой):

$$x = a + b + c - d, y = a + b - c + d, z = a - b + c + d,$$

$$t = -a + b + c + d.$$

Решаем эту систему: например, чтобы найти a , складываем три первых уравнения и вычитаем из результата четвертое, получаем $4a = (x + y + z - t)$, откуда $a = (x + y + z - t)/4$. Аналогично находим b, c и d . Одно из чисел x, y, z, t мы знаем, возможно, с ошибкой в 1 грамм. Поэтому в выражениях для чисел a, b, c, d числители могут не делиться на 4. Но легко однозначно восстановить их истинные значения (добавляя или вычитая 1 так, чтобы числитель делился на 4). Отсюда находим массы гирь.

3. $1/2$.

Немного переформулируем задачу. Продлим медиану AD на ее длину за точку D , получим точку D' (рис.6). Тогда $SABD'$ – параллелограмм (так как диагонали этого четырехугольника делятся пополам их точкой пересечения), откуда угол DAB равен углу $DD'C$. Поскольку углы CAB и ACD' параллелограмма в сумме дают 180° , условие того, что угол SAB тупой, означает, что угол ACD' острый. В итоге имеем: Илья, зная только длину стороны AD' (она равна удвоенной длине AD), смог доказать, что в треугольнике SAD' углы при стороне CD' острые. При каком соотношении сторон AC и AD' это возможно?

Ясно, что если треугольник SAD' равнобедренный ($AC = AD' = 2AD$), то углы при основании острые (ведь они рав-

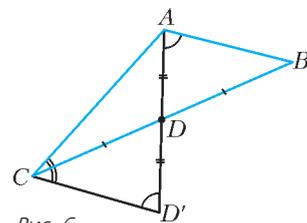


Рис. 6

ны и их сумма меньше 180°). Значит, ответ $AD/AC = 1/2$ подходит (и мы доказали для этого случая утверждение Ильи).

Если треугольник CAD' неравносторонний ($AC \neq AD'$), то, например, возьмем большую из сторон AC и AD' за гипотенузу, а меньшую – за катет, и построим треугольник CAD' ,

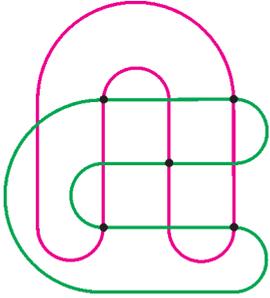


Рис. 7

в котором один из углов ACD' или $AD'C$ будет прямым. Построим теперь параллелограмм $SABD'$ и получим треугольник SAB , который вполне мог оказаться у Сережи, и в этом треугольнике один из углов DAB или SAB будет прямым. Значит, Илья не смог бы доказать свое утверждение для $AD/AC \neq 1/2$.

4. Могут.

Пример изображен на рисунке 7.

5. *Первое решение.* Раскроем в произведении $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$ скобки. Получим сумму

$$1 + (a_1 + \dots + a_n) + (a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n) + (a_1 a_2 a_3 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n) + \dots + a_1 a_2 \dots a_n.$$

В первой скобке стоит просто сумма чисел a_1, \dots, a_n , слагаемые во второй скобке получаются так – выбираем пару чисел из a_1, \dots, a_n и записываем их произведение, слагаемые в третьей скобке получаются так – выбираем тройку чисел из a_1, \dots, a_n и записываем их произведение, и т.д. Ясно, что сумма чисел во второй скобке не превосходит $(a_1 + \dots + a_n)^2$, сумма чисел в третьей скобке не превосходит $(a_1 + \dots + a_n)^3$, и т.д. Значит, наше произведение не превосходит

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Второе решение. Докажем по индукции, что для всех k от 1 до n верно утверждение

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_k).$$

Для $k = 1$ утверждение очевидно ($1 + a_1 < 1 + 2a_1$, так как a_1 положительно).

Сделаем шаг индукции.

Пусть для некоторого k , где $k < n$, верно

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_k).$$

Домножим это неравенство на $(1 + a_{k+1})$. Получим

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{k+1}) < (1 + 2(a_1 + \dots + a_k))(1 + a_{k+1}) \leq 1 + 2(a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 + 2(a_1 + \dots + a_{k+1}).$$

Утверждение доказано.

Взяв $k = n$, получим, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_n) < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. На самом деле выполнено более точное неравенство. Можно доказать, что при постоянной сумме $a_1 + \dots + a_n$ выражение $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$ принимает наибольшее значение, когда числа a_1, \dots, a_n равны. Значит,

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Как известно из курса математического анализа, выражение

под корнем не превосходит числа Эйлера $e = 2,71828\dots$, откуда $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < \sqrt[n]{e} = 1,64\dots$

Кстати, неравенство $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \leq 2$ равносильно неравенству $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \geq \frac{1}{2}$, которое сразу следует из неравенства Бернулли.

6. 2φ .

Построим точку A_1 так, чтобы точка B' была серединой отрезка A_1C (рис.8). Тогда точка B' будет центром описанной

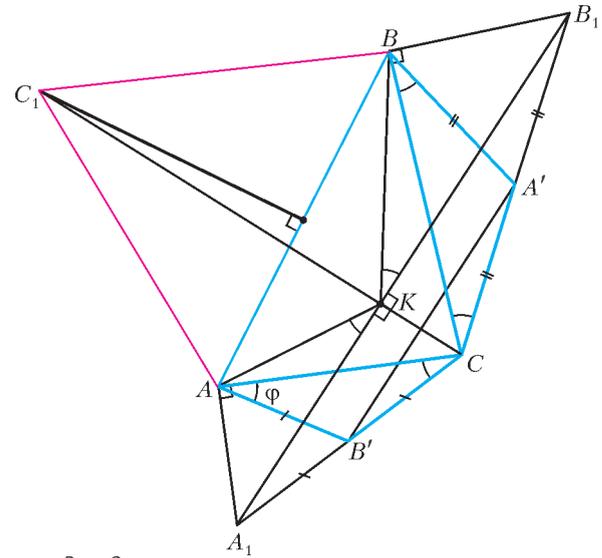


Рис. 8

окружности треугольника A_1AC , откуда угол A_1AC – прямой. Аналогично, построим точку B_1 так, чтобы точка A' была серединой отрезка B_1C – тогда угол B_1BC будет прямым.

Заметим, что $A'B'$ – средняя линия в треугольнике A_1CB_1 и, значит, параллельна A_1B_1 . Поэтому прямая CC_1 перпендикулярна A_1B_1 . Пусть K – точка пересечения прямых CC_1 и A_1B_1 . Четырехугольник A_1AKC – вписанный (так как углы A_1AC и A_1KC прямые), а значит, угол AKA_1 равен углу ACA_1 , т.е. равен φ . Аналогично, угол BKB_1 равен φ . Тогда KC_1 – биссектриса угла AKB . По известному свойству, она делит пополам дугу AB описанной окружности треугольника AKB (на которую опирается угол AKB). Но через середину этой дуги проходит и серединный перпендикуляр к отрезку AB . Значит, точка C_1 и есть середина дуги AB , откуда

$$\angle AC_1B = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - 2(90^\circ - \varphi) = 2\varphi.$$

7. См. решение задачи М2119 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

10–11 классы

1. $5/4$.

Рассмотрим среди вертикальных линий 2-ю, 4-ю и 6-ю и среди горизонтальных тоже 2-ю, 4-ю и 6-ю. Эти линии делят доску на 16 прямоугольников, каждый из которых разделен на 4 клетки, раскрашенные в шахматном порядке. Если в каждом таком прямоугольнике отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных не больше $5/4$, то это же будет верно и для большого прямоугольника (в самом деле, если в i -м прямоугольнике a_i – площадь белых клеток, b_i – площадь черных и $a_i \leq (5/4)b_i$, то, сложив все эти неравенства, получим нужное неравенство для всей доски).

Рассмотрим теперь отдельный прямоугольник, разбитый на 4 клетки. Пусть длины его сторон x (по горизонтали) и y (по вертикали). Ясно, что у одной из белых клеток длина горизонтальной стороны не меньше $x/2$. Пусть для определенности эта клетка верхняя левая. Горизонтальную прямую, разделяющую прямоугольник, можно тогда передвигать вниз до тех пор, пока отношение площади левой верхней клетки (белой) к левой нижней (черной) не станет равно 2. При этом условие задачи (о том, что площадь любой белой клетки не больше удвоенной площади любой черной клетки) по-прежнему будет выполнено, а суммарная площадь белых клеток только увеличится (или не изменится). Дальше прямую двигать нельзя (нарушится условие задачи). Аналогично, после этого можно двигать вправо вертикальную прямую (пока площадь верхней левой клетки не станет в 2 раза больше площади верхней правой). Стороны верхней левой клетки будут тогда равны $2x/3$ и $2y/3$, площадь белых клеток будет равна $4xy/9 + xy/9 = 5xy/9$, а площадь черных будет равна $xy - 5xy/9 = 4xy/9$. Получили, что отношение площади белых клеток к площади черных равно $5/4$ и больше быть не может.

Осталось привести пример, когда в каждом из 16 прямоугольников нужное отношение равно $5/4$. Разделим доску так, чтобы наши 16 прямоугольников были одинаковыми квадратами, в каждом из них левая верхняя клетка была квадратной, причем ее стороны в 2 раза длиннее сторон правой нижней клетки. Ясно, что так разделить доску можно, и получится искомый пример.

2. Не обязательно.

Приведем один из примеров, который нетрудно описать. Будем считать, что в пространстве заданы три направления: вверх-вниз, вправо-влево, вперед-назад. Сначала заполним все пространство кубиками обычным образом. Выберем теперь один из кубиков. К нему примыкают такие шесть бесконечных столбиков толщиной в один кубик: два параллельных столбика соответственно слева и справа, направленные вверх-вниз, два других – спереди и сзади, направленные влево-вправо, и еще два – снизу и сверху, направленные вперед-назад. Сдвинем каждый столбик вдоль его направления на половину длины ребра кубика (первые два сдвинем вверх, следующие два – влево, следующие два – вперед). Все пространство по-прежнему будет заполнено, но выбранный кубик ни с одним другим не будет граничить по целой грани.

3. Всегда может выиграть второй игрок. Разберем два случая. Пусть $N > 2$ нечетно.

Докажем, что второй может каждым своим очередным ходом объединять две наибольшие имеющиеся кучки.

Сначала первый обязательно сделает кучку из двух орехов, после чего второй сделает кучку из трех орехов, и ситуация после хода второго будет такая: в наибольшей куче нечетное число орехов, а в каждой из остальных кучек по одному ореху.

В такой ситуации у первого есть две возможности. Либо он сделает кучку из двух орехов – и тогда второй присоединит ее к наибольшей куче. Либо он увеличит наибольшую кучку на один орех – тогда в ней будет четное число орехов, и так как N нечетно, то останется еще хотя бы одна кучка из одного ореха, и второй сможет присоединить один орех к наибольшей кучке. В итоге снова получается описанная ситуация.

Мы видим, что у второго всегда есть ход. Кучи со временем кончатся, и первый проиграет.

Пусть $N > 2$ четно.

Заметим, что после хода любого игрока число куч уменьшается на одну. Следовательно, перед ходом второго игрока число куч всегда нечетно. Пусть второй действует так же, как и в

случае нечетного N , до тех пор, пока перед его ходом не останутся три кучи.

Если в двух «маленьких» кучах по одному ореху, он просто объединяет «маленькие» кучи и оставляет первому две кучи с четным числом орехов – и тот проиграл; если в «маленьких» кучах один и два ореха, то добавляет один орех в наибольшую кучу (и снова первый проиграл).

4. Пусть O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Так как четырехугольник A_1BCD вписан в окружность, имеем $BO \cdot OD = A_1O \cdot OC$ (из подобия треугольников BOA_1 и COD). Аналогично, $BO \cdot OD = AO \cdot OC_1$, $AO \cdot OC = BO \cdot OD_1$ и $AO \cdot OC = B_1O \cdot OD$.

Из первых двух равенств получаем, что $OC/AO = OC_1/A_1O$, из двух других получаем, что $BO/OD = B_1O/OD_1$.

Заметим, что условие параллельности сторон BC и AD трапеции $ABCD$ можно записать в виде $BO/OD = OC/AO$ (из подобия треугольников BOC и DOA).

Но тогда (из предыдущего) $BO_1/OD_1 = OC_1/A_1O$, т.е. стороны B_1C_1 и A_1D_1 параллельны.

Аналогично проверяем, что непараллельность сторон AB и CD влечет непараллельность сторон A_1B_1 и C_1D_1 .

Значит, $A_1B_1C_1D_1$ – трапеция, что и требовалось доказать.

7. См. решение задачи M2123 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия,
М.В.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473**

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

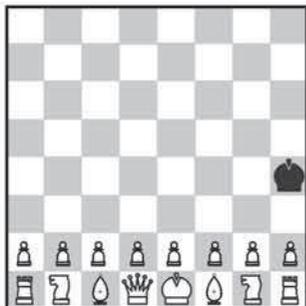
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

ВСЕ НА МЕСТАХ И ВСЕ ПРОТИВ ОДНОГО

Задача на первой диаграмме является как бы совместным произведением двух великих изобретателей математических задач и головоломок XIX века – американца Сэма Лойда и англичанина Генри Дьюдени.



Мат в 3 хода

Первое задание (трехходовка) принадлежит Лойду. 1. d4 ♖h5 2. ♗d3 и 3. ♗h3×; 1... ♙g4 2. e4+ ♙h4 3. g3×.

А Дьюдени поставил другой вопрос: как быстрее всего данная позиция может получиться в партии (второе задание)? Поскольку белым нужно взять пятнадцать фигур и пешек противника, а на первом ходу взятие невозможно, решение содержит не менее 16 ходов. Дьюдени разыграл партию, в которой обе стороны делают именно столько ходов: 1. ♗c3 d5 2. ♗:d5 ♗c6 3. ♗:e7 g5 4. ♗:c8 ♗f6 5. ♗:a7 ♗e4 6. ♗:c6 ♗c3 7. ♗:d8 ♗g8 8. ♗:e7 ♗g6 9. ♗:g5 ♗e6 10. ♗:h7 ♗b1 11. ♗:f8 ♗a3 12. ♗:e6 b5 13. ♗:c7+ ♗f7 14. ♗:b5 ♗g6 15. ♗:a3 ♗g5 16. ♗:b1 ♗h4. Ход белых, и тут в игру вступает Лойд...

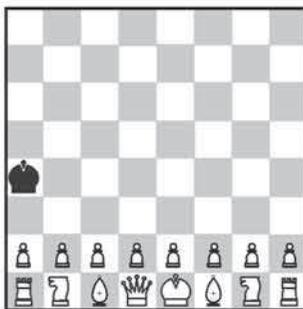
А абсолютный рекорд был установлен уже в XX веке, причем сразу двумя шахматными композиторами. В этих партиях было сэкономлено целых полхода! Правда, в финале ход черных, и трехходового мата уже нет.

1. ♗a3 (c3) b5 2. ♗:b5 ♗f6 3. ♗:a7 ♗e4 4. ♗:c8 ♗c3 5. ♗:e7 c6 6. ♗:c6 ♗b1 7. ♗:b8 ♗a3 8. ♗:d7 g5 9. ♗:f8 ♗d6 10. ♗:h7 ♗e7 11. ♗:g5 ♗h4 (c8) 12. ♗:f7 ♗c4 13. ♗:d6 ♗f6 14. ♗:c4 ♗g5 15. ♗:a3 ♗h4 16. ♗:b1 (В.Томпсон);

1. ♗c3 d5 2. ♗:d5 g6 3. ♗:e7 b5 4. ♗:g6 a6 5. ♗:h8 ♗d7 6. ♗:f7 ♗g5 7. ♗:g5 ♗f6 8. ♗:h7 ♗e4 9. ♗:f8 ♗c3 10. ♗:d7 ♗b1 11. ♗:b8 ♗f7 12. ♗:a6 ♗g6 13. ♗:c7 ♗h5 14. ♗:b5 ♗a3 15. ♗:a3 ♗h4 16. ♗:b1 (К.Фабель).

Любопытно, что h4 – единственное

поле, на котором одинокий черный король (при белых фигурах на исходных местах) получает мат так быстро. А вот при его симметричном положении на другом фланге дело затягивается на два хода.



1. c4+ ♙b4! (1... ♙a5 2. ♗b3 ♙a6 3. ♗b8 ♙a5 4. ♗b5×) 2. d4 ♙a5 (2... ♙:c4 3. e4+ ♙b4 4. ♗d2×) 3. ♗b3 ♙a6 4. ♗b8 ♙a5 5. ♗b5×.

Заметим, что при полном комплекте белых фигур в распоряжении черного короля всего имеется 40 полей (первые три горизонтали ему недоступны). Во сколько же ходов удастся заматовать короля на каждом из них? Этим вопросом заинтересовался неутомимый рекордсмен Алексей Ханян (о некоторых его рекордах рассказывалось в «Кванте» №3 за 2008 год), составивший специальную компьютерную программу для полного анализа. Оказалось, что «надежнее» всего черный король чувствует себя в самом центре доски, на поле e4 – здесь его удастся заматовать только на седьмом ходу, например: 1. d4 ♙d5 2. ♗d3 ♙d6 3. ♗h7 ♙e6 4. e4 ♙d6 5. ♗b5 ♙e6 6. ♗g5 ♙d6 7. ♗e7×.

Если король стоит на своем законном месте e8, то мат дается на шестом ходу. Но самое интересное, что на всех остальных полях король тоже получает мат в 6 ходов (конечно, предполагается, что обе стороны играют наилучшим образом). Таким образом, при белых фигурах на исходных местах у неприятельского короля лишь три особых поля – a4, e4 и h4 (соответственно, мат дается в 5, 7 и 3 хода), в остальных случаях следует мат в 6 ходов.

Фабель доказал, что позиция на второй диаграмме также может возникнуть после 16-го хода белых: 1. ♗a3 (c3) b5 2. ♗:b5 ♗f6 3. ♗:a7 ♗e4 4. ♗:c8 ♗c3 5. ♗:e7 c6 6. ♗:c6 ♗b1 7. ♗:b8 ♗a3 8. ♗:d7 g5 9. ♗:f8 ♗d6 10. ♗:h7 ♗e7 11. ♗:g5 ♗h4 (c8) 12. ♗:f7 ♗c4 13. ♗:d6 ♗f6 14. ♗:c4 ♗g5 15. ♗:a3+ ♙a4 16. ♗:b1.

Итак, за 15 с половиной ходов с доски исчезают все черные фигуры. Забавно, что полное истребление фи-

гур обоих цветов занимает всего на ход больше: 1. e4 d5 2. ed ♗:d5 3. ♗d3 ♗:a2 4. ♗:h7 ♗:b1 5. ♗:g8 ♗:c1 6. ♗:f7+ ♙:f7 7. ♗:a7 ♗:c2 8. ♗:b7 ♗:h2 9. ♗:b8 ♗:g2 10. ♗:c2 ♗:g1+ 11. ♗:g1 ♗:b8 12. ♗:c7 ♗:b2 13. ♗:c8 ♗:d2 14. ♗:f8+ ♙:f8 15. ♗:g7 ♗:f2 16. ♗:e7 ♙:e7 17. ♙:f2. По шахматному кодексу – ничья, так как у белых и черных остался голый король.

Приведем еще несколько интересных рекордов на шахматной доске.

Как быстрее всего ставится мат в исходном положении при условии, что обе стороны делают самые длинные ходы?

Ход пешки на два поля вперед имеет длину 2, а ход конем по теореме Пифагора – $\sqrt{5}$, т.е. чуть длиннее. Поэтому надо начинать с коня. Сначала было предложено такое незамысловатое решение: 1. ♗f3 ♗f6 2. ♗d4 ♗d5 3. ♗e6 ♗f4 4. ♗:f8 ♗g6 5. ♗e6 ♗f8 6. ♗:g7×. Но А.Ханян усовершенствовал его, побив рекорд на полхода: 1. ♗c3 ♗f6 2. ♗b5 ♗g4 3. ♗d6+! ed 4. ♗f3 ♗h4 5. ♗g5! Отрезая черному ферзю путь назад. Его ход на два поля по диагонали равен $2\sqrt{2}$, что длиннее хода коня $\sqrt{5}$. Значит, черные матают – 5... ♗:f2×.

Как быстрее всего ставится мат в исходном положении при условии, что обе стороны делают самые короткие ходы?

Рекорд принадлежит В.Хуторному: 1. d3 e6 2. d4 e5 3. ♗d2 ♙e7 4. ♗d3 ♙e6 5. ♗e3 ♙e7 6. ♗e4 ♙e6 7. ♗:e5×.

Конечная цель игры – мат неприятельскому королю. Быстрее всего мат ставится на втором ходу – белым и на третьем – черным. Однако партия может также закончиться патом.

Как быстрее всего партия может завершиться патом?

1. e3 a5 2. ♗h5 ♗a6 3. ♗:a5 h5 4. ♗:c7 ♗ah6 5. h4 f6 6. ♗:d7+ ♙f7 7. ♗:b7 ♗d3 8. ♗:b8 ♗h7 9. ♗:c8 ♙g6 10. ♗e6. Пат.

Эту рекордную партию Лойд придумал более ста лет назад. Содержащейся в ней идее можно придать и несколько иное оформление: 1. c3 d5 2. ♗b3 h5 3. ♗:b7 ♗f5 4. ♗:a7 ♗h7 5. ♗:b8 ♗a6 6. ♗:c7 ♗ah6 7. h4 f6 8. ♗:d8+ ♙f7 9. ♗:d5+ ♙g6 10. ♗e6. Пат. Здесь на h7 замурован не ферзь, а слон черных.

Е. Гук

Продукция с физикой

СКОЛЬКО ЛУЧЕЙ У СОЛНЕЧНОГО БЛИКА ?



Продукция с физикой

Представленная здесь фотография созвездия Плеяды сделана фотоаппаратом через прямоугольное отверстие.

Некоторые яркие звезды окружены симметрично расходящимися лучами, причем число лучей и их ориентация одинаковы. Причина возникновения лучей – дифракция света на краях диафрагмы фотоаппарата. В зависимости от количества лепестков диафрагмы число лучей может быть четным или нечетным.

(Подробнее – на с.7 внутри журнала)