

ИЮЛЬ-АВГУСТ

ISSN 0140-3221  
2008 №4

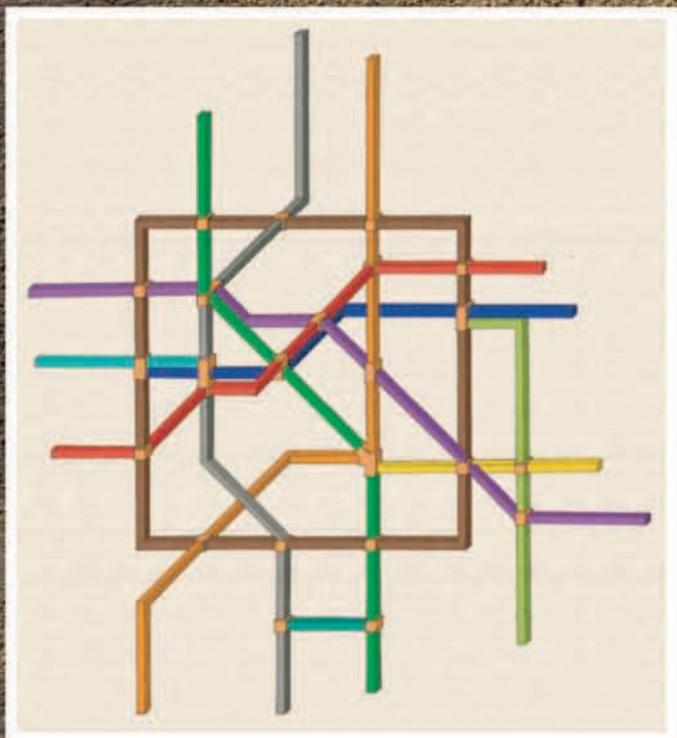
# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

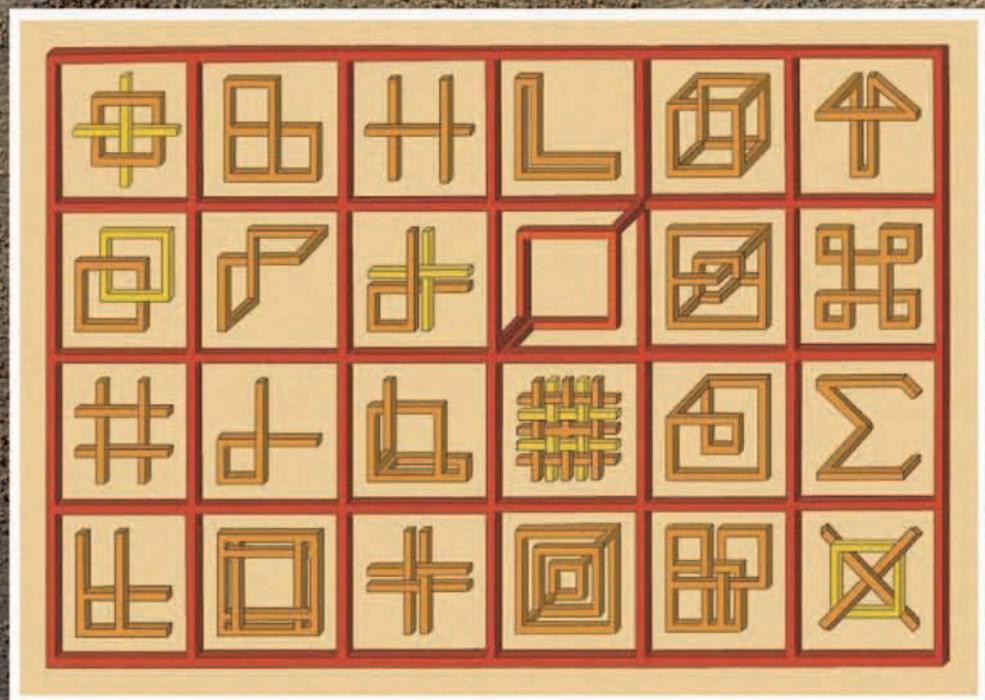


## «НЕВОЗМОЖНЫЕ» ОБЪЕКТЫ

Дмитрий Раков, работающий в Институте машиноведения им. А.А. Благонравова, — автор не только двадцати запатентованных разработок, но и многочисленных «невозможных конструкций», представленных во многих художественных галереях. (Большую по объему коллекцию таких работ можно найти на сайте [www.rakov.de](http://www.rakov.de))



«Иллюзорная» схема Московского метрополитена открывает скрытую «невозможность» даже в каждодневно-привычных объектах.



Название этой работы, «Алфавит», имеет и второй смысл: на картине представлен каталог элементарных «невозможностей», из которых, как из букв, можно сложить различные конструкции.

# журнал<sup>©</sup> Квант июль 2008 №4 АВГУСТ 2008

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ  
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

**Ю.А.Осипьян**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора),  
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии),  
П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии),  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2008, РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 К 100-летию И.К.Кикоина  
2 Проблема обнаружения ядерных взрывов. *Е.Лобиков*  
5 Полет и падение спутника Земли. *С.Варламов*  
10 Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха. *В.Протасов*

## НОВОСТИ НАУКИ

- 4 Триумф фундаментальной науки

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М2096–М2100, Ф2103–Ф2107  
17 Решения задач М2071–М2080, Ф2088–Ф2092  
23 Вокруг шестиугольника

## К М Ш

- 26 Задачи  
27 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
27 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
2007/08 учебного года  
28 Проблемы дележки. *В.Уфнаровский*

## НАМ ПИШУТ

- 31 Физика в «Рассказах о животных»

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Пифагоровы треугольники

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 О двух параллелограммах в треугольнике. *Г.Филипповский*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Квантовая телепортация. *А.Арутюнов*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 39 О разрезании треугольника на подобные ему. *Б.Френкин*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 42 Устоит ли наш кораблик? *С.Богданов, О.Попов, Д.Тарасов*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 45 Задачи на смешение идеальных газов. *А.Черноуцан*

## ОЛИМПИАДЫ

- 48 Задачи LXXI Московской математической олимпиады  
50 Избранные задачи Московской физической олимпиады  
54 Международный турнир «Компьютерная физика»  
55 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье С.Варламова*  
II *«Невозможные» объекты*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Коллекция головоломок*



В праздновании 100-летнего юбилея академика  
И.К.Кикоина финансовое участие принимает  
ОАО «ТЕХНАБЭКСПОРТ»



К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

# Проблема обнаружения ядерных взрывов

*Е.ЛОБИКОВ*

**Н**АУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ПО созданию средств дистанционного контроля за испытаниями ядерного оружия на иностранных полигонах начались в Институте атомной энергии по инициативе И.В.Курчатова в конце 1953 года. Эти исследования возглавили И.К.Кикоин, отвечающий за разработку радиационного (определение дат взрывов), акустического и электромагнитного методов регистрации, и Б.В.Курчатов, под руководством которого производился радиохимический анализ продуктов взрывов с целью определения особенностей конструкций атомных и водородных бомб.

Работа по обнаружению иностранных ядерных взрывов в атмосфере, о которых не всегда сообщалось в печати, проводилась одновременно с работами по созданию газовой центрифуги для разделения изотопов урана и потребовала привлечения значительного числа научных сотрудников<sup>1</sup> и инженеров Института.

Научный руководитель проблемы И.К.Кикоин рассмотрел все возможные вторичные эффекты ядерного взрыва и отобрал из них наиболее пригодные для использования при разработке средств дальнего обнаружения ядерных взрывов. Расскажем о них кратко.

1) К началу работ было известно, что атомы радиоактивных осколков деления ядер урана-235 и плутония-239, попадающие после взрыва в атмосферный воздух, оседают на мельчайших частицах-аэрозолях, всегда присутствующих в воздухе, и могут находиться там в течение многих дней до выпадения на поверхность земли. Недостаточная чувствительность существовавшей в то время аппаратуры не позволяла непосредственно наблюдать радиоактивность осколков деления по повышению радиоактивного фона атмосферного воздуха. И.К.Кикоин предложил собирать радиоактивные аэрозоли с помощью фильтров Петрянова, замененных позже на хлопчатобумажную ткань (бязь), в специальных устройствах – гондолах ЦАГИ (Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е.Жуковского), установленных на самолетах. Сжигание фильтров после окончания полета самолета приводит к увеличению на несколько порядков удельной активности в золе, в результате чего

она становится больше фона и по характеру ее  $\beta$ -распада можно определить дату взрыва.

Вопрос о возможности определения мощности ядерного взрыва по радиоактивности продуктов взрыва, акустическим или сейсмическим методом в 1954 году не возникал. Работы по обнаружению иностранных ядерных взрывов были ограничены установлением самого факта взрыва и определением его даты. В некоторых случаях по радиохимическому анализу собранной активности можно было установить характер взрыва – атомный или термоядерный.

По договоренности И.В.Курчатова и И.К.Кикоина с Министерством обороны СССР для сбора аэрозолей были выделены транспортные самолеты. Аэрозоли собирались во время полетов самолетов в апреле-мае 1954 года вдоль западной границы СССР (трасса Ленинград – Одесса). Общая протяженность полета с одними и теми же фильтрами составляла 30–50 тысяч километров (в течение 10 дней без смены фильтра).

Первым был зарегистрирован радиационным методом термоядерный взрыв 28 февраля 1954 года (по местному времени – 1 марта) на атолле Бикини (Маршалловы острова, Тихий океан). Дата этого взрыва была хорошо известна, поскольку от него пострадали японские рыбаки, находившиеся на корабле «Фукурю-Мару» в 165 километрах от эпицентра взрыва, и об этом было много публикаций.

Поскольку самолетный сбор радиоактивных аэрозолей был случайным процессом, И.К.Кикоин поручил своему сотруднику Ю.И.Щербине разработку прибора для детектирования радиоактивного облака непосредственно с борта летящего самолета. Такой прибор был создан и проверен в работе во время испытаний ядерного оружия США в 1956 году.

2) В условиях ядерного взрыва, когда имеет место выделение огромной энергии в ограниченном объеме окружающей среды, теоретически предсказано и экспериментально установлено образование сильной ударной волны, за фронтом которой в начальный период времени возникают высокие давления и температуры. С удалением от эпицентра ударная волна превращается в акустическую, ее распространение в атмосфере сопровождается диссипацией переносимой энергии – переходом ее в энергию теплового движения молекул газов, входящих в состав воздуха. При этом короткие

<sup>1</sup> Среди них был и автор статьи Евгений Александрович Лобиков. (Прим. ред.)

волны затухают быстрее, чем длинные. На больших расстояниях от эпицентра взрыва сохраняются лишь длинноволновые составляющие колебаний, а именно инфразвуки с периодом от 5 секунд до нескольких минут – в зависимости от тротилового эквивалента взрыва и условий распространения волн.

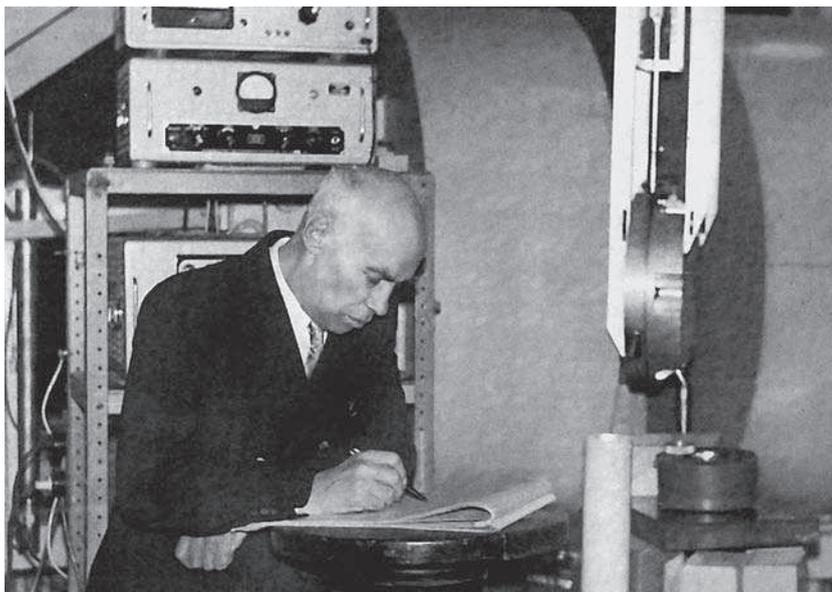
Регистрация инфразвуковых волн была предложена И.К.Кикоиным в качестве еще одного метода обнаружения ядерных взрывов. Было известно, например, что при взрыве Тунгусского метеорита инфракрасная волна, созданная взрывом, обошла несколько раз земную поверхность. Кикоин поручил своим сотрудникам разработать аппаратуру для записи инфразвуковой волны, сопровождающей ядерный взрыв.

Колебания атмосферного давления могут быть отмечены любым достаточно чувствительным манометром. Для их регистрации в Институте были сконструированы и изготовлены специальные приборы – микробарографы, имеющие высокую чувствительность и обладающие частотной избирательностью. Они позволяют регистрировать изменения атмосферного давления от десятых долей паскаля до тысяч паскалей ( $10^{-3}$  –  $10$  мм рт.ст.).

Акустическим методом в 1958 году, например, были зарегистрированы 23 атомных и термоядерных взрыва США с энергиями от 5,9 до 2000 килотонн тротила.

3) В 1954 году И.К.Кикоин предложил изучить возможности использования обнаруженного при взрыве излучения электромагнитного импульса в области сверхдлинных радиоволн (с длиной волны порядка 17 км) – как средства дальней регистрации ядерного взрыва. Экспериментальные исследования электромагнитного импульса были начаты на Семипалатинском полигоне в 1955 году. Максимальное расстояние, на котором регистрировался электромагнитный импульс, составляло 2700 км (наблюдательная станция находилась в Подмосковье). Была определена характерная форма сигнала, т.е. зависимость его величины от времени. Предполагая, что форма сигнала на расстояниях от эпицентра, превышающих 2700 км, существенно не меняется, были идентифицированы сигналы электромагнитного импульса американских ядерных взрывов 1958 года на Тихоокеанском полигоне, полученные на расстоянии 5000 км (наблюдательная станция располагалась на Камчатке).

Для определения направления на точку взрыва был разработан широкополосный импульсный пеленгатор. Сигналы от двух взаимно перпендикулярных рамок поступали на усилители. По отношению амплитуд записей вычислялся угол прихода сигнала. Юстировка пеленгатора производилась по работе широкоэмиттерных станций. Так, отбор сигналов, пришедших с Маршалловых островов, при использовании пеленгатора позволил существенно уменьшить число грозовых помех, которые по форме сигнала напоминали электромагнитные импульсы ядерных взрывов.



*И.К. Кикоин в лаборатории Института атомной энергии*

Регистрация электромагнитных импульсов ядерных взрывов позволяла определять времена взрывов с точностью порядка 1 с и большей (теоретически до 0,001 с). Предварительно время взрыва оценивалось с помощью акустического или сейсмического методов с точностью 1 мин при известном месте проведения испытаний.

В 1958 году сотрудниками Института была выполнена большая работа по обнаружению взрывов атомных и водородных бомб во время их испытаний на Тихоокеанском полигоне США. Были надежно зарегистрированы 12 ядерных взрывов по пеленгу и с подтверждением акустическим методом.

Из всех рассмотренных способов дальней регистрации ядерных взрывов наиболее надежным является радиационный, основанный на сборе радиоактивных продуктов взрыва с помощью фильтров, установленных на самолетах. Нахождение в воздухе «свежего» радиоактивного облака от конкретного ядерного взрыва при полете самолета со специальной аппаратурой, предназначенной для этой цели, позволяет собирать достаточно чистый продукт при малой примеси фоновой активности. Определение даты взрыва по скорости распада радиоактивного продукта возможно с точностью  $\pm$  одни сутки.

Любопытен такой факт. Из шести термоядерных взрывов, произведенных США в 1954 году, один был неудачным, когда взорвавшийся запал не поджег основной термоядерный заряд и выделившаяся мощность оказалась существенно меньше ожидаемой. Этот взрыв не был зарегистрирован акустическим и сейсмическим методами, но был обнаружен по выброшенной им радиоактивности и была установлена его точная дата.

В июле 1958 года в Женеве на Международной конференции экспертов по обнаружению ядерных взрывов специалистами разных стран были представлены работы по их регистрации. Эти работы послужили основой для создания эффективных национальных

средств контроля за проведением испытаний атомного оружия иностранными государствами. В итоге Женевская конференция показала, что если будет достигнуто соглашение о прекращении ядерных взрывов, то его нарушение будет обязательно обнаружено техническими средствами. Это способствовало заключению Московского договора о запрещении ядерных испытаний в трех средах: в атмосфере, под водой и в космосе. Договор подписали в 1963 году СССР, США и Великобритания.

## НОВОСТИ НАУКИ

### Триумф фундаментальной науки

То открытие, которое было удостоено Нобелевской премии по физике за 2007 год, в рубрике «Новости науки», строго говоря, могло появиться уже двадцать лет назад. В 1988 году французский физик Альбер Фер и немецкий физик Петер Грюнберг независимо друг от друга открыли эффект, названный гигантским магнетосопротивлением (на международном научном языке – Giant Magnetoresistance, GMR).

Работы этих ученых были по своей сути экспериментальными и проводились группами исследователей. Но будущие Нобелевские лауреаты не только руководили этими группами, но и дали теоретическое обоснование явлению.

В физике магнитных явлений есть несколько эффектов, которые имеют большое значение для практики. Это – вращение плоскости поляризации света при взаимодействии с магнитным веществом, гигантская магнитострикция (существенное изменение объема тела при его намагничивании), магнитокалорический эффект (изменение температуры при адиабатическом намагничивании или размагничивании материала во внешнем магнитном поле) и, наконец, явление гигантского магнетосопротивления.

Слово «гигантское» не должно вводить в заблуждение. В данном случае оно означает существенное – до 20 раз – увеличение или уменьшение электрического сопротивления вещества при изменении в нем направления магнитного поля. Эффект проявляется в тонких (порядка нанометров) слоях вещества, граничащих со слоями из ферромагнетика, создающими магнитное поле.

Суть явления оказалась связанной с наличием у электронов спина, т.е. собственного вращения, характеризуемого механическим и магнитным моментами. Если выбрать какое-то направление, то у спина электрона имеется две возможности ориентации – по этому направлению и против него. Спин элементарной частицы – явление квантовое. Это означает, что представить какую-нибудь геометрическую наглядную модель вращающегося электрона нельзя в принципе. И лишь очень грубая аналогия может быть проведена между спином и, например, витком с током. Общее у спина с витком только то, что оба они стремятся ориентироваться в магнитном поле так, чтобы энергия магнитного взаимодействия стала минимальной. Такие «ориентированные» электроны легче проходят через вещество под действием электрического поля – электрическое сопротивление вещества невелико. Но если направление магнитного поля внезапно изменится на противоположное, то спины электронов окажутся по отношению к нему антиориентированными и будут иметь тенденцию к переориентировке. Согласно классической теории электропроводности, при этом будет возрастать скорость хаотического (теплого) движения электронов, что и увеличит электрическое сопротивление вещества. Но в «правильной», квантовой теории следует говорить об изменении средней длины рассеяния электронных волн или об изменении вероятности

По завершении научно-исследовательских работ, проводимых в Институте атомной энергии по обнаружению ядерных взрывов, все методики, разработанная аппаратура, научная и техническая документация были переданы Службе специального контроля Министерства обороны СССР. Сама же работа «Разработка системы обнаружения ядерных взрывов на больших расстояниях» была удостоена в 1959 году Ленинской премии.



Альбер Фер



Петер Грюнберг

взаимодействия электронов с атомами вещества, что и приводит к изменению сопротивления.

Исследования Фера и Грюнберга стали пионерскими в вопросе влияния спина электрона на электропроводность вещества. Необходимо отметить, что эти исследования стали возможными только после разработки технологии изготовления тончайших слоев металла – того, что сегодня называется нанотехнологиями.

Почему же открытие GMR-эффекта, относящееся к фундаментальной науке, получило столь большое значение и известность, что было признано Нобелевским комитетом достойным этой высокой награды?

Дело в том, что на его основе родилось новое нанотехническое направление, использующее в электронике спиновые эффекты, – спинтроника. Разработанные за истекшие годы спинтронные устройства позволили, например, в сотни и даже тысячи раз увеличить эффективную плотность записи информации на магнитных носителях, в частности на жестких дисках. Просто увеличение плотности записи информации было достигнуто и без спинтроники – на основе миниатюрных катушек индуктивности. Но эффективная плотность записи, т.е. возможность считывания информации, с помощью явления электромагнитной индукции принципиально не допускала дальнейшей миниатюризации. А на основе GMR-эффекта и современных нанотехнологий были сконструированы столь миниатюрные считывающие устройства, что емкость жестких дисков выросла до терабайтных величин (тысяч гигабайт). Без этих устройств были бы невозможными как современные суперкомпьютеры, так и ноутбуки и карманные компьютеры.

Открытие эффекта гигантского магнетосопротивления стало символом главной особенности современной науки – ее неразрывной и быстрой связи с техническими воплощениями. И мы присоединяемся к словам наших коллег из журнала «Наука и жизнь»: Нобелевская премия по физике за 2007 год – это прежде всего триумф фундаментальной науки!

Л. Белопухов

# Полет и падение спутника Земли

С.ВАРЛАМОВ

**Н**АД НАШИМИ ГОЛОВАМИ ВСЕ ВРЕМЯ ЛЕТАЮТ многочисленные искусственные космические тела – спутники связи, спутники-«шпионы», метеорологические спутники, спутники с космическими туристами ... Полеты этих аппаратов проходят на таких высотах, где из-за разреженности атмосферы силы трения мало влияют на их движение, и они успевают совершить огромное число оборотов вокруг Земли, прежде чем упадут.

Спутники Земли обычно относят к трем разным группам, отличающимся высотой полета. Высоко летающие спутники (первая группа) – это аппараты, среднее расстояние от которых до поверхности Земли превышает 3–5 радиусов Земли  $R_3$ . К этой группе, в частности, относятся так называемые геостационарные спутники. Спутники, летающие на средних высотах (вторая группа), находятся на расстояниях от Земли от 1000 км до 3–5 радиусов Земли. Самая многочисленная группа спутников (третья) – это низко летающие спутники со средней высотой полета меньше 1000 км над поверхностью Земли. Эти спутники, если их периодически не «приподнимать», со временем сходят на все более близкие к Земле орбиты и, испытывая на последнем этапе своего движения действие больших сил торможения атмосферой, падают.

## Связь сил трения и скорости снижения спутника

Решим задачу о нахождении скорости снижения спутника массой  $M$ , на который в течении времени  $\Delta t$  действует постоянная сила трения  $F \ll Mg$ , направленная против скорости его движения  $v$ . Высота полета над поверхностью Земли  $H \ll R_3$ . Предполагается, что уменьшение высоты  $\Delta h$  значительно меньше самой высоты полета  $H$ .

Скорость полета спутника находится из уравнения движения (второго закона Ньютона):

$$\frac{Mv^2}{R_3 + H} = \frac{GMM_3}{(R_3 + H)^2}, \text{ и } v = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + H}}.$$

При условии  $H \ll R_3$  эта скорость – первая космическая – составляет приблизительно 8 км/с. Суммарная энергия спутника, движущегося по почти круговой орбите радиусом  $R_3 + H$ , складываются из потенциальной и кинетической энергий и составляет

$$U + E = -\frac{GMM_3}{R_3 + H} + \frac{Mv^2}{2} = -\frac{GMM_3}{2(R_3 + H)}.$$

Сила трения уменьшает эту энергию, при этом высота полета уменьшается:

$$-\frac{GMM_3}{2(R_3 + H + \Delta h)} - \left( -\frac{GMM_3}{2(R_3 + H)} \right) = -Fv\Delta t,$$

откуда

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx -\frac{2Fv(R_3 + H)^2}{MGM_3} = -\frac{2F\sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + H}}(R_3 + H)^2}{MGM_3}.$$

Как видно, скорость снижения зависит и от силы трения, и от высоты полета спутника, и от массы спутника. Сама же сила трения, в свою очередь, зависит от высоты полета, от размеров спутника и от состава космической среды на высоте полета спутника. Обсудим этот вопрос подробнее на примере Международной космической станции – МКС.

## Международная космическая станция и ее параметры

Известно, что МКС, летающая ныне на высотах 300–400 км, каждые сутки опускается примерно на 150–200 м, а во время магнитных бурь ежесуточная скорость спуска достигает 300 м. Поэтому станцию периодически «подталкивают» транспортными кораблями, пристыковывающимися к ней. Если при этом ей сообщается дополнительная скорость порядка 2,5 м/с, то ее орбита приподнимается в среднем на 4 км, а среднее значение модуля скорости движения станции относительно Земли уменьшается. Чтобы удерживать станцию примерно на одной высоте, такие «толчки» нужно проводить даже чаще, чем раз в месяц.

В настоящее время масса МКС достигла значения  $M = 208$  т. Станция имеет солнечные батареи, которые обеспечивают ее электрической энергией. Мощность энергообеспечения станции составляет 120 кВт. Каждый квадратный метр солнечных батарей дает электрическую мощность порядка 100 Вт. (Это справедливо только в том случае, когда панели солнечных батарей ориентированы перпендикулярно солнечным лучам.) Следовательно, площадь всех батарей МКС, составляющих большую часть площади всего поперечного сечения станции  $S$ , может быть оценена как  $S_{\text{бат}} \approx 1200 \text{ м}^2$ . На снимке МКС (рис.1) видно, что размеры панелей батарей и других частей

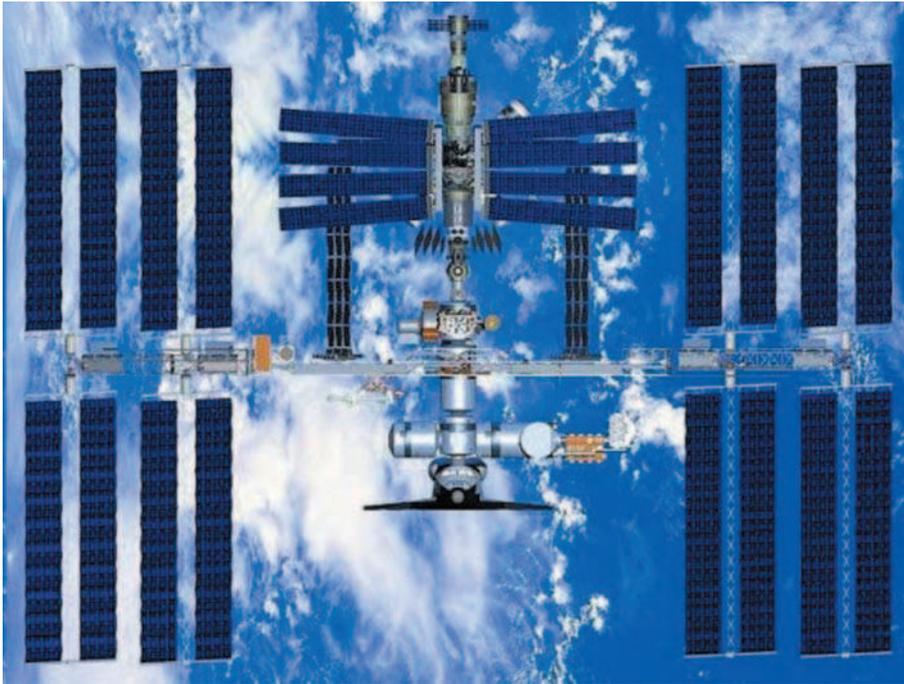


Рис. 1. Международная космическая станция и ее солнечные батареи

станции сравнимы по величине, а также можно отметить, что не все панели батарей ориентированы одинаково. Если считать, что поперечное сечение станции составлено приблизительно на 66% из площади батарей и на 33% из площади сечения других блоков станции, то получим, что  $S \approx 2000 \text{ м}^2$ .

### Почему возникает сила трения?

Торможение спутников, из-за которого происходит уменьшение высот их орбит, может быть обусловлено несколькими факторами. Во-первых, это влияние на космический аппарат остатков атмосферы, которые состоят из тех же газов, что и воздух вблизи поверхности Земли; во-вторых, это взаимодействие с ионами кислорода; в-третьих, это действие на спутник силы Ампера, возникающей при движении проводящего аппарата в магнитном поле Земли.

### Торможение атмосферными газами

Рассмотрим движение искусственного спутника Земли (ИСЗ) перед последним этапом его полета, когда основную роль играет сопротивление земной атмосферы. Траектория движения спутника напоминает спираль с очень медленно меняющимся расстоянием от спутника до поверхности Земли (в течение одного оборота это расстояние изменяется совсем мало). Учтем известный факт: с подъемом на каждые  $h_0 = 15 \text{ км}$  над поверхностью Земли плотность и давление атмосферы убывают примерно в 10 раз. Тогда на высотах  $H$ , значительно меньших земного радиуса, плотность  $\rho_H$  атмосферного воздуха (составленного из незаряженных молекул азота и кислорода) можно находить с помощью простого соотношения, в котором  $\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$  – плотность воздуха на поверхности

Земли (на уровне океана):

$$\rho_H = \rho_0 \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}}.$$

Скорость движения спутника во много раз больше средних скоростей теплового движения молекул атмосферы, поэтому можно считать, что молекулы до столкновения со спутником покоились. Чтобы грубо оценить силу сопротивления, предположим, что после столкновения молекулы приобретают такую же скорость, что и спутник. В этом случае сила сопротивления может быть оценена так:

$$F_H \approx \rho_H S v^2 = \rho_0 S v^2 \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}},$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения космического аппарата. Если подставить это выражение в формулу для скорости спуска спутника, то получится

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx - \frac{2\rho_0 S \sqrt{GM_3(R_3 + H)}}{M} \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}}. \quad (*)$$

Приняв, например, отношение  $S/M = 0,01 \text{ м}^2/\text{кг}$ , т.е. таким, как у МКС, найдем, что на высоте  $H = 150 \text{ км}$  скорость уменьшения высоты орбиты равна  $13,4 \text{ см/с}$ . За один оборот, т.е. примерно за 92 мин, спутник с такими параметрами опустится на расстояние примерно  $740 \text{ м} \ll 150 \text{ км}$ . На последнем этапе его полета, когда движение определяется в основном степенным множителем и можно пренебречь изменением величины, стоящей под знаком корня, уравнение (\*) примет вид

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \cdot 10^{\frac{H}{h_0}} \approx -2\Delta t \frac{\rho_0 S \sqrt{GM_3 R_3}}{M}.$$

Получившееся дифференциальное уравнение легко интегрируется. Из него следует, что время  $t$ , оставшееся до падения спутника, находится из соотношения

$$\frac{H}{\ln 10} \cdot 10^{\frac{H}{h_0}} \approx 2t \frac{\rho_0 S \sqrt{GM_3 R_3}}{M}.$$

Подставив в это соотношение  $S/M = 0,01 \text{ м}^2/\text{кг}$  и выбрав высоту  $H = 150 \text{ км}$ , мы получим время полета:  $t \approx 0,5 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 14 \text{ ч}$ , т.е. менее суток.

Конечно, если спутник имеет автономное электропитание, например ядерный источник энергии, то ему не нужны солнечные батареи. Для такого спутника отношение площади поперечного сечения к его массе может быть значительно меньше величины  $0,01 \text{ м}^2/\text{кг}$ . В этом случае время существования спутника с начальной высотой полета  $150 \text{ км}$  может быть в несколько раз больше.

Вернемся к формуле (\*). В соответствии с ней, подъем на каждые  $15 \text{ км}$  уменьшает скорость спуска в 10 раз. Таким образом, на высоте порядка  $300 \text{ км}$  эта

формула предсказывает скорость спуска спутника с отношением  $S/M$  таким же, как у МКС, равной всего 74 нм/оборот, или около 1,2 мкм за сутки. Эта величина абсолютно не согласуется с наблюдающимся на практике темпом снижения МКС. Следовательно, на тех высотах  $H > 300$  км, где летает МКС, столкновения спутника с нейтральными молекулами сильно разреженных атмосферных газов  $N_2$  и  $O_2$  не могут обеспечить наблюдающееся на практике уменьшение высоты орбиты космического аппарата. На высоте 300 км над поверхностью Земли концентрация нейтральных атомов азота должна составить величину, примерно равную

$$n = N_A \frac{\rho_0}{M} \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}} = 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1,2}{0,028} \cdot 10^{-\frac{300}{15}} \text{ м}^{-3} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ м}^{-3}.$$

Из полученного несоответствия можно сделать вывод, что спутник на высотах порядка 300 км и более «цепляется» не за молекулы, а за что-то другое.

### Атомарный кислород

По данным справочника «Физические величины», на высотах 300–400 км температура достигает величины 700 К ночью и 900 К днем (а на высоте около 200 км это 400 К ночью и 600 К днем). При этом концентрация электронов в дневное время на высоте 300 км составляет в максимуме  $n = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ . Это на много порядков больше концентрации нейтральных молекул на этих же высотах. Значит, не они являются «поставщиками» электронов. Измерения показывают, что на высотах большие 200 км основным компонентом атмосферы является атомарный кислород. Возникает этот атомарный кислород из молекулярного кислорода под воздействием ультрафиолетового излучения Солнца.

Почему же именно кислород, а не атомарный азот – ведь азота в атмосфере у поверхности Земли больше? Это связано с несколькими факторами. В первую очередь, с тем, что энергия диссоциации молекул кислорода, равная 500 кДж/моль ( $\approx 5$  эВ), значительно меньше энергии диссоциации молекул азота, равной 946 кДж/моль ( $\approx 9,5$  эВ). Эти энергии соответствуют длинам волн солнечного света 240 нм и 125 нм соответственно. В спектре излучения Солнца плотность потока энергии вблизи 240 нм действительно в несколько раз больше плотности потока энергии вблизи 120 нм, но не это обстоятельство является решающим. Главное, по-видимому, то, что вероятность рекомбинации встретившихся атомов азота значительно больше вероятности рекомбинации атомов кислорода, т.е. время жизни атомарного кислорода значительно больше времени жизни атомарного азота.

Образовавшийся на верхней границе молекулярной атмосферы атомарный кислород «подбрасывается» вверх тепловым движением. Для атомарного кислорода масса каждой частицы примерно вдвое меньше масс молекул азота и кислорода, поэтому скорости теплового движения этих атомов больше скоростей теплового движения молекул. Заметим, что в распределении

атомов по энергиям (и по скоростям тоже) всегда есть частицы, имеющие энергии в несколько раз большие, чем средняя энергия теплового движения. Если, к примеру, энергия атома кислорода будет всего в три раза больше средней энергии теплового движения (более 3% атомов имеют такую энергию), то высота «подброса» может составить

$$\Delta H = \frac{9kT}{2mg} = \frac{9RT}{2Mg} \approx \frac{9 \cdot 8,31 \cdot 600}{2 \cdot 0,016 \cdot 10} \text{ м} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ м} = 140 \text{ км}.$$

Кстати, при концентрации молекул  $n = 10^{13} \text{ м}^{-3}$ , что соответствует высоте примерно 185 км, длина свободного пробега атомов составляет около 300 км, следовательно, можно считать, что с высот больше 185 км атомы с указанной энергией летят в направлении «вверх» почти свободно и взлетают до высоты 325 км. И если их там ничто не задерживает, то они падают обратно «вниз». Время полета «вверх» и «вниз» составляет для таких «энергичных» атомов кислорода около 5 мин, что гораздо меньше длительности дня или ночи. Из всего указанного времени полета на высотах больше 300 км атом в рассматриваемом случае проводит более 1 мин, т.е. весьма значительную часть времени – около 20%. Если в течение этого времени атом будет ионизирован солнечным излучением, то возврат его на высоты порядка 200 км будет задержан.

Аналогичным образом ведут себя и молекулы азота и кислорода, только взлетают они на вдвое меньшую высоту, так как их масса вдвое больше массы атома кислорода.

### Ионизация молекул и атомов и движение ионов в магнитном поле

По данным справочника «Физические величины», на высотах более 160 км на дневной стороне атмосферы значительная часть молекул азота и кислорода, а также атомов кислорода ионизирована. Образовавшиеся на некоторой высоте ионы и электроны не могут «упасть» обратно, так как их «не пускает» магнитное поле Земли  $B$ . На движущийся с тепловой скоростью ион со стороны магнитного поля Земли действует сила, направленная перпендикулярно скорости иона и направлению магнитного поля. Если пренебречь гравитационным полем Земли и считать, что магнитное поле в небольшой окрестности от выбранного для наблюдений места является однородным, то траектории ионов будут представлять собой спирали, как бы навивающиеся на линии магнитного поля.

Оценим характерные размеры спиралей, в частности радиус цилиндра, на который она навита, для ионов кислорода:

$$r = \frac{\sqrt{3MRT}}{eN_A B} = \frac{\sqrt{3 \cdot 0,016 \cdot 8,31 \cdot 800}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \text{ м} \approx 3,6 \text{ м}.$$

При таком радиусе навивки можно считать, что ион кислорода просто «привязан» к линии магнитного поля Земли, и гравитацией действительно можно пренебречь. Если у иона имеется составляющая скорости вдоль магнитного поля, то он движется вдоль магнитного поля. Ионы, можно сказать, бегают вдоль ли-

ний магнитного поля от одного магнитного полюса Земли к другому. Таким характер движения остается вплоть до момента, когда положительно заряженный ион встречается с электроном и в результате рекомбинации вновь образуется нейтральный атом кислорода. Встречи ионов и электронов весьма редки, поэтому время пребывания иона на высоте значительно возрастает по сравнению со временем пребывания на такой же высоте нейтральной частицы (атома или молекулы).

В результате этого эффекта на высотах 160–250 км и 250–400 км в дневное время возникают слои, содержащие электроны и ионы молекул в первом случае и электроны и ионы атомов кислорода во втором. Днем концентрация ионов и электронов в этих слоях растет, а ночью убывает, но не до нуля. Обнаружены были эти слои, заполненные плазмой, в экспериментах по распространению радиоволн. Коротковолновое излучение в диапазоне длин волн 10–70 м отражается этими слоями плазмы, причем главными «виновниками» отражения радиоволн являются электроны. Они тоже движутся по спиральям с характерным радиусом навивки около 0,1 м и характерными скоростями  $10^6$  м/с вдоль магнитного поля. Таким образом, в отличие от медленно движущихся ионов, электроны движутся в 100 раз быстрее спутника.

#### Торможение спутника ионами атомарного кислорода

В течение светлого времени суток на высоте концентрация ионов и электронов увеличивается, а в течение ночи уменьшается, так как рекомбинация ионов и электронов делает их вновь нейтральными атомами, на движение которых магнитное поле Земли не оказывает влияния. При максимальной концентрации ионов атомарного кислорода  $n = 10^{12}$  м<sup>-3</sup> сила сопротивления, связанная с механическими ударами этих частиц о спутник, может быть рассчитана с помощью формулы  $F_H = \rho_H S v^2$ . В этой формуле «заложено» предположение, что площадь, с которой спутник «собирает» ионы, равна геометрической площади его поперечного сечения. Для спутника с параметрами МКС ( $S/M = 0,01$  м<sup>2</sup>/кг) оценка скорости снижения может быть получена с помощью уже знакомой нам формулы:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx - \frac{2\rho_H S \sqrt{GM_3 R_3}}{M} = - \frac{2\rho_H S R_3 \sqrt{g R_3}}{M} \approx 2,6 \text{ мм/с}.$$

Если бы такая сила постоянно действовала на спутник в течение суток, то он опустился бы на 220 метров. Однако спутник пролетает то над освещенной частью поверхности Земли, то над той частью поверхности, где во время его пролета ночь. Поэтому на него, в соответствии со сделанным предположением о площади «сбора», должна действовать в среднем меньшая сила и спутник должен снижаться с меньшей скоростью. Пусть среднее значение концентрации ионов вдвое меньше максимального значе-

ния, тогда скорость снижения МКС составит около 110 м/сутки. Эта величина меньше наблюдаемой на практике скорости снижения спутника с параметрами МКС порядка 150–200 м/сутки.

#### Сила Ампера

Рассмотрим теперь возможное влияние на движение спутника магнитного поля Земли, величина которого вблизи поверхности Земли равна  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл. В конструкциях спутника, движущегося с большой скоростью в магнитном поле, возникает ЭДС электромагнитной индукции. При внешних размерах спутника  $l \sim \sqrt{S}$  возникает ЭДС порядка  $vBl = vB\sqrt{S}$ . Для МКС, например, величина ЭДС может достигать 15 В. Эта электродвижущая сила вызывает перераспределение электрических зарядов в проводящих токах элементах конструкции спутника. Вокруг спутника появляется электрическое поле, которое влияет на движение электрически заряженных частиц в окружающем пространстве. К тем частям спутника, которые имеют положительный потенциал (по отношению к средней части спутника), притягиваются электроны, а к тем частям спутника, которые имеют отрицательный потенциал, притягиваются положительно заряженные ионы. Электроны и ионы, попавшие на поверхность конструкций спутника, объединяются в нейтральные атомы кислорода, при этом электроны «путешествуют» в проводящих конструкциях спутника, создавая электрический ток.

Спутник, перемещаясь в пространстве, «собирает» из окружающего пространства электроны и ионы. Для грубой оценки величины тока, который может течь по проводящим конструкциям спутника, будем считать, что сбор происходит только с площади, равной площади поперечного сечения спутника, и все ионы и электроны участвуют в создании этого тока. За каждую секунду о поверхность спутника (примерно равную  $S$ ) ударяются около  $N = Sv n$  ионов. Следовательно, величина тока имеет порядок  $I = S v n e$ . Для спутника с размерами МКС эта величина составляет 2,5 А.

При протекании тока по проводящим деталям спутника на них действует «тормозящая» сила Ампера, направленная, как легко сообразить, в сторону, противоположную направлению скорости спутника:

$$F \sim IlB = S v n e \sqrt{S} B = S n e \sqrt{S} B \sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + H}}.$$

Тогда для скорости снижения спутника получим

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx - \frac{2S n e \sqrt{S} B}{M} (R_3 + H).$$

Заметим, что скорость снижения спутника пропорциональна примерно кубу его линейных размеров ( $S^{1,5}$ ). Для МКС грубая оценка скорости снижения с помощью последней формулы дает величину 48 мкм/с, или 4 м/сутки. Такая оценка значительно меньше скорости спуска, наблюдающейся на практике.

### Может ли площадь «сбора» ионов быть больше площади поперечного сечения спутника?

Энергия теплового движения, которую имеют ионы кислорода, равна примерно 0,1 эВ. В электрическом поле, созданном зарядами, перераспределиться на поверхности спутника, ионы могут приобретать в несколько раз большие энергии. Например, для спутника с параметрами МКС это энергии порядка 7,5 эВ. Ионы с такими энергиями в магнитном поле Земли движутся по спиралям, максимальный радиус которых примерно равен

$$r = \frac{\sqrt{2mvBe\sqrt{S}}}{eB} = \sqrt{\frac{2mv\sqrt{S}}{Be}} \approx 49 \text{ м},$$

где  $e$  – это заряд иона кислорода, а  $m$  – его масса. Поскольку линейные размеры МКС имеют такой же порядок величины, то это означает, что площадь сбора ионов  $S_{\text{эфф}}$  может быть в несколько раз больше площади поперечного сечения станции  $S$ :

$$\frac{S_{\text{эфф}}}{S} = \frac{1}{S} \frac{\pi \left( r + \sqrt{\frac{S}{\pi}} \right)^2}{2} \approx 4.$$

Для электронов же радиусы спиралей достигают всего лишь 0,2–0,3 м, что несущественно в сравнении с размерами спутника.

Увеличение скорости «притока» положительных зарядов на спутник за счет увеличения эффективной площади сбора ионов с лихвой компенсируется притоком электронов, которые движутся со скоростями, примерно в 100 раз большими скорости спутника. Таким образом, спутник не приобретает некомпенсированный положительный заряд.

#### Корректировка расчетов

Если учесть это увеличение эффективной площади сбора положительных ионов, то понятно, что столкновения с ионами кислорода могут обеспечить наблюдаемую скорость снижения МКС порядка 150–200 м/сутки ( $110 \text{ м/сутки} \cdot 4 = 440 \text{ м/сутки}$ ) даже с учетом того, что среднесуточная концентрация ионов меньше ее максимального значения. Сила Ампера тоже в принципе может вырасти, но ее вклад ( $4 \text{ м/сутки} \cdot 4 = 16 \text{ м/сутки}$ ) все равно составляет только около 10% от наблюдаемой на практике скорости снижения МКС. Таким образом, для МКС, по видимому, самым существенным фактором, обеспечивающим уменьшение высоты полета, является действие на станцию силы, возникающей при столкновениях станции с ионами кислорода.

Во время магнитных бурь концентрация заряженных частиц в пространстве, окружающем Землю, может во много раз увеличиваться вследствие того, что в спектре излучения Солнца увеличивается доля ультрафиолета.



Рис. 2. Движущаяся МКС на фоне Луны

В результате более интенсивно идет процесс образования в верхних слоях атмосферы атомарного кислорода и вырастает скорость его поступления на те высоты, где летают спутники.

Полученные формулы для оценки вкладов различных факторов в общую скорость снижения спутника на высотах 300–400 км позволяют оценить скорость снижения спутника с любыми размерами и массой. Кстати, увидеть МКС можно в каждую безоблачную ночь. Примером служит фотография МКС на фоне Луны (рис.2). Аппарат двигался справа налево и находился от наблюдателя на расстоянии примерно в 100 раз меньше расстояния от Земли до Луны.

А теперь, в качестве упражнения, читателям предлагается проанализировать два варианта усовершенствования конструкции МКС.

1. Представьте, что на МКС установили такой источник ЭДС (около 30 В), который изменил знак тока, текущего по проводящим конструкциям станции. Тогда при той же величине тока сила Ампера не помогает спутнику снижаться, а, наоборот, уменьшает суммарную силу сопротивления на 20%. Это же здорово: потребуется реже подталкивать станцию, чтобы «поднимать» ее орбиту.

2. На станции установили электронную пушку, которая в непрерывном режиме «выбрасывает» в пространство электроны с током больше 250 А. При этом ток электронов из окружающего пространства не успевает компенсировать возникший на станции положительный заряд. В результате отталкивания положительно заряженной станции и положительно заряженных ионов перестают происходить столкновения ионов со станцией. Это эквивалентно тому, что вязкость среды уменьшилась во много раз. Таким образом, сила сопротивления уменьшится во много раз, что тоже позволит подталкивать станцию значительно реже, чем это делается сейчас.

Успехов вам!

# Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха

В.ПРОТАСОВ

## Две замечательные теоремы

В чем состоит красота математики? Даже ставить подобный вопрос наивно, особенно в небольшой статье. Тем не менее, иногда на конкретных примерах удается разглядеть те кирпичики, из которых эта красота складывается. Одним из таких кирпичиков несомненно является взаимосвязь различных объектов. Это часто воспринимается как чудо, когда два известных математических результата, взятые из разных областей и, казалось бы, не имеющие ничего общего, оказываются тесно связанными друг с другом. Словно два человека, знакомые много лет, вдруг обнаруживают, что они на самом деле – близкие родственники.

В этой статье мы рассмотрим две известнейшие теоремы о касании окружностей – теорему Фейербаха и теорему Тебо. Открыты они были разными людьми в разное время (первая теорема старше второй на 116 лет). Для каждой из них найдено множество доказательств, основанных на различных идеях. Тем не менее, мы увидим, что теоремы эти – родные сестры. У них общие родители: обе теоремы следуют из двух разных случаев одного и того же факта. Но – все по порядку.

Начнем с формулировок. В любом треугольнике 9 точек – середины сторон, основания высот и середины трех отрезков, соединяющих вершины с точкой пересечения высот, – лежат на одной окружности. Она называется *окружностью девяти точек* треугольника. Этот красивый факт был частично установлен в 1765 году Леонардом Эйлером (1707–1783), поэтому окружность девяти точек называют также *окружностью Эйлера*. В 1822 году К.Фейербах доказал теорему об одном свойстве окружности девяти точек. Свойство это столь замечательно, что побудило некоторых математиков называть эту окружность *окружностью Фейербаха*.

**Теорема Фейербаха.** *Окружность девяти точек касается вписанной и всех внеписанных окружностей треугольника.*

Напомним, что *внеписанной* называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Так, *внеписанная* окружность треугольника  $ABC$ , соответствующая вершине  $A$ , касается стороны  $BC$  и продолжений сторон  $AB$  (за точку  $B$ ) и  $AC$  (за точку  $C$ ). У каждого треугольника, таким образом, три *внеписанных* окружности. Автор теоремы – Карл Вильгельм Фейербах

(1800–1834), немецкий математик, старший брат знаменитого философа Людвиг Фейербаха. Он был преподавателем гимназии в небольшом университетском городе Эрланген на юге Германии. Этот город будет прославлен лишь через 50 лет после открытия Фейербаха: в 1872 году Ф.Клейн сформулирует свою знаменитую *эрлангенскую программу* о систематизации геометрии. А о самом авторе замечательной теоремы в нынешнем Эрлангене, увы, ничто не напоминает. Нет даже мемориальной доски Фейербаху.

К настоящему времени найдено множество доказательств теоремы Фейербаха. Большинство из них используют достаточно сильные средства, такие как инверсия или обобщенная теорема Птолемея. Есть и элементарные доказательства. Одно из них было получено автором этих строк («Квант» № 9 за 1992 г.), оно выводит теорему Фейербаха как частный случай теоремы о сегменте.

В отличие от Карла Фейербаха, автора одной великой теоремы, французский математик Виктор Тебо (1882–1960) за свою научную карьеру создал более 1000 теорем и задач (один только журнал «American mathematical monthly» опубликовал 582 из них!). По этому показателю Тебо является признанным лидером. Это тем более удивительно, что он не был профессионалом. Тогда (как, впрочем, и теперь) занятия геометрией не приносили достойного дохода, поэтому Тебо в течение многих лет работал в страховой компании.

Из обширного наследия Тебо самой известной является теорема о трех коллинеарных окружностях. Чтобы ее сформулировать, поясним сначала некоторые термины. *Линией центров* двух окружностей мы будем называть прямую, содержащую их центры. *Криволинейным треугольником* будем называть фигуру, ограниченную двумя отрезками и дугой окружности. Так, на рисунке 1 криволинейный треугольник  $AMB$  ограничен отрезками  $AM$ ,  $MB$  и дугой  $VA$  описанной окружности треугольника  $ABC$ ; криволинейный тре-

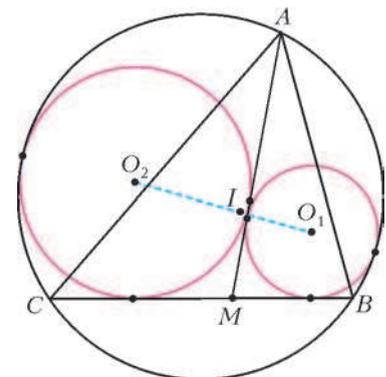


Рис. 1

угольник  $AMB$  ограничен отрезками  $AM$ ,  $MB$  и дугой  $VA$  описанной окружности треугольника  $ABC$ ; криволинейный тре-

угольник  $AMC$  ограничен отрезками  $CM$ ,  $MA$  и дугой  $AC$  описанной окружности.

**Теорема Тебо.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $M$ . В криволинейные треугольники  $AMB$  и  $AMC$  вписано по окружности. Тогда линия центров этих окружностей содержит центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

Окружности, вписанные в криволинейные треугольники  $AMB$  и  $AMC$ , мы теперь будем называть окружностями Тебо. Данную теорему В.Тебо опубликовал в виде задачи (без доказательства) в 1938 году. Первые доказательства (вычислительные) были получены уже после смерти автора теоремы, в 1970-х годах, а первое чисто геометрическое доказательство – и вовсе в 1986 году. Теорема Тебо вызывает широкий интерес многих авторов. Из публикаций на русском языке выделим недавнюю интересную статью Е.Д.Куланина («Математическое просвещение», вып. 11, 2007 г.).

Мы с вами увидим, что и теорема Фейербаха, и теорема Тебо на самом деле вытекают из разных случаев одного и того же общего факта. Конечно, увидим мы это не сразу. Потребуется предварительная работа. Вначале мы вспомним несколько элементарных геометрических фактов. Затем докажем основную теорему, из которой выведем сначала теорему Тебо, а затем и теорему Фейербаха. Поэтому и статья названа вопреки хронологии – от Тебо до Фейербаха.

### Повторим геометрию

Нам понадобятся несколько несложных геометрических результатов. Напомним, что угловой мерой дуги  $AB$  окружности (обозначение  $\overset{\frown}{AB}$ ) называется величина угла между радиусами  $OA$  и  $OB$ . При этом дугой  $AB$  считается та из двух смежных дуг, которая проходит от  $A$  к  $B$  в положительном направлении (против часовой стрелки). Таким образом, дуги  $AB$  и  $BA$  составляют полную окружность. Центр вписанной окружности треугольника мы будем обозначать буквой  $I$  (от английского inscribed – вписанный).

**Центр вписанной окружности.** Что мы знаем об этой точке? Она расположена внутри треугольника и равноудалена от его сторон, лежит на пересечении биссектрис треугольника. Что еще? Одно свойство точки  $I$  часто бывает полезно при решении задач. Оно говорит о том, где именно на биссектрисе лежит центр вписанной окружности.

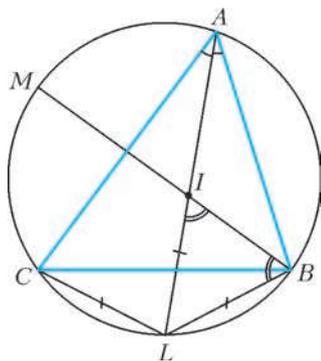


Рис. 2

Продолжим биссектрису угла  $A$  до пересечения с описанной окружностью в точке  $L$  (рис. 2). Тогда  $LI = LB = LC$ .

Докажем это. Так как  $\angle LAB = \angle LAC$ , то точка  $L$  является серединой дуги  $BC$ , значит,  $LB = LC$ . Далее, пусть  $M$  – точка пересечения биссектрисы угла  $B$  с описанной окружностью. Угол  $IBL$  равен по-

ловине дуги  $ML$ , т.е. полусумме дуг  $MC$  и  $CL$ . Это, в свою очередь, равно полусумме дуг  $AM$  и  $LB$  (поскольку  $AM = MC$  и  $LB = CL$ ), которая равна углу  $BIL$ . Итак, углы  $IBL$  и  $BIL$  равны, значит, треугольник  $IBL$  равнобедренный, и  $IL = BL$ .

Читатель без труда сформулирует и докажет аналогичные утверждения для центров внеписанных окружностей треугольника.

**Касание окружности и хорды.** На плоскости даны окружности  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 3). Окружность  $\alpha$  лежит внутри окружности  $\beta$  и касается ее в точке  $T$ , а также касается ее хорды  $BC$  в точке  $Q$ . Луч  $TQ$  пересекает окружность  $\beta$  в точке  $L$ . Тогда  $L$  – середина дуги  $CB$ , а  $TL$  – биссектриса угла  $BTC$ . Более того,  $LQ \cdot LT = LB^2 = LC^2$ .

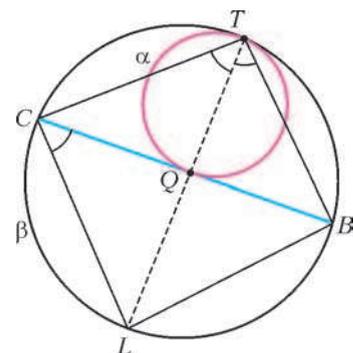


Рис. 3

Для доказательства рассмотрим гомотегию с центром в точке  $T$ , переводящую окружность  $\alpha$  в окружность  $\beta$ . Она переводит точку  $Q$  в точку  $L$ , прямую  $BC$ , касающуюся окружности  $\alpha$  в точке  $Q$ , в параллельную ей прямую, касающуюся окружности  $\beta$  в точке  $L$ . Так как эта касательная параллельна хорде  $BC$ , то  $L$  – середина дуги  $BC$ . Далее, вписанные углы  $LCB$  и  $LTC$  равны, поскольку опираются на равные дуги. Значит, треугольники  $LCQ$  и  $LTC$  подобны, из чего заключаем, что  $LQ \cdot LT = LC^2$ .

Сформулируйте и докажите самостоятельно аналогичное утверждение для окружностей, касающихся внешним образом. При этом  $TL$  будет биссектрисой угла, смежного с углом  $BTC$ .

**Степень точки относительно окружности. Радиальная ось.** Степенью точки относительно окружности называется величина  $d^2 - R^2$ , где  $R$  – радиус окружности, а  $d$  – расстояние от данной точки до центра окружности. Степень любой точки  $M$ , лежащей вне окружности, равна квадрату касательной, проведенной из точки к окружности (т.е. квадрату отрезка от  $M$  до точки касания). Для любой прямой, проходящей через точку  $M$  и пересекающей окружность в точках  $A$  и  $B$ , произведение  $MA \cdot MB$  равно степени точки  $M$ . Для доказательства достаточно вспомнить, что произведение  $MA \cdot MB$  (произведение секущей на ее внешнюю часть) одинаково для всех прямых, проходящих через точку  $M$ . Для прямой, проходящей через центр окружности, это произведение равно  $(d - R)(d + R) = d^2 - R^2$ . Значит, и для всех прямых оно равно степени точки  $M$ . Если  $M$  лежит внутри окружности, то  $d < R$ , а значит, степень точки  $M$  отрицательна. В этом случае для любой хорды  $AB$ , проходящей через точку  $M$ , произведение отрезков  $MA$  и  $MB$  равно степени точки  $M$ , взятой со знаком «плюс».

Для двух окружностей геометрическим местом точек, имеющих одинаковые степени относительно

этих окружностей, является прямая, перпендикулярная их линии центров.

В самом деле, если степени точки  $M$  относительно окружностей равны, то  $O_1M^2 - R_1^2 = O_2M^2 - R_2^2$  ( $O_1, O_2$  – центры окружностей, а  $R_1, R_2$  – их радиусы). Таким образом,  $O_1M^2 - O_2M^2 = R_1^2 - R_2^2$ , т.е. разность квадратов расстояний от точки  $M$  до точек  $O_1$  и  $O_2$  постоянна. Поэтому (докажите это!) геометрическим местом таких точек является прямая, перпендикулярная  $O_1O_2$ . Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей. Любая пара неконцентрических окружностей имеет радикальную ось. Если окружности пересекаются, то радикальной осью служит прямая, содержащая их общую хорду.

**Центральная теорема**

Мы начнем с основной теоремы, из которой следуют теоремы Тебо и Фейербаха.

**Основная теорема.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбирается произвольная точка  $M$ . В криволинейный треугольник  $AMB$  вписана окружность, касающаяся отрезков  $MA$  и  $MB$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно и окружности  $ABC$  – в точке  $T$ . Тогда прямая  $PQ$  проходит через точку  $I$ .

**Доказательство.** 1) Первый шаг – небольшое дополнительное построение (рис.4).

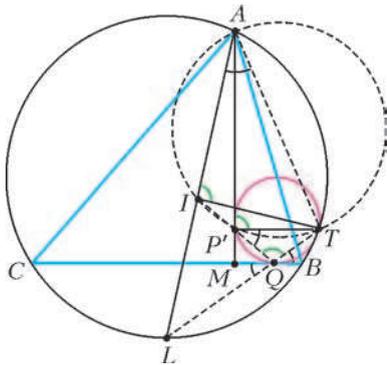


Рис. 4

окружность  $ABC$ . Так как  $AI$  – биссектриса угла  $A$ , то  $L$  – середина дуги  $BC$ .

2) Углы  $BQT, QP'T$  и  $TAI$  равны. В самом деле, угол  $BQT$  равен полусумме дуг  $CL$  и  $BT$ , угол  $TAI$  равен половине дуги  $LT$ , т.е. полусумме дуг  $LB$  и  $BT$ . Но дуги  $CL$  и  $LB$  равны, следовательно,  $\angle BQT = \angle TAI$ . Наконец, угол  $BQT$  между касательной и хордой равен углу  $QP'T$ , который стягивает эта хорда.

3) Четырехугольник  $TAIP'$  – вписанный. Это следует из доказанного равенства углов  $\angle QP'T = \angle TAI$ . Значит,  $\angle AIT = \angle AP'T$ . Далее,  $LQ \cdot LT = LB^2 = LI^2$ . Следовательно, треугольники  $LQI$  и  $LIT$  подобны (по общему углу  $ILQ$  и двум пропорциональным сторонам). Из этого следует, что  $\angle LQI = \angle LIT$ . Таким образом,  $\angle TQP' = \angle AIT = \angle AP'T$ .

4) Равенство углов  $\angle TQP' = \angle AP'T$  означает,

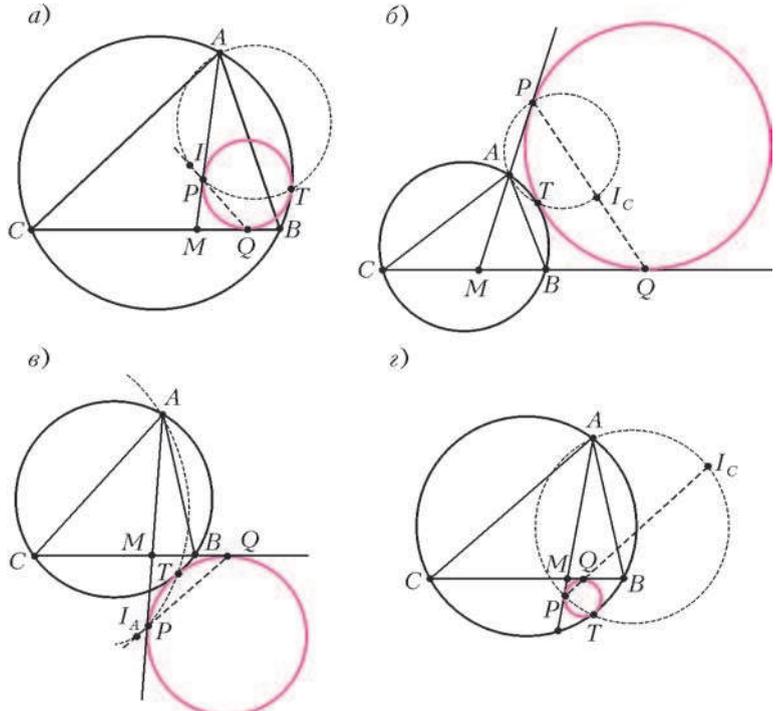


Рис. 5

что прямая  $AP'$  касается окружности  $\gamma$ . Следовательно,  $P' = P$ . □

В доказательстве теоремы мы заодно установили еще одно полезное свойство.

**Следствие.** В условиях основной теоремы окружность  $ATP$  проходит через центр вписанной окружности  $I$ .

В частном случае основной теоремы, когда точка  $M$  совпадает с вершиной  $C$  (тогда окружность  $\gamma$  будет касаться сторон  $CA$  и  $CB$  треугольника  $ABC$  и его описанной окружности), получаем известную олимпиадную задачу. Мы приводим ее в задаче 1. Много интересных вещей, связанных с этим случаем, можно найти в статье А.Гирича («Квант» №11 за 1990 г.).

Основная теорема может быть распространена и на другие случаи расположения окружности  $\gamma$  по отношению к треугольнику  $ABC$ . На рисунке 5 изображены четыре возможности. В разных случаях внутреннее касание заменяется внешним, а центр вписанной окружности  $I$  – центрами вневписанных  $I_A$  и  $I_C$ . Кроме того, точка  $M$  может лежать не на стороне  $BC$ , а на ее продолжении. Два возможных случая изображены на рисунке 6. Во всех случаях основная теорема верна и

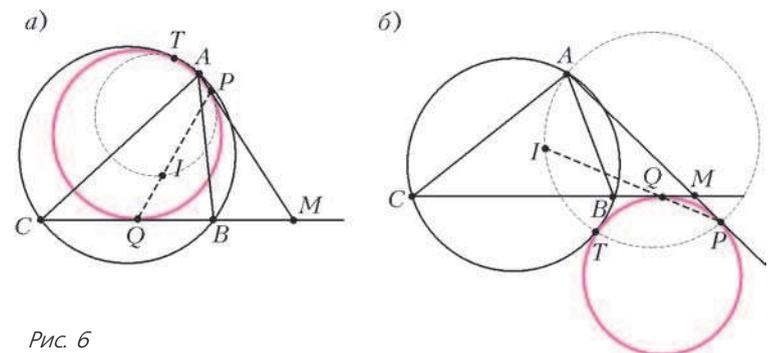


Рис. 6

доказывается так же. Изобразите остальные случаи и докажите теорему для них.

### Доказательство теоремы Тебо

Установим сначала одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** К двум окружностям провели общую внешнюю и общую внутреннюю касательные. Тогда прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности, и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров.

**Доказательство.** Пусть  $O_1$  – центр первой окружности, а  $A_1$  и  $B_1$  – точки ее касания с проведенными прямыми; аналогичные обозначения – для второй окружности (точки  $A_1$  и  $A_2$  лежат на одной касательной). Проведем окружности  $\delta$  и  $\beta$  с диаметрами  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  соответственно (рис.7). Прямая  $O_1A_1$  касается  $\delta$ , а прямая  $O_1B_1$  касается  $\beta$ . Значит, из точки  $O_1$  к данным окружностям опущены равные касательные ( $O_1A_1 = O_1B_1$  – радиусы первой окружности).

То же – с точкой  $O_2$ . Таким образом,  $O_1O_2$  – радикальная ось окружностей  $\delta$  и  $\beta$ . Наконец, прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  параллельны биссектрисам смежных углов между касательными, следовательно, они перпендикулярны между собой. Поэтому их точка пересечения лежит на обеих окружностях  $\delta$  и  $\beta$ . Точка пересечения этих окружностей, конечно же, лежит на их радикальной оси  $O_1O_2$ .  $\square$

Теперь доказательство теоремы Тебо получается мгновенно. Прямая, соединяющая точки касания первой окружности Тебо со сторонами  $MA$  и  $MB$ , и прямая, соединяющая точки касания второй окружности со сторонами  $MA$  и  $MC$ , пересекаются на линии центров (лемма 1).  $\square$

Если воспользоваться случаями основной теоремы, изображенными на рисунках 5 и 6, то получим обобщения теоремы Тебо на разные расположения точки  $M$  и окружностей Тебо (на рисунке 8 они названы  $\gamma_1, \gamma_2$ ). Так, на рисунке 8,б показан случай точки  $M$ , лежащей на продолжении стороны  $BC$  за точку  $V$ . Окружность  $\gamma_1$  теперь касается окружности  $ABC$  извне. А на рисунке 8,в точка  $M$  лежит на стороне  $BC$ , и обе окружности  $\gamma_1, \gamma_2$  касаются окружности  $ABC$  извне. На этот раз вместо центра вписанной окружности  $I$  нужно взять центр внеписанной, соответствующей вершине  $A$ . Доказательства во всех случаях совершенно одинаковы. Найдите самостоятельно еще несколько случаев, сформулируйте и докажите для них аналоги теоремы Тебо.

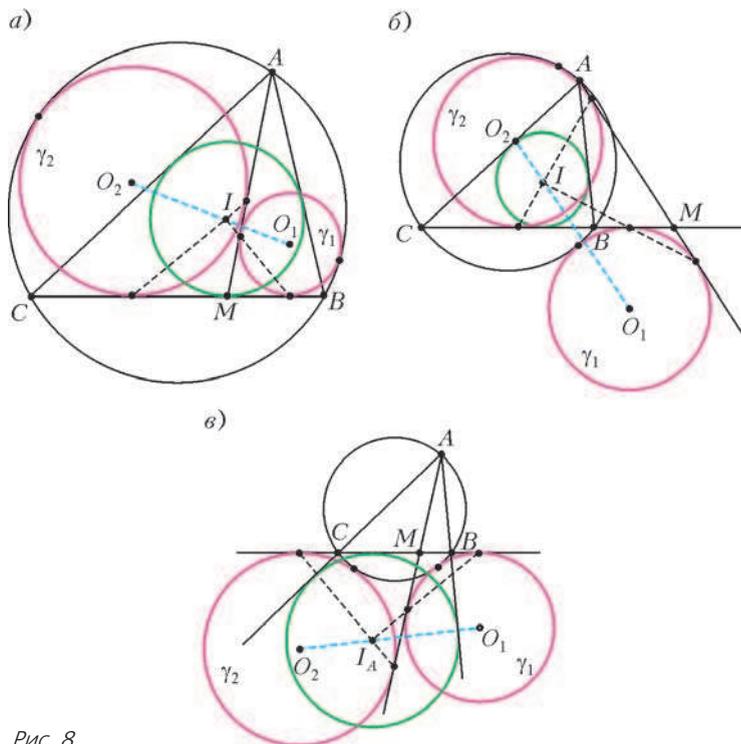


Рис. 8

### Задача Аполлония

Как с помощью циркуля и линейки вписать окружность в треугольник? Странный вопрос! Нет ничего проще: проводим две биссектрисы треугольника, в точке их пересечения лежит центр вписанной окружности. А как вписать окружность в *криволинейный* треугольник, который ограничен двумя отрезками и дугой окружности? Читатель может убедиться самостоятельно, что сделать это совсем не просто. С решением данной задачи связано еще одно применение основной теоремы. На самом деле, эта задача – частный (точнее, предельный) случай задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных окружностей. Ее исследовал древнегреческий математик и астроном, ученик Евклида, лучший специалист античного мира по окружностям и коническим сечениям Аполлоний Пергский (ок. 260–170 до н.э.) в своем труде «О касании». Решение Аполлония было утрачено. Лишь 18 веков спустя, в 1600 году, знаменитый Франсуа Виет (1540–1603) сумел восстановить его. Виет справедливо гордился своим достижением и даже назвал свой труд «Apollonius Gallus» (Аполлоний галльский, т.е. французский).

Сейчас известно множество решений задачи Аполлония, большинство из них использует инверсию. Наш случай гораздо проще – две из трех окружностей вырождаются в прямые линии. И решение, которое следует из основной теоремы, на удивление простое. Пусть криволинейный треугольник  $AMB$  ограничен отрезками  $MA, MB$  и дугой  $VA$  некоторой окружности. Для простоты предположим, что эта окружность содержит точку  $M$ .

**Построение.** Продолжим луч  $BM$  до пересечения с окружностью в некоторой точке  $C$ . Через центр вписан-

ной окружности треугольника  $ABC$  проведем прямую, параллельную биссектрисе угла  $AMC$ . Найдем ее точки пересечения со сторонами угла  $AMB$ . Тогда окружность, касающаяся сторон угла  $AMB$  в этих точках, – искомая.

### Доказательство теоремы Фейербаха

Настал ключевой момент: переход от Тебо к Фейербаху. С помощью того же приема, которым мы доказали теорему Тебо, мы докажем и теорему Фейербаха.

Пусть  $ABC$  – данный треугольник,  $A_1, B_1, C_1$  – середины его сторон,  $A_2, B_2, C_2$  – основания высот. Последние шесть точек, как мы знаем, лежат на одной окружности – окружности девяти точек. Нужно доказать, что она касается вписанной и всех внеписанных окружностей треугольника  $ABC$ . Идея такова: выделим пару окружностей – вписанную окружность треугольника  $ABC$  и одну из его внеписанных окружностей, скажем ту, которая касается стороны  $AC$ . Попробуем представить эту пару как пару окружностей Тебо для некоторого треугольника, вписанного в окружность девяти точек. Если это удастся сделать, то теорема Фейербаха будет установлена. В самом деле, окружности Тебо (по определению!) касаются описанной окружности треугольника, т.е. нашей окружности девяти точек. Значит, окружность девяти точек касается вписанной и одной из внеписанных окружностей. Прделав то же с другими внеписанными окружностями, получим требуемое. Главный вопрос – какой из треугольников, вписанных в окружность девяти точек, нужно взять? Ни «серединный» треугольник  $A_1B_1C_1$  (с вершинами в серединах сторон), ни «ортотреугольник»  $A_2B_2C_2$  (с вершинами в основаниях высот) для этой цели не подойдут. Даже если ограничиться только шестью точками  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ , то существует 20 треугольников с вершинами в этих точках (почему именно столько?). Все они будут вписаны в окружность девяти точек. А подойдет из них только один! Не будем томить читателя, скажем ответ сразу: это треугольник  $B_1B_2A_2$  (рис.9). Его вершины это основания двух высот –  $A_2$  и  $B_2$  и середина стороны –  $B_1$ .

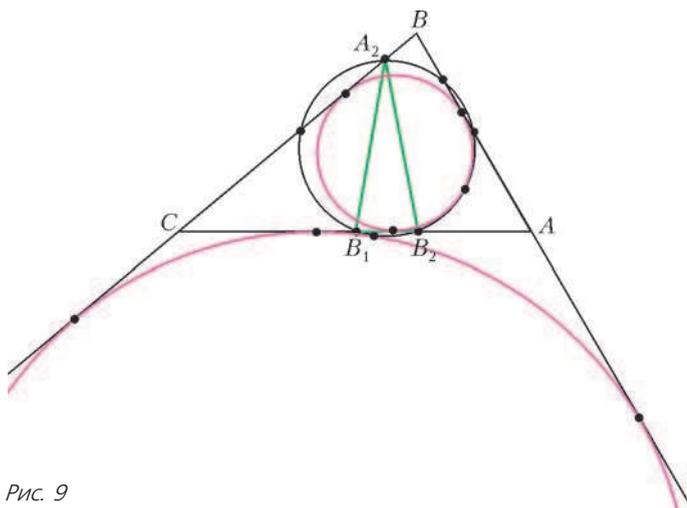


Рис. 9

В качестве точки  $M$  на стороне треугольника берется точка  $C$ . Она лежит на продолжении стороны  $B_2B_1$  треугольника  $B_1B_2A_2$ .

*Вписанная и внеписанная окружности треугольника  $ABC$ , касающиеся стороны  $AC$ , являются окружностями Тебо для треугольника  $B_1B_2A_2$  и для точки  $C$  на продолжении его стороны  $B_1B_2$ . При этом возникает случай теоремы Тебо, изображенный на рисунке 8,б (когда точка  $M$  берется на продолжении стороны треугольника).*

Итак, если в теореме Тебо взять точку  $M$  не на стороне, а на продолжении стороны треугольника, то получим теорему Фейербаха. Таким образом, обе теоремы – две грани одного и того же утверждения. И обе доказываются с помощью основной теоремы.

Теперь нужно доказать, что это действительно так: вписанная и внеписанная окружности являются окружностями Тебо для треугольника  $B_1B_2A_2$  и точки  $C$  на продолжении его стороны  $B_1B_2$ . Для этого воспользуемся основной теоремой. Если мы покажем, что отрезок  $MN$  между точками касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со сторонами  $CA$  и  $CB$  соответственно содержит центр вписанной окружности  $I_1$  треугольника  $B_1B_2A_2$ , то все будет сделано. В самом деле, получается, что через центр вписанной окружности  $I_1$  провели прямую  $MN$ , образующую равные углы с прямыми  $CA_2$  и  $CB_2$ . Тогда из теоремы (точнее, из ее случая, представленного на рисунке 6,а) следует, что окружность, касающаяся этих прямых в точках  $M$  и  $N$  (это – вписанная окружность треугольника  $ABC$ ), вписана в криволинейный треугольник  $A_2CB_2$ , ограниченный отрезками  $CA_2$ ,  $CB_2$  и дугой  $B_2A_2$  окружности девяти точек. Значит, она касается окружности девяти точек. Как видим, рассуждения те же, что и при построении в задаче Аполлония. Для внеписанной окружности доказательство совершенно аналогично.

Таким образом, осталось доказать, что прямая  $MN$  содержит центр вписанной окружности  $I_1$  треугольника  $B_1B_2A_2$ . Нам удобнее будет начать с одного вспомогательного утверждения, которое, впрочем, является известной олимпиадной задачей.

**Лемма 2.** *В произвольном треугольнике  $ABC$  точка пересечения биссектрисы угла  $B$  с прямой, содержащей среднюю линию, параллельную стороне  $CB$ , лежит на одной прямой с точками касания вписанной окружности со сторонами  $CA$  и  $CB$ .*

**Доказательство.** Пусть  $I$  – центр вписанной окружности,  $M$  и  $N$  – точки ее касания со сторонами  $CA$  и  $CB$ ,

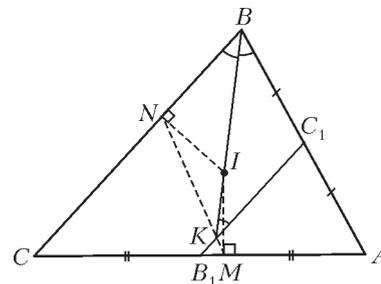


Рис. 10

$K$  – точка пересечения средней линии  $B_1C_1$  с биссектрисой угла  $B$  (рис.10). Из равенства накрест лежащих углов при параллельных прямых  $CB$  и  $C_1B_1$  получаем, что  $\angle BKC_1 = \angle KBC = \angle KBC_1$ , а значит,  $C_1B = C_1K$ . Следовательно, медиана  $C_1K$  треугольника  $ABK$  равна половине его стороны  $AB$ , откуда  $\angle AKB = 90^\circ$ . Тогда четырехугольник  $AMKI$  – вписанный, и следовательно,  $\angle KMC = \angle KIA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C = \angle NMC$ . Значит,  $K$  лежит на прямой  $MN$ .  $\square$

*Доказательство теоремы Фейербаха* проведем для вписанной окружности, для внеписанной все аналогично. Так как  $AA_2C$  – прямоугольный треугольник, то  $B_1A_2 = B_1C$  (рис.11). Следовательно, луч  $B_1C_1$ , параллельный стороне  $BC$ , является биссектрисой угла

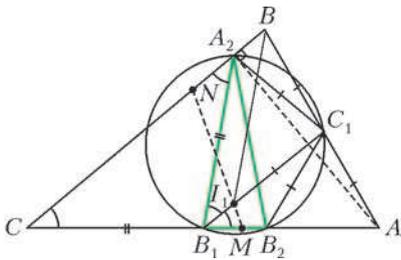


Рис. 11

$A_2B_1A$ . Значит, он содержит точку  $I_1$ . Далее, точка  $C_1$  лежит на описанной окружности треугольника  $B_1B_2A_2$ , следовательно (свойство центра вписанной окружности!),  $C_1I_1 = C_1A_2$ . Но поскольку треугольник  $AA_2B$  прямоугольный,  $C_1A_2 = C_1B$ . Таким образом, треугольник  $BC_1I_1$  – равнобедренный. Тогда из равенств накрест лежащих углов  $\angle I_1BC = \angle BI_1C_1$  следует, что  $BI_1$  – биссектриса угла  $B$ . Применив лемму 2, получаем, что точка  $I_1$  лежит на прямой  $MN$ . Теперь вступает в силу основная теорема: прямая  $MN$  проходит через центр вписанной окружности треугольника  $B_1B_2A_2$ , поэтому окружность, касающаяся сторон угла  $C$  в точках  $M$  и  $N$  (вписанная окружность треугольника  $ABC$ ) касается окружности  $B_1B_2A_2$  (окружности девяти точек).  $\square$

### Задачи

В заключение предлагаем несколько задач. Решать их полезно, хотя и не обязательно (для понимания статьи это не требуется). Все задачи формулируются в виде утверждений, слова «докажите, что» для краткости будем опускать.

**1.** В угол с вершиной  $C$  вписана окружность. Рассмотрим всевозможные треугольники  $ABC$  с вершинами на сторонах угла, описанные около данной окружности. Тогда описанные окружности таких треугольников касаются фиксированной окружности. Что это за окружность?

**2.** В произвольной трапеции  $ABCD$  окружность, касающаяся ее оснований  $AB$  и  $CD$  и дуги  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , касается также и вписанной окружности этого треугольника.

**3.** В окружность вписан четырехугольник  $ABCD$ .

а) Четыре точки: центры вписанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $ACD$ , центр внеписанной окружности треугольника  $ABC$ , соответствующей вершине  $C$ , и центр

внеписанной окружности треугольника  $BCD$ , соответствующей вершине  $B$ , лежат на одной прямой.

б) Обозначим через  $l$  прямую из пункта а). Рассмотрим три окружности: первая касается прямых  $AC$  и  $BD$  в точках их пересечения с  $l$ ; вторая касается прямых  $AB$  и  $CD$  в точках их пересечения с  $l$ ; третья касается прямых  $AD$  и  $BC$  в точках их пересечения с  $l$ . Эти три окружности касаются исходной окружности в одной точке.

В задачах 4–8 обозначения такие же, как в теореме Тебо.

**4.** К окружности Тебо проводится общая внешняя касательная, отличная от  $BC$ . Она пересекает отрезок  $AM$  в точке  $K$ . Тогда

а) проекция точки  $K$  на линию центров окружностей Тебо совпадает с точкой  $I$ ;

б) прямая, параллельная  $BC$  и проходящая через  $K$ , касается вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**5.** Если  $O_1, O_2$  – центры окружностей Тебо, то  $\frac{O_1I}{O_2I} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\angle AMB$ .

**6.** Если  $Q_1$  и  $Q_2$  – точки касания окружностей Тебо со стороной  $BC$ , то в треугольнике  $Q_1IQ_2$  угол  $I$  – прямой, а острые углы равны  $\frac{1}{2}\angle AMB$  и  $90^\circ - \frac{1}{2}\angle AMB$ .

**7.** Если  $AM$  – биссектриса треугольника  $ABC$ , то окружности Тебо касаются, а точка их касания – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**8.** Окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда  $M$  – точка касания внеписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$ .

**9.** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $AB$  в точке  $N$ . Проводятся две окружности: первая касается извне окружности  $ABC$ , продолжения стороны  $BC$  за точку  $B$  и продолжения отрезка  $AN$  за точку  $N$ ; вторая касается окружности  $ABC$ , продолжения стороны  $BC$  за точку  $C$  и продолжения отрезка  $AN$  за точку  $N$ . Каждая из них равна внеписанной окружности треугольника  $ABC$ , соответствующей точке  $A$ .

**10.** На плоскости даны прямые  $a$  и  $b$ , а также окружность  $\phi$ , касающаяся  $b$ . Рассмотрим семейство всевозможных треугольников  $ABC$ , описанных около окружности  $\phi$ , у которых вершина  $A$  лежит на прямой  $a$ , а вершины  $B$  и  $C$  – на  $b$ . Тогда описанные окружности этих треугольников касаются двух фиксированных окружностей.

**11.** На плоскости даны окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Произвольная окружность, касающаяся  $a$  и содержащая их, пересекает их общую внешнюю касательную в точках  $B$  и  $C$ , а общую внутреннюю касательную – в точке  $A$ , которая лежит в той же полуплоскости относительно прямой  $BC$ , что и окружности  $\gamma_1, \gamma_2$ . Тогда треугольник  $ABC$  имеет фиксированную вписанную окружность.

**12.** На плоскости даны точка  $K$ , окружность и точка  $A$  на этой окружности. Через  $K$  проводится произвольная прямая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$ . Тогда окружность девяти точек треугольника  $ABC$  касается двух фиксированных окружностей.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4-2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2096» или «Ф2101». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

## Задачи М2096–М2100, Ф2103–Ф2107

**М2096.** Депутаты парламента образовали 2008 комиссий, каждая – не более чем из 10 человек. Известно, что любые 11 комиссий имеют общего члена. Докажите, что все комиссии имеют общего члена.

Ф.Петров

**М2097.** Найдите все такие простые числа  $p$  вида  $a^2 + b^2 + c^2$  (где  $a, b, c$  – натуральные), что  $a^4 + b^4 + c^4$  делится на  $p$ .

В.Сендеров

**М2098.** Двое играют в игру, делая ходы по очереди: первый рисует на плоскости многоугольник, не налегающий на уже нарисованные, а второй ответным ходом раскрашивает его в один из 2008 цветов. Второй игрок хочет, чтобы любые два многоугольника, граничащие по отрезку стороны, имели разные цвета. Сможет ли первый игрок помешать ему?

Фольклор

**М2099.** Пусть  $a_0 > a_1 > \dots > a_s = 0$  – такая последовательность целых чисел, что натуральные числа  $a_0$  и  $a_1$  взаимно просты, а при  $i \geq 1$  число  $a_{i+1}$  равно остатку от деления  $a_{i-1}$  на  $a_i$  с неполными частными  $t_i = \left[ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right]$ . Построим последовательность  $b_0, b_1, \dots, b_s$  с помощью соотношения  $b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$ , положив  $b_0 = 0$  и  $b_1 = 1$ . Докажите, что  $b_s = a_0$ .

В.Быковский

**М2100.** В угол с вершиной  $O$  вписаны две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Луч с началом  $O$  пересекает  $\omega_1$  в точках  $A_1$  и  $B_1$ , а  $\omega_2$  – в точках  $A_2$  и  $B_2$  так, что  $OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$  (рис.1). Окружность  $\gamma_1$  касается внутренним образом окружности  $\omega_1$  и касательных

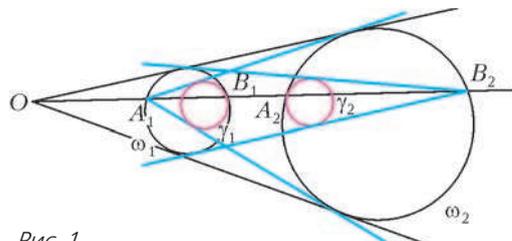


Рис. 1

к  $\omega_2$ , проведенных из  $A_1$ . Окружность  $\gamma_2$  касается внутренним образом окружности  $\omega_2$  и касательных к  $\omega_1$ , проведенных из  $B_2$ . Докажите, что окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равны.

П.Кожевников

**Ф2103.** Навстречу друг другу по одной прямой с одинаковыми скоростями  $v = 1$  м/с движутся шарики с массами  $m = 10$  г и  $3m = 30$  г. Какую максимальную скорость может приобрести легкий шарик после лобового удара шариков?

А.Простов

**Ф2104.** Легкая нить намотана множеством витков на гладкую неподвижно закрепленную катушку радиусом  $R$  (рис.2). На свободном конце нити закреплен маленький шарик массой  $m$ , другой конец нити начинают вытягивать через отверстие в катушке, постепенно увеличивая скорость вдоль поверхности катушки до величины  $v$ . В результате через большое время движение шарика устанавливается. Найдите

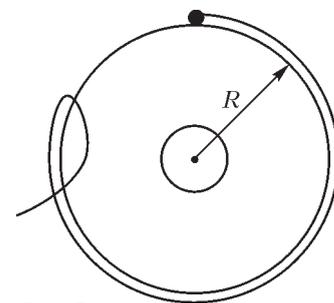


Рис. 2

те скорость установившегося движения шарика и радиус траектории его движения. Сила тяжести отсутствует, сила трения шарика о воздух пропорциональна его скорости:  $F_{\text{тр}} = kv$ .

М.Гырдымов

**Ф2105.** Цикл тепловой машины проводят с порцией гелия. Он состоит из двух изобар с отношением давлений 2:1 и двух изохор. Найдите максимально возможный термодинамический КПД такого цикла.

А.Старов

**Ф2106.** Конденсатор емкостью  $C = 100$  мкФ подключен к батарейке напряжением  $U = 6$  В последовательно с резистором сопротивлением  $r = 100$  кОм. Вольтметр, имеющий сопротивление  $R = 200$  кОм, периодически подключают параллельно конденсатору и отключают от него. Время подключения составляет каждый раз  $\tau = 0,05$  с, а время, в течение которого вольтметр отключен, составляет каждый раз  $2\tau$ . Что показывает вольтметр?

З.Рафаилов

**Ф2107.** Цилиндрический магнит небольшого размера создает на своей оси магнитное поле  $B_0 = 0,001$  Тл в точке, находящейся на расстоянии  $L = 5$  м от торца магнита. Проволочный виток с током  $I = 2$  А расположен в указанной точке на оси магнита так, что плоскость кольца перпендикулярна оси магнита, а ось проходит через центр кольца. Найдите силу, действующую в магнитном поле на кольцо. Кольцо сделано из тонкой проволоки. Магнитная индукция на оси магнита на расстоянии  $L_1 = 5,1$  м составляет  $B_1 = 0,94B_0$ .

А.Зильберман

**Решения задач М2071<sup>1</sup>–М2080, Ф2088–Ф2092**

**М2071.** Универсальным числом  $U(n)$  назовем минимальное натуральное число, из которого вычеркиванием цифр можно получить любое натуральное число от 1 до  $n$ . Сколько цифр имеет число  $U(2008)$ ?

**Ответ:** 31.

Так как вычеркиванием цифр из десятичной записи числа  $U(2008)$  можно получить числа 1000, 1111, 222, 333, 444, ..., 999, то запись числа  $U(2008)$  содержит не менее трех нулей, не менее четырех единиц, не менее трех двоек, ..., не менее трех девяток – итого не менее  $4 + 9 \cdot 3 = 31$  цифр.

Рассмотрим 31-значное число

$$\underline{12013456789} \underline{0123456789} \underline{0123456789}.$$

В каждой фигурной скобке встречаются все цифры от 0 до 9, поэтому, оставляя из каждой скобки нужную цифру, мы можем получить вычеркиванием все трехзначные числа (а поэтому и двузначные, и однозначные), а также все четырехзначные числа с первой цифрой 1. Наконец, числа от 2000 до 2008 легко получить, оставляя из первой скобки 20, из второй – 0,

<sup>1</sup> Решение задачи М2070 см. в статье «Вокруг шестиугольника».

а из третьей – нужную цифру. Отсюда вытекает, что  $U(2008)$  содержит не более 31 цифры.

*Замечание.* В задаче не требовалось нахождения самого числа  $U(2008)$ . Однако нетрудно доказать, что  $U(2008)$  совпадает с указанным в решении 31-значным числом.

С.Волчёнков, П. Кожевников

**М2072.** Найдите  $(n + 1)$ -ю цифру после запятой в десятичной записи числа  $\sqrt{\underbrace{999\dots 99}_{2n \text{ девяток}}}$ .

**Ответ:** 4.

Пусть

$$A = \sqrt{\underbrace{999\dots 99}_{2n \text{ девяток}}} = \sqrt{10^{2n} - 1}.$$

Оценим разность

$$r_n = 10^n - A = \frac{10^{2n} - A^2}{10^n + A} = \frac{1}{10^n + A}.$$

Так как

$$A < 10^n, \text{ то } r_n > \frac{1}{2 \cdot 10^n}.$$

Отсюда получаем

$$A = 10^n - r_n < 10^n - \frac{1}{2 \cdot 10^n} = \underbrace{999\dots 99}_n \text{ девяток}, \underbrace{999\dots 995}_n \text{ девяток}.$$

С другой стороны,  $r_n < \frac{3}{5 \cdot 10^n}$  (действительно,

$$\frac{1}{10^n + A} < \frac{3}{5 \cdot 10^n} \Leftrightarrow 2 \cdot 10^n < 3A \Leftrightarrow 4 \cdot 10^{2n} < 9A^2 = 9(10^{2n} - 1) \Leftrightarrow 9 < 5 \cdot 10^{2n},$$

что верно), откуда

$$A = 10^n - r_n > 10^n - \frac{3}{5 \cdot 10^n} = \underbrace{999\dots 99}_n \text{ девяток}, \underbrace{999\dots 994}_n \text{ девяток}.$$

Из доказанных оценок

$$\underbrace{999\dots 99}_n \text{ девяток}, \underbrace{999\dots 994}_n \text{ девяток} < A < \underbrace{999\dots 99}_n \text{ девяток}, \underbrace{999\dots 995}_n \text{ девяток}$$

вытекает, что в исходном числе  $(n + 1)$ -я цифра после запятой равна 4.

Я.Алиев, П.Кожевников

**М2073.** Даны две окружности, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Пусть  $S$  – произвольная точка одной из окружностей, отличная от  $P$  и  $Q$ ; точки  $A$  и  $B$  – вторые точки пересечения прямых  $SP$  и  $SQ$  с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников  $ABC$ .

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  – центры данных окружностей,  $D$  – точка, диаметрально противоположная  $S$ ,  $E$  – точка, симметричная  $D$  относительно  $O_2$  (см.

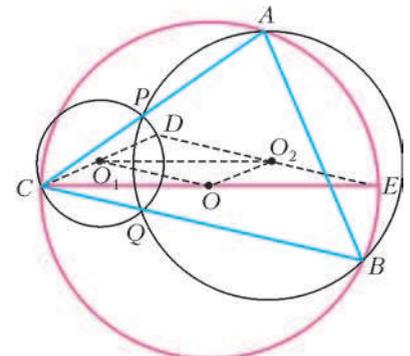


рисунок). Тогда, так как  $DP \perp AC$ , а проекцией  $O_2$  на  $AC$  является середина отрезка  $PA$ , имеем  $EA \perp AC$ . Аналогично,  $EB \perp BC$ . Значит, центр  $O$  описанной около  $\triangle ABC$  окружности является серединой отрезка  $CE$ . Поскольку  $O_1O_2$  – средняя линия треугольника  $CDE$ ,  $\overline{CO} = \overline{O_1O_2}$ . Следовательно, искомым ГМТ будет окружность, полученная из той, на которой лежит точка  $C$ , переносом на вектор  $\overline{O_1O_2}$ , без точек, соответствующих  $P$  и  $Q$ .

Нетрудно доказать, что  $CO \parallel O_1O_2 \perp PQ$  и  $CO_1 \parallel OO_2 \perp AB$ , откуда следует другое доказательство равенства  $\overline{CO} = \overline{O_1O_2}$ .

А.Заславский, П.Кожевников

**M2074.** *Посетитель обходит залы музея по следующему правилу. Находясь в некотором зале, он выбирает среди всех соседних залов тот, который до этого был посещен им меньшее число раз, и переходит в него (если таких соседних залов несколько, то он переходит в любой из них). Верно ли, что посетитель через некоторое время обойдет все залы? (Известно, что из любого зала музея можно пройти в любой другой зал.)*

**Ответ:** верно.

Будем рассматривать бесконечную последовательность залов, которые обходит посетитель. Пусть  $A$  – множество залов, в которых посетитель побывал бесконечное число раз (так как число залов конечно, то  $A$  непусто), а  $B$  – множество залов, в которых посетитель побывал лишь конечное число раз или не побывал вовсе.

Докажем что множество  $B$  пусто (отсюда будет следовать, что посетитель побывал во всех залах, причем бесконечное количество раз). Пусть это не так. Тогда можем зафиксировать один из залов  $a \in A$ , у которого есть хотя бы один соседний зал из множества  $B$ . Так как  $B$  конечно, то с некоторого момента  $t_1$  посетитель уже не зайдет ни разу ни в один из залов  $B$ ; пусть к моменту  $t_1$  в каждом из залов множества  $B$  посетитель побывал не более  $n$  раз. После этого в некоторый момент  $t_2 \geq t_1$  окажется, что посетитель побывал в каждом из залов множества  $A$  более  $n$  раз (так как  $A$  конечно). В некоторый момент после  $t_2$  посетитель окажется в зале  $a$ . Далее он должен выбрать для посещения соседний зал из  $B$  (так как в залах из  $B$  он к этому моменту побывал не более  $n$  раз, а в залах из  $A$  – более  $n$  раз) – это противоречит тому, что с момента  $t_1$  посетитель не заходит в залы множества  $B$ .

С.Волчёнков, П.Кожевников

**M2075.** *Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?*

**Ответ:** нет, не обязательно.

Рассмотрим, например, правильный икосаэдр. Пять его граней, имеющие общую вершину, являются боковыми гранями правильной пятиугольной пирамиды. Центры этих граней образуют правильный пятиугольник, стороны которого параллельны сторонам основания пирамиды. Поэтому ребра икосаэдра параллельны

ребрам додекаэдра, образованного центрами его граней. Следовательно, параллельно перенеся ребра икосаэдра, можно получить додекаэдр.

А.Заславский

**M2076.** *Найдите все функции  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , удовлетворяющие при всех  $x \neq 0$  и  $y$  равенству*

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

**Ответ:**  $f(x) = \begin{cases} c\left(x - \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, c \in \mathbf{R}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Рассмотрим исходное уравнение

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1)$$

Положим в (1)  $x = 2, y = 0$ , получим  $f(0) = 0$ .

Положим в (1)  $x = y = 1$ , получим  $f(1) = 0$ .

Положим в (1)  $y = 1$ , получим

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x). \quad (2)$$

Положим в (1)  $y = \frac{1}{x}$ . Тогда, с учетом (2), получим

$$\begin{aligned} xf\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f(x) &= f\left(\frac{1}{x^2}\right), \\ -xf(x) - \frac{1}{x}f(x) &= -f(x^2), \\ f(x^2) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)f(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Заменим в (1)  $x$  на  $x^2$  и  $y$  на  $y^2$ :

$$x^2f(y^2) - y^2f(x^2) = f\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right),$$

или, с учетом (3):

$$x^2\left(y + \frac{1}{y}\right)f(y) - y^2\left(x + \frac{1}{x}\right)f(x) = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

Вычтем из (4) уравнение (1), умноженное на  $\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$ , получим равенство для всех  $x$  и  $y$ , отличных от нуля:

$$y(x^2 - 1)f(y) - x(y^2 - 1)f(x) = 0. \quad (5)$$

Положим в (5)  $x = 2, y = -1$ , получим  $f(-1) = 0$ .

Для  $x, y$ , отличных от 0, 1 и -1, в (5) «разделим переменные»:

$$\frac{f(x)}{x - \frac{1}{x}} = \frac{f(y)}{y - \frac{1}{y}}.$$

Левая сторона не зависит от  $y$ , а правая – от  $x$ , поэтому

$$\frac{f(x)}{x - \frac{1}{x}} = c, \text{ где } c \in \mathbf{R}, \text{ т.е. } f(x) = c\left(x - \frac{1}{x}\right) \text{ для } x,$$

отличных от 0, 1 и -1. Видно, что эта же формула верна и для  $x = 1$  и  $x = -1$ .

Проверкой убеждаемся, что найденные функции удовлетворяют нашему уравнению.

Э.Туркевич

**M2077.** Найдите наименьшее натуральное число  $k$ , обладающее следующим свойством: в любой таблице  $n \times n$ , заполненной действительными числами, можно увеличить не более  $k$  чисел так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах стали равными.

**Ответ:**  $2n - 2$ .

Покажем, как в таблице можно уравнивать суммы чисел во всех строках и столбцах, сделав не более чем  $2n - 2$  операций увеличения числа в одной из клеток. Без ограничения общности считаем, что строки в таблице идут сверху вниз в порядке убывания сумм:  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ ; а столбцы идут слева направо в порядке убывания сумм:  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ . Для определенности считаем, что  $A = c_1 \geq r_1$ . Предположим, что после  $k$  операций суммы чисел в строках не возрастают сверху вниз, а суммы чисел в столбцах не возрастают слева направо, причем в  $s$  первых строках и  $t$  первых столбцах суммы равны  $A$ , где  $s + t \geq k + 1$ , а в остальных строках и столбцах суммы строго меньше  $A$ , т.е.  $A = r_1 = r_2 = \dots = r_s > r_{s+1} \geq \dots \geq r_n$  и  $A = c_1 = c_2 = \dots = c_t > c_{t+1} \geq \dots \geq c_n$ . (Заметим, что при  $k = 0$  это условие выполнено.) Равенство  $s = n$  может появиться только одновременно с равенством  $t = n$  (иначе  $c_1 + \dots + c_n \neq r_1 + \dots + r_n$ ), и в таком случае  $c_1 = \dots = c_n = r_1 = \dots = r_n = A$ , т.е. процесс закончен. Иначе  $s + t \leq 2n - 2$  (а значит,  $k \leq 2n - 3$ ), и на  $(k + 1)$ -й операции увеличим число в клетке на пересечении  $(s + 1)$ -й строки и  $(t + 1)$ -го столбца на меньшее из чисел  $A - r_{s+1}$ ,  $A - c_{t+1}$ . В результате хотя бы одна из сумм  $r_{s+1}$ ,  $c_{t+1}$  станет равной  $A$ , и после  $(k + 1)$  операций все нужные предположения выполнены. Продолжив процесс, получим, что не более чем через  $2n - 2$  операции все суммы будут равны  $A$ .

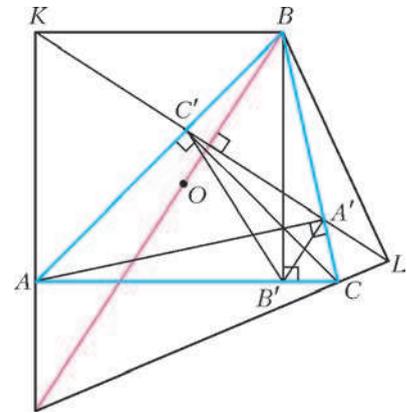
Докажем, что для таблицы, в первой строке которой стоят единицы, а остальные числа – нули, в каждой из строк, за исключением первой, мы должны увеличить не менее двух чисел (итого нужно сделать не менее  $2n - 2$  операций). Пусть после нескольких операций все суммы стали равны  $A$ ; тогда  $A \geq n$ , так как  $n$  – начальная сумма в первой строке. В  $i$ -й строке ( $i \geq 2$ ) хотя бы одно число увеличилось, иначе  $r_i = 0 < A$  – противоречие. Если же в  $i$ -й строке ( $i \geq 2$ ) увеличилось ровно одно число из  $j$ -го столбца, то сумма  $r_i$  останется меньше  $c_j \geq r_j + 1$  – противоречие.

*Замечание.* Отметим следующую интерпретацию задачи на языке линейной алгебры, которая, в частности, показывает, что для «почти любой» таблицы потребуется не менее  $2n - 2$  операций увеличения числа. Каждой таблице поставим в соответствие вектор-строку  $l$  длины  $2n$ , в которой запишем по порядку суммы чисел в строках и в столбцах:  $l = (r_1, r_2, \dots, r_n, c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Строка  $l$  лежит в  $(2n - 1)$ -мерном линейном подпространстве  $U$  пространства всех строк, заданном равенством  $\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^n c_j$ . (Нетрудно убедиться, что для любой строки из  $U$  найдется таблица, которой эта строка

соответствует.) Прибавление числа  $\lambda_{ij}$  к числу таблицы, находящемуся в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце, соответствует прибавлению к строке  $l$  строки  $v_{ij} \in U$ , умноженной на  $\lambda_{ij}$ , где  $v_{ij}$  – это строка, в которой  $i$ -й и  $(n + j)$ -й элементы равны 1, а остальные равны 0. Такими прибавлениями требуется получить строку  $\lambda v \in U$ , где  $v = (1, 1, \dots, 1)$ . Иначе говоря, строка  $l$  представляется в виде линейной комбинации  $l = \lambda v - \sum \lambda_{ij} v_{ij}$ . Ясно, что в правой части этого равенства будет заведомо не менее  $(2n - 1)$  слагаемых (т.е. операций прибавления не менее  $2n - 2$ ), если строка  $l$  не лежит ни в одном из подпространств, порожденных  $2n - 2$  векторами-строками из множества  $\{v, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nn}\}$ . Но таких подпространств конечное число, и каждое из них – размерности не выше  $2n - 2$ .

П.Кожевников

**M2078.** Точки  $A', B', C'$  – основания высот остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность с центром  $B$  и радиусом  $BB'$  пересекает прямую  $A'C'$  в точках  $K$  и  $L$  ( $K$  и  $A$  находятся по одну сторону от прямой  $BB'$ ). Докажите, что точка пересечения прямых  $AK$  и  $CL$  лежит на прямой  $BO$ , где  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .



В решении используются следующие известные свойства, связанные с ортоцентром (см. рисунок): треугольники  $ABC$ ,  $AB'C'$ ,  $A'BC'$  и  $A'B'C$  подобны; ортоцентр треугольника  $ABC$  является точкой пересечения биссектрис треугольника  $A'B'C'$ . Поскольку  $\angle B'C'C = \angle A'C'C$ , точка, симметричная  $B'$  относительно  $AB$ , лежит на прямой  $A'C'$ , т.е. совпадает с  $K$ . Аналогично  $B'$  и  $L$  симметричны относительно  $BC$ . Отсюда следует, что  $\angle AKC' = \angle AB'C' = \angle CB'A' = \angle CLA'$ , т.е. точка пересечения  $AK$  и  $CL$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $KL$ . Так как  $BK = BB' = BL$ , этот серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой угла  $KBL$ , которая в силу равенства  $\angle OBA = \angle B'BC = 90^\circ - \angle C$  проходит через  $O$ .

В.Протасов

**M2079.** Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел  $x, y, z$ , больших  $10^{10}$ , что  $x^8 + y^8 + z^8$  делится на  $x^4 + y^4 + z^4$ ?

**Ответ:** существует.

Подберем такие попарно взаимно простые  $a = x^2$ ,  $b = y^2$ ,  $c = z^2$ , что  $a^4 + b^4 + c^4$  делится на  $a^2 + b^2 + c^2$ . Из равенства

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + (b^2 + c^2))(a^2 - (b^2 + c^2)) + 2(b^4 + c^4 + b^2c^2)$$

следует, что  $a^4 + b^4 + c^4$  делится на  $a^2 + b^2 + c^2$  в точности тогда, когда  $2(b^4 + c^4 + b^2c^2)$  делится на  $a^2 + b^2 + c^2$ . Заметим, что  $2(b^4 + c^4 + b^2c^2)$  делится на  $2(b^2 + c^2 + bc)$  (поскольку  $b^4 + c^4 + b^2c^2 = (b^2 + c^2 + bc)(b^2 + c^2 - bc)$ ). Поэтому условие выполняется при  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$ , т.е. достаточно положить  $a = b + c$ . Соответственно, в качестве искомой тройки  $x, y, z$  можно взять пифагорову тройку чисел, каждое из которых больше  $10^{10}$ .

*Замечание.* Нетрудно показать, что ответ в задаче не изменится, если делимость  $x^8 + y^8 + z^8 : x^4 + y^4 + z^4$  заменить на  $x^{32} + y^{32} + z^{32} : x^8 + y^8 + z^8$ . Автору неизвестно, изменится ли ответ, если делимость  $x^8 + y^8 + z^8 : x^4 + y^4 + z^4$  заменить на  $x^{16} + y^{16} + z^{16} : x^8 + y^8 + z^8$ .

В. Сендеров

**M2080\***. Последовательность векторов  $\{\bar{e}_n\}$  на плоскости задана условиями:  $\bar{e}_1 = (0; 1)$ ,  $\bar{e}_2 = (1; 0)$ ,  $\bar{e}_{n+2} = \bar{e}_{n+1} + \bar{e}_n$  при  $n \geq 1$ . Отложим от начала координат все векторы, являющиеся суммами нескольких различных векторов из последовательности  $\{\bar{e}_n\}$ . Докажите, что множество концов отложенных векторов состоит из всех точек с целыми неотрицательными координатами, лежащих внутри некоторой полосы между параллельными прямыми (кроме точки  $(0; 0)$ ).

Обозначим через  $V$  множество всех ненулевых векторов на плоскости с целыми неотрицательными координатами. Пусть  $M$  – множество отложенных векторов. Достаточно указать вектор  $\bar{v}$  и действительные числа  $\alpha < \beta$  такие, что  $M$  является множеством всех векторов  $\bar{x} \in V$ , удовлетворяющих условию  $\alpha < (\bar{x}, \bar{v}) < \beta$  (здесь и далее  $(\bar{x}, \bar{y})$  обозначает скалярное произведение векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ).

Пусть  $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $\psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Положим  $\bar{v} = \bar{e}_1 + \varphi\bar{e}_2$ ,  $\bar{u} = \bar{e}_1 + \psi\bar{e}_2$ . Отметим, что эти векторы перпендикулярны:  $(\bar{v}, \bar{u}) = 1 + \psi\varphi = 0$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{e}_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\psi^{n-2} - \varphi^{n-2})\bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}(\psi^{n-1} - \varphi^{n-1})\bar{e}_2 = \\ &= \frac{1}{5}\psi^{n-2}\bar{u} - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n-2}\bar{v}. \end{aligned}$$

Это утверждение доказывается непосредственной индукцией. Отсюда следует, что

$$(\bar{e}_n, \bar{v}) = -\frac{(\bar{v}, \bar{v})}{\sqrt{5}}\varphi^{n-2} = \varphi^{n-1}.$$

Тогда для любого вектора  $\bar{x} \in M$ ,  $\bar{x} = \bar{e}_{i_1} + \dots + \bar{e}_{i_k}$ , получаем  $(\bar{x}, \bar{v}) = \varphi^{i_1-1} + \dots + \varphi^{i_k-1}$ . Учитывая, что  $\varphi < 0$

и  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , получаем, что

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{\varphi}{1-\varphi^2} = \varphi^1 + \varphi^3 + \varphi^5 + \dots < (\bar{x}, \bar{v}) < \\ &< \varphi^0 + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots = \frac{1}{1-\varphi^2} = 1 - \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого вектора  $\bar{x} \in M$  выполняются условия

$$-1 < (\bar{x}, \bar{v}) < 1 - \varphi, \quad \bar{x} \in V. \quad (1)$$

Осталось доказать обратное утверждение: из (1) следует  $\bar{x} \in M$ .

**Лемма.** Пусть вектор  $\bar{x} = (a; b) \in V$ ,  $-1 < a + b\varphi < 1 - \varphi$ . Тогда существуют такие целые  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$ , что  $a + b\varphi = \varphi^{i_1} + \dots + \varphi^{i_k}$ .

**Доказательство леммы.** Предположим противное. Для каждого  $k \in \mathbf{N}$  обозначим через  $C_k$  множество таких упорядоченных наборов целых неотрицательных чисел  $(i_1, \dots, i_k)$  (не обязательно различных), что  $a + b\varphi = \varphi^{i_1} + \dots + \varphi^{i_k}$ . Заметим, что  $C_{a+b}$  непусто:  $(\underbrace{0, \dots, 0}_a, \underbrace{1, \dots, 1}_b) \in C_{a+b}$ . Пусть  $k$  – наименьшее число такое, что  $C_k$  непусто.

Положим  $j_1 = \min\{i_1 \mid \exists i_2, \dots, i_k : (i_1, \dots, i_k) \in C_k\}$ ; для  $t = 2, \dots, k$  положим

$$j_t = \min\{i_t \mid \exists i_{t+1}, \dots, i_k : (j_1, \dots, j_{t-1}, i_t, i_{t+1}, \dots, i_k) \in C_k\}.$$

Тогда из последнего условия  $(j_1, \dots, j_k) \in C_k$ . Ясно, что  $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k$ . Если  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ , то требуемое представление есть  $a + b\varphi = \varphi^{j_1} + \dots + \varphi^{j_k}$ . Значит,  $j_t = j_{t+1}$  при некотором  $t$ .

Предположим, что  $j_t \geq 2$ . Заметим, что  $2\varphi^2 = 1 + \varphi^3$ ; поэтому, поменяв в наборе  $(j_n)$  числа  $j_t$  и  $j_{t+1}$  на  $j_t - 2$  и  $j_t + 1$ , мы получим набор  $(j_1, \dots, j_{t-1}, j_t - 2, j_t + 1, j_{t+1}, \dots, j_k) \in C_k$ , что противоречит выбору  $j_t$ . Поэтому  $j_k = 0$  или  $j_t = 1$ .

Пусть  $j_t = 0$ , тогда можно считать  $t = 1$ . Если  $j_s = 1$  при некотором  $s$ , то поменяем в наборе  $(j_n)$  числа  $j_1 = 0$  и  $j_s = 1$  на одно число 2; мы получим набор, принадлежащий  $C_{k-1}$ , что противоречит выбору  $k$ . Следовательно, такого  $s$  не существует. Поэтому в сумме

$$a + b\varphi = \varphi^{j_1} + \varphi^{j_2} + \dots + \varphi^{j_k} \quad (2)$$

сумма положительных слагаемых не меньше  $\varphi^{j_1} + \varphi^{j_2} = 2$ , а сумма отрицательных больше, чем  $\varphi^3 + \varphi^5 + \varphi^7 + \dots = \frac{\varphi^3}{1-\varphi^2} = -\varphi^2$ . Поэтому  $a + b\varphi > 2 - \varphi^2 = 1 - \varphi$ , что противоречит условию леммы.

Значит,  $j_t = 1$ . Аналогично предыдущему пункту, получаем, что  $j_s \neq 0$  (иначе можно поменять 0 и 1 на 2) и  $j_s \neq 2$  (иначе можно поменять 1 и 2 на 3) при всех  $s$ ; в частности, можно считать, что  $t = 1$ . В этом случае получаем, что в сумме (2) сумма отрицательных слагаемых не больше  $\varphi^{j_1} + \varphi^{j_2} = 2\varphi$ , а сумма положительных слагаемых меньше, чем  $\varphi^4 + \varphi^6 + \dots = -\varphi^3$ . Отсю-

да  $a + b\varphi < 2\varphi - \varphi^3 = -1$ , что опять же противоречит условиям.

Лемма доказана.

Завершим решение задачи. Если вектор  $\vec{x}$  с координатами  $(a; b)$  удовлетворяет условиям (1), то он удовлетворяет условиям леммы. Тогда, положив  $\vec{y} = \vec{e}_{i_1+1} + \dots + \vec{e}_{i_k+1} \in M$ , получаем  $(\vec{y}, \vec{v}) = \varphi^{i_1} + \dots + \varphi^{i_k} = (\vec{x}, \vec{v})$ , откуда  $(\vec{x} - \vec{y}, \vec{v}) = 0$ . С другой стороны, ненулевой вектор с целыми координатами не может быть перпендикулярен вектору  $\vec{v}$ , отношение координат которого иррационально. Поэтому  $\vec{x} = \vec{y} \in M$ , что и требовалось.

И. Богданов, И. Пушкарев

**Ф2088.** Автомобиль «Жигули» самой первой модели едет по огромной горизонтальной асфальтовой площади, описывая круг радиусом 200 м. Его скорость составляет при этом 20 м/с. При каком значении коэффициента трения между асфальтом и шинами автомобиля такое движение возможно? Представьте себе, что коэффициент трения ровно вдвое больше этого минимального значения. За какое время автомобиль сможет увеличить свою скорость до 20,5 м/с, не прекращая движения по кругу? Центр тяжести автомобиля находится на его оси симметрии на равных расстояниях от передней и задней осей.

Упомянутый автомобиль имеет силовой привод на задние колеса, передние же колеса – «опорные» и «поворотные», т.е. при повороте передних колес возникает сила трения, направленная перпендикулярно движению. При величине коэффициента трения  $\mu$  «разгоняющая» сила трения не превышает  $0,5\mu Mg$ , такой же будет максимальная величина «поворачивающей» силы трения – в случае упомянутого в задаче положения центра тяжести автомобиля. Строго говоря, это не совсем верное утверждение – про  $0,5Mg$ , но если центр тяжести считать расположенным совсем низко, то поправка невелика. При движении по окружности радиусом 200 м со скоростью 20 м/с нормальное (центростремительное) ускорение автомобиля равно  $(20^2/200) \text{ м/с}^2 = 2 \text{ м/с}^2$ , что возможно при минимальном значении коэффициента трения (в передних колесах)  $\mu_{\text{мин}} = 0,4$ .

Если теперь увеличить вдвое коэффициент трения, то «разгоняющая» сила трения (задние колеса) может составить  $0,4Mg$ , а «касательная» (тангенциальная) составляющая ускорения может доходить до  $0,4g = 4 \text{ м/с}^2$ . Тогда увеличение скорости на  $0,5 \text{ м/с}$  может произойти за время  $(0,5/4) \text{ с} = 0,125 \text{ с}$ .

А. Повторов

**Ф2089.** На гладком горизонтальном столе находится брусок кубической формы массой 2 кг. На его верхней поверхности лежит второй брусок, его масса 1 кг. Коэффициент трения между поверхностями брусков составляет 0,7. Большой брусок тянут влево горизонтальной силой 6 Н, малый – вправо горизонтальной силой 3 Н (эти две силы направле-

ны в противоположные стороны!). Найдите ускорения брусков.

Если трение достаточно велико, чтобы не допустить проскальзывания тел относительно друг друга, то их ускорения будут одинаковы и составят

$$a_0 = \frac{F - f}{M + m} = \frac{6 \text{ Н} - 3 \text{ Н}}{2 \text{ кг} + 1 \text{ кг}} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Для этого необходим минимальный коэффициент трения  $\mu$ , определяемый из соотношения

$$F - \mu mg = Ma_0,$$

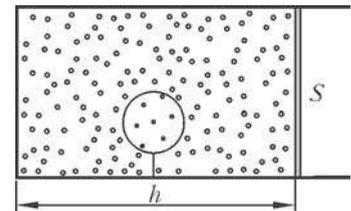
откуда

$$\mu = \frac{F - Ma_0}{mg} = 0,4.$$

В нашем случае коэффициент трения еще больше, следовательно, оба тела действительно едут вместе и имеют ускорения  $1 \text{ м/с}^2$ , направленные влево.

З. Рафаилов

**Ф2090.** Горизонтальный цилиндрический сосуд с теплопроводящими стенками, заполненный аргоном плотностью  $\rho = 1,7 \text{ кг/м}^3$ , закрыт подвижным поршнем и находится в комнате (см. рисунок). Площадь поршня  $S = 400 \text{ см}^2$ , расстояние от края цилиндра до поршня  $h = 50 \text{ см}$ . В сосуде ко дну на нити прикреплен шар объемом  $V_{\text{ш}} = 1000 \text{ см}^3$ , сделанный из тонкого нерастяжимого и теплопроводящего материала и заполненный гелием. Масса шара с гелием  $m = 1,2 \text{ г}$ . После того как протопили печь и воздух в комнате прогрелся, поршень переместился на расстояние  $\Delta h = 3 \text{ см}$ . Найдите изменение силы натяжения нити, удерживающей шар.



При передвижении поршня объем аргона изменился от значения  $V = Sh - V_{\text{ш}}$  до значения  $V + S\Delta h$ , увеличившись в  $\frac{V + S\Delta h}{V}$  раз. Во столько же раз уменьшилась плотность аргона и в конце процесса стала равной  $\rho \frac{V}{V + S\Delta h}$ . Следовательно, выталкивающая сила, действующая на шар, уменьшилась на величину

$\Delta F = \left( \rho - \rho \frac{V}{V + S\Delta h} \right) gV_{\text{ш}} = \rho \frac{S\Delta h}{V + S\Delta h} gV_{\text{ш}} = \rho \frac{S\Delta h}{S(h + \Delta h) - V_{\text{ш}}} gV_{\text{ш}}$ .

$$\Delta F = \left( \rho - \rho \frac{V}{V + S\Delta h} \right) gV_{\text{ш}} = \rho \frac{S\Delta h}{V + S\Delta h} gV_{\text{ш}} = \rho \frac{S\Delta h}{S(h + \Delta h) - V_{\text{ш}}} gV_{\text{ш}}.$$

На такую же величину уменьшилась и сила натяжения нити, удерживающей шар. Поэтому изменение этой силы будет равно

$$\Delta N = -\rho \frac{S\Delta h}{S(h + \Delta h) - V_{\text{ш}}} gV_{\text{ш}} \approx -1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Н},$$

если только оно не превысит по величине начальную силу натяжения нити, т.е. если шар в конце нагревания не ляжет на дно цилиндра. Проверим это. Вначале сила натяжения нити была равна разности силы Архимеда и веса шара с гелием:

$$N = (\rho V_{\text{ш}} - m)g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} > |\Delta N|.$$

Значит, нить в конце останется натянутой, и наш ответ справедлив.

*Е.Простомолотова*

**Ф2091.** Три одинаковые батарейки напряжением 1,5 В каждая вначале не соединены друг с другом. Затем между каждым выводом батарейки и каждым из пяти оставшихся выводов подключают резистор сопротивлением 1000 Ом. Сколько всего получится резисторов? Какой ток при этом будет течь через каждую из батареек?

Предположим, что мы все-таки нарисовали эту сложную схему. Пусть потенциал отрицательного вывода первой батарейки равен нулю. Тогда, в силу полной симметрии схемы, потенциалы отрицательных выводов остальных двух батареек тоже нулевые (вместо нулевого значения можно взять любое фиксированное число, рассуждения от этого совершенно не изменятся), а все положительные выводы батареек будут иметь потенциалы +1,5 В. Все резисторы включены в схему, но токи текут только через те, потенциалы концов которых отличаются друг от друга. Таких резисторов в схеме ровно 9 штук, и через каждый течет ток  $1,5 \text{ В} / 1000 \text{ Ом} = 0,0015 \text{ А} = 1,5 \text{ мА}$ . Очевидно, что через каждую батарейку при этом течет ток 4,5 мА.

Кстати, резисторов в схеме всего 27 штук.

*А.Простов*

**Ф2092.** Школьник исследует резонанс в последовательном колебательном контуре, используя генератор звуковой частоты и высокоомный вольтметр переменного напряжения. Конденсатор имеет емкость 0,5 мкФ, индуктивность катушки равна 0,1 Гн. Сопротивление провода, которым намотана катушка, составляет 50 Ом. Вольтметр подключают параллельно конденсатору и изменяют частоту генератора. На какой частоте показания вольтметра будут максимальными? На какой частоте вольтметр покажет максимум, если подключить его к выводам катушки?

Воспользуемся представлением токов и напряжений в цепи переменного тока в виде комплексных чисел. В этом случае емкостное сопротивление конденсатора на частоте  $\omega$  составляет  $X_C = \frac{1}{i\omega C}$ , индуктивное сопротивление идеальной катушки равно  $X_L = i\omega L$  и полное сопротивление контура с учетом активного сопротивления катушки  $R$  составляет  $Z = X_C + X_L + R$ . Ток в цепи равен  $I = U/Z$ , а вольтметр, подключенный параллельно конденсатору, показывает

$$U_1 = IX_C = \frac{U}{1 + X_L/X_C + R/X_C} = \frac{U}{1 - \omega^2 LC + Ri\omega C}.$$

После перехода к модулю полученной величины показания вольтметра можно записать в виде

$$U_1 = \frac{U}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2}}.$$

Проще исследовать обратную функцию на минимум, попутно избавившись от корня квадратного и постоянного множителя. Нас интересует значение частоты, при котором функция  $(1 - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2$  имеет минимальное значение, причем частота эта должна быть немного ниже резонансной частоты идеального контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 4472 \text{ с}^{-1}.$$

Почему ниже? Ток в цепи максимален на «идеальной» частоте, на которой для последовательного контура емкостное и индуктивное сопротивления точно компенсируют друг друга, а напряжение вольтметра определяется произведением этого тока на емкостное сопротивление конденсатора, убывающее с ростом частоты. Возьмем производную нашей функции по частоте, приравняем ее нулю и получим значение резонансной частоты  $\omega_1$ :

$$\frac{d\left((\omega_1^2 LC - 1)^2 + R^2 \omega_1^2 C^2\right)}{d\omega_1} = 0,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{R^2 C}{2L}}}.$$

Эта частота примерно в 1,006 раз меньше резонансной частоты контура без потерь.

Совершенно аналогично проводится расчет для вольтметра, подключенного параллельно к катушке (точнее – к катушке индуктивности, соединенной последовательно с резистором сопротивлением  $R$ ; согласно условию задачи, этот резистор находится «внутри» катушки»). В этом случае ответ получается чуть больше частоты  $\omega_0$  – практически в те же 1,006 раз.

Интересно упомянуть, что при исследовании обычного дифференциального уравнения контура с потерями получается, что резонанс будет именно на пониженной частоте. Это недоразумение. Дело в том, что такое уравнение пишется для величины  $q$  – заряда конденсатора, что соответствует первому из рассмотренных нами случаев (вольтметр при этом показывает напряжение  $U = q/C$ ).

*А.Зильберман*

### Вокруг шестиугольника

В этой небольшой заметке мы решим задачу M2070 (условие ее напомним чуть позже) и заодно познакомимся с некоторыми замечательными геометрическими теоремами.

Сначала запасемся двумя почти очевидными, но очень полезными утверждениями (докажите их), которые будем использовать в дальнейшем.

1) Диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Тогда отношение площадей треугольников  $ABC$  и  $ADC$  равно отношению отрезков  $BO$  и  $DO$ .

2) Если у треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  углы  $A$  и  $A'$  равны или в сумме дают  $180^\circ$ , то отношение площадей

$$\text{этих треугольников равно } \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}.$$

Нам понадобится также известная

**Теорема Паппа.** На каждой из двух прямых  $l$  и  $l'$  возьмем по три точки:  $A, B$  и  $C$  на  $l$  и  $A', B'$  и  $C'$  на  $l'$  (рис.1). Тогда точки пересечения прямых  $AB'$  и  $A'B$ ,  $CA'$  и  $C'A$ ,  $BC'$  и  $B'C$  лежат на одной прямой.

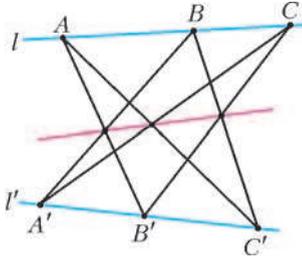


Рис. 1

Напомним теперь условие задачи M2070 (назовем ее теоремой о шестиугольнике).

**Теорема о шестиугольнике.** Главные диагонали шестиугольника, лежащего в пересечении треугольников  $P_1P_3P_5$  и  $P_2P_4P_6$  (рис.2), пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}},$$

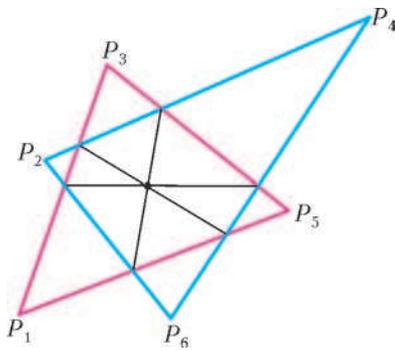


Рис. 2

где  $S_i$  – площадь маленького треугольника с вершиной  $P_i$ , примыкающего к шестиугольнику, а  $S_{135}$  и  $S_{246}$  – площади треугольников  $P_1P_3P_5$  и  $P_2P_4P_6$  соответственно.

**Доказательство.**

Пусть  $A, B, C, D, E$  и  $F$  – вершины шестиугольника (рис.3).

Предположим, что точки пересечения прямых  $CF, AD$  и  $BE$  образуют треугольник  $OO_1O_2$ , причем точка  $O$  лежит выше  $AD$ .

По теореме Паппа, примененной к тройкам точек  $\{P_1, B, C\}$  и  $\{P_6, F, E\}$ , получаем, что точка  $U$  пересечения отрезков  $P_1E$  и  $P_6C$  лежит на отрезке  $AO$ , т.е. тоже выше  $AD$ . Аналогично, точка  $V$  пересечения отрезков  $P_4B$  и  $P_3F$  лежит на отрезке  $OD$ , а значит, выше  $AD$ . Поэтому точки пересечения отрезков  $P_6C, P_1E, P_3F, P_4B$  с диагональю  $AD$ , которые мы обозначим через  $U_1, U_2, V_1, V_2$  соответственно, будут

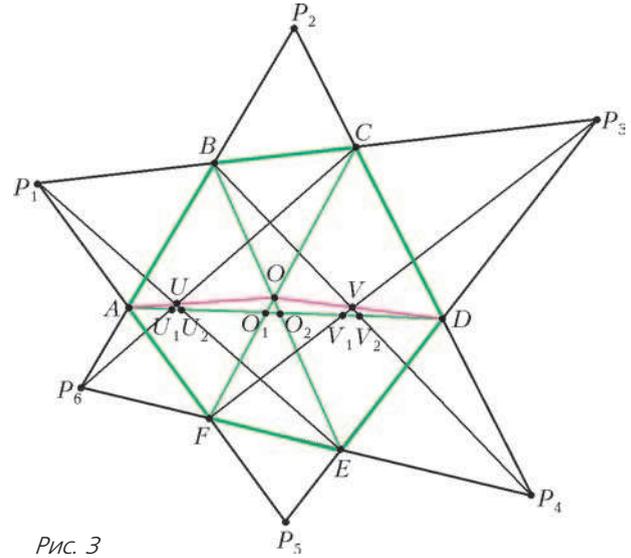


Рис. 3

располагаться на  $AD$  так, что  $U_1$  окажется ближе к  $A$ , чем  $U_2$ , а  $V_1$  окажется ближе к  $A$ , чем  $V_2$ . Но тогда произведение

$$d = \left( \frac{AU_1}{U_1D} \cdot \frac{U_2D}{AU_2} \right) \cdot \left( \frac{AV_1}{V_1D} \cdot \frac{V_2D}{AV_2} \right)$$

будет меньше 1 (поскольку выражения, стоящие в скобках, меньше 1). Но<sup>1</sup>

$$\frac{AU_1}{U_1D} = \frac{S_{P_6AC}}{S_{P_6DC}} = \frac{S_{P_6AC}}{S_{P_6P_2C}} \cdot \frac{S_{P_6P_2C}}{S_{P_6DC}} = \frac{P_6A}{P_2P_6} \cdot \frac{P_2C}{CD}$$

и, аналогично,

$$\frac{U_2D}{AU_2} = \frac{P_1P_3}{P_1A} \cdot \frac{ED}{P_3E}, \quad \frac{AV_1}{V_1D} = \frac{P_3P_5}{P_3D} \cdot \frac{AF}{P_5F},$$

$$\frac{V_2D}{AV_2} = \frac{P_4D}{P_2P_4} \cdot \frac{P_2B}{AB},$$

откуда, перемножая полученные равенства и группируя члены, находим, что

$$d = \frac{P_6A \cdot AF}{P_1A \cdot AB} \cdot \frac{ED \cdot P_4D}{CD \cdot P_3D} \cdot \frac{P_1P_3 \cdot P_3P_5}{P_5E \cdot P_3F} \cdot \frac{P_2C \cdot P_2B}{P_2P_6 \cdot P_2P_4} < 1,$$

т.е.

$$d = \frac{S_6}{S_1} \cdot \frac{S_4}{S_3} \cdot \frac{S_{135}}{S_5} \cdot \frac{S_2}{S_{246}} < 1.$$

Если точка  $O$  лежит ниже  $AD$ , получим  $d > 1$ . Если же точки  $O, O_1, O_2$  совпадают, то совпадают точки  $U_1$  и  $U_2$ , а также точки  $V_1$  и  $V_2$ , откуда полученное неравенство обращается в равенство, т.е.  $d = 1$ . Теорема доказана.

Теорему о шестиугольнике можно сформулировать и для других случаев расположения треугольников  $P_1P_3P_5$

<sup>1</sup> На самом деле, следующая цепочка равенств доказывает теорему Менелая: если прямая пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $X$  и  $Y$ , а продолжение стороны  $CA$  – в точке  $Z$ , то выполнено равенство  $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$ . В нашем случае взят треугольник  $ADP_2$  и прямая, проходящая через точки  $U_1, C$  и  $P_6$ . Кстати, одно из доказательств теоремы Паппа можно получить, применив теорему Менелая ... 5 раз (см. книгу Г.Кокстера и С.Грейтцера «Новые встречи с геометрией»).

и  $P_2P_4P_6$ , если просто определить вершину  $A$  шестиугольника как точку пересечения прямых  $P_1P_5$  и  $P_2P_6$ , вершину  $B$  шестиугольника – как точку пересечения прямых  $P_2P_6$  и  $P_3P_1$ , и т.д. Однако приведенное доказательство напрямую не проходит для всех случаев расположения треугольников. Поэтому было бы интересно получить другие доказательства этой теоремы, охватывающие сразу все случаи.

В качестве неплохой компенсации за затраченные усилия сейчас в несколько строк будет доказана знаменитая

**Теорема Бриансона.** *Два треугольника, описанные вокруг одной и той же окружности, пересекаются по шестиугольнику. Тогда главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке.*<sup>2</sup>

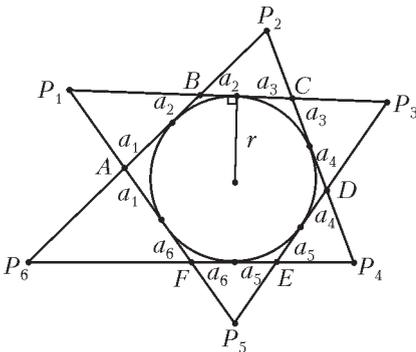


Рис. 4

**Доказательство.**

Пусть треугольники  $P_1P_3P_5$  и  $P_2P_4P_6$  пересекаются по шестиугольнику  $ABCDEF$ ,  $r$  – радиус вписанной в шестиугольник окружности (рис. 4). Длины касательных, проведенных к этой окружности из точек  $A, B, \dots, F$ , обозначим соответ-

ственно  $a_1, a_2, \dots, a_6$ , а из точек  $P_1, P_2, \dots, P_6$  – соответственно  $b_1, b_2, \dots, b_6$ .

Тогда площадь треугольника  $AP_1B$  выражается через его стороны и радиус вневписанной окружности  $S_1 = r \cdot (P_1A + P_1B - AB)/2 = r \cdot (b_1 - a_1 - a_2)$ ; с другой стороны, эту площадь можно найти по формуле Герона:  $S_1 = \sqrt{b_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot (b_1 - a_1 - a_2)}$ . Из этих двух равенств получаем:  $S_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{r}$ . Точно так же находим  $S_2, \dots, S_6$ .

Аналогично,

$$S_{135} = r \cdot (P_1P_3 + P_3P_5 + P_5P_1)/2 = r \cdot (b_1 + b_3 + b_5),$$

а по формуле Герона  $S_{135} = \sqrt{(b_1 + b_3 + b_5) \cdot b_1 \cdot b_3 \cdot b_5}$ , откуда  $S_{135} = \frac{b_1 \cdot b_3 \cdot b_5}{r}$ . Точно так же находим  $S_{246}$ . Отсюда

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6}{r^2} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}},$$

что и требовалось доказать.

Заменим в формулировке теоремы Бриансона слова «описанные вокруг одной и той же окружности» на слова «вписанные в одну и ту же окружность». Оказывается, снова получится верная теорема, которая также была известна Брианшону.

**Задача 1.** *Два треугольника, вписанные в одну и ту*

<sup>2</sup> Это один из вариантов обычной формулировки: «главные диагонали шестиугольника, описанного вокруг окружности, пересекаются в одной точке».

же окружность, пересекаются по шестиугольнику. Тогда главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке.

**Решение.** Сохраним обозначения из доказательства теоремы о шестиугольнике: пусть  $P_1P_3P_5$  и  $P_2P_4P_6$  – данные треугольники, вписанные в окружность,  $ABCDEF$  – шестиугольник, лежащий в их пересечении (рис.5).

Мы хотим доказать, что точки  $A, O$  и  $D$  лежат на одной прямой. Пусть  $W$  – точка пересечения отрезков  $P_1P_4$  и  $P_6P_3$ . Нам понадобится следующая

**Лемма.** *Точки  $A, O$  и  $D$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точки  $A, W$  и  $D$  лежат на одной прямой.*

**Доказательство.** Мы уже знаем, что тройки точек  $\{A, U, O\}$  и  $\{D, V, O\}$  образуют прямые. Точно так же (по теореме Паппа) тройки точек  $\{U, W, D\}$  и  $\{A, W, V\}$  образуют прямые (проверьте!).

Уберем теперь из рисунка все лишнее: оставим лишь четырехугольник  $UOVW$ , а также прямые  $UO$  и  $WV$ , пересекающиеся в точке  $A$ , и прямые  $VO$  и  $WU$ , пересекающиеся в точке  $D$  (рис.6). Из рисунка очевидно, что если  $A, O, D$  будут лежать на одной прямой, то и  $A, W, D$

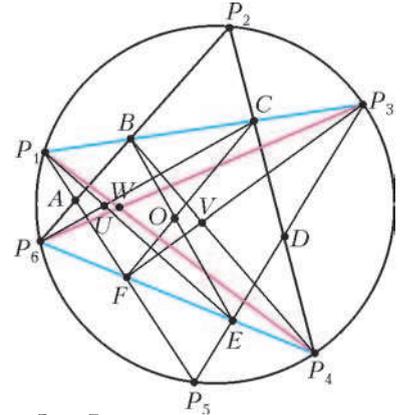


Рис. 5

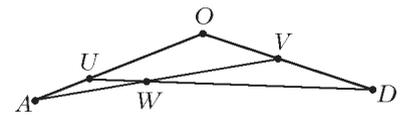


Рис. 6

тоже, и наоборот (в этих ситуациях все шесть точек окажутся на одной прямой). Лемма доказана.

Осталось доказать, что  $A, W$  и  $D$  лежат на одной прямой. Но это точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника  $P_1P_3P_5P_2P_4P_6$ . А значит, они лежат на одной прямой по теореме Паскаля. Ее доказательство (а также доказательство теоремы Паппа и другое доказательство теоремы Бриансона) можно прочитать, например, в книге Р.Куранта и Г.Роббинса «Что такое математика?».

Наше решение задачи 1 на этом закончено, но история этой задачи не кончается.

Попробуйте самостоятельно решить такую задачу:

**Задача 2.** *Главные диагонали данного шестиугольника пересекаются в одной точке, если шестиугольник, образованный точками пересечения неглавных диагоналей данного, вписан в окружность.*

Дело в том, что задачи 1 и 2 – следствия интересного факта из проективной геометрии, который мы назовем теоремой о соответствии. Но сначала небольшое определение: договоримся два шестиугольника называть *сопряженными*, если один из них образован точками пересечения неглавных диагоналей другого (рис.7). У каждого шестиугольника есть два сопряженных с ним. Шестиугольники не обязательно должны быть выпук-

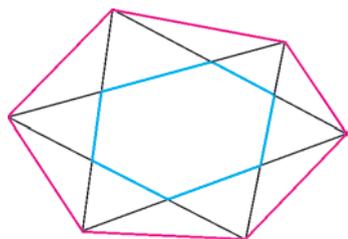


Рис. 7

лыми – от всех появляющихся в дальнейшем шестиугольников будем требовать лишь выполнения одного условия – никакие три вершины шестиугольника не лежат на одной прямой.

**Теорема о соответствии.** Главные диагонали

данного шестиугольника  $\alpha$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения противоположных сторон сопряженного с ним шестиугольника  $\beta$  лежат на одной прямой.

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – сопряженные шестиугольники. Теорема разбивается на два случая:

1)  $\beta$  образован точками пересечения неглавных диагоналей  $\alpha$ ;

2)  $\alpha$  образован точками пересечения неглавных диагоналей  $\beta$ .

В первом случае мы получаем знаменитую теорему Дезарга (и обратную к ней).

Во втором случае рассуждаем так: если обозначить шестиугольник  $\beta$  через  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , то по лемме из задачи 1 главные диагонали шестиугольника  $\alpha$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения противоположных сторон шестиугольника  $P_1P_5P_3P_6P_2P_4$  лежат на одной прямой. Для завершения доказательства можно воспользоваться критерием Паскаля, который утверждает, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда его вершины лежат на конике – кривой, задаваемой на плоскости многочленом второй степени (примеры коник: окружность  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , парабола  $y - x^2 = 0$ , гипербола  $xy - 1 = 0$ ). Видно, что порядок, в котором берутся вершины шестиугольника, не имеет значения. Кстати теорема Паппа – вырожденный случай критерия Паскаля, когда вершины шестиугольника (рис.1)  $AC'BA'SB'$  лежат попеременно на прямых  $l$  и  $l'$ ; ведь объединение двух прямых – тоже коника, ее можно задать уравнением  $l(x, y) \cdot l'(x, y) = 0$ , где  $l(x, y) = 0$  – уравнение прямой  $l$ , а  $l'(x, y) = 0$  – уравнение прямой

$l'$ . Правда, мы договорились такие шестиугольники (а значит, и такие коники) не рассматривать.

Доказательство критерия Паскаля можно прочитать в статье Н.Б.Васильева «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые» в «Кванте» №8 за 1987 г. Там изложен совсем другой подход к задачам такого рода. Очень советуем изучить эту статью!

Теорема Бриансона также верна, если треугольники описаны вокруг эллипса, гиперболы или параболы. Оказывается, теоремы Паскаля и Бриансона следуют друг из друга – подробности смотрите в уже упоминавшейся книге Куранта и Роббинса, там же можно найти доказательство теоремы Дезарга и много интересного материала о кониках. На языке коник теорема о соответствии следует из такого замечательного факта: если два треугольника описаны вокруг одной и той же коники, то они и вписаны в одну и ту же конику (и наоборот). Но доказательство этого факта, как и подробная беседа о кониках, – тема отдельной статьи. Упомянем лишь, что он тесно связан с одним случаем знаменитой теоремы Понселе. Пусть у нас есть треугольник  $ABC$ , вершины которого лежат на конике  $\Gamma_1$ , а стороны касаются коники  $\Gamma_2$  (например,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  могут быть соответственно описанной и вписанной окружностями этого треугольника, а вообще говоря, каждая из  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  может быть эллипсом, параболой или гиперболой). Теорема Понселе в этом случае утверждает, что если взять любую другую точку  $A'$  на конике  $\Gamma_1$  и провести из нее две касательные к конике  $\Gamma_2$ , вторично пересекающие конику  $\Gamma_1$  в точках  $B'$  и  $C'$ , то прямая  $B'C'$  тоже будет касательной к конике  $\Gamma_2$ . О теореме Понселе можно прочитать в книге А.Акопяна и А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка».

Завершим эту заметку интересной сложной задачей, взятой из русского издания книги «Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly».

**Задача 3.** Точки  $P_1, P_2, \dots, P_6$  лежат на одной конике тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$S_{612}S_{234}S_{456}S_{135} = S_{123}S_{345}S_{561}S_{246}$$

(где  $S_{ijk}$  обозначает площадь треугольника  $P_iP_jP_k$ ).

С.Дориченко

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

### Головоломки в бутылках

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Голландский изобретатель Уилл Страйбос неистощим на придумывание все новых и новых головоломок. Он неоднократно побеждал на соревнованиях изобретателей, а всего на его счету несколько сотен оригинальных игрушек. Коллекция головоломок, собранная Стайбосом, едва умещается на трех этажах дома в городе Венло на юге Нидерландов, где он живет. Среди его изобретений особое место занимают головоломки в бутылках. Тут ему нет равных в мире.

Многим, наверное, знакомы бутылки с красивыми парусниками внутри. Это старинное искусство существует несколько веков. Детально разработаны специальные приемы сборки мо-

делей, есть знаменитые на весь мир мастера-кораблестроители моделей в бутылках. Но это не головоломки, потому что помещенные внутрь парусники нельзя вынуть, а затем невредимыми вернуть обратно.

Головоломки Уилла Страйбоса выглядят не менее загадочно, чем корабли. Не может не вызвать удивление, как внутрь бутылки попали предметы, размеры которых больше диаметра горлышка. При этом изобретатель головоломок утверждает, что можно открыть замок ключом, когда оба они спрятаны внутри бутылки и не проходят через горлышко, что зацепленные друг за друга иголку, нитку и булавку удастся вынуть из бутылки вместе с наперстком, а затем вернуть на прежнее место. При этом, как и при решении любых головоломок запрещено пользо-

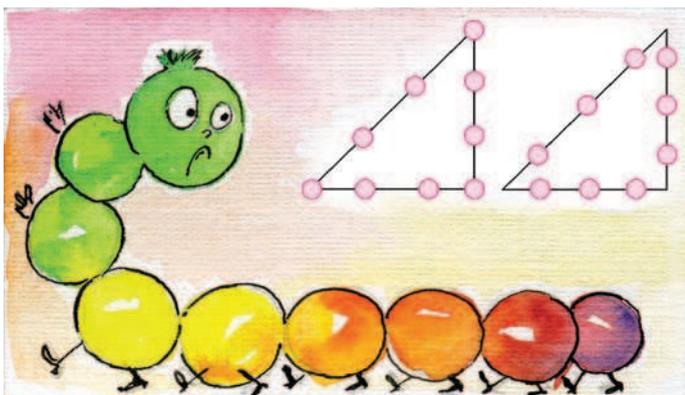
(Продолжение см. на с. 35)

# Задачи

1. Расставьте все цифры от 1 до 9 по кружочкам левого треугольника так, чтобы выполнялось равенство

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

где  $c$  – сумма цифр, расположенных на гипотенузе,  $a, b$  – суммы цифр, расположенных на катетах.



Можно ли это сделать для кружочков правого треугольника?

*М.Ахмеджанова*

2. Среди 999999 автобусных билетов с шестизначными номерами *счастливыми* считаются те, у которых сумма первых трех цифр совпадает с суммой трех последних. *Несчастливыми* будем называть билеты, в номерах которых содержатся ровно три подряд идущие



щие шестерки. Сколько билетов являются одновременно и счастливыми, и несчастливыми?

*А.Ряховский*

3. Докажите, что если  $a, b, c$  – нечетные числа, то хотя бы одно из чисел  $ab - 1, bc - 1, ca - 1$  делится на 4.

*В.Сендеров*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



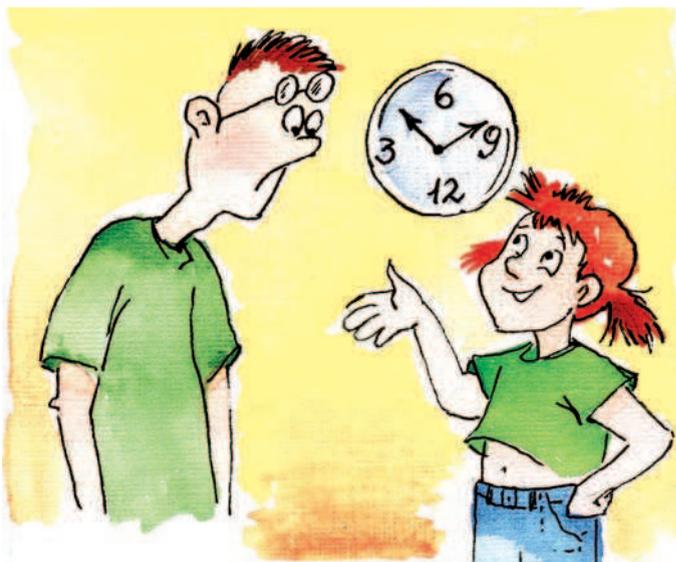
4. Окружность с центром на диагонали квадрата проходит через одну из его вершин и пересекает его стороны так, как показано на рисунке. Чему равен угол, отмеченный красной дугой?

*В.Произволов*



5. Как вы думаете, чем бы отличались часы от ныне существующих, если бы древний изобретатель часов жил не в северном, а в южном полушарии Земли?

*Е.Соколов*



Иллюстрации Д.Гришуковой

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Имеются 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивые. Фальшивые монеты легче, чем настоящие, и имеют одинаковые массы (массы настоящих монет тоже одинаковы). Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 18 настоящих монет?

В.Петрашев

2. Докажите, что для любого  $n$ -элементного множества ( $n > 0$ ) количество его подмножеств, каждое из которых содержит четное количество элементов, равно количеству его подмножеств, каждое из которых содержит нечетное количество элементов.

В качестве примера на рисунке приведены все подмножества 3-элементного множества шахматных фигур:

Исходное множество:



Подмножества с четным количеством фигур:



Подмножества с нечетным количеством фигур:



В.Сендеров

3. На бесконечной в обе стороны клетчатой полоске стоят три фишки так, как показано на рисунке. Разрешается добавить в любые три клетки по фишке, если одна из этих клеток находится ровно посередине между двумя другими. Также разрешается убрать по



одной фишке из трех клеток, удовлетворяющих тем же требованиям. Можно ли при помощи данных действий убрать все фишки с полоски?

А.Грибалко

4. Для каких натуральных  $n \geq 2$  существует такое натуральное  $m$ , что

$m$  делится на  $n$ ,  
 $m + 1$  делится на  $n - 1$ ,  
 $m + 2$  делится на  $n - 2$ ,  
 ...  
 $m + n - 1$  делится на 1?

И.Акулич

5. Некоторую точку, лежащую внутри параллелограмма, отразили симметрично относительно его сторон. Четыре новые точки оказались вершинами квадрата. Верно ли, что исходный параллелограмм является квадратом?

С.Дворянинов

## Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2007/08 учебного года

**Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:**

Гоммер Аргаман – Беэр-Шева (Израиль), школа «Эшель-Ханаси», 8 кл.,  
 Сопенко Никита – Тамбов, ФМЛ 14, 6 кл.,  
 Цыбышев Алексей – Самара, гимназия 1, 8 кл.

**и кружки:**

Математического клуба при университете им. Д.Бен-Гуриона в Негеве (Израиль), руководители П.Самовол, Й.Хейфец,

лицея 130, Новосибирск, руководитель Л.Н.Чусовитина,  
 гимназии 59, Улан-Удэ, руководитель Е.В.Батуева,  
 Центра дополнительного математического образования, Курган, руководители О.И.Южаков, Е.Г.Пушкарёва,  
 «Сигнум» при гимназии 5, Чебоксары, руководитель С.А.Иванов,  
 «Эрудит» при ФМШ 32, Астрахань, руководитель Т.М.Сергеева,  
 гимназии 1, Самара, руководитель А.А.Гусев.

**Жюри конкурса отмечает также хорошие работы школьницы**

Галямовой Оксаны, Белорецк, гимназия 14, 8 кл.

**и следующих кружков:**

Центра дополнительного образования, Нижнекамск, руководитель *Ф.Г.Калимуллина*,

лица 64, Омск, руководитель *Ю.Е.Рязанова*.

**Все победители конкурса награждаются DVD-дисками – электронным архивом журнала «Квант» с 1970 по 2006 год.**

# Проблемы дележки

**В.УФНАРОВСКИЙ**

**Д**ВА РАЗБОЙНИКА ДЕЛЯТ ДОБЫЧУ. ГРАБИТЬ БЫЛО ТАК славно и легко, делить оказалось намного сложнее!

Каждый из разбойников уверен, что именно он может разделить все поровну, но совершенно не верит

в способности коллеги. Наконец, старший из них говорит:

– Хорошо. У меня есть идея. Давай я попробую разделить добычу поровну.

– Да ты ведь не умеешь! – закричал младший.



Иллюстрация В.Иванюка

– Подожди немного, – ответил старший и разделил все надвое. – Мне кажется, я поделил как надо. Ты согласен?

– Нет, конечно. Это совершенно не равные части!

– Пусть так. И какая же из частей, по-твоему, больше?

– Вот эта! – не сомневаясь указал более юный грабитель.

– Прекрасно! Бери ее. Ты доволен?

– Конечно же! А ты?

– Вне всяких сомнений. Я уверен, что обе части одинаковые: ведь это я делил их.

Разбойники разошлись, довольные дележкой.

В следующий раз их было трое. И опять надо было поделить добычу поровну, но уже на троих. Как же это сделать?

Вначале старший грабитель попытался использовать ту же идею. Он поделил все на три (как ему казалось) равные части и предложил остальным разбойникам выбрать себе долю. Старший надеялся, что они выберут разные части – тогда он заберет оставшуюся, и все будут довольны. Но оба его коллеги захотели одну и ту же часть.

– Ладно, – сказал он. – Раз вы оба считаете, что это самая большая часть, выберите самую маленькую. Я ее возьму себе, а вы между собой как-нибудь разберетесь.

Это была хорошая идея, но, как на беду, теперь они выбрали разные части. И больше уже никто не знал, что делать. Пошли споры, потом выстрелы... Полиция появилась удивительно быстро, и разбойники были рады, что успели унести ноги. Но все трое продолжали размышлять: как же все-таки можно было поделить добычу по справедливости, чтобы каждый был уверен, что получил не меньше трети (даже если у всех разные точки зрения на то, что является третьей долей, а что – нет)?

На следующий раз грабителей было десять. Но теперь им предстояло разделить добычу на 10 частей! Старший рассказал оставшимся, как сложно было делить даже на три части, и предложил:

– Я думаю, надо позвать математика, иначе мы не справимся. У меня есть один хороший знакомый.

– Надо будет ему платить? – скривились прочие.

– Нет-нет, он это сделает бесплатно. Он очень любит решать сложные задачи. И будет доволен, если сумеет написать математическую статью об этом.

– Без наших имен?

– Без.

– Ну тогда пусть попробует, – нехотя согласились разбойники.

Математик и впрямь заинтересовался проблемой. Поразмыслив, он предложил следующее решение.

– Разбойники, – начал он, – каждый из вас уверен, что он (и только он) знает, сколько составляет  $1/10$  часть от этого хлама?

– Конечно, – несколько обиженно подтвердили они.

– Прекрасно! Тогда ты, – указал он на одного из грабителей, – отдели  $1/10$  этого. – Тот повиновался.

– Теперь ты, – указал он на другого. – Считаешь ли ты, что здесь больше  $1/10$ ?

– Нет, – ответил разбойник.

– Замечательно! Тогда ты, – указал он на следующего. – Считаешь ли ты, что здесь больше  $1/10$ ?

– Да, здесь слишком много, – проворчал тот.

– Тогда уменьши долю, сделай в точности  $1/10$ ! – попросил математик. Разбойник несколько уменьшил кучку.

– Вот теперь здесь действительно  $1/10$ , – прокомментировал он.

– А вы, – обратился математик к двум первым разбойникам, – теперь можете быть уверены, что в кучке даже меньше  $1/10$ .

– Конечно, из нее ведь убрали немного, – подтвердили они.

– Ну и отлично! Тогда я спрошу следующего, – и он выбрал нового разбойника, – считаешь ли ты, что здесь больше  $1/10$ ?

И таким образом математик опросил каждого, предлагая уменьшить долю тем, кто считал, что она слишком велика. Когда последний грабитель был опрошен, математик опять обратился ко всем.

– Итак, среди вас не могло остаться никого, кто считает, что в этой кучке сейчас больше  $1/10$  добычи.

– Естественно, – ответили разбойники. Каждый, кто думал, что часть велика, уже уменьшил ее.

– Чудесно! И кто же последним уменьшил эту долю?

– Я, – отозвался юный разбойник.

– Значит, когда ты делил, ты был уверен что это и есть  $1/10$ .

– Я и сейчас в этом уверен. Ведь никто не уменьшил ее после меня.

– Вот и бери ее себе! Ты считаешь, что это  $1/10$  добычи, остальные же уверены, что это не больше.

– Да! – радостно согласились разбойники. Они начали понимать.

– Ну и хорошо! Теперь у нас более простая задача: разделить остаток на 9 частей. Начнем так же. Ты, – указал математик на одного из грабителей, – отдели  $1/9$  этого...

И тем же способом математик выдал долю еще одному грабителю, затем – еще одному, и вскоре уже каждый разбойник довольно улыбался, оказавшись со своей частью добычи.

На радостях разбойники достали большую бутылку старого хорошего вина и устроили празднество. Внезапно математик предложил:

– А хотите, я и вино разделю поровну?

– Нет, это слишком долго.

– Не волнуйтесь, я справлюсь быстро.

– Как это? – не удержались они от любопытства.

– Очень просто. Я сам не пью, поэтому делить надо опять на десятерых. Уверен ли каждый из вас, что он сможет определить, сколько составляет  $1/10$  часть содержимого этой бутылки?

– Никаких проблем!

– Тогда я потихонечку начну наливать вино из бутылки в этот кубок. Как только кто-нибудь решит, что это как раз  $1/10$ , он должен немедленно крикнуть и остановить меня. Договорились?

– Попробуем, – ответили разбойники несколько озадаченно. Они никогда еще не пили так странно.

Математик начал наполнять кубок. Он становился все более и более полным. Наконец, один из разбойников не выдержал и закричал:

– Стоп! Иначе будет слишком много. Сейчас как раз  $1/10$  часть бутылки!

– Но другие так не думают? – спросил математик.

– Конечно, нет, – подтвердил разбойник, – они ведь молчали, а значит, считают, что там меньше  $1/10$ .

– Ну и пусть! Тогда это твоя доля! А мы продолжим, – сказал математик и начал наполнять следующий кубок.

– А если несколько человек крикнут вместе? – заволновался вдруг один из оставшихся.

– Отдадим долю любому из них и продолжим делить. Все равно в итоге каждому достанется не меньше  $1/10$  с его точки зрения, – успокоил всех математик. Разбойники задумались на некоторое время.

– Гениально! И так просто, – сказал, наконец, самый сообразительный из них. – А почему мы не могли так делить добычу? – спросил он.

А что ты думаешь, читатель?

### Комментарии

Сказка ложь, да в ней намек. Надеемся, читатель понял задачу и красивое решение, представленное в этой сказке.

Алгоритм дележки, который описан в ней, конечно же не единственный. Возможно, читателю удалось придумать свой. Но если нет, пусть следующие задачи помогут ему увидеть другие способы деления.

**Задача 1.** Главная проблема в делении на троих была вот в чем: когда один из разбойников разделил добычу на три части, самую большую часть двое оставшихся указали одинаково, а самую маленькую – по-разному. Выйти из этой ситуации можно так: два оставшихся разбойника делят самую большую часть между собой, и еще каждый из них делит среднюю (со своей точки зрения) часть пополам с первым разбойником. Покажите, что при таком делении каждый должен быть доволен.

**Задача 2.** Убедитесь, что следующий алгоритм тоже решает проблему для троих. Двое делят всю добычу между собой. Затем третий делит долю каждого из первых двух разбойников на три части. Двое первых выбирают по меньшей части из своих трех частей и отдают третьему.

**Задача 3.** Работает ли такой алгоритм для четверых: сначала трое делят все между собой, затем каждый из них делит свою порцию на четыре части, после чего последний разбойник забирает по лучшему куску у каждого? Заметьте, что алгоритм подобен предыдущему, но все же слегка отличается.

**Задача 4.** Сформулируйте и проверьте алгоритм для  $N$  разбойников на основе идей из предыдущих задач.

**Задача 5\*.** Предположим, что в шайке есть атаман, выставивший дополнительное условие – он должен

получить не меньше любого другого разбойника (со своей точки зрения). Предложите соответствующий способ дележки: а) для случая трех разбойников; б) для произвольного их числа.

**Задача 6\*\*.** Удастся ли трем завистникам поделить добычу так, чтобы каждый был уверен, что никто не получил больше, чем он сам? Можно ли придумать способ дележки для любого числа завистников?

Заметьте, что эта задача более сложная, чем исходная задача о трех разбойниках или задача об атамане. Для тех, кто хотел бы углубиться в математические тонкости, мы рекомендуем заглянуть в Интернет на страницу

<http://www.turgor.ru/lktg/1999/razbr.php>

(где приведен целый исследовательский цикл задач о разбойниках, предлагавшийся в 1999 году участникам XI Летней конференции Турнира городов).

Есть еще несколько деликатных вопросов. А что если разбойники начнут жульничать, например, кооперироваться между собой и делить не поровну? Может ли это быть выгодно? Но это тема для отдельного разговора.

В предыдущих задачах неявно предполагалось, что добыча *безгранично делима* (т.е. каждый набор сокровищ может быть разделен на любое число частей, равных с точки зрения данного разбойника).

А что делать, если добыча не очень-то делима? Скажем, как делить телевизор или алмаз? Если у разбойников имеются деньги, можно предложить такой элегантный алгоритм. Каждый разбойник оценивает каждый предмет в сумму денег, которую, по его мнению, предмет стоит. Тот, кто дает наибольшую сумму, ее и платит и забирает вещь себе. После этого все выплаченные деньги делятся поровну.

Вот другая модификация этой идеи, которую автор с успехом использовал на практике. Есть покупатель и есть продавец. Продавец хочет продать подороже, но не обязан продавать. Покупатель хочет купить подешевле, но не обязан покупать. Вместо того чтобы торговаться, можно предложить такой метод. Продавец пишет на бумажке минимальную сумму  $A$ , за которую он готов отдать товар, а покупатель – максимальную сумму  $B$ , которую он готов заплатить. Затем они смотрят на бумажки. Если  $A > B$ , то сделка не состоится. Иначе ценой будет среднее арифметическое, и оба будут довольны. Разумеется, и в этом, и в предыдущем алгоритме вопрос о жульничестве особо интересен.

И последнее. А как на практике разделить действительно поровну полный стакан воды (считая стакан цилиндром)? Очень просто: медленно (чтобы поверхность была плоской) отливать воду, пока не увидишь начало дна. Из соображений симметрии в стакане как раз и останется половина.

## Физика в «Рассказах о животных»

Недавно вышло очередное издание книги известного писателя и знатока природы Канады и Северной Америки Э.Сетона-Томпсона «Рассказы о животных». В книге как живой предстает перед читателем мир этой далекой от нас части света. Героями его рассказов – то трогательных, то трагических – являются звери, повадки которых прекрасно известны.

Но посмотрим на книгу через призму физики – ведь каждое явление природы, в том числе и живой, имеет и физическую сторону, не сводясь, естественно, к ней полностью.

Те, кто читал эту книгу (что я всем искреннее советую сделать), конечно, помнят рассказ «Джек – Боевой Конек. История кролика». В нем забавно описывается «соревнование в беге» кролика и собак. Когда собаки начинают наступать кролика в беге по прямой, он приступает к лавированию, резко меняет направление бега, увертываясь от них. На его сторону встает известное свойство тел – инертность. Собака массивнее кролика, поэтому ей труднее быстро изменять величину и направление скорости своего тела, чтобы преследовать кролика, чем он инстинктивно и пользуется. Из других благоприятствующих кролику при такой тактике факторов следует назвать прыжки, как обычный способ передвижения, и трудность предугадывания очередного его маневра.

В рассказе о почтовом голубе Арно герой становится жертвой соколов-голубятников. Этот хищник пикирует на свою добычу и, разогнавшись, ударяет ее лапами сверху в спину. Причем убивают птицу не когти, которым противопостоят упругое и прочное оперение, а переломы шейных позвонков, причина которых – инертность ее головы. Толчок лап сокола сообщает телу птицы настолько большое ускорение, что ее шея не может передать его голове, так как для этого к шее должна быть приложена сила, превышающая ее прочность в этом направлении.

Описывая происходящее, часто говорят: «В то время как туловище птицы получило толчок (ускорение), голова продолжает двигаться по инерции». Это верно только для самого первого момента времени после удара, когда действующая на голову птицы со стороны туловища сила мала и не успела сообщить ей заметное ускорение.

В подобной ситуации может оказаться и человек, но угрожают ему уже не хищники, а изобретенные им самим средства передвижения. Это часто происходит с пассажирами, сидящими в автомобиле, при наезде на него сзади другого транспортного средства (так называемый «удар хлыстом»). Спасти шейные позвонки от повреждения в этом случае призваны подголовники, устанавливаемые на спинках сидений.

При описании поведения преследуемой собаками лисы Сетон-Томпсон прошел мимо одного небезынтересного для нас факта – а к такому приему прибегают как лисы, так и некоторые другие животные. Он заключается в том, что лиса, уходя от погони и резко меняя для этого направление движения, умело использует свой хвост. Поворачивая в одну сторону, она с силой отводит хвост в противоположном направлении. Однако всякому действию всегда есть противодействие, поэтому хвост в свою очередь действует на заднюю часть туловища животного с силой, такой же по величине, но противоположной по направлению. Благодаря этому, животному удается совершить поворот, не допуская «заноса» задней части тела.

Вы скажете, что приведенный в движение хвост не бросают на произвол судьбы. Его нужно остановить и затем заставить двигаться со всем телом в противоположную сторону, для



Рисунок Э.Сетона-Томпсона

чего нужно снова приложить к нему силу. Это так. Но дело в том, что рассматриваемый прием позволяет, осуществив быстро поворот, растянуть во времени затрату на него сил, не перегружая мышцы и не превышая предел силы сцепления лап с грунтом. Для этого вначале у хвоста «занимают» некоторое количество движения, а немного погодя «возвращают» ему его.

Кроме того, если преследователь сосредоточил внимание на самой близкой к нему части догоняемой жертвы – на ее хвосте, то движение хвоста в сторону, противоположную повороту, сбивает преследователя с толку. Неслучайно кончик хвоста имеет выделяющуюся белую окраску. Этим приемом, облегчающим повороты, пользуются многие животные с относительно массивным (по отношению к массе всего тела) хвостом, в том числе и хищники, например лучший бегун – гепард. И чем значительнее доля массы хвоста по отношению ко всей массе тела, тем лучшие результаты дает этот прием.

Натуралисты отмечают, что, пользуясь своим относительно массивным хвостом как рулем, или, точнее, противове- сом, тушканчик может изменять направление движения самым неожиданным образом, прыгая по сыпучему песку.

В одном из рассказов Сетон-Томпсон описывает, как его спутник – опытный охотник – определяет направление ветра, которое необходимо знать, чтобы незамеченным подойти к зверю. Для этого он смачивает одну сторону указательного пальца и, держа его вертикально, медленно поворачивает влажной поверхностью во все стороны. А затем делает вывод – ветер дует с той стороны, в направлении на которую палец чувствует наибольший холод. Далее автор заключает, что животные, видимо, поступают так же, только для этой цели им служит всегда влажный нос.

Обсудим это явление с точки зрения физики. С влажной поверхности происходит испарение жидкости, и при этом она охлаждается. Обдувающий воздух уносит испарившиеся молекулы от поверхности и препятствует возвращению их и унесенной ими энергии. Это усиливает испарение и способствует его охлаждению. Наиболее интенсивно этот процесс происходит с наветренной стороны, т.е. обращенной туда, откуда дует ветер.

Прочитайте и вы эту замечательную книгу. Безусловно, она доставит вам истинное наслаждение. А, может быть, вы подметите и другие примеры использования физических закономерностей. Хорошее знание физики способно открыть перед вами «секреты» не только научно-технических, но и художественных произведений.

В.Котов

# Пифагоровы треугольники

Прямоугольные треугольники, длины всех сторон которых выражаются натуральными числами, получили название пифагоровых – по имени великого математика древности Пифагора. Согласно комментатору знаменитых Евклидовых «Начал» Проклу Диадоху (ок. 410–485), Пифагор указал бесконечное множество таких треугольников. А именно: поскольку три натуральных числа  $m$ ,  $\frac{m^2-1}{2}$ ,  $\frac{m^2+1}{2}$ , где  $m$  – какое-либо большее 1 нечетное число, связаны равенством

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2, \quad (1)$$

то треугольник с длинами сторон, равными этим трем числам, – прямоугольный (современный школьник скажет: по теореме, обратной к теореме Пифагора). В частном случае  $m = 3$  получается треугольник с длинами сторон 3, 4, 5, известный еще в Древнем Египте.

Тождество (1) Пифагором или его учениками выводилось, скорее всего, так. Если  $n^2$  камешков расположить в виде квадрата (на рисунке 1 показан случай  $n = 3$ ), то, добавив к нему «каемку» (древние говорили – «гномон») из  $2n + 1$  камешков, мы получим расширенный квадрат из  $(n+1)^2$  камешков. Значит, если из  $2n + 1$  камешков также можно выложить квадрат, то сумма старого и добавленного квадратов дает третий квадрат – как раз то, что нужно. Полагая  $2n + 1 = m^2$  ( $m$  – нечетное), после очевидных преобразований получаем формулу (1).

Согласно Проклу, еще один класс пифагоровых треугольников описал знаменитый философ Платон, получив формулу

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2, \quad (2)$$

где натуральное число  $m$  может быть любым – как четным, так и нечетным. Эту формулу тоже можно вывести, рассуждая «на камешках». А именно: нарастим квадрат из  $(n-1)^2$  камешков не одним, а двумя последовательными гномонами, содержащими в совокупности  $2(n-1) + 1 + 2n + 1 = 4n$  камешков (рис. 2). Значит,  $(n-1)^2 +$

$+ 4n = (n+1)^2$ , и, полагая число  $n$  равным квадрату,  $n = m^2$ , получим требуемое.

Более общую формулу доказывает Евклид в десятой книге «Начал» (лемма к Предложению 28):

$$m^2 n^2 p^2 q^2 + \left(\frac{m^2 np - npq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 np + npq^2}{2}\right)^2, \quad (3)$$

где натуральные числа  $m$  и  $q$  одной четности,  $n, p$  – произвольные натуральные числа. Формулы Пифагора и Платона получаются из формулы Евклида при  $n = q = 1$  и  $p = 1$  (формула (1)), или  $p = 2$  (формула (2)).

Если числа  $n$  и  $p$  подобрать таким образом, чтобы число  $\frac{np}{2}$  оказалось точным квадратом, тогда можно сделать замену  $\frac{m^2 np}{2} = a^2$ ,  $\frac{npq^2}{2} = b^2$ , где  $a, b$  – некоторые натуральные числа, вследствие чего равенство (3) запишется так:

$$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2. \quad (4)$$

В одной из месопотамских глиняных табличек (рис. 3), датированной приблизительно 18 веком до нашей эры, содержится математический текст, который историки науки называют «Plimpton-322» – по



«Plimpton-322»

Рис. 3

имени Плимптоновской библиотеки Колумбийского университета в Нью-Йорке, где он хранится. В этой табличке приводится ряд из 15 троек чисел вида  $2ab$ ,  $a^2 - b^2$ ,  $a^2 + b^2$ , свидетельствующий о том, что пифагоровы числа занимали любителей точного знания еще в глубокой древности. Позже эти числа были предметом пристального внимания древнегреческого математика Диофанта (III в.) и его французского коллеги Пьера Ферма (1601–1665).

Условимся обозначать треугольник Пифагора со сторонами  $x, y, z$  символом  $(x, y, z)$ , считая, что на последнем месте в скобках стоит число, выражающее длину гипотенузы.

### Знаете ли вы, что...

- Из данного пифагорова треугольника  $(x, y, z)$  можно получить бесконечное множество подобных ему треугольников  $(kx, ky, kz)$ , где  $k$  – произвольное натуральное число.

- Среди подобных пифагоровых треугольников существует наименьший – треугольник, катеты которого выражаются взаимно простыми числами. Такой пифагоров треугольник называется *основным*.

- В основном пифагоровом треугольнике  $(x, y, z)$  одно из чисел  $x$  и  $y$  четное, а другое нечетное. Если  $y$  четное, то существуют такие взаимно простые числа  $m$  и  $n > n$  разной четности, что

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2.$$

- Читатель «Кванта» С.Ш. Кожегельдинов из Семипалатинска заметил, что предыдущую формулу можно немного изменить так, чтобы она описывала уже все основные пифагоровы треугольники. А именно, для любого основного пифагорова треугольника  $(x, y, z)$  найдутся такие взаимно простые числа  $m$  и  $n > n$ , что

$$x = \frac{m^2 - n^2}{(2, m - n)}, y = \frac{2mn}{(2, m - n)}, z = \frac{m^2 + n^2}{(2, m - n)}$$

(здесь в знаменателях формул круглыми скобками обозначен наибольший общий делитель чисел, перечисляемых через запятую). Если числа  $m$  и  $n$  разной четности, получается треугольник с четным  $y$ , а если  $m$  и  $n$  – одной четности, получается треугольник с четным  $x$ .

- Всего существует 50 различных пифагоровых треугольников, длины сторон которых меньше 100.

- Существует единственный пифагоров треугольник, стороны которого выражаются последовательными натуральными числами, – это  $(3, 4, 5)$ . Все пифагоровы треугольники, стороны которых составляют арифметическую прогрессию, имеют вид  $(3k, 4k, 5k)$ , где  $k$  – натуральное.

- Тождество Месснера

$$(10n - 5)^2 + (50n(n - 1) + 12)^2 = (50n(n - 1) + 13)^2$$

(здесь  $n$  – произвольное натуральное число) задает множество пифагоровых треугольников, у которых один из катетов на 1 меньше гипотенузы. Есть и другие пифагоровы треугольники, обладающие таким свойством, например  $(2n + 1, 2n(n + 1), 2n(n + 1) + 1)$ . Существует также бесконечно много пифагоровых треугольников, у которых катеты выражаются последовательными натуральными числами.

- Во всяком пифагоровом треугольнике хотя бы один из катетов делится на 3 и хотя бы один из катетов делится на 4 (это может быть один и тот же катет).

Отсюда следует, что площадь всякого пифагорового треугольника кратна 6.

- В каждом пифагоровом треугольнике хотя бы одна из сторон делится на 5.

- Два пифагоровых треугольника, имеющих одинаковые площади и равные гипотенузы, равны.

- Теорема Ферма.** Для каждого натурального числа  $n$  существует  $n$  пифагоровых треугольников, имеющих одинаковые площади, но попарно различные гипотенузы.

- Среди основных пифагоровых треугольников существует бесконечно много таких, у которых один из катетов является квадратом натурального числа, однако совсем нет треугольников, у которых хотя бы две стороны были квадратами.

- Не существует пифагоровых треугольников, площади которых равны квадрату натурального числа.

- В 1643 году в письме к аббату Мерсенну Ферма предложил следующую задачу: найти пифагоровы треугольники, у которых гипотенуза и сумма катетов – квадраты. Ферма указал такой треугольник с наименьшей гипотенузой, имеющий, тем не менее, весьма внушительные размеры:

$$(4565486027761, 1061652293520, 4687298610289).$$

- Между пифагоровыми треугольниками  $(a, b, c)$  и рациональными точками дуги окружности  $x^2 + y^2 = 1$  в первой четверти системы координат (рис.4) можно установить однозначное соответствие, полагая

$x = \frac{a}{c}$  и  $y = \frac{b}{c}$ . Оказывается, что какие бы две точки надуге ни взять, между ними обязательно найдется точка с рациональными координатами, соответствующая некоторому пифагоровому треугольнику.

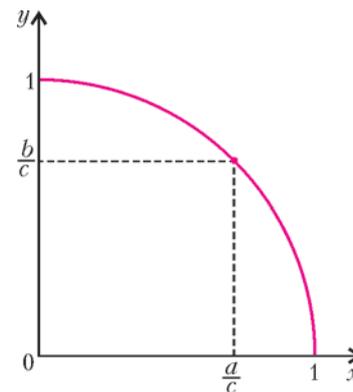


Рис. 4

Для произвольного угла  $\alpha$ ,  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , существует прямоугольный треугольник с рациональными сторонами и острым углом, сколь угодно близким к  $\alpha$ .

- Из каждого пифагорова треугольника можно получить прямоугольник, стороны и диагонали которого выражаются натуральными числами. В настоящее время неизвестно, существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны и диагонали которого выражаются натуральными числами.

Публикацию подготовил А. Жуков

Handwritten notes and diagrams on the right margin:

- Diagram of a right-angled triangle with hypotenuse  $c$  and legs  $a$  and  $b$ .
- Diagram of a right-angled triangle with hypotenuse  $c$  and legs  $a$  and  $b$ , with a point on the hypotenuse.
- Equation:  $\frac{m^2 - n^2}{2} = b$
- Equation:  $(a^2 - b^2)/2 = (a^2 - b^2)$

Handwritten notes at the top of the page:

- Equation:  $x = m^2 + n^2$
- Equation:  $y = 2mn$

Handwritten notes at the bottom of the page:

- Equation:  $m^2 - n^2 + (m^2 - n^2) = (a^2 - b^2)$

# О двух параллелограммах в треугольнике

Г. ФИЛИППОВСКИЙ

Речь пойдет о двух следующих параллелограммах в треугольнике  $ABC$ :  $OM_1E_1A$  и  $OM_1HE_1$  (рис.1). Здесь  $O$  – центр описанной окружности треугольника,  $H$  –

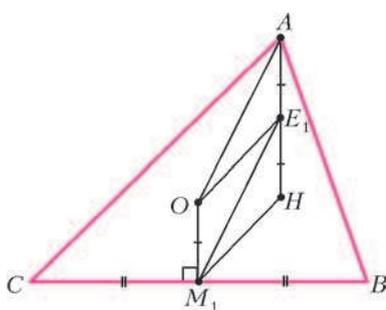


Рис. 1

точка пересечения его высот (ортоцентр),  $M_1$  – середина  $BC$  и  $E_1$  – середина  $AH$ .

Покажем, что четырехугольники  $OM_1E_1A$  и  $OM_1HE_1$  действительно являются параллелограммами. Опишем около треугольника  $ABC$  окружность  $\omega$  и проведем диаметр  $BD$  (рис.2). Очевидно,  $ADCH$  – параллелограмм ( $DC \parallel AH$ , поскольку оба отрезка перпендикулярны к стороне  $BC$ ; аналогично  $DA \parallel CH$ ),  $OM_1$  – средняя линия в треугольнике  $BCD$ , т.е.

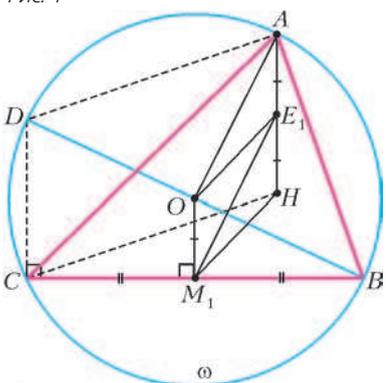


Рис. 2

$OM_1 = \frac{1}{2}CD$ . Тогда  $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ . Следовательно,  $OM_1 = AE_1 = E_1H$ .

Последние три отрезка к тому же параллельны (все они перпендикулярны к  $BC$ ). Поэтому  $OM_1E_1A$  и  $OM_1HE_1$  – параллелограммы.

Прежде чем перейти к разговору о замечательных свойствах указанных параллелограммов, отметим: в тупоугольном треугольнике формула  $OM_1 = \frac{1}{2}AH$  и сами параллелограммы сохраняются (покажите!).

**Задача 1.** Докажите, что отрезок  $M_1E_1$  равен радиусу  $R$  описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Доказательство.** В параллелограмме  $OM_1E_1A$  отрезок  $OA = R$  (см. рис.1). Следовательно,  $M_1E_1 = OA = R$ .

**Задача 2.** Докажите, что точки, симметричные точке  $O$  относительно середин медиан, принадлежат высотам треугольника.

**Доказательство.** Точка  $T$  пересечения диагоналей параллелограмма  $OM_1E_1A$  – середина медианы  $AM_1$  (рис.3). Точка  $E_1$  симметрична  $O$  относительно  $T$ . Она лежит на высоте  $AH_1$ .

**Задача 3.** Докажите, что (см. рис.3):

- а)  $AH = 2R|\cos \alpha|$ ;
- б)  $AH^2 = 4R^2 - a^2$ .

**Доказательство.** Поскольку  $OM_1 = R|\cos \alpha|$  (из  $\triangle OM_1C$ ), а  $OM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$  (теорема Пифагора для того же треугольника), то

$$AH = 2OM_1 = 2R|\cos \alpha|$$

и

$$AH^2 = 4OM_1^2 = 4R^2 - a^2.$$

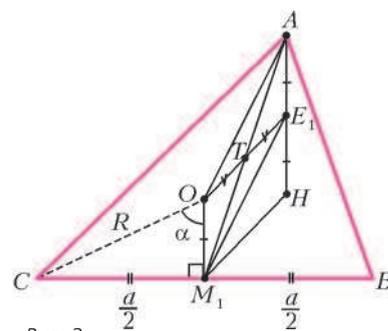


Рис. 3

**Задача 4.** Пусть биссектриса  $AL_1$  треугольника  $ABC$  пересекает  $M_1E_1$  в точке  $N$ . Докажите, что (рис.4):

- а)  $NE_1 = E_1A$ ;
- б)  $\angle ANH = 90^\circ$ .

**Доказательство.** а) Известно, что биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  совпадает с биссектрисой угла  $OAH$  (докажите!), т.е.  $\angle 1 = \angle 2$ . Но  $\angle 3 = \angle 1$ , так как  $OM_1E_1A$  – параллелограмм и  $OA \parallel M_1E_1$ . Тогда  $\angle 3 = \angle 2$ , и  $NE_1 = E_1A$ .

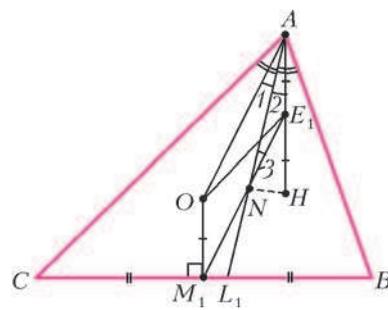


Рис. 4

б) Поскольку  $NE_1 = AE_1 = E_1H$ , то  $\angle ANH = 90^\circ$ .

**Задача 5.** Докажите, что точка  $E$  – середина  $OH$  – является центром окружности Эйлера (окружности девяти точек).

**Доказательство.** Пусть диагонали параллелограмма  $OM_1HE_1$  пересекаются в точке  $E$  (рис.5). Соединим  $E$  с  $H_1$  – основанием высоты, проведенной из вершины  $A$ . Тогда  $H_1E = EM_1 = EE_1$  (медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы). Таким образом,  $E$  – центр окружности, проходящей через  $H_1, M_1, E_1$ . Аналогично можно показать, что на этой же окружности находятся точки  $E_2$  и  $E_3$  – середины  $BH$  и  $CH$  соответственно;  $H_2$  и  $H_3$  – основания высот, проведенных из вершин  $B$  и  $C$ ;  $M_2$  и  $M_3$  – середины  $AC$  и  $AB$  соответственно.

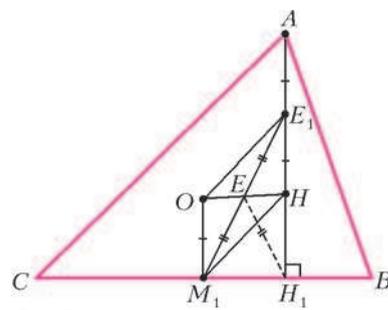


Рис. 5

**Задача 6.** Найдите радиус окружности Эйлера.

**Решение.** Непосредственно из рисунка 5 получаем  $M_1E = EE_1 = \frac{1}{2}M_1E_1 = \frac{1}{2}R$ .

**Задача 7.** Докажите, что:

- а) точка  $M$  пересечения медиан треугольника  $ABC$ , а также точки  $O$  и  $H$  лежат на одной прямой (прямой Эйлера);
- б)  $2OM = MH$ .

**Доказательство.** а) Два наших параллелограмма, взятые вместе, составляют трапецию  $OM_1HA$ , в которой основание

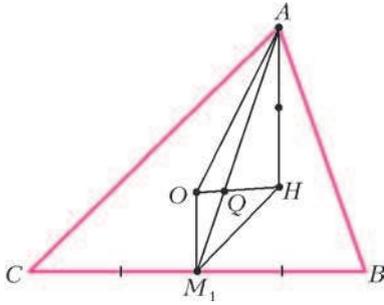


Рис. 6

АН в два раза больше основания  $OM_1$  (рис. 6). Пусть  $Q$  – точка пересечения диагоналей этой трапеции. Тогда  $\frac{AQ}{QM_1} = \frac{AH}{OM_1} = \frac{2}{1}$  (треугольники  $AQH$  и  $M_1QO$  подобны). Но и  $\frac{AM}{MM_1} = \frac{2}{1}$ . Значит, точки  $Q$  и  $M$  совпадают.

б) Очевидно, что и  $\frac{HQ}{QO} = \frac{AH}{OM_1} = \frac{2}{1}$ . Поскольку точки  $Q$  и  $M$  совпадают, то  $\frac{HM}{MO} = \frac{2}{1}$ , или  $2OM = MH$ .

**Задача 8.** Докажите, что прямая  $E_1M$  проходит через точку, диаметрально противоположную вершине  $A$ .

**Доказательство.** Воспользуемся так называемой леммой о трапеции: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой (докажите!). Следовательно, прямая  $E_1M$  пройдет через точку  $D$  пересечения продолжений  $AO$  и  $HM_1$  трапеции  $AHM_1O$  (рис.7). Но  $OM_1 \parallel AH$  и  $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ . Значит,  $OM_1$  – средняя линия в треугольнике  $AHD$ . Тогда  $AO = OD$  и  $AD$  – диаметр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Задача 9.** Точки, симметричные ортоцентру  $H$  относительно середин сторон треугольника  $ABC$ , лежат на его описанной окружности. Докажите это.

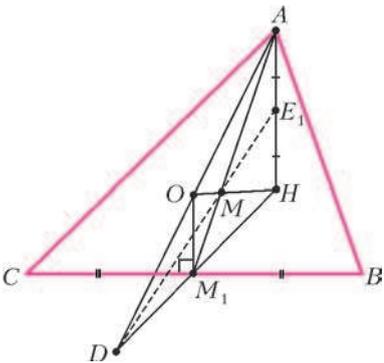


Рис. 7

**Доказательство.** Согласно рисунку 7,  $HM_1 = M_1D$  ( $OM_1$  – средняя линия в треугольнике  $AHD$ ). Утверждение справедливо.

**Задача 10.** Точки, симметричные ортоцентру  $H$  относительно сторон треугольника  $ABC$ , также принадлежат описанной около него окружности. Докажите это.

**Доказательство.** Пусть  $F$  – точка, симметричная ортоцентру  $H$  относительно стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  (рис.8). Связка исходных параллелограммов позволяет, удвоив  $OM_1$ , получить параллелограмм  $OGHA$ , в котором  $GH = OA = R$ . Поскольку  $OGFH$  – равнобокая трапеция, то  $OF = GH = R$ .

А это означает, что точка  $F$  принадлежит описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Задача 11.** Докажите справедливость следующей формулы:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

где  $a, b, c$  – стороны треугольника  $ABC$ ,  $R$  – радиус описанной около него окружности.

**Доказательство.** Пусть  $AM_1$  – медиана в треугольнике  $ABC$  (рис.9). Тогда, по формуле медианы,

$$AM_1^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Далее воспользуемся формулой суммы квадратов диагоналей параллелограмма для  $OM_1E_1A$ :

$$OE_1^2 = 2(OA^2 + OM_1^2) - AM_1^2. \quad (1)$$

По той же формуле для параллелограмма  $OM_1HE_1$ :

$$OH^2 = 2(OE_1^2 + OM_1^2) - M_1E_1^2, \quad (2)$$

где  $OM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$  (из треугольника  $OM_1C$ ), а  $M_1E_1 = OA = R$ . Подставим сюда значение  $OE_1^2$  из предыдущей формулы:

$$OH^2 = 2(2OA^2 + 2OM_1^2 - AM_1^2 + OM_1^2) - M_1E_1^2,$$

или

$$OH^2 = 6OM_1^2 + 4OA^2 - 2AM_1^2 - M_1E_1^2,$$

или

$$OH^2 = 6\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) + 4R^2 - \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{2} - R^2,$$

откуда получаем

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Предложенная серия задач показывает эффективность использования параллелограммов  $OM_1E_1A$  и  $OM_1HE_1$  при доказательстве важных фактов геометрии треугольника.

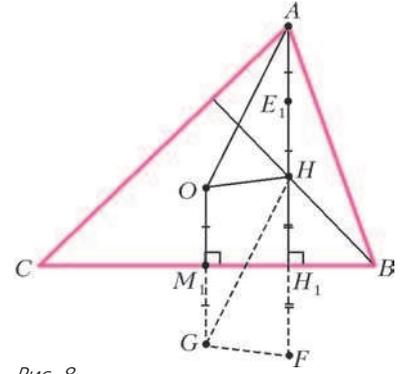


Рис. 8

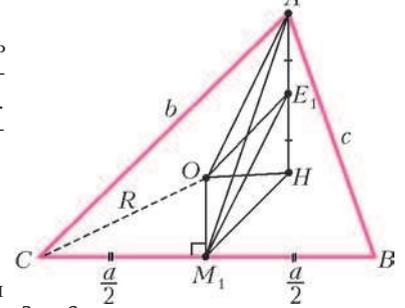


Рис. 9

### Головоломки в бутылках

(Начало см. на с. 25)

ваться какими-либо инструментами, приспособлениями, любыми предметами, не имеющими отношение к данной головоломке.

В качестве примера попробуйте разобраться с «хитрой» бутылкой с деревянным цилиндром внутри, о которой рассказывается на 4-й странице обложки журнала.

Сразу предупредим, что бесполезны все попытки переверачивать и встряхивать бутылку в надежде случайно попасть торцом цилиндра в отверстие трубки. Сделать это практически невозможно.

Как же решить задачу? Обратите внимание, что изготовленная вами головоломка не похожа на ту, что показана на фотографии. Дело не в форме бутылки и не в размерах трубки или цилиндра. Вашей головоломке не хватает... конверта с решением! Этот конверт есть в редакции, и мы его открывали, надеясь найти внутри текст решения и прочитать его. Но текста не было. В конверте лежал чистый листок бумаги! И все-таки головоломка была решена. Поэтому советуем вам взять конверт, написать на нем слово «Решение», положить внутрь лист бумаги и решать головоломку Уилла Страйбоса.

А.Калинин

# Квантовая телепортация

**А. АРУТЮНОВ**

**К**ВАНТОВАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ – ОДНО ИЗ НАИБОЛЕЕ ИНТЕРЕСНЫХ И ПАРАДОКСАЛЬНЫХ ПРОЯВЛЕНИЙ КВАНТОВОЙ ПРИРОДЫ МАТЕРИИ, ВЫЗЫВАЮЩЕЕ В ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ ОГРОМНЫЙ ИНТЕРЕС СПЕЦИАЛИСТОВ. Термин «телепортация» взят из научной фантастики, однако в настоящее время он широко используется в научной литературе. Когда физики говорят о телепортации, они вовсе не имеют в виду мгновенную транспортировку предметов и живых существ на далекие расстояния, о которой так много пишут авторы современной научной фантастики. Квантовая телепортация означает мгновенный перенос квантового состояния из одной точки пространства в другую, удаленную на большое расстояние.

Первые идеи квантовой информатики зародились сразу же после работ А.Эйнштейна, М.Планка, Н.Бора и других отцов-основателей квантовой физики. Существенное развитие они получили с созданием квантовой механики в представлениях Э.Шрёдингера и В.Гейзенберга. Огромное влияние на развитие теории квантовых вычислений оказали также работы Р.Фейнмана.

Явление квантовой телепортации проявляется в существовании мгновенного взаимодействия между частицами микромира, входящими в единую квантовую систему. Система квантово связанных частиц образуется всякий раз, когда частицы вступают во взаимодействие друг с другом или рождаются в одном процессе и после этого не вступают во взаимодействие с другими частицами. Как только одна из частиц квантово связанной пары начинает взаимодействовать с внешним миром, ее квантовые характеристики изменяются, и в тот же самый миг изменяются характеристики второй частицы пары. Обмен информацией о состояниях между связанными частицами происходит без каких-либо полей, мгновенно и не зависит от расстояния. Такая связь кажется на первый взгляд мистической, но на языке физиков она достаточно тривиальна – просто взаимодействующие частицы имеют общую так называемую пси-функцию. Квантовая физика описывает состояние частиц этой самой пси-функцией (по-другому – волновой функцией), которая, хотя и похожа на некоторое поле, поскольку имеет распределение в пространстве, но в действительности не является таковым. Скорее, это чисто математический объект и поэтому может изменяться мгновенно и во всем пространстве без нарушений законов физического мира. Пси-функция любой системы микрочастиц создается и разрушается (коллапсирует во всем пространстве) при каждом новом взаимодействии.

На странную возможность существования нефизической связи между удаленными частицами первым обратил внимание А.Эйнштейн. Он не поверил в реальность такой связи и интерпретировал это как доказательство ошибочности квантовой теории. Совместно со своими коллегами-физиками – Б.Подольским и Н.Розеном – он опубликовал в 1935 году статью о парадоксе квантовой механики, который теперь известен как парадокс ЭПР. Суть парадокса состоит в следующем. Есть две частицы, которые какое-то время

взаимодействуют, образуя единую систему. С позиций квантовой механики, эту связанную систему можно описать некоей волновой функцией. Когда взаимодействие прекращается и частицы разлетаются очень далеко, их по-прежнему будет описывать та же функция. Но состояние каждой отдельной частицы неизвестно в принципе: это вытекает из соотношения неопределенностей. И только когда одна из частиц попадает в приемник, регистрирующий ее параметры, у другой появляются (именно появляются, а не становятся известными!) соответствующие характеристики. Таким образом, возможна мгновенная «пересылка» квантового состояния частицы на неограниченно большое расстояние. Однако телепортации самой частицы, передачи массы при этом не происходит. Квантовый объект, в качестве которого могут выступать, например, два связанных фотона, в процессе разделения сохраняет некое подобие информационной связи – эффект «спутывания», «связывания», «зацепления». При этом квантовое состояние одного фотона, скажем состояние поляризации, может мгновенно передаваться на другой фотон, который становится аналогом первого, первый же фотон коллапсирует, исчезает, и наоборот. Расстояние между фотонами может быть любым. Как синоним этого парадокса принят также термин «квантовая нелокальность», подчеркивающий мгновенную распределенность, нелокальность в пространстве состояний связанных элементарных частиц.

Стоит подробнее пояснить, что подразумевается под словами «зацепленное состояние». Речь идет о системе, состоящей из двух взаимодействующих подсистем, например частиц, которая в какой-то момент времени распадается на две невзаимодействующие подсистемы. Для такого зацепленного состояния значение какой-либо физической величины не определено ни для одной из подсистем. Однако если мы произведем измерение над одной из подсистем и определим значение выбранной физической величины, то мы с достоверностью будем знать значение этой физической величины и для другой подсистемы. Примером системы, находящейся в зацепленном состоянии, является система двух фотонов, появившихся в результате спонтанного распада фотона, распространяющегося в нелинейной среде. Для зацепленных фотонов нельзя указать, какова поляризация каждого из фотонов пары, но если измерить поляризацию одного фотона, то и поляризация другого фотона также станет определенной. Подчеркнем, что, производя измерение над одной частицей, мы в тот же момент определяем и состояние другой частицы, как бы далеко эти частицы друг от друга ни находились. Таким образом, связь между частицами носит принципиально нелокальный характер.

Казалось бы, при этом нарушается принцип причинности – следствие и причина не разделены временем, если понимать время как способ организации последовательности событий. Поэтому Эйнштейн и соавторы оценивали свою чисто теоретическую, но жестко формализованную модель как неприложимую к практике, эксперименту. Это состояние противоречия теории и видимой физической реальности длилось около 30 лет.

Первую принципиальную схему эксперимента по реализации взаимодействия связанных частиц предложила в 1993 году группа специалистов Исследовательского центра ИВМ, возглавляемая Ч.Беннетом. Тогда же ими был введен и термин «квантовая телепортация». Беннет показал, что полную информацию, необходимую для того, чтобы восстановить состояние объекта, можно разделить на две части – квантовую и классическую. Первую можно передать мгновенно, что и подтверждено экспериментально, но нельзя

использовать без второй, передаваемой обычными методами – со скоростью, не превышающей скорость света. Иными словами, Беннет показал, что в принципе сцепленные частицы могут служить своего рода «транспортном». Посредством присоединения третьей – «информационной» – частицы к одной из сцепленных частиц можно передавать ее свойства другой, причем даже без измерения этих свойств.

Пионерами по осуществлению экспериментальной реализации канала такой связи стали работы двух исследовательских групп – группы австрийских исследователей из Института экспериментальной физики университета в Инсбруке, возглавляемой А.Цайлингером, и группы итальянских исследователей из университета в Риме под руководством Ф. Де Мартини. Опыты этих групп доказали выполнимость принципов ЭПР на практике для передачи через световоды состояний поляризации между двумя фотонами посредством третьего на расстояниях до 10 километров, т.е. наблюдалась телепортация квантового состояния на гигантских (в масштабах микромира) расстояниях.

Вместо того чтобы использовать отдельный «фотон-посланник», итальянские исследователи предложили рассматривать одновременно две характеристики каждой связанной частицы: поляризацию и направление движения. Это позволяет теоретически описывать их как отдельные частицы и в то же самое время, проводя измерения только с первой частицей, получать характеристики второй, не трогая ее, т.е. осуществлять телепортацию.

Аналогичные экспериментальные результаты были получены и в других лабораториях Европы, США и Азии, так что фотонная телепортация теперь стала для физиков вполне привычным делом. Однако до сих пор еще никому не удавалось телепортировать столь тяжелые (по меркам микромира) объекты, как атомы с многонуклонными ядрами. Физики из американского Национального института стандартов и технологии добились успеха с ионами бериллия-9, а их коллеги из университета Инсбрука работали с еще более массивными ионами кальция-40.

Поведение каждой квантовой системы, будь то фотон, элементарная частица, атом или молекула, описывается некоторым набором параметров – квантовых чисел. Такие параметры в своей совокупности обеспечивают всю полноту информации об объекте, достижимую в рамках квантовой механики. Например, одиночный электрон, свободно летящий в пустом пространстве, описывается всего двумя параметрами – импульсом и спином. Для полного описания электрона, входящего в состав атома водорода, нужны уже четыре параметра: главное квантовое число, которое определяет его энергию, орбитальное квантовое число, которое задает величину углового момента электрона, магнитное квантовое число, характеризующее ориентацию этого момента, и, наконец, опять-таки спин. Другие квантовые объекты могут требовать иных квантовых чисел. Полный набор квантовых чисел любого квантового объекта, для простоты назовем его частицей, как раз и называется его состоянием.

Оба упомянутых научных коллектива, американский и австрийский, работали с плененными в ловушки ионами, которыми они манипулировали с помощью лазерных импульсов. В этих условиях динамику каждой частицы можно было описывать с помощью лишь одного квантового параметра – спина. Величина спина у каждой частицы была одной и той же, а вот его направление могло меняться. Интересно, что каждый акт телепортации занимал лишь 4 миллисекунды, причем он осуществлялся по командам компьютера. У австрийцев точность переноса информации составила 75%, а у американцев – 78%.

Телепортация не только фотонов, но и других частиц – электронов, атомов и даже ионов – позволит передавать квантовое состояние от короткоживущей частицы к более стабильной. Таким способом можно будет создавать запоминающие устройства, где информация, принесенная фотонами, будет храниться на ионах, изолированных от окружающей среды. После создания надежных методов квантовой телепортации возникнут реальные предпосылки для создания квантовых вычислительных систем. Телепортация обеспечит надежную передачу и хранение информации на фоне мощных помех, когда все другие способы оказываются неэффективными, и может быть использована для связи между несколькими квантовыми компьютерами. Кроме того, разработанные исследователями методы имеют огромное значение для будущих экспериментов по квантовой механике, для проверки и уточнения целого ряда современных физических теорий.

В различных странах обсуждаются программы по применению эффекта квантовой телепортации для создания квантовых оптических компьютеров, где носителями информации будут фотоны. Скорость работы и объемы информации квантовых компьютеров будут на десятки порядков превосходить таковые у существующих компьютеров. Квантовая телепортация может сыграть значительную роль в будущих системах передачи информации. Если когда-либо будет создана квантово-механическая ЭВМ, теоретические основы которой были заложены Р.Фейнманом в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого столетия, то информация в ней будет храниться в виде набора квантовых состояний. Эффекты ЭПР и квантовой телепортации позволяют вести копирование и обмен информацией внутри квантового компьютера. И не только компьютера – можно будет телепортировать данные в любых цифровых системах. Преимущество телепортационного способа передачи информации заключается в том, что из одной точки пространства в другую переносится точная копия состояния, являющегося элементарной ячейкой памяти. Таким образом, появляется возможность передавать информацию без потерь, со 100-процентной эффективностью. Именно перспектива создания принципиально новых систем связи с абсолютной невозможностью несанкционированного доступа к данным и определяет нынешний научный ажиотаж вокруг квантовой телепортации. Впрочем, что касается инженерных решений этой задачи, то не следует думать, что они будут найдены завтра: технологические проработки только начались.

По сути дела, до самого последнего времени физики отрицали возможность телепортации прежде всего потому, что любые частицы являются одновременно и частицами, и волнами. В этом и заключается сложность: чтобы создать точный дубликат какой-либо частицы, необходимо прежде определить ее скорость и ее волновые свойства, в частности импульс. Но это запрещено принципом неопределенности Гейзенберга. Согласно этому принципу, невозможно одновременно определить и волновые, и корпускулярные свойства частицы. А теперь (как уже было сказано) во многих научно-исследовательских лабораториях мира экспериментально разрешается этот «квантовый парадокс».

Опыты, проведенные датскими учеными в конце сентября 2001 года, доказали практическую возможность такой телепортации. Экспериментаторы добились квантовой связи между двумя облаками охлажденных почти до абсолютного нуля паров цезия, расположенными на значительном расстоянии друг от друга. Датчанам удалось связать около миллиона атомов цезия, правда на очень короткое время – на доли миллисекунды. Связь должна приводить к взаимному влиянию облаков пара. По версии экспериментаторов, воздей-

ствие на оригинал влечет аналогичное изменение параметров копии. Исследователи планируют изучение свойств полученного канала с целью реализации в будущем возможности передачи копий структур из атомов. Даже при самых успешных разработках именно этого вида телепортации «переносить» человека таким способом не получится – он содержит на 20 порядков больше атомов, а методов считывания структуры такой сложности пока не существует даже в принципе.

Летом 2002 года появилось сообщение от физиков из Австралии: им удалось телепортировать луч лазера на расстояние 1 метр. Выглядело это как исчезновение луча в одной точке и появление его в другой. В Японии объявлено о прорыве в области мгновенной передачи данных на неограниченные расстояния, открывающем путь к созданию сверхскоростных квантовых компьютеров и неуязвимых для взломов систем шифровки информации. Группа физиков во главе с профессором Токийского университета А.Фурусавой впервые в мире осуществила квантовую телепортацию между тремя частицами. Физики из Венского университета сумели телепортировать частицы света на расстояние 600 метров – с одного берега Дуная на другой. Для этого эксперимента использовалась канализационная система под руслом реки, по которой был протянут оптоволоконный кабель. Линия, проложенная под Дунаем, соединила между собой две лаборатории, одну из которых назвали «Алиса», а другую – «Боб». Алиса передала три разных квантовых состояния фотонов, а Боб сумел их воспроизвести. При этом процесс телепортации происходил не мгновенно, поскольку он ограничен скоростью света. Ученые говорят, что ценность нынешнего эксперимента заключается в том, что он проведен в условиях, максимально приближенных к реальным.

Две любопытные статьи – теоретическая и экспериментальная – были недавно опубликованы в журнале «Nature» («Природа»). Они ведут разными путями, но к одной заветной цели – к созданию квантового компьютера, способного решать задачи, принципиально непосильные современным вычислительным машинам.

В теоретической статье профессор Национального института стандартов и технологии США Э.Нилл предложил новую иерархическую архитектуру квантового компьютера. По утверждению автора, эта архитектура позволяет построить квантовый вычислитель на основе уже реализованных в эксперименте компонентов. Главным препятствием на пути создания квантовых компьютеров является быстрое разрушение нежной квантовой информации внешним шумом. Единица квантовой информации, кубит, способная представлять либо логический ноль, либо единицу, либо то и другое одновременно, реализуется в виде квантового состояния фотона, атома, иона или другой микрочастицы. Это – базовый блок квантового компьютера. Пока в научных лабораториях удалось провести квантовые вычисления лишь для нескольких кубитов, чего, разумеется, недостаточно для практических расчетов. И чем больше кубитов в квантовом компьютере, тем быстрее разрушается информация. Чтобы обойти эту трудность, Нилл предложил организовать все кубиты квантового компьютера в простую пирамидальную структуру из небольших блоков кубитов. Квантовые данные будут телепортироваться с уровня на уровень и постоянно проверяться на целостность. При такой иерархической структуре компьютера вычисления можно будет проводить, даже если вероятность ошибки одного кубита за время расчетов составляет три процента. А этот уровень уже достигнут в экспериментах на ионных квантовых компьютерах. Нет проблем и с телепортацией квантовой информации. Сегодня, чтобы обеспечить надежную работу всего пары кубитов, нужно будет создать три уровня иерархии и оперировать с 36

кубитами только на нижнем уровне. Однако это все же лучше, чем ничего. И баланс между избыточностью и надежностью вычислений в схеме Нилла заметно лучше, чем при других подходах. Тем более что требования к избыточности архитектуры компьютера могут быть значительно снижены при уменьшении уровня ошибок. Пока работоспособность новой архитектуры проверена лишь в многомесячных вычислительных экспериментах на обычной рабочей станции. Выводы автора еще нуждаются в строгих математических доказательствах и в экспериментальной проверке.

В работе большой группы европейских ученых, координируемой из Венского университета, впервые удалось экспериментально реализовать «однаправленные» квантовые вычисления, предложенные теоретиками. Одна направленный квантовый компьютер принципиально отличается от обычного квантового компьютера и даже заставляет ученых переосмыслить саму концепцию квантовых вычислений. В обычном квантовом компьютере сначала готовятся начальные квантовые состояния кубитов, затем алгоритм вычислений реализуется путем последовательности обратимых во времени манипуляций с состояниями кубитов, а результат вычислений измеряется. Именно осуществление обратимых манипуляций, т.е. «перепутывания» состояний кубитов, которые легко разрушаются любым шумом, и вызывает основные трудности. В однонаправленном квантовом компьютере кластер из квантовых частиц изначально готовится в сильно «перепутанном» состоянии, а алгоритм квантовых вычислений сводится к последовательности необратимых измерений состояний кубитов.

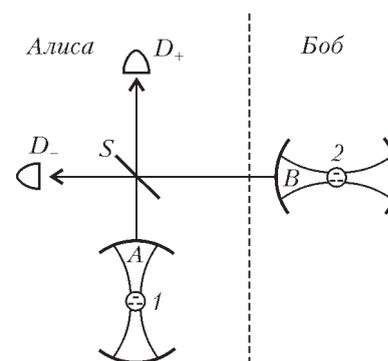
Необратимость вычислений, которые гораздо меньше портятся шумом, и заставляет называть такой компьютер однонаправленным. Теоретики показали, что однонаправленным способом можно реализовать алгоритм поиска, к которому удастся свести все остальные «неподъемные» алгоритмы, решаемые на обычном компьютере лишь прямым перебором всех вариантов ответа. В эксперименте был сооружен однонаправленный компьютер на четырех кубитах, физически реализуемых состояниями поляризации четырех фотонов. Экспериментальная установка представляет собой сложную комбинацию импульсных лазеров, поляризационных фильтров, нелинейных оптических кристаллов и фотоприемников. Четыре фотона были приготовлены в «перепутанном» квантовом состоянии, а затем ряд измерений их поляризации позволил успешно выполнить упомянутый алгоритм. Разумеется, четыре кубита – это немного, но на данном этапе важнее всего экспериментальное подтверждение концепции.

Пока сравнительно молодое направление однонаправленных квантовых вычислений развито слабее традиционного. Однако именно с ним ряд специалистов связывают большие надежды на создание в обозримом будущем квантовых компьютеров для практических вычислений. Удастся ли это ученым, сказать трудно, но, судя по тому что постоянно предлагаются новые решения старых проблем, их надежды отнюдь не беспочвенны. В последнее время происходит слияние квантовых компьютеров с квантовой коммуникацией (телепортацией), естественно воображаемое, поскольку ни того, ни другого пока не существует. Поговаривают уже о квантовом Интернете. Дело в том, что в квантовом компьютере очень сложно устроить двухкубитные операции, которые как раз и приводят к запутанным состояниям – основе квантовых вычислений. Может оказаться более простым (дешевым) приемом поставлять потребителю уже готовые запутанные кубиты с некоего суперкомпьютера, подключенного к сети квантовой коммуникации.

Сем телепортации квантовых состояний уже было предложено огромное количество. Ученые из Англии, например,

считают, что изобретенная ими схема телепортации является наиболее реалистической и обеспечивает большую вероятность успешной телепортации. Мотивация практической ценности их работы ясна. Квантовую информацию лучше записывать и обрабатывать на атомных состояниях или им подобных, поскольку там она может достаточно долго храниться. А вот передавать эту информацию лучше всего с помощью фотонов, которые могут быстро распространяться на большие расстояния без потери когерентности. Авторы рассматривают трехуровневый атом, у которого есть два вырожденных основных состояния и одно возбужденное. Атом помещается в микрорезонатор, обладающий собственной частотой, несколько меньшей частоты резонансного возбуждения на верхний уровень. Такова же частота лазерного луча, освещающего микрорезонатор. Все это находится в распоряжении Алисы (см. рисунок). Точно такая же установка у Боба. Требуется передать состояние атома Алисы, представляющее собой смесь основных состояний атома, на атом Боба. Для этого требуется еще одно устройство, а именно делитель, на который попадают фотоны, выходящие из микрорезонаторов Алисы и Боба, а также два детектора фотонов, находящихся в распоряжении Алисы. В один и тот

же момент времени Алиса и Боб включают лазеры на определенные, но разные промежутки времени, а затем Алиса ждет щелчка детектора и сообщает Бобу (по телефону), какой детектор сработал. В зависимости от этого Боб определяет, получил ли он состояние атома Алисы или для этого надо еще произвести простейшую унитарную операцию (поворот фазы) над его атомом. Запутывание состояний атомов, необходимое для телепортации, происходит в момент срабатывания детектора, т.е. измерения, производимого над системой фотонов.



Устройство телекоммуникации атомного состояния:  $A$  – резонатор,  $1$  – атом,  $S$  – делитель луча и  $D_+$  и  $D_-$  – детекторы, принадлежащие Алисе;  $B$  – резонатор и  $2$  – атом, принадлежащие Бобу

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# О разрезании треугольника на подобные ему

**Б. ФРЕНКИН**

**РАЗРЕЗАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР** – ТЕМА МНОгих интересных задач. Как правило, они не требуют знания каких-либо сложных теорем, зато хорошо тренируют комбинаторное мышление и зрительное восприятие.<sup>1</sup> Одна из популярных тем в этой области – разбиение многоугольника (например, треугольника) на части, подобные между собой.<sup>2</sup> В частности, в книге Гарднера рассматривается разрезание многоугольника на равные подобные ему много-

угольники. Здесь мы займемся проблемой, родственной по характеру. Сузим класс разрезаемых фигур: ограничимся треугольниками, но ослабим условие на само разрезание – полученные части не обязательно одинаковы. Решая эту проблему, а затем обобщая ее, мы встретимся с некоторыми любопытными фактами, уже отмеченными в литературе. Однако главный результат – описание треугольников, которые можно разрезать на пять подобных им, – видимо, не был известен; в статье С.А. Jones, Р. Jones and А.В. Bolt, упомянутой во второй сноске, он сформулирован в качестве вероятной гипотезы.

Итак:

*Пусть  $n$  – натуральное число,  $n > 1$ . Какие треугольники можно разрезать на  $n$  треугольников, подобных исходному?*

В качестве разминки вам предлагается несложная

**Задача 1.** Разрежьте произвольный треугольник на четыре одинаковых подобных ему треугольника.

Нетрудно и обобщить этот результат:

**Задача 2.** Пусть  $n \geq 6$  – натуральное число. Разрежьте произвольный треугольник на  $n$  подобных ему треугольников.

Заметим, что на этот раз треугольники уже не обязательно одинаковы. Не слишком сложно решается и

**Задача 3.** Найдите все треугольники, которые можно разрезать на два подобных им треугольника (не обязательно одинаковых).

**Задача 4.** Тот же вопрос для разрезания на три треугольника.

Осталось неисследованным всего одно значение  $n$ , а именно 5. Из предыдущего вытекает, что любой прямоугольный треугольник можно разрезать на 5 (как и на любое другое количество) подобных ему. Поэтому в дальнейшем нас интересует следующий вопрос:

*Существуют ли (и если да, то какие) прямоугольные треугольники, которые можно разрезать на 5 треугольников, подобных исходному?*

<sup>1</sup> Такие задачи можно найти, например, в книгах М.Гарднера «Математические досуги» (М.: Мир, 2000, гл. 11, 24) и Г.Линдгрена «Занимательные задачи на разрезание» (М.: Мир, 1977). Разрезанию треугольников посвящена книга А.Соифера «How does one cut a triangle» (СЕМЕ, 1990).

<sup>2</sup> См. в частности, статьи Ю.Шапкина «Разрезание фигур» (МИФ, №1/1998–1999) и С.А. Jones, Р. Jones and А.В. Bolt «Dissections of triangles into five similar triangles» (The Mathematical Gazette, vol. 82, № 494 (July 1998), pp. 225–234).

Здесь нас ожидают трудности иного уровня, чем в предыдущих случаях. Нужно разрезать прямоугольный треугольник на пять треугольников и выяснить, когда их можно взять подобными исходному. Но эти пять треугольников могут образовывать много разных конфигураций. (Сколько вершин этих треугольников находятся на сторонах исходного? А в его вершинах? Со сколькими другими треугольниками граничит каждый из этих треугольников? – и т.п.) Так что первая проблема, стоящая перед нами, – как-то обозреть всю совокупность возможных конфигураций. Оказывается, эта проблема вполне разрешима. Первым шагом к этому служит

**Задача 5.** Существует ли прямоугольный треугольник, который разрезается на пять подобных ему таким образом, что углы при его вершинах не разрезаются?

Понятно, что вершины «малых» треугольников (т.е. полученных при разрезании) находятся не только в вершинах исходного, но и в каких-то других точках. Эти другие точки назовем узлами. Как устроен узел? Во-первых, он может находиться на стороне исходного треугольника или на стороне, но не в вершине, одного из малых треугольников (рис. 1,а). Во-вторых, узел может находиться внутри исходного треугольника и служить вершиной всех примыкающих треугольников (рис. 1,б).

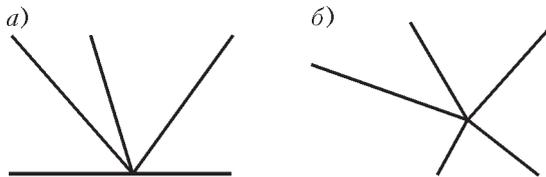


Рис. 1

**Задача 6.** Предположим, что прямоугольный треугольник разрезан на пять подобных ему, причем разрезан хотя бы один из углов при вершинах. Оцените сверху количество узлов.

**Задача 7.** Докажите, что в этой ситуации существует узел типа, изображенного на рисунке 1,б.

**Задача 8.** Найдите возможные конфигурации треугольников, примыкающих к узлу из задачи 7. (Сколько может быть таких треугольников? Могут ли они образовывать невыпуклый многоугольник?)

В итоге с перебором конфигураций мы справились. Остается последняя, но самая сложная

**Задача 9.** Исследуйте найденные конфигурации.

Решив нашу исходную задачу, естественно заняться ее обобщением:

Пусть  $n$  – натуральное число,  $n > 1$ . Какие треугольники можно разрезать на  $n$  треугольников, подобных друг другу (но не обязательно – исходному треугольнику)?

Для  $n = 4$  и  $n \geq 6$  ответ содержится в предыдущем (задачи 1 и 2). Не представляет большой трудности и

**Упражнение 1.** Покажите, что на два подобных между собой треугольника можно разрезать любой прямоугольный, равнобедренный или равносторонний треугольник и никакой другой.

Кстати:

**Упражнение 2.** а) Докажите, что при любом натуральном  $n$  любой треугольник можно разрезать на  $n^2$  одинаковых подобных ему треугольников.

б) Докажите, что треугольник можно разрезать на два одинаковых треугольника (не обязательно подобных ему) тогда и только тогда, когда он равнобедренный или равносторонний.

в) Какие треугольники можно разрезать на два одинаковых подобных им?

Существуют также треугольники, которые можно разрезать на 3, на 5 одинаковых треугольников, подобных исходному (см. книгу М.Гарднера «Математические досуги»).

Несколько более сложно

**Упражнение 3.** Найдите все треугольники, которые разрезаются на три подобных друг другу треугольника.

О ситуации для разрезания на 5 попарно подобных треугольников см. в конце статьи.

## Ответы и решения

**Задача 1.** Проведем в исходном треугольнике средние линии.

**Задача 2.** Пусть  $n$  четно. Одну из сторон исходного треугольника разобьем на  $n/2$  равных частей. Дальнейшее очевидно из рисунка 2,а.

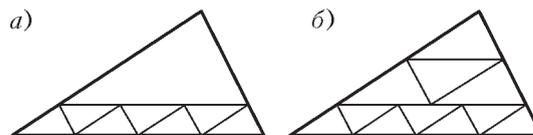


Рис. 2

Пусть теперь  $n$  нечетно и не меньше 7. Разрежем треугольник на  $n - 3$  треугольника в соответствии с рис. 2,а, а затем разрежем один из них средними линиями (рис. 2,б).

**Задача 3.** Ответ: все прямоугольные треугольники и только они. Действительно, разрез обязательно соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне (рис. 3). Если углы при этой точке различны, то их сумма меньше  $\pi$ , поскольку они равны двум углам исходного треугольника. Значит, углы равны, и тогда они прямые. Обратно, любой прямоугольный треугольник можно разрезать на два подобных ему, опустив высоту из вершины прямого угла.

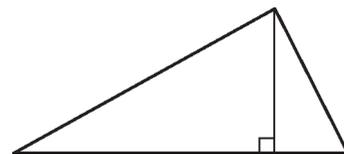


Рис. 3

Попутно мы установили простой, но полезный факт, которым будем пользоваться в дальнейшем.

**Факт 1.** Если имеется узел вида, изображенного на рисунке 4, т.е. к узлу примыкают только два малых треугольника, то исходный треугольник прямоугольный.

Если возникла ситуация из факта 1, будем говорить для краткости, что «получена прямоугольность».

**Задача 4.** Ответ таков же, как в задаче 3: все прямоугольные треугольники и только они.

Действительно, разрезав прямоугольный треугольник на два ему подобных, можно аналогично разрезать один из полученных и получить разрезание на три. С другой стороны, пусть треугольник разрезан на три подобных ему. Наименьший из его углов не может быть разрезан. У малого треугольника, который содержит этот угол, все вершины – на сторонах исходного. Либо одна, либо



Рис. 4

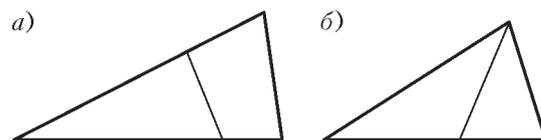


Рис. 5

две из этих вершин совпадают с вершинами исходного треугольника. В первом случае (рис.5,а) остается выпуклый четырехугольник, а во втором (рис.5,б) – треугольник. В обоих случаях убеждаемся несложным перебором, что при дальнейшем разрезании на два треугольника получаем прямоугольность.

Мы установили еще один полезный факт.

**Факт 2.** Пусть исходный треугольник имеет углы  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Тогда угол  $\alpha$  не может быть разрезан. Все вершины малого треугольника, который его накрывает, лежат на границе исходного треугольника. Этот малый треугольник мы будем называть  $\alpha$ -треугольником.

**Задача 5.** Если углы исходного треугольника не разрезаются, то они принадлежат трем разным малым треугольникам. Остальные вершины этих треугольников лежат на сторонах исходного. Предположим, что на какой-то стороне имеется промежуток между вершинами указанных треугольников (рис.6,а). Чтобы на его концах не получить прямоугольность, нужно провести не менее двух разрезов. Но нам

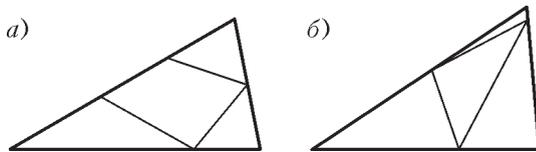


Рис. 6

остается провести лишь один разрез. Если же стороны данных трех треугольников полностью покрывают стороны исходного, то в центре остается треугольник, который нужно разрезать на два (рис.6,б). Как в задаче 3, получаем прямоугольность.

**Задача 6.** Узлов не может быть больше трех. Действительно, в пяти малых (полученных при разрезании) треугольниках всего имеется 15 углов. Из них не менее 4 находится при вершинах исходного треугольника (поскольку хотя бы один из его углов разрезан), и на все узлы остается не более 11 углов. Если исходный треугольник непрямоугольный, то к каждому узлу примыкает не менее трех углов (см. факт 1). Четыре узла дали бы по меньшей мере  $3 \cdot 4 = 12$  углов, поэтому узлов не более трех.

**Задача 7.** Общая сумма углов пяти малых треугольников равна  $5\pi$ . Из них  $\pi$  приходится на вершины исходного треугольника, а на узлы остается  $4\pi$ . Согласно задаче 6, имеется не больше трех узлов. Значит, в некотором узле сумма углов больше  $\pi$ . Но сумма углов при узле с рисунка 1,а равна  $\pi$ . Поэтому имеется узел с рисунка 1,б (с суммой углов  $2\pi$ ).

**Задача 8.** К узлу с суммой углов  $2\pi$  примыкает не менее трех углов малых треугольников. Но и не более четырех – ввиду факта 2: такой узел лежит строго внутри исходного треугольника, а все вершины  $\alpha$ -треугольника находятся на его границе, поэтому  $\alpha$ -треугольник не примыкает к этому узлу.

Пусть к узлу примыкают четыре треугольника. Если они образуют невыпуклый многоугольник, то образовавшуюся

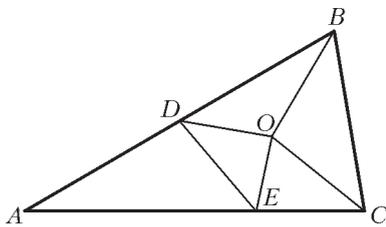


Рис. 7

выемку должен заполнить  $\alpha$ -треугольник, но тогда его вершина находится строго внутри исходного треугольника – снова противоречие с фактом 2. Если же четыре треугольника в совокупности образуют треугольник, то

на его границе получаем прямоугольность. Значит, вокруг узла образуется выпуклый четырехугольник. Одна из его сторон должна совпасть со стороной  $\alpha$ -треугольника, чтобы получился исходный треугольник (рис.7).

Пусть теперь к рассматриваемому узлу примыкают три треугольника. Предположим, что вершина какого-либо из них лежит на стороне, но не в вершине, другого. Тогда получается выемка, которую надо заполнить углами двух оставшихся треугольников. Но  $\alpha$ -треугольник в этом участвовать не может ввиду факта 2. Если же используется только один из оставшихся треугольников, то получаем прямоугольность (ввиду факта 1). Поэтому на самом деле три треугольника при узле образуют треугольник (рис.8; не показаны два примыкающие к узлу).

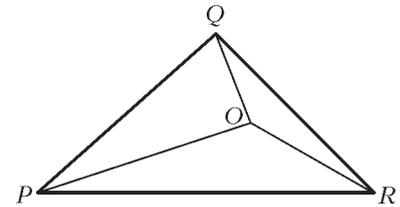


Рис. 8

**Задача 9.** а) Рассмотрим конфигурацию,

изображенную на рисунке 7. Пусть исходный треугольник имеет углы  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  при вершинах  $A, B, C$ . Ясно, что угол  $\beta$  может быть разрезан лишь на углы, равные  $\alpha$ . Значит,  $\beta = 2\alpha$ . Угол  $\angle BCO$  меньше  $\gamma$  и не может быть равен  $\alpha$ , так как угол  $\alpha$  в треугольнике  $BCO$  уже есть (а именно  $\angle CBO$ ). Значит,  $\angle BCO = \beta$ . Если  $\angle ECO = \alpha$ , то получаем  $\alpha + \beta = \gamma = \pi/2$ , и исходный треугольник прямоугольный. Значит, в интересующем нас непрямоугольном случае  $\angle ECO = \beta$ , т.е.  $\gamma = 2\beta$ . Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{\pi}{7}, \beta = \frac{2\pi}{7}, \gamma = \frac{4\pi}{7}. \quad (*)$$

Из четырех углов таких размеров нужно сложить угол  $2\pi$  (при точке  $O$ ). Нетрудно убедиться, что такое представление единственно, а именно  $3\gamma + \beta$ .

В треугольниках  $BCO$  и  $ECO$  угол  $\beta$  уже есть (при точке  $C$ ). Поэтому  $\angle COB = \angle COE = \gamma$ , и треугольники  $BCO$  и  $ECO$  равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Отсюда  $BO = EO$ . В треугольнике  $BDO$  сторона  $DO$  лежит против наименьшего угла  $\alpha$  и, значит,  $DO < BO$ , откуда  $DO < EO$  и потому  $\angle EDO \neq \alpha$ . Углы  $\angle BDO$  и  $\angle ADE$  также не равны  $\alpha$ , поскольку в соответствующих треугольниках угол  $\alpha$  уже есть. Сумма трех перечисленных углов равна  $\pi$ . Но нетрудно проверить, что из трех углов, имеющих размеры из формулы (\*), можно сложить угол  $\pi$  только одним способом:  $\alpha + \beta + \gamma$ . Получено противоречие, т.е. рассматриваемая конфигурация в непрямоугольном случае невозможна.

б) Перейдем к конфигурации с рисунка 8. По сравнению с предыдущим нам предстоит легкая прогулка вокруг треугольника. Пусть два угла при точке  $O$  не равны. Так как они равны углам исходного треугольника, то их сумма меньше  $180^\circ$ . То же верно для третьего угла, и общая сумма получается слишком малой. Значит, в действительности все три угла равны. Тогда они составляют по  $120^\circ$  и, следовательно, равны наибольшему углу исходного треугольника,  $\gamma$  в наших обозначениях. Значит, углы  $\angle OPQ$  и  $\angle OQP$  равны (в каком-то порядке)  $\alpha$  и  $\beta$ . Положим  $r = OP/OQ$ . Так как углы  $\angle OQR$  и  $\angle ORQ$  тоже равны (в каком-то порядке)  $\alpha$  и  $\beta$ , отношение  $OQ/OR$  равно либо  $r$ , либо  $1/r$ . То же верно для  $OR/OP$ . Перемножим по кругу:  $OP/OQ \cdot OQ/OR \cdot OR/OP = 1$ . Левая часть равна  $r$  в ненулевой (поскольку нечетной) степени. Отсюда  $r = 1$  и  $\alpha = \beta = 30^\circ$ . Треугольник с углами  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$  разрезается на пять подобных ему, как показано на рисунке 9. Таким образом, нам удалось найти единственный (с точно-

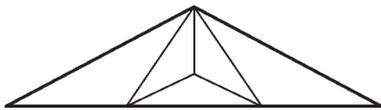


Рис. 9

стью до подобия) непрямоугольный треугольник, который можно разрезать на пять подобных ему.

Итак, задача, поставленная в начале статьи, полностью решена. Просуммируем.

На  $n$  треугольников, подобных исходному, можно разрезать:

- при  $n = 2, 3$  – любой прямоугольный треугольник и никакой другой;
- при  $n = 4$  и  $n \geq 6$  – любой треугольник;
- при  $n = 5$  – любой прямоугольный треугольник, а также треугольник с углами  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ .

**Упражнение 1.** Для прямоугольных треугольников результат следует из задачи 3. Для равнобедренных и равносторонних он очевиден: проведем высоту. Обратно, пусть треугольник разрезан на два подобных. Они прямоугольны (аналогично решению задачи 3). Два неразрезанных угла либо равны между собой (т.е. треугольник равнобедренный или равносторонний), либо равны двум разным острым углам прямоугольного треугольника. Тогда их сумма равна  $90^\circ$ , и исходный треугольник – прямоугольный.

**Упражнение 2.** а) Разделим каждую сторону треугольника на  $n$  равных частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам треугольника.

б) Аналогично упражнению 1 получаем, что малые (полученные при разрезании) треугольники прямоугольные и имеют общий катет. Так как треугольники равны, то вторые катеты тоже равны. Это означает, что в исходном треугольнике одна из высот является медианой, т.е. прилежащие стороны равны.

в) Из решения п. б) с учетом задачи 3 видно, что треугольник – равнобедренный и прямоугольный. Такой треугольник, очевидно, допускает требуемое разрезание.

**Упражнение 3.** Ответ тот же, что в упражнении 1: все прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники и только они. Для таких треугольников разрезание на три подобных понятно из предыдущего. Обратно, пусть треугольник разрезан на три подобных. Если разрезаны все три его угла, то получаем конфигурацию с рисунка 8; рассуждая как в п.б) решения задачи 9, получаем, что треугольник равносторонний. Если один из углов не разрезан, то, рассуждая как при решении задач 4 и 3, получаем, что малые треугольники прямоугольные и еще один угол исходного треугольника не разрезан. Тогда либо один из неразрезанных углов прямой, либо два таких угла равны между собой (и треугольник равнобедренный или равносторонний), либо они равны двум разным острым углам малого треугольника. В последнем случае их сумма составляет  $90^\circ$ , и исходный треугольник прямоугольный.

Осталось неисследованным единственное значение:  $n = 5$ . Не всякий треугольник разрезается на 5 попарно подобных треугольников.<sup>3</sup> Из упражнения 1 и задачи 3 видно, что годятся все прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники: разрезаем их на два подобных прямоугольных, а затем режем один из них на четыре подобных ему. Заметим, что и треугольник с рисунка 9 – равнобедренный. Тем не менее, в статье С.А. Jones, Р. Jones and А.В. Bolt, упомянутой выше, приведены шесть неравнобедренных и непрямоугольных треугольников, допускающих разрезание на 5 попарно подобных. Неизвестно, можно ли расширить этот список. Возможно, кто-то из заинтересовавшихся читателей сумеет это доказать (или опровергнуть). Автор признателен С.В. Маркелову за сведения об указанной статье и о некоторых других публикациях, упомянутых выше.

<sup>3</sup> В «Кванте» №7 за 1990 год опубликована задача А. Сойфера (M1234) на эту тему (а два ее решения опубликованы А. Сойфером и Н. Васильевым в №12 за тот же год).

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

# Устоит ли наш кораблик?

С. БОГДАНОВ, О. ПОПОВ, Д. ТАРАСОВ

МНОГИЕ ИЗ НАС МАЛЬЧИШКАМИ МАСТЕРИЛИ КОРАБЛИКИ – из досок, брусков, коробок, а иногда и из скорлупы ореха или старой калоши. Они получались разными: то легкими и верткими, как индейские каноэ, то тяжелыми и неповоротливыми, как старинные броненосцы. Некоторые были вовсе неказистыми, плавали лишь на боку, с креном, или даже переворачивались. Были и разные книги с рисунками сказочных по красоте судов с замысловатым такелажем, гордыми форштевнями и полным парусным вооружением. Был, наконец, и курс механики в университете – с отточенной простотой формул и емкими формулировками, строго очерчивающими реалии и границы возможного: «судно остойчиво, если метацентр расположен выше центра

тяжести». Все доказательно, четко и понятно, и ясны алгоритмы расчета и принципы совершенствования корпусов судов, их обводных линий, килей и шпангоутов.

И все же, притягивает то далекое, когда все было впереди и, хотя неопределенно и туманно, все было возможно. Когда чувство гордости мастера и профессионала еще не заменяло безотчетной радости от неожиданных открытий в простых делах, с обычными вещами...

А простые вещи по-прежнему дают повод и для удивления, и для маленьких открытий. А иногда позволяют по-новому посмотреть и на сложное.

**Наш кораблик.** Рассмотрим, например, длинный брусок прямоугольного сечения – чем не модель судна, ведь это основа корпуса, а остальное можно дообразить и потом достроить. Как водится, будем даже для простоты считать брусок бесконечно длинным (или, как сказал бы корабель, откажемся от рассмотрения дифферента и возможных продольных ко-

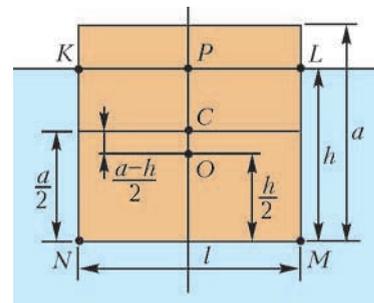


Рис. 1

лебаний). Задача ставится просто: какое из возможных положений равновесия бруска в воде будет устойчивым? В частности: при каких условиях он будет плавать «плашмя», как показано на рисунке 1?

Обозначим стороны сечения бруска  $l$  и  $a$ , а глубину погруженной части –  $h$ . Центры тяжести бруска и его погруженной части в положении равновесия обозначим точками  $C$  и  $O$  соответственно. Очевидно, что точка  $O$  совпадает с точкой приложения архимедовой силы. Из условия равновесия непосредственно следует

$$h = \frac{a\rho}{\rho_0},$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотности бруска и воды соответственно. Плотность бруска, естественно, считается меньше плотности воды, так что  $h < a$  (условие плавания).

Чтобы выяснить, является ли положение равновесия устойчивым, следует рассмотреть малое угловое отклонение бруска от вертикали на угол  $\alpha$  (рис.2). Погруженная в воду часть бруска будет теперь представлять собой прямоугольную трапецию  $NK'L'M$  с основаниями  $h+s$  и  $h-s$  и высотой  $l$ . Величину  $s = KK' = LL'$  – смещение «ватерлинии» – можно выразить через угол  $\alpha$  непосредственно из треугольника  $KPK'$ :

$$s = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Очевидно, что при отклонении от положения равновесия точка приложения архимедовой силы сместится вверх и вправо – в новое положение  $O'$ , соответствующее центру тяжести указанной трапеции.

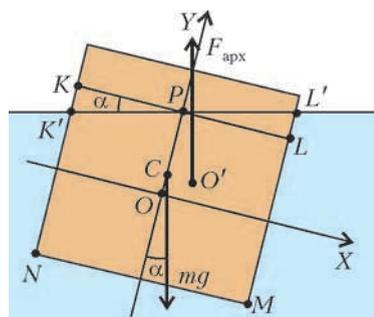


Рис. 2

Это смещение легко рассчитать. Введем систему координат  $XOY$ , как показано на рисунке 2, ее начало совпадает с точкой  $O$  приложения архимедовой силы в положении равновесия. Трапецию можно представить как сумму трех простых фигур: прямоугольника  $KLMN$ , треугольника  $PLL'$  и (со знаком «минус») треугольника  $PKK'$ . В выбранной системе координат центры тяжести этих фигур задаются координатами  $(0, 0)$ ,  $(l/3, h/2 + s/3)$ ,  $(-l/3, h/2 - s/3)$  соответственно. Учитывая также, что массы фигур пропорциональны их площадям (брусок считается однородным)  $lh$ ,  $ls/4$  и  $ls/4$ , для координат  $(x, y)$  точки  $O'$  нетрудно получить

$$x = \frac{sl}{6h}, \quad y = \frac{s^2}{6h}.$$

**Устой ли?** В смещенном положении на брусок действует пара сил: направленная вертикально вниз сила тяжести  $mg$ , приложенная к точке  $C$ , и направленная вверх архимедова сила  $F_{\text{арх}}$ , приложенная к точке  $O'$ . Очевидно, эта пара создаст возвращающий момент, если точка  $O'$  окажется правее вертикальной прямой, проходящей через точку  $C$ . Поскольку  $CO = (a - h)/2$ , уравнение этой прямой в выбранной системе координат имеет вид

$$y = \frac{a - h}{2} - x \operatorname{ctg} \alpha.$$

Соответственно, чтобы точка оказалась правее этой линии,

ее координаты должны удовлетворять неравенству<sup>1</sup>

$$y + x \operatorname{ctg} \alpha > \frac{a - h}{2}.$$

Подставляя сюда выражения для координат точки  $O'$  и учитывая соотношение  $s = (l/2) \operatorname{tg} \alpha$ , условие устойчивости запишем так:

$$\frac{l^2}{12h} - \frac{a - h}{2} + \frac{s^2}{6h} > 0.$$

Поскольку угловое смещение  $\alpha$ , а значит, и величина  $s$  предполагаются малыми, последним слагаемым в неравенстве можно пренебречь (как малой второго порядка). Учитывая теперь выражение  $h = a\rho/\rho_0$ , окончательное неравенство можно представить в следующем изящном виде:

$$\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho} + \frac{1}{6} \left( \frac{l}{a} \right)^2 \geq 0,$$

где  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$  – относительная плотность. Это неравенство задает искомые условия устойчивости в состоянии равновесия. Оно представляет собой некоторое ограничение на значения параметров  $\tilde{\rho}$  и  $l/a$ .

Переходя к анализу полученного ограничения, вначале проанализируем некоторые частные случаи.

При заданном значении  $l/a$  выражение в левой части неравенства представляет собой квадратный трехчлен по отношению к параметру  $\tilde{\rho}$ . При  $l > a\sqrt{3/2}$  дискриминант этого трехчлена отрицателен, и неравенство выполняется при любых допустимых значениях  $\tilde{\rho}$ . Это означает, что при указанном соотношении ширина-высота брусок всегда будет плавать плашмя (большая сторона параллельна поверхности воды) и это положение будет устойчивым.

В предельном случае  $l/a \rightarrow 0$  неравенство принимает особенно простой вид:  $\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho} \geq 0$ , или, что эквивалентно,  $\tilde{\rho} \leq 0$ ,  $\tilde{\rho} \geq 1$ . Но это противоречит условию задачи ( $\tilde{\rho} \in (0; 1)$ ), откуда приходим к заключению, что вертикальное устойчивое положение в указанном пределе невозможно.

В общем случае полученное решение поставленной задачи для наглядности удобно представить графически на плоскости с осями  $l/a$  и  $\tilde{\rho}$  (рис.3). Граница области устойчивого равновесия, определяемой исследуемым неравенством, зада-

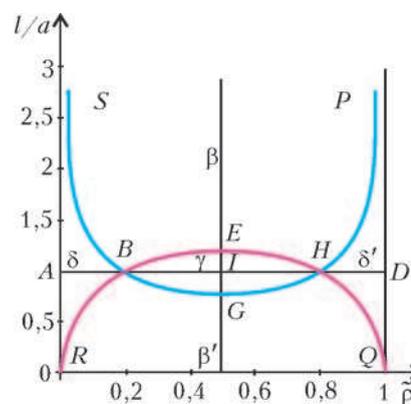


Рис. 3

<sup>1</sup> Это неравенство можно интерпретировать и другим, более каноническим образом. Точка  $S$  пересечения вертикали, проходящей через  $O'$ , с осью  $OY$  называется метacentром, а отрезок  $CS$ , длина которого как раз определяется левой частью неравенства, – метацентрической высотой  $h_0$ . Таким образом, неравенство можно записать в очень простом виде:  $h_0 > 0$ , что фактически эквивалентно приведенному в начале статьи «теоретическому» условию устойчивого плавания.

ется уравнением

$$\left(\frac{l/a}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\rho} - 1/2}{1/2}\right)^2 = 1, \quad (*)$$

которому соответствует эллипс с полуосями  $(1/2, \sqrt{3/2})$ .

Область вне эллипса соответствует значениям параметров, при которых положение равновесия устойчиво. В частности, область, ограниченная снизу контуром  $ABEHD$ , отвечает устойчивому плаванию в положении «плашмя» ( $l > a$ ). С другой стороны, двухсвязная область вне эллипса, ограниченная сверху отрезками  $AB$  и  $HD$ , соответствует таким положениям равновесия, когда большая сторона сечения расположена вертикально.

Анализ устойчивости равновесия для значений параметров, соответствующих внутренней части эллипса, требует более тщательного рассмотрения. Основным результатом здесь тоже интерпретируется легко: при этих значениях параметров отвечающие им положения равновесия неустойчивы. В частности, область, ограниченная сверху контуром  $RBHQ$ , соответствует неустойчивому плаванию на меньшей стороне (на торце), а криволинейный треугольник  $BEH$  соответствует значениям параметров, при которых неустойчиво положение «плашмя».

Эти выводы, однако, можно существенно усилить и дополнить, если принять во внимание, что каждому бруску соответствуют в действительности два значения геометрического параметра – «основное»  $l/a$  и обратное ему  $a/l$  – и, как следствие, две точки на графике. Таким образом, полный вывод о всех возможных положениях равновесия каждого тела можно сделать, принимая во внимание положение обеих этих точек. В этой связи для более наглядной интерпретации результатов удобно использовать и «инверсную» по отношению к эллипсу линию  $SBGHP$ , которая также приведена на рисунке 3. Действительно, две эти линии разбивают физическую область на три домена, которым соответствуют различные типы равновесия.

Первый из них, задаваемый двухсвязной областью  $\delta$  и  $\delta'$  в устойчивой зоне, характерен тем, что «инвертирование» любой точки не выводит ее за пределы этого домена. Физически это соответствует возможности устойчивого равновесия в обоих положениях: и «плашмя», и на торце.

Второй домен также состоит из двух частей: области  $\beta$  из устойчивой зоны и области  $\beta'$  из неустойчивой зоны внутри эллипса. Ранее было показано, что в области  $\beta'$  плавание на торце неустойчиво. Однако, как теперь становится ясным, у этой неустойчивости есть альтернатива. Ведь каждой из точек области  $\beta'$  соответствует инверсная точка в области  $\beta$ , описывающей устойчивое плавание «плашмя». Другими словами, обеим областям этого домена соответствует устойчивое плавание «плашмя».

Наконец, третий домен ограничен контуром  $BEHG$  в неустойчивой зоне, и инверсия не выводит его точки за пределы этого контура. Это означает, что любое горизонтальное – «плашмя» или на торце – положение равновесия будет здесь неустойчивым. Более подробный анализ устойчивости в этом случае представляет собой самостоятельную и довольно трудную задачу. Однако в качестве дополнения можно сделать два замечания, относящихся к особой точке  $I$  и точкам контура  $BEHG$ ; здесь физика достаточно прозрачна.

Точка  $I$  соответствует бруску квадратного сечения с относительной плотностью  $\tilde{\rho} = 1/2$ . Здесь в положении устойчивого равновесия ватерлиния совпадает с диагональю квадрата.

Верхней границе  $BEH$  домена соответствуют значения параметров  $l/a$  и  $\tilde{\rho}$ , при которых нестрогое неравенство обращается в равенство. Физически это означает, что брусок будет находиться в состоянии безразличного равновесия: точка приложения архимедовой силы при любом отклонении от исходного равновесного состояния будет оставаться на вертикали, проходящей через центр тяжести  $S$  бруска, и пара сил будет обладать нулевым моментом.

«Ходовые испытания». При планировании и проведении опытов целесообразно принять во внимание некоторые «реперные» значения параметров. К ним можно, в частности, отнести координаты точек  $E(0,5, \sqrt{3/2})$  и инверсной ей точки  $G(0,5, \sqrt{2/3})$ , а также «точек ветвления»  $B((1 - 1/\sqrt{3})/2, 1)$  и  $H((1 + 1/\sqrt{3})/2, 1)$ . Как следствие, можно, например, сразу сделать вывод о том, что для наблюдения устойчивого плавания на торце нужно использовать материалы с относительной плотностью  $\tilde{\rho} \leq (1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0,2$  или  $\tilde{\rho} \geq (1 + 1/\sqrt{3}) \approx 0,8$ .

Результаты некоторых экспериментов, проведенных с брусками<sup>2</sup> различного типа, приведены в таблице и проиллюстрированы рисунком 4. В большинстве случаев «критические» значения параметров, при которых происходит смена режима устойчивости, удалось установить достаточно точно

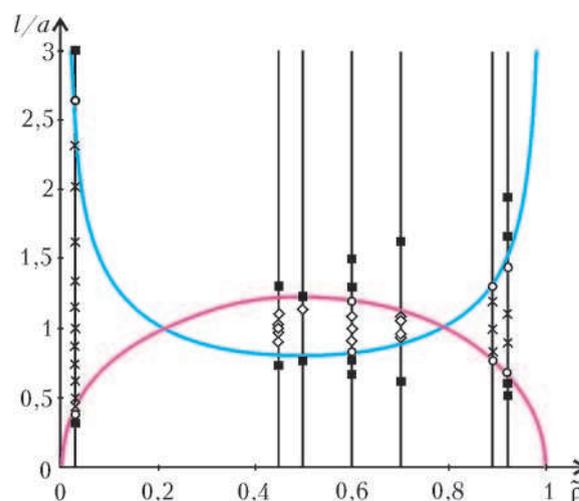


Рис. 4. Брусок плавает:  $\times$  на обеих сторонах,  $\diamond$  — наклонно,  $\circ$  — неустойчиво,  $\blacksquare$  — плашмя

и в хорошем соответствии со значениями, рассчитанными по формуле (\*). В частности, для пенопластовых ( $\tilde{\rho} \approx 0,03$ ) и восковых ( $\tilde{\rho} \approx 0,92$ ) брусков устойчивое плавание на меньшей стороне (на торце) наблюдалось лишь при  $2,64 \geq l/a \geq 0,38$  и  $1,44 \geq l/a \geq 0,69$  при соответствующих расчетных значениях 0,42 и 0,66.

**Вместо заключения.** Мы достигли своей цели, если результат оказался читателям неожиданным и простым или — неожиданно простым. Далее — дело техники: соотношение (\*) и соответствующий ему рисунок 3 можно использовать как простой краткий справочник: под данный материал ( $\tilde{\rho}$ ) выбрать значение параметра  $l/a$  (например, из устойчивой зоны  $\beta$ , с известным запасом прочности) — и основа корпуса готова. Остается выстрогать по контуру обводные линии и укрепить мачту. Кораблик готов и, хоть и плоскодонный, будет плавать устойчиво.

<sup>2</sup> Очевидно, экспериментировать можно и с пустыми коробками: все выкладки и выводы справедливы и для этого случая.

Таблица

«Критические» значения геометрического параметра: экспериментальные и расчетные (последние отмечены звездочкой)

Материал	$\tilde{\rho}$	$(l/a)^*$	$(a/l)^*$	$l$	$a$	$l/a$	$a/L$	Плавают
Пенопласт	0,03	2,39	0,42	8,10	8,10	1,00	1,00	на обеих сторонах
				8,10	7,00	1,16	0,86	на обеих сторонах
				8,10	6,00	1,35	0,74	на обеих сторонах
				8,10	5,00	1,62	0,62	на обеих сторонах
				8,10	4,00	2,03	0,49	на обеих сторонах
				8,10	3,50	2,31	0,43	на обеих сторонах
				8,10	3,07	2,64	0,38	неустойчиво
8,10	2,70	3,00	0,33	плашмя				
Ель	0,6	1,20	0,83	6,00	5,50	1,09	0,92	наклонно
				9,00	7,50	1,20	0,83	неустойчиво
				9,00	6,00	1,50	0,67	плашмя
				6,50	5,00	1,30	0,77	плашмя
8,50	8,50	1,00	1,00	наклонно, практически на ребре				
Воск (свечной)	0,92	1,50	0,66	3,50	1,80	1,94	0,51	плашмя
				3,00	1,80	1,67	0,60	плашмя
				2,60	1,80	1,44	0,69	неустойчиво
				2,00	1,80	1,11	0,90	на обеих сторонах

Если же хочется построить нечто более изящное и надежное, можно рассмотреть брусок более сложного, например трапециидального, сечения, близкого к реальным профилям судов. Наверное, значительно повлияет на результат учет килля, балласта.

Отдельная тема – обводные линии.

Пробуйте – может быть, удастся получить что-то еще более простое и неожиданное.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

# Задачи на смешение идеальных газов

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ОСТАНОВИМСЯ НА ЗАДАЧАХ, ГДЕ ДВА идеальных газа переходят из начального состояния в конечное смешиваясь друг с другом. Задачи такого типа встречаются в двух разделах – в газовых законах и в термодинамике. Если начальные и конечные температуры газов заданы в условии, то в решении используются только газовые законы – уравнение состояния идеального газа и закон Дальтона для парциальных давлений. Если же для определения конечных параметров нужен закон сохранения энергии, то такие задачи относятся к термодинамике.

**Задача 1.** Под каким давлением надо наполнить воздухом баллон емкостью 10 л, чтобы при соединении его с баллоном емкостью 30 л, содержащим воздух при давлении 100 кПа, установилось общее давление 200 кПа? Температура постоянна.

**Решение.** Эту задачу можно решать двумя способами – либо через закон Дальтона, который позволяет разделить газы и следить за изменением состояния каждого газа в отдельности, либо через уравнение состояния Менделеева–Клапейрона и закон сохранения количества вещества.

*Способ 1.* Конечное давление  $p'$  равно сумме парциальных конечных давлений  $p'_1$  и  $p'_2$  обеих порций воздуха:

$$p' = p'_1 + p'_2,$$

каждое из которых связано с соответствующим начальным давлением уравнением изотермического процесса:

$$p_1 V_1 = p'_1 (V_1 + V_2),$$

$$p_2 V_2 = p'_2 (V_1 + V_2).$$

Сложив два последних уравнения, с учетом первого уравнения получим

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = p' (V_1 + V_2), \tag{1}$$

откуда найдем искомое давление:

$$p_1 = \frac{p' (V_1 + V_2) - p_2 V_2}{V_1} = 500 \text{ кПа}.$$

*Способ 2.* Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона

для двух начальных состояний и для одного конечного:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= \nu_1 RT, \\ p_2 V_2 &= \nu_2 RT, \\ p'(V_1 + V_2) &= \nu' RT. \end{aligned} \quad (2)$$

Выразив из каждого уравнения соответствующее количество молей и подставив в закон сохранения количества вещества

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu',$$

снова получим уравнение (1).

**Задача 2.** Два сосуда, содержащие один и тот же идеальный газ, соединены тонкой трубкой с краном. Вначале кран закрыт, в первом сосуде объемом 10 л давление 180 кПа и температура 300 К, во втором сосуде объемом 20 л давление 150 кПа и температура 200 К. Каким станет давление, если открыть кран и установить в сосудах температуру 400 К?

**Решение.** Эту задачу можно решить любым из двух способов, описанных в предыдущей задаче. В первом способе, через закон Дальтона, надо для каждого газа записать не уравнение изотермического процесса, а объединенный газовый закон. Во втором способе надо в трех уравнениях состояний системы (2) поставить различные температуры. В любом из способов мы вместо уравнения (1) получим уравнение

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p'(V_1 + V_2)}{T'}. \quad (3)$$

Подставив численные данные, найдем установившееся давление смеси газов:

$$p' = 280 \text{ кПа.}$$

В некоторых случаях условие задачи сформулировано так, что без записи уравнения состояния решить ее не получится.

**Задача 3.** Два баллона соединены между собой тонкой трубкой с краном. В одном баллоне находится газ массой 2 г под давлением 400 кПа, в другом – такой же газ массой 4 г под давлением 200 кПа. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температуры газа в баллонах одинаковы.

**Решение.** В этой задаче заданы не объемы, а массы газов. Чтобы воспользоваться уравнением (1), надо с помощью уравнений Менделеева–Клапейрона найти отношение объемов  $V_1/V_2$ . Однако более естественно переписать уравнения системы (2) в виде

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= \frac{m_1}{M} RT, \\ p_2 V_2 &= \frac{m_2}{M} RT, \\ p'(V_1 + V_2) &= \frac{m_1 + m_2}{M} RT, \end{aligned}$$

выразить  $V_1$  и  $V_2$  из первых двух уравнений и подставить в третье. Получим

$$p' \left( \frac{m_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} \right) = m_1 + m_2,$$

откуда найдем  $p' = 240$  кПа.

В некоторых задачах использование уравнений Менделеева–Клапейрона на первый взгляд не является обязательным (в условии не упоминаются ни массы газов, ни их молярные массы). Однако после внимательного анализа оказывается, что без них решить задачу не удастся.

**Задача 4.** Два одинаковых сосуда соединены тонкой трубкой. Система наполнена газом и находится при температуре 27 °С. Температуру одного из сосудов увеличили

на 33 °С. На сколько градусов надо уменьшить температуру другого сосуда, чтобы давление в системе не изменилось?

**Решение.** При изменении температуры сосудов между газами в них поддерживается механическое равновесие, т.е. давления в этих сосудах все время выравниваются. Для выравнивания давлений газ из нагреваемого сосуда переходит в охлаждаемый, а попав туда, принимает температуру холодного сосуда. Именно поэтому не удастся проследить за изменением состояния каждого газа в отдельности. Подход же, основанный на сохранении общего количества вещества, прекрасно срабатывает.

Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для первоначального состояния и для двух конечных состояний:

$$\begin{aligned} p \cdot 2V &= \nu RT, \\ p'V &= \nu'_1 RT'_1, \\ p'V &= \nu'_2 RT'_2, \end{aligned}$$

выразим из них количества вещества и подставим в уравнение

$$\nu = \nu'_1 + \nu'_2.$$

Получим

$$\frac{2p}{T} = \frac{p'}{T'_1} + \frac{p'}{T'_2}.$$

Поскольку по условию  $p' = p$ , то

$$T'_2 = \frac{TT'_1}{2T'_1 - T} = 273 \text{ К,}$$

т.е. второй сосуд надо охладить на 27 К (на 27 °С).

К задачам на смешение газов можно также отнести задачи, где при определенных условиях происходит частичная диссоциация газов.

**Задача 5.** При повышении температуры азота, заключенного в закрытый сосуд, от 7 °С до 1407 °С третья часть молекул азота распалась на атомы. Во сколько раз при этом возросло давление газа?

**Решение.** При диссоциации третья часть массы азота превратилась в одноатомный газ, т.е. в газ с молярной массой вдвое меньшей, чем у двухатомного. Запишем уравнения состояния для изначального газа и для каждого из компонентов образовавшейся смеси:

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M} RT, \\ p'_1 V &= \frac{2m/3}{M} RT', \\ p'_2 V &= \frac{m/3}{M/2} RT'. \end{aligned}$$

Складывая последние два уравнения и учитывая, что по закону Дальтона

$$p'_1 + p'_2 = p',$$

получаем

$$p'V = \frac{4}{3} \frac{m}{M} RT',$$

или

$$\frac{p'}{p} = \frac{4}{3} \frac{T'}{T} = 8.$$

Впрочем, если использовать запись уравнения состояния  $pV = \nu RT$  и понимать, что  $\nu$  соответствует общему количеству идеального газа, независимо от состава и типа молекул, то нетрудно сообразить, что общее число молекул увеличилось на одну треть, т.е.  $\nu' = \frac{4}{3}\nu$ , и сразу получить ответ.

К этим задачам естественно присоединить задачи на изменение состояния влажного воздуха. Правда, задачи на влажность традиционно относятся к термодинамике, но решаются они исключительно с помощью газовых законов с учетом того факта, что давление водяного пара не может превышать давление насыщенного пара при данной температуре.

**Задача 6.** В закрытом сосуде при температуре 100 °С находится влажный воздух под давлением 1,5 атм. После того как объем сосуда изотермически уменьшили в 3 раза, давление возросло до 4,3 атм. Чему была вначале равна относительная влажность? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

**Решение.** Анализируя изменение состояния влажного воздуха, необходимо мысленно разделять его на два компонента – водяной пар, т.е. газ молекул воды, и сухой воздух, т.е. газ всех остальных молекул. Сухой воздух подчиняется обычным газовым законам, а давление водяного пара не может стать больше давления насыщенного пара  $p_n$  при данной температуре. Если давление пара получится больше, то надо положить конечное давление пара равным  $p_n$  (при достижении этого давления началась конденсация, и давление перестало возрастать).

В данном случае рассуждением от противного можно сразу установить, что в процессе сжатия вода конденсировалась, т.е. в конечном состоянии сосуд содержит насыщенный пар в равновесии с некоторым количеством сконденсировавшейся воды. Иначе давление всего газа в изотермическом процессе увеличилось бы в 3 раза и было бы равно 4,5 атм.

Поскольку установившееся давление в сосуде складывается из давления воздуха и давления пара:

$$p_2 = p_{в2} + p_{п2} = p_{в2} + p_n$$

и при 100 °С давление пара  $p_n = 1$  атм, конечное давление сухого воздуха  $p_{в2} = 3,3$  атм. Применяя к сухому воздуху уравнение изотермического процесса  $p_{в1}V_1 = p_{в2}V_2$ , находим, что начальное давление воздуха  $p_{в1} = 1,1$  атм, а начальное давление пара  $p_{п1} = p_1 - p_{в1} = 0,4$  атм.

Следовательно, относительная влажность в начальном состоянии составляла

$$\varphi = \frac{p_{п1}}{p_n} \cdot 100\% = 40\% .$$

В термодинамических задачах в условии обычно приводятся сведения, необходимые для записи закона сохранения энергии. Чаще всего указывается, что система теплоизолирована, т.е. не обменивается теплом с окружающей средой. В некоторых задачах, наоборот, задается точное количество теплоты, переданное системе (или отобранное у системы). Напомним, что внутренняя энергия одноатомного идеального газа (гелий, аргон) равна

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV . \quad (4)$$

**Задача 7.** В двух теплоизолированных сосудах, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий в количествах 2 моль и 3 моль при температурах 300 К и 400 К соответственно. Какой станет температура после открывания крана и установления теплового равновесия?

**Решение.** Запишем для системы двух газов закон сохранения энергии, выражая внутреннюю энергию через температуру (см. равенство (4)):

$$\frac{3}{2} \nu_1 RT_1 + \frac{3}{2} \nu_2 RT_2 = \frac{3}{2} \nu' RT' .$$

Используя закон сохранения количества вещества

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu' ,$$

найдем установившуюся температуру:

$$T' = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 360 \text{ К} .$$

Отметим, что конечная температура не зависит от того, какими были начальные давления газов.

**Задача 8.** В двух теплоизолированных сосудах объемами 2 л и 5 л, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий под давлениями 30 кПа и 16 кПа соответственно, но при разных температурах. Каким будет давление после открывания крана и установления теплового равновесия?

**Решение.** В этом случае используем в законе сохранения энергии ту из формул (4), где внутренняя энергия выражена через объем и давление:

$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p' (V_1 + V_2) .$$

Отсюда находим

$$p' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 20 \text{ кПа} .$$

Заметим, что конечное давление не зависит, при заданных начальных давлениях, от температур смешиваемых газов. Интересно, что закон сохранения энергии для смешивания газов в теплоизолированных сосудах приводит, независимо от начальных температур газов, к такому же ответу, как при изотермическом смешивании (см. формулу (1)).

**Задача 9.** В двух теплоизолированных сосудах объемами 10 л и 20 л, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий под давлениями 180 кПа и 150 кПа при температурах 100 К и 500 К соответственно. Какой будет температура после открывания крана и установления теплового равновесия?

**Решение.** Как мы видели в задаче 8, конечное давление можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p' (V_1 + V_2) ,$$

причем начальные температуры в ответ не входят. Для нахождения конечной температуры запишем закон сохранения количества вещества в виде (см. формулу (3))

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p' (V_1 + V_2)}{T'}$$

Окончательно, для установившейся температуры получаем

$$T' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}} = 200 \text{ К} .$$

### Упражнения

**1.** Три одинаковых сосуда, соединенных тонкими трубками, заполнены газообразным гелием при температуре 40 К. Затем один из сосудов нагрели до 100 К, другой – до 400 К, а температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз увеличилось давление в системе?

**2.** В сосуде при температуре 100 °С находится влажный воздух с относительной влажностью 90% под давлением 1 атм. Объем сосуда изотермически уменьшили в 2 раза. На сколько процентов надо вместо этого увеличить абсолютную температуру воздуха, чтобы получить такое же конечное давление? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

**3.** Два теплоизолированных сосуда одного и того же объема соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде находится гелий при температуре 200 К, а в другом – гелий при температуре 400 К и при давлении в 3 раза большем, чем в первом сосуде. Какой станет температура (в кельвинах) газа после открывания крана и установления теплового равновесия?



3. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $K$  и  $M$  соответственно так, что  $KM \parallel AC$ . Отрезки  $AM$  и  $KC$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $AK = AO$  и  $KM = MC$ . Докажите, что  $AM = KB$ .

*М. Мурашкин*

4. Турнир, в котором участвовали 20 спортсменов, судили 10 арбитров. Каждый сыграл с каждым один раз, и каждую встречу судил ровно один арбитр. После окончания каждой игры оба участника фотографировались с арбитром. Через год после турнира была найдена стопка из всех этих фотографий (по фотографии неясно, кто на ней игроки, а кто – арбитр). Оказалось, что не про каждого можно определить, кем он является – спортсменом или арбитром. Сколько могло быть таких людей?

*Б. Френкин*

5. Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых шести нашлись 3, лежащие на одной прямой. (На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)

*А. Акопян*

6. У игрока есть  $M$  золотых и  $N$  серебряных монет. В начале каждого раунда игрок ставит какие-то монеты на красное, какие-то на черное (можно вообще ничего не ставить на один из цветов, часть монет можно никуда не ставить). В конце каждого раунда крупье объявляет, что один из цветов выиграл. Ставку на выигравший цвет крупье отдает игроку, удваивая в ней количество монет каждого вида, а ставку на проигравший цвет забирает себе. Игрок хочет, чтобы монет одного вида у него стало ровно в три раза больше, чем другого (в частности, его устроит остаться совсем без денег). При каких  $M$  и  $N$  крупье не сможет ему помешать?

*А. Чеботарев*

### 9 класс

1. Две команды КВН участвуют в игре из четырех конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку – целое число от 1 до 5; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырех полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей?

*А. Горбачев*

2. Велосипедист путешествует по кольцевой дороге, двигаясь в одном направлении. Каждый день он проезжает 71 км и останавливается ночевать на обочине. На дороге есть аномальная зона длиной 71 км. Если велосипедист останавливается в ней на ночлег на расстоянии  $y$  км от одной границы зоны, просыпается он в противоположном месте зоны, на расстоянии  $y$  км от другой ее границы. Докажите, что в каком бы месте велосипедист ни начал свое путешествие, рано или поздно он в этом месте заснет или проснется.

*Г. Колоцкий*

3. Пусть  $AL$  – биссектриса треугольника  $ABC$ ,  $O$  – центр описанной около этого треугольника окружности,  $D$  – такая точка на стороне  $AC$ , что  $AD = AB$ . Докажите, что прямые  $AO$  и  $LD$  перпендикулярны.

*Р. Женодаров*

4. Назовем *усложнением* числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого

невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

*А. Горбачев*

5. У Васи есть 100 банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит 1 рубль, на другой 2 рубля, и так далее, на последней 100 рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить?

*И. Митрофанов*

6. Покажите, что существует выпуклая фигура, ограниченная дугами окружностей, которую можно разрезать на несколько частей и из них сложить две выпуклые фигуры, ограниченные дугами окружностей.

*И. Иванов-Погодаев, А. Малистов*

### 10 класс

1. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем 3 м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна 7?

*А. Каибханов*

2. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке  $p$  стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот сместится на это расстояние, и т.д. При каких  $p$  Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек 0 или 1 вне зависимости от действий Бориса?

*Д. Баранов*

3. Все целые числа от  $-33$  до 100 включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число, ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получиться целое число?

*И. Богданов*

4. Докажите, что если некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в  $k$  целых точках значения среди чисел от 1 до  $k - 1$ , то при  $k \geq 6$  эти значения равны.

*М. Малкин*

5. Высоты  $AA'$  и  $CC'$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точка  $B_0$  – середина стороны  $AC$ . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных  $BB_0$  и  $HB_0$  относительно биссектрис углов  $ABC$  и  $AHC$  соответственно, лежит на прямой  $A'C'$ .

*А. Заславский*

6. Натуральные числа покрашены в  $N$  цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет суммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда желтая).

а) Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет.

б) При каких  $N$  такая раскраска возможна?

*А. Шаповалов*

## 11 класс

1. Числа  $p$  и  $q$  таковы, что параболы  $y = -2x^2$  и  $y = x^2 + px + q$  пересекаются в двух точках, ограничивая некоторую фигуру. Найдите уравнение вертикальной прямой, делящей площадь этой фигуры пополам.

*И.Сергеев*

2. Найдите наименьшее натуральное  $n$ , для которого число  $n^n$  не является делителем числа  $2008! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2008$ .

*В.Ушаков*

3. На едином экзамене 333 ученика допустили в общей сложности 1000 ошибок. Возможно ли при этом, что учеников, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось больше, чем учеников, сделавших менее чем по 4 ошибки?

*А.Галочкин*

4. Через центр  $O$  вписанной в треугольник  $ABC$  окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой  $AO$  и пересекающая прямую  $BC$  в точке  $M$ . Из точки  $O$  на прямую  $AM$  опущен перпендикуляр  $OD$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной окружности.

*В.Филимонов*

5. Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с

ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите: а) наименьшее такое число; б) все такие числа.

*В.Алексеев*

6. Игрок на компьютере управляет лисой, охотящейся за двумя зайцами. В вершине  $A$  квадрата  $ABCD$  находится нора: если в нее, в отсутствие лисы, попадает хотя бы один заяц, то игра проиграна. Лиса ловит зайца, как только оказывается с ним в одной точке (возможно, в точке  $A$ ). Вначале лиса сидит в точке  $C$ , а зайцы – в точках  $B$  и  $D$ . Лиса бегает повсюду со скоростью не больше  $v$ , а зайцы – по лучам  $AB$  и  $AD$  со скоростью не больше 1. При каких значениях  $v$  лиса сможет поймать обоих зайцев?

*А.Канунников*

7. Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на любую плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника: а) больше чем  $\frac{1}{4}$ ; б) не меньше чем  $\frac{1}{9}$ ; в) не меньше чем  $\frac{1}{7}$ ?

*О.Косухин*

*Публикацию подготовил Б.Френкин*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## Первый теоретический тур

### 7 класс

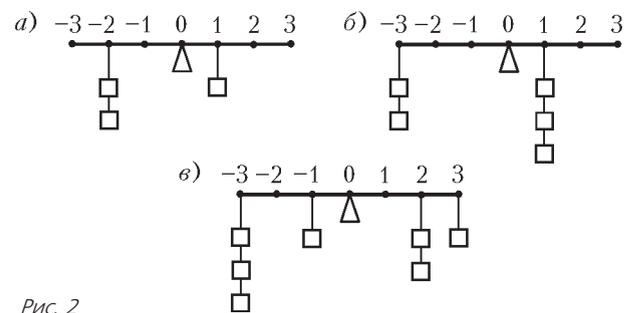
1. Строение кристалла некоторого металла схематически показано на рисунке 1. Атомы находятся в вершинах кубиков и образуют кубическую кристаллическую решетку. Известно, что плотность этого металла  $\rho = 7900 \text{ кг/м}^3$ , а масса одного атома  $m_0 = 9,3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$ . Найдите объем  $V_0$  одного кубика – элементарной ячейки данной кристаллической решетки.

*Рис. 1*

2. Ученик измерил плотность деревянного бруска, покрашенного краской, и она оказалась равной  $\rho = 600 \text{ кг/м}^3$ . На самом деле брусок состоит из двух частей, равных по массе, но плотность одной части в два раза больше плотности другой. Найдите плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  обеих частей бруска. Массой краски можно пренебречь.

*М.Ромашка*

3. На рисунке 2 изображены рычаги, на которых имеются крючки, прикрепленные через одинаковые расстояния. Крюч-



*Рис. 2*

ки пронумерованы от  $-3$  до  $3$ , причем  $0$  приходится на середину рычага. К некоторым крючкам прикреплено по несколько грузов одной и той же массы. Имеется еще один такой же не подвешенный груз. К крючку с каким номером  $n$  его нужно подвесить, чтобы рычаг находился в равновесии? Решите задачу для каждого из трех случаев, представленных на рисунке.

*М.Ромашка*

4. К потолку над горизонтальным столом подвешена пружина. Если к ее концу прикрепить груз и дожидаться установления равновесия, груз окажется на столе при условии, что его масса  $m$  превосходит значение  $m_0 = 400 \text{ г}$ . С какой силой  $F$  груз массой  $m > m_0$  будет давить на стол?

Размерами груза по сравнению с растяжением пружины можно пренебречь. Отношение действующей на груз силы тяжести к массе груза (эта величина называется ускорением свободного падения) равно  $g = 10 \text{ Н/кг} = 10 \text{ м/с}^2$ . Решите задачу в общем случае и при  $m = 1 \text{ кг}$ .

*М.Ромашка*

5. Поплавок для рыболовной удочки имеет объем  $V = 5 \text{ см}^3$  и массу  $m = 2 \text{ г}$ . К поплавку на леске прикреплено свинцовое грузило, и при этом поплавок плавает, погрузившись на половину своего объема. Найдите массу грузила  $M$ . Плотность воды  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность свинца  $\rho_c = 11300 \text{ кг/м}^3$ .

*М.Ромашка*

### 8 класс

1. Два экскурсионных автобуса со школьниками должны были отправиться из Москвы в Санкт-Петербург, но один из автобусов задержался с отправлением. Когда задержавшийся автобус выехал, первый автобус находился на расстоянии  $s = 20 \text{ км}$  от места отправления. За время, за которое задержавшийся автобус проехал  $20 \text{ км}$ , первый автобус проехал  $s_1 = 16 \text{ км}$ . Нахождение расстояния  $\Delta s = 1 \text{ км}$  второй автобус затрачивает на  $\Delta t = 12 \text{ с}$  меньше, чем первый. На каком расстоянии  $L$  от места отправления второй автобус догонит первый? Чему равны скорости автобусов  $v_1$  и  $v_2$ ? Считайте, что пробок на дороге нет и скорости автобусов не меняются.

*М.Ромашка*

2. В сосуды, соединенные трубкой с краном, налита вода (рис.3). Гидростатические давления в точках  $A$  и  $B$  равны  $p_A = 4 \text{ кПа}$  и  $p_B = 1 \text{ кПа}$  соответственно, площади поперечного сечения левого и правого сосудов составляют

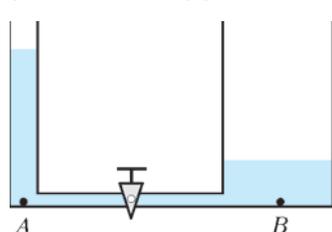


Рис. 3

$S_A = 3 \text{ дм}^2$  и  $S_B = 6 \text{ дм}^2$  соответственно. Какие гидростатические давления установятся в точках  $A$  и  $B$ , если открыть кран?

*М.Ромашка*

3. Парафиновая свечка горит так, что ее длина уменьшается со скоростью  $u = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$ , а испаряющийся парафин полностью сгорает, не стекая вниз. Свечка плавает в широком сосуде с водой. Ее слегка поддерживают в вертикальном положении, чтобы она не опрокидывалась. С какой скоростью  $v$  свечка движется относительно сосуда во время сгорания? Плотность воды  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность парафина  $\rho_n = 900 \text{ кг/м}^3$ .

*М.Ромашка*

### 9 класс

1. К вертикальной стенке через равные интервалы прикреплены баскетбольные кольца, пронумерованные от 0 до 10 (рис.4). Стремясь попасть в одно из колец, школьник бросил мяч из точки  $A$  точно по направлению к кольцу с номером 0. В некоторый момент полета мяч находился в точке  $B$ . В какое из баскетбольных колец он попадет? Влиянием воздуха пренебречь.

*С.Варламов*

2. Коробка массой  $M$  подвешена на нитке к потолку комнаты (рис.5). Внутри коробки на легкой пружине подвешен груз массой  $m$ . Нитку пережигают. Найдите ускорения

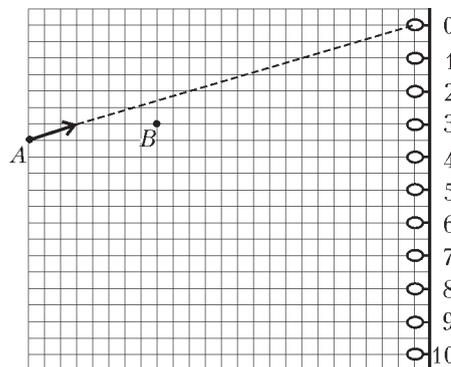


Рис. 4

груза и коробки сразу после пережигания нити. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

*М.Ромашка*

3. На станции глубокого заложения в Московском метрополитене длина эскалатора  $L = 100 \text{ м}$ , угол его наклона к горизонту  $\alpha = 22,5^\circ$ , а скорость движения  $v = 1,2 \text{ м/с}$ . Какова должна быть минимальная мощность  $N$  электромотора, приводящего в движение эскалатор, чтобы в «час пик», когда эскалатор плотно заполнен людьми, этот мотор мог справиться с нагрузкой при движении вверх? Считать, что люди в среднем имеют массу  $m = 70 \text{ кг}$  и располагаются в два ряда на среднем расстоянии друг от друга (по горизонтали)  $l = 50 \text{ см}$ , а КПД механической части эскалатора  $\eta = 0,7$ .

*М.Семенов*

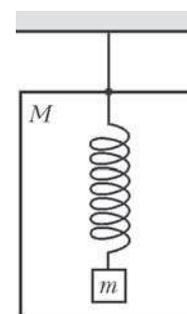


Рис. 5

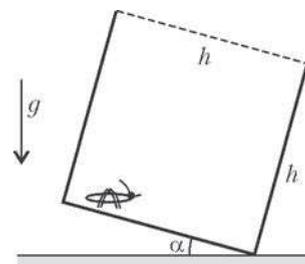
4. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 6, подключена к батарейке. Вольтметры  $V_1$  и  $V_2$  показывают напряжения  $U_1 = 1 \text{ В}$  и  $U_2 = 0,1 \text{ В}$ , а амперметр  $A$  показывает силу тока  $I = 1 \text{ мА}$ . Найдите сопротивления приборов. Вольтметры считайте одинаковыми.

Рис. 6

*О.Шведов*

### 10 класс

1. В открытой прямоугольной коробке сидит кузнечик (рис.7), который умеет прыгать с начальной скоростью  $v_0 = 3 \text{ м/с}$  под любым углом к горизонту. На какой минимальный угол  $\alpha$  к горизонту нужно наклонить коробку, чтобы кузнечик смог из нее выпрыгнуть? Считать, что каждая грань коробки является квадратом со стороной  $h = 52 \text{ см}$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.



*И.Горбатов* Рис. 7

2. Железный кубик со стороной  $a$  подвешен на пружине жесткостью  $k$  и в начальный момент касается нижней горизонтальной гранью поверхности воды в сосуде (рис.8). В сосуд начинают медленно доливать воду так, что ее уровень поднимается со скоростью  $v_1$ . С какой скоростью  $v_2$  относительно сосуда будет при этом двигаться кубик? Плотность

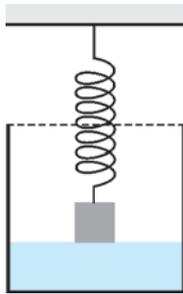


Рис. 8

воды равна  $\rho$ , ускорение свободного падения равно  $g$ .

*И.Горбатый*

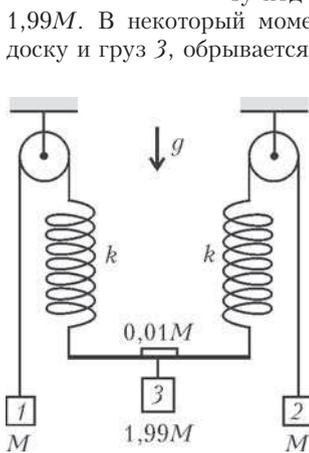


Рис. 9

3. Легкая доска подвешена за края на двух пружинах жесткостью  $k$  каждая, к другим концам которых прикреплены нерастяжимые нити, перекинутые через неподвижные блоки и соединенные с грузами 1 и 2 массой  $M$  каждый (рис.9). На середине доски лежит шайба массой  $0,01M$ , к доске снизу под шайбой подвешен груз 3 массой  $1,99M$ . В некоторый момент времени нить, связывающая доску и груз 3, обрывается. На какую максимальную высоту  $h$  относительно своего первоначального положения подскочит шайба? Нити, блоки и пружины считать невесомыми, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно  $g$ .

*С.Варламов*

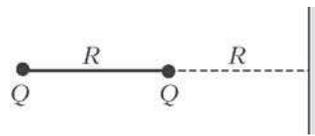


Рис. 10

4. Непроводящий стержень длиной  $R$  имеет два одинаковых точечных заряда  $Q$  на своих концах и расположен перпендикулярно проводящей незаряженной плоскости большого размера (рис.10). Расстояние от плоскости до ближайшего к ней конца стержня также равно  $R$ . Определите силу  $F$ , действующую на стержень с зарядами со стороны плоскости.

*Р.Компанеец*

**11 класс**

1. Две материальные точки 1 и 2 массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно находятся на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости и связаны невесомой нерастяжимой нитью длиной  $L$ . Вначале точка 1 закреплена, а точка 2 движется вокруг нее по окружности. Затем точку 1 освобождают, и точка 2 начинает двигаться по траектории, изображенной на рисунке 11. Найдите шаг траектории  $h$  и ширину петли  $d$ .

Рис. 11

*М.Ромашка*

2. Явление застоя заключается в том, что максимальная сила трения покоя при контакте двух тел немного больше, чем сила трения скольжения. Для изучения этого явления провели следующий опыт. К лежащему на горизонтальном столе бруску массой  $m$  прикрепили пружину жесткостью  $k$ . Свободный конец пружины начали прямолинейно, равномерно и очень медленно перемещать, удаляя его от бруска. В этом опыте брусок двигался скачками, перемещаясь на протяжении одного скачка все время в одном направлении на расстояние  $s$ . Найдите максимальную силу трения покоя  $F$  между столом и бруском. Коэффициент трения скольжения бруска о

стол равен  $\mu$  не зависит от скорости. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

*М.Ромашка*

3. Цикл тепловой машины состоит из двух изобар и двух изотерм, причем работа при изобарическом расширении такая же, как и при изотермическом. Найдите КПД такого цикла, если рабочим веществом является гелий, а максимальная температура в процессе вдвое больше минимальной.

*А.Зильберман*

4. Положительный  $q_1$  и отрицательный  $q_2$  точечные заряды закреплены на оси  $X$  по разные стороны от гладкой непроводящей пластины, плоскость которой перпендикулярна этой оси. Маленький положительно заряженный шарик также находится на оси  $X$ , упираясь в пластину, как показано на рисунке 12. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластину начинают поступательно перемещать вдоль оси  $X$ , медленно увеличивая расстояние  $l$  между пластиной и отрицательным зарядом. Когда  $l$  достигает  $1/3$  расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси  $X$ . Определите отношение  $q_1/q_2$ . Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.

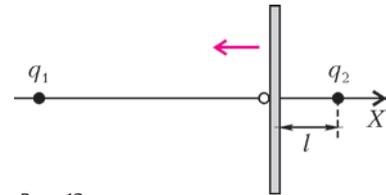


Рис. 12

5. Тележка с водой движется по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением. На тележку под углом  $\alpha$  к вертикали падает луч света, который после отражения распространяется под углом  $\gamma$  к вертикали. Направления ускорения тележки и лучей показаны на рисунке 13. Найдите величину ускорения  $a$  тележки. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

*И.Горбатый*

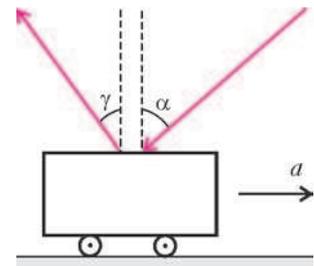


Рис. 13

5. Тележка с водой движется по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением. На тележку под углом  $\alpha$  к вертикали падает луч света, который после отражения распространяется под углом  $\gamma$  к вертикали. Направления ускорения тележки и лучей показаны на рисунке 13. Найдите величину ускорения  $a$  тележки. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

*А.Гуляев*

**Второй теоретический тур**

**8 класс**

1. Заяц убегает от Волка по прямой, двигаясь равномерно. В начальный момент времени расстояние между Зайцем и Волком  $s = 36$  м, а скорость Волка  $v_0 = 14$  м/с. Волк устает и через каждые  $\Delta t = 10$  с (в моменты времени  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ , считая от начала движения) уменьшает свою скорость на  $\Delta v = 1$  м/с. С какой скоростью  $v$  должен бежать Заяц, чтобы Волк его не поймал?

*М.Ромашка*

2. Школьнику поручили полить сад на даче. Чтобы не таскать воду в лейке, он проложил толстый шланг через грядки на огороде так, как показано на рисунке 14, продул шланг, вставил в него небольшую воронку и начал медленно наливать в нее воду. Через некоторое время воронка запол-

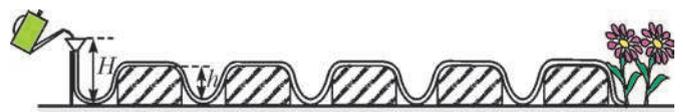


Рис. 14

нилась, вода в ней перестала опускаться, но из другого конца шланга не полилась. Тогда школьник поднял воронку выше и налил в нее еще воды. Приблизительно до какой высоты  $H$  над землей ему надо поднять воронку, чтобы вода начала вытекать из шланга? Высота каждой грядки  $h = 40$  см, число грядок  $n = 5$ .

*В.Росляков, М.Семенов*

**3.** В чашку налили раствор кофе при температуре  $t_1 = 100$  °С и бросили туда несколько кубиков льда, взятого при температуре  $t_0 = 0$  °С. Когда лед растаял, температура раствора оказалась равной  $t_2 = 50$  °С. На сколько процентов уменьшилась концентрация кофе в растворе? Теплообмен раствора кофе с окружающей средой не учитывать. Удельные теплоемкости раствора кофе и воды одинаковы и равны  $c = 4,2$  кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330$  кДж/кг. Под концентрацией понимается отношение массы чистого кофе ко всей массе раствора.

*М.Ромашка*

### 9 класс

**1.** Человек поднялся вдоль верхнего участка стены здания на высоту  $h = 2$  м с помощью системы, состоящей из груза массой  $m = 25$  кг, нерастяжимой веревки, трех блоков и люльки, прикрепленной к одному из блоков (рис.15). В

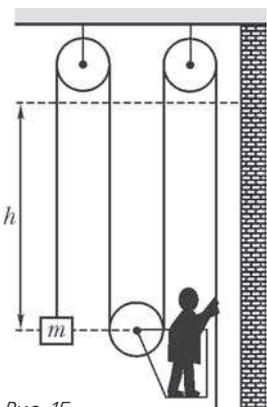


Рис. 15

начальный момент вся система вместе с человеком была неподвижна. Когда человек поднимался, конец веревки в его руках двигался относительно стены со скоростью  $v = 1,2$  м/с. Сколько времени длился подъем? Какую работу совершил человек? Блоки, люлька и веревка невесомы, трения нет, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*М.Ромашка, М.Семенов*

**2.** На раскаленной плите стоит сосуд с кипящей водой, начальная масса которой  $m_0$ , а температура кипения  $t_k$ . Вода испаряется, часть пара конденсируется на куске льда, расположенном над сосудом, и стекает обратно. Начальная масса льда  $m$ , его начальная температура  $0$  °С. Когда весь лед растаял, масса воды в сосуде оказалась равной  $m_1$ . Какая доля  $w$  от всего пара сконденсировалась на куске льда? Какое количество теплоты  $Q$  было передано от плиты к сосуду? Доля конденсирующегося пара все время постоянна. Удельная теплоемкость воды  $c$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , удельная теплота парообразования воды  $r$ . Контактным теплообменом воды и льда с окружающей средой пренебречь.

*М.Ромашка*

### 10 класс

**1.** Порция гелия объемом  $V_0 = 1$  л находится под давлением  $p_0 = 1$  атм при температуре  $0$  °С. Гелий расширяют в равновесном процессе таким образом, что отданное им в окружающую среду количество теплоты в четыре раза меньше совершенной гелием работы. Найдите максимально возможное значение работы  $A$  газа в таком процессе.

*А.Зильберман*

**2.** В вершинах правильного  $N$ -угольника расположены электрические заряды, величины которых последовательно образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и равны  $q, 2q, \dots, 2^{N-1}q$ . Расстояние от центра многоуголь-

ника до любой из его вершин равно  $R$ . Найдите величину  $E$  напряженности электрического поля в центре многоугольника.

*С.Кротов*

**3.** Школьники Вова и Дима собрали электрическую цепь, состоящую из самодельной батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$ , резистора сопротивлением  $R = 20$  кОм, конденсатора емкостью  $C$  и двухпозиционного ключа  $K$  (рис.16). В момент времени  $t = 0$  они включили секундомер, замкнули ключ в положение 1 и спустя некоторое время переключили его в положение 2. Получившаяся у Вовы и

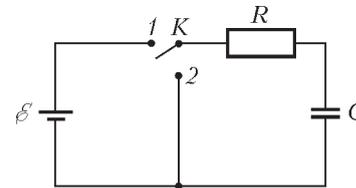


Рис. 16

Димы зависимость напряжения  $U$  на конденсаторе от времени  $t$  показана на рисунке 17. Проанализировав этот график,

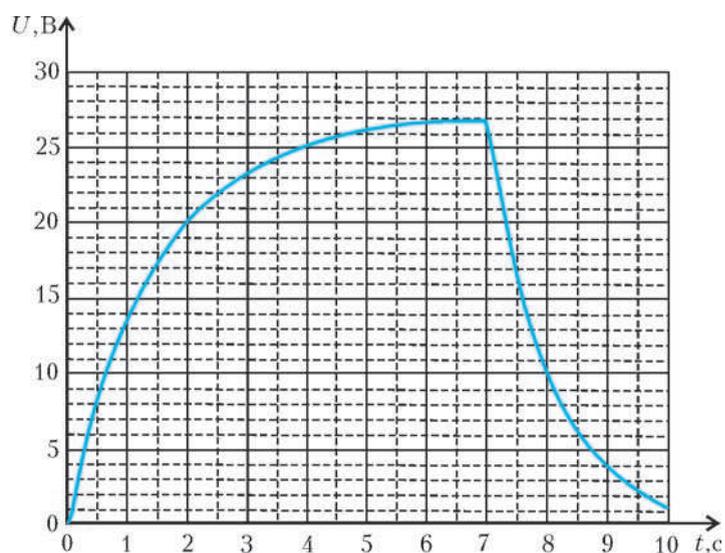


Рис. 17

они смогли определить, чему равны емкость  $C$  и ЭДС  $\mathcal{E}$ , а также внутреннее сопротивление  $r$  батареи. Найдите эти значения.

*Ю.Старокуров*

### 11 класс

**1.** На горизонтальном столике лежит маленькая шайба массой  $m = 100$  г. Столик покрыт такой смазкой, что при движении шайбы со скоростью  $v$  возникает сила вязкого трения  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\gamma\vec{v}$ , где  $\gamma = 0,4$  кг/с. Сухого трения нет. На шайбу начинают действовать силой, вектор которой вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega = 3$  рад/с, а модуль не меняется со временем и равен  $F = 0,3$  Н. В установившемся режиме шайба движется с постоянной скоростью по окружности. Найдите ее радиус  $R$ .

*М.Ромашка*

**2.** С порцией гелия проводят циклический процесс, состоящий из изобарного расширения, изохорного охлаждения и адиабатного сжатия. Может ли КПД такого цикла оказаться больше 50%? Чему равен максимально возможный КПД  $\eta$  такого цикла?

*А.Зильберман*

**3.** В вершинах правильного  $N$ -угольника расположены электрические заряды, величины которых последовательно образуют арифметическую прогрессию с разностью  $q$  и равны  $q, 2q, \dots, Nq$ . Расстояние от центра многоуголь-

ка до любой из его вершин равно  $R$ . Найдите величину напряженности  $E$  электрического поля в центре многоугольника.

*С.Кротов*

4. Участок гибкого провода массой  $m$  подвешен так, что его

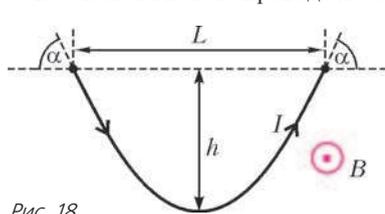


Рис. 18

концы закреплены на одной и той же высоте (рис.18). Провод находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , по нему течет ток  $I$ . Силы, действующие на

провод в точках подвеса, образуют угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите силу  $T$  натяжения провода в его нижней точке. Размеры  $L$  и  $h$  известны.

*М.Ромашка*

5. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $F = 30$  см создает изображение движущегося точечного источника света. Когда источник света пересекал главную оптическую ось линзы, двигаясь под углом  $\alpha = 60^\circ$  к ней, угол между скоростью его изображения и этой осью составлял  $\beta = 30^\circ$ . На каком расстоянии  $d$  от линзы в этот момент находился источник света?

*О.Шведов*

*Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута*

# Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» — часть программы Международного интеллект-клуба «Глюон». Цель турнира — поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальным наукам и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира — создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами (по 5 человек в каждой) в два тура — заочный и очный.

Заочный тур XII Турнира «Компьютерная физика» начался в сентябре 2007 года рассылкой задания заочного тура по заявкам в лицеи, школы и гимназии (задание было опубликовано также в журнале «Квант» №4 за 2007 год, что значительно увеличило число команд-участниц турнира). Четыре лучшие команды были приглашены на финал — очный тур соревнований.

Очный тур XII Турнира был проведен с 27 января по 3 февраля 2008 года в городе Протвино на базе Института физики высоких энергий при участии и поддержке Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон» и «ТС», журналов «Квант» и «Физика в школе» и Издательского дома «Первое сентября». Оргкомитет турнира выражает благодарность всем названным организациям за помощь в проведении турнира и поддержку одаренных школьников и талантливых студентов.

По итогам двух туров абсолютным победителем XII Турнира стала сборная команда города Ижевска, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус». Она же была награждена дипломом I степени и памятным знаком. Диплом II степени в этом году жюри не вручало, а диплом III степени получили команды МТЛ города Самары, ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана и Самарского аэрокосмического лицея. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен конкурс компьютерного творчества, включающий три направления: обучающие программы, физика и техника, прикладное программирование и дизайн, а также конкурс «Виртуальная физическая лаборатория», разработанный компанией «Физикон».



Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XIII Турнире «Компьютерная физика», очный тур которого состоится в январе — феврале 2009 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

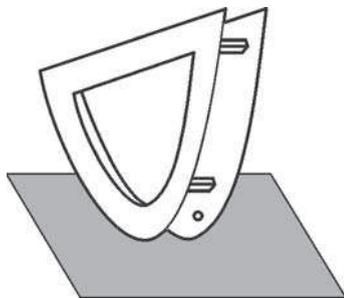
Сайт для информации: www.gluon.ru

Ниже приводится заочное задание XIII Турнира «Компьютерная физика».

## Заочный тур «Маятник-качалка»

Колебательное движение твердого тела — один из основных видов движения в природе и технике. К задаче исследования колебаний твердого тела приводит изучение качки корабля и вращения антенны радиолокатора, перемещения частей установок в легкой и пищевой промышленности и элементов строительно-дорожных машин. Понимание закономерностей колебательного движения, в частности условий устойчивости свободных колебаний твердого тела, необходимо для разработки эффективного и безопасного использования большого количества технических устройств.

В предлагаемой задаче исследуется устойчивость движения твердого тела по твердой плоской горизонтальной поверх-



ности на примере простой модели, называемой качалкой. Будем рассматривать качалки (см. рисунок), представляющие собой прямые цилиндры, направляющими которых являются плоские кривые второго порядка: эллипс, парабола или гипербола.

Для однозначного определения плоской кривой второго порядка необходимо указать прямую (директрису), точку (фокус) и эксцентриситет, задающий отношение расстояний от точки кривой до фокуса и до директрисы. Уравнение невырожденной плоской кривой второго порядка имеет вид

$$y^2 = 2px - (1 - \epsilon^2)x^2,$$

где  $x, y$  – координаты точек кривой,  $\epsilon$  – эксцентриситет,  $p$  – фокальный параметр, определяемый расстоянием между фокусом и директрисой (это расстояние равно  $p/\epsilon$ ). Для параболы  $\epsilon = 1$ , для эллипса  $\epsilon < 1$ , для гиперболы  $\epsilon > 1$ . Вершина кривой лежит на перпендикуляре, опущенном из фокуса на директрису, т.е. на фокальной оси. Эллипс и гипербола имеют по два фокуса и по две директрисы, у параболы один фокус и одна директриса.

В данной задаче предлагается рассмотреть движение эллиптической, параболической и гиперболической качалок. Пусть качалка имеет очень малую массу. При исследовании движения будем помещать большую точечную массу в раз-

личные точки на фокальной оси качалки. Во всех случаях качалка до начала движения находится в таком положении, что ее вершина касается опорной горизонтальной плоскости, а фокальная ось вертикальна. В начальный момент точка фокуса приобретает ударом (т.е. практически мгновенно) начальную скорость, направленную перпендикулярно фокальной оси. Проскальзывание отсутствует.

Моделирование движения системы может быть проведено путем численного интегрирования уравнений Ньютона, описывающих движение качалок.

**Задание**

1. Установите закон движения эллиптической качалки с фокальным параметром  $p = 1$  см в зависимости от эксцентриситета  $\epsilon$  и положения точечной массы на фокальной оси при различных значениях начальной скорости. Рекомендуемый диапазон эксцентриситета:  $\epsilon > 0,05$ . Диапазон исследуемых скоростей:  $0,01 \text{ см/с} < v < 50 \text{ см/с}$ .

2. Установите закон движения параболической качалки в зависимости от фокального параметра  $p$  и положения точечной массы на фокальной оси при различных значениях начальной скорости. Рекомендуемый диапазон фокальных параметров:  $0,05 \text{ см} < p < 20 \text{ см}$ . Диапазон исследуемых скоростей:  $0,01 \text{ см/с} < v < 50 \text{ см/с}$ .

3. Установите закон движения гиперболической качалки с фокальным параметром  $p = 1$  см в зависимости от эксцентриситета  $\epsilon$  и положения точечной массы на фокальной оси при различных значениях начальной скорости. Рекомендуемый диапазон эксцентриситета:  $\epsilon < 20$ . Диапазон исследуемых скоростей:  $0,01 \text{ см/с} < v < 50 \text{ см/с}$ .

*Публикацию подготовили  
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева*

**ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

**КМШ**

**ЗАДАЧИ**

(см. «Квант» № 3)

1. Не делится. Решая ребус, находим F = 1, O = 9, U = 6, R = 0, V = 7, E = 5, N = 3, буква I может принимать одно из трех значений: 2, 4 или 8. Ни в одном из этих трех случаев число NINE не делится на 9.

2. Нет. Предположим, что нам удалось разбить числа требуемым образом. Сумма чисел в каждой паре не меньше  $1 + 2 = 3$  и не больше  $15 + 16 = 31$ . Выпишем все простые числа из этого отрезка: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Сумма чисел в каждой паре должна содержаться в данном наборе. Однако заметим, что числа 29 и 31 не могут одновременно встречаться среди сумм, поэтому, если сложить все суммы в паре, то полученный результат будет меньше  $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 31 = 129$ . С другой стороны, данный результат есть сумма всех натуральных чисел от 1 до 16, т.е. 136. Полученное противоречие доказывает, что числа разбить нужным образом нельзя.

3. **Указание:** воспользуйтесь тем, что медиана  $BM$  делит пополам среднюю линию  $PQ$ , а средняя линия  $PQ$  делит пополам высоту  $BH$ .

4. Верно. Так как число  $a^2 + 2b + 1$  является квадратом некоторого натурального числа  $x$ , то  $b \geq a$  (иначе было бы  $a^2 < x^2 < (a+1)^2$ , что для натуральных чисел  $a$  и  $x$  невозможно). Точно так же, поскольку число  $b^2 + 2c + 1$  является квадратом, то  $c \geq b$ , а поскольку число  $c^2 + 2a + 1$  является квад-

ратом, то  $a \geq c$ . Итак,  $b \geq a \geq c \geq b$ , откуда  $a = b = c$ .

5. Предположим, что нам удалось разрезать таблицу  $4 \times 4$  на 4 различные четырехклеточные фигурки. При шахматной раскраске таблицы все фигурки, кроме Г-образной, содержат две белые клетки, а Г-образная – одну или три. Так как всего белых клеток 8, т.е. четное число, то данная фигурка не может присутствовать. Следовательно, при разрезании использовались все остальные 4 фигурки. Раскрасим теперь таблицу так, как показано на рисунке 1. Тогда каждая фигурка, кроме Г-образной, будет содержать четное число белых клеток, а Г-образная – нечетное. Белых клеток в данном случае тоже 8, поэтому и эта фигурка не может участвовать в разрезании. Таким образом, наше предположение было неверным, и среди фигурок обязательно найдутся две одинаковые.


Рис. 1

**КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»**

(см. «Квант» №1)

16. Такое можно сделать для всех натуральных  $n > 2$ . Приведем описание способа расстановки чисел. Сначала рассмотрим случай  $n = 3m$ . Заготовим заранее для выписываемых чисел  $3m$  «мест» слева направо, причем окрасим их в

цвета в таком порядке: самое левое место – красное, стоящее рядом с ним справа – синее, затем зеленое, потом снова красное, синее и зеленое и так далее. Таким образом, имеется по  $m$  мест каждого цвета, и все они периодически чередуются. Теперь возьмем числа от 1 до  $m$  и поместим их по порядку на красные места *слева направо*. Затем возьмем числа от  $m + 1$  до  $2m$  и поместим их по порядку на синие места *справа налево*. Наконец, возьмем числа от  $2m + 1$  до  $3m$  и поместим их по порядку на зеленые места опять же *справа налево*. Для большей наглядности и удобства рассуждений сами записываемые числа окрасим в те же цвета, что и занимаемые ими места. Вот пример расстановки чисел для  $n = 15$  (соответственно,  $m = 5$ ):

1 10 15 2 9 14 3 8 13 4 7 12 5 6 11

Убедимся, что такая расстановка удовлетворяет условию. Для этого проверим все имеющиеся тройки соседних чисел. Рассмотрим три вида троек.

1) Тройки, у которых левое число красное (и, соответственно, среднее синее, правое зеленое). В  $k$ -й тройке слева (где  $1 \leq k \leq m$ ) красное число равно  $k$ , синее равно  $2m - k + 1$ , зеленое равно  $3m - k + 1$ . Зеленое число не меньше суммы красного и синего, поскольку неравенство  $3m - k + 1 \geq k + (2m - k + 1)$  равносильно неравенству  $m \geq k$ , справедливому для всех  $1 \leq k \leq m$ .

2) Тройки, у которых левое число синее (и, соответственно, среднее зеленое, правое красное). Всего таких троек  $m - 1$ . Согласно описанной методике расстановки чисел, в  $k$ -й тройке слева (где  $1 \leq k \leq m - 1$ ) синее число равно  $2m - k + 1$ , зеленое равно  $3m - k + 1$ , красное равно  $k + 1$ . Легко видеть, что и здесь зеленое число не меньше суммы красного и синего, поскольку неравенство  $3m - k + 1 \geq (k + 1) + (2m - k + 1)$  равносильно неравенству  $m - 1 \geq k$ , справедливому для всех  $1 \leq k \leq m - 1$ .

3) Тройки, у которых левое число зеленое (и, соответственно, среднее красное, правое синее). Всего таких троек  $m - 1$ . В  $k$ -й тройке слева (где  $1 \leq k \leq m - 1$ ) зеленое число равно  $3m - k + 1$ , красное равно  $k + 1$ , синее равно  $2m - k$ . Здесь также зеленое число не меньше суммы красного и синего, поскольку неравенство  $3m - k + 1 \geq (k + 1) + (2m - k)$  равносильно неравенству  $m \geq k$ , справедливому для всех  $1 \leq k \leq m - 1$ . Итак, для  $n = 3m$  требуемая расстановка чисел существует. Покажем, как из нее можно получить расстановку чисел для  $n = 3m + 1$  и  $n = 3m + 2$ .

Чтобы расставить числа от 1 до  $3m + 1$ , возьмем вышеописанную расстановку чисел от 1 до  $3m$  и допишем к ней *слева* число  $3m + 1$ . Таким образом, добавится еще одна тройка соседних чисел (в которую теперь входят три самых левых числа), и осталось убедиться, что она удовлетворяет условию. Но эти три числа нам известны: это добавленное число  $3m + 1$ , а также числа 1 (красное) и  $2m$  (синее). Неравенство же  $3m + 1 \geq 1 + 2m$  с очевидностью справедливо для любого натурального  $m$ . Вот пример расстановки чисел для  $n = 16$  (соответственно,  $m = 5$ ), здесь дописанное слева число 16 мы не окрашиваем:

16 1 10 15 2 9 14 3 8 13 4 7 12 5 6 11

Если же  $n = 3m + 2$ , то к расстановке чисел от 1 до  $3m + 1$  припишем *справа* число  $3m + 2$ . Здесь образуется дополнительная тройка чисел (в которую входят три самых правых числа):  $3m + 2$  (добавленное),  $2m + 1$  (зеленое) и  $m + 1$  (синее). Неравенство  $3m + 2 \geq (2m + 1) + (m + 1)$  с очевидностью справедливо для любого натурального  $m$ . Вот пример расстановки чисел для  $n = 17$  (соответственно,  $m = 5$ ):

16 1 10 15 2 9 14 3 8 13 4 7 12 5 6 11 17

*Примечание.* Возможность записать в одну строку числа от 1

до  $n$  так, чтобы среди любых трех чисел, стоящих подряд, одно число было *больше* суммы двух других, существует для *всех*  $n$ , кроме  $n = 3, 4, 6$  и  $7$ .

17. Это степени  $3^{3k+2}$  и  $2^{3k+1}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Будем искать натуральные  $x, y, n$  и простые  $p$  такие, что

$$x^3 + y^3 = p^n. \quad (1)$$

Если  $d = \text{НОД}(x, y)$ , то на  $d^3$  должно делиться число  $p^n$ . В таком случае, сократив на  $d^3$  обе части уравнения (1), получим уравнение

$$z^3 + t^3 = p^m, \quad (2)$$

где числа  $z = \frac{x}{d}$  и  $t = \frac{y}{d}$  взаимно просты, кроме того, числа  $zt$  и  $p$  тоже взаимно просты, натуральное  $m \leq n$ . Переписав уравнение (2) в виде

$$(z+t)(z^2 - zt + t^2) = p^m, \quad (3)$$

рассмотрим две возможности.

1) Пусть  $z = t$  и, значит,  $z = t = 1$ . В таком случае  $p = 2$ , и, возвращаясь к уравнению (1), имеем  $2d^3 = 2^n$ . Отсюда

$d = 2^k$ ,  $n = 3k + 1$ . Числа  $2^{3k+1}$  представимы в виде суммы двух кубов натуральных чисел:  $(2^k)^3 + (2^k)^3$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

2) Пусть  $z \neq t$ , тогда  $z^2 - zt + t^2 = (z-t)^2 + zt > 1$ . Из (3) следует, что  $z+t = p^r$ ,  $z^2 - zt + t^2 = p^s$ ,  $r+s = m$ , причем, как мы только что убедились,  $s > 0$ . Следовательно,

$$p^{2r} - p^s = (z+t)^2 - (z^2 - zt + t^2) = 3zt,$$

причем левая часть этого равенства делится на  $p$ . В силу взаимной простоты  $zt$  и  $p$  отсюда получаем, что 3 делится на  $p$ , т.е.  $p = 3$ . Число  $p^{2r} - p^s$  не делится на 9 (иначе числа  $zt$  и  $p$  не были бы взаимно просты). Значит,  $s = 1$ ,  $z^2 - zt + t^2 = (z-t)^2 + zt = p^s = 3$ . Отсюда  $(z-t)^2 = 1$ ,  $zt = 2$ , т.е. либо  $z = 2, t = 1$ , либо  $z = 1, t = 2$ . Возвращаясь к уравнению (1), имеем  $3^2 d^3 = 3^n$ ,  $d = 3^k$ ,  $n = 3k + 2$ . Числа  $3^{3k+2}$  представимы в виде суммы двух кубов натуральных чисел:

$$(3^k)^3 + (2 \cdot 3^k)^3, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

18. Известно, что указанным в условии свойством точки  $D$  обладает ортоцентр треугольника  $ABC$  (см., например, статью А.Егорова «Ортоцентрический треугольник» в «Кванте» № 4 за 2001 г.). Никакие другие внутренние точки треугольника  $ABC$  таким свойством не обладают – в этом можно убедиться следующим образом. Отразим симметрично сторонам треугольника соответствующие дуги описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Если бы эти дуги пересеклись не только в точке  $D$ , но и еще в какой-то другой точке  $D'$ , то центры окружностей, описанных около треугольников  $ABD, BCD, ACD$ , оказались бы лежащими на одной прямой, перпендикулярной  $DD'$ . Но этого не может быть, поскольку указанные центры лежат на трех не параллельных прямых – серединных перпендикулярах к сторонам  $AB, BC, AC$ . Итак, точка  $D$  – это точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Далее воспользуемся следующим свойством треугольника  $A_1B_1C_1$  (обоснованным в указанной статье А.Егорова): биссектрисы треугольника  $A_1B_1C_1$  лежат на тех же прямых, на которых лежат высоты треугольника  $ABC$ .

19. В равенстве  $f_{n+1} = \frac{3f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4}}{2}$  избавимся от радикала,

записав его в виде  $2f_{n+1} - 3f_n = \sqrt{5f_n^2 + 4}$  и возведя обе части в квадрат. После очевидных преобразований получим

$$f_{n+1}^2 - 3f_{n+1}f_n + f_n^2 - 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Подставив сюда  $n - 1$  вместо  $n$ , имеем

$$f_n^2 - 3f_n f_{n-1} + f_{n-1}^2 - 1 = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, числа  $f_{n+1}$  и  $f_{n-1}$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$  являются корнями одного и того же квадратного уравнения (при этом корень  $f_{n+1}$  больший, поскольку последовательность возрастающая). По формулам Виета,

$$f_{n+1} = 3f_n - f_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (*)$$

Поскольку начальные числа  $f_0$  и  $f_1$  целые, то далее в результате процесса (\*) порождаются только целые числа: 0, 1, 3, 8, 21, ... – члены знаменитой последовательности Фибоначчи с четными номерами.

20. Положим  $z = x + y + 2m$ , где  $m = \sqrt{xy + 1}$ . Тогда  $yz + 1 = (y + m)^2$ ,  $zx + 1 = (x + m)^2$ ,  $xy + yz + zx + 1 = (x + y + m)^2$ .

### ЗАДАЧИ НА СМЕШЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

1. Давление увеличилось в 2 раза.
2. Абсолютную температуру надо увеличить на 20%.
3. Установится температура  $T = 320$  К.

### О ДВУХ ВЕЛОСИПЕДИСТАХ И ВИШНЕВОЙ КОСТОЧКЕ

(см. «Квант» №3)

1. Поскольку точка двух велосипедистов равноудалена от точек  $P_1, P_2$  и от точек  $Q_1, Q_2$ , то она совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров соответствующих отрезков.
2. Так как  $O_1O_2BV$  – равнобедренная трапеция ( $O_1$  и  $O_2$  – центры окружностей), то отрезок  $BV$  параллелен линии центров  $O_1O_2$ , которая перпендикулярна общей хорде  $AB$ .
3. Так как  $O_1O_2BV$  – равнобедренная трапеция, то  $O_1V = O_2B = O_2P_2$ . Из равенства дуг  $BP_1$  и  $BP_2$  следует, что  $\angle BO_1P_1 = \angle BO_2P_2$ , а так как  $\angle VO_1B = \angle VO_2B$ , то  $\angle VO_1P_1 = \angle VO_2P_2$ . Следовательно, треугольники  $VO_1P_1$  и  $P_2O_2V$  равны.
4. При движении в разных направлениях  $P_1$  и  $P_2$  будут равноудалены от точки двух велосипедистов, соответствующей точке  $A$ . Доказать это можно с помощью равенства треугольников, как в упражнении 3.
5. Пусть окружность, проходящая через точки  $B$  и  $V$ , пересекает данные окружности в точках  $S_1$  и  $S_2$ . Обозначим центр этой окружности через  $O$ , а центры данных окружностей – через  $O_1, O_2$ . Так как отрезки  $O_1O_2$  и  $VB$  имеют общий серединный перпендикуляр, то точка  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $O_1O_2$ . Следовательно, прямые  $O_1O$  и  $O_2O$  образуют равные углы с прямой  $O_1O_2$ , а значит, и с прямой  $VB$ . Отрезок  $S_1B$  является общей хордой двух окружностей, он перпендикулярен их линии центров  $O_1O$ . Аналогично,  $S_2B$  перпендикулярен  $O_2O$ . Значит, прямые  $S_1B$  и  $S_2B$  образуют равные углы с  $VB$ , следовательно, эти углы опираются на равные хорды  $VS_1$  и  $VS_2$ .
6. а) Имеем  $\angle M_1O_1V = \angle M_2O_2V$  и  $\angle VO_1B = \angle VO_2B$ , поскольку  $O_2O_1VB$  – равнобедренная трапеция. Вычитая из первого равенства второе, получаем  $\angle M_1O_1B = \angle M_2O_2B$ , поэтому  $\angle M_1AB = \angle M_2AB$ , и значит, прямая  $M_1M_2$  проходит через точку  $A$ . С прямой  $N_1N_2$  рассуждения проводятся аналогично.
- б) Так как четырехугольник  $N_1M_2M_1N_2$  вписанный, то  $\angle N_2N_1M_1 = \angle N_2M_2M_1$ . С другой стороны,  $\angle N_2N_1M_1 = \angle ABM_1$

$\angle N_2M_2M_1 = \angle ABN_2$ . Складывая, получаем  $\angle M_2BN_2 = 2 \cdot \angle N_2N_1M_1 = \angle N_2VM_1$ , следовательно, четырехугольник  $VBM_1N_2$  – вписанный. Так же поступаем с четырехугольником  $VN_1M_2B$ .

в) Из пункта а) следует, что хорды  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$  стягивают на двух окружностях одинаковые углы:  $\angle M_1AN_1 = \angle M_2AN_2$ ,

следовательно,  $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$ . Аналогично,  $\frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$ .

Наконец, поскольку четырехугольник  $M_1M_2N_1N_2$  вписанный, треугольники  $M_1AN_1$  и  $N_2AM_2$  подобны с коэффициентом

$$\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}, \text{ а значит, } \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

7. Подсчетом углов несложно показать, что окружности  $BKC, AKD, ALB$  и  $DLC$  пересекаются в одной точке  $M$ . Применив результат задачи 5 к треугольнику  $AKD$  и точкам  $B$  и  $C$  на его сторонах, получаем, что угол  $OMK$  – прямой ( $O$  – центр окружности  $ABCD$ ). Аналогично, угол  $OML$  – прямой.

8. Воспользуйтесь следующим фактом: если через две точки пересечения двух окружностей провести по прямой и на каждой окружности соединить точки ее пересечения с этими прямыми, то полученные хорды будут параллельны.

9. См. решение упражнения 10.

10. Проведем хорды  $RR'$  и  $QQ'$ , параллельные прямой  $AB$ . Прямая  $R'M$  вторично пересекает окружность в некоторой точке  $S'$ . Тогда

$$\angle S'PR = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{S'A} + \overset{\frown}{AR}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{S'A} + \overset{\frown}{R'B}) = \angle S'MA.$$

Следовательно, точки  $S', M, L$  и  $P$  лежат на одной окружности. Аналогично, точки  $S', M, P$  и  $L'$  (точка пересечения хорд  $AB$  и  $Q'S'$ ) лежат на одной окружности. Эти окружности имеют три общие точки, а значит, совпадают. Следовательно,  $L' = L$ . Остается заметить, что симметрия относительно серединного перпендикуляра к хорде  $AB$  переводит точки  $Q, R, M$  в точки  $Q', R', N$  соответственно, а точку  $L$  в точку  $K$ , откуда  $AK = BL$ .

11. Осуществим симметрию относительно точки  $M$ . Вершина угла  $K$  при этом переходит в точку  $K'$  – четвертую вершину параллелограмма  $AKBK'$ , точка  $A_1$  – в точку  $A'_1$  на прямой  $BK'$ , а точка  $B_2$  – в точку  $B'_2$  на прямой  $AK'$ . Утверждение задачи равносильно тому, что прямые  $AB, A_2B_1$  и  $A'_1B'_2$  пересекаются в одной точке. Проще всего это доказать с помощью теоремы Дезарга, примененной к треугольникам  $AA_2B'_2$  и  $BB_1A'_1$  (точки пересечения сторон  $AA_2$  и  $BB_1, AB'_2$  и  $BA'_1, A_2B'_2$  и  $B_1A'_1$  лежат на одной прямой), либо можно применить теорему Менелая к треугольникам  $AKB$  и  $AK'B$ . Наконец, это можно доказать подсчетом длин отрезков с помощью подобий треугольников.

12. Для всех перечисленных фигур верно обобщение теоремы о бабочке, как в упражнении 10.

13. Проведем высоты  $AA'$  и  $BB'$ . Четырехугольник  $AC'A'C$  вписан в окружность с центром  $D$ . Следовательно,  $H$  – середина хорды этой окружности, лежащей на прямой  $EF$ . Применив классическую теорему о бабочке, получаем  $HE = HF$ .

14. Пусть  $A, B$  – точки пересечения окружностей и прямые проводятся через  $A$ . Перпендикуляр, опущенный из точки двух велосипедистов  $V$  (соответствующей точке  $B$ ) на прямую  $PQ$ , делит отрезок  $PQ$  пополам. Следовательно, искомое ГМТ – окружность с диаметром  $AV$ .

15. Пусть  $O_1, O_2$  – центры окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, а  $K$  – одна из точек их пересечения. Тогда треугольники  $O_1O_2O$  и  $O_1O_2K$  равны по трем сторонам, следовательно, точки  $O_1, O_2, O$  и  $K$  являются вершинами либо параллелограмма, либо равнобедренной трапеции.

16. В обозначениях упражнения 15 точка  $O$  является точкой двух велосипедистов окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующей точке их пересечения  $K$ . Пусть  $A$  и  $B$  – точки касания одной из концентрических окружностей, назовем ее  $\gamma$ , с  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Прямая  $AK$  пересекает  $\beta$  вторично в некоторой точке  $B'$ . Тогда  $OA = OB'$ . Следовательно, точка  $B'$  также лежит на окружности  $\gamma$ , а значит, совпадает с  $B$ .

17. Эта задача предложена на заочном туре IV Геометрической олимпиады им. И.Ф. Шарыгина, поэтому ее решения мы не приводим.

18. Точка является точкой двух велосипедистов данной пары неравных окружностей тогда и только тогда, когда она является общим центром двух других окружностей, которые касаются двух данных. Это свойство сохраняется при инверсии.

19. Нет.

20. Обозначим через  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  векторы скоростей велосипедистов. Пусть в начальный момент велосипедисты находились в точках  $P_1$  и  $P_2$ . На серединном перпендикуляре к отрезку  $P_1P_2$  найдется точка  $V$  такая, что угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\overline{P_1V}$  равен углу между векторами  $\vec{v}_2$  и  $\overline{P_2V}$ . Эта точка – искомая.

21. Воспользуйтесь пространственным аналогом задачи 1: трехзвенная ломаная  $ABCD$  расположена в пространстве так, что углы  $ABC$  и  $BDC$  – прямые; тогда середина отрезка  $AD$  равноудалена от точек  $B$  и  $C$ . С помощью этого утверждения докажите, что проекция середины отрезка  $Q_1Q_2$  на прямую  $P_1P_2$  совпадает с серединой отрезка  $P_1P_2$ . Из этого непосредственно следует, что проекции отрезков  $P_1Q_1$  и  $P_2Q_2$  на прямую  $P_1P_2$  равны.

22. При решении можно воспользоваться пространственным аналогом задачи 1 (см. указание к упражнению 21).

23. Эта задача – исследовательская, и мы не даем к ней указаний.

### ЗАДАЧИ LXXI МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

#### 6 класс

1. 25 декабря 2008 года.

Нетрудно проверить, что в оставшиеся дни до конца года такого совпадения больше не будет.

2. 6 зайчат.

Все зайчата барабанить не могут, так как заведомо не будет барабанить зайчонок, которому достанется самый маленький барабан. С другой стороны, если дать этому же зайчонку и самые короткие палочки, то все остальные зайчата будут барабанить.

3. 11 головок сыра.

Пусть всего было  $k$  крыс ( $k > 7$ ), тогда каждая съела в первую ночь по  $10/k$  головок сыра. Во вторую ночь каждая крыса съела вдвое меньше, т.е.  $5/k$  головок. Все 7 крыс съели тем самым  $35/k$  головок. Это целое число. Единственный делитель числа 35, превышающий 7, – само число 35. Поэтому  $35/k = 1$ , и всего на складе до нашествия крыс было  $10 + 1 = 11$  головок сыра.

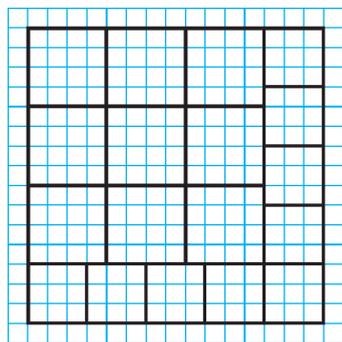


Рис. 2

4. *Первое решение.* Получить это решение можно так. Пусть квадратики одного вида имеют сторону  $a$

клеточек, другого –  $b$  клеточек, а исходный квадрат –  $c$  клеточек. Тогда площадь исходного квадрата равна  $c^2 = na^2 + nb^2$ .

Удовлетворяющие этому равенству числа можно получить, например, умножив равенство  $5^2 = 4^2 + 3^2$  на  $n = k^2$ . Квадрат при  $n = 4$  разрезать не удастся, при  $n = 9$  получим  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 15$ . Пример

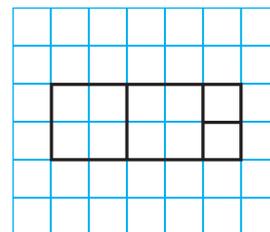


Рис. 3

разрезания для данных чисел представлен на рисунке 2.

*Второе решение.* Составим, например, из двух квадратов  $2 \times 2$  и двух квадратов  $1 \times 1$  прямоугольник  $5 \times 2$  (см. рис.3).

Из десяти таких прямоугольников можно составить квадрат  $10 \times 10$ . Разумеется, таким образом можно получить много других решений.

5. Можно поставить 28 машин (рис.4). Можно ли поставить больше – неизвестно.

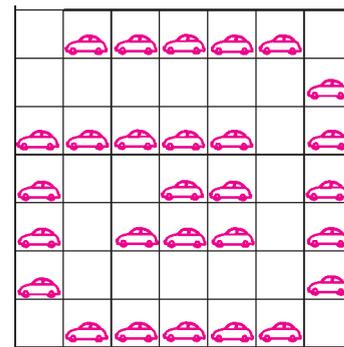


Рис. 4

6. Да, может.

Пусть Василиса посадила Кощея в самую северную комнату, а стражников прислонила так: к западной – к восточной – к западной стене («ЗВЗ»). Заметим, что, как бы Кощей ни ходил, в любой момент стражники южнее Кощея остаются в исходном положении, а положение стражников севернее Кощея отличается от исходного. Действительно, это условие выполнено вначале и не нарушается при переходе Кощея из комнаты в комнату.

Значит, если Кощей в какой-то момент оказался в самой северной комнате, то все стражники остались в положении «ЗВЗ». Если Кощей оказался во второй комнате, то самый северный стражник поменял положение, а два других остались в исходном положении, т.е. стражники приняли положение «ВВЗ». Если же Кощей оказался в третьей комнате, то стражники приняли положение «ВЗЗ». Наконец, если Кощей оказался в самой южной комнате, то стражники приняли положение «ВЗВ».

Значит, ни в какой момент все стражники не прислоняются к одной стене.

#### 7 класс

1. 251.

Искомое число является делителем числа 2008. Разложим число 2008 на простые множители:  $2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$ . Выпишем все делители числа 2008: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008. Найдя сумму цифр каждого из них, заметим, что условие задачи выполняется только для числа 251:

$$2008 = 251 \cdot (2 + 5 + 1).$$

2. Да, могло.

Пример приведен в таблице:

Команда	П	Ф	Н	Ш	О
Помпа	–	1	1	3	5
Фильтр	1	–	3	0	4
Насос	1	0	–	3	4
Шлюз	0	3	0	–	3

*Комментарии.* 1. Так как «Помпа» обогнала «Фильтр», а «Фильтр» обогнал «Шлюз», разница очков, набранных «Шлюзом» и «Помпой», не может быть меньше двух. Можно показать, что все разницы от 2 до 9 очков между «Помпой» и «Шлюзом» реализуются.

2. Решение единственно с точностью до перестановки «Фильтра» и «Насоса», но доказывать это не требуется.

3. Утверждение задачи выполняется для любого количества команд, большего трех.

3. Дима живет на седьмом этаже.

Рассмотрим ту часть пути, которую Дима вниз едет на лифте, а вверх идет пешком. С одной стороны, путь пешком занимает вдвое больше времени, а с другой – больше на 10 секунд. Значит, эту часть пути он проехал за 10 секунд, а прошел пешком за 20 секунд. Поскольку весь путь на лифте занимает 60 секунд, то пешком Дима шел  $1/6$  пути.

Поскольку дом девятиэтажный, пешком он шел 1 промежуток между этажами, а ехал 5. Значит, Дима живет на седьмом этаже.

5. Да, мог.

Пусть картонки квадратные и лежат одна на другой. Немного сдвинем верхнюю картонку вдоль ее края. Получим прямоугольник, но его центр будет лежать внутри обеих картонок (рис.5,а). Это можно исправить, заметив, что центр прямоугольника не совпадает с центром каждой из картонок. Поэтому, вырезав небольшую дырочку из первой картонки в центре прямоугольника, мы можем получить решение (рис.5,б).

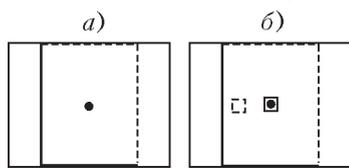


Рис. 5

У задачи существуют и другие решения – например, см. рис.6. Обратите внимание: в этом решении вторую картонку, прежде чем переносить, нужно перевернуть.

Комментарий. Если картонки не накладываются друг на друга и полностью покрывают дно прямоугольного ящика, то гвоздь в центре ящика обязательно воткнется на границе, разделяющей картонки. Это утверждение кажется очевидным, но строго доказать его удалось лишь в 2002 году (см.: А.Я.Канель-Белов. Решение задачи 1.5 // Математическое просвещение, вып. 6, 2002, с.139–140).

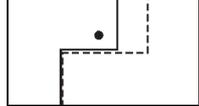


Рис. 6

6. 4 трамвая. Приведем сначала пример, когда за время наблюдений Шпиона проехало четыре трамвая (рис.7).

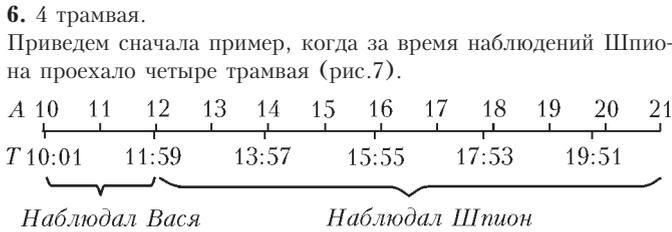


Рис. 7

Пусть автобусы ходят в 9:00, 10:00, ..., а трамваи ходят с интервалом 1 час 58 минут – в 10:01, 11:59, 13:57, 15:55, 17:53, 19:51, 21:49, ... Тогда Вася мог стоять с 10:01 до 11:59, а Шпион наблюдать с 12:00 до 21:00.

Докажем теперь, что за время наблюдений Шпиона не могло пройти меньше четырех трамваев. Вначале докажем, что интервал трамвая меньше двух часов. Действительно, если интервал составляет хотя бы два часа, то Вася стоял не менее двух часов, а значит за это время проехало по крайней мере два автобуса, что противоречит условию.

С другой стороны, пока наблюдал Шпион, прошло десять автобусов. Между 1-м и 3-м из них прошло два часа, значит, за это время проехал хотя бы один трамвай. Аналогично, между 3-м и 5-м автобусом, между 5-м и 7-м и между 7-м и 9-м проехало еще хотя бы три трамвая. Значит, Шпион увидел по крайней мере четыре трамвая.

1. Верно.

Обозначим через  $n$  меньшее из этих двух последовательных чисел. Тогда их произведение равно  $n(n + 1)$ . Припишем к нему два нуля. Получим  $n(n + 1) \cdot 100 = 100n^2 + 100n$ . Выделим полный квадрат. Получим  $(10n + 5)^2 - 25$ , т.е., если к произведению приписать 25, получится квадрат натурального числа.

Комментарий. Обратная задача широко известна как быстрый способ возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5:  $(n5)^2 = m25$ , где  $m = n(n + 1)$ .

2. Если в каждом из 7 рядов сидит не более 7 детей, то всего детей не более 49. На самом деле их 50, значит, на утреннем сеансе хотя бы в одном ряду сидели по крайней мере 8 детей. Поскольку рядов всего 7, хотя бы двое из этих детей окажутся в одном ряду на вечернем сеансе.

3. Пусть  $\angle AOK = \alpha$  (рис.8). Тогда  $\angle AOK = \alpha$ , так как треугольник  $AOK$  равнобедренный;  $\angle MOC = \angle AOK = \alpha$  (как вертикальные).

Пусть  $\angle MKC = \beta$ . Тогда  $\angle MCK = \angle MKC = \beta$ , так как треугольник  $MKC$  равнобедренный. Поскольку  $KM \parallel AC$ , угол  $ACO$  равен  $\beta$ . Из треугольника  $AKC$  получаем, что  $\angle CAK = 180^\circ - \alpha - \beta$ ; из треугольника  $MOC$  получаем, что  $\angle OMC = 180^\circ - \alpha - \beta$ . Таким образом,  $\angle CAK = \angle AMC$ . Заметим, что  $\angle MKB = \angle CAK$  и  $\angle ACM = \angle KMB$  ввиду параллельности  $KM$  и  $AC$ . Отсюда  $\triangle AMC = \triangle BKM$  по стороне и двум углам. Следовательно,  $AM = KB$ .

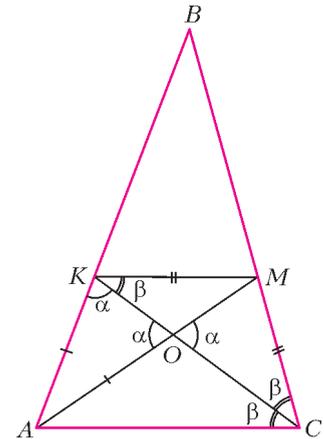


Рис. 8

4. Двое.

Назовем человека подозрительным, если про него нельзя определить, спортсмен это или арбитр. Заметим, что каждый из арбитров фотографировался только со спортсменами, т.е. не более чем с 20 людьми. С другой стороны, каждый из спортсменов сфотографировался со всеми остальными спортсменами и хотя бы с одним арбитром, т.е. не менее чем с 20 людьми. Значит, каждый подозрительный человек оказался на фотографиях ровно с 20 людьми.

Заметим, что если спортсмен фотографировался ровно с 20 людьми, то все его 19 игр судил один и тот же арбитр, т.е. на всех фотографиях вместе с ним присутствует один и тот же человек.

Пусть  $X$  – какой-нибудь подозрительный человек. Так как мы можем принять  $X$  за спортсмена, то, ввиду сказанного выше, на всех фотографиях с ним присутствует некий  $Y$ . Эти двое сфотографированы вместе 19 раз, значит, один из них – точно арбитр. Следовательно, третий человек на каждой из этих фотографий – точно спортсмен.

Так мы сможем определить 19 спортсменов, а оставшийся спортсмен – кто-то из пары  $X$  и  $Y$ . Все остальные – арбитры. Если можно определить статус хотя бы одного из пары  $X$  и  $Y$ , то можно определить и оставшегося, и подозрительных вообще нет. Значит, всего подозрительных людей двое –  $X$  и  $Y$ .

Комментарий. Отметим, что количество спортсменов и арбитров можно определить по стопке фотографий. Действительно, по количеству игр можно определить количество игроков, а далее по общему количеству людей на фотографиях определить количество арбитров.

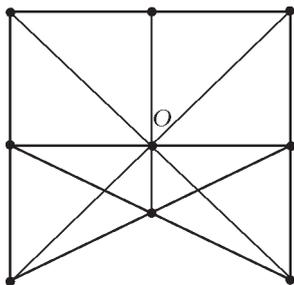


Рис. 9

5. Пример показан на рисунке 9. Докажем, что среди любых 6 из этих точек найдутся 3, лежащие на одной прямой. Будем называть *важной* прямую, на которой лежат 3 отмеченные точки. Докажем, что какие бы три точки из 9 мы ни выкинули, найдется важная прямая, из которой мы не выкинули ни одной точки.

Предположим, что можно выкинуть 3 точки из 9 отмеченных так, чтобы из каждой важной прямой пропала хотя бы одна точка. Точка  $O$  лежит на наибольшем количестве важных прямых – на 4. Если мы точку  $O$  не выкинули, то нам надо выкинуть какую-то другую точку из каждой из этих прямых, т.е. выкинуть хотя бы 4 точки. А мы можем выкинуть только три. Противоречие. Значит, нам надо выкинуть точку  $O$ . Получаем картинку, как на рисунке 10. Остается 5 важных прямых, и каждая точка лежит не более чем на двух из них. Следовательно, после удаления еще двух точек останется хотя бы одна важная прямая, из которой

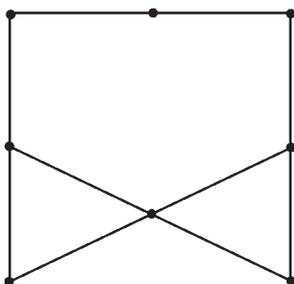


Рис. 10

не выкинуто ни одной точки.

*Комментарий.* Придумать этот пример можно следующим образом. Сначала расположим 9 точек в виде квадрата  $3 \times 3$ .

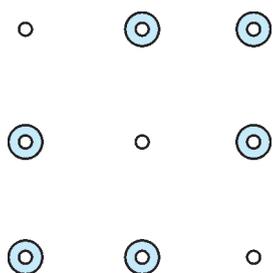


Рис. 11

Этот пример не годится, так как можно взять 6 точек, обведенных кружочком (рис.11). Проблема в том, что есть несколько «малополезных» точек, которые лежат только на 2 важных прямых. Попробуем передвинуть одну из них на место получше. Получим правильный пример.

6. При  $M$  и  $N$ , отличающихся не более чем в 3 раза.

Пусть перед каким-то раундом у игрока осталось  $A$  золотых и  $B$  серебряных монет, и он поставил на красное  $x$  золотых и  $p$  серебряных, а на черное –  $y$  золотых и  $q$  серебряных монет. Тогда либо количество золотых увеличится на  $z = x - y$ , а серебряных – на  $r = p - q$ , либо количество монет каждого типа уменьшится на эти числа.

Ясно, что  $|z| \leq A$  и  $|r| \leq B$  и что любые  $z$  и  $r$  в указанных диапазонах можно получить.

Предположим, что  $A$  и  $B$  отличаются более чем втрое, например,  $A > 3B$ . Тогда крупье может добиться того, чтобы это неравенство сохранилось и после раунда. В самом деле, если оно нарушается при любом выборе крупье, то  $A - z < 3(B - r)$  и  $A + z < 3(B + r)$ . Складывая эти неравенства, получаем, что  $2A < 6B$ , что неверно. Значит, если в начале количества монет отличаются более чем в 3 раза, крупье может сделать так, чтобы они все время отличались более чем в 3 раза. При  $M = 3N$  или  $N = 3M$  задача уже решена. Пусть теперь  $M < 3N$  и  $N < 3M$ .

Подберем  $z$  и  $r$  так, чтобы при любом исходе отношение количества монет стало равно трем. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + z = 3(B + r), \\ 3(A - z) = B - r. \end{cases}$$

Решая ее, находим  $z = \frac{5}{4}A - \frac{3}{4}B$  и  $r = -\frac{5}{4}B + \frac{3}{4}A$ . При  $A$  и  $B$ , отличающихся менее чем в 3 раза,  $|z| < A$ ,  $|r| < B$ . Если  $A + B$  кратно четырем, то  $z$  и  $r$  будут также целыми. Значит, в этом случае игрок сможет достичь цели за один раунд. Осталось показать, что игрок может сделать  $A + B$  кратным четырем. Действительно, поставив все монеты на красное, игрок добьется, чтобы либо все пропало (что его устраивает), либо общее количество монет удвоилось. Повторив эту процедуру еще раз, игрок сделает так, что общее число монет будет делиться на 4. При этом соотношения  $A < 3B$  и  $B < 3A$  сохраняются.

9 класс

1. Может.

Пусть оценки судей для первой команды за каждый из первых трех конкурсов 333334, за четвертый 334444, а для второй команды за все конкурсы 333344. Значения, полученные компьютером для первой команды: 3,2; 3,2; 3,2; 3,7. Значения, полученные для второй: 3,3; 3,3; 3,3; 3,3. Первая команда победила со счетом 13,3 : 13,2. При этом сумма оценок, выставленных судьями первой команде, 79, второй команде – 80.

2. Назовем точки трассы  $A$  и  $A'$  симметричными, если длина пути от точки  $A$  до одной границы зоны в одном направлении равна длине пути от точки  $A'$  до другой границы в противоположном направлении. Очевидно, если одна из симметричных точек принадлежит аномальной зоне, то и другая тоже принадлежит.

Докажем лемму: если велосипедист стартует в некоторой точке, рано или поздно он заснет в симметричной точке. Действительно, пусть велосипедист стартовал в точке  $A_0$ . Вечером он заснет в некоторой точке  $A_1$ , на следующий вечер – в точке  $A_2$  и т.д. Так как его дневной пробег равен длине аномальной зоны, в какой-то вечер он заснет в аномальной зоне в некоторой точке  $A_n$ . Тогда просыпается он в точке  $A'_n$ , симметричной  $A_n$ . Вечером велосипедист засыпает в точке  $A'_{n-1}$ , симметричной  $A_{n-1}$ , и так далее, пока не заснет в точке  $A'_0$ , симметричной  $A_0$ . Лемма доказана.

Пусть велосипедист стартовал из точки  $A$  вне аномальной зоны. По доказанной лемме однажды он заснет (и проснется) в точке  $A'$ , симметричной точке старта. Теперь применим лемму к точке  $A'$ : рано или поздно велосипедист заснет в симметричной ей точке, т.е. в точке  $A$ . Если же велосипедист стартовал из точки  $A$  в аномальной зоне, то однажды он заснет в симметричной ей точке  $A'$ , и тогда он проснется в точке  $A$ .

3. Обозначим угол  $ABC$  через  $\beta$  (рис.12). Пусть  $\beta < 90^\circ$ . Тогда  $\angle AOC = 2\beta$  как центральный к  $\angle ABC$ . Поскольку треугольник  $ACO$  равнобедренный,  $\angle OAC = 90^\circ - \beta$ . Треугольники  $ABL$  и  $ADL$  равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому  $\angle ADL = \beta$ . Обозначим точку пересечения  $AO$

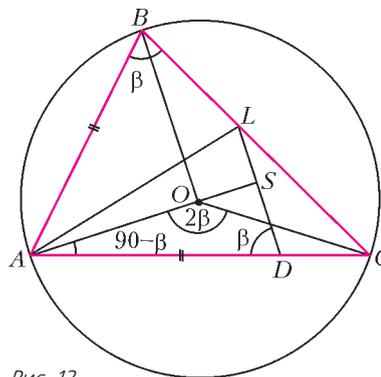


Рис. 12

и  $DL$  через  $S$ . Тогда  $\angle SAD + \angle SDA = 90^\circ$ , так что треугольник  $ASD$  прямоугольный, что и требовалось доказать. Случай  $\beta > 90^\circ$  рассматривается аналогично:  $\angle SAD = \beta - 90^\circ$ ,  $\angle SDA = 180^\circ - \beta$ .

В случае  $\beta = 90^\circ$  точка  $D$  лежит на луче  $AO$  и треугольники  $ABL$  и  $ADL$  равны, поэтому  $\angle ADL = 90^\circ$ , что и требовалось.

**4.** Существует.

Докажем, что среди чисел от 0 до  $N - 1$ , где  $N = 10^{500}$ , найдется искомое число. Если любое число из этого диапазона усложнить 100 раз, получится число, меньшее

$10^{600} = (10^{300})^2$ . Существует ровно  $10^{300}$  полных квадратов, меньших  $10^{600}$ .

Зафиксируем  $k$  — один из этих квадратов. Количество чисел, из которых его можно получить описанной в условии операцией, не превосходит количества способов зачеркнуть в нем 100 цифр. Это количество строго меньше количества способов выбрать из его цифр произвольный набор. Последнее же количество равно  $2^{(\text{количество цифр в } k)} \leq 2^{600}$ . Таким образом, общее количество чисел от 0 до  $N - 1$ , из которых может быть получен полный квадрат, не превосходит

$$10^{300} \cdot 2^{600} = 10^{300} \cdot 8^{200} < 10^{500} = N.$$

Отсюда следует, что на промежутке от 0 до  $N - 1$  найдется число, из которого 100-кратным усложнением нельзя получить полный квадрат, что и требовалось.

**5.** 2550 рублей.

Эту сумму Вася получит, если 100 раз запросит 50 рублей (или 100 раз 51 рубль). Докажем, что Вася не может гарантировать себе ббольшую сумму.

Можно считать, что рядом с Васей стоит банкир Коля, который знает номиналы карточек. Вася называет сумму, а Коля выбирает одну из карточек и вставляет ее в банкомат. Предложим следующую стратегию для Коли. Когда Вася называет сумму, Коля вставляет произвольную карточку с номиналом, меньшим названной суммы, если таковая имеется, и карточку с максимальным номиналом из имеющихся на руках в противном случае. В первом случае карточка после использования называется *выкинутой*, во втором — *реализованной*.

Ясно, что Вася получает деньги только с реализованных карточек, причем карточки реализуются в порядке убывания номиналов.

Пусть наибольший платеж составляет  $n$  рублей и этот платеж реализует карточку с номиналом  $m$  рублей,  $m \geq n$ . Тогда к моменту этого платежа карточки с номиналом, меньшим  $n$  рублей, уже съедены (иначе Коля вставил бы одну из таких в банкомат). Все эти карточки выкинуты. Действительно, карточка с номиналом  $k$  рублей при  $k < n$  не могла быть реализована раньше карточки с номиналом  $m$  рублей, поскольку  $k < m$ .

Таким образом, общее число реализованных карточек не превосходит  $100 - n + 1$ . С каждой реализованной карточки

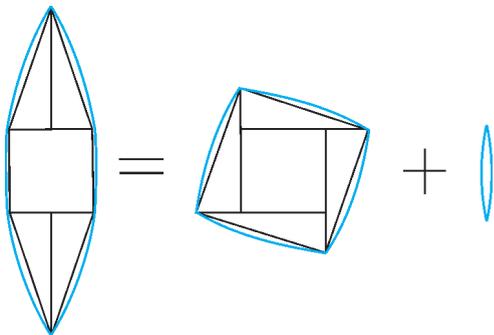


Рис. 13

Вася получает не более  $n$  рублей, поэтому общая сумма, полученная Васей, не превосходит  $n \cdot (100 - n + 1)$ ; максимум этой величины достигается при  $n = 50$  и  $n = 51$ , и он равен 2550 руб.

**6.** Разрезав криволинейный шестиугольник с дугами в качестве сторон, можно сложить криволинейный квадрат и линзу (рис.13).

**10 класс**

**1.** 3 студента.

Как видно из рисунка 14, каждого студента видит 2, 3 или 6 храпометров. Значит, 7 разбивается в сумму слагаемых, каждое из которых равно 2, 3 или 6 и количество которых равно количеству студентов. Заметим, что ни одно из слагаемых не может равняться 6, потому что  $7 - 6 = 1$  не представляется в виде суммы 2, 3 или 6. Значит, все слагаемые равны 2 или 3. Если студентов  $\leq 2$ , то храпометры в сумме покажут не более  $2 \cdot 3 = 6$ , что меньше 7. Если студентов  $\geq 4$ , то храпометры в сумме покажут не менее  $4 \cdot 2 = 8$ , что больше 7. Значит, единственный возможный вариант — 3 студента. И действительно,  $7 = 3 + 2 + 2$ .

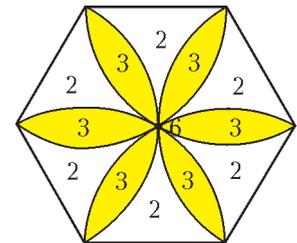


Рис. 14

**2.**  $p = \frac{m}{2^n}$ , где  $m$  и  $n$  целые неотрицательные, а дробь несократима,  $m \leq 2^n$ .

Заметим, что если  $p < 0$  или  $p >$

1, то Борис выиграет (ему достаточно все время выбирать направление от 1, тем самым увеличивая расстояние от робота до отрезка).

Докажем, что при  $p \in [0; 1]$  Андрей выигрывает тогда и только тогда, когда  $p = \frac{m}{2^n}$ , где  $m$  и  $n$  целые неотрицательные, а дробь несократима.

Докажем часть «тогда». Пусть на некотором шаге координата робота имеет указанный вид и лежит между 0 и 1. Тогда Андрей назовет число  $\frac{1}{2^n}$ . Борис вынужден будет сместить робота

в одну из точек  $\frac{m+1}{2^n}$  или  $\frac{m-1}{2^n}$ . Эти точки того же вида  $\frac{k}{2^l}$ , но  $l < n$  (так как  $m$  нечетно). Если  $n > 0$ , то эти точки

лежат между 0 и 1. Так как знаменатель рано или поздно станет равным 1, то робот попадет в 0 или 1, и выиграет Андрей.

Докажем часть «только тогда». Пусть на некотором шаге координата  $x$  робота не представима в указанном виде. Тогда для любого  $d$  хотя бы одно из чисел  $x - d$ ,  $x + d$  не имеет такого вида, так как иначе их полусумма  $x$  тоже имела бы такой вид. Значит, Борис может добиться того, чтобы новая координата робота не представлялась в указанном виде. Так как 0 и 1 имеют такой вид, то Борис выиграет.

**3.** Могло.

Рассмотрим последовательность 100, -33, 99, -32, ..., 34, 33. Тогда, если первое число пары стоит на нечетном месте, сумма равна 67. А если на четном месте, то 66. Обратные величины будут равны соответственно  $\frac{1}{67}$  и  $\frac{1}{66}$ , причем первых 67, а вторых 66. Итоговая сумма равна 2.

**4.** Обозначим через  $P$  данный многочлен и через  $x_1 < \dots < x_k$  данные  $k$  целых точек. Так как  $P(x_k) - P(x_1)$  делится на  $x_k - x_1 \geq k - 1$  и не превосходит по модулю  $k - 2$ , то

$P(x_k) - P(x_1) = 0$ . Поэтому  $P(x) = P(x_1) + (x - x_1)(x - x_k)Q(x)$  для некоторого многочлена  $Q$ .  
Если  $P(x_i) \neq P(x_1)$  для некоторого  $i = 3, 4, \dots, k - 3, k - 2$ , то  $Q(x_i) \neq 0$ . Тогда

$$|P(x_i) - P(x_1)| \geq |(x_i - x_1)(x_i - x_k)| \geq 2(k - 2) > k - 2.$$

Это противоречие показывает, что  $P(x_i) = P(x_1)$ . Итак,  $P(x_3) = \dots = P(x_{k-2}) = P(x_1)$ . Поэтому

$$P(x) = P(x_1) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_{k-3})(x - x_{k-2})(x - x_k)R(x)$$

для некоторого многочлена  $R$ .

Если  $P(x_2) \neq P(x_1)$ , то  $R(x_2) \neq 0$ . Тогда

$$|P(x_2) - P(x_1)| \geq (k - 4)!(k - 2) > k - 2.$$

Это противоречие показывает, что  $P(x_2) = P(x_1)$ .

Аналогично,  $P(x_{k-1}) = P(x_1)$ .

5. Заметим, что четырехугольник  $AC'A'C$  - вписанный (рис.15). Значит,  $\angle BAC = \angle BA'C'$  и  $\angle BCA = \angle BC'A'$ . Рас-

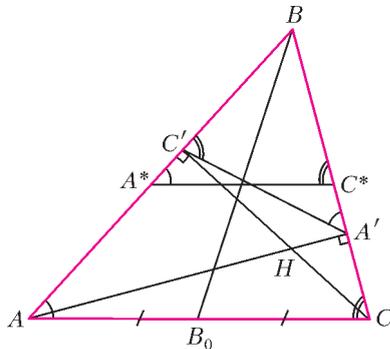


Рис. 15

смотрим треугольник  $A^*BC^*$ , симметричный треугольнику  $A'BC'$  относительно биссектрисы угла  $ABC$ . Этот треугольник гомотетичен треугольнику  $ABC$  с центром в точке  $B$ . Значит,  $BB_0$  проходит через середину отрезка  $A^*C^*$ . Поэтому прямая, симметричная  $BB_0$  относительно биссектрисы  $\angle ABC$ , проходит через середину отрезка  $A'C'$ . Очевидно, что  $AC'$  и  $CA'$  - высоты треугольника  $AHC$ . Отсюда, аналогично предыдущему рассуждению, имеем, что прямая, симметричная  $HB_0$  относительно биссектрисы  $\angle AHC$ , проходит через середину отрезка  $A'C'$ . Значит, прямые из условия пересекаются на прямой  $A'C'$ .

6. а) Рассмотрим какой-нибудь цвет, например красный. Найдем два числа красного цвета, разность которых делится на 8 (такие найдутся, потому что число остатков при делении на 8 конечно). Обозначим эти числа через  $a$  и  $b$ , а цвет числа

$$\begin{array}{cccccccccccc} K & \Pi_3 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_1 & \Pi_3 & \Pi_2 & \Pi_3 & K & \Pi_4 \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ a & \frac{7a+b}{8} & \frac{3a+b}{4} & \frac{5a+3b}{8} & \frac{a+b}{2} & \frac{3a+5b}{8} & \frac{a+3b}{4} & \frac{a+7b}{8} & b & \frac{9b-a}{8} \end{array}$$

Рис. 16

$\frac{a+b}{2}$  - через  $\Pi_1$  (рис.16). При этом  $\frac{3a+b}{4}$  и  $\frac{a+3b}{4}$  имеют один и тот же цвет  $\Pi_2$  (полусумма чисел красного цвета и  $\Pi_1$ ). Числа  $\frac{7a+b}{8}$ ,  $\frac{5a+3b}{8}$ ,  $\frac{3a+5b}{8}$  и  $\frac{a+7b}{8}$  имеют один и тот же цвет  $\Pi_3$  (полусумма чисел красного цвета и  $\Pi_2$ ).

Так как числа  $\frac{a+b}{2}$ ,  $\frac{a+3b}{4}$  и  $\frac{3a+5b}{8}$  являются полусуммами чисел цвета  $\Pi_3$ , то цвета  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  совпадают.

Пусть число  $\frac{9b-a}{8}$  имеет цвет  $\Pi_4$ . Тогда  $\frac{a+7b}{8}$  и  $b$  являются полусуммами чисел цвета  $\Pi_4$  и  $\Pi_1$  и поэтому имеют одинаковые цвета. Таким образом,  $\Pi_1$  - это красный цвет, что и требовалось доказать.

б) При четных  $N$ .

Если  $N$  нечетно, то можно покрасить число в цвет

$j \in \{0, \dots, N - 1\}$ , если оно имеет остаток  $j$  от деления на  $N$ . Легко видеть, что такая раскраска удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь некоторая раскраска удовлетворяет условию задачи. Пусть  $a_1 < a_2 < \dots$  - последовательность всех чисел, окрашенных в некоторый цвет (например, красный). Докажем индукцией по  $n$ , что  $a_1, \dots, a_n$  - арифметическая прогрессия с нечетной разностью.

При  $n = 1$  в прогрессии один член. При  $n = 2$  разность

$a_2 - a_1$  нечетна, потому что иначе число  $\frac{a_1 + a_2}{2}$  было бы красного цвета (по пункту а).

Пусть для  $n = k$  утверждение верно. Докажем его для  $n = k + 1$ . Если  $a_{k+1} - a_k$  четно, то число  $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$  красного цвета (по пункту а). Противоречие. Значит,  $a_{k+1} - a_k$  нечетно. Тогда по предположению индукции  $a_{k+1} - a_{k-1}$  четно. Значит,  $\frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}$  красное. Поэтому  $\frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} = a_k$ , что и требовалось.

Пусть теперь  $d_1, \dots, d_N$  - разности прогрессий. Докажем, что  $\sum_{j=1}^N \frac{1}{d_j} = 1$ . Пусть  $a = \max_{1 \leq j \leq N} b_j$ , где  $b_j$  - минимальное число цвета  $j$ . Далее, пусть  $D$  - наименьшее общее кратное всех  $d_j$ . Тогда среди чисел  $a + 1, \dots, a + D$  ровно  $D/d_j$  чисел цвета  $j$  (так как числа цвета  $j$  образуют прогрессию с разностью  $d_j$ ). Значит,  $D = \sum_{j=1}^N \frac{D}{d_j}$ , и  $\sum_{j=1}^N \frac{1}{d_j} = 1$ .

Приведем все дроби к общему знаменателю. Так как все  $d_j$  нечетны, получим в знаменателе нечетное число, а в числителе - сумму  $N$  нечетных слагаемых, равную знаменателю и, значит, нечетную. Поэтому  $N$  нечетно.

### 11 класс

1.  $x = -p/6$ .

Если  $x_1, x_2$  - абсциссы точек пересечения данных парабол, то для каждого значения  $x_0 \in [x_1; x_2]$  площадь части исходной фигуры, расположенной слева от вертикальной прямой с абсциссой  $x_0$ , равна

$$S(x_0) = \int_{x_1}^{x_2} (-2x^2 - (x^2 + px + q)) dx = \int_{x_1}^{x_0} (-3x^2 - px - q) dx,$$

т.е. совпадает с площадью соответствующей части новой фигуры, ограниченной осью абсцисс и новой параболой

$$y = -3x^2 - px - q.$$

Но новая парабола пересекает ось  $x$  в точках с абсциссами  $x_1, x_2$ , а значит, симметрична относительно вертикальной прямой с абсциссой  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ . Следовательно, площадь новой фигуры (равно как и исходной) разделится пополам, когда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{2 \cdot (-3)} = -\frac{p}{6}.$$

Комментарий. Равенство площадей соответствующих частей

исходной и новой фигур можно обосновать и без использования интеграла – например, с помощью *принципа Кавальери*, т.е. из равенства длин соответствующих вертикальных отрезков

$$\left[-2x^2; x^2 + px + q\right] \text{ и } \left[-3x^2 - px - q; 0\right]$$

при каждом значении  $x \in [x_1; x_0]$ .

2. 47.

Если  $n^2 \leq 2008$ , то  $2008!$  делится на  $n^n$  (так как числа  $n, 2n, \dots, (n-1)n$  и  $n^2$  содержатся среди чисел  $1, 2, \dots, 2007, 2008$ ). Поскольку  $44^2 < 2008 < 45^2$ , достаточно проверить делимость  $2008!$  на  $n^n$  при  $n \geq 45$ .

1)  $2008!$  делится на  $45^{45} = 5^{45} \cdot 3^{90}$ , так как среди чисел  $1, 2, \dots, 2007, 2008$  заведомо найдется 45 чисел, кратных 5, и 90 чисел, кратных 3 (поскольку  $5 \cdot 45 = 225 < 2008$  и  $3 \cdot 90 = 270 < 2008$ ).

2)  $2008!$  делится на  $46^{46} = 2^{46} \cdot 23^{46}$ , так как среди чисел  $1, 2, \dots, 2007, 2008$  заведомо найдется 46 чисел, кратных 2, и 46 чисел, кратных 23 ( $23 \cdot 46 = 1058 < 2008$ ).

3)  $2008!$  не делится на  $47^{47}$ , так как число 47 простое, и поэтому среди чисел  $1, 2, \dots, 2007, 2008$  есть лишь 42 числа, кратных 47 ( $47 \cdot 42 = 1974 < 2008 < 2021 = 43 \cdot 47$ ).

Легко заметить, что для произвольного натурального  $x$  наименьшим натуральным  $n$ , для которого  $x!$  не делится на  $n^n$ , является наименьшее простое число  $p$ , такое, что  $p^2 > x$ .

3. Невозможно.

Пусть  $x$  – число школьников, сделавших не более чем по 3 ошибки,  $y$  – число школьников, сделавших по 4 или по 5 ошибок, а  $z$  – число школьников, сделавших не менее чем по 6 ошибок. Тогда  $x + y + z = 333$ .

Предположим, что  $z > x$ . Тогда  $z = x + t$ , где  $t \geq 1$ . В этом случае должны выполняться неравенства

$$1000 \geq 0 \cdot x + 3y + 6z = 3y + 3(x+t) + 3z = 3(x+y+z) + 3t = 999 + 3t \geq 1002,$$

а это невозможно.

4. Так как  $OD$  – высота в прямоугольном треугольнике  $MAO$ , то  $MO^2 = MA \cdot MD$  (рис.17). Поскольку  $O$  – центр

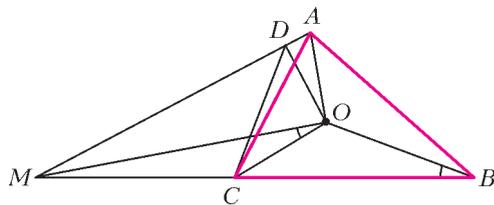


Рис. 17

вписанной окружности, то  $\angle CAO + \angle ACO + \angle OBC = \frac{\pi}{2}$ . С другой стороны, из треугольника  $AOC$  получаем, что

$$\begin{aligned} \angle AOC &= \pi - (\angle CAO + \angle ACO) = \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle OBC\right) = \frac{\pi}{2} + \angle OBC > \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\angle MOC = \angle AOC - \frac{\pi}{2} = \angle OBC,$$

и  $\triangle MOB \sim \triangle MCO$  ( $\angle OMC$  – общий). Следовательно,

$$\frac{MO}{MC} = \frac{MB}{MO},$$

откуда получаем, что  $MO^2 = MB \cdot MC$ . Из равенства  $MA \cdot MD = MB \cdot MC$  получаем, что  $\triangle MAB \sim \triangle MCD$ . Следовательно,  $\angle MBA = \angle MDC = \pi - \angle ADC$ , т.е. вокруг четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

Существует другое решение, использующее тот факт, что  $OM$  является общей касательной к двум окружностям, описанным около треугольников  $ADO$  и  $OBC$  соответственно.

5. а) 2; б) 2, 4, 38, 76.

Указания. Пусть через  $t$  минут на ленте лежат  $m(t)$  деталей типа  $A$  и  $k(t)$  деталей типа  $B$ . Так как  $m(t)$  и  $k(t)$  имеют разную четность, то  $|m(t) - k(t)|$  может принимать только значения  $1, 3, 5, \dots$ . Поскольку по условию исходное расположение периодически повторяется, можно показать, что величина  $|m(t) - k(t)|$  не изменяется. Далее можно показать, что  $|m(t) - k(t)| = 1$  при всех  $t$ . Отсюда получаем, что среди последовательных 76 деталей типы  $A$  и  $B$  встречаются по 38 раз и потому 76 – период последовательности типов. Если ситуация на конвейере впервые повторилась через  $n$  минут, то  $n$  – минимальный период последовательности и потому делит 76. Так как на любом отрезке длины 76 детали  $A$  и  $B$  встречаются одинаковое число раз, это же верно и для периода длины  $n$ . Отсюда следует, что  $n$  – четное число. Тогда  $n = 2, 4, 38$  или 76. Нетрудно показать, что все эти значения реализуются.

6.  $v \geq 1 + \sqrt{2}$ .

Указания. Введем прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с точкой  $A$ , а точки  $B, C$  и  $D$  имеют координаты  $(0, 1), (1, 1)$  и  $(1, 0)$  соответственно. По условию лиса вначале находится на прямой  $y = x$ . В момент, когда лиса находится на некоторой прямой  $y = x + a$ , зайцы всегда смогут находиться в точках с координатами  $\left(0, 1 + \frac{a}{v\sqrt{2}}\right)$  и  $\left(1 - \frac{a}{v\sqrt{2}}, 0\right)$  соответственно (пока эти координаты неотрицательны). При  $\frac{v\sqrt{2}}{v\sqrt{2}-1} > v \cdot \frac{v\sqrt{2}-2}{v\sqrt{2}-1}$ , т.е. при  $v < 1 + \sqrt{2}$ , такое поведение зайцев позволяет спастись одному из них.

Пусть теперь  $v \geq 1 + \sqrt{2}$ . Допустим, что сначала лиса бежит по прямой  $y = x$  к точке  $A$  с максимальной скоростью. Обязательно настанет такой момент, что расстояние от лисы до этой точки станет равным наименьшему из расстояний от зайцев до точки  $A$ . Без ограничения общности можно считать, что наименьшим будет расстояние от первого зайца до  $A$ , а координаты лисы и первого зайца в этом момент равны  $(a, a)$  и  $(0, a\sqrt{2})$  соответственно. Тогда, двигаясь прямолинейно с максимальной скоростью сначала в точку с координатой  $(0, 2a)$ , а затем в точку  $A$ , лиса поймает первого зайца и окажется в точке  $A$  не позже второго. Побежав затем по лучу  $AD$ , лиса поймает и его.

7. а) Нет; б) да; в) да.

Указания. а) В правильном октаэдре нельзя выбрать четыре вершины с указанным в этом пункте свойством. б, в) В произвольном многограннике нужно взять такие четыре вершины, что образованный ими тетраэдр обладает наибольшим возможным объемом.

## ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

### Первый теоретический тур

#### 7 класс

1.  $V_0 = \frac{m_0}{\rho} \approx 1,18 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$ .

2.  $\rho_1 = \frac{3}{2}\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = \frac{3}{4}\rho = 450 \text{ кг/м}^3$ .

3. Во всех случаях  $n = 3$ . 4.  $F = (m - m_0)g = 6 \text{ Н}$ .

$$5. M = \frac{(\rho_B V/2) - m}{1 - (\rho_B/\rho_C)} \approx 0,55 \text{ г}.$$

**8 класс**

$$1. L = \frac{s^2}{s - s_1} = 100 \text{ км}, v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left(1 - \frac{s_1}{s}\right) = 60 \text{ км/ч},$$

$$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left(\frac{s_1}{s} - 1\right) = 75 \text{ км/ч}.$$

$$2. p = \frac{p_A S_A + p_B S_B}{S_A + S_B} = 2 \text{ кПа}.$$

$$3. v = \frac{u \rho_{\text{н}}}{\rho_B} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

**9 класс**

1. Мяч попадет в кольцо номер 6.

2. Ускорение груза равно нулю, а ускорение коробки направлено вниз и равно  $a = \frac{M + m}{M} g$ .

$$3. N = \frac{Lmgv \sin 2\alpha}{l\eta} \approx 170 \text{ кВт}.$$

$$4. R_A = \frac{U_2}{I} = 0,1 \text{ кОм}, R_V = \frac{U_1 - U_2}{I} = 0,9 \text{ кОм}.$$

**10 класс**

$$1. \alpha = \arccos \frac{v_0^2}{2gh} \approx 30^\circ.$$

2.  $v_2 = v_1 \frac{\rho g a^2}{\rho g a^2 + k}$  при  $t \leq \frac{a}{v_1} \left(1 + \frac{\rho g a^2}{k}\right)$ , при дальнейшем доливке воды скорость кубика будет равна нулю.

$$3. h \approx \frac{100Mg}{k}.$$

4. Сила равна  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{77Q^2}{144R^2}$  и направлена к плоскости.

**11 класс**

1.  $h = \frac{2\pi m_2 L}{m_1 + m_2}$ ,  $d = \frac{2L}{m_1 + m_2} \left(\sqrt{m_1^2 - m_2^2} - m_2 \arccos \frac{m_2}{m_1}\right)$ , петлеобразное движение происходит при  $m_1 > m_2$ .

$$2. F = \mu mg + \frac{ks}{2}. \quad 3. \eta = \frac{1}{7} \approx 14\%. \quad 4. \frac{q_1}{q_2} = -8.$$

$$5. a = g \operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2}.$$

**Второй теоретический тур****8 класс**

1.  $v > 11,8 \text{ м/с}$ . 2.  $H \approx nh = 2 \text{ м}$ . 3. На 28%.

**9 класс**

$$1. \tau = \frac{3h}{v} = 5 \text{ с}, A = 4mgh + \frac{2}{9}mv^2 = 2008 \text{ Дж}.$$

$$2. w = \frac{\lambda m}{\lambda m + (r + ct_{\text{к}})(m_0 + m - m_1)},$$

$$Q = r(m_0 + m - m_1) + \lambda m + cmt_{\text{к}}.$$

**10 класс**

$$1. A = 1,2\rho_0 V_0 = 120 \text{ Дж}. \quad 2. E = \frac{q(2^N - 1)}{4\pi\epsilon_0 R^2 \sqrt{5 - 4 \cos \frac{2\pi}{N}}}.$$

3.  $\mathcal{E} \approx 27 \text{ В}$ ,  $C \approx 50 \text{ мкФ}$ ,  $r \approx 10 \text{ кОм}$ .

**11 класс**

$$1. R = \frac{F}{\omega \sqrt{(m\omega)^2 + \gamma^2}} = 0,2 \text{ м}. \quad 2. \text{ Не может, } \eta = 40\%.$$

$$3. E = \frac{Nq}{8\pi\epsilon_0 R^2 \sin \frac{\pi}{N}}. \quad 4. T = IBh + \frac{mg + IBL}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$5. d = F \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = 40 \text{ см} \text{ или } d = F \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = 20 \text{ см}.$$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvantinfo

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»  
seemat.ru

# журнал © Квант

**НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ**

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ**

**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия,  
Н.М.Сурова**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,  
phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

# ПАТ И СИММЕТРИЯ

Партии, в которых черные повторяют ходы белых, называются «обезьяньими». Копирование ходов к добру не ведет, но интересно, как быстро белые могут поставить мат той или иной фигурой, зная о такой принципиальности партнера. Ферзь дает мат в 3 хода: 1. d4 d5 2. ♖d3 ♖d6 3. ♖h3 ♖h6 4. ♖:c8×. Остальные фигуры мают чуть позже.

Ладья: 1. ♜f3 ♜f6 2. ♜g5 ♜g4 3. ♜:h7 ♜:h2 4. ♜:f8 ♜:f1 5. ♜g6 ♜g3. Танец коней закончился. 6. ♞:h8×.

Белопольный слон: 1. e4 e5 2. f4 f5 3. ef ef 4. f6 f3 5. fg fg 6. ♜e2 ♜e7 7. ♜h5×.

Чернопольный слон: 1. d4 d5 2. ♘d2 ♘d7 3. ♘d3 ♘d6 4. ♜e3 ♜e6 5. c3 c6 6. ♖d2 ♖d7 7. ♜f4×.

Конь: 1. ♜c3 ♜c6 2. ♜e4 ♜e5 3. e3 e6 4. ♜e2 ♜e7 5. g3 g6 6. ♜f6×.

Пешка: 1. g4 g5 2. h4 h5 3. ♜f3 ♜f6 4. ♜e5 ♜e4 5. hg hg 6. g6 g3 7. gf×.

Наконец, на девятом ходу мают и сам король: 1. d3 d6 2. ♘d2 ♘d7 3. ♘c3 ♘c6 4. ♘b3 ♘b6 5. ♘a3 ♘a6 6. ♜e3 ♜e6 7. ♜b6 ♜b3 8. ab ab 9. ♘b4×.

Может сложиться впечатление, буд-то при дублировании ходов черным не на что рассчитывать. Но, как ни странно, повторяя ходы партнера, они имеют шансы уже на восьмом ходу... объявить мат белому королю.

1. e4 e5 2. ♘e2 ♘e7 3. ♘e3 ♘e6 4. ♖f3 ♖f6 5. ♜e2 ♜e7 6. b3 b6 7. ♜a3 ♜a6 8. ♜d4+, и у черных нет выбора: 8...ed×!

Занятно, но белый король мается и при центрально-симметричных действиях черных.

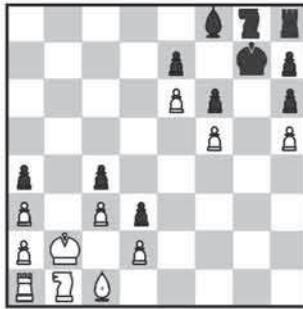
1. e4 d5 2. e5 d4 3. c3 f6 4. ef dc 5. fe cd+ 6. ♜:d2 ♜:e7 7. ♜f3 ♜c6 8. ♜c3 ♜f6 9. ♜e2 ♜d7 10. ♜fd4 ♜ce5 11. ♜e6 ♜d3×!



Итак, при «обезьяньей» игре черные могут и сами получить мат, и поставить мат сопернику. В любом случае зама-

тованной оказывается только одна сторона. А вот пат может быть взаимным. Самые быстрые патовые партии не раз публиковались в «Кванте», а сейчас приведем «симметричные» рекорды. В следующем рекордном примере ходы повторяют то черные, то белые, но в финале двигаться не в состоянии ни одна из сторон.

1. e4 d5 2. e5 d4 3. c3 f6 4. ♖f3 ♘f7 5. ♖:b7 ♖d5 6. ♘d1 ♖:g2 7. ♘c2 ♖:f1 8. ♖:c8 ♖:g1 9. ♖:b8 ♖:b8 10. ♞:g1 ♞b3 11. ♞g6 ♞a3 12. ♞h6 gh 13. ba ♘g7 14. ♘b2 d3 15. e6 a5 16. h4 a4 17. h5 c5 18. f4 c4 19. f5, и на доске взаимный пат.



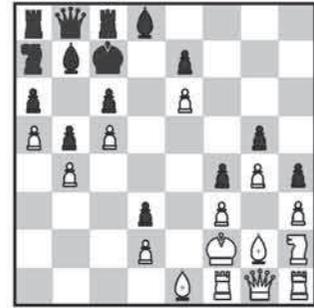
А если черные точно копируют ходы белых, то пат, как недавно установил С. Лахтонен, наступает на два с половиной хода позднее: 1. a4 a5 2. b4 b5 3. ab ab 4. ♜c3 ♜c6 5. bc bc 6. ♞a4 ♞a5 7. ♞e4 ♞e5 8. d4 d5 9. de de 10. ♜f3 ♜f6 11. ef ef 12. h4 h5 13. ♞h3 ♞h6 14. ♜:h6 ♜:h3 15. gh gh 16. e4 e5 17. ♖d4 ♖d5 18. ed ed 19. d6 d3 20. ♜e2 ♜e7 21. de de. Снова пат: и белым, и черным.



Предыдущая патовая позиция отличалась центральной симметрией, а здесь — симметрия осевая. Тем, кому больше нравится «центральный пат», предлагаем еще одну интересную партию — она на четыре хода длиннее; черные отвечают центрально-симметрично, к тому же с доски исчезает всего по одному коню.

1. ♜f3 ♜c6 2. ♜c3 ♜f6 3. ♜b5 ♜g4 4. h3 a6 5. ♜a7 ♜h2 6. ♜:h2 ♜:a7 (первый и последний размен) 7. g4 b5 8. ♜g2 ♜b7 9. e4 d5 10. ♘e2 ♘d7! 11. ♖g1 ♖b8! Расположение

королей и ферзей до начала игры, очевидно, обладает осевой симметрией, но не центральной, и только теперь на доске установлен полный порядок. 12. b4 g5 13. ♜b2 ♜g7 14. ♞f1 ♞c8 15. ♜d4 ♜e5 16. f3 c6 17. ♜f2 ♜c7 18. ♜e1 ♜d8 19. ♘f2 ♘c7 20. a4 h5 21. a5 h4 22. c4 f5 23. c5 f4 24. e5 d4 25. e6 d3. Пат обоим королям!



Игра заканчивается вничью и при голых королях, причем через 16 с половиной ходов (первые полтора хода брать нечего!). Чуть дольше длится абсолютно симметричная партия с тем же финалом: 1. d4 d5 2. ♖d3 ♖d6 3. ♖:h7 ♖:h2 4. ♖:h8 ♖:h1 5. ♖:g7 ♖:g2 6. ♖:g8 ♖:g1 7. f4 f5 8. ♖:d5 ♖:d4 9. ♖:f5 ♖:f4 10. ♜:f4 ♜:f5 11. ♜:c7 ♜:c2 12. ♜:b8 ♜:b1 13. ♜:a7 ♜:a7 14. b3 b6 15. ♜:b6 ♜:b3 16. ♞d1 ♞d8 17. ♜:d8 ♜:d1 18. ♜:e7 ♜:e7 19. ♜:f8 ♜:f1 20. ♘:f8 ♘:f8 (А. Ханян).

А встречаются ли «обезьяньи» партии в реальной жизни? Вот один из примеров такого рода (сражение происходило в начале прошлого века).

## Г.Ротлеви — М.Эльшпов

### Дебют четырех коней

1. e4 e5 2. ♜f3 ♜f6 3. ♜c3 ♜c6 4. ♜b5 ♜b4 5. 0-0 0-0 6. d3 d6 7. ♜c6 ♜c3 8. ♜:b7 ♜:b2 9. ♜:a8 ♜:a1 10. ♜g6 ♜g4 11. ♖:a1 ♖:a8 12. ♜:f6 ♜:f3 13. ♜:g7 ♜:g2 14. ♜:f8 ♜:f1 15. ♖:f1 ♖:f8 16. ♖g2+ ♖g7. И здесь противники, видимо опасаясь нарушить симметрию, согласились на ничью. Удачный для черных финал!

Спустя несколько лет в партии Тракслер — Шаманек после полного повторения 12 ходов белые почувствовали, что партнер будет действовать симметрично до самого конца, и нашли способ обмануть его: 13. ♜:e5 ♜e4 14. ♜:g7 ♜:g2 15. ♜:f8 ♜:f1. И тут последовало «неожиданное» 16. ♖g7×.

Е. Гук

Среди головоломок голландского изобретателя УИЛЛА СТРАЙБОСА особое место занимают головоломки в бутылках.

Как внутрь бутылок попали предметы, размеры которых больше, чем диаметр горлышка? Как их можно вынуть из бутылки, а затем вернуть на прежнее место? Попробуйте разобраться с простейшей из «хитрых» бутылок, которую легко изготовить в домашних условиях. Для этого подойдет любая бутылка или пузырек из-под лекарства. Вставьте в горлышко отрезок трубки, достигающей примерно до середины бутылки. Трубка может быть металлической, пластмассовой или картонной, а ее диаметр должен быть равен внутреннему диаметру горлышка. Приклейте трубку одним концом к горлышку. Затем из куска дерева вырежьте цилиндр длиной 3 – 4 см и диаметром на 2 мм меньше внутреннего диаметра трубки.

Поместите цилиндр внутрь бутылки. Задача состоит в том, чтобы вынуть цилиндр обратно.

**Желаем успеха!**



ГОЛОВОЛОМКИ

В БУТЫЛКАХ



**РЕШЕНИЕ**

Коллекция Коллекция Коллекция  
**ГОЛОВОЛОМК**

(Продолжение – на с.25 внутри журнала)