

МАЙ/ИЮНЬ

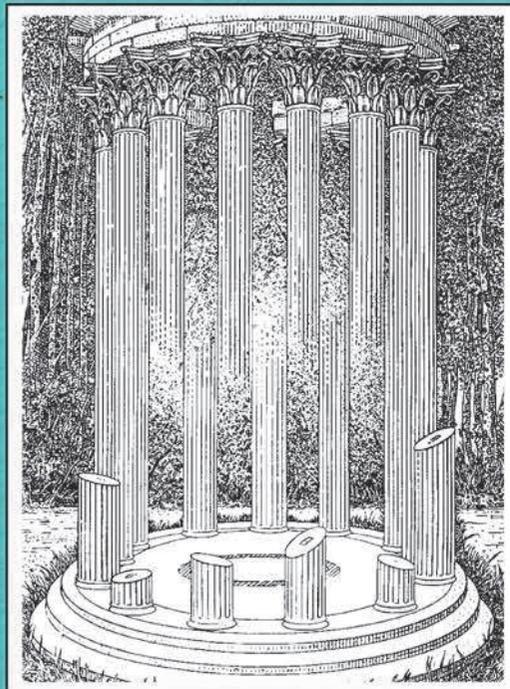
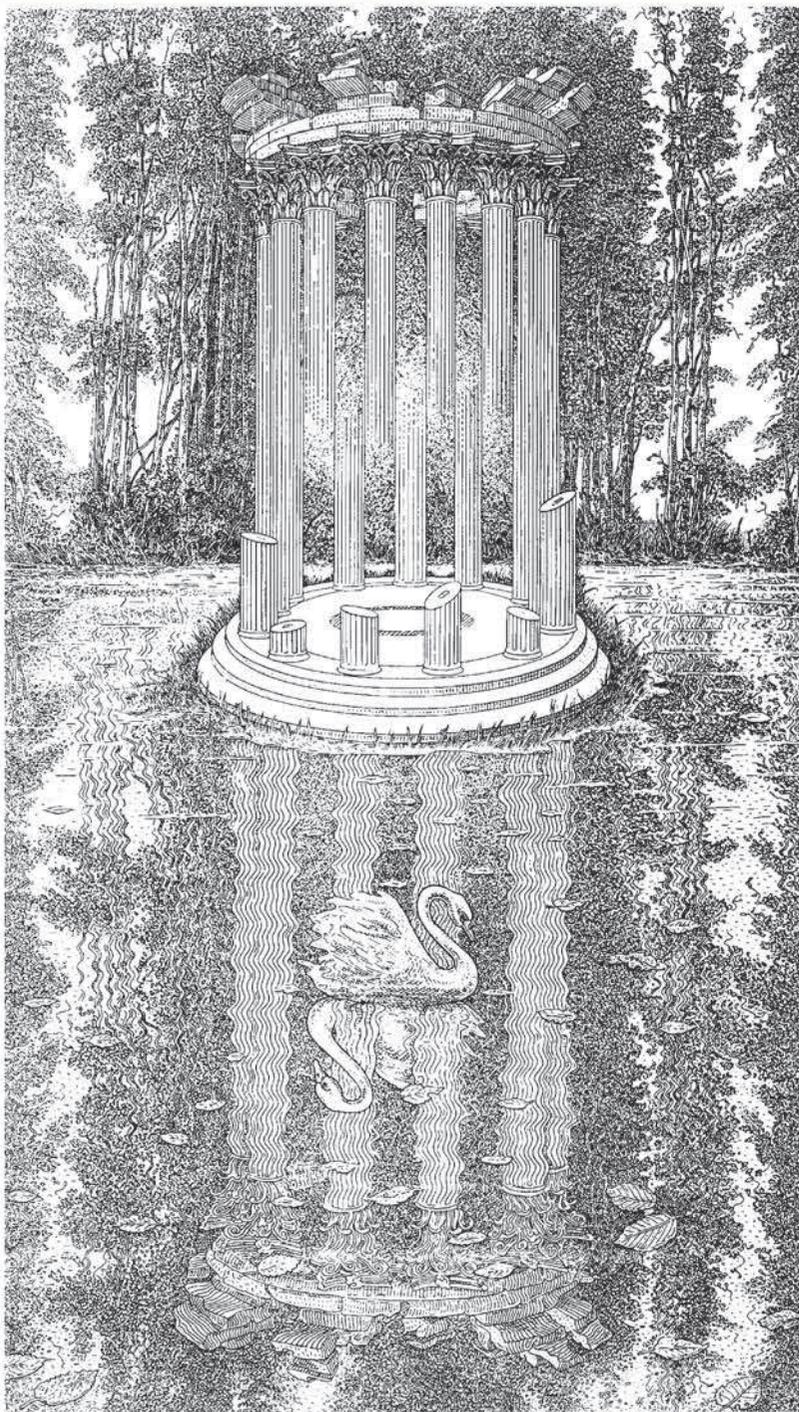
ISSN 0130-2221
2008 · №3

КВАНТ

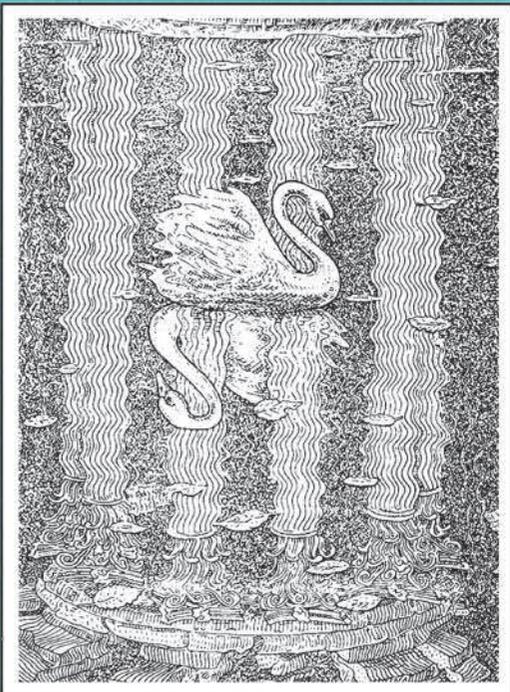
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



«НЕВОЗМОЖНЫЕ» ОБЪЕКТЫ



Мы видим, что у беседки число колонн-сталактитов (растущих сверху) не совпадает с числом колонн-сталагмитов (идуших снизу вверх). Если взгляд начинает скользить по отдельным колоннам, то некоторые из них просто исчезают на глазах, растворяясь на фоне окружающих беседку деревьев.



Отражение беседки в поверхности пруда даже по числу колонн отличается от «невозможного» оригинала, отражение лебедя – центрально-симметрично, а завершает список странностей взаимное расположение отражений лебедя и беседки!

В.Алексеев

Художник из Венгрии Иштван Орос создает изображения «невозможных» конструкций, используя технику ксилографии и литографии (гравирование на дереве и на камне).

На литографии «Лебедь» представлены сразу две темы: «невозможные» колоннады и «неправильные» отражения в зеркальной поверхности.

В номере:

	
<p>Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН</p>	<p>2 К 100-летию И.К.Кикоина 2 Из истории газовых центрифуг. <i>С.Романов</i> 6 Нанотехнологии: когда размер имеет значение. <i>К.Богданов</i> 13 Хроматические числа. <i>А.Райгородский, О.Рубанов, В.Кошелев</i></p>
<p>ПРЕДСЕДАТЕЛЬ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ</p>	<p>ЗАДАЧНИК «КВАНТА» 23 Задачи M2086–M2095, Ф2093–Ф2102 25 Решения задач M2066–M2069, Ф2078–Ф2087</p>
<p>Ю.А.Осипьян ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР</p>	<p>К М Ш 31 Задачи 34 Нет предела совершенству! <i>И.Акулич</i></p>
<p>РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ <i>А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегий), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегий), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)</i></p>	<p>КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА» 32 Распространение звука ШКОЛА В «КВАНТЕ» 37 Урок близился к завершению... <i>М.Бондаров</i> 38 Ракета на водяном паре, или Как студент с Луны улетал. <i>А.Стасенко</i> 39 Можно ли в микроскоп молекулу разглядеть? <i>А.Стасенко</i></p>
<p>РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ <i>А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев</i></p>	<p>МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК 41 О двух велосипедистах и вишневой косточке. <i>В.Протасов</i> ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА» 45 О поющих проводках, или Загадки пружины. <i>А.Сергеев, Н.Жданова, И.Сергачев, Р.Стрюнгис, А.Пятаков</i></p>
<p>РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР И.К.Кикоин ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА А.Н.Колмогоров</p>	<p>ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА 47 Гидростатика в стакане. <i>А.Черноуцан</i> 50 Объем тетраэдра и его частей. <i>Л.Ерганжиева, В.Мирошин</i> ОЛИМПИАДЫ 53 XVI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон» 56 Всероссийская студенческая олимпиада по физике</p>
<p><i>Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер</i></p>	<p>ИНФОРМАЦИЯ 57 Заочная школа СУНЦ НГУ 59 Ответы, указания, решения Вниманию наших читателей (22, 30,36)</p>
<p>Бюро  Квантум</p>	<p>НА ОБЛОЖКЕ I Иллюстрация к статье <i>К.Богданова</i> II «Невозможные» объекты III Шахматная страничка IV Коллекция головоломок</p>
<p>© 2008, РАН, Фонд Осипьяна, «Квант»</p>	<p>ТЕНЕХ  В праздновании 100-летнего юбилея академика И.К.Кикоина финансовое участие принимает ОАО «ТЕХНАБЭКСПОРТ»</p>

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Из истории газовых центрифуг

С. РОМАНОВ

НА НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ЯДЕРНОГО ПРОЕКТА предполагалось, что атомную бомбу можно изготовить из природного урана, обогащенного легким изотопом ^{235}U (так было и в США, и в СССР). Задача состояла в том, чтобы поднять содержание этого изотопа от 0,07% в природном уране до величины порядка 90%. О возможности получить в «урановом котле» плутоний, изотоп которого ^{239}Pu делится подобно ^{235}U , еще не было известно. В первых документах по советскому Урановому проекту, датированных 1942 годом, ставится задача «возобновить работы по исследованию осуществимости использования атомной энергии путем расщепления ядра урана». Ни о плутонии (или эка-осмии, как его тогда называли), ни о реакторах («урановых котлах») в документах ничего не говорится. И.В.Курчатов впервые докладывает руководству страны о возможности изготовления бомбы из плутония в марте 1943 года: «Если в действительности эка-осмий обладает такими же свойствами, как и уран-235, его можно будет выделить из «уранового котла» и употребить в качестве материала для эка-осмиевой бомбы. Бомба будет сделана, следовательно, из «неземного» материала, исчезнувшего на нашей планете. Как видно, при таком решении всей проблемы отпадает необходимость разделения изотопов урана, который используется и как топливо, и как взрывчатое вещество».

Тем не менее, проблема разделения изотопов была и осталась первоочередной в атомном проекте. Даже после того как пришло понимание возможности изготовления плутониевой бомбы, все равно проект развивался по двум основным направлениям – разделение изотопов и ядерные реакторы. Не было уверенности в том, какое из направлений раньше приведет к успеху. Курчатов меньше верил в возможность осуществить в промышленном масштабе разделение изотопов урана, с тем чтобы получить достаточные его количества для изготовления бомбы. Всю свою энергию и талант он направил на то, чтобы построить ядерный реактор для получения плутония. За проблему разделения изотопов урана в СССР отвечали Лев Андреевич Арцимович и Исаак Константинович Кикоин. Арцимович занимался электромагнитным разделением изотопов, а молекулярно-кинетическими методами занимался Кикоин.¹

¹ Несколько подробнее о различных методах разделения изотопов написано в Приложении к статье. (Прим. ред.)



И.К.Кикоин и Л.А.Арцимович

Первоначально наиболее подходящим для осуществления в промышленном масштабе считался метод центрифугирования. Однако потом, в значительной степени из-за полученных разведывательных данных, предпочтение было отдано газодиффузионному методу разделения изотопов урана. Им и занимался И.К.Кикоин. Окончательный выбор в пользу газодиффузионного метода был сделан в 1945 году. А до того была еще советская миссия «Алсос», когда в военной форме в чине полковников Кикоин, Арцимович, Харитон, Флеров и другие физики исследовали поверженную Германию. Команде, как ее называл Курчатов, советских физиков удалось обнаружить около 300 тонн урана, найти и пригласить или вывезти в СССР (как угодно или кого как) немецких ученых и немецкое оборудование и выяснить, что было сделано в Германии по немецкому Урановому проекту. По крайней мере, появилась уверенность в том, что немцы были далеки от создания ядерного оружия. Не было у немцев и больших успехов в решении проблемы разделения изотопов. Кикоин вспоминал, что они обнаружили в Институте кайзера Вильгельма в Берлине «наивную установку для разделения изотопов... использовать всерьез такую технологию не представляется возможным».

С 1945 года И.К.Кикоин был полностью поглощен работой по газодиффузионному методу разделения

изотопов урана. Работы велись с нарастающим темпом. В 1947 году в Лаборатории №2 (так вначале назывался Институт атомной энергии) в Кикоинском отделении был запущен экспериментальный каскад диффузионных машин. Было показано, что принципиально задачу обогащения урана до необходимого содержания изотопа ^{235}U решить можно. В 1949 году на Урале заработал первый газодиффузионный завод (Комбинат №813). После серии неудач завод стал выдавать оружейный уран, и второе испытание атомного оружия в СССР в 1951 году проводилось с изотопом, начиненным этим продуктом.

После того как была полностью освоена газодиффузионная технология и построены предприятия, обеспечивавшие необходимое количество оружейного урана, И.К.Кикоин возвращается к исследованиям центрифужной технологии. Перевод разделительной промышленности на центрифуги смог бы многократно уменьшить колоссальное энергопотребление, необходимое для газовой диффузии. Наверное, имела место и естественная неудовлетворенность настоящего ученого, который, по существу, пошел по пути, уже пройденному американцами. Да и теория указывала, что для разделения изотопов урана более подходит именно центрифужная технология. А что до громадных технических трудностей ее осуществления, так и газовая диффузия далась не просто.

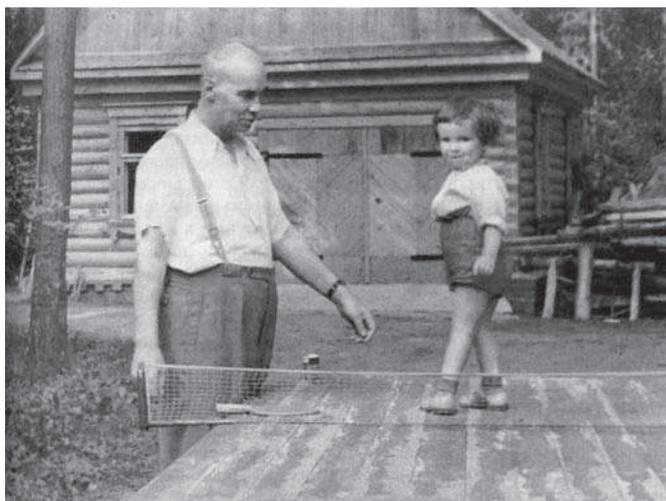
Работы по созданию газовых центрифуг начались в конце 1946 года группой сотрудников Института «А» в Сухуми. Группу возглавлял немецкий физик Макс Штеенбек. Его разыскали летом 1945 года в лагере для военнопленных в Польше и привезли в СССР. Сначала Штеенбек предлагал сделать центрифугу с 10-ти метровым ротором, линейная скорость вращения на периферии должна была быть 250 м/с. Спустя шесть лет, в 1952 году Штеенбек работал с центрифугой с 6-ти метровым ротором диаметром 58 мм. Ротор был гибкий, состоял из десяти коротких труб с девятью сильфонными соединениями. Скорость вращения была 1200–1400 об/с, что соответствует линейной скорости на периферии ротора 220–240 м/с. Передавать вещество из центрифуги в центрифугу предполагалось с помощью конденсации/испарения (так называемый метод передачи через твердую фазу), что создавало почти непреодолимые трудности при соединении центрифуг в каскад, а каскада, как известно, Штеенбек так и не создал. Правда, в экспериментах с гексафторидом урана на центрифуге Штеенбека эффект разделения составлял 50% от теоретического. Но главное, что придумал Штеенбек, – это конструкция опорного узла ротора центрифуги. Ротор вращался, опираясь на тонкую стальную иглу, а верхний конец ротора удерживался с помощью постоянного магнита.

В 1951 году сотрудник И.К.Кикоина, талантливый инженер Е.М.Каменев выдвинул идею центрифуги с коротким жестким тонкостенным ротором и нижней иглообразной опорой. Это позволяло заметно повысить скорость вращения ротора. Решающую роль сыграло предложение И.К.Кикоина о введении неподвижных отборных трубок по концам ротора в периферийный уплотненный слой газа. Высокое газодинамическое

давление в этом слое позволяло создавать необходимые потоки легкой и тяжелой фракций с передачей их в каскаде из центрифуги в центрифугу по газовой фазе. Одновременно взаимодействие вращающегося газа с неподвижными отборными трубками обеспечивало возникновение противоточной циркуляции внутри ротора с необходимыми скоростями. В апреле 1953 года на такую центрифугу был выдан патент, а в июле того же года был получен еще один патент – на гидродинамический способ (с помощью неподвижных трубок) передачи газа из центрифуги в центрифугу. Ясно, что оба патента были закрытыми.

Далее дела пошли так. В 1953 году Минсредмаш принимает решение об освоении центрифужных технологий в промышленном масштабе. В 1954 году были созданы первые образцы машин, а 10 октября 1955 года Совет Министров принимает решение о строительстве опытного центрифужного завода на Урале (на Комбинате №183). Этот завод был построен и смонтирован в 1956–57 годы, всего на нем было установлено 2432 центрифуги. Пуск завода был осуществлен 2–4 ноября 1957 года. Следует отметить, что это был первый в мировой практике успешный опыт промышленного использования центрифужной технологии.

В целом, опыт эксплуатации опытного центрифужного завода оказался весьма успешным. 5 мая 1958 года на НТС Минсредмаша под председательством И.В.Курчатова было принято решение о переходе к промышленному использованию центрифужного метода разделения изотопов урана, и 22 августа 1960 года приказом Минсредмаша было утверждено проектное задание на строительство первого в мире промышленного завода газовых центрифуг. А 4 ноября 1962 года был осуществлен пуск первой очереди завода (пуск предприятия в целом осуществлялся в несколько этапов в 1962–64 годы). Само производство поражает. Цех завода имеет длину почти километр, в нем установлено 700000 центрифуг, соединенных в каскады. Работают они практически бесшумно. Людей в цехе нет. От специалистов, в частности зарубежных, хозяева произ-



И.К.Кикоин на даче с внуком Сергеем (Романовым) (1961 г.)

водства слышали восторженный отзыв: «Это техническое хулиганство!»

К настоящему времени всего создано девять поколений газовых центрифуг. Вся разделительная промышленность РФ основана на центрифужной технологии. Последний газодиффузионный завод был закрыт в 1992 году, а с 1988 года полностью прекращено производство высокообогащенного урана для военных целей. Сейчас разделительная промышленность работает для производства низкообогащенного урана для атомной энергетики, для производства стабильных изотопов, а также для переработки высокообогащенного урана ядерных боеголовок в низкообогащенный уран для энергетических реакторов.

В итоге имеем следующее. В СССР под научным руководством И.К.Кикоина впервые в мире создана промышленность разделения изотопов, основанная на центрифужной технологии. Но об этом в мире никто не знает. Промышленность отлично работает, более того, это единственная отрасль в СССР, которая получает сырье из развитых индустриальных держав, а назад отправляет высококачественный готовый продукт. (На Западе могли думать, что разделение производится газодиффузионным методом.) Немецкие специалисты, которые после поражения Германии работали в СССР над созданием центрифуги, уезжают из СССР и, оказавшись на Западе, регистрируют патент на центрифугу. Зарегистрировано именно то изделие, которое было создано в СССР. Протеста не последовало, хотя советской стороне было хорошо известно об этом шаге. Автор патента Гернот Циппе (он, как и Штеенбек, попал в Институт «А» будучи военнопленным и работал в группе Штеенбека) становится весьма богатым человеком благодаря этому патенту. Так он сам позже рассказывал российским коллегам, встречаясь с ними на международных конференциях. Циппе носит титул «отца» центрифужного метода разделения изотопов урана, центрифуга называется «центрифугой Циппе»

и так далее. Русские, обладая лучшей технологией и промышленностью (отставание Запада было, по крайней мере, лет на 20), не могут представить центрифуги на цивилизованном международном рынке. Остаются контакты только с такими странами, как Китай и Ирак. В целом, весьма печальная история.

Наверное, невозможно дать однозначные оценки действий советского руководства, засекретивших на многие десятилетия все работы по разделению изотопов настолько, что не было никакой возможности не только утвердить приоритет страны и разработчиков передовых технологий, но и успешно действовать на цивилизованном рынке. Вряд ли кто-нибудь подсчитывал связанный с этим экономический ущерб. С другой стороны, возможно, что такая секретность вместе с общей закрытостью советской системы служила серьезным препятствием к распространению потенциально опасных технологий. Ведь по сути отлаженное центрифужное производство есть наиболее эффективный способ накопления делящихся материалов для изготовления атомной бомбы. По-видимому, сегодня и не может быть сделано однозначного вывода обо всех этих событиях.

Однако эта история наводит на следующие тревожные мысли. Мы знаем, что создатели ядерного оружия и в СССР и в США – выдающиеся ученые и глубокие мыслители – ясно понимали возможные политические последствия обладания таким оружием. Они использовали свой немалый авторитет для того, чтобы донести до правительств и международного сообщества идеи недопустимости ядерной войны, идеи о необходимости принять международные законы о нераспространении ядерного оружия, о контроле за ядерными материалами и технологиями. Все эти идеи остаются актуальными и сегодня. Более того, по мере роста общего технологического уровня в современном мире требуются и новые усилия для недопущения распространения ядерного оружия.

Приложение

Изотопы – разновидности химического элемента с различным числом нуклонов в ядрах. Поскольку они являются одним и тем же химическим элементом, то у них одинаковое число атомных электронов, а значит, и ядерных протонов. Различны у них числа нейтронов в ядрах. Все изотопы одного элемента находятся в одной клеточке периодической системы, отсюда их название: «изо» – одинаковый, «топос» – место. Самые известные изотопы – это изотопы водорода дейтерий и тритий. В настоящее время известно около 1400 изотопов, 357 из них – природные изотопы 92 химических элементов, остальные изотопы получены искусственным путем в различных ядерных реакциях.

Многие изотопы радиоактивны и используются в самых разных областях науки и техники (так называемые меченые атомы). Поэтому задача разделения изотопов возникла еще в 30-х годах прошлого века. Из-за одинаковости химических свойств изотопов одного элемента возникает необходимость использовать различие в физических свойствах изотопов и их соединений, вытекающее из различия в массах их ядер. Чем больше отношение масс ядер, тем легче разделить

изотопы. Например, относительно легко производится разделение обычной и тяжелой воды, молярные массы которых относятся как 18:20 = 1,11. А вот отношение молярных масс гексафторида урана – единственного газообразного соединения урана – для двух его изотопов ^{238}U и ^{235}U составляет всего лишь 1,0086. Если учесть, что в природном уране доля изотопа ^{235}U равна 0,72%, то для получения этого изотопа в достаточно чистом виде необходимо многократное повторение одной и той же операции, в которой одна часть исходного вещества становится чуть-чуть богаче нужным изотопом. В ядерной урановой бомбе чистота изотопа ^{235}U должна быть очень высокой, поэтому число повторений может достигать сотен и даже тысяч. Для ядерных реакторов требуется меньшая чистота (используется так называемый «обогащенный уран»), поэтому число повторений может быть гораздо меньше (несколько десятков).

Для разделения изотопов урана используются два метода (из одиннадцати применяемых в различных областях науки и техники) – молекулярно-кинетический метод газовой диффузии и метод центрифугирования. На начальной стадии ядерного проекта в нашей стране велись работы и по исполь-

зованию электромагнитного метода, в котором разделение изотопов происходит благодаря различию траекторий их ионов в магнитном поле. Этот метод широко используется для разделения небольших количеств изотопов, но для промышленного разделения изотопов урана он оказался очень труден и неэкономичен.

Вплоть до 70-х годов прошлого века использовался метод газовой диффузии через пористые перегородки. При достаточно низких давлениях, когда длина свободного пробега молекул много больше диаметров пор, скорость диффузии определяется только средней скоростью теплового движения. Небольшая разница в массах молекул дает небольшое различие в скорости. Газ гексафторида урана, прошедший перегородку, становится чуть беднее тяжелым изотопом и чуть богаче – легким. При последовательном процессе прохождения через сотни перегородок на выходе можно получить газ, достаточно обогащенный легким изотопом. Первая порция ядерного уранового «горючего» была получена в СССР только в 1950 году и использовалась для испытания уран-плутониевой бомбы в 1951 году.

В методе центрифугирования в цилиндр (или в трубку) помещается гексафторид природного урана, и трубка приво-

дится в быстрое вращение. Во вращающемся газе устанавливается равновесное распределение концентрации молекул по расстоянию от оси вращения, точно так же, как оно устанавливается в зависимости от высоты в земной атмосфере. Только во вращающейся трубке роль силы тяжести играет центробежная сила инерции, направленная по радиусу от оси вращения. Возрастание концентрации при удалении от оси вращения происходит быстрее для частиц большей массы, поэтому во внешней части трубки отношение концентраций тяжелых и легких частиц оказывается больше, чем вблизи оси вращения. Для получения заметной разницы концентраций необходима огромная скорость вращения – порядка 1000 об/с.

Главная трудность в этом методе заключалась не столько в обеспечении высокой скорости вращения, сколько в осуществлении передачи обогащенной смеси из одной центрифуги в другую без остановки вращения. Все эти вопросы были успешно решены к 1974 году, в основном, благодаря экспериментальному и организационному таланту одного из руководителей этих работ – Исаака Константиновича Никойна.

Л. Белопухов

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Психологический «Завиток»

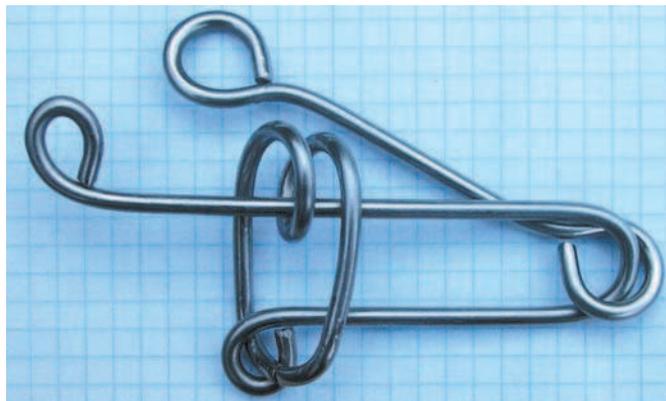
(Начало см. на 4-й с. обложки)

В начале августа 2008 года в Праге состоится 28-й Всемирный съезд любителей головоломок. Из десятков стран мира в Чехию привезут сотни «умных» игрушек, а затем знатоки головоломок из Европы, Америки и Японии оценят их и назовут лучшие изобретения года.

Среди новых головоломок будет и «Завиток» москвича Кирилла Гребнева. Благодаря своей оригинальности он наверняка привлечет внимание любителей головоломок, тем более что на предыдущем съезде в Австралии среди лучших изобретений 2007 года были названы две головоломки Кирилла. Это был второй случай за всю историю съездов, когда в число победителей вошли две головоломки одного автора.

Новая головоломка Кирилла Гребнева изображена на рисунке. Чтобы изготовить «Завиток» самостоятельно, возьмите три куска стальной или медной проволоки диаметром 3–4 мм. Для показанного здесь варианта головоломки берут отрезки проволоки длиной 25, 22 и 14,5 см. На самом длинном, предназначенном для скобы, отмечают точку, делящую его на отрезки 9 и 13 см. Зажав проволоку круглогубцами в этой точке, сгибают концы проволоки так, чтобы расстояние между ними было 12 мм. Затем на концах скобы загибают кольца. Фотография головоломки позволяет использовать изображение как шаблон: постепенно изгибать проволоку круглогубцами, а затем прикладывать детали к фотографии для проверки правильности размеров.

Решение головоломки обычно начинается с того, что ее берут в руки: левой рукой – за скобу, а правой – за ручку. После этого, держась за конец ручки, начинают двигать ее вдоль скобы, пытаясь просунуть кольцо через завиток и отцепить ручку от скобы. Собственно говоря, ничего



другого и сделать-то нельзя – слишком мало разрешенных конструкцией движений. Сразу предупредим, что из этих попыток ни одна не приблизит вас к решению. Первая ошибка всех, кто начинает разгадывать эту головоломку, заключается в том, что они берутся правой рукой (речь идет о правшах) не за тот конец ручки. Эта остроумная психологическая уловка специально придумана изобретателем, чтобы увести вас в сторону от правильного решения, заставить безрезультатно двигать ручку туда-сюда вдоль скобы, пытаясь просунуть ее в завиток.

Правильный путь состоит в том, чтобы не кольцо двигать к завитку, а конец ручки, за который вы так упорно держитесь, отпустить и просунуть через петлю завитка. Если это движение выполнить правильно, то дальнейшее решение вы сможете найти самостоятельно с помощью двух фотографий на 4-й странице обложки, на которых показаны промежуточные этапы, ведущие к решению головоломки.

Желаем вам успеха!

А. Калинин



К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Нанотехнологии: когда размер имеет значение

К.БОГДАНОВ

Вы можете произнести слово «птица» на самых разных языках, но, сделав это, вы все равно ничего нового о птицах не узнаете. Не лучше ли сначала просто взглянуть на любую птицу и задуматься над тем, что это такое!.. Существует большая разница между знанием названия чего-нибудь и знанием того, как это работает.

Р.Фейнман

НА НАШИХ ГЛАЗАХ ФАНТАСТИКА СТАНОВИТСЯ реальностью – люди научились перемещать отдельные атомы и складывать из них, как из кубиков, устройства и механизмы необычайно малых размеров и поэтому невидимые обычным глазом. Появилась целая отрасль науки – НАНОТЕХНОЛОГИЯ, впитавшая в себя самые новые достижения физики, химии и биологии. Ученые-нанотехнологи работают с ничтожно малыми объектами, размеры которых измеряются в нанометрах. Нанотехнология – не просто количественный, а качественный скачок от работы с веществом к манипуляции отдельными атомами.

В переводе с греческого слово «нано» означает карлик. Один нанометр (нм) – это одна миллиардная часть метра (10^{-9} м). Нанометр во столько же раз меньше одного метра, во сколько раз толщина пальца меньше диаметра Земли. Размеры объектов, с которыми имеют дело нанотехнологи, лежат в диапазоне от 0,1 до 100 нм. Большинство атомов имеют диаметр от 0,1 до 0,2 нм, толщина нитей ДНК – около 2 нм, диаметр эритроцитов – 7000 нм, а толщина человеческого волоса – 80000 нм.

Ученые утверждают, что в наступившем XXI веке стержнем новой технической революции станут материалы, лекарства, устройства, средства связи и доставки, сделанные с использованием нанотехнологий.

С чего все начиналось

Идея о том, что вполне возможно собирать устройства и работать с объектами, которые имеют наноразмеры, впервые прозвучала в выступлении лауреата Нобелевской премии Ричарда Фейнмана в 1959 году в Калифорнийском технологическом институте. Лекция называлась «Там, внизу, полно места!» Слово «внизу» в названии лекции означало в «мире очень малых размеров». Тогда Фейнман сказал, что когда-нибудь, например в 2000 году, люди будут удивляться тому,

что до 1960 года никто не относился серьезно к исследованиям наномира. По словам Фейнмана, человек очень долго жил, не замечая, что рядом с ним живет целый мир объектов, разглядеть которые он не в состоянии. Ну, а если мы не видим эти объекты, то мы не можем и работать с ними.

Тем не менее, наши клетки – кирпичики, из которых состоит наш организм, – прекрасно научились работать с нанобъектами. Клетка всю свою жизнь собирает из различных атомов молекулы сложных веществ. Собрав эти молекулы, клетка размещает их в различных частях – одни оказываются в ядре, другие – в цитоплазме, а третьи – в мембране. Представьте себе возможности, которые откроются перед человечеством, если оно овладеет такими же нанотехнологиями, которыми уже владеет каждая клетка человека.

Фейнман так описывает последствия нанотехнологической революции для компьютеров: «Если, например, диаметр соединяющих проводов будет составлять от 10 до 100 атомов, то размер любой схемы не будет превышать нескольких тысяч ангстрем. Каждый, кто связан с компьютерной техникой, знает о тех возможностях, которые обещает ее развитие и усложнение. Если число используемых элементов возрастет в миллионы раз, то возможности компьютеров существенно расширятся. Они научатся рассуждать, анализировать опыт и рассчитывать собственные действия, находить новые вычислительные методы и т. п. Рост числа элементов приведет к важным качественным изменениям характеристик ЭВМ».

Позвав ученых в наномир, Фейнман сразу же предупреждает о тех препятствиях, которые их там ожидают, на примере изготовления микроавтомобиля длиной всего 1 мм. Так как детали обычного автомобиля сделаны с точностью 10^{-5} м, то детали микроавтомобиля следует изготавливать с точностью в 4000 раз выше, т.е. $2,5 \cdot 10^{-9}$ м. Таким образом, размеры деталей микроавтомобиля должны соответствовать расчетным с точностью ± 10 слоев атомов.

Наномир не только полон препятствий и проблем. Нас в наномире ожидают и хорошие новости – все детали наномира оказываются очень прочными. Происходит это из-за того, что масса нанобъектов уменьшается пропорционально третьей степени их размеров, а площадь их поперечного сечения – пропорционально второй степени. Значит, механическая нагрузка на

каждый элемент объекта – отношение силы тяжести элемента к площади его поперечного сечения – уменьшается пропорционально размерам объекта. Таким образом, пропорционально уменьшенный наностол обладает в миллиард раз более толстыми наноножками, чем это необходимо из соображений прочности.

Фейнман считал, что человек сможет легко освоить наномир, если создаст робота, способного делать уменьшенную, но работоспособную копию самого себя. Пусть, например, мы научились делать робота, который может без нашего участия создавать свою уменьшенную в 4 раза копию. Тогда этот маленький робот сможет сделать копию первоначального, уменьшенную уже в 16 раз, и так далее (рис.1). Очевидно, что десятое поколение таких роботов будет создавать роботов, размеры



Рис.1. Иллюстрация концепции Р.Фейнмана о том, чтобы роботы научились автономно делать свои уменьшенные копии

которых будут в миллионы раз меньше первоначальных.

Конечно, по мере уменьшения размеров мы будем постоянно сталкиваться с весьма необычными физическими явлениями. Ничтожный вес деталей наноробота приведет к тому, что они будут прилипать друг другу под действием сил межмолекулярного взаимодействия, и гайка, например, не будет отделяться от болта после откручивания. Однако известные нам законы физики не запрещают создавать объекты «атом за атомом». Манипуляция атомами, в принципе, вполне реальна и не нарушает никаких законов природы. Практические же трудности ее реализации обусловлены лишь тем, что мы сами являемся слишком крупными и громоздкими объектами, вследствие чего нам сложно осуществлять такие манипуляции.

Чтобы как-то стимулировать создание микрообъектов, Фейнман обещал заплатить 1000 долларов тому, кто соорудит электромоторчик размером $1/64$ дюйма (1 дюйм $\approx 2,5$ см). И совсем скоро такой микромоторчик был создан. С 1993 года ежегодно присуждается

премия имени Фейнмана за выдающиеся достижения в области нанотехнологий.

В своей лекции Фейнман говорил и о перспективах нанохимии. Сейчас химики используют для синтеза новых веществ сложные и разнообразные приемы. Как только физики создадут устройства, способные оперировать отдельными атомами, многие методы традиционного химического синтеза могут быть заменены приемами «атомной сборки». При этом, как считал Фейнман, физики действительно могут научиться синтезировать любое вещество, исходя из записанной химической формулы. Химики будут заказывать синтез, а физики – просто «укладывать» атомы в предлагаемом порядке. Развитие техники манипуляции на атомарном уровне позволит решить многие проблемы химии и биологии.

Машины созидания

Нанотехнология стала самостоятельной областью науки и превратилась в долгосрочный технический проект после детального анализа, проведенного американским ученым Эриком Дрекслером в начале 1980-х годов, и публикации его книги «Машины созидания: грядущая эра нанотехнологии».

По определению Дрекслера, нанотехнология – «ожидаемая технология производства, ориентированная на дешевое получение устройств и веществ с заранее заданной атомарной структурой». Как считают многие специалисты, в течение следующих 50 лет многие устройства станут такими маленькими, что тысяча таких наномашин вполне смогут разместиться на площади, занимаемой точкой в конце этого предложения.

Чтобы собирать наномашин, необходимо:

- 1) научиться работать с одиночными атомами – брать их и ставить на нужное место;
- 2) разработать сборщики – наноустройства, которые могли бы соответствующим образом работать с одиночными атомами по программам, написанным человеком, но без его участия;
- 3) разработать репликаторы – устройства, которые бы изготавливали наносборщики, так как их понадобится очень и очень много.

Что такое нанопроволоки и почему они такие прочные?

Нанопроволоками называют проволоки с диаметром несколько десятков и менее нанометров, изготовленные из металла, полупроводника или диэлектрика. Длина нанопроволок часто может превышать их диаметр в 1000 и более раз. Нанопроволоки часто называют одномерными структурами, а их чрезвычайно малый диаметр (около 100 размеров атома) дает возможность проявляться различным квантово-механическим эффектам. Поэтому нанопроволоки иногда называют «квантовыми проволоками». Уникальные электрические и механические свойства нанопроволок создают предпосылки для их использования в будущих нанoeлектронных и нанoeлектромеханических приборах, а также в качестве элементов новых композитных материалов и биосенсоров.

В природе нанопроволок не существует. В лабораториях нанопроволоки чаще всего получают методом эпитаксии, т.е. ориентированного роста одного монокристалла на поверхности другого, когда кристаллизация вещества происходит только в одном направлении. Например, нанопроволоку из кремния можно вырастить так, как изображено на рисунке 2 слева. Наноча-

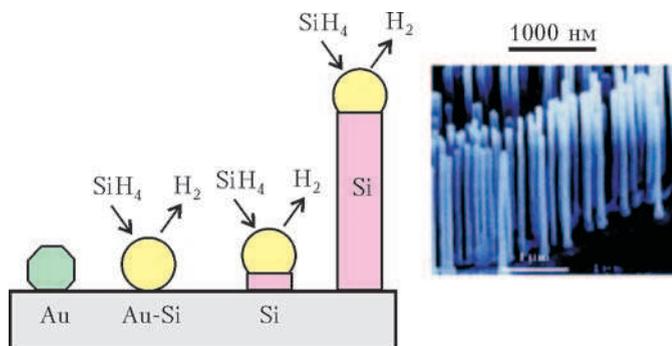


Рис.2. Получение кремниевой нанопроволоки методом эпитаксии с помощью золотой наночастицы

стицу золота помещают в атмосферу газа силана (SiH_4), и эта наночастица становится катализатором реакции распада силана на водород и жидкий кремний. Жидкий кремний скатывается с золотой наночастицы и кристаллизуется под ней. Если концентрация силана вокруг наночастицы поддерживается неизменной, то процесс эпитаксии продолжается, и все новые слои жидкого кремния кристаллизуются на его уже затвердевших слоях. В результате нанопроволока из кремния растет, приподнимая наночастицу золота все выше и выше. При этом, очевидно, размер наночастицы определяет диаметр нанопроволоки. Справа на рисунке 2 показан «лес» из ZnO-нанопроволок, полученных аналогичным образом.

Как известно, прочность – это свойство твердых тел сопротивляться разрушению (разделению на части), а также необратимому изменению формы под действием внешних нагрузок. Когда цилиндрический образец с площадью поперечного сечения S растягивают силой F , он деформируется сначала обратимо, т.е. упруго – его механическое напряжение $\sigma = F/S$ растет прямо пропорционально относительному удлинению $\varepsilon = (L - L_0)/L_0$ (рис.3, область *O*), затем пластически, т.е. необратимо (рис.3, область *П*). При дальнейшей деформации структурные неоднородности образ-

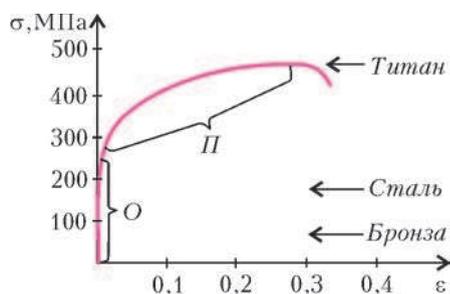


Рис.3. Взаимосвязь между механическим напряжением и относительной деформацией образца. Стрелками указаны пределы прочности для некоторых материалов

ца (дефекты кристаллической решетки, или дислокации) начинают двигаться и, сталкиваясь с другими, образуют микротрещины. При этом чем больше будет этих дислокаций и чем быстрее они смогут двигаться по образцу, тем больше будет микротрещин. Когда растягивающее напряжение достигает предела прочности, соседние микротрещины, соединяясь друг с другом, достигают критического размера, и образец разрушается.

Нанопроволока – это монокристалл, в кристаллической решетке которого практически отсутствуют дефекты (дислокации). При этом отношение площади поверхности к объему для нанопроволок гораздо больше, чем для образцов обычных размеров. Поэтому поверхность нанопроволок легко «поглощает» выходящие наружу дислокации без образования микротрещин. Кроме того, поверхность нанопроволоки, имеющая чрезвычайно малый радиус кривизны (около 10 нм), сильно сжата и поэтому препятствует движению дислокации наружу, т.е. образованию микротрещины. Все это приводит

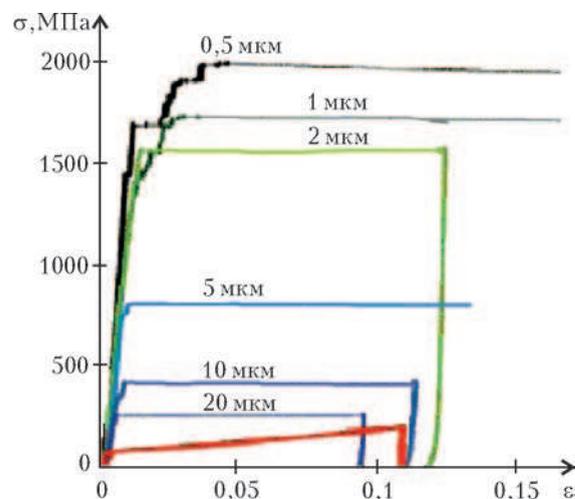


Рис.4. Зависимость механического напряжения от относительной деформации для микрообразцов из никеля и его сплавов разного диаметра. Для сравнения красным показана эта зависимость для поликристаллического макрообразца

к тому, что у нанопроволок почти отсутствует пластическая деформация, а предел прочности в десятки раз выше, чем у обычных образцов (рис.4).

Почему наночастицы плавятся при низкой температуре?

При уменьшении размеров частиц изменяются не только механические свойства, но и термодинамические характеристики. Так, температура плавления становится гораздо ниже, чем у образцов обычного размера. На рисунке 5 представлена экспериментальная кривая падения температуры плавления наночастиц алюминия с уменьшением размеров частицы. При этом температура плавления частицы размером 4 нм уменьшается на 140°C по сравнению с температурой плавления образца алюминия обычных размеров.

Зависимости, аналогичные той, которая показана на рисунке 5, были получены для многих металлов. Так, при уменьшении диаметра наночастиц из олова до 8 нм

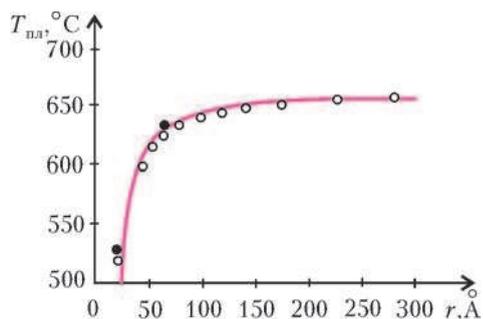


Рис.5. Зависимость температуры плавления алюминиевых наночастиц от их радиуса

их температура плавления падает на 100 °С. При этом самое большое падение температуры плавления (более чем на 500 °С) было обнаружено у наночастиц золота.

У наночастиц почти все атомы – на поверхности. Причиной понижения температуры плавления у наночастиц служит то, что атомы на поверхности всех кристаллов находятся в особых условиях, а доля таких поверхностных атомов у наночастиц становится очень большой. Сделаем оценку этой поверхностной доли для алюминия.

Легко вычислить, что в 1 см³ алюминия содержится примерно $6 \cdot 10^{22}$ атомов. Для простоты будем считать, что атомы находятся в узлах кубической кристаллической решетки, тогда расстояние между соседними атомами будет около $4 \cdot 10^{-8}$ см. Значит, плотность атомов на поверхности составит $6 \cdot 10^{14}$ см⁻². Теперь возьмем кубик из алюминия с ребром 1 см. Число поверхностных атомов у него $36 \cdot 10^{14}$, а число атомов внутри $6 \cdot 10^{22}$. Таким образом, доля поверхностных атомов у такого алюминиевого кубика «обычных» размеров составляет всего $6 \cdot 10^{-8}$.

Если сделать такие же вычисления для кубика из алюминия размером 5 нм, то окажется, что на поверхности такого «нанокубика» находится уже 12% всех его атомов. Ну, а на поверхности кубика размером 1 нм вообще находится больше половины всех атомов! Зависимость поверхностной доли α от числа атомов N показана на рисунке 6.

На поверхности кристалла порядка нет. С начала 60-х годов прошлого века ученые считают, что атомы, расположенные на поверхности кристаллов, пребыва-

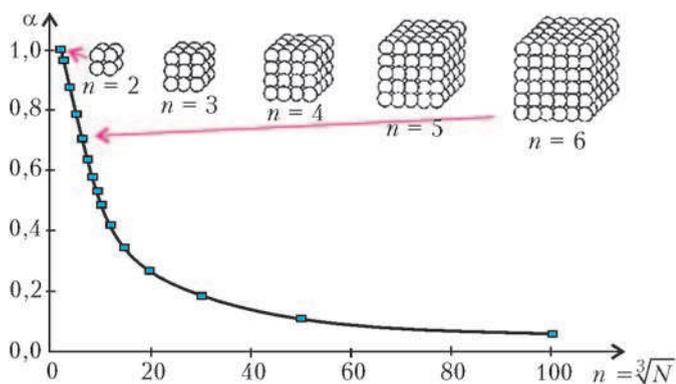


Рис.6. Зависимость поверхностной доли атомов от их числа в кубике кристаллического вещества

ют в особых условиях. Силы, заставляющие их находиться в узлах кристаллической решетки, действуют на них только снизу. Поэтому поверхностным атомам (или молекулам) ничего не стоит «уклониться от советов и объятий» молекул решетки. И если это происходит, то к такому же решению приходят сразу несколько поверхностных слоев атомов. В результате на поверхности всех кристаллов образуется пленка жидкости. Кстати, кристаллы льда не являются исключением (рис.7), поэтому лед и скользкий.

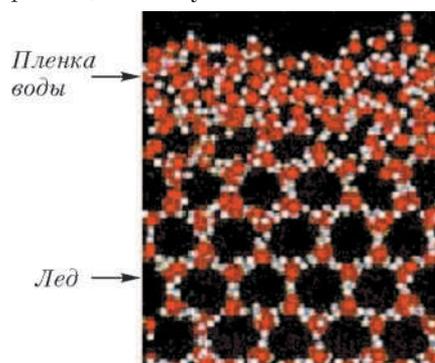


Рис.7. Схематическое изображение поперечного сечения среза льда. Красные кружки – атомы кислорода, белые – водорода

Толщина жидкой пленки на поверхности кристалла растет с температурой, так как более высокая тепловая энергия молекул вырывает из кристаллической решетки больше поверхностных слоев. Теоретические оценки и эксперименты показывают, что как только толщина жидкой пленки на поверхности кристалла начинает превышать 1/10 размеров кристалла, кристаллическая решетка разрушается.

Очевидно, что «легкоплавкость» наночастиц следует учитывать на любых нанопроизводствах. Известно, например, что размеры современных элементов электронных микросхем находятся в нанодиапазоне. Поэтому понижение температуры плавления кристаллических нанообъектов накладывает определенные ограничения на температурные режимы работы современных и будущих микросхем.

Закон Ома для углеродных нанотрубок

В наном мире изменяются не только механические свойства и температуры плавления веществ, но и их электрические характеристики. Оказывается, сопротивление R цилиндрического резистора наноразмеров нельзя вычислять по известной формуле $R = \rho L/S$, где L – длина, S – площадь поперечного сечения, а ρ – удельное сопротивление материала резистора. Мало того, сопротивление R_0 нанорезисторов вообще не зависит от их размеров и вещества, из которого они сделаны, а определяется только двумя фундаментальными физическими константами:

$$R_0 = \frac{h}{2e^2} = 12,9 \text{ кОм},$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, а $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж/с – постоянная Планка. Величину R_0 назвали квантом электрического сопротивления,

имея в виду, что в наномире сопротивления всех резисторов одинаковы.

Квантование электрического сопротивления – не единственная особенность проводимости в наномире. Оказалось, что в нанорезисторе при прохождении тока не выделяется джоулево тепло. Эту необычную проводимость в наномире, независимую от размеров и материала резистора и не сопровождающуюся выделением тепла, назвали баллистической. В переводе с греческого «баллио» означает бросаю; соответственно, баллистика – наука о движении артиллерийских снарядов, пуль и т.п. Названием проводимости в наномире «баллистической» его авторы хотели подчеркнуть, что электроны, как искусно запущенные снаряды, движутся через нанорезистор, не сталкиваясь с его атомами, находящимися в узлах кристаллической решетки.

Углеродные нанотрубки – квантовые резисторы. Примером нанорезисторов, обладающих баллистической проводимостью, являются углеродные нанотрубки – протяженные цилиндрические структуры диаметром от одного до нескольких десятков нанометров и длиной до нескольких сантиметров. Углеродные нанотрубки – это каркасные структуры или гигантские молекулы, состоящие только из атомов углерода. Такую нанотрубку легко себе представить, если вообразить, что вы сворачиваете в трубку один из молекулярных слоев графита – графен (рис.8). Способ сворачивания нанотрубок – угол между направлением оси нанотрубки по

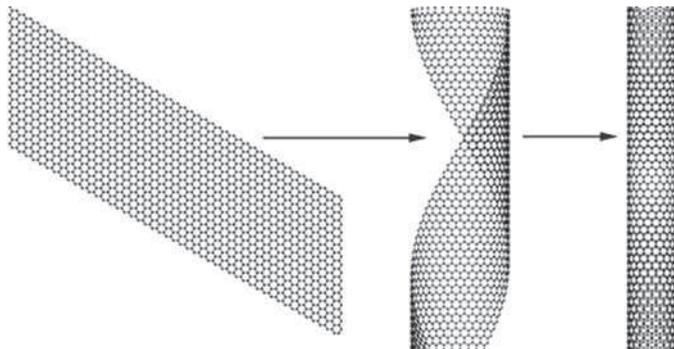


Рис.8. Один из способов воображаемого изготовления нанотрубки из молекулярного слоя графита

отношению к осям симметрии графена (угол закручивания) – во многом определяет ее свойства.

Конечно, никто не изготавливает нанотрубки, сворачивая их из графитового листа. Нанотрубки образуются сами, например – на поверхности угольных электродов при дуговом разряде между ними. При разряде атомы углерода испаряются с поверхности и, соединяясь между собой, образуют нанотрубки самого различного вида – однослойные, многослойные и с разными углами закручивания. В зависимости от угла закручивания нанотрубки могут обладать высокой, как у металлов, проводимостью, а могут иметь свойства полупроводников. Дальше речь пойдет только о нанотрубках с высокой проводимостью.

Открытие квантовой проводимости углеродных нанотрубок было сделано, когда измеряли зависимость их сопротивления от длины, погружая их в ртуть.

Диаметр нанотрубок составлял от 1,4 до 50 нм, а длина – от 1 до 5 мкм. Но несмотря на такой большой разброс в размерах сопротивление ВСЕХ нанотрубок составляло 12,9 кОм.

Почему электричество в наномире превращается в оптику? Ток переносится в проводнике электронами, образующими так называемый электронный газ. Среднеквадратичный импульс \bar{p} одного из таких электронов можно найти из соотношения для среднеквадратичной энергии \bar{E} частицы идеального газа:

$$\bar{E} = \frac{\bar{p}^2}{2m_e} = \frac{3}{2}kT,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона. Подставляя сюда $T = 300$ К, получаем $\bar{p} = 10,6 \cdot 10^{-26}$ кг·м/с.

Известно, что каждую частицу можно представить в виде волны де Бройля с длиной волны $\lambda = h/p$. Для электрона проводимости в металле получаем $\lambda = 6,2$ нм. Это значит, что для углеродных нанотрубок диаметром несколько нанометров или меньше электрон проводимости будет проявлять главным образом волновые свойства. Через такие нанотрубки электроны будут проходить, как световые волны проходят через световоды. Таким образом, электричество в наномире превращается в оптику, а джоулево тепло рассеивается только на границах наномира, где, например, нанотрубка соединяется с проводником обычных размеров.

Чему равен квант сопротивления R_0 ? Попробуем вывести «на пальцах» упомянутую выше красивейшую формулу, связывающую квант сопротивления с фундаментальными физическими константами. Так как нанотрубка обладает баллистической проводимостью, а значит джоулево тепло в ней не выделяется, можно считать, что ее длина меньше длины свободного пробега электрона проводимости. Пусть между сечениями A и B нанотрубки приложено напряжение U , а сила тока в ней равна I . Поскольку энергия не рассеивается, изменение энергии ΔE электрона между сечениями A и B составляет $\Delta E = eU$. Это изменение энергии произошло за интервал времени Δt , равный времени пролета электрона между сечениями A и B . Соотношение неопределенностей Гейзенберга накладывает определенные ограничения на изменения ΔE и Δt :

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h,$$

откуда следует, что

$$U \approx \frac{h}{e\Delta t}.$$

Оценим теперь силу тока в нанотрубке. Нанотрубка – одномерная квантовая структура. В ней, как в атоме гелия, могут уживаться только два электрона, обладающие разными значениями спина. Это означает, что ток I между сечениями A и B нанотрубки равен

$$I = \frac{2e}{\Delta t}.$$

Из двух последних соотношений легко найти формулу для сопротивления R_0 между сечениями A и B нано-

трубки:

$$R_0 = \frac{U}{I} = \frac{h}{2e^2}.$$

Кстати, эту формулу можно вывести и с помощью теории размерностей, считая, что квант сопротивления может зависеть только от двух мировых констант – элементарного заряда и постоянной Планка.

Так как нагрев у нанотрубок отсутствует, они способны пропускать токи огромной плотности – более 10^7 А/см². Если бы у углеродных нанотрубок была обычная (не баллистическая) проводимость, то при токах аналогичной плотности их температура выросла бы до 20000 К, что гораздо выше температуры их сгорания (700 К).

Существование баллистической проводимости дает зеленый свет инженерам, старающимся еще и еще уменьшить размеры электронных микросхем: уменьшайте элементы микросхем до наноразмеров, и схемы перестанут нагреваться!

Почему цвет наночастицы может зависеть от размера?

Нас окружают предметы обычных размеров, и мы привыкли к тому, что цвет предмета зависит только от оптических свойств вещества, из которого он сделан, или красителя, которым покрашен. В наном мире такое представление оказывается несправедливым, и это отличает нанооптику от обычной.

Лет 10–15 тому назад нанооптики вообще не существовало. Да и как она могла быть, если из курса обычной оптики следует, что свет не чувствует нанобъекты, поскольку их размеры существенно меньше длины волны света $\lambda = 400 - 800$ нм. Согласно волновой теории света, нанобъекты не должны иметь тени и свет от них не может отражаться. Сфокусировать видимый свет на площади, соответствующей нанобъекту, тоже нельзя. Значит, и увидеть наночастицы невозможно.

Однако, с другой стороны, световая волна, как и любое электромагнитное поле, все-таки должна действовать на нанобъекты. Например, свет, упав на полупроводниковую частицу, может своим электрическим полем оторвать от ее атома один из валентных электронов. Этот электрон на некоторое время станет электроном проводимости, а потом опять вернется «домой», испустив при этом квант света, соответствующий ширине так называемой запрещенной зоны – минимальной энергии, необходимой для того, чтобы валентному электрону стать свободным (рис.9).

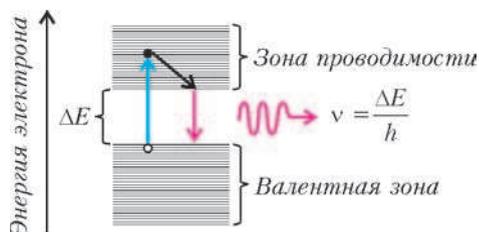


Рис.9. Схематическое изображение уровней энергии и энергетических зон электрона в полупроводнике

Таким образом, полупроводники даже наноразмеров должны чувствовать падающий на них свет, испуская при этом свет меньшей частоты. Другими словами, полупроводниковые наночастицы на свету могут становиться флуоресцентными, испуская свет строго определенной частоты, соответствующей ширине запрещенной зоны.

Светиться в соответствии с размером! Флуоресцентная способность полупроводниковых наночастиц была обнаружена в самом конце прошлого века. И, самое интересное, оказалось, что частота света, испускаемого этими частицами, уменьшается с увеличением размеров частиц.

Как видно из рисунка 10, цвет взвеси наночастиц зависит от их диаметра. Зависимость цвета флуоресценции, т.е. ее частоты ν , от размера наночастицы

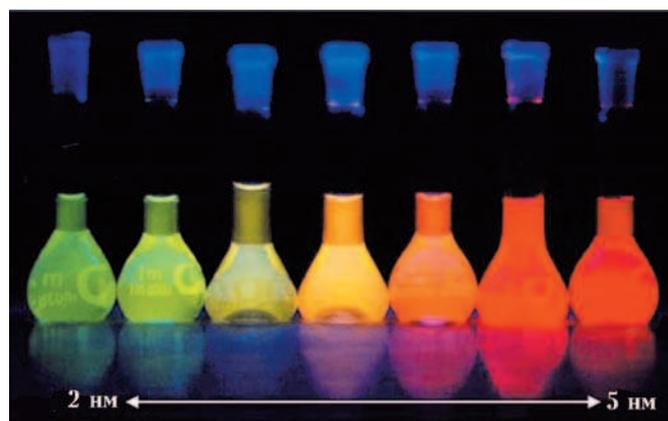


Рис.10. Флуоресценция взвесей коллоидных частиц различных размеров (от 2 до 5 нм). Сверху все колбы освещаются одним и тем же синим светом, содержащим ультрафиолетовую составляющую

означает, что от размера частицы зависит также и ширина запрещенной зоны ΔE . Глядя на рисунок 10, можно утверждать, что при увеличении размеров наночастиц ширина запрещенной зоны ΔE должна уменьшаться, так как $\Delta E = h\nu$. Такую зависимость можно объяснить следующим образом.

«Оторваться» легче, если вокруг много соседей. Минимальная энергия, необходимая для отрыва валентного электрона и перевода его в зону проводимости, зависит не только от заряда атомного ядра и положения электрона в атоме. Чем больше вокруг атомов, тем легче оторвать электрон – ведь ядра соседних атомов тоже притягивают его к себе. Этот же вывод справедлив и для ионизации атомов.

На рисунке 11 показано, как меняется среднее число ближайших соседей n у атома платины при увеличении диаметра частицы D . Когда число атомов в частице невелико, значительная их часть расположена на поверхности, а, значит, среднее число ближайших соседей гораздо меньше того, которое соответствует кристаллической решетке платины (11). При увеличении размеров частицы среднее число ближайших соседей приближается к пределу, соответствующему данной кристаллической решетке. Из рисунка следует, что ионизовать (оторвать электрон) атом

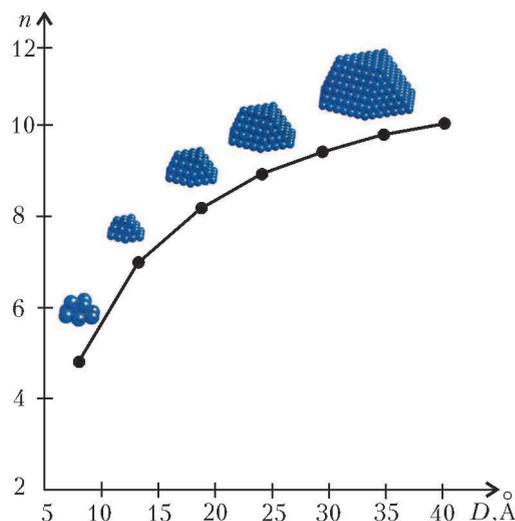


Рис.11. Зависимость среднего числа ближайших соседей по кристаллической решетке от диаметра частицы платины

тяжелее, если он находится в частице малых размеров, так как в среднем у такого атома мало ближайших соседей.

На рисунке 12 представлен график изменения потенциала ионизации, т.е. работы выхода $A_{\text{вых}}$, для наночастиц, содержащих различное число атомов железа

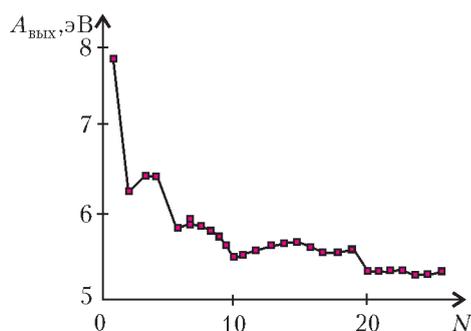


Рис.12. Зависимость работы выхода от числа атомов в наночастице железа

N . Видно, что с ростом N работа выхода падает, стремясь к предельному значению, соответствующему работе выхода для образцов обычных размеров. Изменение $A_{\text{вых}}$ с диаметром частицы D можно довольно хорошо описать формулой

$$A_{\text{вых}} \approx A_{\text{вых}0} + \frac{2Ze^2}{D},$$

где $A_{\text{вых}0}$ — работа выхода для образцов обычных размеров, Z — заряд атомного ядра, а e — заряд электрона.

Очевидно, что ширина запрещенной зоны ΔE зависит от размеров полупроводниковой частицы таким же образом, как и работа выхода из металлических частиц, — уменьшается с ростом диаметра частицы. Поэтому длина волны флуоресценции полупроводниковых наночастиц растет с ростом диаметра частиц, что и иллюстрирует рисунок 10.

Квантовые точки — рукотворные атомы. Полупро-

водниковые наночастицы часто называют «квантовыми точками». Своими свойствами они напоминают атомы, точнее «искусственные атомы», имеющие наноразмеры. Ведь электроны в атомах, переходя с одной орбиты на другую, тоже излучают квант света строго определенной частоты. Но, в отличие от настоящих атомов, внутреннюю структуру и спектр излучения которых мы изменить не можем, параметры квантовых точек зависят от их создателей, нанотехнологов.

Квантовые точки уже сейчас являются удобным инструментом для биологов, пытающихся разглядеть различные структуры внутри клеток. Дело в том, что различные клеточные структуры одинаково прозрачны и не окрашены. Поэтому если смотреть на клетку в микроскоп, то ничего, кроме ее краев, и не увидишь. Чтобы сделать заметной определенную структуру клетки, были созданы квантовые точки, способные прилипать к определенным внутриклеточным структурам.

Так, для того чтобы раскрасить клетку на рисунке 13 в разные цвета, были сделаны квантовые точки трех размеров. К самым маленьким, светящимся зеленым светом, приклеили молекулы, способные при-

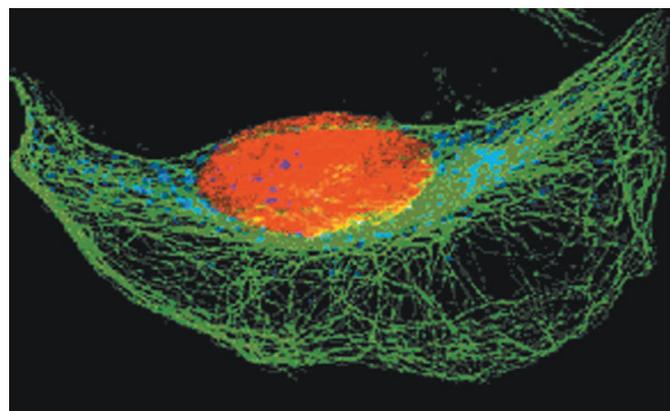


Рис.13. Раскрашивание разных внутриклеточных структур в разные цвета с помощью квантовых точек: ядро — красное, микротрубочки — зеленые, аппарат Гольджи — желтый

липать к микротрубочкам, составляющим внутренний скелет клетки. Средние по размеру квантовые точки могли прилипать к мембранам аппарата Гольджи, а самые крупные — к ядру клетки. Когда клетку окунали в раствор, содержащий все эти квантовые точки, и подержали в нем некоторое время, точки проникли внутрь и прилипли туда, куда могли. После этого клетку сполоснули в растворе, не содержащем квантовых точек, и положили под микроскоп. Как и следовало ожидать, вышеупомянутые клеточные структуры стали разноцветными и хорошо заметными.



Хроматические числа

А.РАЙГОРОДСКИЙ, О.РУБАНОВ, В.КОШЕЛЕВ

Введение и постановка задачи

Современная математика – наука почти необозримая. Для того чтобы даже поверхностно ознакомиться с великим множеством ее разделов, требуются годы, а уж на осознание *всех* задач, которые возникали в математике в разное время, и нескольких жизней не хватит. Однако в этом бескрайнем море задач имеются и своеобразные «маяки» – задачи, на долгие годы определившие развитие тех областей, в рамках которых они появились. Эти маяки помогают математику правильно выбрать для себя направление движения.

Одним из таких маяков служит задача о *хроматическом числе* – именно о ней мы собираемся поговорить в данной статье. Относится она к одному из самых популярных, а на наш взгляд, к одному из самых красивых разделов математики – к разделу, который принято сейчас называть *комбинаторной геометрией*. По существу, комбинаторная геометрия – это наука о комбинаторных свойствах геометрических объектов. В самостоятельную дисциплину она оформилась лишь в XX веке, и хроматические числа, надо заметить, немало тому поспособствовали.

Вот эта задача: *каково наименьшее количество цветов, необходимых для такой покраски плоскости (будем называть ее правильной), при которой расстояние между одноцветными точками не может быть равным 1?*

Упомянутое наименьшее число цветов мы и назовем хроматическим числом.¹

На первый взгляд, поставленный только что вопрос совершенно элементарен, но мы убедимся постепенно, что вопрос этот весьма глубок и нетривиален.

Прежде всего, хочется понять, что же такое «раскраска плоскости». Наверняка неискушенному читателю сходу представляется нечто вроде того, что изображено на рисунке 1. Однако существуют и куда более

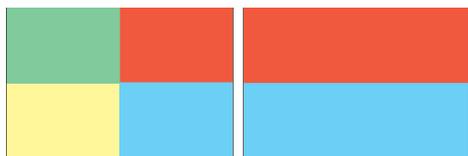


Рис. 1

хитрые ситуации. Пусть, например, точка x на плоскости имеет координаты x_1, x_2 (мы будем писать в дальнейшем $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$). Скажем, что точка «синяя», если числа x_1, x_2 рациональные; в противном случае

¹ Слово «хроматический» имеет греческое происхождение. Фактически оно переводится как «цветной» или «цветовой».

назовем точку «красной». Возникает двухцветная покраска плоскости, которую так запросто и не нарисовать.

Еще, по-видимому, стоит напомнить, что расстояние $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ между точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ на плоскости принято находить по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Давайте договоримся об обозначениях. В математике плоскость принято обозначать символом \mathbb{R}^2 . В то же время слово «хром» в греческом языке начинается с буквы χ («хи»). Поэтому для хроматического числа принято обозначение $\chi(\mathbb{R}^2)$.

И наконец, вкратце об истории задачи. Она была поставлена в 1950 году Э.Нелсоном, которому тогда было 17 лет. Это весьма любопытно и должно воодушевлять молодого читателя: если семнадцатилетнему Нелсону оказалось по силам поставить столь важный для развития науки вопрос, то отчего бы и мне, читателю, не дерзнуть? Очень похожие задачи рассматривал еще известный геометр Г.Хадвигер в 40-е годы XX века; однако, во-первых, Нелсон об этом не знал, а главное, именно он дал современную постановку проблемы – в терминах раскрасок. Огромную популярность принесли задаче Нелсона публикации М.Гарднера, П.Эрдеша и того же Г.Хадвигера. Весьма интересное историческое эссе на эту тему можно найти в заметке А.Сойфера ([1]); имеется также брошюра А.М.Райгородского [2] и его же статья [3].

Мы же перейдем к изучению хроматического числа.

Небольшое отступление

Как мы знаем теперь, задача Нелсона состоит в правильной покраске *плоскости* с помощью наименьшего количества красок в «палитре». Мы еще успеем убедиться в том, насколько эта задача не проста. А потому разумно сперва попробовать свои силы в решении аналогичной задачи для случая обычной прямой. Что такое правильная покраска прямой? Да то же самое, в общем-то, что и прежде: следует лишь требовать, чтобы одноцветные точки (числа) x, y не отстояли друг от друга на расстояние 1, т.е. чтобы величина $|x - y|$ не равнялась единице.

Очевидно, если покрасить прямую в один цвет, то найдется масса таких «иксов» и «игреков», для которых упомянутое выше условие нарушено. Значит, для правильной покраски прямой нужны по крайней мере два цвета. На рисунке 2 такая покраска указана явно.



Это своего рода «шлагбаум». Мы красим полуинтервалы $[0; 1)$, $[2; 3)$, $[4; 5)$... и полуинтервалы $[-2; -1)$, $[-4; -3)$, $[-6; -5)$... в красный цвет, а все



Рис. 2

остальные полуинтервалы делаем синими. Понятно, что внутри каждого полуинтервала мы точек x, y с условием $|x - y| = 1$ не найдем. Если же точка x принадлежит одному полуинтервалу, а точка y находится в другом полуинтервале того же цвета, то заведомо $|x - y| > 1$, и снова все в порядке.

Вспоминая, что прямая в математике, как правило, означается через \mathbb{R} , введем естественное обозначение для ее хроматического числа: $\chi(\mathbb{R})$. Из проведенных только что рассуждений немедленно получаем, что $\chi(\mathbb{R}) = 2$. Неужели плоскость устроена настолько сложнее прямой? Что ж, вернемся к плоскости и посмотрим.

Сколько цветов не хватит

Давайте убедимся, что слишком малым количеством цветов нам уже не обойтись.

Ясно без дополнительных пояснений, почему не хватит одного цвета. Однако легко заметить также, что $\chi(\mathbb{R}^2) > 2$. В самом деле, если мы покрасим плоскость в два цвета, то двухцветным (или даже одноцветным) окажется, конечно, и множество вершин любого правильного треугольника со стороной 1. Но тогда некоторые две вершины такого треугольника заведомо будут

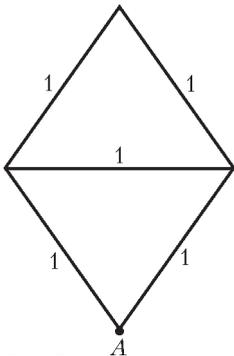


Рис. 3

иметь один и тот же цвет, что в случае правильной покраски невозможно.

Как мы видели только что, треугольник – весьма полезная фигура. Тем не менее, мы еще не все из нее «выжали». Сейчас мы с ее помощью покажем, что $\chi(\mathbb{R}^2) > 3$. Рассмотрим конструкцию, изображенную на рисунке 3. Это два правильных треугольника со сторонами длины 1, примыкающие друг к другу по целой стороне.

Сама по себе данная конструкция (назовем ее *иглой*) вполне может быть покрашена правильным образом в три цвета, так что обещанное неравенство

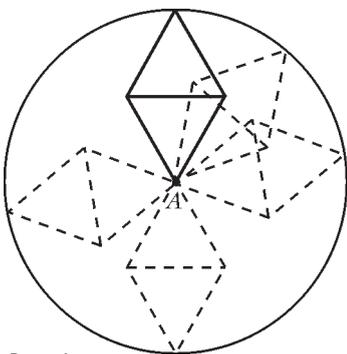


Рис. 4

$\chi(\mathbb{R}^2) > 3$ непосредственно из ее рассмотрения отнюдь не следует. Начнем «вращать» конструкцию так, как если бы в точке A на рисунке 3 был забит гвоздь (рис.4). Предположим, мы осуществили правильную покраску плоскости в несколько цветов. Возможны два варианта. В рамках перво-

го из них найдется копия исходной иглы, у которой вершина A имеет другой цвет, нежели противоположная ей вершина, лежащая на окружности (см. рис.4). Пусть, например, два задействованных таким образом цвета суть синий и красный. Тогда правильность покраски всей плоскости гарантирует нам, что оставшиеся две вершины найденной нами иглы не синие и не красные; к тому же, они обязаны быть разноцветными (скажем, желтой и зеленой соответственно). Значит, в текущей ситуации цветов в покраске плоскости не менее четырех. Второй вариант состоит в том, что вся окружность на рисунке 4 имеет тот же цвет, что и точка A . Но в этом случае мы имеем противоречие с правильностью покраски, ведь на указанной окружности есть пары точек, отстоящих друг от друга на расстоянии 1 (здесь важно, что радиус окружности равен $\sqrt{3}$). В результате получаем, что ни при каких условиях трех цветов не хватит, а к этому мы и стремились.

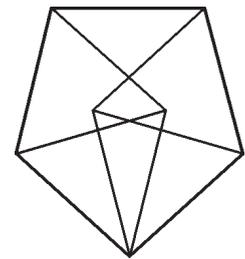


Рис. 5

Из описанного построения легко выделить конфигурацию, которая не допускает правильной покраски в три цвета. Это так называемое *веретено*, изображенное на рисунке 5. В честь братьев Л.Мозера и У.Мозера, которые одни из первых опубликовали работу с веретеном, говорят еще о *мозеровском веретене*.

Итак, мы установили, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$. Подумаем теперь, сколько цветов для правильной покраски плоскости заведомо хватит.

Сколько цветов достаточно

Нарисуем на плоскости квадрат со стороной 1,8. Поделим этот квадрат на девять одинаковых клеток со сторонами 0,6 так, как это показано на рисунке 6, и закрасим каждую клетку в свой цвет (рис.7). Общие стороны смежных клеток мы раскрашиваем произвольным образом (т.е. в любой из цветов этих клеток). Возникает своего рода квадратный

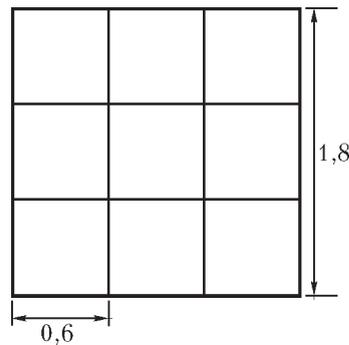


Рис. 6

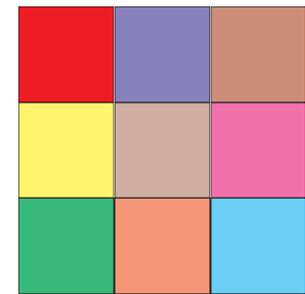


Рис. 7

цветной лоскуток. Теперь замостим всю плоскость одинаковыми лоскутками, подобному тому, как это сделано на рисунке 8. Снова общие границы красим произвольно (в прежнем смысле). Что же мы видим? Если одноцветные точки принадлежат одной и той же клетке, то расстояние между ними, конечно, не

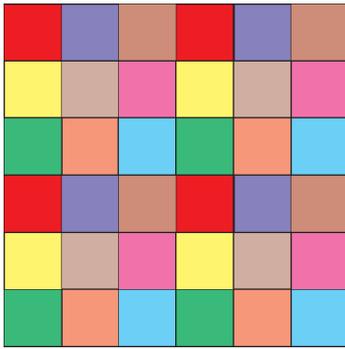


Рис. 8

превосходит длины диагонали этой клетки, т.е. величины, которая по теореме Пифагора равна $0,6\sqrt{2} \approx 0,848 < 1$. Никаких проблем! Если же точки одного цвета попадают в разные клетки, то они отстоят друг от друга на расстояние, не меньшее чем $2 \cdot 0,6 = 1,2 > 1$. Опять все в порядке.

Рассуждение, которое мы провели, показывает, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 9$. При этом предложенная нами правильная покраска в девять цветов обладает, так сказать, огромным запасом прочности. А именно, расстояние между одноцветными точками в ней не только не равняется единице, но оно даже не может совпасть ни с одним из чисел на интервале $(0,848; 1,2)$. Более того, столь же хорошего результата мы бы добились, собирая лоскутки из клеток иного размера – не обязательно со стороной 0,6. Скажем, клетки со стороной 0,7 тоже вполне бы сгодились для наших целей. Что-то подсказывает нам, стало быть, что оценка $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 9$ не оптимальна.

Интуиция нас не обманывает. Вместо разноцветных квадратных клеток следует использовать разноцветные правильные шестиугольники, образующие своего рода бесконечные пчелиные соты на плоскости. Более точно, рассмотрим правильный шестиугольник, у которого расстояние между противоположными сторонами равно $0,99 \frac{\sqrt{3}}{2}$. Замостим всю плоскость копиями этого шестиугольника так, как это изображено на рисунке 9.

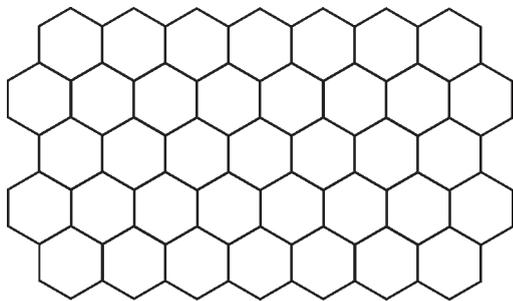


Рис. 9

Наконец, раскрасим эти шестиугольники в семь цветов по правилу, которое легко понять, глядя на рисунок 10. При этом мы по-прежнему не заботимся о выборе цвета для общих сторон и даже вершин шестиугольников: тут мы действуем так, как нам заблагорассудится. Теперь несложные выкладки показывают, что расстояние между точками внутри одного и того же шестиугольника не превосходит величины $0,99 < 1$, тогда как расстояние между ближайшими одноцветными точками из разных шестиугольников не бывает меньше величины $0,99 \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,3... > 1$ (рис. 11). Таким образом, покраска

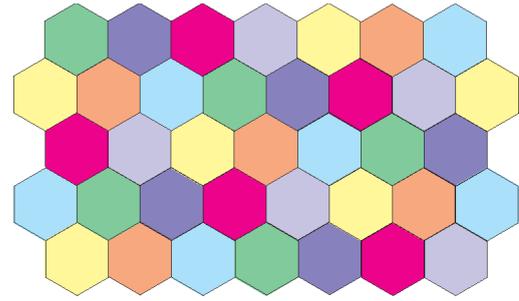


Рис. 10

на рисунке 10 правильная, и мы имеем оценку $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

И снова изученная покраска кажется не вполне оптимальной. Действительно, для этой покраски расстояние между точками одного цвета заведомо не принадлежит целому интервалу $(1; 1,3)$. Тут, однако, все куда интереснее. Дело в том, что оценку $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ никто

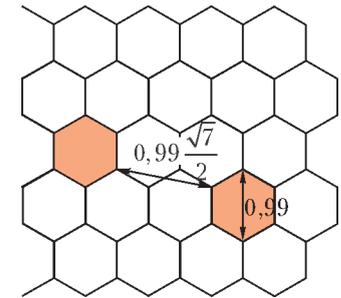


Рис. 11

улучшать не умеет. И это несмотря на десятилетия, прошедшие с момента постановки задачи, несмотря на ту огромную популярность, которой пользуется эта задача, несмотря, наконец, на усилия нескольких поколений математиков, бравшихся за ее решение!

Читатель спросит: «Но может, все не так скверно? Возможно, неравенство $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, обоснованное нами в предыдущем разделе, слишком слабое и, усложняя конструкцию веретена, нам удастся показать, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 7$. Тогда мы просто убедимся в том, что хроматическое число плоскости есть в точности 7, и никакой беды». Но беда-то как раз в том, что и оценка $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ на протяжении десятилетий не поддается улучшению.

Не правда ли, удивительно? Настолько проста цепочка неравенств

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7,$$

и так сложно определить, чему же все-таки равно хроматическое число – четырем, пяти, шести или семи.

Разумеется, неожиданная и даже загадочная трудность не является поводом к отступлению. Напротив, в попытках справиться с проблемой рождаются новые идеи, возникают новые понятия, строятся новые теории, и, в конечном счете, вопрос, казавшийся поначалу едва ли не праздным, ложится в основу целого направления в науке.

Неудача, которую мы потерпели, будучи пока не в силах уточнить приведенную цепочку неравенств, – это лишь начало увлекательной истории, и в дальнейших разделах мы постараемся познакомить читателя хотя бы с несколькими ее аспектами.

Покраски специального вида

Постановка вопроса

Давайте еще раз переосмыслим понятие покраски плоскости. В самом деле, что такое покраска? По существу, это разбиение плоскости на несколько непересекающихся частей. (Подразумевается, что каждая часть состоит из точек определенного цвета.) Пишут обычно

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_\chi,$$

имея в виду, что плоскость представлена в виде объединения некоторых множеств V_1, V_2, \dots, V_χ . Желая подчеркнуть, что каждое из этих множеств имеет свой особый цвет, т.е. что эти множества не пересекаются, используют также значок так называемого *дизъюнктного объединения*:

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_\chi.$$

При этом сами множества (или, как мы говорили до сих пор, цвета) могут быть устроены, в принципе, сколь угодно сложно. Достаточно вспомнить пример из первого раздела. В то же время, в уже изученных нами покрасках цвета были вполне осязаемыми. Так, каждый цвет в девятицветной раскраске складывался из бесконечного числа попарно непересекающихся квадратов (см. рис.8), а всякое множество в разбиении плоскости на семь частей состояло из попарно непересекающихся шестиугольников (см. рис.10). Следует лишь отметить, что в обоих случаях некоторые фигурки, с помощью которых мы красим плоскость, не являются «замкнутыми». Иными словами, мы, вообще говоря, не предполагаем, что граница того или иного квадрата (шестиугольника) целиком ему принадлежит. Например, множества

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\},$$

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$$

не совпадают (первое содержит точку $\mathbf{x} = (0, 1)$, второе – нет), но оба они для нас суть квадраты. Такая «неразборчивость» связана с тем, что раскраски упомянутых выше границ мы всегда осуществляли произвольным образом.

Возникает естественный вопрос. Допустим, отныне мы накладываем некоторые специальные ограничения на вид множеств V_1, \dots, V_χ , которые разрешается использовать при покраске плоскости. Каким тогда будет минимальное χ ? Рассмотрим ряд конкретных примеров.

Покраска квадратами

Пусть цветам позволено представлять собой исключительно объединения попарно непересекающихся квадратов (возможно, лишенных части своей границы). На рисунке 12 приведены цвета такого типа. Обозначим через $\chi_\kappa(\mathbb{R}^2)$ минимальное количество подобных цветов в правильной покраске плоскости. Индекс « κ » указывает на то, что покраску мы осуществляем посредством квадратов.

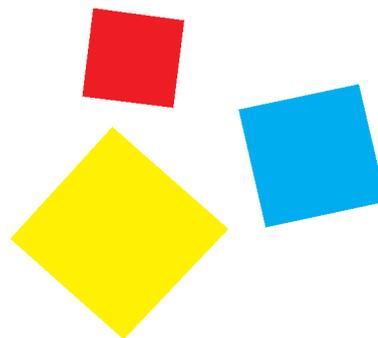


Рис. 12

Мы уже знаем, что $\chi_\kappa(\mathbb{R}^2) \leq 9$. Оказывается, это далеко не самая точная оценка.

Во-первых, – это весьма любопытно, – оценка $\chi_\kappa(\mathbb{R}^2) \leq 8$ может быть получена даже за счет покраски, аналогичной покраске на рисунке 8. На рисунке 13

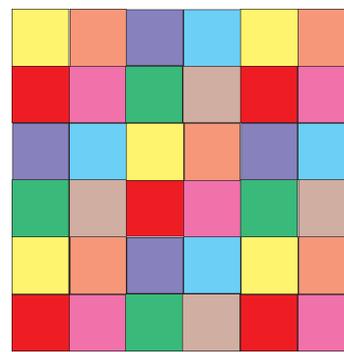


Рис. 13

показано, как следовало «на самом деле» присваивать цвета клеткам. Здесь клетки имеют диагонали длины 1, и небольшая тонкость состоит в том, что мы уже не можем произвольно присваивать цвета вершинам этих клеток. Впрочем, как именно решается данная проблема, читатель без труда догадается и сам.

С другой стороны, чуть менее регулярная покраска, напоминающая кирпичную кладку, дает оценку

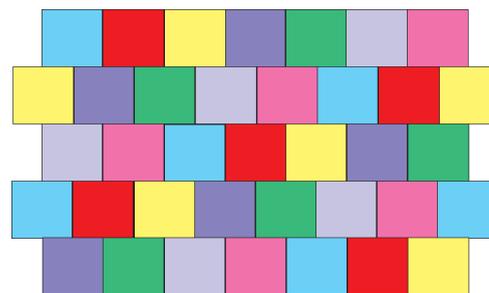


Рис. 14

$\chi_\kappa(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Она изображена на рисунке 14. Здесь также каждый «кирпичик» имеет диагональ длины 1, и надо аккуратно раскрашивать границы кирпичиков.

Поскольку, очевидно, $\chi(\mathbb{R}^2) \leq \chi_\kappa(\mathbb{R}^2)$ и мы помним о том, что оценка $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ – лучшая из известных, ясно, что и неравенство $\chi_\kappa(\mathbb{R}^2) \leq 7$, обусловленное рисунком 14, уточнению не поддается. Иное дело,

вполне может статься, что $\chi_k(\mathbb{R}^2) \geq 7$ и что доказательство этого факта куда проще, нежели обоснование подобного утверждения для обычного хроматического числа. Вдруг и впрямь $\chi_k(\mathbb{R}^2) = 7$? В следующем разделе мы обсудим, в частности, этот вопрос.

Покраска многоугольниками

Квадрат – фигура замечательная, но бывают ведь и другие, более сложные фигуры на плоскости. Предположим теперь, что множествам V_1, \dots, V_χ , которые будут отвечать за (правильную) покраску \mathbb{R}^2 , разрешено представлять собой объединения произвольных попарно непересекающихся многоугольников (возможно, лишенных части своей границы). Здесь мы даже не требуем от многоугольников выпуклости. Иными словами, цвет отныне имеет право быть устроенным весьма и весьма нетривиально (рис. 15). Заметим, впрочем,

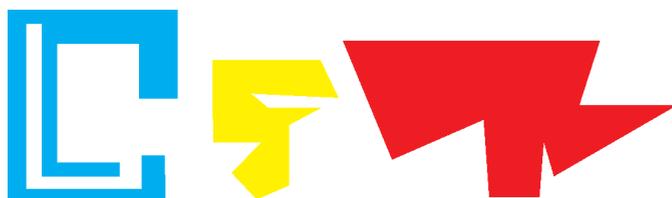


Рис. 15

что пример покраски из первого раздела по-прежнему стоит особняком: цвета в этом примере из многоугольников не складываются.

Обозначим соответствующее хроматическое число через $\chi_m(\mathbb{R}^2)$. Понятно, что $\chi_m(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Ясно также, что улучшать последнюю оценку мы не умеем. Значит, обсуждать мы можем только неравенства вида $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq \dots$. Действительно, трех цветов не хватит, коль скоро мы вовсе никаких ограничений на эти цвета не накладываем. А верно ли, например, что при покраске плоскости многоугольниками и четырех цветов мало? Положительный ответ на этот вопрос дал в 1973 году Д. Вудалл. Он показал, что $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq 6$. Результат Вудалла означает, что не только четырех «многоугольных» цветов не достаточно, но и на пять частей, собранных из многоугольников, плоскость правильным образом разбить нельзя. На семь – можно, а на пять – нельзя. По сей день остается открытым вопрос: что же все-таки правильно – равенство $\chi_m(\mathbb{R}^2) = 6$ или равенство $\chi_m(\mathbb{R}^2) = 7$?

Результат Вудалла доказывается довольно сложно, хотя и почти элементарно. Будучи, в принципе, доступен пониманию школьника, он, тем не менее, выходит за рамки данной статьи. Другое дело, что заинтересованный читатель вполне может попробовать самостоятельно разобраться в доказательстве. Тут есть еще одна тонкость. В действительности, Вудалл доказал даже больше, нежели мы обещали. А именно, он брал в качестве «кирпичей» для построения цвета не многоугольники, но более общие объекты, называемые *жордановыми областями*. Строгое определение упомянутых объектов можно найти в

книге [4]. Мы же приведем пример жордановой области на рисунке 16.

В связи с описанными результатами возникает ряд интересных исследовательских задач, которые читатель мог бы попытаться решить.



Рис. 16

Задача 1. Упростив рассуждение Вудалла, докажите неравенства $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq 6$.

Задача 2. Докажите, что $\chi_k(\mathbb{R}^2) = 7$.

Задача 3. Считая, что многоугольники, образующие тот или иной цвет в покраске, непременно выпуклые, найдите соответствующее хроматическое число $\chi'_m(\mathbb{R}^2)$.

Задача 3, по всей видимости, особенно трудна, так как ничто не мешает величине, которая в ней фигурирует, оказаться равной шести. Но тогда решение этой задачи автоматически даст существенное продвижение в рамках классической проблемы Нелсона. Задача 2 – это, скорее, гипотеза, ведь, по идее, и квадратов вполне могло хватить для правильной покраски плоскости в шесть цветов. Задача 1 – это своего рода упражнение. Однако и она представляет научный интерес.

Вывод из всего сказанного в этом разделе один: если вдруг обычное хроматическое число плоскости равно четырем или пяти, то даже представить себе трудно, как должны выглядеть цвета в соответствующих правильных покрасках.

Вокруг мозеровского веретена

Предварительная дискуссия

Как мы отметили в конце предыдущего раздела, результаты Вудалла оставляют мало надежд на то, что кому-либо удастся явно указать правильную раскраску плоскости в четыре или пять цветов. Если верно, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 5$, то для доказательства этого факта потребуются «ужасные» цвета – ужасные в том смысле, что изобразить их (даже схематично) на картинке, скорее всего, невозможно.

В то же время оценка $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ следовала из рассмотрения крайне простой конструкции – мозеровского веретена. И проблема в том, что никакие попытки усложнить эту конструкцию (даже с помощью компьютера) к успеху не привели. Неужели веретено столь уникально? Разве не существует принципиально иных конфигураций на плоскости, свидетельствующих о

том, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$? Может быть, исследование этих вопросов даст нам более глубокое понимание сути проблемы?

Что ж, приступим. Для дальнейшего будет удобно ввести несколько новых понятий. Назовем *дистанционным графом*, или *графом (единичных) расстояний* на плоскости, любую конфигурацию, состоящую из точек и соединяющих их отрезков длины 1. Точки назовем *вершинами* дистанционного графа, а отрезки – его *ребрами*. Например, мозеровское веретено – это граф расстояний, у которого семь вершин и одиннадцать ребер.

Тут сразу возникает маленький вопрос. Допустим, мы поставили на плоскости несколько точек и хотим рассмотреть дистанционный граф с вершинами в них.

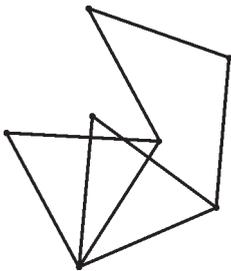


Рис. 17

Должны ли мы провести *все* отрезки длины 1 между парами таких вершин или можем, по своему произволу, ограничиться выбором лишь некоторых из этих отрезков на роль ребер искомого графа? Скажем, выкинем из веретена пару ребер (рис.17). Следует ли называть полученную конструкцию графом расстояний? Часто на поставленный вопрос дают отрица-

тельный ответ. Однако для наших целей будет удобнее, напротив, ответить на этот вопрос положительно. Дело в том, что так нам будет немного проще работать, а суть от этого не пострадает. Таким образом, даже граф, имеющий n вершин и не имеющий ни одного ребра, мы будем отныне называть дистанционным.

Заметим еще, что в дистанционном графе вершины могут располагаться прямо на ребрах. Скажем, у графа из левой части рисунка 18 три вершины и два ребра, а

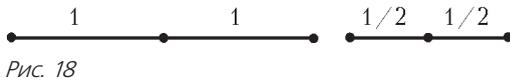


Рис. 18

у графа из правой части того же рисунка три вершины и одно ребро.

Графы будем обозначать записями типа $G = (V, E)$, желая подчеркнуть, что у данного графа G множество вершин – это V , а множество ребер – E . Заметим, что множество V могло бы быть и бесконечным, но это немного непривычно, и мы такую ситуацию рассматривать не станем.

Назовем, далее, *хроматическим числом графа G* минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были разноцветными. Обозначим через $\chi(G)$ указанное хроматическое число.

Нетрудно видеть, что новый объект – это завуалированный старый. Скажем, тот факт, что плоскость нельзя правильным образом покрасить в три цвета, как раз из того и следовал, что хроматическое число веретена равно четырем. А отсутствие конструкции, лучшей веретена, в нынешних терминах означает, что мы до сих пор не смогли найти графа расстояний G с $\chi(G) \geq 5$. Иными словами, очевидной является оценка

$\chi(\mathbb{R}^2) \geq \chi(G)$, справедливая для любого дистанционного графа. Более того, – это уже куда любопытнее, – верно и «обратное» утверждение: существует граф G на плоскости, у которого $\chi(G) = \chi(\mathbb{R}^2)$. Это утверждение отнюдь не

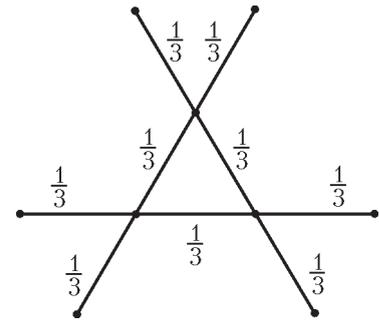


Рис. 19

элементарно. Оно вытекает из одной теоремы П.Эрдеша и Н. де Брёйна 1951 года, и его доказательство выходит далеко за рамки данной статьи.

Короче говоря, нет сомнений, что свойства графов расстояний крайне важны и интересны. Одним из этих свойств мы сейчас и займемся. Помните, мы несколько раз подчеркнули, что треугольник – очень полезная фигура с точки зрения обоснования неравенств $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 3$ и $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$? Оно и не удивительно. Если рассмотреть треугольник как дистанционный граф, то уже его хроматическое число равно трем. «Накрутили» мы веретено из таких треугольников, и получился новый граф с чуть большим хроматическим числом. Вот разве что дальше накрутка «не пошла». Однако Эрдеш оказался первым, кто усомнился в необходимости использования треугольников для построения гра-

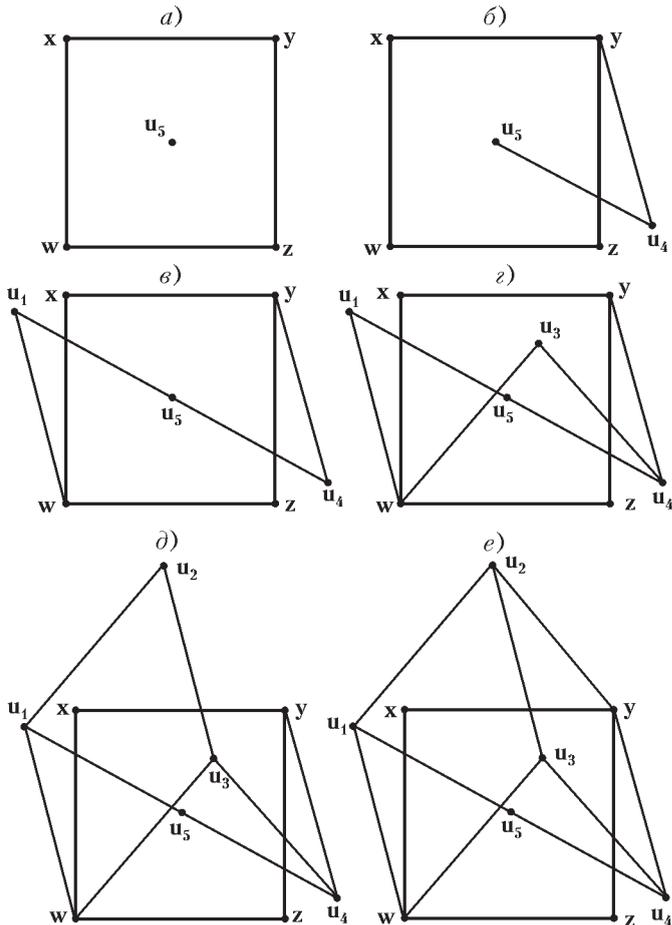


Рис. 20

фов с хроматическим числом 4, т.е. графов, которые, подобно веретену, свидетельствуют о том, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$. В 1976 году он предположил, что на плоскости есть графы расстояний G , не содержащие ни одного треугольника и, несмотря на это, имеющие $\chi(G) = 4$.² Не правда ли, довольно неожиданная гипотеза? Если она верна, то веретено вовсе не уникально, и открываются целые горизонты для исследования дистанционных графов!

Уже в 1979 году гипотеза была доказана. Н. Уормалд построил граф расстояний, обладающий необходимыми свойствами. Правда, граф его имел... 6448 вершин. Наконец, в 1996 году П. О'Доннелл и Р. Хохберг предъявили аналогичный граф всего лишь на двадцати трех вершинах. Доказательству этого замечательного результата мы и посвятим следующий пункт. Далее мы обсудим различные уточнения конструкции О'Доннелла – Хохберга, а также приведем ряд других не менее красивых фактов.

Конструкция О'Доннелла–Хохберга

Разместим на плоскости квадрат со стороной 1 и вершинами x, y, z, w , полагая $x = (0, 1), y = (1, 1)$,

² Разумеется, граф на рисунке 19 треугольников тоже не содержит, ведь нас интересуют лишь правильные треугольники со сторонами длины 1 (см. также рис. 18 и комментарий к нему).

$z = (1, 0), w = (0, 0)$, и поставим в центре квадрата точку $u_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (рис.20,а). Пусть u_4 – это точка, которая отстоит на расстояние 1 и от u_5 , и от y . Поскольку $|y - u_5| < 2$, такая точка найдется, и выбрать ее можно ровно двумя способами. Мы осуществим выбор так, как это показано на рисунке 20,б. Рассмотрим теперь такую точку u_1 , что одновременно $|u_5 - u_1| = 1$ и $|w - u_1| = 1$. Опять-таки, эта точка не единственна, но мы поступим согласно рисунку 20,в. Далее, возьмем u_3 , соединенную единичным отрезком как с w , так и с u_4 (рис.20,г). Рутинную проверку того, что $|w - u_4| < 2$, мы оставляем читателю. Поставим, наконец, точку u_2 в соответствии с рисунком 20,д. Заметим, что $|u_2 - y| = 1$, поскольку четырехугольник с вершинами u_2, u_3, u_4, y – параллелограмм. В результате имеем граф расстояний G_1 с девятью вершинами и тринадцатью ребрами (рис.20,е). Очевидно, в G_1 нет треугольников.

Добавим к уже имеющейся конструкции еще пять точек, которые назовем v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Сперва намеренно сделаем это чуть-чуть неверно, но затем поясним, как исправить ситуацию.

Итак, пусть v_5 – это точка, лежащая на отрезке u_5w и отстоящая от y на расстояние 1 (рис.21,а). По v_5 и u_5 найдем v_4 , исходя из условия $|u_5 - v_4| = |v_5 - v_4| = 1$ и рисунка 21,б. Аналогично, по w и v_4 восстано-

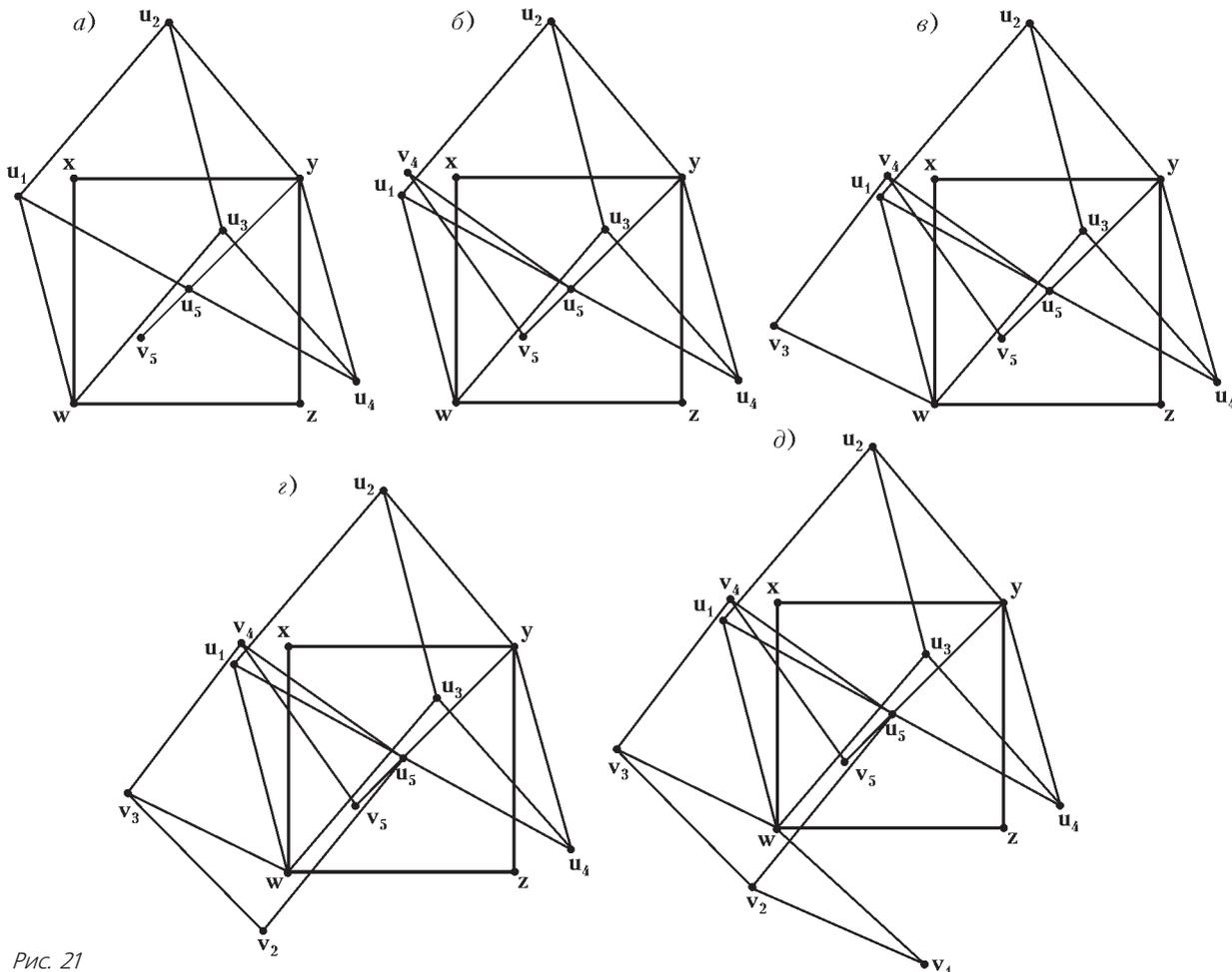


Рис. 21

вим v_3 (рис.21, *в*), по v_3 и u_5 воспроизведем v_2 (рис.21, *з*), а по v_2 и w воссоздадим v_1 (рис.21, *д*).

Длина отрезка v_1v_5 равна $0,98\dots$. Это почти единица, и все-таки ребра v_1v_5 ни в каком дистанционном графе на имеющемся множестве вершин нет. Тем не менее, верно следующее. Можно так «пошевелить» точку v_5 , сохраняя расстояние между ней и точкой y равным единице, чтобы в результате построений, аналогичных проделанным выше (см. рис.21), возник граф расстояний G_2 на рисунке 22, у которого с ребром v_1v_5 все

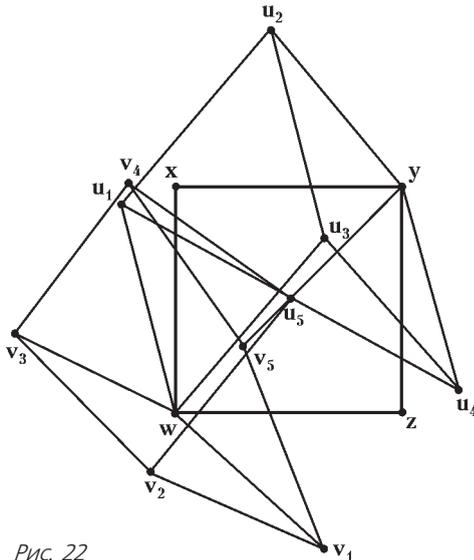


Рис. 22

в порядке. Расчеты показывают, что «правильные» координаты точки v_5 суть $(0,3\dots, 0,285\dots)$. Обоснование постулированного нами факта, а также все сопутствующие вычисления мы оставляем за рамками данной статьи. Они носят скорее технический характер (ведь координаты всех точек находятся при необходимости с любой наперед заданной точностью), и для осознания смысла конструкции вполне достаточно наглядности последнего рисунка. Видно, в частности, что граф G_2 имеет четырнадцать вершин, двадцать три ребра и не содержит треугольников.

Повернем всю конструкцию G_2 на 90 градусов вокруг центра квадрата. Получится граф G'_2 . Объе-

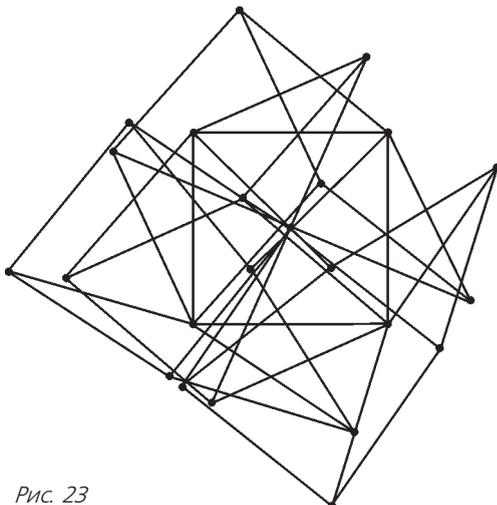


Рис. 23

диня графы G_2 и G'_2 (без добавления новых ребер), образуем, наконец, граф G_3 с двадцатью тремя вершинами и сорока двумя ребрами. (Здесь $23 = 14 + 14 - 5$, поскольку вершины квадрата и его центр при повороте остаются на месте; аналогично, $42 = 23 + 23 - 4$, где 4 – число ребер квадрата.) Скучная проверка показывает, что G_3 выглядит именно так, как он изображен на рисунке 23. Треугольников в нем тоже нет.

Не правда ли, куда навороченнее веретена? Что ж, такова плата за отсутствие треугольников.

Покажем теперь, что $\chi(G_3) \geq 4$. В самом деле, пусть вершины графа G_3 покрашены в три цвета правильно (вершины, соединенные ребром, разноцветны). Назовем цвета красным, желтым и зеленым. Ясно тогда, что либо точки y, w одного цвета, либо таковы точки x, z .

Рассмотрим первый случай. Мы имеем право считать, что y и w , например, красные. Предположим, u_5 , напротив, не является красной – скажем, она желтая. Тогда непременно u_1 зеленая (за счет ребер wu_1, u_5u_1), u_2 желтая (ребра u_1u_2 и yu_2), u_3 зеленая (ребра u_2u_3 и wu_3) и u_4 желтая (см. рис.20, *е*). Значит, по тем же причинам u_5 зеленая, и возникает противоречие.

Итак, вершины y, u_5, w красные. Посмотрим на пятиугольник $v_1v_2v_3v_4v_5$. Вершина v_1 соединена ребром с w , и, стало быть, она не красная. Между вершинами v_2 и u_5 также проходит ребро, и это не позволяет v_2 иметь красный цвет. Аналогичные рассуждения показывают, что и три оставшиеся вершины пятиугольника обязаны быть желтыми или зелеными. Следовательно, пятиугольник покрашен в два цвета. Но это, очевидно, невозможно, и мы имеем противоречие с правильностью исходной покраски.

Совершенно так же разбирается случай, когда одноцветны точки x и z (именно для этого мы делали поворот). Таким образом, $\chi(G_3) \geq 4$, и дело в шляпе: граф G_3 – искомый.

Заметим, что не составляет труда раскрасить G_3 в четыре цвета, так что, конечно, $\chi(G_3) = 4$.

Что же дальше?

На самом деле, с результата О'Доннела и Хохберга все только начинается. Во-первых, можно заметить, что, доказывая этот результат, мы обращали внимание лишь на те единичные отрезки, которые нам были нужны для обоснования неравенства $\chi(G) \geq 4$. Из них треугольники не складывались, ну и славно. Вообще-то, на двадцати трех вершинах вполне могли возникнуть и другие ребра, так что если бы мы попытались рассмотреть их все, то хроматическое число от этого меньше, конечно, не стало бы, а вот треугольники-то, чего доброго, могли появиться. Именно из нежелания возиться с (возможными) лишними ребрами мы сделали соответствующее допущение относительно определения дистанционного графа. В действительности результат предыдущего пункта остается справедливым и без этого допущения. Просто доказательство становится технически чуть более трудным. Заинтересованный

читатель может попробовать сам разобраться со всеми необходимыми тонкостями.

Дальше – больше. Интересно: а двадцать три вершины – это предел? Разумеется, 23 куда как меньше, чем 6448, но и что с того? Вдруг, например, и двенадцати вершин хватит? Ответ не известен. Пока 23 – это рекорд, но чем черт не шутит: глядишь, читатель побьет его. С другой стороны, хотелось бы найти хоть какие-нибудь «нижние» границы для подобных рекордов. Понятно, скажем, что четырех вершин уж точно не достаточно. Но нельзя ли уточнить эту тривиальную границу? Памятуя о том, что даже в веретене семь вершин, стоит думать, что и десятию вершинами вряд ли удастся обойтись, коль скоро мы хотим избавиться от присутствующих в веретене треугольников без уменьшения хроматического числа. Нет никаких результатов!

Дальше – еще больше. Назовем *циклом* в дистанционном графе конструкцию типа той, что изображена на

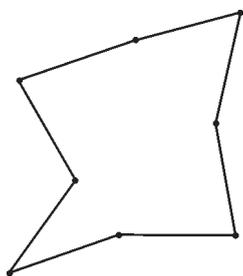


Рис. 24

рисунке 24. Скажем, что цикл имеет длину k , если в нем k ребер (и столько же вершин). Циклов длины 1 и 2 не бывает, цикл длины 3 – это треугольник. Обозначим через $g(G)$ так называемый *обхват* графа G , т.е. длину самого короткого цикла в нем. Например, веретено имеет обхват 3, а обхват графа О’Доннелла–Хохберга равен четырем.

Символ g для обхвата стандартен, он происходит от английского слова «girth» – обхват, объем, пояс, подпруга. Оказывается, что для любого заданного наперед k существует граф расстояний с хроматическим числом 4 и обхватом k . Этот совсем уж удивительный факт также принадлежит О’Доннеллу. Естественно, количество вершин в упомянутом графе растет чрезвычайно быстро с увеличением k , и вопрос об отыскании наименьшего числа вершин, необходимых для построения подобных графов, практически не изучен. Единственное, что, пожалуй, известно: при $k = 5$ хватает сорока пяти вершин. Короче, чем дальше в лес, тем больше дров.

Наконец, совсем недавно А.Кокоткин доказал исключительно красивое утверждение. Для его формулировки нам потребуется понятие *порожденного подграфа* данного графа $G = (V, E)$. Это произвольный граф $G' = (V', E')$, у которого $V' \subseteq V$ и пара вершин из V' соединена отрезком (ребром из E') тогда и только тогда, когда этот отрезок есть в множестве E . Например, подграф, выделенный в графе, который изображен на рисунке 25, порожденный, а подграф на рисун-

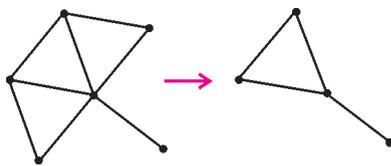


Рис. 25

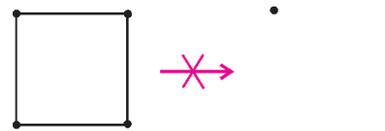


Рис. 26

ке 26 порожденным не является. Так вот, оказывается, что в любом дистанционном графе есть порожденный подграф, содержащий более 90 процентов вершин исходного графа и имеющий хроматическое число, не превосходящее четырех. Иными словами, мы у каждого графа расстояний можем «почти все» вершины правильно покрасить в четыре цвета. Если бы выражение «почти все» удалось заменить словом «все», то это бы означало, ввиду результата Эрдеша – де Брёйна, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$.

Как ни трудно в это поверить, но похоже, что в четыре цвета плоскость все же красится. Да, цвета будут ужасны, и именно поэтому их так трудно найти, но искать их следует.

И напоследок – о раскрасках пространства

В предыдущих разделах мы довольно много узнали о раскрасках прямой и плоскости. Но ведь есть же еще пространство. И понятно, что его тоже можно пытаться раскрасить. Для этого нужно лишь знать, что если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ суть две точки в пространстве, то расстояние между ними находится по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

«Одномерную» прямую мы обозначали \mathbb{R} , «двумерную» плоскость – \mathbb{R}^2 . Стало быть, для «трехмерного» пространства разумно использовать обозначение \mathbb{R}^3 .

Пусть, наконец, $\chi(\mathbb{R}^3)$ – это хроматическое число пространства, т.е. минимальное количество цветов в правильной покраске \mathbb{R}^3 . (Здесь термин «правильная покраска» по-прежнему указывает на то, что между одноцветными точками не бывает расстояния 1.)

Прежде всего стоит отметить, что задача об отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^3)$ значительно менее наглядна, нежели ее «классическая» предшественница: гораздо легче рисовать раскраски плоскости, нежели раскраски пространства. Тем не менее, геометрическая интуиция у нас есть, и мы можем хотя бы умозрительно представить себе ту или иную трехмерную покраску.

Ясно, далее, что геометрия пространства существенно богаче геометрии плоскости, а потому и направлений исследования в случае \mathbb{R}^3 намного больше. Ниже мы расскажем лишь о нескольких результатах. Они будут служить в некотором смысле обобщениями аналогичных результатов для плоскости, а потому мы уже не станем подробно их разбирать. Часть из них читатель сможет обосновать сам, часть он, при желании, найдет в литературе, которую мы указываем в конце статьи.

Во-первых, прямым аналогом квадрата на плоскости служит куб в пространстве. Соответственно, можно

получить оценку $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 27$, действуя, по сути, так же, как и при обосновании неравенства $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 9$. Более того, небольшие дополнительные усилия позволяют убедиться в том, что $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 26$.

К сожалению, столь очевидных аналогов шестиугольника в \mathbb{R}^3 уже нет. Однако есть все же некий многогранник, копии которого заполняют пространство целиком (подобно копиям куба), а затем правильно раскрашиваются в пятнадцать цветов. Таким образом, $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$. В брошюре [2] нарисован упомянутый многогранник; более того, ее редактору – М.Ю.Панову – удалось даже изобразить соответствующую покраску. Мы не станем повторять этот труд, отсылая читателя к указанному источнику.

Оценка $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$ (она принадлежит Д.Кулсону) пока никем не улучшена.

С другой стороны, есть и у мозеровского веретена трехмерное обобщение. В нем правильные треугольники заменяются тетраэдрами с длиной ребра 1. Эту конструкцию иногда называют «графом Райского» – в честь Д.Е.Райского, который использовал ее в своей работе 1970 года. Кстати, Райский был тогда школьником, так что у читателя вполне может сложиться впечатление, будто задачей о хроматическом числе занимались исключительно молодые люди. Но это, разумеется, не так. Более подробно о Райском и его результатах можно узнать из обзора [1] и брошюры [2].

Граф Райского показывает, что $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 5$. Совсем недавно конструкцию удалось уточнить. Сделал это О.Нечуштан путем весьма нетривиальных ухищрений. Им доказано, что $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 6$. Это тоже пока «рекорд».

Итак, к настоящему времени известна цепочка неравенств

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15.$$

Зазор между оценкам в ней еще больше, чем в случае плоскости, да это и не удивительно.

Аналоги задач, рассмотренных в предыдущих разделах, ставились и для \mathbb{R}^3 . Например, О.И.Рубанов (см. [5]) нашел конфигурацию, вершины которой нельзя правильно покрасить в четыре цвета (как и вершины графа Райского) и которая, однако ж, не содержит ни одного тетраэдра (в отличие от графа Райского). Вопрос о существовании подобной конструкции без треугольников остается открытым.

Но и на этом история задачи Нелсона отнюдь не заканчивается. Напротив, рассказанное – лишь верхушка айсберга. Существует масса задач о раскрасках «многомерных» пространств и пространств с «произвольными метриками», существуют также задачи, в которых точкам одного цвета запрещено отстоять друг от друга не только на расстояние 1, но и на любое расстояние из заданного наперед множества, и т.д. и т.п. Кое-что на эту тему заинтересованный читатель может найти в книгах [2], [6] и в обзоре [3].

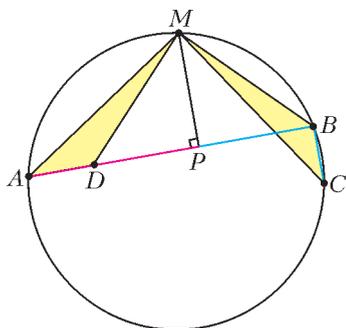
Однако, все это уже предмет совершенно иного разговора.

Литература

1. А.Сойфер. Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее. (Математическое просвещение, вып. 8, 2004)
2. А.М.Райгородский. Хроматические числа. (М.: МЦНМО, 2003)
3. А.М.Райгородский. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств. (Успехи математических наук, т. 56 (2001), вып. 1)
4. Современная иллюстрированная энциклопедия. Математика и информатика. (М.: РОСМЭН, 2007)
5. О.И.Рубанов. Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров. (Математические заметки, т. 82 (2007), №5)
6. А.М.Райгородский. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. (М.: МЦНМО, 2007)

НАМ ПИШУТ

Еще одно решение задачи М1000



В «Задачник «Кванта» под номером М1000 вошла задача, основу которой составил замечательный геометрический факт, открытый Архимедом: если треугольник ABC вписан в окружность, причем $AB > BC$ и M – середина дуги AC , расположенной с той же стороны от прямой AC , что и точка B , то основание P перпендикуляра, опущен-

ного на отрезок AB из точки M , делит ломаную ABC пополам: $AP = PB + BC$ (см. рисунок).

Десятиклассница Эмма Акопян придумала следующее удивительно короткое доказательство этого утверждения. В силу теоремы о вписанном угле, величины углов BAM и BCM , опирающихся на одну и ту же дугу BM , равны. Поэтому при повороте треугольника MBC вокруг точки M , при котором точка C переходит в точку A , треугольник MBC переходит в некоторый треугольник MDA , где точка D лежит на отрезке AB . При этом $AD = BC$. Поскольку высота равнобедренного треугольника является и его медианой, то $DP = PB$. Отсюда $AP = AD + DP = PB + BC$, что и требовалось доказать.

А.Спивак

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2086» или «Ф2093». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2093 – М2095 предлагались на XXIX Турнире городов.

Задачи Ф2093–Ф2095 и Ф2098 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года, а задачи Ф2096, Ф2097 и Ф2099–Ф2101 – на XLII Всероссийской олимпиаде школьников по физике.

Победителями конкурса «Задачник «Кванта» 2007 года стали
по математике

Нижибицкий Евгений – г. Краснодар, школа 73;

по физике

Абдрахманов Владимир – г. Волгоград, лицей 3.

Они награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2008 года.

Задачи М2086–М2095, Ф2093–Ф2102

М2086. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, \dots и b_1, b_2, \dots , состоящие из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = b_1$ и для каждого номера n числа a_n и b_n имеют равные остатки при делении на n . Докажите, что прогрессии совпадают.

Н. Калинин

М2087. Шахматная фигура «прожектор» бьет один из углов, на которые делят доску проходящие через нее горизонталь и вертикаль, включая примыкающие к углу клетки горизонтали и вертикали. (Например, прожектор в левом нижнем углу может бить либо одну клетку, либо нижнюю горизонталь, либо левую вертикаль, либо всю доску). Какое наибольшее число прожекторов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

А. Шаповалов

М2088. Докажите, что для положительных чисел x, y, z , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\frac{x^2 + 3xy}{x+y} + \frac{y^2 + 3yz}{y+z} + \frac{z^2 + 3zx}{z+x} \leq 2.$$

Р. Пиркулиев

М2089. Пусть B_0 – середина стороны AC треугольника ABC . Обозначим через A_1 и A_2 центры вписанной и касающейся AB внеписанной окружности треугольника ABB_0 . Аналогично для треугольника $CB B_0$ определим точки C_1 и C_2 . Докажите, что четырехугольник $A_1 A_2 C_2 C_1$ – вписанный.

Л. Емельянов

М2090. Пусть c_1, c_2, \dots, c_n – действительные числа; $S_1 = c_1$, $S_2 = c_1 + c_2$, $S_3 = c_1 + c_2 + c_3, \dots, S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$; M и m – соответственно максимальное и минимальное среди чисел $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. Докажите неравенства:

а) $m \leq c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \dots + \frac{1}{n}c_n \leq M$;

б) $nm \leq nc_1 + (n-1)c_2 + \dots + c_n \leq nM$;

в) если $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n > 0$, то $\alpha_1 m \leq \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n \leq \alpha_1 M$.

А. Егоров

М2091. Докажите, что для любых натуральных $n > 2$ и m существуют n попарно взаимно простых натуральных чисел, больших 10^{10} и таких, что сумма их m -х степеней делится на их сумму.

В. Сендеров

M2092. На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно. Точки K', L', M', N' симметричны точкам K, L, M, N относительно середин ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что объемы тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$ равны.

П. Кожевников

M2093. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие орлом вверх, а какие решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на бумаге любое натуральное число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число. Найдите все N , для которых у фокусника с ассистентом есть способ гарантированно отгадывать число.

С. Грибок

M2094. На плоскости нарисованы два многоугольника P и Q . Для любой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через l — длину стороны. Просуммировав все произведения lh по всем сторонам P , получим число, которое обозначим (P, Q) . Докажите, что $(P, Q) = (Q, P)$.

Д. Звонкин

M2095. Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой — либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету на данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что синих кубиков ровно n ?

А. Буфетов

Ф2093. Школьник бежит по окружности радиусом $R = 30$ м с постоянной по величине скоростью $u = 3,14$ м/с. Второй школьник гонится за ним, стартовав из центра окружности. В процессе погони он все время находится на радиусе, соединяющем центр окружности и первого школьника, а величина его скорости неизменна и равна $v = 2u$. Сколько времени займет погоня?

К. Парфенов

Ф2094. Небольшой груз массой m , привязанный нитью длиной l к платформе (рис.1), движется по гладкой поверхности стола со скоростью v , описывая окружность. Нить невесома и нерастяжима и образует угол α с вертикалью. Платформа начинает двигаться вверх с ускорением a ; при этом вначале груз не

отрывается от стола. Найдите величины действующих на груз сил натяжения нити T и реакции стола N сразу после начала движения платформы.

М. Ромашка

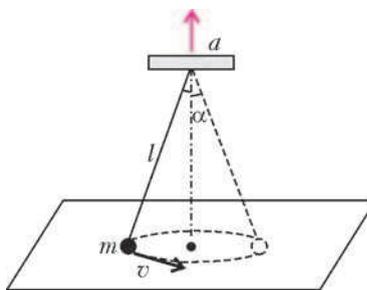


Рис. 1

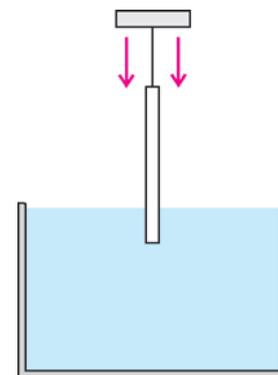


Рис. 2

Ф2095. Тонкий карандаш, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (рис.2). Определите максимальную глубину погружения нижнего конца карандаша, если длина карандаша $l = 18$ см, а его средняя плотность в $n = 2$ раза меньше плотности воды.

И. Горбатый

Ф2096. На гладком горизонтальном столе лежит груз массой m , к которому прикреплены две одинаковые пружины жесткостью k каждая (рис.3). Левый конец пружины 1 прикреплен к стенке, в момент времени $t = 0$ правый конец пружины 2 начинают медленно перемещать с постоянной скоростью u .

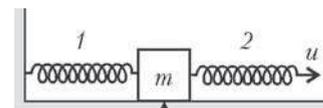


Рис. 3

1) Через какое время груз впервые приобретет скорость u ? 2) На каком расстоянии от первоначального положения будет находиться он в этот момент?

А. Гуденко

Ф2097. Через короткую трубку выдувают мыльный пузырь с массой $m = 0,01$ г и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 0,01$ Н/м (рис.4). Пузырь заряжают зарядом $Q = 5,4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Трубка остается открытой.

1) Определите равновесный радиус пузыря R_0 . 2) Определите период малых колебаний пузыря, если при колебаниях он сохраняет сферическую форму. 3) Оцените, с какой скоростью разлетятся брызги, если пузырь внезапно зарядить зарядом $Q_1 = 10Q$. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н·м²).

А. Ольховец

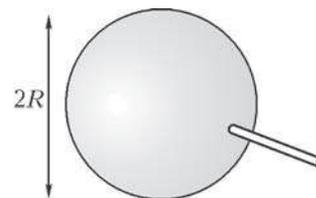


Рис. 4

Ф2098. Найдите сопротивление электрической цепи между точками A и B (рис.5). Сопротивление стороны большого шестиугольника равно R , сопротивление стороны малого шестиугольника равно $R/2$, сопротивление каждого внутреннего проводника, заключенного

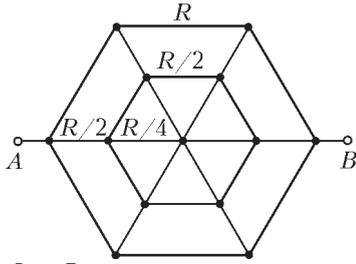


Рис. 5

между шестиугольниками, равно $R/2$, а сопротивление каждого проводника, находящегося внутри малого шестиугольника, равно $R/4$.

Е.Простомолотова

Ф2099. В цилиндре под поршнем находится смесь воздуха и паров некоторой жидкости. Смесь изотермически сжимают. На рисунке 6 представлена экспериментальная зависимость давления в сосуде от

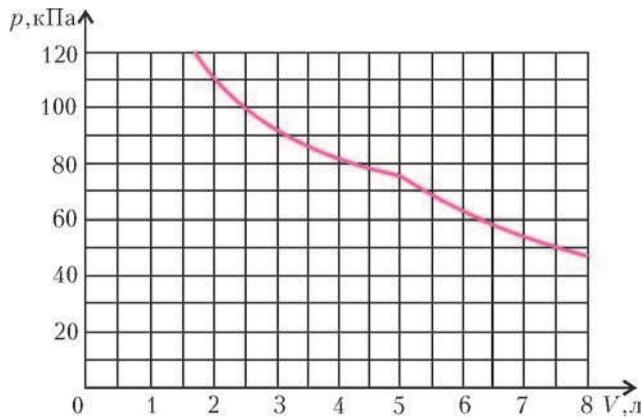


Рис. 6

объема в этом процессе. Чему равно давление насыщенных паров жидкости при данной температуре и внутренняя энергия смеси при объеме цилиндра более 5 л?

Примечание. Считать воздух идеальным двухатомным газом, а пары жидкости – идеальным трехатомным газом.

С.Кармазин

Ф2100. На длинном тонкостенном диэлектрическом цилиндре радиусом R , длиной $L \gg R$ и массой M размещен электрический заряд с одинаковой поверхностной плотностью σ . Цилиндр может свободно (без

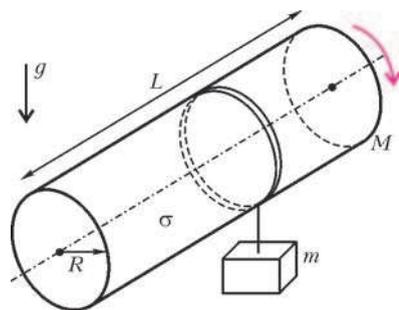


Рис. 7

трения) вращаться вокруг своей оси под действием груза массой m , подвешенного на невесомой нити, намотанной на цилиндр (рис.7). Определите ускорение груза. Магнитную постоянную μ_0 считать заданной.

М.Осин

Ф2101. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только параллельные друг другу собирающая линза, объект и его действительное изображение (рис.8). Из пояснений к чертежу было ясно, что за линзой находилось плоское зеркало.

Восстановите построением имеющимся данным положение зеркала и найдите положение фокусов линзы.

Г.Гарнопольский

Ф2102. Генератор незатухающих колебаний собран по обычной «ламповой» схеме – потери в колебательном LC -контуре компенсируются подкачкой энергии через дополнительную катушку, включенную в анодную цепь лампы-триода.

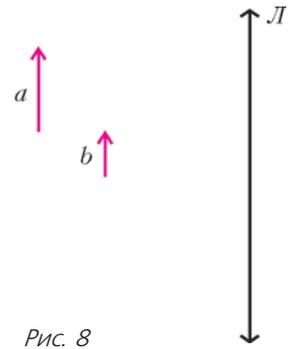


Рис. 8

Частота колебаний перестраивается за счет изменения емкости конденсатора, включенного в контур (настройка при помощи конденсатора переменной емкости). Генератор работает на заданной частоте, но его настроили неправильно – если мы хотя бы немного уменьшим подкачку энергии (например, уменьшим число витков вспомогательной катушки на один виток), колебания просто не возникнут. Перестроим частоту колебаний на 5%, уменьшив емкость конденсатора. Как нужно изменить число витков вспомогательной катушки, чтобы генератор мог работать на этой частоте? Считайте, что потери энергии в колебательном контуре связаны главным образом с сопротивлением провода, которым намотана катушка индуктивности. Упрощенная схема генератора приведена на рисунке 9.

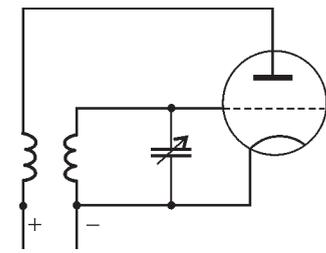


Рис. 9

Перестроим частоту колебаний на 5%, уменьшив емкость конденсатора. Как нужно изменить число витков вспомогательной катушки, чтобы генератор мог работать на этой частоте? Считайте, что потери энергии в колебательном контуре связаны главным образом с сопротивлением провода, которым намотана катушка индуктивности. Упрощенная схема генератора приведена на рисунке 9.

А.Контуров

Решения задач М2066–М2069, Ф2078–Ф2087

М2066. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p . Найдите наибольшее значение p .

Ответ: 2,02.

Значение $p = 2,02$ достигается, если разрезать квадрат на 100 равных прямоугольников $0,01 \times 1$.

Выберем среди 100 прямоугольников прямоугольник $a \times b$ ($a \leq b$) минимальной площади; тогда $ab \leq 0,01$. Предположим, что $p = 2(a + b) > 2,02$. Ясно, что стороны прямоугольников параллельны сторонам квадрата, поэтому $b \leq 1$, откуда $a > 0,01$ и $0 \leq b - a < 0,99$. Имеем

$$ab = \frac{1}{4}((a + b)^2 - (b - a)^2) > \frac{1}{4}(1,01^2 - 0,99^2) = 0,01.$$

Противоречие.

П.Кожевников

М2067. Докажите, что если число $\underbrace{111\dots 11}_n$ делится на n , то n делится на 3.

Предположим, что $\frac{\underbrace{111\dots 11}_n}{9} = \frac{10^n - 1}{9}$ делится на n , но n не делится на 3. Очевидно, n не делится на 2 и на 5. Пусть p – наименьший простой делитель числа n , $p > 5$. Тогда $10^n - 1$ делится на p . Согласно малой теореме Ферма, $10^{p-1} - 1$ делится на p . Таким образом, $10^n \equiv 1 \pmod{p}$ и $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Пусть k – наименьшее натуральное число, для которого $10^k \equiv 1 \pmod{p}$. Заметим, что $k > 1$ (так как $10^1 - 1 = 9$ не делится на p) и $k \leq p - 1$. Разделим n на k с остатком: $n = kq + r$, $0 \leq r < k$. Имеем $1 \equiv 10^n \equiv (10^k)^q \cdot 10^r \equiv 10^r \pmod{p}$. Из определения k следует, что $r = 0$, т.е. n делится на k , $1 < k < p$. У числа k , а значит и у n , есть простой делитель, который меньше p , – противоречие.

Р.Ковалев

M2068. В футбольном турнире участвуют mn команд ($m, n \geq 2$). Командам присвоены номера $1, 2, \dots, mn$ в соответствии с местом, занятым на предварительном этапе. Организаторы турнира собираются разбить команды на m групп по n команд так, чтобы для любых двух команд A и B выполнялось условие: если номер A меньше номера B , то сумма номеров соперников по группе для команды A больше, чем для команды B . При каких m и n желание организаторов можно осуществить?

Ответ: при таких m и $n \geq 2$, что $(m+1)n$ делится на 2. Заметим, что если команды распределены по m группам с равными суммами номеров команд, то условие задачи выполняется.

Пусть команды разбиты на m групп по n команд так, что суммы номеров не во всех группах равны. Скажем, в группах $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ суммы номеров равны S , а в группах $\Gamma_{k+1}, \Gamma_{k+2}, \dots, \Gamma_m$ суммы номеров не больше $S - 1$. Очевидно, в группе Γ_1 найдется команда, номер x которой больше номера y некоторой команды группы Γ_{k+1} . Среди команд с номерами $x, x - 1, \dots, y$ найдем команду с наименьшим номером z , принадлежащую одной из групп $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Тогда команда z принадлежит группе $\Gamma_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$, а команда $z - 1$ принадлежит группе $\Gamma_j, j \in \{k + 1, \dots, m\}$. Для команд z и $z - 1$ условие не выполнено: сумма номеров соперников по группе команды z равна $S - z$, а сумма номеров соперников по группе команды $z - 1$ не больше $(S - 1) - (z - 1) = S - z$.

Из сказанного следует, что задача равносильна следующей: при каких $m, n \geq 2$ числа $1, 2, \dots, mn$ можно разбить на m групп по n чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были равны?

Рассмотрим 3 случая.

1) Пусть n четно ($n = 2q$). Из данных чисел образуем mq пар с равной суммой: 1 и $2mq$, 2 и $2mq - 1, \dots, mq$ и $mq + 1$. Теперь в каждую из m групп включим по q пар.

2) Пусть n нечетно, m четно. Если нужное разбиение возможно, то сумма номеров команд в каждой группе

должна быть равна

$$\frac{1 + 2 + \dots + mn}{m} = \frac{mn(mn + 1)}{2m} = \frac{n(mn + 1)}{2}$$

– нецелое число. Противоречие.

3) Пусть n и m оба нечетные ($n = 2q + 1, m = 2r + 1$). Вначале из $2(q-1)m$ чисел $3m + 1, 3m + 2, \dots, (2q + 1)m$ образуем $(q-1)m$ пар с равной суммой: $3m + 1$ и $(2q + 1)m, 3m + 2$ и $(2q + 1)m - 1, \dots$. В каждую из m групп включим по $q - 1$ пар. Остается числа $1, 2, \dots, 3m$ разбить на $m = 2r + 1$ троек с равными суммами. Составим таблицу $3 \times m$ по такому правилу. В первой строке запишем числа $1, 2, \dots, 2r + 1$ в порядке возрастания. Во второй строке – вначале числа $m + r + 1, m + r + 2, \dots, m + 2r + 1$, затем $m + 1, m + 2, \dots, m + r$. В третьей строке – вначале нечетные числа $2m + 2r + 1, 2m + 2r - 1, \dots, 2m + 1$ в порядке убывания, затем четные числа $2m + 2r, 2m + 2r - 2, \dots, 2m + 2$ в порядке убывания. В каждом столбце сумма равна $3m + 3r + 3$ – это и есть нужное разбиение на тройки.

И.Акулич, П.Кожевников

M2069. Обозначим через $\|y\|$ расстояние от действительного числа y до ближайшего целого числа. Пусть для иррационального числа x бесконечная последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ определена следующим образом: $q_1 = 1, q_{k+1}$ – наименьшее натуральное q , для которого $\|xq\| < \|xq_k\|$. Докажите, что $q_{k+2} \geq q_k + q_{k+1}$ для всех $k = 1, 2, \dots$

Из условия вытекает, что $q_1 < q_2 < \dots < q_k < \dots$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ – такая последовательность целых чисел, что $\|xq_i\| = |a_i - xq_i|$. Положим $x_i = a_i - xq_i$.

Предположим, что x_i и x_{i+1} одного знака, тогда для $q' = q_{i+1} - q_i < q_{i+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \|xq'\| &\leq |(a_{i+1} - a_i) - xq'| = \\ &= |(a_{i+1} - a_i) - x(q_{i+1} - q_i)| = |x_i - x_{i+1}| < |x_i| = \|xq_i\|. \end{aligned}$$

Получаем противоречие с выбором q_{i+1} .

Таким образом, $x_i x_{i+1} < 0$ для всех i . Значит, $x_i x_{i+2} > 0$ для всех i . Отсюда

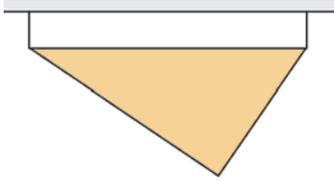
$$\begin{aligned} \|x(q_{i+2} - q_i)\| &\leq \\ &\leq |(a_{i+2} - a_i) - x(q_{i+2} - q_i)| = |x_i - x_{i+2}| < |x_i| = \|xq_i\|. \end{aligned}$$

Так как q_{i+1} – наименьшее натуральное q , удовлетворяющее неравенству $\|xq\| < \|xq_i\|$, имеем $q_{i+2} - q_i \geq q_{i+1}$, что и требовалось.

Как известно, для любого $\varepsilon > 0$ и иррационального x можно указать такое целое q , что $\|xq\| < \varepsilon$. Отсюда вытекает существование последовательности $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$, о которой идет речь в условии, для любого иррационального x .

В.Быковский

Ф2078. Из листа фанеры вырезали кусок в форме прямоугольного треугольника с катетами 60 см и 80 см, масса этого куска равна 2 кг. Кусок фанеры подвесили к потолку при помощи двух одинаковых легких нитей, расстояние между точками прикрепле-



ния нитей к потолку равно 100 см (см. рисунок). Найдите силы натяжения нитей.

Тут достаточно сообразить – где находится центр тяжести фигуры. Известно, что для такого треугольника (вырезанного из листа постоянной толщины) он оказывается в точке пересечения медиан. Медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, значит, эта точка по горизонтали находится вдвое ближе к правой точке подвеса, чем к левой, тогда и сила натяжения правой нити вдвое больше, чем у левой. В сумме эти силы составляют Mg , поэтому

$$T_1 = \frac{Mg}{3} \approx \frac{2 \cdot 9,8}{3} \text{ Н} \approx 6,5 \text{ Н} \text{ и } T_2 = \frac{2Mg}{3} \approx 13 \text{ Н}.$$

А.Простов

Ф2079. Клин массой M с углом α при основании находится на гладком горизонтальном столе. На

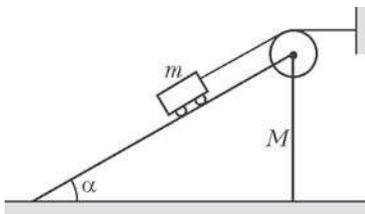


Рис. 1

наклонной грани клина стоит тележка массой m , к ней привязана легкая нить, переброшенная через блок, закрепленный осью в вершине клина (рис.1). Свободный конец нити привязан

к стене. Вначале клин удерживают, затем отпускают. С каким ускорением он начнет двигаться?

Силы, действующие на тела в системе, показаны на рисунке 2. Ускорение клина обозначим буквой a , а ускорение тележки представим в виде суммы векто-

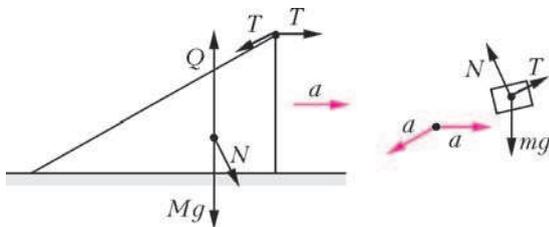


Рис. 2

ров двух ускорений – вместе с клином и относительно клина (нить нерастяжима, поэтому если клин смещается на некоторую величину по направлению к стенке, точно на такую же величину наклонный кусок нити удлиняется). Теперь можно записать уравнения динамики. Сделаем так, чтобы сила реакции N не вошла в эти уравнения, тогда достаточно будет написать всего два уравнения. Это будут уравнения второго закона Ньютона для тележки – в проекции на направление вдоль наклонной плоскости (вниз) и для клина и тележки вместе – в проекции на горизонталь:

$$mg \sin \alpha - T = ma(1 - \cos \alpha),$$

$$T = ma(1 - \cos \alpha) + Ma.$$

Отсюда находим искомое ускорение:

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

Р.Клинов

Ф2080. Две большие параллельные пластины двигаются навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0 . Между пластинами находится очень маленький упругий шарик. В тот момент когда одна из пластин ударяется о него, расстояние между пластинами составляет L . Считая удары абсолютно упругими, найдите скорость шарика в тот момент, когда расстояние между пластинами составит $L/5$. Действием силы тяжести пренебречь. Скорость шарика перед первым ударом равна нулю.

Это совсем простая задача. После первого удара шарик приобретет скорость $2v$ (это легко установить, «пересев» в систему отсчета, связанную с набегающей плоскостью, а после расчета удара пересев обратно), направленную в сторону второй пластины, при этом шарик и эта пластина будут сближаться со скоростью $3v$, и удар произойдет через время $L/(3v)$. К моменту соударения первая пластина сдвинется ко второй на $vL/(3v) = L/3$, и расстояние между пластинами станет равным $L - L/3 = 2L/3$. После этого удара скорость шарика станет равной $4v$, он ударится о первую пластину через время $2L/(15v)$. К этому моменту расстояние между пластинами будет равно $L/3 - 2L/15 = L/5$ – это заданная в условии величина. Уже можно записать ответ – скорость шарика будет равна $4v$. А можно найти скорость шарика после этого удара (удары кратковременны) – получится $6v$. Интересно, что последовательные расстояния между пластинами в моменты ударов записываются совсем просто...

А.Шариков

Ф2081. В комнате, заполненной воздухом, находится пустой кубический сосуд объемом 100 л. В стенке сосуда открывается маленькое отверстие площадью 1 см^2 и через $0,001 \text{ с}$ закрывается. Оцените количество молекул, попавших в сосуд за это время. Оцените также давление, которое установится в сосуде. Стенки сосуда не проводят тепло, теплоемкостью стенок можно пренебречь.

За указанное время в сосуд влетит не слишком много молекул (это мы проверим!). Пренебрегая количеством вылетевших за это время из сосуда наружу частиц, посчитаем только «влетающие» – такую задачу приближенно легко решить (мы ее наверняка уже решали), посчитав число ударов частиц газа о стенку:

$$N = 0,5v_x \tau S n.$$

Здесь v_x – скорость частиц вдоль оси X , τ – время, за которое считаем число ударов, S – площадь дырки, n – концентрация частиц воздуха. В нашем случае $v_x = \sqrt{RT/M} = \sqrt{8,3 \cdot 300/0,029} \text{ м/с} \approx 9 \cdot 10^2 \text{ м/с}$ и $n = N_A p_0 / (RT) = 6 \cdot 10^{23} \cdot 1 \cdot 10^5 / (8,3 \cdot 300) 1/\text{м}^3 \approx 2,4 \cdot 10^{25} 1/\text{м}^3$ – температуру в комнате мы приняли равной 300 К. Тогда количество влетевших частиц

равно

$$N \approx 1 \cdot 10^{21}.$$

Видно, что число частиц для такого сосуда совсем мало, так что мы действительно можем пренебречь числом вылетевших частиц.

Если бы энергии влетевших частиц были в среднем такими же, как и снаружи (т.е. температура в сосуде после хаотизации влетевших частиц оказалась такой же, как и снаружи, т.е. 300 К – а это не так!), то давление составило бы

$$p_1 = \frac{NRT}{N_A V} = \frac{1 \cdot 10^{21} \cdot 8,3 \cdot 300}{6 \cdot 10^{23} \cdot 0,1} \text{ Па} \approx 40 \text{ Па}$$

(наша модель для расчета ударов очень приближительная, поэтому мы всюду грубо округляли результаты). Газ при атмосферном давлении довольно плотный (очень мала длина свободного пробега частиц), поэтому частицы не влетают независимо друг от друга в дырку, а «отставшие» частицы просто заталкивают обогнавших их в сосуд, совершая при этом работу и увеличивая внутреннюю энергию этих частиц. Если пренебречь теплообменом между порциями газа, то увеличение этой энергии равно совершенной работе. Работа производится при атмосферном давлении. Если объем порции газа, которая окажется к моменту закрытия дырки в сосуде, составлял снаружи V_1 (эту величину мы вычислять не будем, хотя это и не сложно), то работа внешнего газа над этой порцией составит $p_0 V_1$, и внутренняя энергия «внутреннего» газа увеличится как раз на эту величину: $U_1 = U + p_0 V_1 = 7U/5$. Таким образом, температура газа внутри сосуда после хаотизации увеличится в $7/5$ раза, и давление составит

$$p_2 = \frac{7}{5} p_1 \approx \frac{7}{5} \cdot 40 \text{ Па} \approx 56 \text{ Па}.$$

А.Повторов

Ф2082. Моль гелия в сосуде расширяется от начального объема $V_1 = 10$ л до конечного объема $V_2 = 50$ л, при этом давление газа в процессе меняется так, что $pV^2 = \text{const}$. Начальная температура газа $T_1 = 300$ К. Найдите конечную температуру. Найдите также работу газа в процессе (если не получится найти точно, посчитайте приближенно) и полученное в процессе количество теплоты.

С температурой все ясно – объем увеличился в процессе в 5 раз, давление уменьшилось в $5^2 = 25$ раз, температура упала в 5 раз и составила $T_2 = 60$ К.

Работу газа можно найти разными способами, мы посчитаем простой интеграл. Выразим давление газа как функцию его объема: $p = \alpha/V^2$. При $V = V_1$ давление составляло $p_1 = RT/V_1$, поэтому $\alpha = RT_1 V_1$. Теперь найдем работу газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 V_1 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = RT_1 \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right) = 8,3 \cdot 300 \cdot 0,8 \text{ Дж} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия газа уменьшилась на величину $1,5RT_1 - 1,5RT_2 \approx 3 \cdot 10^3$ Дж. Газ в этом процессе тепло отдавал:

$$Q = A + \Delta U \approx 2 \text{ кДж} - 3 \text{ кДж} \approx -1 \text{ кДж}.$$

Р.Газов

Ф2083. К батарейке подключают амперметр (вообще говоря, так поступать не следует!) – он показывает силу тока 1 А. Параллельно подключают еще один такой же амперметр – теперь они в сумме показывают 1,2 А. Сколько в сумме покажут 2008 таких же амперметров, если их подключить к батарейке параллельно?

Очевидно, что амперметры не идеальные – при идеальных амперметрах сопротивление внешней цепи осталось бы неизменным и сумма показаний амперметров не менялась бы. Ясно, что и батарейка не идеальна – при подключении к такой батарейке «лишних» амперметров показания предыдущих не менялись бы и сумма должна была расти пропорционально числу амперметров, т.е. для двух амперметров должно было быть 2А. Обозначим сопротивление амперметра R , а внутреннее сопротивление батарейки r . Тогда легко составить два уравнения:

$$\frac{U}{R+r} = I_1, \quad \frac{U}{R/2+r} = I_2.$$

Все три неизвестные величины отсюда найти нельзя – но нам достаточно определить отношение сопротивлений r/R . Подставив значения токов и разделив уравнения друг на друга, мы легко получим $R = 0,5r$. Ток через батарейку при 2008 амперметрах будет равен

$$I_{2008} = \frac{U}{r + R/2008} = \frac{I_1(r+r/2)}{r+r/(2 \cdot 2008)} \approx 1,5 \text{ А}.$$

Можно посчитать и точнее, но никакой амперметр разницы не почувствует...

Т.Оков

Ф2084. Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена, а вторая может свободно смещаться параллельно, оставаясь на расстоянии d от первой. Масса подвижной пластины M , площадь каждой из пластин S . Конденсатор зарядили до напряжения U_0 . Сдвинем теперь подвижную пластину относительно положения равновесия. Найдите период малых колебаний этой пластины. Зависит ли он от того, как мы сдвинули пластину? Сила тяжести отсутствует.

Для определенности сдвинем пластину на малое расстояние x параллельно одному из ребер так, чтобы пластины остались параллельными друг другу и расстояние между их плоскостями было, как и раньше, равно d (сделаем направляющие, позволяющие пластине двигаться именно так и без трения). Тогда емкость конденсатора уменьшится – она определяется только частями пластин, расположенных одна против другой:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 S^*}{d} = \frac{\epsilon_0 (\sqrt{S} - 2x)\sqrt{S}}{d}.$$

Ясно, что если мы оставим источник подключенным к пластинам, то возвращающей силы не будет, а значит, никаких колебаний просто не возникнет.

Будем считать, что источник отключают, тогда заряд конденсатора $Q = C_0 U_0$ можно считать неизменным. Найдем изменение энергии заряженного конденсатора при сдвиге пластины на малое расстояние x в указанном направлении:

$$W_1 - W_0 = \frac{Q^2}{2C_1} - \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{C_0} \frac{x}{\sqrt{S}}.$$

Считая силу, необходимую для такого смещения, неизменной на малом отрезке x , для «возвращающей» силы получим

$$F = \frac{Q^2}{C_0 \sqrt{S}} = \frac{C_0 U_0^2}{\sqrt{S}}.$$

Сила получилась постоянной – колебания не будут гармоническими. При равноускоренном движении четверть периода колебаний τ определится из уравнения $(F/M) \frac{\tau^2}{2} = x$, или $\tau = \sqrt{\frac{2xM}{F}}$. Видно, что этот период $T = 4\tau$ зависит от величины начального смещения пластины. Ясно, что если пластину смещать на ту же величину x , но в другом направлении (например, параллельно диагонали пластины), изменение емкости при том же смещении будет другим, другой будет и возвращающая сила, а значит – и период колебаний изменится.

З.Рафаилов

Ф2085. Катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R соединены параллельно, к выводам цепочки очень давно подключен внешний источник, ток в его цепи равен I_0 . Ток в цепи источника очень быстро увеличивают в 3 раза. Какое количество теплоты выделится в резисторе после этого? Какой полный заряд протечет через резистор?

Ток через катушку перед изменением тока внешней цепи примем равным I_0 – источник был подключен очень давно и ток через катушку уже установился. Сразу после увеличения тока в цепи источника до $3I_0$ ток через катушку остался прежним, а затем начал понемногу увеличиваться – через достаточно большое время он возрастет до $3I_0$. Напряжение на резисторе равно ЭДС индукции катушки, поэтому, обозначив J – ток катушки и I – ток через резистор в этот же момент, для малого интервала времени Δt получим

$$-L \frac{\Delta J}{\Delta t} = RI.$$

Перепишем чуть иначе:

$$-L \Delta J = RI \Delta t = R \Delta q,$$

где Δq – «порция» заряда, протекшего через резистор за указанный малый интервал времени. Суммируя за большое время, получим слева полное изменение магнитного потока через катушку, а справа – суммарный заряд, протекший через резистор:

$$q_R = 2LI_0$$

(куда течет заряд через резистор – понятно, на знак

полученного выражения можно внимания не обращать).

Ответ на первый вопрос чуть сложнее. Сумма токов через катушку и резистор остается постоянной и равной $3I_0$. Тогда запишем

$$-L \frac{\Delta J}{\Delta t} = -L \frac{\Delta(3I_0 - I)}{\Delta t} = RI,$$

или

$$-L \Delta(3I_0 - I) = RI \Delta t.$$

Домножим обе части уравнения на I , чтобы после суммирования получить справа полное количество теплоты Q , выделившееся за большое время в резисторе:

$$-LI \Delta(3I_0 - I) = RI^2 \Delta t.$$

Разобьем левую часть на два слагаемых и просуммируем за большое время:

$$\begin{aligned} Q &= -\Sigma LI \Delta(3I_0) + \Sigma LI \Delta(I) = \\ &= 0 + \Delta \left(\frac{LI^2}{2} \right) = \frac{L(3I_0)^2}{2} - \frac{LI_0^2}{2} = 4LI_0^2. \end{aligned}$$

А.Зильберман

Ф2086. Две одинаковые катушки индуктивности соединены последовательно. Выводы получившейся цепочки подключены к звуковому генератору последовательно с низковольтной лампочкой для фонарика. Параллельно одной из катушек подключают конденсатор и начинают изменять в широких пределах частоту генератора. На частоте $f = 600$ Гц наблюдается четкий минимум свечения нити накала лампочки. На какой частоте (частотах) лампочка будет гореть ярче всего?

Будем считать, что катушки и конденсатор в цепи идеальные (во-первых, это сильно упрощает наши вычисления, а во-вторых, в условии задачи сказано «четкий минимум» – при сильно неидеальных элементах он был бы нечетким, размазанным). Тогда ясно, что минимуму соответствует частота ω_1 параллельного LC-контура:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC},$$

при этом емкостное сопротивление конденсатора равно по величине индуктивному сопротивлению катушки. Максимум получится на частоте ω_2 , при которой по цепи L – LC течет ток, но напряжение на ее зажимах равно нулю. Это означает, что токи, текущие через катушки, равны по величине и противоположны по фазе (только тогда и получится нулевое напряжение). Но в этом случае ток через конденсатор должен быть вдвое больше тока одной катушки (при том же напряжении), т.е. на частоте ω_2 емкостное сопротивление конденсатора должно быть вдвое меньше индуктивного сопротивления катушки:

$$\frac{1}{\omega_2 C} = 0,5 \omega_2 L.$$

Отсюда

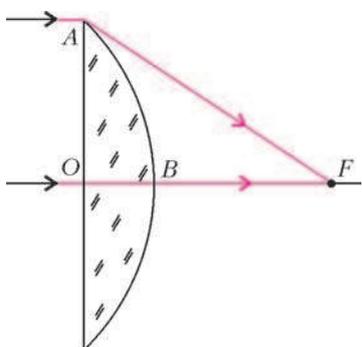
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2}.$$

Частота, на которой будет максимальное свечение нити накала, в 1,41 раза больше частоты минимума и составляет примерно 850 Гц (на практике максимум не будет «выражен четко»).

Лампочка будет светиться ярко не только на этой частоте, но и на достаточно низких частотах, где индуктивное сопротивление нашей цепи будет небольшим, а ток конденсатора окажется пренебрежимо малым (впрочем, это только в теории – на практике звуковой генератор может и не отдать нужного тока в низкоомную нагрузку).

Р. Старов

Ф2087. Небольшая плосковыпуклая линза отштампована из прозрачной пластмассы. Форма выпуклой поверхности аккуратно рассчитана при помощи ЭВМ, она отличается от сферической (сферическая поверхность «собирает» лучи параллельного пучка в фокусе только приблизительно). Диаметр плоской поверхности линзы 2 см, толщина линзы 0,5 см. Найдите



фокусное расстояние линзы. Коэффициент преломления пластмассы 1,5.

Воспользуемся известным свойством собирающей линзы (и не только собирающей линзы!): если на линзу падает параллельный пучок лучей (выберем самый удобный случай – лучи падают на плоскую сторону линзы перпендикулярно этой плоскости), то пучок сходится в главном фокусе линзы (на рисунке это точка F) и время распространения любого луча до этой точки одно и то же.

Сравним времена распространения для крайнего и для центрального лучей. Центральный должен пройти меньшее расстояние, но часть пути (внутри линзы) его скорость меньше в $n = 1,5$ раза. Тогда

$$\frac{AF}{c} = \frac{OB}{c/n} + \frac{BF}{c},$$

или, если обозначить $BF = x$,

$$\frac{\sqrt{(x+d)^2 + D^2/4}}{c} = \frac{dn}{c} + \frac{x}{c}$$

(здесь толщина линзы $d = 0,5$ см, диаметр линзы $D = 2$ см, коэффициент преломления материала линзы $n = 1,5$). После возведения левой и правой частей последнего равенства в квадрат, получаем простое уравнение первой степени относительно x . Решая, получаем $x \approx 1,4$ см. Если бы обозначили за x длину отрезка OF , то уравнение получилось бы куда более громоздким. А теперь мы легко найдем искомое фокусное расстояние:

$$OF = x + d \approx 1,6 \text{ см.}$$

З. Очков

Итоги Всероссийского конкурса учителей физики и математики

Подведены итоги пятого конкурса школьных учителей Фонда Дмитрия Зимина «Династия». В этом году впервые учительский конкурс проводился в четырех номинациях. К ставшим уже традиционными номинациям «Молодой учитель», «Учитель, воспитавший Ученика» и



«Наставник будущих ученых» добавилась новая – премия «За выдающиеся заслуги в области физико-математического образования».

Лауреатами этой премии стали три учителя, чей авторитет в педагогическом сообществе общепризнан, а научные достижения учеников известны далеко за пределами нашей страны. Это

Зильберман Александр Рафаилович – Москва, Лицей «Вторая школа» (*физика*),

Слущкий Юрий Лазаревич – Санкт-Петербург, ФМЛ 239 (*физика*),

Хазанкин Роман Григорьевич – Белорецк, БКШ (*математика*).

Все победители конкурса получают гранты в размере 35000 рублей, а троим лауреатам премии «За выдающиеся заслуги в области физико-математического образования» будет выплачено по 150000 рублей.

Мы искренне поздравляем нашего любимого сотрудника и автора, бессменного ведущего раздел «Задачник «Кванта» (по физике) Александра Рафаиловича Зильбермана с присуждением премии «За выдающиеся успехи в области физико-математического образования».

Задачи

1. В арифметическом ребусе

$$\text{FOUR} + \text{FIVE} = \text{NINE}$$

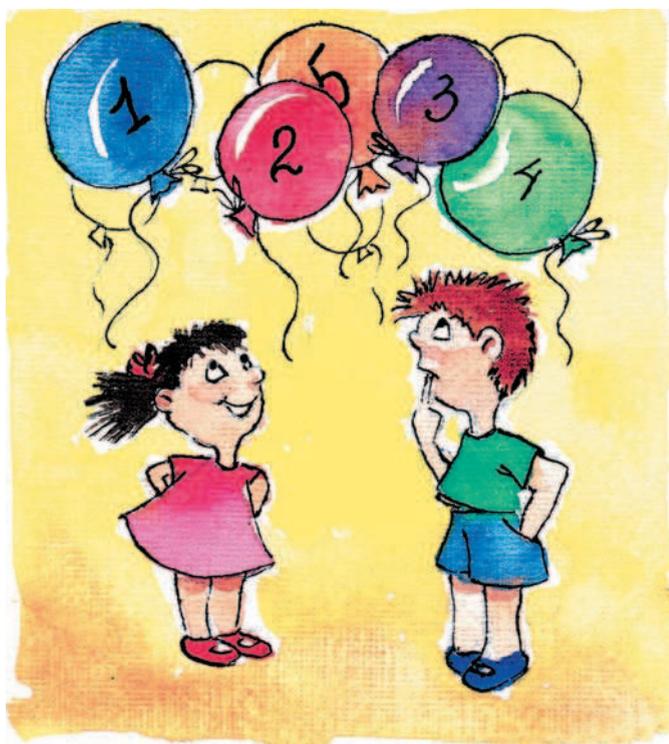
одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры. При этом FOUR делится на 4, а FIVE – на 5. Делится ли NINE на 9?

И.Акулич



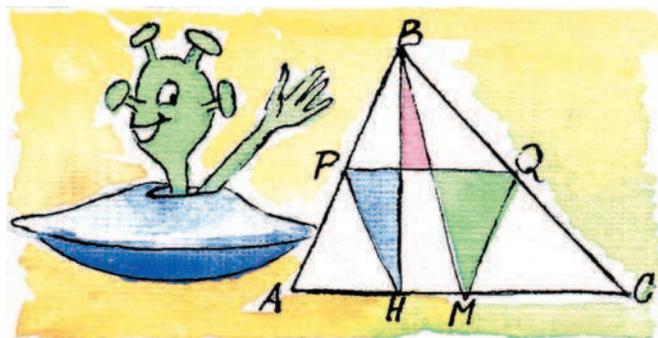
2. Можно ли натуральные числа от 1 до 16 разбить на 8 пар так, чтобы суммы в парах оказались различными простыми числами?

А.Грибалко



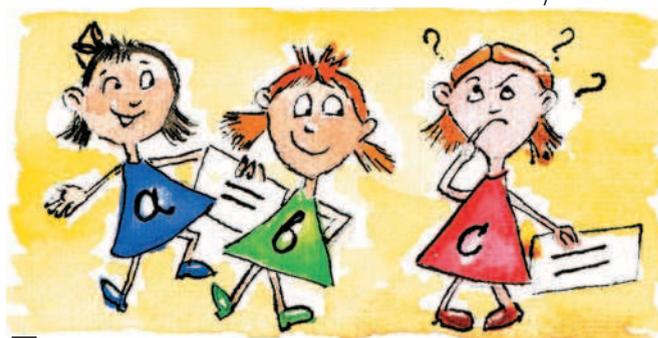
3. В треугольнике ABC проведены высота BH , медиана BM и средняя линия PQ . Докажите, что из красного и синего треугольников можно составить зеленый треугольник.

А.Жуков



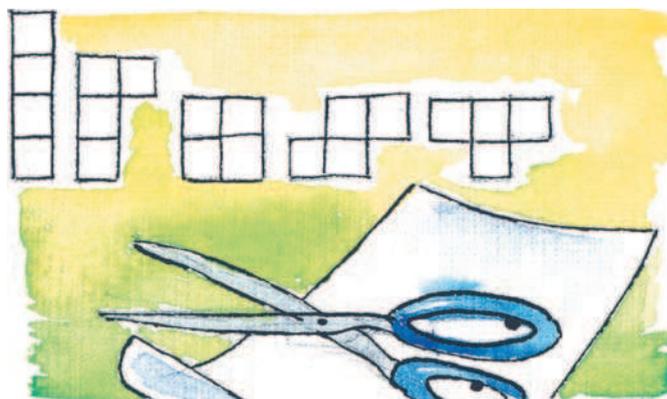
4. Натуральные числа a, b, c таковы, что три числа $a^2 + 2b + 1, b^2 + 2c + 1, c^2 + 2a + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Верно ли, что $a = b = c$?

В.Произволов



5. Существует всего пять различных четырехклеточных фигурок – все они изображены на рисунке. Клетчатую таблицу 4×4 разрезали на четыре четырехклеточные фигурки. Докажите, что среди них найдутся две одинаковые.

А.Грибалко



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Мы представляли себе атомы, частицы, колебания и волны, которых никогда не видит глаз, не слышит ухо и которые можно различить только при помощи воображения.

Джон Тиндаль

В оптике и акустике эти опыты рассматриваются как доказательства волновой природы света и звука...

Генрих Герц

Когда звук распространяется по воздуху, по воде и в твердом теле, то... он рассеивается. Но есть и другая

причина, вследствие которой он слабеет... Он теряет часть своей энергии, и мы говорим в этом случае о «поглощении (абсорбции) звука», о «поглощающих звук веществах»...

Уильям Генри Брэгг

Рассмотрим простейший пример – распространение звука в одномерном пространстве. Для вывода нам сначала необходимо понять, что же в действительности происходит.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам распространение звука?

Немало физиков, занимающихся акустикой, обращали внимание на схожесть некоторых звуковых явлений с оптическими. Верно и обратное: изучение света побуждало искать аналогии с распространением звуковых колебаний. С тем же столкнулись и мы, решив посвятить новый выпуск «Калейдоскопа» волновым процессам, – обнаружили множество точек пересечения акустики и оптики. Пришлось делить тему пополам, и если мы сегодня сосредоточимся на звуке, то в следующий раз обязательно обратимся к электромагнитным волнам, прежде всего – световым.

Отметим сразу, что и тут и там во всем разнообразии волновых явлений в первую очередь нас будут интересовать ситуации, связанные с рассеянием и поглощением. Нельзя сказать, что им уделено достаточно внимания в курсе элементарной физики, в то время как в жизни мы встречаемся с ними повседневно.

Если говорить о звуковых волнах, то они – один из главных источников информации об окружающем нас мире. Разговорная речь, музыка, звуки живой природы, обмен сообщениями по телефону, аудиотехника – мы живем в акустически насыщенной атмосфере. Неизмеримо возросла и плотность вредных звуков – раздражающих, а порой и просто опасных для здоровья шумов.

Как донести одни из них до нас с возможно меньшими потерями и искажениями, а другие (если не удастся избавиться от них) хотя бы ослабить? Как поставить нам на службу неслышимые звуки? В поисках ответов последуем совету Фейнмана и начнем с относительно простых акустических примеров.

Вопросы и задачи

1. Почему закрытые окна гораздо заметнее защищают от дорожных шумов помещения на верхних этажах здания, чем на нижних?
2. Известно, что дерево проводит звук лучше, чем

воздух. Отчего же разговор, происходящий в соседней комнате, заглушается, когда деревянная дверь в эту комнату закрыта?

3. Почему звук получается более громким, если стучать не в стену, а в дверь?

4. Куда девается энергия звуковых колебаний, когда звук «замирает»?

5. Зачем суфлерскую будку обивают войлоком?

6. При выступлении оркестра в большом зале музыка звучит по-разному в зависимости от того, заполнен зал людьми или пуст. Чем это объяснить?

7. Наши предки могли слышать далекий топот копыт, припав ухом к земле. Почему же этот звук не был слышен в воздухе?

8. Отчего в туман гудки, например электричек или теплоходов, слышны на большем расстоянии, чем в ясную погоду?

9. Колеблющийся в руке камертон звучит тихо, а если поставить его ножку на стол, громкость звучания возрастает. Почему?

10. Дольше ли будет звучать «громкий» камертон из предыдущей задачи по сравнению с «тихим»?

11. Как объяснить тот факт, что на большом расстоянии голос может быть и слышен, но слов при этом разобрать нельзя?

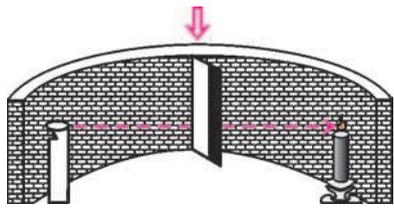
12. Участникам антарктических экспедиций, когда они прорывали туннели в снегу, приходилось кричать, чтобы быть услышанными даже на расстоянии в пять метров. Однако слышимость заметно возрастала, когда стенки туннеля утрамбовывали. С чем это связано?

13. Почему в комнате обычных размеров не бывает эха?

14. Отчего эхо от высокого звука, например крика, обычно громче и отчетливее, чем от низкого?

15. Случайно залетая в окно, летучая мышь иногда садится людям на голову. Почему?

16. В модели изображенной на рисунке «галереи шепотов» звуковые волны от свистка заставляли



мерцать пламя свечи, установленной у противоположной стены. Но мерцание прекращалось, если сбоку от пламени и свистка вблизи стены помещали узкий экран. Как же этот экран преграждал путь звуку?

17. Отчего иногда звуковой «луч» локатора, направленный на подводную лодку с небольшого расстояния, тем не менее не достигает ее?

Микроопыт

Поделитесь сухариками со своим товарищем и начните вместе с ним их грызть. Не кажется ли вам, что вы производите гораздо больше шума, чем находящийся рядом сосед? Почему?

Любопытно, что...

...давно известные в медицине способы диагностики — выстукивание и прослушивание — нашли применение в акустической дефектоскопии, позволяющей по рассеянию и поглощению посланного в исследуемую среду звукового сигнала определить наличие в ней неоднородностей.

...разгадка описанного в задаче 16 эффекта «галереи шепотов» была найдена в 1904 году знаменитым лордом Рэлеем во время его наблюдений и экспериментов в Лондонском соборе святого Павла. Почти через сто лет подобная разновидность волн стала предметом исследования и применения в оптике, например — для частотной стабилизации лазеров или преобразования частоты светового луча.

...инфразвуковые волны очень слабо затухают в атмосфере, океане и земной коре. Так, мощное низкочастотное возмущение, вызванное извержением в 1883 году индонезийского вулкана Кракатау, обошло земной шар дважды.

...с удалением от эпицентра ядерного взрыва ударная волна превращается в акустическую, причем короткие волны затухают быстрее, чем длинные, и на больших расстояниях сохраняются лишь колебания низких частот. Фиксация таких — инфразвуковых — волн была предложена в середине 50-х годов прошлого века академиком И.К.Кикоиным как метод обнаружения ядерных взрывов, который впоследствии успешно применялся для регистрации испытаний, проводимых США в Тихом океане.

...изобретению Беллом телефона предшествовало основательное изучение им акустики и многолетняя работа в бостонской школе для глухонемых, которым предназначались также сконструированные им усилители звука и приборы для обучения понимающей речи.

...особенность свежеснега поглощать в основном высокие частоты была замечена английским

ким физиком Тиндалем, совмещавшим акустические и оптические исследования. А Рэлей, искавший общее во всех колебательных процессах, сумел объяснить повышение тона эха в сосновом лесу лучшим рассеянием и отражением тонкой хвоей коротких звуковых волн, чем длинных, — как при рассеянии света в атмосфере.

...в одном из помещений консерватории в австралийском городе Аделаиде было невозможно слушать игру на рояле — так пронзительно и резко резонировал зал. Из этого положения нашли выход, свесив с потолка несколько полуметровых в ширину полос саржи — хлопчатобумажной ткани с особой отделкой поверхности, позволяющей хорошо поглощать звук.

...звуковые колебания частотой 200—400 герц при достаточно больших уровнях их интенсивности могут очень сильно замаскировать почти все выходящие частоты. Например, мелодии органа и контрабаса отчетливо слышны в оркестре, хотя их относительная громкость не превышает такие высокочастотные инструменты, как скрипка и виолончель.

...если «озвучивать» сиренами трубопроводы для транспортировки сыпучих грузов — муки, угольной пыли, измельченной руды, то их пропускная способность возрастает. Такие устройства используются в портах для выгрузки порошкообразных материалов из трюмов грузовых судов. Единственный их недостаток — пронзительный вой.

...колебания звуковой частоты могут использоваться для сушки разнообразных материалов при сравнительно низких температурах, в том числе за счет местного их нагрева при поглощении акустических волн.

...ультразвук способен «смешать» ртуть или масло с водой, измельчить в порошок твердые вещества при изготовлении лекарств, продолбить квадратное отверстие в металле, резать и сверлить стекло и кварц, соединить «непаяющиеся» материалы и много чего еще удивительного, но вот создать ультразвуковое оружие, увы, нельзя. Особенности распространения и поглощения ультразвука приводят к такому сильному его затуханию, что даже на расстоянии всего в несколько десятков метров он передает энергию, достаточную для работы лишь... лампочки от карманного фонарика.

Что читать в «Кванте» о распространении звука

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Кванта» — 2003, №1, с.32;
2. «Звук в пене» — 2004, №4, с.12;
3. «Речь с позиции физики и математики» — 2006, №6, с.2;
4. «Как океаны говорят друг с другом: подводная акустика» — 2006, Приложение №6, с.123;
5. «Логарифмические шкалы» — 2007, №2, с.6;
6. «Взрыв» — 2007, №6, с.5;
7. «Ударные волны и детонация» — 2008, №1, с.4;
8. «Физика ядерного взрыва» — 2008, №2, с.7.

Материал подготовил А.Леонович

Нет предела совершенству!

И. АКУЛИЧ

ИЗ ГЛУБИНЫ ВЕКОВ ПРИШЛИ К НАМ *СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА*. Это такие натуральные числа, у которых сумма делителей, строго меньших самого числа, равна этому числу. Вот несколько первых совершенных чисел: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328... Конечно ли их множество – доселе неизвестно.

Но, оказывается, совершенными в том или ином смысле могут быть не только числа, но и фигуры. К таковым, с легкой руки древних пифагорейцев, принято относить многоугольники, обладающие следующими двумя свойствами:

- 1) все их стороны – целые числа;
- 2) их площадь численно равна периметру.

Сами пифагорейцы активно занимались поисками совершенных *прямоугольников*, и это им удалось. Поэтому для начала пройдем по их стопам и выявим все совершенные прямоугольники.

Пусть стороны прямоугольника – целые числа a и b , причем, для определенности, $a \leq b$. Тогда площадь прямоугольника равна ab , а периметр равен $2a + 2b$. Отсюда получаем

$$ab = 2a + 2b.$$

Это равенство легко преобразовывается к виду

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Так как 4 раскладывается на произведение двух целых чисел четырьмя различными способами: $4 = (-4) \cdot (-1) = (-2) \cdot (-2) = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, то с учетом неравенства $a \leq b$ получаем четыре возможные пары $(a; b)$, а именно: $(-2; 1)$, $(0; 0)$, $(3; 6)$ и $(4; 4)$. Первые две отбрасываем как бессмысленные, а остальные вполне приемлемы. Итак, существует два совершенных прямоугольника: 4×4 и 3×6 .¹ Площади найденных прямоугольников равны 16 и 18, в силу чего пифагорейцы считали эти числа «хорошими», а расположенное между ними число 17 – «плохим».²

А как обстоят дела с другими многоугольниками? Начнем, естественно, с того, что попроще: с треугольников. В одной из задач конкурса «Математика 6–8» был задан вопрос: «Существуют ли совершенные прямоугольные треугольники? А равнобедренные треугольники?» Что ж, попробуем их найти.

Займемся сначала совершенными прямоугольными

треугольниками. Не составляет труда убедиться, что таковые существуют. Для этого сначала «пощупаем» самый известный прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Его площадь, как видно, равна 6, а периметр – 12, т.е. вдвое больше. Заметим, что если увеличить линейные размеры любого треугольника в k раз, то его периметр тоже увеличится в k раз, а площадь – в k^2 раз. Поэтому, увеличив наш треугольник в $k = 2$ раза, мы тем самым уравниваем площадь и периметр. Итак, треугольник со сторонами 6, 8 и 10 – совершенный.

Это неплохо – по крайней мере, есть что искать (успех гарантирован). Пусть катеты треугольника равны a и b (как и прежде, $a \leq b$). Тогда гипотенуза равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, площадь равна $ab/2$, периметр равен $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$, и получаем

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = ab/2,$$

откуда

$$4(a^2 + b^2) = (ab - 2a - 2b)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем

$$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0.$$

Поделив на ab (что допустимо, так как a и b – натуральные), получаем

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0, \quad \text{или} \quad (a - 4)(b - 4) = 8.$$

Дальнейшее очевидно. Число 8 разбивается на два натуральных сомножителя двумя разными способами: $1 \cdot 8$ и $2 \cdot 4$, и, подобно случаю с прямоугольниками, получаем два осмысленных ответа. Первый треугольник имеет катеты 5 и 12, тогда гипотенуза равна 13, а площадь и периметр равны 30. Второй треугольник с катетами 6 и 8 нам уже известен. Итак, имеется два совершенных прямоугольных треугольника со сторонами $(5, 12, 13)$ и $(6, 8, 10)$.

Перейдем к совершенным равнобедренным треугольникам. Так как равнобедренный треугольник составляется как бы из двух одинаковых прямоугольных треугольников, то, казалось бы, и здесь не должно быть проблем с поиском совершенных треугольников. Но все почему-то оказывается гораздо труднее.

Пусть основание равнобедренного треугольника равно a , а боковая сторона равна c . Тогда высота его равна

$$\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad \text{площадь равна} \quad \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad \text{и получаем}$$

$$a + 2c = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

¹ С некоторой натяжкой, пожалуй, можно отнести к совершенным и решение $(0; 0)$, соответствующее прямоугольнику с нулевыми сторонами и, соответственно, нулевой площадью и периметром.

² Наверное, зря. Число 17 не столь уж плохое. Во всяком случае, Карл Фридрих Гаусс прославил его на века, доказав возможность построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника.

После очевидных преобразований имеем

$$(4a^2 - 64)c^2 - 64ac - (16a^2 + a^4) = 0.$$

Заметим, что если $4a^2 - 64 \leq 0$, т.е. $a \leq 4$, то в левой части – заведомо отрицательное число, что недопустимо. Поэтому $4a^2 - 64 > 0$, т.е. $a \geq 5$. В этом случае c выражается через a следующим образом (здесь перед радикалом оставлен только знак «плюс», так как знак «минус» ведет к заведомо отрицательному значению c):

$$c = \frac{32a + \sqrt{1024a^2 + (4a^2 - 64)(16a^2 + a^4)}}{4a^2 - 64} = \frac{16a + a^3}{2a^2 - 32}.$$

Сразу видно, что a должно быть четным (иначе дробь не будет целым числом), т.е. $a = 2m$ (m – натуральное). Подставив это значение в последнее выражение, после сокращений получаем

$$c = \frac{m^3 + 4m}{m^2 - 4} = m + \frac{8m}{m^2 - 4}.$$

Таким образом, $8m$ делится на $m^2 - 4$. Заметим, что если $m \geq 9$, то $m^2 - 4$ строго больше $8m$, и потому делимость отсутствует (доказать это можно, например, представив разность $(m^2 - 4) - 8m$ в виде $m(m - 9) + (m - 4)$, откуда сразу видно, что эта величина положительна при $m \geq 9$). Ну, а значения m , не превышающие 8, можно проверить прямым перебором (причем поскольку $a \geq 5$, то $m \geq 3$). Проведите такой перебор самостоятельно и убедитесь, что ни одно из указанных значений m не подходит. Итак, совершенных равнобедренных треугольников не существует.

Что ж, прямоугольные и равнобедренные треугольники исследованы. Переходим к произвольным треугольникам со сторонами a , b и c , причем, для определенности, положим $a < b < c$. Здесь мы смело используем строгие неравенства вместо нестрогих, так как только что убедились, что равнобедренных совершенных треугольников не бывает.

Первое, что приходит в голову, – формула Герона, непосредственно выражающая площадь треугольника S через его стороны и полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Приравняв S к периметру $a + b + c$, раскрыв скобки и приведя подобные члены, после упрощений получаем

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 2abc + 16(a+b+c) &= \\ &= a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b). \end{aligned}$$

Это уравнение приятно во всех отношениях, кроме одного: непонятно, что с ним дальше делать. Неясно даже, конечно или бесконечно число его решений. (По крайней мере, два-то решения у него есть, соответствующие прямоугольным треугольникам, а еще? Трудно сказать...) Так что придется отложить произвольные

треугольники до лучших времен. Во всяком случае, обширный поиск таких решений с помощью компьютера позволил, кроме упомянутых выше двух прямоугольных треугольников, найти еще три тупоугольных: (6, 25, 29), (7, 15, 20) и (9, 10, 17). Как видим, стороны их невелики, хотя были «обсчитаны» все треугольники, у которых две стороны не превосходят 10000 (а третья принимает все возможные допустимые значения, при которых треугольник существует). Поэтому наиболее вероятным кажется предположение, что число решений все же конечно.

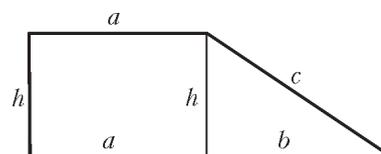
Перейдем к четырехугольникам. Самые простые из них – прямоугольники – исследовали сами пифагорейцы (см. выше). Ну, а параллелограммы? Нетрудно сообразить, что совершенных среди них бесконечно много. В самом деле, возьмем произвольный целочисленный прямоугольник, у которого площадь *строго больше* периметра. Деформируя его (т.е. меняя какой-либо угол), мы можем добиться того, чтобы площадь стала сколь угодно близка к нулю. Ясно, что в процессе непрерывной деформации площадь сравняется с периметром. А можно даже прямо указать, каков должен

быть острый угол параллелограмма: $\arcsin \frac{2(a+b)}{ab}$.

Особого интереса этот ответ, конечно, не вызывает: слишком «гибкая» фигура параллелограмм. По-видимому, для произвольного четырехугольника ситуация похожая. Поэтому имеет смысл исследовать более «жесткие» четырехугольники: например, прямоугольные и равнобедренные трапеции.

Конечно, трапеция – фигура с большим числом «степеней свободы», нежели треугольник. Оно и понятно: прямоугольный либо равнобедренный треугольник полностью определяется двумя сторонами, тогда как для прямоугольной или равнобедренной трапеции этого явно недостаточно – нужен еще один параметр (например, два основания и высота). Поэтому мы уже заранее готовы ожидать, что множество совершенных трапеций содержит намного больше элементов, чем множество совершенных треугольников. Что ж, проверим.

Начнем с прямоугольной трапеции. Надо сказать, что в данном случае такой же «лобовой» подход, как для треугольников, приводит к весьма громоздким выражениям. К счастью, есть лазейка: а почему бы не использовать выведенные задолго до нас формулы для сторон целочисленных прямоугольных треугольников? Ведь прямоугольную трапецию можно рассматривать как прямоугольник, к которому «приклеился» прямоугольный треугольник (см. рисунок). Пусть ширина прямоугольника равна a , высота h , а у «приклеенного»



прямоугольного треугольника один из катетов совпадает со стороной h прямоугольника, второй катет равен b , а гипотенуза равна c . Из «совершенства» трапеции

следует, что все перечисленные значения – целые числа. Вместе с тем, известно, что катеты и гипотенуза любого прямоугольного треугольника с целыми сторонами могут быть представлены в виде $2kmn$, $k(m^2 - n^2)$ и $k(m^2 + n^2)$ при некоторых натуральных k , m , n , причем $m > n$ (вследствие чего $m \geq 2$ – этот факт нам впоследствии пригодится). Следовательно, имеют место две возможности.

1) Пусть $h = 2kmn$, $b = k(m^2 - n^2)$, $c = k(m^2 + n^2)$. Тогда площадь трапеции составляет

$$h \cdot \frac{2a + b}{2} = 2kmn \cdot \frac{2a + k(m^2 - n^2)}{2} = 2kmna + k^2mn(m^2 - n^2),$$

периметр ее равен

$$2a + b + h + c = 2a + k(m^2 - n^2) + 2kmn + k(m^2 + n^2) = 2a + 2km(m + n).$$

И, следовательно,

$$2kmna + k^2mn(m^2 - n^2) = 2a + 2km(m + n).$$

Так как k , m , n – натуральные, причем $m \geq 2$, то первое слагаемое левой части $2kmna$ больше первого слагаемого правой части $2a$. Поэтому для соблюдения «паритета» необходимо, чтобы второе слагаемое левой части было меньше второго слагаемого правой части, т.е.

$$k^2mn(m^2 - n^2) < 2km(m + n),$$

откуда

$$kn(m - n) \leq 1.$$

Значит, $k = n = m - n = 1$, и $m = 2$. Итак, все неизвестные, кроме a , определены. Подставив их в исходное уравнение, получаем

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a + 1^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 2a + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2 + 1),$$

$$\text{и } a = 3, \quad h = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4, \quad b = 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 3,$$

$$c = 1 \cdot (2^2 + 1^2) = 5.$$

Таким образом, найдена первая совершенная прямоугольная трапеция с основаниями 3 и $3 + 3 = 6$ и высотой 4. Легко проверить, что ее площадь и периметр равны 18.

2) Допустим, $h = k(m^2 - n^2)$, $b = 2kmn$, $c = k(m^2 + n^2)$. Тогда площадь трапеции составляет

$$k(m^2 - n^2) \cdot \frac{2a + 2kmn}{2} = k(m^2 - n^2)a + k^2mn(m^2 - n^2),$$

периметр ее равен

$$2a + 2kmn + k(m^2 - n^2) + k(m^2 + n^2) = 2a + 2km(m + n).$$

Имеем

$$k(m^2 - n^2)a + k^2mn(m^2 - n^2) = 2a + 2km(m + n).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю. Так как k , m , n – натуральные, причем $m \geq 2$, то первое слагаемое левой части больше первого слагаемого правой части. Следовательно, второе слагаемое левой части должно быть меньше второго слагаемого правой части, т.е.

$$k^2mn(m^2 - n^2) < 2km(m + n).$$

Да ведь это точно такое же неравенство, что и выше! Поэтому вывод тот же: $k = n = 1$, и $m = 2$. Подставив эти значения в исходное уравнение, получаем

$$1 \cdot (2^2 - 1^2) \cdot a + 1^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 2a + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2 + 1),$$

$$\text{и } a = 6, \quad h = 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 3, \quad b = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4,$$

$$c = 1 \cdot (2^2 + 1^2) = 5.$$

Таким образом, вторая совершенная прямоугольная трапеция имеет основания 6 и $6 + 4 = 10$ и высоту 3. Ее площадь и периметр равны 24.

Не составляет труда, используя аналогичный подход, найти и все совершенные равнобедренные трапеции. Их оказывается тоже две. У одной основания равны 2 и 8, высота 4, а площадь и периметр 20. У второй основания равны 6 и 14, высота 3, а площадь и периметр 30.

Итак, есть две совершенные прямоугольные трапеции и столько же равнобедренных. Прямо скажем, негусто – ожидалось более «богатые» результаты. Что ж, тем ценнее каждый экземпляр!

Как уже отмечалось, исследование произвольных четырехугольников вряд ли даст «симпатичные» результаты – и без того ясно, что их очень много. Поэтому имеет смысл исследовать такой частный их случай, как *вписанные* и *описанные* четырехугольники. Но как это сделать?..

Вот собственно, и все, что на данный момент удалось выяснить о совершенных многоугольниках. Остальное *покрыто неизвестным мраком*, по выражению незабвенного деда Щукаря. Поэтому, как часто бывает в подобных случаях, уповаем на читателей. Помогите! Решите задачу хотя бы для самых «заманчивых» фигур: произвольных треугольников и вписанных (а также описанных) четырехугольников. Ибо душа стремится к совершенству, коему, как известно, нет предела...

Вниманию наших читателей

В Приложении к журналу «Квант» № 2 / 2008 – в книге «Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте» – допущена досадная опечатка. В статье В.И.Ожогина «Кикоин как множество...» в рассказе Кикоина под номером 21 (см. с. 87) вместо слов «математик Коши» должно быть «математик Кобе».

Урок близился к завершению...

М. БОНДАРОВ

ДА, УРОК ПО ТЕМЕ «РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ» действительно близился к завершению, но до звонка оставалось еще несколько минут. Анатолий Иванович с загадочным видом посмотрел на девятиклассников, и все поняли, что сейчас что-то произойдет. И не ошиблись...

«Готовясь к сегодняшнему уроку, — начал учитель, — я вспомнил случай из биографии Ричарда Фейнмана. Когда он учился в школе, то нередко участвовал в соревнованиях по алгебре. Ученикам давались задачи, для решения которых требовалось то, что сегодня назвали бы нестандартным мышлением, и выделялось строго ограниченное время на их решение — обычно 45 секунд. На листе бумаги можно было писать что угодно, но в конце концов каждый участник должен был обвести в кружок одно число на своем листе, которое и было ответом на задачу. Задачи намеренно выбирались так, что решить их «по правилам» за отведенное время было практически невозможно, но они легко решались, если вы видели короткий путь (или изобретали свой собственный). Фейнман всегда побеждал в таких состязаниях, записывая число и нарочито обводя его в кружочек, хотя зачастую на его листе больше ничего и не было».

Анатолий Иванович остановился и обвел глазами притихших учеников. «Сегодня я подобрал для вас интересную задачу и хочу, чтобы вы оказались в положении юного Фейнмана. Правда, на размышление в первый раз дам вам три минуты. Итак, вот условие задачи:

Автомобиль, двигаясь равнозамедленно, за последовательные промежутки времени в 3 с и 2 с прошел отрезки АВ и ВС в 51 м и 24 м соответственно. Какой путь пройдет автомобиль от точки С до остановки?

Время пошло!»

После команды «стоп» на стол учителя легли три листочка — и все с правильным ответом. «Что ж, давайте заслушаем авторов: пусть поделятся своими секретами».

Знаменитый алгебраист Андрей скромно пояснил: «Я записал систему уравнений и, к счастью, успел ее решить».

Геометр Гена сказал, что применил рассмотренный на одном из предыдущих уроков графический способ решения кинематических задач.

А на листочке любителя арифметики и журнала «Квант» Филиппа красовалось только обведенное в кружок число 25. «Юный Ричард второй!» — крикнул кто-то с последней парты, и все засмеялись.

Анатолий Иванович тоже улыбнулся и сказал: «Ну, вот вы и узнали верный ответ к задаче, а это дорогого стоит. Попробуйте дома поразмыслить над задачей и, возможно, придумаете свой способ решения».

И в это время прозвенел звонок. Однако народ требовал объяснений: «Пусть расскажут подробнее, как за три минуты можно успеть!»

Объяснения, действительно, последовали, но мы, как и Анатолий Иванович, советуем вам сначала решить эту задачу самостоятельно.

Рассказ Андрея. Я дважды применил формулу зависимости перемещения от времени при равнозамедленном движении $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ для первых трех и пяти секунд движения:

$$51 = v_0 \cdot 3 - \frac{9a}{2}, \quad 75 = v_0 \cdot 5 - \frac{25a}{2},$$

откуда легко нашел:

$$v_0 = 20 \text{ м/с} \text{ и } a = 2 \text{ м/с}^2.$$

Затем определил весь путь до остановки:

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 100 \text{ м},$$

после чего вычислил искомый путь:

$$s = 100 \text{ м} - 51 \text{ м} - 24 \text{ м} = 25 \text{ м}.$$

Рассказ Гены. Я начертил примерный график зависимости скорости от времени ($v = v_0 - at$). Определив среднюю скорость за первые три секунды: $v_{\text{ср1}} = 51 \text{ м} / 3 \text{ с} = 17 \text{ м/с}$ и за следующие две секунды: $v_{\text{ср2}} = 24 \text{ м} / 2 \text{ с} = 12 \text{ м/с}$, построил на графике средние линии трапеций, соответствующие этим скоростям. Легко видеть, что за 2,5 с скорость уменьшилась на 5 м/с, значит, ускорение равно по модулю 2 м/с². Зная, что через 4 с после начала движения скорость автомобиля была 12 м/с, находим его скорость в точке С — это 10 м/с. Ясно, что после этого автомобиль тормозил до остановки 5 с. Из графика находим площадь треугольника, численно равную искомому пути:

$$s = \frac{10 \text{ м/с} \cdot 5 \text{ с}}{2} = 25 \text{ м}.$$

Рассказ Филиппа. Я сразу понял, что смогу обогнать Андрея и Гену лишь в том случае, если не буду пытаться решать задачу алгебраическими и геометрическими способами, которыми они владеют лучше, а попробую придумать что-нибудь похитрее. Поэтому я решил применить метод угадывания ответа (о котором читал в одном из номеров «Кванта»). Вспомнилось мне также, что еще в 7 классе Анатолий Иванович рассказывал о методе обратимости времени.

Итак, мысленно пустим время вспять, и будем рассматривать автомобиль, который в этом случае разгоняется, трогаясь с места. Тогда пройденный от начала движения путь определяется по формуле $s = at^2/2$. Мы не знаем, чему равно ускорение автомобиля, но предположим, что оно составляет 2 м/с² (ведь, как правило, в обычных задачах оно не превышает 5 м/с²). К тому же, сокращается «двойка» в формуле для пути, и пройденный путь оказывается не просто пропорционален квадрату времени движения, а численно равен ему. Если теперь предположить, что на искомом пути автомобиль двигался целое число секунд, то этот путь тоже равен не просто целому числу метров, а квадрату некоторого целого числа. Причем квадратами будут и все другие пути, пройденные автомобилем от начала движения за целое число секунд. Придется заняться перебором.

Пусть искомый путь равен 1 метру. Тогда $1 + 24 = 25$ — квадрат, но $1 + 24 + 51 = 76$ — уже не квадрат, значит, ответ «1 метр» — не подходит. Дальше я попробовал следующий квадрат — 4 метра. Но $4 + 24 = 28$ — не квадрат, значит, снова не угадал. Не подходят и 9, и 16 метров. Пробую 25, и тут, наконец, победа — вокруг одного квадраты: $25 + 24 = 49$, $25 + 24 + 51 = 100$. Ответ найден!

А какой из способов решения пришелся по душе вам?

Ракета на водяном паре, или Как Студент с Луны улетал

А. СТАСЕНКО

КАК-ТО РАЗ, ПИЯ КОФЕ И НАБЛЮДАЯ ЗА СТРУЙКОЙ ПАРА из чайника, Студент вдруг подумал: что если бы пришлось срочно взлетать с поверхности Луны, а топлива для ракеты уже нет, но остались еще тонна воды и некоторый запас энергии в аккумуляторах? Конечно, согласно закону сохранения импульса, разумно нагреть и испарить воду и ускорить полученный водяной пар до максимально возможной скорости. Но до какой?

И тут начались физические оценки.

Пусть пар воды нагрет до температуры T_0 . Молекула воды – трехмерный объект; следовательно, она обладает шестью степенями свободы. Это означает, что положение в пространстве ее центра масс можно описать тремя числами, например значениями декартовых координат x , y , z , а ее ориентацию – тремя углами относительно этих осей. Но, как известно, в условиях термодинамического равновесия на каждую степень свободы любого тела (и молекулы, и паровоза) приходится энергия $kT_0/2$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Это утверждение называется в молекулярной физике и термодинамике теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Итак, на одну молекулу воды будет приходиться энергия $6 \cdot (kT_0/2) = 3kT_0$, а на целый моль, в котором содержится N_A молекул, – энергия $U = N_A \cdot 3kT_0 = 3RT_0$, где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро, а $R = N_A k = 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная.

Предположим далее, что этот моль водяного пара можно как-то – конечно, через сопло ракеты – расширить так, что он охладится почти до абсолютного нуля. Ведь для того и нужно сопло, чтобы тепловую хаотическую энергию молекул превратить в направленное движение молекул, т.е. в кинетическую энергию. Более того, надо учесть еще и работу, которую может совершить расширяющийся газ. Если начальный объем моля равен V_0 , то этот «запас работы» равен $p_0 V_0 = RT_0$, где p_0 – давление газа.

Термодинамика доказывает, что в процессе ускорения газа в сопле все время будет сохраняться сумма

$$H_0 = U_0 + p_0 V_0 = 3RT_0 + RT_0 = 4RT_0.$$

Она даже имеет специальное название – энтальпия, или теплосодержание. Но по мере ускорения эта начальная энтальпия будет распределяться между растущей кинетической энергией и убывающим теплосодержанием:

$$H_0 = H + M \frac{v^2}{2} = 4RT + M \frac{v^2}{2}, \quad (*)$$

где M – молярная масса (в случае воды $M = 0,018$ кг/моль). Таким образом, можно было бы ожидать, что при стремлении температуры газа к нулю его скорость должна стремиться к максимальному значению

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{2H_0}{M}} = \sqrt{\frac{8RT_0}{M}}.$$

Если конструктивные ограничения позволяют нагреть пар, например, до температуры $T_0 = 1000$ К, то значение этой скорости составило бы

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 10^3}{0,018}} \text{ м/с} \approx 2000 \text{ м/с}.$$

Это неплохо. Но почему же «бы»? А потому, что по мере расширения и охлаждения пар может оказаться пересыщенным и начнется его конденсация. Значит, нужно учесть и этот процесс.

Однако прежде всего посмотрим, как изменяется давление пара с температурой до точки насыщения (росы). Если тепло нигде не подводится к расширяющемуся пару и нигде не отводится (т.е. стенки сопла теплоизолированы), то работа газа по его ускорению может производиться только за счет убыли его внутренней энергии. (Рассмотренный процесс называется адиабатическим.) Так и запишем:

$$p \Delta V = -\Delta U.$$

Подставим сюда зависимость внутренней энергии от температуры $U = 3RT$ и учтем уравнение состояния $p = \frac{RT}{V}$. Получим

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \frac{\Delta T}{T}.$$

Но это значит, что относительное приращение объема в три раза больше относительной убыли температуры. Следовательно, полученное равенство есть дифференциальный аналог соотношения

$$V \sim T^{-3},$$

или (если опять учесть уравнение состояния)

$$p \sim T^4.$$

В координатах p , T – это парабола четвертой степени (адиабата на рисунке 1). А вот температурная зависимость давления насыщенного пара (кривая насыщения на рисунке 1) – гораздо более резкая. В этом можно убедиться, скажем,

при помощи таблиц или построив кривую $p_n(T) \sim e^{-\frac{r}{RT/M}}$,

приближенно описывающую эту зависимость, где r – удельная теплота испарения (для воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг). А это означает, что кривая $p_a \sim T^4$ с уменьшением температуры, начиная с $T = T_0$, может пересечь кривую насыщения $p_n(T)$ при некоторой температуре T_p , называемой точкой росы.

Далее возможны два сценария. Согласно первому из них (1), пар проскочит далее по адиабате

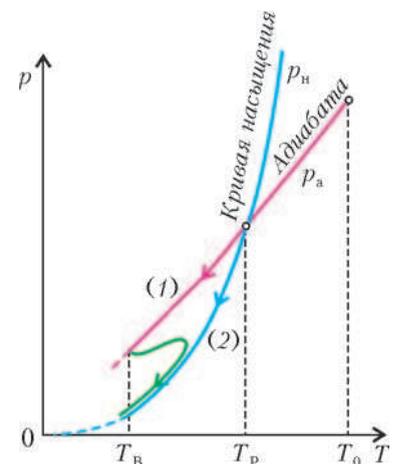


Рис. 1

те, так что его давление будет все больше и больше отличаться от давления насыщения. Но при каком-то значении пересыщения $p_B/p_n > 1$ и температуре T_B ситуация станет невыносимой: произойдет бурная спонтанная (самопроизвольная) конденсация, т.е. образуется множество капель (туман), будет выброшена в несущий газ теплота конденсации, поток подогреется и вернется к кривой $p_n(T)$. Эта температура T_B называется точкой Вильсона (вспомним о его «туманной камере», сыгравшей важную роль в исследовании ядерных процессов).

Итак, часть пара превратится в жидкие капельки, которые уже не будут участвовать в создании давления на стенки сопла; более того, расширяющемуся пару придется ускорять эту пассивную массу. Явные потери тяги двигателя!

Но возможен и другой сценарий (2). Если как-то заставить пар идти вдоль термодинамически равновесной кривой $p_n(T)$, то «лишняя» теплота конденсации будет выделяться непрерывно, способствуя дальнейшему ускорению, так что в конце концов, при $T \rightarrow 0$, в кинетическую энергию перейдет и энергия фазового превращения. Поэтому, добавив в правую часть уравнения (*) молярную теплоту конденсации Mr , получим следующую оценку для максимальной скорости:

$$v_{\max}^{(2)} = \sqrt{\frac{8RT_0}{M} + 2r} \approx 2900 \text{ м/с}.$$

Выходит, равновесная конденсация могла бы помочь получить дополнительный импульс тяги!

На рисунке 2 качественно изображено изменение темпера-

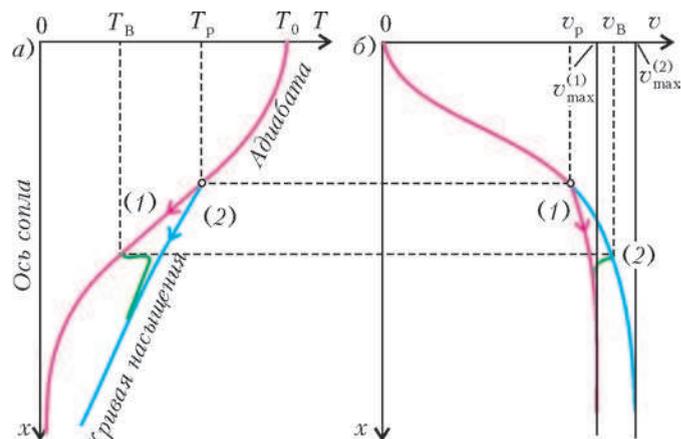


Рис. 2

туры и скорости вдоль оси сопла x , которая для наглядности направлена вниз (ведь ракета стоит вертикально).

Но как заставить пар идти по второму сценарию? Для этого можно бы «подсыпать» дополнительные (гетерогенные) ядра конденсации – например, микрочастицы или ионы (все это и так много в реальной воде), на которых пар мог бы «оседать», не дожидаясь большого пересыщения. А еще можно учесть...

Однако, – заметил Студент, – кофе-то остыл. Придется снова повышать его энтальпию!

Можно ли в микроскоп молекулу разглядеть?

А. СТАСЕНКО

А ПОЧЕМУ ВООБЩЕ ЧТО-ТО МОЖНО РАЗГЛЯДЫВАТЬ В микроскоп? Вспомним, прежде всего, как строится изображение рассматриваемого предмета в рамках геометрической оптики. Простейшая схема микроскопа имеет две собирающие линзы. Та, что повернута к объекту, называется объективом. Пусть этот объект расположен вблизи фокуса объектива $F_{об}$ на расстоянии, чуть большем фокусного расстояния (рис. 1, а). По правилам построения изображения в линзе проведем из точки A объекта два луча – один через фокус, другой – через центр объектива. Первый луч, согласно определению фокуса, после преломления в линзе должен пойти параллельно оптической оси, а второй вообще не изменит направления. С другой стороны объектива они пересекутся в точке A' , которая и является действительным изображением точки A . Точно так же построим изображение точки B и вообще всех точек объекта, лежащего на предметном столике. И чем ближе предмет будет расположен к

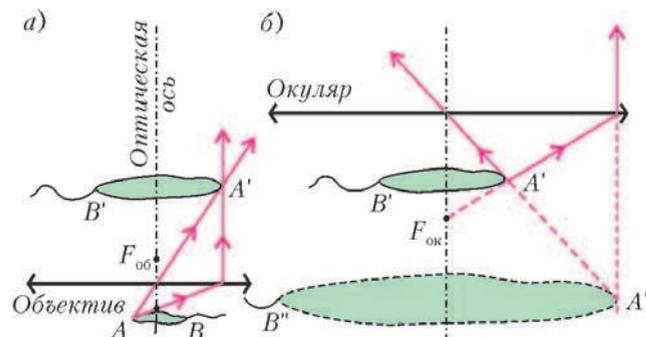


Рис. 1

фокусу объектива, тем бóльшим получится его действительное перевернутое изображение $A'B'$.

Теперь используем вторую линзу – окуляр, расположив его так, чтобы его фокус $F_{ок}$ был вблизи первого изображения $A'B'$, но со стороны объектива (рис. 1, б). Изображение A'' точки A' тоже построим при помощи двух лучей. Однако теперь это будет мнимое изображение, находящееся на пересечении продолжений этих лучей с той же стороны окуляра, что и $A'B'$.

Итак, мы получили окончательное увеличенное мнимое перевернутое (обратное) изображение $A''B''$ рассматриваемого объекта AB . Уменьшая расстояние между AB и точкой $F_{об}$ (фокусом объектива) и между $A'B'$ и $F_{ок}$ (фокусом окуляра), можно убедиться в возможности неограниченного увеличения микроскопа. Но это только в рамках геометрической оптики!

Микроскописты XIX века ужасно обиделись, когда им объяснили, что существует предел разрешающей способности их приборов (т.е. возможности различить две точки A и B как отдельные) и что этот предел связан с длиной волны света. Соответствующие оценки сделал в 1872 году немецкий

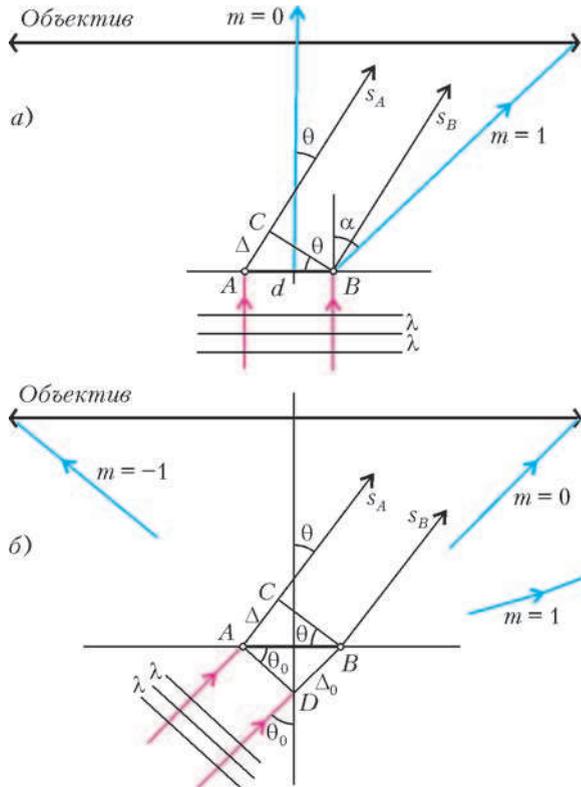


Рис. 2

физик-оптик Аббе, который сам изготовлял эти приборы и довел их до совершенства. Проследим ход его мыслей.

Пусть на «предмет» AB снизу падает плоская волна, одновременно достигающая точек A и B (рис.2,а). Согласно принципу Гюйгенса, они обе становятся источниками вторичных сферических волн. Посмотрим, как эти волны распространяются вдоль некоторого направления, образующего угол θ с оптической осью. Построим отрезок BC , перпендикулярный этому направлению и касательный к сферическим поверхностям волн, выходящих из A и B . Но вышли-то они не одновременно: чтобы достичь точки C , волна из точки A должна выйти раньше. Соответствующий отрезок времени равен $t' = AC/c$, где c – скорость волны. Следовательно, если возмущение, идущее из точки B , записать в виде

$$s_B = \sin \omega t,$$

то возмущение от точки A запишется в виде

$$s_A = \sin \omega(t + t') = \sin \omega\left(t + \frac{\Delta}{c}\right) = \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

Здесь $AC = \Delta$ – разность хода волн, $\lambda = cT$ – длина волны, или расстояние, проходимое волной за период $T = 2\pi/\omega$. Из треугольника ABC легко найти эту разность хода:

$$\Delta = AB \cdot \sin \theta = d \sin \theta.$$

Понятно, что эта разность хода будет сохраняться и при дальнейшем распространении волн s_A и s_B . И где-то далеко-далеко фронты эти волн станут плоскими, а суммарное возмущение станет равным

$$s_{\Sigma} = \sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

А что значит далеко? Ведь если мы собираемся рассмотреть отрезок $AB = d$ как отрезок (т.е. различить точки A и B) порядка микрометра и меньше, то даже один миллиметр (порядок фокусного расстояния объектива) – это уже очень далеко ($F_{об}/d \gg 1$).

Итак, найдем сумму двух волн:

$$s_{\Sigma} = \sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right) = 2 \cos \left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) \sin \left(\omega t + \frac{\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

Множитель перед синусом определяет амплитуду суммарного колебания – результат интерференции двух волн на бесконечности (или в параллельных лучах). Видно, что квадрат амплитуды, т.е. интенсивность, максимален при условии

$$\frac{\pi\Delta}{\lambda} = m\pi, \text{ где } m \text{ – целое число,}$$

или при условии

$$\Delta = m\lambda = d \sin \theta_{\max}^{(m)}.$$

Таким образом, определены направления, в которых две волны усиливают друг друга, или имеет место положительная интерференция. И вот тут можно пояснить гениально простую мысль Аббе: для того чтобы информация о расстоянии d между точками A и B была воспринята наблюдателем, нужно, чтобы, по крайней мере, первый максимум ($m = 1$) интерференционной картины попал в объектив микроскопа. Вот это условие:

$$\theta_{\max}^{(1)} \leq \alpha,$$

где α – угол, под которым виден радиус объектива микроскопа из центральной точки предметного столика (см. рис. 2,а). Положив в предыдущем выражении порядок интерференции $m = 1$, получим искомое наименьшее расстояние между двумя точками, различимыми как отдельные точки:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha}.$$

Отсюда видно, что желательно уменьшать λ и увеличивать α . Но наименьшая длина волны видимого (фиолетового) света $\lambda \sim 0,4 \text{ мкм}$, а синус нельзя сделать больше единицы – вот почему объект располагают как можно ближе к объективу, а фокусное расстояние последнего берут как можно меньшим.

Но, пойдем дальше. Почему непременно нужно освещать наши «точки» вдоль оптической оси? Попробуем направить свет под углом θ_0 к ней (рис.2,б). Тогда разность хода волн s_A и s_B составит

$$\Delta - \Delta_0 = AC - DB = d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda.$$

Видно, что максимум нулевого порядка ($m = 0$) пойдет в направлении θ_0 . Потребуем теперь, чтобы он попал на правый край объектива ($\theta_0 = \alpha$), а максимум минус первого порядка ($m = -1$) – на левый край ($\theta_{-1} = -\alpha$). В результате получим

$$d(\sin(-\alpha) - \sin \alpha) = -1 \cdot \lambda,$$

откуда

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

Видно, что удалось вдвое уменьшить предельно разрешимое расстояние между двумя точками.

И это ее не все. Поместим между объективом и предметным столиком жидкость с коэффициентом преломления n . Скорость света в ней в n раз меньше, чем в вакууме (или, что почти одно и то же, в воздухе); значит, длина волны тоже уменьшится в n раз. В таком случае

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha},$$

где λ – длина волны в воздухе. Это – так называемая

иммерсионная техника (от латинского *immersio* – погружение).

Но коэффициенты преломления жидкостей не намного превышают единицу: например, для бензола $n \approx 1,5$, для бромформа $n \approx 1,6$. Так что правы те, кто говорят, что микроскоп не может разрешить расстояния, существенно меньшие половины длины волны.

А вот тут начинается то, чего не знал сам Аббе. В 1924 году французский физик Луи де Бройль развил идею о том, что материальной частице с импульсом mv можно сопоставить волну с длиной

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

где $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Например, если ускорить электрон в электрическом поле с разностью потенциалов U , то он приобретет скорость

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}},$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – его масса. Значит, длина волны электрона, согласно де Бройлю, будет равна

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e U e}}.$$

Так, при разности потенциалов $U = 1$ В (характерной для обычной батарейки) получим

$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} \approx 10^{-9} \text{ м} = 1 \text{ нм}.$$

При этом, согласно теории Аббе, становится возможным рассматривать объекты молекулярных размеров! Это уже не микроскоп, а, можно сказать, наноскоп. Правда, он называется по-прежнему микроскопом, только *электронным*.

Обратим еще внимание на то, что в знаменателе выражения для длины волны де Бройля стоит масса частицы. А что если взять не электроны, а ионы каких-то элементов или даже молекулярные ионы? Поскольку они на много порядков массивнее электрона, их дебройлевская длина волны может быть значительно уменьшена. Вместе с нею уменьшится и различимое расстояние между двумя точками A и B . Так получился *ионный* микроскоп.

Завершим наш рассказ словами из книги английского физика Г.Липсона «Великие эксперименты в физике» (М.: Мир, 1972): «Можно сказать, что оптическая промышленность обязана теории больше, чем любая другая отрасль. Здесь теория выступала не только как обобщение практики, но и как путеводная нить».

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

О двух велосипедистах и вишневой косточке

В.ПРОТАСОВ

Год спустя я снова охотился в том же лесу. Конечно, к тому времени я совсем позабыл об истории с вишневой косточкой. Каково же было мое изумление, когда из чащи леса прямо на меня выпрыгнул великолепный олень, у которого между рогами росло высокое, развесистое вишневое дерево!

Э.Распэ. Приключения барона Мюнхгаузена

И все это выросло из задачи 1, совсем простенькой и неинтересной, которую мы вначале и решать-то не хотели.

Последняя фраза этой статьи

МЫ НЕ СЛУЧАЙНО ВЫНЕСЛИ В ЭПИГРАФ ФРАЗУ ИЗ ИСТОРИИ «Необыкновенный олень» о приключениях барона Мюнхгаузена. Как известно, однажды на охоте барон выстрелил в оленя вишневой косточкой, и через некоторое время на голове оленя выросло роскошное вишневое дерево.

Мы попробуем проследить, каким образом из косточки вырастает дерево. А именно, как из простой одноходовой задачки получается целая серия красивых геометрических теорем. В качестве вишневой косточки возьмем такую задачу:

Задача 1. *В трапеции ABCD боковая сторона BC перпендикулярна основаниям. Тогда середина стороны AD равноудалена от вершин B и C.¹*

«Ну и что же тут решать?» – спросите вы. И будете правы. Задача – совершенно элементарная. Может, следует заняться более интересными вещами? Обязательно, но сначала все-таки приведем решение.

Решение. Обозначим середины сторон AD и BC через K и L соответственно (рис.1). Поскольку KL – средняя линия трапеции, она параллельна основаниям, следовательно она перпендикулярна BC .

Таким образом, KL – серединный перпендикуляр к стороне BC , поэтому $KB = KC$.

Удивительно, что эта «косточка», которая является даже не задачей, а скорее школьным упражнением, дает нача-

ло множеству замечательных геометрических фактов. Среди них есть и сложные задачи, опубликованные в различных сборниках, и одна из «теорем о бабочке», и две задачи, предлагавшиеся в разные годы на Международной математической олимпиаде. В качестве первого шага мы докажем следующее утверждение, уже более интересное и трудное:

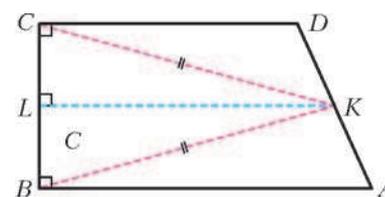


Рис. 1

¹ Задачи и упражнения мы будем формулировать в виде утверждений, слова «Докажите, что ...», как правило, будем опускать.

Задача 2. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B . Тогда на плоскости найдется точка K с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2 , то K будет равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2 .

Решение. Центры данных окружностей (обозначим их через O_1 и O_2) вместе с серединами отрезков AP_1 и AP_2 являются вершинами прямоугольной трапеции. Применив к ней результат задачи 1, получим, что середина отрезка O_1O_2 и есть искомая точка K .

Простота решения во многом, конечно, кажущаяся. Задача из серии «решается легко, если знать как». Все-таки нужно сначала установить положение точки K , затем увидеть на чертеже прямоугольную трапецию... Для нас же важно то обстоятельство, что в решении не использовано ничего, кроме результата задачи 1. Математики в таких случаях говорят, что задача 2 есть прямое следствие задачи 1. Сделаем второй шаг и перейдем к еще одному прямому следствию:

Задача 3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B . Тогда на плоскости найдется точка с таким свойством: если провести через точку A произвольную

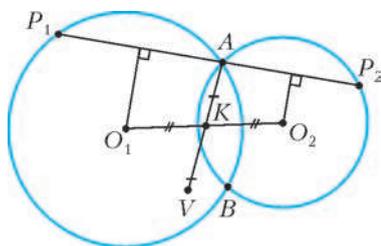


Рис. 2

прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2 , то эта точка будет равноудалена от P_1 и P_2 .

Решение. Из задачи 2 мы знаем, что точка K , середина отрезка O_1O_2 , равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2 . Растянем плоскость в два раза относительно точки A

(т.е. проведем гомотегию с коэффициентом 2 с центром A). При этом середины данных хорд перейдут в точки P_1 и P_2 , а точка K – в точку V такую, что отрезок AV будет иметь середину в точке K (рис.2). Получаем, что V равноудалена от точек P_1 и P_2 .

Здесь пора сделать остановку и задуматься. Несмотря на короткое решение, задача 3 справедливо считается трудной. В разных видах она появлялась и в известных сборниках, и на олимпиадах высокого уровня. А ведь по сути в ней нет ничего, кроме элементарного свойства прямоугольной трапеции, установленного в задаче 1. Как же так получилось, что одно простое действие (гомотетия относительно точки A) превращает сложную и красивую теорему в тривиальную задачу про трапецию? Обратимся еще раз к решению. Мы провели произвольную прямую P_1P_2 и выделили прямоугольную трапецию с вершинами в центрах окружностей O_1 , O_2 и серединах отрезков AP_1 , AP_2 . Осталось воспользоваться задачей 1, а потом сделать гомотегию с коэффициентом 2. Для каждой прямой P_1P_2 возникает, таким образом, своя трапеция. И к каждой из них применимо одно и то же рассуждение, т.е. мы одним шагом применили результат задачи 1 сразу к бесконечному множеству прямоугольных трапеций. Можно сказать, что задача 3 – это та же задача 1, только повторенная бесконечно много раз.

Такое «тиражирование» математического рассуждения встречается постоянно, причем мы сами, решая задачи, этого не замечаем. Великий французский ученый Анри Пуанкаре (1854–1912) писал об этом феномене как об основной движущей силе математики на ее пути от простого к сложному, спасающей математику от бесконечных тавтологий. Эта сила

состоит в «охвате бесконечности одной формулой», как говорил Пуанкаре в своей книге «О науке»: «Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постигнуть бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды».

Небольшая вариация задачи 3 приводит нас к еще одной сложной задаче, предлагавшейся в 1979 году на XXI Международной математической олимпиаде в Лондоне:

Задача 4 (о двух велосипедистах).² Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B . Два велосипедиста едут по этим окружностям (каждый – по своей) с постоянными скоростями и в одном направлении (либо оба по часовой стрелке, либо оба – против). Они одновременно выезжают из точки B , делают один оборот и одновременно возвращаются в B . Тогда найдется неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.

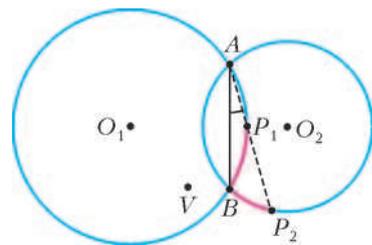


Рис. 3

Решение. Уверен, что вы уже все поняли. Эта точка и есть та самая точка V из задачи 3. В самом деле, если обозначить

этих велосипедистов через P_1 и P_2 , то в любой момент времени прямая P_1P_2 проходит через точку A (рис.3). Почему? Велосипедисты едут с одинаковыми угловыми скоростями, поэтому дуги BP_1 и BP_2 имеют одинаковую угловую меру. Значит, углы $\angle BAP_1$ и $\angle BAP_2$ равны, поскольку они опираются на эти дуги. А это значит, что точки P_1 , P_2 и A лежат на одной прямой. Следовательно, $VP_1 = VP_2$ (задача 3).

Итак, в задачах 3 и 4 фигурирует одна и та же точка V . В ней сходятся все серединные перпендикуляры к отрезкам P_1P_2 , соединяющим точки пересечения данных окружностей с прямыми, проходящими через A (задача 3). Она же всегда равноудалена от двух велосипедистов, одновременно выезжающих из точки B и двигающихся с одинаковыми угловыми скоростями. Уже этих двух свойств достаточно для того, чтобы точка имела свое название. Будем называть V *точкой двух велосипедистов*, соответствующей точке B . У любой пары пересекающихся окружностей таких замечательных точек две: одна соответствует точке A , другая – B . Эти точки симметричны относительно линии центров окружностей, а расстояние между ними равно длине общей хорды AB . Из решения задачи 3 легко установить их местоположение. Так, точка двух велосипедистов V , соответствующая точке B , является четвертой вершиной параллелограмма O_1AO_2V . Она же – четвертая вершина равнобедренной трапеции O_1O_2BV с основаниями O_1O_2 и BV .

У точек двух велосипедистов множество интересных свойств. Часть из них упомянута в упражнениях ниже. Решать их (равно как и остальные упражнения в этой статье) необязательно, в наших дальнейших исследованиях они не используются. Мы, однако, рекомендуем решить упражнения 1 и 2, поскольку они нам понадобятся.

Упражнения

1. Через точку пересечения двух окружностей проводятся две прямые, которые вторично пересекают окружности, первая – в точках P_1 , P_2 , вторая – в точках Q_1 , Q_2 . Тогда точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам P_1P_2 и

² Для удобства мы немного изменяем формулировки олимпиадных задач, полностью сохраняя при этом их смысл.

O_1O_2 является точкой двух велосипедистов для данных окружностей.

2. Если окружности пересекаются в точках A и B , V – их точка двух велосипедистов, соответствующая B , то угол ABV – прямой.

3. В условиях задачи 4 обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей. Докажите равенство треугольников VO_1P_1 и P_2O_2V по двум сторонам и углу между ними. Пользуясь этим, получите другое решение задачи 4.

4 (Н.Б.Васильев).³ Докажите утверждение задачи 4 для двух велосипедистов, двигающихся по окружностям в разных направлениях.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B , V – точка двух велосипедистов, соответствующая B . Если через точки B и V провести произвольную окружность, то точки ее повторного

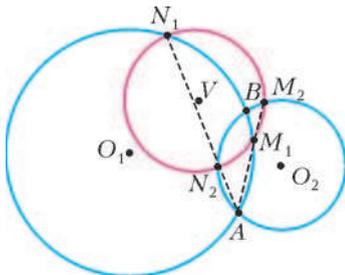


Рис. 4

пересечения с данными окружностями будут равноудалены от V .

6. Две окружности с радиусами r_1, r_2 пересекаются в точках A и B . Пусть V – точка двух велосипедистов, соответствующая точке B . Тогда для любой окружности с центром V , пересекающей обе окружности (первую – в точках M_1, N_1 , вторую – в точках M_2, N_2 , имеем (рис.4)

- а) прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в точке A ;
- б) четырехугольники VBM_1N_2 и VN_1M_2B – вписанные;
- в) $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Задача 4 о двух велосипедистах доставила немало удовольствия и участникам XXI Международной олимпиады, и членам жюри. Была она предложена нашей страной и дана в первый день олимпиады под номером три, что означает – самая сложная. Школьники нашли множество способов для ее решения – от чисто геометрических, до вычислительных и даже физических.

Прошло шесть лет, и на XXVI Международной олимпиаде в 1985 году от нашей страны тем же автором была представлена еще одна геометрическая задача, которая (о ужас!) оказалась на ту же самую идею. Правда, тогда даже автор задачи этого не заметил. Было опубликовано два авторских решения, основанных на разных приемах. Потом было найдено еще несколько геометрических решений. Ни одно из них и близко не упоминало точку двух велосипедистов.

Задача 5. Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O , проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ACB имеют ровно две общие точки A и M . Тогда угол OMA прямой.

На первый взгляд, ничего общего с задачами 4 или 3. Никаких движущихся точек, никаких произвольных прямых. Есть только жестко фиксированная конструкция, для которой надо доказать, что один из углов прямой. И тем не менее, смотрите.

Решение. Пусть O – центр окружности $CPQB$ (рис.5). Точка O лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам CP и BQ , поэтому она является точкой двух

велосипедистов для окружностей APQ и ACB . Следовательно, OO_2O_1M – равнобедренная трапеция (O_1, O_2 – центры окружностей APQ и ACB соответственно). В частности, прямая OM параллельна прямой O_1O_2 . Но прямая O_1O_2 перпендикулярна AM (линия центров двух окружностей перпендикулярна их общей хорде). Значит, и прямая OM перпендикулярна AM .

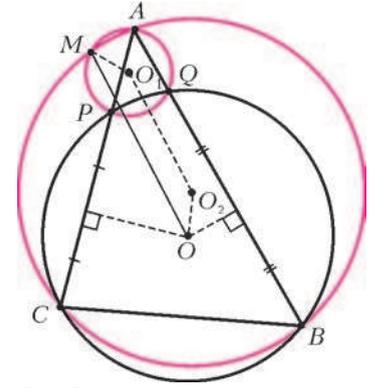


Рис. 5

Внимательный читатель наверняка заметил, что эта задача является прямым следствием упражнений 1 и 2.

Упражнение 7. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K , а продолжения сторон AD и BC – в точке L . Тогда описанные окружности треугольников BKC, AKD, ALB и DLC пересекаются в одной точке, лежащей на прямой KL . Более того, перпендикуляр, восстановленный в этой точке к прямой KL , проходит через центр окружности $ABCD$.

А вот еще одна задача, в решении которой точка двух велосипедистов возникает самым неожиданным образом:

Задача 6 (о бабочке). Через точку A , не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна – в точках P_1, P_2 , другая – в точках Q_1, Q_2 . Произвольная прямая, проходящая через A , пересекает окружность в точках M_1, M_2 , а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 – в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $M_1N_1 = M_2N_2$.

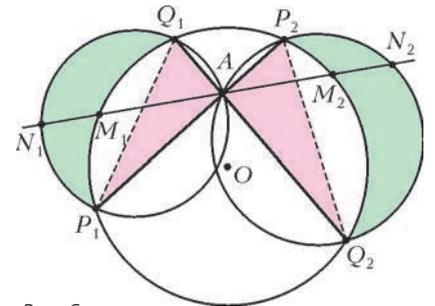


Рис. 6

Задача эта принадлежит к замечательному семейству «теорем о бабочке», о котором речь пойдет ниже. На рисунке 6 показана эта «бабочка» с треугольными крыльями AP_1Q_1 и AP_2Q_2 , окаймленными закрашенными луночками. Любая прямая, проходящая через A и пересекающая эти луночки, пересекает их по равным отрезкам. Интересный факт, не правда ли? А доказывается он с помощью все той же задачи 3.

Решение. Пусть O – центр данной окружности. Он лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам P_1P_2 и Q_1Q_2 , поэтому он является точкой двух велосипедистов для окружностей AP_1Q_1 и AP_2Q_2 . Значит, какую бы прямую ни провести через A , точка O будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку N_1N_2 . Но, с другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к хорде M_1M_2 . Следовательно, отрезки N_1N_2 и M_1M_2 имеют общую середину, что и означает равенство $M_1N_1 = M_2N_2$.

Упражнение 8 (Г.В.Дорофеев). Получите другое решение задачи 6, основанное на следующем построении. Проведем прямую N_1Q_1 и обозначим через S точку ее повторного пересечения с исходной окружностью. Тогда: а) прямые SP_2 и M_1M_2 параллельны; б) треугольники M_1SN_1 и $M_2P_2N_2$ равны.

³ В тех случаях, когда нам известно имя автора задачи, мы будем его указывать.

Цикл задач под общим названием «теоремы о бабочке» имеет давнюю и богатую историю. И хотя это выходит за рамки нашей темы, сделаем небольшое отступление. Сначала появилась классическая теорема о бабочке. Вот она:

Теорема о бабочке. На окружности дана хорда AB . Через ее середину проведены произвольные хорды PQ и RS . Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L . Тогда $AK = BL$.

Упражнение 9. Докажите эту теорему.

Эта задача была опубликована в 1815 году в английском журнале «Gentleman's Diary». Ее авторство приписывают английскому математику Уильяму Джорджу Горнеру (1786–1837), чье имя ныне известно каждому старшекласснику благодаря «схеме Горнера» для деления многочленов. С тех пор теорема о бабочке стала очень известной и популярной. За прошедшие почти два века найдено множество ее доказательств, как чисто геометрических, так и вычислительных. С некоторыми из них можно ознакомиться в задачниках И.Ф.Шарыгина, задачника В.В.Прасолова, в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», в знаменитой книге «Новые встречи с геометрией» Г.С.М.Кокстера и С.Л.Грейтцера. Не так давно о ней писал и «Квант» (статья «Геометрические шедевры И.Ф.Шарыгина», «Квант» № 1 за 2006 г.). Появилось много обобщений этой теоремы и много близких по духу задач, которые объединились в цикл под общим названием «теоремы о бабочке». Одно из самых интересных обобщений придумал замечательный геометр Игорь Федорович Шарыгин (1937–2004). Ему, кстати, принадлежит и задача 5, а задача 4 придумана им в соавторстве с другим замечательным математиком и многолетним автором журнала «Квант» Николаем Борисовичем Васильевым (1940–1998). Идея обобщенной теоремы о бабочке состоит в том, что середину хорды AB можно «раздвоить», при этом ничего не изменив в доказательстве. Мы даем формулировку этой теоремы в упражнении 10. А в упражнениях 11 и 12 – еще несколько теорем о бабочке, которые, как и задача 6, уже имеют мало общего с оригиналом. Кроме, разумеется, самой бабочки. Каждая из них содержит свою особую идею и требует отдельного доказательства. Попробуйте!

Упражнения

10 (И.Ф.Шарыгин). На окружности дана хорда AB , на ней – точки M и N , причем $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L . Тогда $AK = BL$.

11. На сторонах угла взяты точки A и B . Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1 , а другая – в точках A_2, B_2 . Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q . Тогда $MP = MQ$.

12. Сформулируйте и докажите аналоги классической теоремы о бабочке для параболы, гиперболы, эллипса. Для каких из этих фигур будет верно обобщение теоремы о бабочке, как в упражнении 10?

Указание. Можно воспользоваться тем, что эллипс является проекцией окружности на плоскость. В рассуждениях с параболой и гиперболой можно применить метод координат.

13 (С.Л.Берлов). Дан остроугольный треугольник ABC , H – точка пересечения его высот, D – середина AC . Если прямая, проходящая через H и перпендикулярная отрезку HD , пересекает прямые AB и BC в точках E и F , то $HE = HF$.

Та теорема о бабочке, которую мы доказали в задаче 6, значительно моложе классической, ей всего 20 лет. С ней у

автора связаны светлые воспоминания. Я придумал ее в 15 лет и по совету учителя послал ее в журнал «Математика в школе». Там она и была напечатана в номере 3 за 1986 год, за что я вскоре получил первый в жизни гонорар – 5 рублей 88 копеек. С этими деньгами я гордо пошел в магазин и купил какие-то сувениры родителям.

Напоследок предложим еще несколько задач для самостоятельного решения. Все они так или иначе связаны с точкой двух велосипедистов.

Упражнения

14. Через точку пересечения двух окружностей проводится произвольная прямая, которая вторично пересекает окружности в точках P и Q . Найдите геометрическое место середин отрезков PQ .

15. Даны две окружности с общим центром O . Окружности α и β имеют разные радиусы и касаются данных окружностей. Тогда O является точкой двух велосипедистов для окружностей α и β .

16. В условиях предыдущей задачи прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из точек пересечения окружностей α и β .

17. Для данной пары окружностей постройте две концентрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача в зависимости от расположения окружностей?

18. Пусть V – точка двух велосипедистов данной пары окружностей. Если провести инверсию относительно любой окружности с центром V , то V останется точкой двух велосипедистов и для образов окружностей.

19. Останется ли утверждение задачи 4 верным, если снять требование одновременного выезда велосипедистов из точки B ?

20. Два велосипедиста движутся с одинаковыми скоростями по двум пересекающимся прямым. Тогда на плоскости существует неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.

21 (И.Ф.Шарыгин). На одной из двух пересекающихся сфер взяты точки P_1 и Q_1 , на другой – точки P_2 и Q_2 . Отрезок P_1P_2 проходит через общую точку сфер. Отрезок Q_1Q_2 проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, соединяющей центры сфер. Тогда проекции отрезков P_1Q_1 и P_2Q_2 на прямую P_1P_2 равны.

22. Сформулируйте и решите аналоги задач 2 и 3 для двух пересекающихся сфер в пространстве. При этом в качестве A и B можно взять любую пару общих точек сфер.

23. Сформулируйте и решите пространственные аналоги упражнений 5, 9, 10 и 14–18 (вместо окружностей на плоскости нужно взять сферы в пространстве).

Попробуем подвести некоторые итоги. Две задачи международных олимпиад, задача о бабочке, два десятка геометрических задач, которые мы сформулировали в виде упражнений (некоторые из них появлялись на математических олимпиадах, в «Задачнике «Кванта» и в различных сборниках задач). Список далеко не полный. И все это выросло из задачи 1, совсем простенькой и неинтересной, которую мы вначале и решать-то не хотели.

О поющих проводах, или Загадки пружины

**А. СЕРГЕЕВ, Н. ЖДАНОВА,
И. СЕРГАЧЕВ, Р. СТРЮНГИС,
А. ПЯТАКОВ**

ОКРУЖАЮЩЕЕ НАС ПРОСТРАНСТВО НАПОЛНЕНО самыми разными звуками. Некоторые из них мы слушаем с интересом и вниманием, например – голоса собеседников, сводки новостей, любимую музыку. Другие же звуки мы стараемся пропускать мимо ушей, в то время как многие из них заслуживают внимания и, более того, даже могут стать предметом научного исследования.

Всем вам наверняка приходилось стоять рядом с железнодорожными путями и слышать гудение локомотива, грохот товарного состава или скрежет колес тормозящей электрички. Эти грубые громкие звуки составляют привычную какофонию железной дороги и вызывают скорее неприятные ощущения, чем любопытство исследователя. Вместе с тем, вблизи путей вы можете услышать звуки, которые трудно назвать иначе как удивительными. В напряженной тишине, предшествующей приходу очередного поезда, прислушайтесь к звукам от проводов, по которым скользят токоприемники электропоезда. Эти звуки не будут иметь ничего общего с щелчками или другими привычными звуками ударов. Вы услышите звонкое «чириканье», состоящее из многих звуков одиночных ударов, каждый из которых, если задаться целью изобразить его письменно буквами, лучше всего передается сочетанием «тиу». Важно отметить, что звуки подобного рода возникают не только при соударениях проводов. Их можно услышать, если кто-то ударит по рельсу на расстоянии нескольких сот метров от вас. Сходные звуки порождают удары легких камешков о тонкий лед осенью, когда пруды только начинают покрываться ледяной пленкой.

Попробуем разобраться со всеми этими явлениями: когда они возникают, какие общие закономерности имеют?

Во всех случаях причиной служит удар, звук которого в непосредственной близости мало напоминает мелодичный звук «тиу». Но по мере того как мы удаляемся от места удара, звук становится все более музыкально «окрашенным»: чем дальше, тем ярче и отчетливее. Специалисты-акустики скажут нам, что удар порождает волну изгиба (рис. 1) в проводе, рельсе, слое льда, а характерное звучание «тиу» объясняется волновым явлением, называемым *дисперсией*.

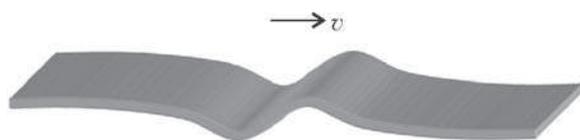


Рис. 1

Говорят, что среда распространения волн обладает дисперсией, если скорость волны в этой среде зависит от ее частоты. Широко известным примером дисперсии электромагнитных волн является разложение призмой белого света в спектр. В состав белого света входят волны различных частот, т.е. свет разных цветов. Из-за дисперсии волны, соответствующие свету разных цветов, имеют разные скорости и, следовательно, преломляются стеклом призмы по-разному. Так на экране появляется радуга – спектр белого света. С точки зрения физики, радужная полоса на экране представляет плавное изменение частоты света с изменением координаты. Если бы люди могли «видеть» звуки, наш звук «тиу» смотрелся бы точно так же: в нем тоже происходит постепенное уменьшение частоты звука с течением времени. Но возможна ли в принципе дисперсия звуковых волн?

При распространении звука в воздухе в зависимости от расстояния до источника может меняться лишь его громкость, но никак не характер звучания. Легко представить, во что превратился бы, например, фортепианный концерт, обладай воздух дисперсионными свойствами: высокие ноты имели бы большую скорость распространения, чем низкие, и уже для слушателей, сидящих в середине партера, музыка превратилась бы в неузнаваемую мешанину звуков.

Возникает противоречие: с одной стороны, звук «тиу» очень похож на проявление дисперсии, а с другой, повседневный опыт говорит нам, что дисперсии звуковых волн нет. Ключ к разгадке кроется в том, что большинство окружающих нас объектов не являются неограниченными однородными средами, как воздух, а обладают специфической формой. У всех этих объектов хотя бы один размер много больше других и хотя бы один много меньше длины изгибающей волны. Такие протяженные объекты являются *волноводами*, т.е. каналами, по которым могут распространяться волны. Акустические волноводы отличаются от неограниченных сред наличием необычных явлений и интересных закономерностей распространения упругих волн. Дисперсия – одно из таких явлений. Удар возбуждает множество колебаний разных частот, и по волноводу начинает распространяться группа волн. Дисперсия проявляется в том, что волны высоких частот перемещаются быстрее, чем волны низких. Это приводит к тому, что на большом расстоянии волны низких частот значительно отстают от волн с высокими частотами, и звук удара «растягивается», превращаясь в знакомый нам звук «тиу».

Таково качественное объяснение явления, но нам захотелось разобраться в нем более детально, получив количественные соотношения. Легко понять, что проведение натуральных экспериментов (т.е. в естественных условиях, не в лаборатории) весьма затруднительно: по рельсам постоянно следуют поезда, провода (как правило) находятся под высоким напряжением, а выбор тонкого льда означает привязку к редким погодным условиям. Хотелось бы иметь протяженное твердое тело, которое легко помещалось бы в любой комнате. Казалось бы, это – неисполнимая прихоть исследователя, но такой объект существует.

Знакомьтесь: металлическая пружина – слинки¹ (рис. 2). Недеформированная, она легко помещается в руке, а для работы можно растянуть ее метра на полтора. Но самое важное, что суммарная длина витков составляет восемнадцать метров. Таким образом, пружина обладает компактно-

¹ О некоторых опытах с этой удивительной пружиной можно прочитать в статье Д. Чокина «Слинки – шагающая пружинка» («Квант» № 6 за 1991 г.). (Прим. ред.)



Рис. 2

стью и в то же время большой длиной волновода, необходимой для наблюдения дисперсии. В сечении лента, из которой скручена пружина, представляет собой прямоугольник $1,6 \times 0,5$ мм (рис.3). Его ширина и высота, а также радиус

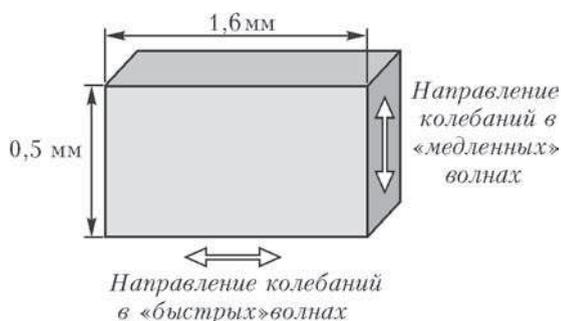


Рис. 3

витка пружины являются тремя основными геометрическими параметрами пружины. Расстояние между витками, т.е. степень растяжения пружины, не оказывает заметного влияния на ее звучание. Кстати, о звучании: наверное, вы уже догадались, что при ударе по одному концу пружины на другом ее конце слышится знакомое нам «тиу», но здесь оно принимает особый оттенок и напоминает звук, с которым стреляют из лазерного оружия герои фантастических фильмов.

Приступим теперь к исследованиям. В первую очередь, необходимо как-то усилить звук, поскольку изгибная волна, дойдя до конца пружины, плохо излучается в воздух. В музыкальных инструментах для усиления звучания струн используют резонаторы и деки (большие пластины-излучатели). Мы будем действовать по похожему принципу: попробуем жестко связать с концом пружины какое-то твердое тело с относительно большой площадью поверхности. Возможно, вы удивитесь, но лучше всего для этого подойдет обыкновенный кусок пенопласта. Достаточно воткнуть в него конец пружины, и громкость звука многократно увеличится. Нам удалось увеличить интенсивность звука настолько, что теперь его можно изучать с помощью компьютера. Для этого установим напротив пенопласта микрофон и запишем звук на компьютер. С помощью специальной программы (в нашем опыте это была Cool Edit Pro) можно отобразить звук графически в виде спектрограммы, т.е. диаграммы, по вертикальной оси которой откладывается частота, по горизонтальной – время, а цветом изображается громкость звука. Обычный вид спектрограммы звуков пружины показан на рисунке 4. Каждая кривая на этом графике отображает один звук «тиу». Форма кривой наглядно демонстрирует характерный переход от высоких частот к низким. Очень похожими кривыми изображаются звуки от проводов и тонкого льда. Многообразие же волн в пружине является кажущимся: только три из них непосредственно вызваны

ударом, а остальные представляют собой лишь многократные отражения трех основных.

Рассмотрим поведение основных кривых на спектрограмме. Две из них стремятся к нулю, а третья – к некоторой постоянной частоте. Давайте вспомним о трех геометрических размерах пружины: двух длинах сторон сечения и радиусе витков. А что если кривые на спектрограмме как-то связаны с геометрическими размерами? Смелое предположение нетрудно проверить. Возбуждая колебания в пружине, можно ударять по какой-то одной стороне прямоугольного сечения, тогда на полученных спектрограммах соответствующая кривая будет ярче, т.е. амплитуда соответствующей волны будет больше. Говорят, что эти две волны, порожденные ударами о разные стороны сечения пружины, обладают взаимно перпендикулярной поляризацией, т.е. колебания в них совершаются во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис.3, где направления колебаний показаны двойными стрелками).

Измерим теперь скорости этих волн. По определению дисперсии, каждой частоте соответствует своя скорость распространения, поэтому выберем для определения скорости конкретную частоту – например, 3 кГц. Зная пройденный путь и время, протекшее от момента удара, найдем скорости обеих волн: 460 м/с для «быстрой» и 255 м/с для «медленной». Между скоростями волн и длинами сторон сечения должна существовать простая количественная связь: интуитивно понятно, что чем больше толщина пластины, тем она жестче (сильнее сопротивляется изгибу) и тем быстрее бежит вдоль нее изгибная волна. Более детальное рассмотрение, проведенное в учебниках по механике сплошных сред, показывает, что скорость изгибной волны пропорциональна корню квадратному из толщины пластины. Значит, так же должны относиться и скорости двух поляризованных перпендикулярно друг другу изгибных волн, возникающих при ударе по разным сторонам сечения. Измерив длины сторон сечения, можно убедиться, что отношение скоростей действительно равно квадратному корню из соответствующего отношения длин:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{460 \text{ м/с}}{255 \text{ м/с}} \approx 1,8 \approx \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{1,6 \text{ мм}}{0,5 \text{ мм}}}$$

Таким образом, существование «быстрой» и «медленной»

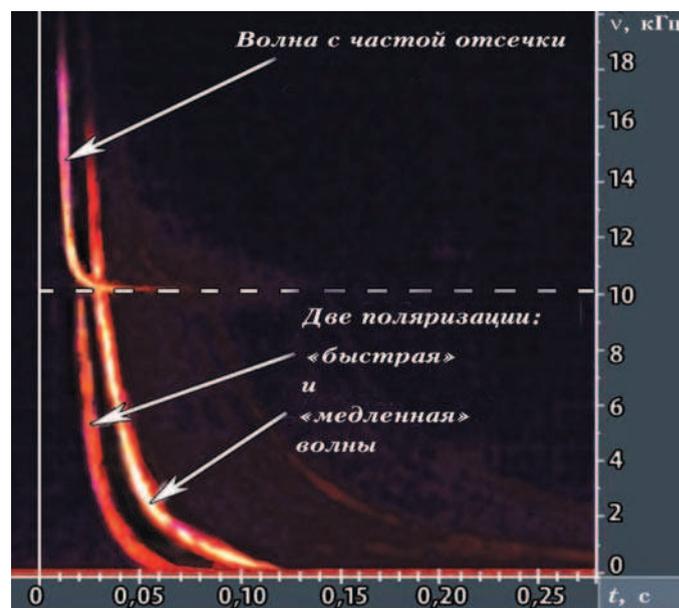


Рис. 4

волн объясняется прямоугольной формой сечения ленты, а соответствие между скоростями этих волн и размерами поперечного сечения установлено экспериментально и согласуется с теорией.

Рассмотрим теперь третью кривую на рисунке 4, которая, в отличие от первых двух, стремится не к нулю, а к некоторой константе. Это означает, что область частот, на которых могут распространяться волны такого типа, ограничена снизу некоей ненулевой частотой (в данном случае – около 9 кГц). Эта ненулевая частота показана пунктирной линией, которая как бы отсекает для волн область низких частот. Такие волны называют *волнами с частотой отсечки*.

Мы предположили, что существование волн с частотой отсечки как-то связано с третьим геометрическим параметром – радиусом пружины. Для того чтобы подтвердить догадку, мы раздобыли несколько пружин из одной и той же ленты, но разных радиусов. Вот результаты измерений частот отсечки для пружин трех различных радиусов:

Радиус пружины R , мм	Частота отсечки ν , кГц
37	7
30	8,7
28	9,3

Можно заметить, что произведение частоты отсечки и радиуса примерно одинаково для всех пружин:

$$\nu_1 R_1 = \nu_2 R_2 = \nu_3 R_3 .$$

Если вспомнить известную формулу для связи частоты колебаний в волне со скоростью и длиной волны: $v = \lambda \nu$, то полученное из эксперимента условие постоянства произведения частоты на радиус окружности можно переписать в виде

$$\frac{\lambda_1}{R_1} = \frac{\lambda_2}{R_2} = \frac{\lambda_3}{R_3} = \text{const} ,$$

т.е. длина волны, на которой происходит отсечка, связана прямо пропорционально с радиусом окружности.

В специальной литературе по акустике, рассматривающей распространение изгибных волн в стержнях, можно найти, что константа, стоящая в вышеприведенном равенстве, есть не что иное как 2π , а само равенство имеет наглядную геометрическую интерпретацию – длина волны, на которой происходит отсечка, равна длине витка пружины:

$$\lambda = 2\pi R .$$

Итак, нам удалось понять, какие физические явления кроются за необычными звуками, которые издают провода и тонкий лед, и разгадать некоторые из загадок, поставленных пружинкой: существование «быстрых» и «медленных» волн, а также волн с частотой отсечки. Однако представляется вполне вероятным, что пружина таит в себе еще немало сюрпризов.

Эта работа была выполнена группой школьников и студентов на физическом отделении Летней школы «Исследователь» (адрес школы в Интернете: <http://physres.web.ru>).

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Гидростатика в стакане

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОЗНАКОМИМСЯ С ЗАДАЧАМИ, В которых рассматривается погружение тел в жидкость, налитую в цилиндрический сосуд с вертикальными стенками (стакан). Обычно речь идет о повышении или понижении уровня жидкости при различных изменениях, происходящих с погруженным телом.

Мы рассмотрим два подхода к решению таких задач. Первый опирается на закон Архимеда и вычисление вытесненного телом объема. Во втором подходе закон Архимеда в явном виде не используется, а второй закон Ньютона применяется ко всему содержимому сосуда, т.е. к жидкости вместе с погруженным телом.

Каждый из подходов имеет свои достоинства и недостатки, и выбор зависит от конкретной задачи. Но в любом случае полезно уметь применять оба метода.

Задача 1. В цилиндрический сосуд с площадью дна S налита вода. На сколько поднимется уровень воды, если в сосуд поместить деревянный брусок массой m ?

Решение 1. Изменение уровня воды связано с объемом погруженной части бруска соотношением

$$S\Delta h = V_{\text{погр}} .$$

Действительно, объем, отсекаемый новым уровнем поверхности воды, превышает объем самой воды, с одной стороны, на $V_{\text{погр}}$, а с другой, чисто геометрически, – на $S\Delta h$ (рис. 1). Погруженный объем найдем из условия плавания бруска в воде плотностью $\rho_{\text{в}}$:

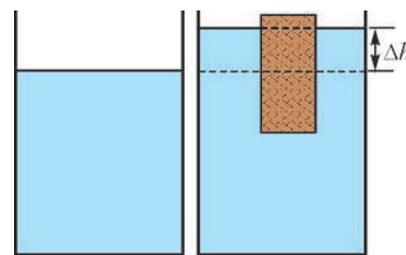


Рис. 1

$$mg = F_{\text{арх}} , \text{ где } F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} .$$

Окончательно получаем

$$\Delta h = \frac{m}{\rho_{\text{в}} S} .$$

Решение 2. И до, и после погружения бруска сила реакции дна сосуда, равная силе давления воды на дно $F_{\text{д}} = \rho_{\text{в}} g h S$, уравновешивает силу тяжести всего содержимого сосуда (атмосферное давление влияния не оказывает). Поэтому изменение силы давления равно изменению силы тяжести:

$$\rho_{\text{в}} g \Delta h S = mg ,$$

откуда сразу получаем правильный ответ.

Задача 2. В цилиндрическом сосуде с площадью дна S плавает в воде кусок льда массой $m_{\text{л}}$. На сколько изменится уровень воды, если лед растает?

Решение 1. Удобно сравнивать уровни воды до и после таяния льда не между собой, а с тем уровнем, который был в сосуде до погружения тела (рис.2). Искомое изменение уровня Δh равно разности Δh_2 и Δh_1 :

$$\Delta h = \Delta h_2 - \Delta h_1 .$$

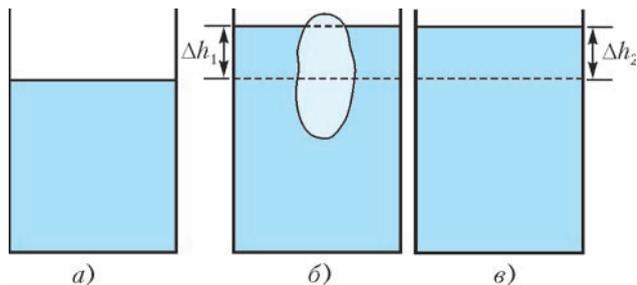


Рис. 2

Изменение уровня Δh_1 при погружении тела найдем так же, как в задаче 1:

$$S\Delta h_1 = V_{\text{погр}}, \quad \rho_{\text{в}}gV_{\text{погр}} = m_{\text{л}}g, \quad \Delta h_1 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}S}.$$

Разность уровней Δh_2 в ситуациях, соответствующих рисункам 2,б и 2,а, образуется за счет добавочной воды, получившейся при таянии льда:

$$S\Delta h_2 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}, \quad \Delta h_2 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}S}.$$

Получаем, что $\Delta h_2 = \Delta h_1$, и $\Delta h = 0$, т.е. уровень воды при таянии льда не изменился!

(Зачем в условии даны $m_{\text{л}}$ и S ? Отсутствие этих данных было бы прямой подсказкой.)

Конечно, когда ответ получен, хочется обосновать его более неформально, чтобы он выглядел естественно. Запишем условие плавания льда в виде

$$m_{\text{л}}g = m_{\text{выт}}g,$$

где $m_{\text{выт}} = \rho_{\text{в}}V_{\text{погр}}$ – масса вытесненной воды. Поскольку масса льда равна массе воды в вытесненном объеме, растаявшая вода точно заполняет тот объем, который ранее занимала подводная часть льдины. Однако такое рассуждение применимо один раз, а формальный метод можно использовать во многих задачах.

Решение 2. Второй подход, через силу давления, выдает в данной задаче ответ мгновенно, причем без всяких расчетов. Поскольку вес содержимого сосуда при таянии льда не изменился, то не изменилась и сила давления $F_{\text{д}} = \rho_{\text{в}}ghS$ воды на дно, т.е. уровень воды остался прежним.

Задача 3. В цилиндрическом сосуде площадью сечения S плавает в воде кусок льда, притянутый ко дну нитью. Когда лед растаял, уровень воды понизился на Δh . Чему была равна сила натяжения нити?

После обсуждения задачи 2 понятно, почему уровень воды должен именно понизиться и почему в условии задачи не дана масса льда. Если бы лед просто плавал, то при таянии уровень остался бы прежним. Натянув нить, мы увеличили глубину погружения льда, и уровень воды поднялся. После таяния льда уровень воды вернулся к прежнему значению, т.е. опустился.

А теперь – расчет.

Решение 1. Разность уровней Δh_1 в случаях, изображенных на рисунках 3,б и 3,а (сосуд с водой до погружения льда), определяется объемом погруженной части льда:

$$S\Delta h_1 = V_{\text{погр}}$$

(см. задачу 1), который можно найти из второго закона Ньютона:

$$T + m_{\text{л}}g - F_{\text{арх}} = 0,$$

где T – искомая сила натяжения нити, а $F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}}gV_{\text{погр}}$.

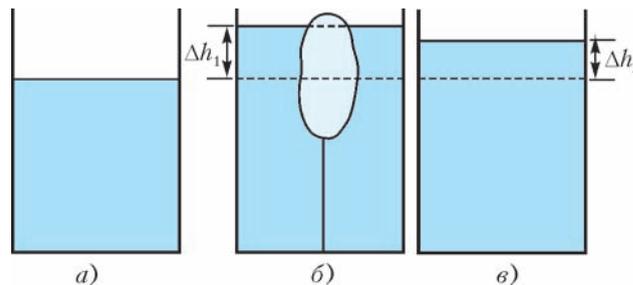


Рис. 3

Получаем

$$\Delta h_1 = \frac{T}{\rho_{\text{в}}gS} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}S}.$$

Разность уровней Δh_2 (см. рис.3,в и 3,а) определяется объемом воды, образовавшейся при таянии льда:

$$S\Delta h_2 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Получаем окончательно

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 = \frac{T}{\rho_{\text{в}}gS},$$

откуда

$$T = \rho_{\text{в}}gS\Delta h.$$

Решение 2. Как видно из рисунка 3,б, со стороны дна на содержимое сосуда действует не только сила, направленная вверх и равная силе давления воды на дно $F_{\text{д}} = \rho_{\text{в}}gh_1S$, но и сила натяжения нити T , направленная вниз:

$$T + mg - \rho_{\text{в}}gh_1S = 0,$$

где m – масса всего содержимого (воды и льда). После того как лед растаял, сила натяжения исчезла, и второй закон Ньютона приобрел вид

$$mg - \rho_{\text{в}}gh_2S = 0.$$

Исключая mg , получим

$$T = \rho_{\text{в}}gS\Delta h.$$

В этой задаче, как и в задаче 2, второй подход приводит к ответу гораздо быстрее, чем первый.

Задача 4. В цилиндрическом сосуде площадью сечения $S = 100 \text{ см}^2$ плавает в воде кусок льда, в который вморожен грузик из цинка массой $m_{\text{ц}} = 35 \text{ г}$. На сколько понизится уровень воды, когда лед растает? Плотность цинка $\rho_{\text{ц}} = 7000 \text{ кг/м}^3$.

Понятно, почему не дана масса льда – в отсутствие цинка уровень воды при таянии льда не меняется (задача 2). А вот почему уровень понизится, не так очевидно, как в предыдущей задаче, – ведь цинк повышает уровень и вначале, и в конце. Мы вернемся к этому вопросу после решения задачи.

Решение 1. Как и в предыдущих задачах, разность уровней Δh_1 (рис.4,б) выражается через объем погруженной

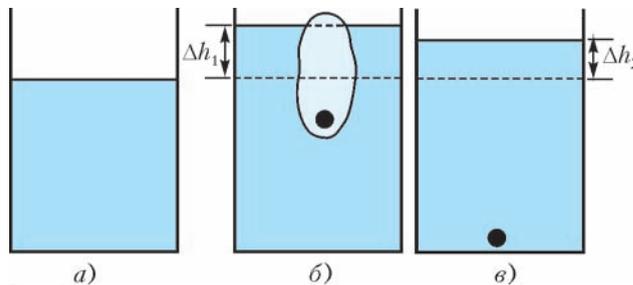


Рис. 4

части льда ($S\Delta h_1 = V_{\text{погр}}$), который можно найти из второго закона Ньютона

$$m_{\text{л}}g + m_{\text{ц}}g - \rho_{\text{в}}gV_{\text{погр}} = 0.$$

Выражая отсюда Δh_1 , получаем

$$\Delta h_1 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}S} + \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{в}}S}.$$

Разность уровней Δh_2 (рис.4,в) определяется объемом воды, образовавшейся при таянии льда, и объемом цинка, который теперь лежит на дне:

$$\Delta h_2 S = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{ц}}}.$$

В итоге получаем

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 = \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{в}}S} - \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{ц}}S} = 3 \text{ мм}.$$

Решение 2. Запишем второй закон Ньютона для всего содержимого сосуда (вода, лед и цинк) до и после таяния льда:

$$mg - \rho_{\text{в}}gh_1S = 0,$$

$$mg - \rho_{\text{в}}gh_2S - N = 0,$$

где N – сила нормальной реакции, действующая со стороны дна на затонувший цинк. Из этих уравнений сразу видно, что добавление силы N приводит к уменьшению силы давления воды на дно, т.е. к понижению ее уровня. Исключая mg , получим

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{N}{\rho_{\text{в}}gS}.$$

Но для получения ответа надо решить еще одну небольшую задачку – найти силу N , действующую на лежащий на дне цинк. Эта задачка – стандартное упражнение:

$$N + F_{\text{арх}} - m_{\text{ц}}g = 0, \quad F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}}gV_{\text{ц}} = \rho_{\text{в}}g\frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{ц}}},$$

откуда

$$N = m_{\text{ц}}g\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ц}}}\right).$$

В этой задаче второй подход связан с не меньшими расчетами, чем первый, но зато он позволяет сразу, до выполнения расчетов, увидеть, опустится уровень или поднимется. Чтобы проверить, насколько хорошо вы поняли это рассуждение, ответьте на следующий вопрос.

Вопрос. Как изменится ответ на задачу, если в лед будет заморожен не цинк, а кусок пробки?

Теперь разберем две задачи на вычисление работы, которую надо совершить для изменения глубины погружения тела. Такие задачи можно решать как прямым вычислением работы, так и через изменение потенциальной энергии системы.

Задача 5. На дне цилиндрического сосуда с водой площадью $S = 300 \text{ см}^2$ стоит цилиндр высотой $H = 40 \text{ см}$ и площадью основания $S_{\text{ц}} = 100 \text{ см}^2$, сделанный из материала плотностью $\rho = 3000 \text{ кг/м}^3$. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды, если начальная толщина слоя воды $h_1 = 30 \text{ см}$? Цилиндр поднимают в вертикальном положении.

Решение 1. Уменьшение объема, заключенного между уровнем воды и дном сосуда (рис.5), равно объему погруженной части цилиндра (см. задачу 1):

$$S\Delta h = S_{\text{ц}}h_1.$$

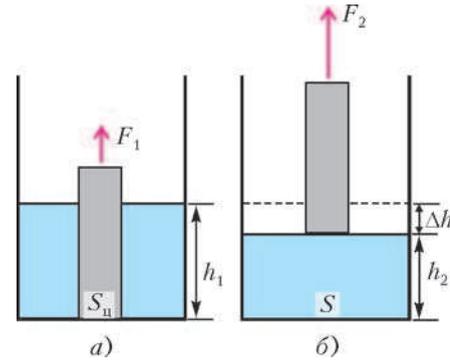


Рис. 5

Работа совершается на пути h_2 , равном конечной глубине воды:

$$h_2 = h_1 - \Delta h = h_1\left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right).$$

(В данном случае это соотношение получается сразу из условия сохранения объема воды: $Sh_2 = (S - S_{\text{ц}})h_1$.) При этом сила тяги линейно возрастает от минимального значения

$$F_1 = mg - F_{\text{арх}} = \rho S_{\text{ц}}Hg - \rho_{\text{в}}S_{\text{ц}}h_1g$$

до максимального значения

$$F_2 = mg = \rho S_{\text{ц}}Hg.$$

Таким образом, работа по извлечению цилиндра равна

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2} h_2 = 21 \text{ Дж}.$$

Решение 2. Работа равна изменению потенциальной энергии системы «цилиндр-вода»:

$$A = \Delta E_{\text{ц}} + \Delta E_{\text{в}}.$$

Изменение потенциальной энергии цилиндра равно

$$\Delta E_{\text{ц}} = mgh_2 = mgh_1\left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right).$$

Изменение потенциальной энергии воды составляет

$$\Delta E_{\text{в}} = m_{\text{в}}g\left(\frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2}\right),$$

где $m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}}(S - S_{\text{ц}})h_1$, а $h_2 = h_1\left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right)$ (см. решение 1).

Разумеется, ответ будет тем же.

Задача 6. В цилиндрическом сосуде с водой площадью $S = 300 \text{ см}^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой $H = 20 \text{ см}$ и площадью основания $S_{\text{ц}} = 100 \text{ см}^2$. Какую работу надо совершить, чтобы полностью извлечь цилиндр из воды, если он сделан из материала плотностью $\rho = 300 \text{ кг/м}^3$?

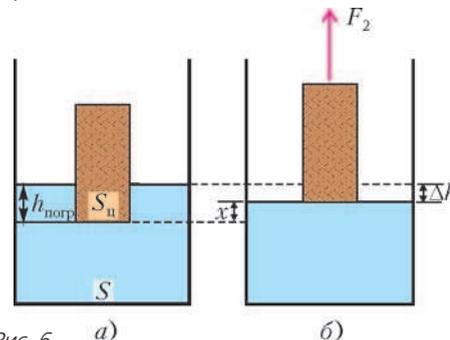


Рис. 6

Решение. При извлечении цилиндра уровень воды понижится (рис.6). Найдем понижение уровня Δh из равенства

$$S\Delta h = V_{\text{погр}},$$

где $V_{\text{погр}}$ – объем погруженной части плавающего цилиндра. Запишем условие плавания цилиндра:

$$F_{\text{арх}} = mg, \text{ или } \rho_{\text{в}}gV_{\text{погр}} = \rho Vg,$$

откуда найдем

$$V_{\text{погр}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} S_{\text{ц}}H, \quad h_{\text{погр}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} H, \quad \Delta h = \frac{S_{\text{ц}}}{S} \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} H.$$

Работа совершается на пути

$$x = h_{\text{погр}} - \Delta h = H \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} \left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right),$$

причем сила тяги линейно возрастает от $F_1 = 0$ до $F_2 = mg = \rho SH$. Окончательно получаем

$$A = \frac{0 + mg}{2} x = 120 \text{ мДж.}$$

Попробуйте самостоятельно решить эту задачу через изменение потенциальной энергии системы.

Последняя задача посвящена исследованию равновесия тела, помещенного в стакан с жидкостью, с помощью уравнения моментов.

Задача 7. В гладкий стакан высотой $H = 8$ см и радиусом $R = 3$ см поставили однородную палочку длиной $L = 12$ см и массой $m = 150$ г. Стакан доверху наполнили жидкостью, плотность которой в 5 раз меньше плотности материала палочки. С какой силой давит палочка на край стакана?

Решение. Запишем правило моментов относительно нижнего конца палочки (рис.7):

$$mg \frac{L}{2} \cos \alpha - F_{\text{арх}}R - Nl = 0,$$

где N – сила реакции, равная искомой силе давления

палочки на край стакана, $l = \sqrt{H^2 + (2R)^2}$ – длина погруженной части палочки, а сила Архимеда равна

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}}V \frac{l}{L} g = \frac{1}{5} \rho V \frac{l}{L} g = \frac{l}{5L} mg.$$

В итоге получаем

$$N = mg \frac{L}{2l} \cos \alpha - mg \frac{R}{5L} = 465 \text{ мН.}$$

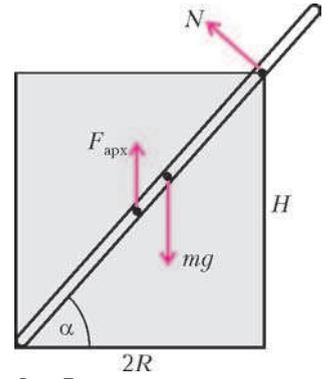


Рис. 7

Упражнения

1. В цилиндрический сосуд на поверхность воды пустили плавать коробочку из цинка, в результате чего уровень воды поднялся на $\Delta h_1 = 14$ мм. На сколько опустится уровень, если коробочка зачерпнет воды и утонет? Плотность цинка $\rho_{\text{ц}} = 7000 \text{ кг/м}^3$.

2. В цилиндрический сосуд площадью сечения S опустили и частично погрузили в воду кусок льда, притянутый ко дну нитью. При этом натяжение нити оказалось равным T . На сколько поднимется уровень воды, когда лед растает?

3. В высоком цилиндрическом сосуде с водой площадью $S = 150 \text{ см}^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой $H = 30$ см и площадью основания $S_{\text{ц}} = 50 \text{ см}^2$. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить цилиндр в воду, если он сделан из материала плотностью $\rho = 400 \text{ кг/м}^3$?

4. В гладкий высокий стакан радиусом $R = 4$ см поставили палочку длиной $l = 10$ см и массой $m = 90$ г, после чего в стакан налили до высоты $h = 4$ см жидкость, плотность которой $\rho_{\text{ж}}$ составляет 0,75 плотности материала палочки ρ . Найдите силу, с которой верхний конец палочки давит на стенку стакана.

Объем тетраэдра и его частей

Л.ЕРГАНЖИЕВА, В.МИРОШИН

НА КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ДОВОЛЬНО ПОПУЛЯРНЫМИ являются задачи, в которых речь идет о нахождении объемов частей тетраэдра, отсекаемых от него некоторой плоскостью. При этом кроме общеизвестной формулы объема тетраэдра $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}}H$ часто бывает полезной следующая формула, определяющая объем тетраэдра через длины его двух скрещивающихся ребер a, b , угол α и расстояние d между ними:

$$V = \frac{1}{6} abd \sin \alpha. \tag{1}$$

Выведем ее. Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$ (рис.1). Поместим тетраэдр в параллелепипед таким образом, чтобы его ребра AB и CD были диагоналями противоположных граней параллелепипеда (рис.2). Построение данного параллелепипеда очевидно: через середину ребра AB проведем прямую, параллельную CD , и отложим на ней отрезок, равный CD , так, чтобы в точке пересечения с AB он делился пополам. Аналогично поступим и с ребром CD . Объем получившегося параллелепипеда будет равен произведению площади основания, т.е. параллелограмма с диагоналями, равными AB и CD , на

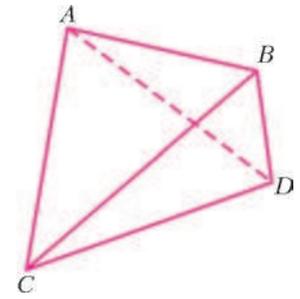


Рис. 1

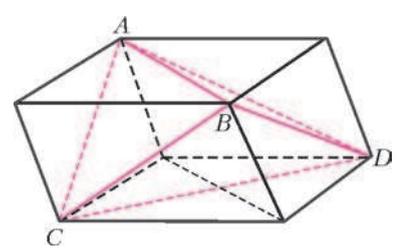


Рис. 2

высоту параллелепипеда. В качестве высоты данного параллелепипеда выступает отрезок, перпендикулярный плоскостям, содержащим AB и CD соответственно, т.е. их общий перпендикуляр. Площадь основания параллелепипеда равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Таким образом, получим

$$V_{\text{пар}} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin \alpha \cdot d = \frac{1}{2} abd \sin \alpha .$$

Объем V самого тетраэдра $ABCD$ составляет одну треть объема данного параллелепипеда. Это очевидно, так как достаточно заметить, что кроме исходного тетраэдра параллелепипед составляют также четыре треугольные пирамиды, основания которых – половины основания параллелепипеда, а высоты – высота параллелепипеда. Таким образом,

$$V = \frac{1}{6} abd \sin \alpha .$$

Следствие 1. Объем тетраэдра остается неизменным при перемещении противоположных ребер тетраэдра вдоль прямых, их содержащих.

Задача 1 (заочная физико-математическая олимпиада МФТИ, 2005 г.). Прямая AB проходит на расстоянии $\sqrt{3}$ от центра сферы радиуса $R = 1$, прямая CD касается указанной сферы. Найдите наименьший объем правильного тетраэдра $ABCD$.

Решение. Параллелепипед, описанный возле правильного тетраэдра, является кубом, ребро которого равно расстоянию между скрещивающимися ребрами этого тетраэдра. Наименьшее расстояние между прямыми AB и CD равно $\sqrt{3} - 1$. Следовательно, наименьший объем правильного тетраэдра $ABCD$ равен

$$\frac{1}{3} (\sqrt{3} - 1)^3 = \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - \frac{10}{3} .$$

Рассмотрим различные расположения секущей плоскости и ребер тетраэдра и возникающие в связи с этим отношения объемов частей разбиения.

Секущая плоскость параллельна грани тетраэдра

Хорошо известно, что отношение объемов двух тетраэдров с общим трехгранным углом равно отношению произведений

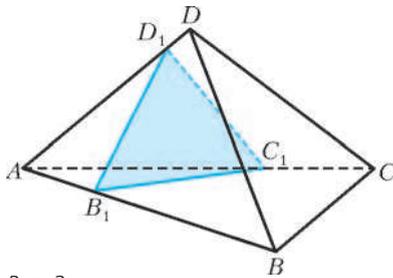


Рис. 3

соответствующих длин ребер этих трехгранных углов, т.е. (рис.3)

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB}{AB_1} \cdot \frac{AC}{AC_1} \cdot \frac{AD}{AD_1} .$$

Следствие 2. Если секущая плоскость $(B_1C_1D_1)$ параллельна грани (BCD) тетраэдра, то она отсекает пирамиду, подобную исходной. При этом $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{AD}{AD_1}$, и отношение объемов частей, на которые плоскость делит пирамиду, равно $\frac{k^3}{1 - k^3}$, где $k = \frac{AB_1}{AB}$.

Секущая плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра

Каждую из частей, на которые секущая плоскость делит тетраэдр, принято называть клином. Объем клина можно подсчитать, разбив его на треугольную призму и тетраэдр, подобный исходному. При этом объем треугольной призмы удобно вычислять по формуле $V = \frac{1}{2} Q\rho$, где Q – площадь боковой грани, ρ – расстояние до этой грани от противоположного ребра (справедливость формулы докажете самостоятельно).

Найдем объем части тетраэдра $ABCD$ (рис.4), содержащей ребро AB , если секущая плоскость проходит параллельно AB

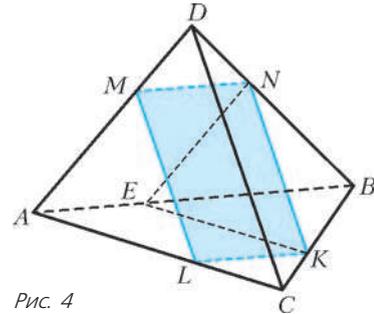


Рис. 4

и CD через точку M ребра AD такую, что $AM : MD = p : q$. Проведем $EN \parallel AD$ и $EK \parallel AC$. Тогда

$$\begin{aligned} V_{AMLBNK} &= V_{BENK} + V_{AMLENK} = \\ &= \left(\frac{p}{p+q}\right)^3 V + \frac{1}{2} \frac{2pq}{(p+q)^2} S_{ABC} \frac{p}{p+q} \rho(D, ABC) = \\ &= \left(\frac{p}{p+q}\right)^3 V + \frac{3p^2q}{(p+q)^3} V = \frac{p^2(p+3q)}{(p+q)^3} V, \end{aligned} \quad (2)$$

где V – объем данного тетраэдра, $\rho(D, ABC)$ – расстояние от точки D до грани (ABC) . Очевидно, что при этом отношение объемов частей тетраэдра равно

$$\lambda = \frac{p^2(p+3q)}{q^2(q+3p)}. \quad (3)$$

Формулы (1) и (2) позволяют выразить в этом случае и площадь сечения. Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned} V_{AMLENK} &= \frac{3p^2q}{(p+q)^3} V = \\ &= \frac{3p^2q}{(p+q)^3} \cdot \frac{1}{6} AB \cdot DC \cdot \rho(AB, DC) \sin \alpha, \end{aligned}$$

где α – угол между ребрами AB и DC . С другой стороны,

$$V_{AMLENK} = \frac{1}{2} S_{\text{сеч}} \frac{p}{p+q} \cdot \rho(AB, DC) .$$

Отсюда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{pq}{(p+q)^2} ab \sin \alpha, \quad (4)$$

где $AB = a$, $DC = b$.

Задача 2. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 3$. Отрезок KM параллелен AB и расположен на расстоянии 1 от плоскости $ABCD$, $KM = 5$. Найдите объем многогранника $ABCDKM$.

Решение. Разобьем клин на треугольную призму и тетраэдр, объемы которых равны $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3$ и $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$ соответственно. Получим $\frac{9}{2}$.

Секущая плоскость параллельна только одному ребру тетраэдра

Пусть секущая плоскость $(KLNМ)$ проходит параллельно ребру CD тетраэдра и пересекает ребро AD в точке M такой, что $AM : MD = p : q$, а ребро BD – в точке N так, что $BN : ND = m : n$. Так как плоскость параллельна только одному ребру тетраэдра, то она пересечет прямую AB в некоторой точке E (рис. 5). По теореме Менелая получим, что $\frac{BE}{AE} = \frac{qm}{pn}$, откуда $\frac{BE}{AB} = \frac{qm}{pn - qm}$.

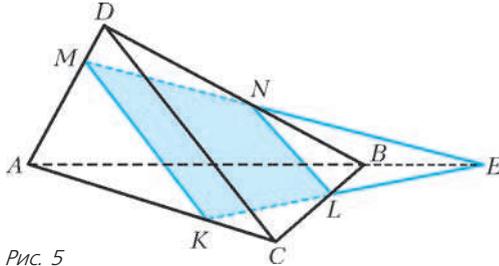


Рис. 5

При этом объем V_1 части тетраэдра, не содержащей ребро CD , будет равен

$$V_1 = V_{AMLE} - V_{BNKE} = \left(\frac{AM}{AD} \cdot \frac{AL}{AC} \cdot \frac{AE}{AB} - \frac{BN}{BD} \cdot \frac{BK}{BC} \cdot \frac{BE}{BA} \right) V,$$

где V – объем тетраэдра $ABCD$. Подставляя заданные соотношения, получим

$$V_1 = \frac{p^3 n (m+n)^2 - m^3 q (p+q)^2}{(p+q)^2 (m+n)^2 (pn - mq)} V. \quad (5)$$

Очевидно, что, зная объем одной части тетраэдра, легко можно найти объем и второй его части.

Задача 3 (МИФИ, 2000 г.). В тетраэдре $SABC$ через точку M , принадлежащую ребру AS , проведено сечение, параллельное ребру AB и пересекающее ребро AC . В каком отношении секущая плоскость делит ребро AC , если $AM : MS = 2 : 3$, а объемы получившихся частей относятся как $12 : 13$?

Решение. Как обычно присуще геометрическим задачам, предлагаемым в Московском инженерно-физическом институте, данная задача имеет не одно решение. В условии не сказано, какая из двух частей тетраэдра имеет больший объем. Мало того, возможно плоскость, делящая объем в заданном отношении, проходит параллельно не только ребру AB , но и скрещивающемуся с ним ребру SC . Поэтому надо

рассмотреть возможные варианты.

1) Если секущая плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам, то получим, что отношение объемов частей должно быть равно

$$\frac{2^2 (2+9)}{3^2 (3+6)} = \frac{44}{81} \quad (\text{см. (3)}),$$

что противоречит условию задачи.

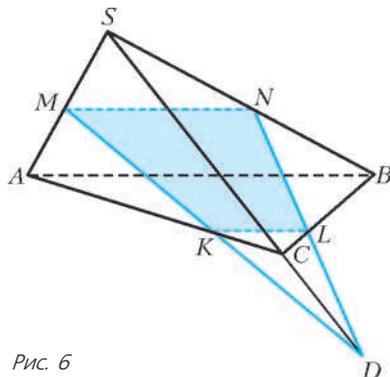


Рис. 6

2) Так как $\frac{44}{81} < \frac{12}{13}$, то секущая плоскость пересекает луч SC (рис.6). Если бы плоскость пересекала луч CS , то отношение было бы меньше. Таким образом, получим, что искомое отношение $\frac{AK}{KC} = \frac{n}{m} > \frac{2}{3}$, а также, что объем части тетраэдра, содержащей ребро SC , составляет $\frac{13}{25}$ объема исходной пирамиды. По формуле (5) имеем

$$\frac{13}{25} = \frac{27n(n+m)^2 - 50m^3}{25(m+n)^2(3n-2m)} = \frac{27 \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} + 1 \right)^2 - 50}{25 \left(\frac{n}{m} + 1 \right)^2 \left(3 \frac{n}{m} - 2 \right)}.$$

Обозначив $\frac{n}{m} = t$, получим, что искомое значение удовлетворяет уравнению

$$27t(t+1)^2 - 50 = 13(t+1)^2(3t-2) \Leftrightarrow 6t^3 - t^2 - 20t + 12 = 0,$$

которое имеет три корня $t = -2, t = \frac{2}{3}, t = \frac{3}{2}$.

Отбирая значение, удовлетворяющее всем условиям задачи, получим, что $n : m = 3 : 2$.

Задача 4. Основание пирамиды $PABCD$ – параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на ребре PC , причем $PM : MC = 1 : 2$. Плоскость сечения проходит через точку M параллельно прямым AP и BD . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Решение. Разделив пирамиду на два равновеликих тетраэдра плоскостью PAC , применим формулу (5) и найдем, что искомое отношение равно $4 : 5$.

Упражнения

1. Скрещивающиеся ребра тетраэдра равны a и b . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной им, если известно, что эта площадь принимает максимально возможное значение.

2. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $SK : KA = SL : LB = 2 : 1$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

3. Основание пирамиды $PABCD$ – параллелограмм $ABCD$. Точка M – середина ребра CP , точка N расположена на ребре AP , причем $AN : NP = 2 : 3$. Точка K расположена на ребре BP , причем $PK = 2KB$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K, M, N , делит объем пирамиды?

4. Основание пирамиды $PABCD$ – параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на продолжении ребра BC за точку B , причем $BM = BC$. Точка N расположена на ребре PC , причем $PN : NC = 1 : 2$. Точка K расположена на ребре AP , причем $AK : KP = 1 : 3$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K, M, N , делит объем пирамиды?

5. Рассматривается множество треугольных пирамид, основания которых совпадают с основанием правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольником ABC , а вершины лежат на верхнем основании этой призмы. В каждой такой пирамиде проводятся всевозможные сечения плоскостями, параллельными ребру BC и противоположному ему ребру AS . Найдите наибольшее возможное значение площади сечений для всех указанных пирамид, если сторона основания призмы равна a , а ее высота равна h .

XVI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии Университета города Ретимно (Греция), МГУ им.М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», издательского Дома «Первое сентября» и журнала «Квант» провел очередную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 7 по 14 октября 2007 года на острове Крит (Греция). На олимпиаду приехали участники из разных регионов России и из Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В олимпиаде также участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2007» по фундаментальным наукам в командном зачете стала сборная команда города Бугульма (Татарстан). Ей был вручен главный приз соревнований — Суперкубок. Команда была также лучшей в турах по физике и истории научных идей и открытий. Второе место в общем зачете заняла команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону). Она также заняла второе место по физике и истории научных идей и открытий. На третье место вышла сборная команда города Альметьевска, которая также стала второй по математике и третьей по истории научных идей и открытий.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стала Дарья Пусева, ученица 11 класса Классического лицея 1 при РГУ. Ей были вручены большая золотая медаль и малые золотые медали за первые места по математике и физике. Вторым призером в общем зачете стал Игорь Маско, ученик 11 класса ФТЛ 1 города Саратова, ему была вручена большая серебряная медаль и малая серебряная медаль за второе место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете и малую бронзовую медаль за третье место по математике завоевал Михаил Михайлов, представляющий город Альметьевск. Дия Зайнуллина (Бугульма) получила малую бронзовую медаль за третье место по физике, а Дарья Коровина (гимназия 1567, Москва) была награждена за второе место по математике малой серебряной медалью.

Все победители получили различные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XVII Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2008 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

(см.также сайт: <http://www.gluon.ru>)

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Может ли при каком-нибудь натуральном n число $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1$ быть полным квадратом?

2. Найдите $x + y$, если

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1.$$

3. На стороне AB ромба $ABCD$ во внешнюю сторону построили правильный треугольник AMB . Найдите угол CMD .

4. Числа x , y и z попарно различны и отличны от нуля. Какие различные комбинации знаков могут быть у чисел

$$X = \frac{(y-x)(x-z)}{yz}, \quad Y = \frac{(z-y)(y-x)}{xz},$$

$$Z = \frac{(x-z)(z-y)}{xy} ?$$

5. Подряд выписаны цифры десятичных записей натуральных чисел N и $3N$. Обязательно ли среди выписанных цифр найдется хотя бы одна из цифр 1, 2, 9?

6. Дан треугольник ABC . На продолжениях стороны BA за точку A , стороны AC за точку C и стороны CB за точку B отложены отрезки $AA_1 = BC$, $CC_1 = AB$ и $BB_1 = AC$. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы A , B и C исходного треугольника ABC равны α , β и γ соответственно.

7. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Найдется ли среди них ученый, у которого ровно один друг?

Физика

1. Искусственный спутник Земли находится на круговой орбите высотой $h = 200$ км. Включается двигатель, и скорость спутника возрастает на $\Delta v = 5$ км/с. В результате он улетает в межпланетное пространство. Найдите скорость спутника вдали от Земли. Радиус Земли 6370 км, ускорение свободно падения $9,8$ м/с².

2. Известно, что компрессор домашнего холодильника периодически включается и выключается. Оцените соотношение времен работы и паузы компрессора, если известно, что его мощность порядка $P = 100$ Вт, через стенки холодильника за час проходит количество теплоты $Q = 1$ МДж, температура в помещении, где стоит холодильник, $t_1 = +20$ °С, температура внутри холодильника $t_2 = +3$ °С.

3. Оцените, какую мощность имеет стоваттная электрическая лампа накаливания в начальный момент включения ее в осветительную сеть напряжением 220 В, если рабочая температура нити накаливания 2700 °С, а температурный коэффициент сопротивления вольфрама, из которого сделана нить накала, $0,004$ 1/°С.

4. В камере кольцевого ускорителя по окружности радиусом R движется тонкий пучок электронов. В начальный

момент времени значение силы тока I_0 , число частиц в камере N . Магнитный поток через неизменную орбиту пучка уменьшается со скоростью v_Φ . Каким станет значение силы тока после того, как частицы сделают один оборот? Рассмотрите нерелятивистский случай.

5. В чайнике «Тефаль» мощностью $P = 1$ кВт кипит вода. С какой скоростью из его носика вырывается струя пара, если площадь отверстия носика $S = 5 \text{ см}^2$, удельная теплота испарения воды $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К)?

6. При какой минимальной начальной скорости можно перебросить камень с уровня земли через полуцилиндрический ангар высотой (радиусом) R ?

7. Металлический шар радиусом R , полный заряд которого равен Q , разрезан на две части. Плоскость разреза проходит на расстоянии L от центра шара ($L < R$). С какой силой отталкиваются эти части шара?

Устный командный тур

Математика

1. В последовательности 1 * * * * * 7 (звездочками обозначены числа) сумма любых трех соседних чисел равна 15. Найдите второй член этой последовательности (т.е. число, обозначенное первой звездочкой).

2. На плоскости нарисовали 4 равных треугольника так, что любые два из них имеют общую вершину. Верно ли, что все треугольники имеют общую вершину?

3. Действительные числа x , y и z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + xz + yz = 1. \end{cases}$$

Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения x .

4. Конференция началась между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончилась между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжалась конференция?

5. Прямоугольную стальную пластинку размером 19×73 положили на лист бумаги и обвели карандашом. Пользуясь только самой пластинкой и карандашом, найдите (постройте) центр полученного прямоугольника.

6. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматную доску (размером 8×8 клеток) так, чтобы все белые поля оказались под боем?

7. Имеются два треугольника. Известно, что сумма двух сторон каждого из них равна сумме двух каких-то сторон второго. Равны ли эти треугольники?

8. В компании из n человек каждый имеет ровно трех знакомых.

а) Докажите, что n четно.

б) Всегда ли можно эту компанию разбить на пары знакомых между собой людей?

9. Можно ли разрезать клетчатый квадрат размером 14×14 на прямоугольники 2×5 и 3×9 ?

10. Найдите вид треугольника (т.е. остроугольный он, прямоугольный или тупоугольный), если про его стороны a , b и c известно, что $a^3 + b^3 = c^3$.

Физика

1. Бочка объемом $V = 50$ л доверху заполняется засаливаемыми на зиму огурцами. Плотность вещества огурцов $\rho_1 = 1100$ кг/м³. Средняя плотность огурцов в куче

$\rho_2 = 660$ кг/м³. Сколько литров рассола надо приготовить для заливки?

2. Оцените, какой глубины «яма» образуется при зависании вертолета на небольшой высоте над водной поверхностью.

3. Как изменится сила взаимодействия двух маленьких диэлектрических шариков, один из которых заряжен, а другой нет, если расстояние между ними возрастет в n раз?

4. Известно, что в тропиках на больших высотах (более 10–15 км) дуют постоянные ветры от экватора по направлению к полюсам. Почему?

5. Найдите угол отскока шарика при угле падения 45° на идеально гладкую поверхность, если при ударе шарик теряет треть часть своей кинетической энергии.

6. К нижнему концу легкой пружины, верхний конец которой закреплен, подвешены связанные невесомой нитью грузы: верхний массой $m_1 = 0,4$ кг и нижний массой $m_2 = 0,6$ кг. Нить, соединяющую грузы, пережигают. С каким ускорением начнет двигаться верхний груз?

7. Два моля идеального одноатомного газа сначала изохорно охладили, а затем изобарно нагрели до первоначальной температуры 400 К, увеличив объем газа в три раза. Какое количество теплоты отдал газ на первом участке?

8. В сосуде на поверхности прозрачной жидкости плавает легкая тонкая плосковыпуклая линза, обращенная выпуклой стороной вверх. Фокусное расстояние линзы в воздухе F . Показатель преломления жидкости n . Высота уровня жидкости в сосуде h . На каком расстоянии L над линзой на ее главной оптической оси нужно расположить точечный источник света, чтобы его изображение находилось на дне сосуда?

9. Через два неподвижных блока, находящихся на одной высоте, перекинута длинная легкая нить, к концам которой

прикреплены два груза одной и той же массы (рис.1). Нить начинают медленно оттягивать вниз за точку, находящуюся посередине между блоками. График зависимости силы F , прикладываемой к нити, от смещения x этой точки приведен на рисунке 2. Найдите приблизительно массу m каждого из грузов и расстояние l между блоками.

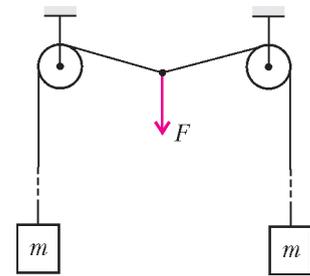


Рис. 1

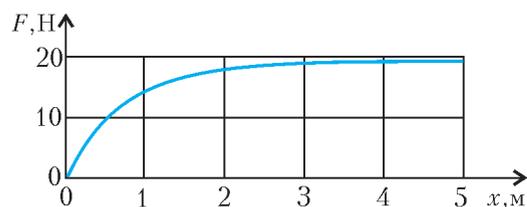


Рис. 2

10. Нижние концы лестницы-стремянки массой $m = 10$ кг соединены веревкой. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол $\alpha = 45^\circ$. Считая пол абсолютно гладким, найдите силу натяжения веревки.

История научных идей и открытий

Математика

1. В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения великого математика Леонарда Эйлера (04.04.1707 – 07 (18). 09. 1783). Нет, пожалуй, такой области математики, где

Эйлер не достиг бы фундаментальных результатов. Имеются они и в теории чисел.

В частности, он ввел в рассмотрение функцию, названную впоследствии его именем – функцией Эйлера, $\varphi(n)$. Через $\varphi(n)$, где n – натуральное (целое положительное) число, обозначают количество натуральных чисел, взаимно простых с числом n и не превосходящих n . Например, $\varphi(5) = 4$ – только числа 1, 2, 3, 4 не имеют с числом 5 общих делителей, кроме 1, и одновременно не превосходят числа 5; $\varphi(10) = 4$ – только числа 1, 3, 7, 9 не имеют с числом 10 общих делителей, кроме 1, и одновременно не больше, чем число 10.

Наша первая задача посвящена этой функции.

Выпишем в строчку все n дробей:

$$\frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \frac{3}{n}; \dots; \frac{n}{n}. \quad (*)$$

а) Сколько среди дробей строчки (*) несократимых?

Пусть $d_1 = 1, d_2, \dots, d_k = n$ – все делители числа n .

б) Проведем все возможные сокращения в дробях строчки (*) и выпишем все сокращенные дроби (каждую один раз) и все «старые» несократимые дроби в новую строчку. Сколько в этой новой строчке дробей имеют знаменатель d_i для всех возможных значений i ?

в) Докажите тождество Эйлера

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_k) = n.$$

2. В XVIII веке в математику вошли ряды – суммы бесконечного числа слагаемых, играющие в настоящее время большую роль в некоторых разделах математической науки и практики. В то время с ними обращались достаточно вольно: спокойно, как обычные конечные суммы, умножали, делили и т.д., строгая теория появилась лишь в XVIII – XIX веках.

Попробуйте, зная, что

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

(конечно же, это хорошо вам знакомая сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии), вычислить сумму

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

3. Аполлоний Пергский, живший примерно в 200 – 160 г. до н.э. древнегреческий математик, оставил заметный след в геометрии (именно он ввел такие понятия и термины, как «гипербола», «парабола», «эллипс», «фокус» (кривых) и т.д.). В частности, он рассматривал задачу о построении с помощью циркуля и линейки окружности, касающейся трех произвольных данных окружностей. Мы не предлагаем вам решать эту довольно трудную задачу, а даем более простую.

Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных равных непересекающихся кругов:

а) внешним образом; б) внутренним образом.

4. Вы, конечно, много раз слышали имя великого ученого античности Архимеда, жившего примерно в 287 – 212 г. до н.э. Он, в частности, во многом предвосхитил некоторые идеи интегрального исчисления, вычисляя площади и объемы разных фигур. Предлагаем вам решить следующую созвучную некоторым его исследованиям задачу.

Пусть прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает параболу $y = x^2$ в точках А и В, а точка О – начало координат. Через середину М отрезка ОА проведем параллельно оси параболы (оси ординат) прямую до пересечения с параболой в точке D. Пусть площадь треугольника АОВ равна S. Найдите площадь треугольника AMD.

5. В первой половине XIX века жил и работал замечательный немецкий математик П.Г.Л. Дирихле (1805 – 1859). Ему принадлежат многие красивые теоремы. В частности, он доказал знаменитую теорему о том, что всякая арифметическая прогрессия с общим членом $a + dn$, где первый член a и разность прогрессии d – взаимно простые числа, содержит бесконечное количество простых чисел. Мы не можем просить вас доказать эту теорему – ее доказательство слишком сложно. Однако мы надеемся, что вы сможете доказать следующий факт.

В арифметической прогрессии 3, 7, 11, ... (с общим членом $a_n = 4n + 3$; причем $n = 0, 1, 2, \dots$) бесконечно много простых чисел.

(Как видите, первый член и разность этой прогрессии – взаимно простые числа.)

Физика

1. В 1907 году Нобелевская премия по физике была вручена «за создание прецизионных оптических приборов и выполнение с их помощью спектроскопических и метрологических исследований». Ученый, получивший премию, начал свою научную деятельность с экспериментального опровержения теории мирового эфира (в соавторстве с другим известным ученым). Практически всю свою дальнейшую деятельность этот ученый посвятил одной области оптического приборостроения, непрерывно совершенствуя два типа приборов, основанных на представлениях волновой оптики. В числе его работ – исследование возможности создания эталона единицы длины, опираясь на длину волны излучения одного из химических элементов. В 1920 году с помощью разработанного им прибора впервые был измерен угловой размер звезды.

а) Кто этот ученый?

б) Какова идея эксперимента, поставленного для обнаружения наличия или отсутствия мирового эфира?

в) В разработку каких оптических приборов внес выдающийся вклад этот ученый?

г) Какой химический элемент был предложен этим ученым для создания эталона длины?

д) Для какой звезды был впервые измерен угловой размер?

2. Этот ученый стоял у истоков современного естествознания. Он дал название науке физике. Его можно считать первым физиком-теоретиком. Как и большинство ученых древности, он был ученым-энциклопедистом. Как и многие великие ученые, он был педагогом: преподавал в учебном заведении, название которого сохранилось до наших дней. Он был воспитателем выдающегося государственного деятеля. Он был велик даже в своих заблуждениях.

а) Кто этот ученый? Когда и в какой стране он родился и жил?

б) Почему он назвал физику физикой и почему его можно считать теоретиком?

в) В каких еще областях науки работал этот ученый?

г) Как называлось упомянутое учебное заведение и где оно находилось?

д) Кто из государственных деятелей древности был его воспитанником?

е) Какие взгляды этого ученого, сегодня считающиеся заблуждениями, вам известны?

3. Немецкий ученый и инженер, родился в 1907 году. Еще гимназистом он занялся совершенно новым для того времени делом – радиотехникой. Не получив официального образования, уже стал ведущим сотрудником фирмы «Телефункен». В годы, предшествующие второй мировой войне, успешно работал над проблемами электронного телевидения и растровой электронной микроскопии. Он создавал элект-

ронные устройства в рамках атомных проектов в Германии в годы войны и в СССР после войны. Вернувшись на родину в 1956 году, получил от правительства ГДР разрешение на владение недвижимым имуществом, принадлежавшим его семье. Своим правом он воспользовался в духе лучших традиций людей науки: организовал в фамильном имени в Дрездене научно-исследовательский институт. В своей исследовательской работе ученый переключил внимание на новое направление – применение электроники в медицине и биологии. Скончался в 1997 году.

Назовите имя этого ученого.

4. Вопрос о том, как устроена Вселенная, волновал людей всегда. Сегодняшние представления о ее строении основаны на том, что существует несколько фундаментальных объектов, из которых формируется все многообразие устройства и

свойств Вселенной. Некоторые из этих объектов неплохо изучены, существование других пока установлено косвенно, по их действию на изученные объекты.

Назовите эти фундаментальные объекты, их свойства и роль во Вселенной. Какие современные теории строения Вселенной вам известны?

5. В XVIII веке термодинамические явления описывались на основе теории теплорода – особой жидкости, перетекающей из одного тела в другое при теплопередаче.

а) Какие опыты послужили основанием для отказа от теории теплорода?

б) Какие термодинамические понятия, введенные в рамках теории теплорода, сохранились в современной физике?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, Ж.Работ

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

По результатам очередной Всероссийской олимпиады среди студентов технических вузов, которая состоялась в ноябре 2007 года, в командном зачете первое место заняла команда Московского государственного технического университета (МГТУ) им. Н.Э.Баумана (133 балла), второе место – команда Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П.Королева (95 б.), третье место – команда Уфимского государственного авиационного технического университета (85 б.).

В личном зачете первое место завоевал А.Пудовкин (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 48 баллов), второе место завоевала Д.Ковалева (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 46 б.), на третьем месте оказался Н.Трошкин (Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П.Королева, 44 б.).

Специальным призом жюри награжден студент Российского государственного университета нефти и газа им. И.М.Губкина К.Корнишин – за оригинальное решение двух задач этой олимпиады и за стабильно успешное участие в городских и всероссийских турах студенческих олимпиадах.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Велосипедист движется со скоростью v . Расстояние между осями колес равно l , центр тяжести велосипедиста с велосипедом находится посередине между колесами на высоте h от дороги. Определите минимальный тормозной путь, если торможение возможно только задним колесом.

2. Через отверстие в потолке пропущена нерастяжимая нить, к концу которой привязан груз массой m , раскрученный в горизонтальной плоскости до скорости v и имеющий радиус вращения относительно вертикальной оси R . Какую работу надо совершить, чтобы медленно подтянуть груз вдвое ближе к потолку?

3. К планете радиусом R и ускорением на поверхности g подлетает с большого удаления космический аппарат массой M с двигателем малой тяги $F_t \ll mg$, имеющий скорость v . Определите минимальную характеристическую скорость, необходимую для перехода аппарата на низкую орбиту вокруг планеты. Характеристическая скорость – это скорость, которую получит космический аппарат в свободном пространстве при тех же затратах топлива.

4. Цепочка массой m и длиной l подвешена за верхнее

звено, а нижним касается горизонтальной платформы массой M , удерживаемой снизу в равновесии системой пружин общей жесткостью k . Цепочку отпустили, и в момент соприкосновения верхнего звена с платформой платформа опустилась от точки равновесия на величину b и достигла скорости v . Определите импульс, переданный цепочкой платформе в процессе падения, и выделившееся при этом количество теплоты.

5. Шар радиусом R массой M , стоящий на горизонтальной плоскости, раскрутили относительно вертикальной оси до угловой скорости ω . Затем по шару нанесли удар, передавший ему импульс $p \ll MR\omega$ вдоль горизонтальной линии, проходящей через центр шара. Определите скорость, с которой покатится шар, если проскальзывание между шаром и плоскостью отсутствует.

6. Циклический процесс, проводимый с газом, состоит из изохоры, изобары и изотермы. Определите максимальный КПД цикла, если давление может меняться от p_1 до p_2 .

7. Два точечных заряда Q и $-Q$ находятся на расстоянии $3l$ друг от друга. Посередине между ними помещают тело, состоящее из двух металлических шариков радиусом $r \ll l$, соединенных очень тонким металлическим стержнем, совпадающим с линией, соединяющей заряды. Определите, на сколько изменится сила взаимодействия между зарядами, если длина стержня равна l .

8. Перемычка массой m и сопротивлением R лежит на двух горизонтальных параллельных рельсах, расстояние между которыми равно a . К рельсам на время t подключили источник с ЭДС \mathcal{E} . Какое вертикально направленное магнитное поле B необходимо создать, чтобы скорость перемычки после отключения источника достигла максимального значения? Считать, что $\exp(1,26) = 3,52$.

9. На пути плоской световой волны находится круглое отверстие, в котором помещается лишь небольшая часть первой зоны Френеля для точки наблюдения P , интенсивность света в которой равна I_0 . В отверстие поместили специальную линзу, при прохождении света через которую волновой фронт становится коническим. Определите интенсивность света в точке наблюдения P , если в присутствии линзы в отверстии помещается 5 зон Френеля.

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная школа СУНЦ НГУ

Заочная школа (ЗШ) Специализированного учебно-научного центра (СУНЦ) Новосибирского государственного университета (НГУ) приглашает школьников 7–11 классов и абитуриентов расширить и углубить свои знания по школьным предметам и подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ принимаются факультативные группы, организованные в общеобразовательных школах. Лучшие учащиеся ЗШ ежегодно приглашаются в Летнюю школу для участия в конкурсе СУНЦ НГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение ЗШ.

Зачисление в Заочную школу СУНЦ НГУ производится круглогодично. Чтобы туда поступить, необходимо прислать в адрес ЗШ выполненное первое задание и заявление о приеме. Работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку. Обязательно запишите краткое условие каждой задачи. Номера задач должны совпадать с теми, которые указаны в задании. Пишите четко, разборчиво, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради нужно указать:

- 1) Отделение (математическое или физическое)
- 2) Номер задания
- 3) Фамилию, имя, отчество
- 4) Класс, в котором Вы учитесь в своей школе
- 5) Ваш подробный домашний адрес, с указанием индекса почтового отделения, телефона (с кодом города), e-mail
- 6) Адрес Вашей школы и телефон/факс, (с кодом города), e-mail
- 7) Фамилию, имя, отчество преподавателей в Вашей школе по математике и по физике

Работу отсылайте только простой бандеролью. В тетрадь вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом.

Выполненное задание и заявление о приеме высылайте по почтовому адресу: 630090 Новосибирск-90, ул. Ляпунова, 3, Заочная школа СУНЦ НГУ или по электронной почте: distant@sesc.nsu.ru

Телефон: (383) 363-4066

Адрес в интернете: <http://zfmsh.nsu.ru>

Первое задание

Математическое отделение

7 класс

1. За 5 ч всадник проехал на 8 км меньше половины всего расстояния, а за 7 ч он проехал на 16 км больше половины этого расстояния. Определите скорость всадника, если он ехал с одной и той же скоростью.

2. Гусь, 3 утки и 2 курицы имеют общую массу 24 кг, а 2 гуся, 5 уток и 4 курицы имеют массу 44 кг. Какова общая масса 1 гуся, 4 уток и 2 куриц?

3. Имея одинаковое количество денег в кошельках, Крокодил Гена и Чебурашка пошли на базар. Крокодил Гена сначала истратил 20% своих денег на яблоки, а затем 10% от оставшихся у него денег истратил на конфеты. Чебурашка же истратил 30% своих денег на апельсины. У кого из друзей денег в кошельке осталось больше?

4. Найдите разность между суммой всех четных чисел и суммой всех нечетных чисел, не превосходящих 100.

5. Если от задуманного трехзначного числа отнять 11 и получившееся число разделить на 11, то в остатке получится

4. Если от того же задуманного числа отнять 8 и получившееся число разделить на 8, то остаток от деления будет 4. Если же от задуманного числа отнять 7 и получившееся число разделить на 7, то остаток опять будет 4. Найдите задуманное число.

6. Как разрезать квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы никакие два из них не имели общей стороны?

7. Восстановите цифры в примере на умножение:

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times \quad ** \\ \hline + \quad *** \\ + \quad **** \\ \hline 1*2*6 \end{array}$$

Запишите свои рассуждения.

8 класс

1. Города A и B расположены на реке на расстоянии 10 км друг от друга. В каком случае теплоходу потребуется больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?

2. Служащие банка решили разложить поровну партию золотых слитков по сейфам. Сначала в каждый сейф положили по 12 слитков, но при этом один слиток остался. Затем из одного сейфа вынули все слитки, и тогда в оставшиеся сейфы удалось разложить все слитки поровну. Сколько слитков было в партии, если в каждый сейф помещается не более 20 слитков золота?

3. Дан правильный треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взяли точку P , а на продолжении стороны BC за точку C – точку K так, что $BP = PK$. Докажите, что $AP = CK$.

4. Чему равно значение дроби $\frac{Д \cdot У \cdot Б \cdot О \cdot К}{Я \cdot С \cdot Е \cdot Н \cdot Ъ}$? В ребусе одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные.

5. В тяжелую для себя минуту Баба Яга решила расстаться со своей ступой и с метлой, выставив их на распродажу. Ступа дороже метлы на 25%. На сколько процентов метла дешевле ступы?

6. Мальчиш Плохиш хочет купить варенье, печенье и конфеты. Если он купит только бочку варенья, то у него останется 3 доллара, если же только корзину печенья, то останется 4 доллара, а если только коробку конфет, то – 8 долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить бочку варенья и корзину печенья?

7. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

9 класс

1. Докажите, что число $4^{2007} + 2^{2009} + 3$ является составным.

2. Решите уравнение $x^2 + 5y^2 - 4xy - 6y + 9 = 0$ для действительных x и y .

3. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника делит катет в отношении 5:3. Найдите гипотенузу этого треугольника, если длина биссектрисы другого острого угла равна $\sqrt{10}$.

4. Известно, что положительное число a является одним из

корней уравнения

$$x(x+3^0)(x+3^1)\dots(x+3^{20})=1.$$

Докажите, что $a < 10^{-90}$.

5. В окружность вписаны трапеция, основанием которой служит диаметр, и равнобедренный треугольник, стороны которого параллельны сторонам трапеции. Докажите, что трапеция и треугольник имеют равные площади.

6. В новогоднем карнавале участвуют 100 человек. Каждый из них знаком не менее чем с 50 из присутствующих. Докажите, что среди участников карнавала найдутся четыре человека, которых можно поставить вокруг елки так, чтобы любые стоящие рядом участники были знакомы.

10 класс

1. Вычислите сумму

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 2008^2 - 1^2 - 3^2 - 5^2 - \dots - 2007^2$$

(квадраты четных чисел берутся с плюсом, квадраты нечетных – с минусом).

2. Если первый автомобиль сделает 4 рейса, а второй – 3 рейса, то 21 тонну груза они перевезти не смогут. Если же первый сделает 7 рейсов, а второй – 4 рейса, то они смогут перевезти более 33 тонн груза. Какой из автомобилей имеет большую грузоподъемность?

3. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b выполнено неравенство $\sqrt[3]{4(a+b)} \geq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.

4. Из вершин B и C произвольного треугольника ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 . Докажите, что $BB_1^2 + CC_1^2 > \frac{9}{8}BC^2$.

5. Дан острый угол и окружность внутри него. Найдите на окружности точку, сумма расстояний от которой до сторон угла была бы: а) наименьшей; б) наибольшей.

6. Среди 101 монеты ровно 50 фальшивых. Массы всех настоящих монет одинаковы, масса каждой фальшивой монеты отличается от массы настоящей на один грамм (в большую или меньшую сторону). Как за одно взвешивание на чашечных весах со стрелкой, которая показывает разность весов на чашках, определить, является ли данная монета фальшивой? На каждую чашку весов можно класть любое количество монет.

11 класс

1. Два велосипедиста выехали одновременно и ехали с постоянными скоростями один из A в B , другой – из B в A . Первый раз они встретились в 40 км от B , после чего каждый доехал до конечного пункта (первый до B , второй до A), развернулся и поехал обратно. Второй раз они встретились в 20 км от A через 8 часов после их первой встречи. Найдите скорости велосипедистов и расстояние от A до B .

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x-1}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

4. На каждой стороне выпуклого четырехугольника как на диаметре построен круг. Докажите, что четыре построенных круга полностью покрывают весь четырехугольник.

5. Найдите количество отрицательных чисел среди первых 2008 элементов последовательности

$$\cos 1^\circ, \cos 10^\circ, \cos 100^\circ, \dots, \cos(10^{2007})^\circ.$$

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AB = 4$, $CD = 6$, $AC = AD = BC = BD = 7$. Медианы грани BCD пересекаются в точке M . Найдите объем пирамиды $MACD$.

Физическое отделение

9 класс

1. Кольцевая автотрасса имеет форму прямоугольника со сторонами 10 км и 8 км. Из одной точки трассы, расположенной «в вершине прямоугольника», по большей стороне в одном направлении одновременно стартовали два автомобиля: один со скоростью 60 км/ч, другой со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии (по прямой, а не по трассе) окажутся автомобили через 14 мин?

2. Груз, наполовину погруженный в жидкость, удерживается привязанной к нему сверху нитью. Определите плотность материала ρ_x , из которого изготовлен груз, если плотность жидкости ρ , объем груза V , натяжение нити T .

3. Первоначально твердый образец, начальная температура которого $t_1 = 15^\circ\text{C}$, нагревают в специальном сосуде. Зависимость температуры

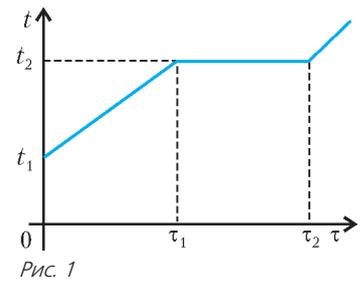


Рис. 1

представлена на рисунке 1. Система отрегулирована так, что в образец поступает в каждую единицу времени одинаковое количество теплоты. Чему равна удельная теплоемкость твердого образца? Удельная теплота плавления $L = 240000$ Дж/кг, $t_2 = 90^\circ\text{C}$, $\tau_1 = 4$ мин, $\tau_2 = 8$ мин. Время отсчитывается с момента начала нагрева.

4. В гирлянде состоящей из $N = 25$ параллельно соединенных лампочек (рис.2), перегорела одна из них. Во сколько раз надо увеличить входное сопротивление R , чтобы при прежнем напряжении накал оставшихся лампочек не изменился?

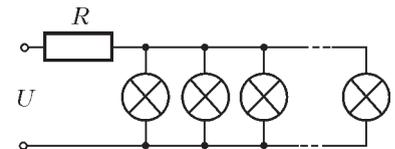


Рис. 2

10 класс

1. Решите задачу 3 для 9 класса.

2. По горизонтальной поверхности движется тело массой m . В момент, когда его скорость равнялась v_0 , на него действовали постоянной горизонтальной силой F_0 , направленной навстречу. На каком расстоянии s от этого места окажется тело, когда его скорость снова будет равняться v_0 ? Коэффициент трения μ . Известно, что $F_0 > \mu mg$.

3. В покоящейся вертикальной запаянной трубке находится массивный подвижный поршень. Трубку быстро перевернули вокруг поршня. Найдите ускорение поршня в первый момент времени после переворота. Трением поршня о стенки трубки пренебречь.

4. Ко дну сосуда сечением S привязан легкий пустой шар объемом V с центром на глубине h . Шар лопнул. Какое количество теплоты выделится к моменту, когда из-за внутреннего трения движение жидкости прекратится? Плотность жидкости ρ , ускорение свободного падения g . Массой оболочки шара пренебречь.

5. Небольшое тело запустили со скоростью v_0 по горизонтальному желобу, переходящему в полукруглую радиусом R (рис.3). Пренебрегая трением, найдите расстояние по

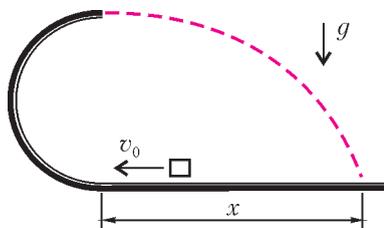


Рис. 3

горизонтали x , на котором окажется это тело после отрыва от желоба. Известно, что $v_0^2 > 4gR$.

11 класс

1. Решите задачу для 10 класса.

2. Из одной точки

кольцевой гоночной трассы одновременно, но в противоположных направлениях стартуют два гоночных автомобиля A и B . Через 20 мин автомобили проехали мимо друг друга в некоторой точке C . На сколько раньше окажется на месте старта автомобиль A , если его средняя скорость на 25% выше скорости автомобиля B ?

3. В цепи, изображенной на рисунке 4, поддерживается постоянное напряжение $U = 9$ В. Постоянное и переменное сопротивления одинаковы и равны $R = 12$ Ом. В каком отношении делит подвижный контакт K переменное сопротивление, если амперметр, со-

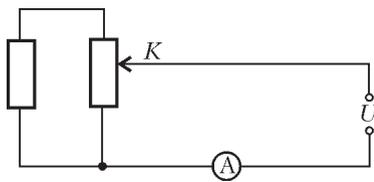


Рис. 4

противлением которого можно пренебречь, показывает ток $I = 2$ А?

4. Два конденсатора, один емкостью C , а другой емкостью $2C$, вначале были последовательно присоединены к источни-

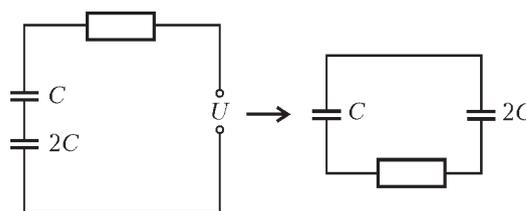


Рис. 5

ку с постоянным напряжением U (рис.5). После полной зарядки их отсоединили от источника и соединили обкладки с одноименными зарядами, как показано на рисунке. На сколько уменьшится энергия конденсаторов после такого соединения?

5. Тело массой m и зарядом q удерживают на горизонтальной поверхности. Над поверхностью на высоте h закреплен заряд q . Расстояние по горизонтали от тела до точки, расположенной под зарядом, равно L . Какую минимальную горизонтальную скорость v_0 необходимо сообщить телу, чтобы оно проскочило точку, расположенную под закрепленным зарядом?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. 7. Несложно заметить, что

$$135135 = 135 \cdot 1001 = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13).$$

2. Существуют. Вот пример двух подходящих чисел: 1010010007 и 3000001006 – каждое из них описывает второе. Как подобрать такие числа? Нетрудно сообразить, что в каждом таком числе сумма цифр равна 10. Возьмем любое десятизначное число с такой суммой цифр и составим второе число, у которого первая цифра равна количеству единиц исходного числа, вторая – количеству двоек и т.д. Потом таким же образом на основе второго числа составим третье, затем – четвертое, пятое... В конечном итоге с довольно большими шансами мы обнаружим указанную пару чисел. В частности, к ним приводят «самые напрашивающиеся» исходные числа 1000000009 или 1234000000. Конечно, не исключена возможность, что в построенной нами последовательности мы наткнемся на указанное в условии число 2100010006. Что ж, тогда придется заменить исходное число.

Найти другие «защипывания» исходной последовательности не удалось, хотя вполне вероятно, что они существуют.

3. Решение обеих задач использует неравенство треугольника.

а) Верно всегда. Или к одному, или к другому концу *наибольшего* ребра пирамиды примыкают два других ребра, из которых вместе с этим наибольшим ребром можно составить треугольник.

б) Пирамиду можно составить не всегда. Например, если стороны одного треугольника выражаются числами 1000, 1002, 1004, а длины всех сторон другого равны 1, то из этих шести

отрезков составить пирамиду не удастся: никакие два ребра из разных троек не могут иметь общих концов.

4. Не существуют. Очевидно, что $z > x$, $z > y$. Без ограничения общности будем полагать $x \leq y < z$. Тогда

$$x \cdot 2^x + y \cdot 2^y \leq y \cdot 2^{y+1} <$$

$$< (y+1) \cdot 2^{y+1} \leq z \cdot 2^z.$$

5. Одна из возможных схем дорог показана на рисунке 1.

Здесь для любых трех перекрестков A , B и C (A – перекресток, в котором находится Неуловимый Джо, B и C – перекрестки, в которых находятся полицейские) существует четвертый перекресток D , соседний с A и не являющийся соседним для перекрестков B и C .

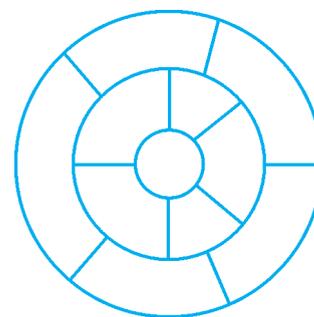


Рис. 1

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» № 6 за 2007 г.)

11. Несложно заметить, что числитель каждой дроби в условии задачи делится на знаменатель. Например,

$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ делится на $x+y$, поскольку

$(x+y+z)^5 - z^5$ делится на $(x+y+z) - z = x+y$ и $x^5 + y^5$ делится на $x+y$. Воспользовавшись тождеством

$$(x+y+z)^5 - z^5 - y^5 - x^5 =$$

$$= 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx),$$

перепишем это условие в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca,$$

или

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + b^2 + c^2, \end{aligned} \quad (*)$$

так как $x + y + z = a + b + c$. Подставив в (*) выражения $x = \frac{a+c}{2}$, $y = \frac{a+b}{2}$, $z = \frac{b+c}{2}$, получаем $2ab + 2ac + 2bc = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$, или $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$, откуда $a = b = c$, и, следовательно, $x = y = z = a = b = c$.

12. Запишем эти уравнения (в том порядке, как они представлены в условии) по кругу (тогда первое и последнее уравнения станут «соседями»). Если теперь как-то отметить (например, подчеркнуть) три уравнения, имеющие общий корень, то какие-то два из них непременно окажутся соседями (что легко доказывается «от противного»). Так как любые два соседних уравнения отличаются только циклическим сдвигом коэффициентов при одинаковых степенях x (причем сдвигом на один коэффициент), то без ограничения общности можно считать, что общий корень имеют первое и второе из записанных в условии уравнений (т.е. для любых двух других соседних уравнений рассуждения будут аналогичны).

Пусть x_0 – общий корень этих двух уравнений. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + a_4x_0^4 &= 0, \\ a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2 + a_4x_0^3 + a_0x_0^4 &= 0. \end{aligned}$$

Умножим второе равенство на x_0 и вычтем из него первое равенство. Получим

$$\begin{aligned} x_0(a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2 + a_4x_0^3 + a_0x_0^4) - \\ - (a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + a_4x_0^4) &= 0, \end{aligned}$$

или, после раскрытия скобок и упрощений,

$$a_0(x_0^5 - 1) = 0.$$

Так как по условию $a_0 \neq 0$, то

$$x_0^5 - 1 = 0, \quad x_0^5 = 1, \quad x_0 = 1.$$

Итак, если два соседних уравнения имеют общий корень, то он равен 1. Подставив это значение в любое из двух приведенных выше равенств, получаем

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

Подставив значение $x = 1$ во все пять исходных уравнений, получим точное такое же равенство. Стало быть, все уравнения имеют общий корень $x = 1$.

13. Пусть AC – диагональ, M и N – середины сторон AB и CD , K – точка пересечения AC и MN (рис.2). Достаточно показать, что площадь треугольника ABC равна площади треугольника ACD . Площадь треугольника ACM равна площади треугольника ACN , ибо диагональ MN четырехугольника $AMCN$ делится другой его диагональю пополам. Но CM и AN – медианы в треугольниках ABC и ACD . Значит, площади треугольников ABC и ACD тоже равны.

14. Решение этой задачи изложено в статье И. Акулича «Нет предела совершенству!»

15. Предположим, что профессор Мумбум-Плюмбум не ошибается. Тогда, набрав число 0,8 и дважды нажав «Ввод», мы получим число $3|0,8| - 4 = -1,6$. Затем, еще раз дважды нажав «Ввод», получим число $3|-1,6| - 4 = 0,8$. Это наблюдение позволяет установить соотношение, которому должно

удовлетворять число $tumb(0,8) = z$, если оно существует. А именно: пятикратное нажатие клавиши «Ввод» должно привести к тому же результату, что и однократное нажатие, если первоначально на экране набрали число 0,8. Отсюда $3|3|z| - 4| - 4 = z$. Это уравнение, являющееся следствием утверждения профессора Мумбум-Плюмбума, имеет корни: $-1,6$; -1 ; $0,8$; 2 .

Убедимся, что ни один из этих корней не подходит.

Если $tumb(0,8) = 0,8$, то многократное нажатие клавиши «Ввод» будет порождать цепочку значений $0,8 \rightarrow 0,8 \rightarrow 0,8 \rightarrow 0,8 \rightarrow \dots$ и число $-1,6$ никогда не получится. Вариант $tumb(0,8) = -1,6$ порождает цепочку $0,8 \rightarrow -1,6 \rightarrow u \rightarrow 0,8 \rightarrow -1,6 \rightarrow \dots$ (здесь u – некоторое число). Таким образом, при четырехкратном нажатии клавиши «Ввод» число 0,8 преобразуется в $-1,6$, чего не может быть.

Случаи $tumb(0,8) = -1$ и $tumb(0,8) = 2$ порождают, соответственно, цепочки

$$0,8 \rightarrow -1 \rightarrow v \rightarrow -1 \rightarrow v \rightarrow -1 \rightarrow \dots$$

и

$$0,8 \rightarrow 2 \rightarrow w \rightarrow 2 \rightarrow w \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

В этих случаях каждая из величин v и w должна одновременно равняться $-1,6$ (при двукратном нажатии «Ввод») и $0,8$ (при четырехкратном нажатии), что невозможно.

Так что профессор Мумбум-Плюмбум, увы, ошибается.

Корректно работающий калькулятор при вводе аргумента 0,8 и однократном нажатии клавиши «Ввод» должен выдать сообщение о том, что функция $tumb(x)$ в точке $x = 0,8$ не определена. Реакция же программы, написанной Мумбум-Плюмбумом, непредсказуема.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

- Чем больше угол падения звуковых волн, тем меньшая их часть проникает сквозь стекло.
- Дерево проводит звук быстрее, чем воздух, поэтому существует предельный угол падения звуковых лучей, при превышении которого звук вообще не проникает в дерево.
- При одной и той же силе удара дверь деформируется сильнее, чем стена, поэтому амплитуда ее колебаний больше, а звук громче.
- Энергия звуковых колебаний переходит в энергию теплового движения молекул воздуха и окружающих предметов.
- Войлок, хорошо поглощающий звук, препятствует его распространению в зрительный зал.
- Одежда и человеческое тело поглощают звуковые волны в большей степени, чем свободные кресла и пол. Кроме того, публика в зале создает как бы «неровную» поверхность, рассеивающую звук по всем направлениям. Все это вместе влияет на восприятие музыки в заполненной и в пустой аудитории.
- Ответ связан не с тем, что звук в земле распространяется быстрее, а с тем, что в земле он рассеивается и поглощается в меньшей степени, чем в воздухе.
- В туманную погоду воздух более однороден – не происходит рассеяния звука на так называемых акустических облаках, создаваемых конвекционными потоками.
- Ножка камертона возбуждает в крышке стола вынужденные колебания, излучение звуковых волн происходит с большей площади, что приводит к увеличению громкости.
- Нет. Поскольку возрастает мощность излучаемого камертоном звука, он быстрее израсходует свою энергию и затихнет.
- Разборчивость речи связана с наличием в звуке высоких

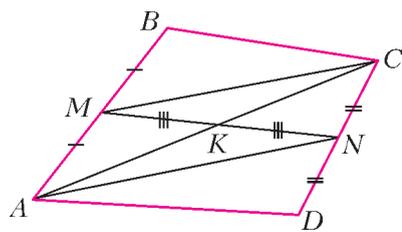


Рис. 2

частот. Однако коэффициенты поглощения звука в воздухе для этих частот больше, чем для низких, поэтому колебания высоких частот ослабляются в большей мере, чем колебания низких.

12. Рыхлый снег, изобилующий воздушными полостями, – прекрасный звукопоглощающий материал. По мере уплотнения снега поглощение звука в нем ослабевает, а отражение – усиливается.

13. Чтобы эхо было отчетливым, отраженный звук должен приходиться с определенной временной задержкой, чего трудно достичь в небольших помещениях.

14. Высокочастотные звуки лучше отражаются от препятствий и при возвращении имеют большую интенсивность.

15. Волосы поглощают излучаемый летучей мышью ультразвук, и она, не воспринимая отраженных волн, не чувствует преграды и натывается на голову человека.

16. Непрерывно отражаясь от стены, звуковые волны распространяются вдоль нее в узком поясе, как в волноводе. Интенсивность звука при этом, как оказалось, убывает с расстоянием значительно медленнее, чем в открытом пространстве.

17. Звуковая волна отклоняется вниз из-за понижения с глубиной температуры воды, с чем связано уменьшение скорости звука и, соответственно, увеличение коэффициента его преломления.

Микроопыт

Звук, идущий к вам от грызущего соседа по воздуху, рассеивается значительно сильнее, чем звук, распространяющийся к вашему уху непосредственно по черепным костям.

ГИДРОСТАТИКА В СТАКАНЕ

Вопрос. Не изменится.

Упражнения

1. $\Delta h_2 = \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}}\right) \Delta h_1 = 12 \text{ мм.}$

2. $\Delta h = \frac{T}{\rho_{\text{в}} g S}.$

3. $A = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho)^2 H^2 (S - S_{\text{л}}) S_{\text{л}} g}{2 \rho_{\text{в}} S} = 540 \text{ мДж.}$

4. $F_{\text{л}} = mg \frac{R}{H} \left(1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho} \left(\frac{h}{H}\right)^2\right) = 400 \text{ мН}$ (здесь $H = \sqrt{h^2 - (2R)^2}$).

ОБЪЕМ ТЕТРАЭДРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

1. $\frac{1}{4} ab$. 2. 8 : 37. 3. 11 : 54. 4. 13 : 99.

5. $\frac{1}{4} a \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}.$

XVI МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

*Письменный индивидуальный тур
Математика*

1. Поскольку

$$(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1 < n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)^2,$$

данное число при любом натуральном значении n лежит между квадратами двух последовательных целых чисел, поэтому ответ на вопрос отрицательный.

2. Умножим данное соотношение

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$$

почленно на выражения, сопряженные множителям левой части:

$$(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+y^2} - y) = 1.$$

Из полученных равенств видно, что переменные x и y должны иметь разные знаки: в противном случае, если эти знаки «+», то в первом равенстве оба множителя левой части больше 1, и оно не имеет места, а если оба знака «-», то же самое произойдет во втором равенстве. В силу симметрии условия (и вопроса задачи) относительно переменных неважно, какое из них положительно, какое – отрицательно. Пусть, например, $x > 0, y < 0$. Приравняв левые части обоих равенств, после элементарных преобразований получаем

$$x\sqrt{1+y^2} = -y\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2(1+y^2) = y^2(1+x^2) \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Отсюда, с учетом знаков, следует, что $x = -y$, и $x + y = 0$.

3. Пусть A – вершина острого угла ромба, равного α (рис.3,а). Из равнобедренного треугольника MBC получим, что $\angle BMC = \frac{180^\circ - \angle CBM}{2}$. В свою очередь,

$$\begin{aligned} \angle CBM &= 360^\circ - (\angle CBA + \angle ABM) = \\ &= 360^\circ - ((180^\circ - \alpha) + 60^\circ) = 120^\circ + \alpha. \end{aligned}$$

Поэтому $\angle BMC = 30^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Аналогично, из равнобедренного треугольника AMD находим, что

$$\angle AMD = \frac{180^\circ - (\angle BAD + \angle BAM)}{2} = \frac{180^\circ - (\alpha + 60^\circ)}{2} = 60^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} \angle CMD &= \angle AMB + \angle BMC - \angle AMD = \\ &= 60^\circ + \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 30^\circ. \end{aligned}$$

Как это часто бывает в геометрии, можно предложить и более изящный, более геометричный способ решения.

Сделаем параллельный перенос треугольника AMB на вектор \overline{AD} . При этом точка A перейдет в точку D , точка B – в точку C , а точка M – в некоторую точку M_1 такую, что BMM_1C – ромб (рис.3,б).

Точки C, M и D лежат на окружности с центром в точке M_1 , ее радиус равен стороне исходного ромба. Угол M_1 правильного треугольника DM_1C – центральный угол в этой окружности, он равен 60° , поэтому искомый угол CMD – вписанный в нее и опирающийся на ту же дугу – равен 30° .

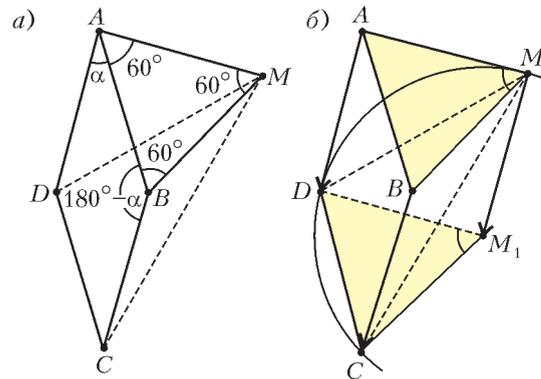


Рис. 3

Замечание. Ответ не зависит от того, острый или тупой угол A ромба. Задачу можно также решать с помощью параллельного переноса и поворота.

4. Среди чисел X , Y и Z одно положительное и два отрицательных, причем положительным может быть любое из них. Например, $X > 0$, если $x < y < 0 < z$; $Y > 0$, если $0 < x < y < z$; $Z > 0$, если $x < 0 < y < z$. Поскольку в числителях чисел X , Y и Z стоят разности исходных чисел x , y и z , знаки числителей зависят лишь от взаимного расположения исходных чисел (т.е. от того, в каком порядке они расположены на числовой оси, а не от их знаков). Знаменатели же, наоборот, зависят от знаков исходных чисел.

Пусть сначала $x < y < z$. Рассмотрим 4 случая расположения нуля относительно этих чисел.

Если $0 < x < y < z$, комбинация знаков чисел X , Y и Z такова: «- + -».

Если $x < 0 < y < z$, комбинация знаков чисел X , Y и Z «- - +».

В случае $x < y < 0 < z$ искомая комбинация «+ - -».

Наконец, если $x < y < z < 0$, имеем, как и в первом случае, «- + -».

Аналогично рассматриваются и другие случаи взаимного расположения исходных чисел.

5. Предположим, что в десятичной записи числа N нет цифр 1, 2, 9. Это значит, что его первая цифра может быть любой между 2 и 9, т.е. имеет место двойное неравенство $3 \cdot 10^n \leq N < 9 \cdot 10^n$, где n – число десятичных знаков числа N . Умножив почленно это неравенство на 3, получим $9 \cdot 10^n \leq 3N < 27 \cdot 10^n$, откуда вытекает, что число $3N$ начинается как раз с одной из «запрещенных» цифр.

6. Пусть O – центр окружности, вписанной в данный треугольник ABC ; OM , OP и OK – радиусы этой окружности, проведенные в точки ее касания со сторонами AB , AC и BC соответственно (рис.4). Заметим, что углы между этими радиусами легко выражаются через углы исходного треугольника: поскольку радиусы, проведенные в точки касания, перпендикулярны касательным, а сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° , то $\angle MOP = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$; аналогично, $\angle MOK = 180^\circ - \beta$, $\angle KOP = 180^\circ - \gamma$.

Как известно, отрезок стороны треугольника от вершины до точки касания со вписанной окружностью равен разности между его полупериметром p и стороной, противолежащей этому углу. Поэтому $AM = p - a$ (где $a = BC$), тогда $A_1M = A_1A + AM = a + p - a = p$. Аналогично получается, что расстояния от вершин B_1 и C_1 до точек K и P равны p . Отсюда следует, что $A_1O = B_1O = C_1O$, т.е. O – центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, а ее радиус – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами p и r (r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC).

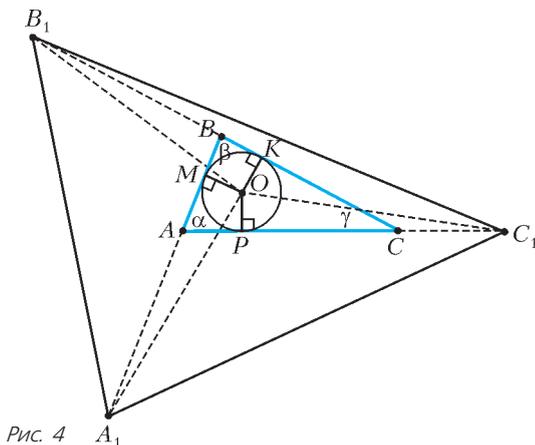


Рис. 4

Заметим, что углы B_1OC_1 и KOP имеют общую часть – угол KOC_1 – и дополняющие ее равные углы B_1OK и C_1OP (это равные углы равных треугольников B_1OK и C_1OP), поэтому эти углы равны, т.е. $180^\circ - \gamma = \angle KOP = \angle B_1OC_1$. Теперь из равнобедренного треугольника B_1OC_1 находим

$$\angle OB_1C_1 = \angle OC_1B_1 = \frac{180^\circ - \angle B_1OC_1}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Аналогично, из равнобедренного треугольника A_1OC_1 находим

$$\angle OA_1C_1 = \angle OC_1A_1 = \frac{\alpha}{2},$$

а из треугольника A_1OB_1 –

$$\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 = \frac{\beta}{2}.$$

Окончательно: $\angle A_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$; $\angle B_1 = \frac{\beta + \gamma}{2}$; $\angle C_1 = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

7. Да, найдется. Предположим, что ученого, у которого ровно один друг, на конгрессе нет. Пусть некий ученый A имеет самое большое на конгрессе количество друзей n (если таких несколько – рассмотрим любого из них). Тогда число друзей каждого из его друзей должно колебаться от 2 до $n - 1$ (число n , по условию, встретиться там не может, а число 1 встретиться там не должно по предположению). Но тогда какое-то число от 2 до $n - 1$ должно повториться, а это также запрещено условием. Получено противоречие.

Физика

- $v_\infty \approx 6,5$ км/с.
- Компрессор должен работать примерно $1/6$ часть времени цикла «работа–пауза».
- $P_{\text{нач}} \approx 1,2$ кВт.
- $I_1 = I_0 \sqrt{1 + \frac{N^2 e^3 v_\Phi}{2\pi^2 R^2 m I_0}}$ (здесь e – заряд электрона, m – его масса).
- $v = \frac{PRT}{r p_0 M S} \approx 1,5$ м/с (здесь $M = 18$ г/моль – молярная масса водяного пара).
- $v_0 = 2\sqrt{2gR}$ (оптимальная траектория касается полуцилиндра в двух симметричных точках, положение которых определяется углом 45° с вертикалью).
- $F = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{L^2}{R^2}\right)$.

Устный командный тур

Математика

- Всего имеется 7 звездочек, а найти надо первую. Поскольку сумма трех последних чисел равна 15, а последнее равно 7, то сумма шестой и седьмой звездочек равна 8, поэтому пятая равна 7 (ведь сумма пятой, шестой и седьмой звездочек также равна 15). Дальше аналогично: сумма третьей и четвертой звездочек равна 8, поэтому вторая равна 7. Поскольку сумма трех первых чисел 15, первое равно 1, а третье равно 7, второе число – первая звездочка – равно 7.
- Не обязательно. Контрпример: треугольники ABC , BCD , ACD и ABD в прямоугольнике $ABCD$.
- Из данной системы получаем:

$$\begin{cases} y + z = 2 - x, \\ yz = 1 - x(2 - x). \end{cases}$$

Поэтому y и z – корни квадратного уравнения $t^2 - (2 - x)t +$

$+1 - x(2 - x) = 0$. Ограничения на x получим из условия, что дискриминант этого уравнения неотрицателен:

$$(2 - x)^2 - 4(1 - x(2 - x)) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Если $x = 0$, из системы находим, что $y = z = 1$; при $x = \frac{4}{3}$ из системы получаем, что $y = z = \frac{1}{3}$.

Отсюда наименьшее значение x равно 0, наибольшее равно $\frac{4}{3}$.

4. Для минутной стрелки ситуация полностью симметрична: промежуток 10 – 11 ч диаметрально противоположен промежутку 16–17 ч, а в силу постоянства угловых скоростей обеих стрелок они будут под углом 180° в первом случае и под углом 0° во втором через одно и то же количество минут после наступления очередного часа. Поэтому конференция длилась ровно 6 часов.

5. С помощью меньшей стороны пластинки «отрежем» с двух концов от большей стороны прямоугольника квадраты размером 19×19 . Останется прямоугольник размером 35×19 , диагональ которого $\sqrt{35^2 + 19^2} < 73$, поэтому длинной стороны пластины хватит, чтобы найти центр полученного прямоугольника, а он совпадает с центром исходного.

6. Заметим, что нам выгодно «убивать» ладьей наибольшее возможное количество белых клеток. Если ставить ладью на белое поле, она убивает 7 белых клеток (4 по горизонтали и 3 по вертикали), а если на черное – то 8 белых клеток (по 4 клетки на горизонтали и вертикали). Поэтому выгодно ставить ладьи на черные клетки. Трех ладей недостаточно – они прикроют только 24 белые клетки, а их всего 32. Если поставить 4 ладьи на поля по черной диагонали через одну клетку, все белые клетки будут перекрыты.

7. Не обязательно. Контрпример: треугольники со сторонами 2, 4, 4 и 3, 3, 5.

8. а) Если бы n было нечетным, то, поскольку из каждой вершины графа, описывающего компанию, выходит нечетное количество ребер, общее количество знакомств, с одной стороны, должно быть целым числом, с другой стороны, оно равно половине произведения двух нечетных чисел – противоречие.

б) Нет. Контрпример – на рисунке 5.

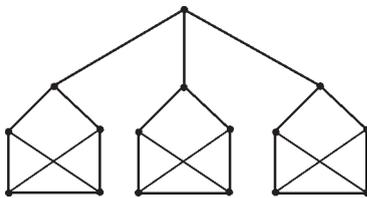


Рис. 5

9. Нельзя. Если бы разрезание было возможно, то из того что площадь исходного квадрата должна быть равна сумме площадей всех прямоугольников получилось бы уравнение в целых числах $10k + 27n = 196$, где k – количество прямоугольников размером 2×5 , а n – число прямоугольников 3×9 . Наименьшее значение n , при котором левая часть уравнения – число, заканчивающееся на 6, равно 8, но тогда эта левая часть больше чем $27 \cdot 8 = 216$ – больше правой.

10. Очевидно, что c – наибольшая сторона треугольника. Данное соотношение можно переписать в виде

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1.$$

Поскольку дроби, стоящие в левой части этого равенства,

меньше 1, имеют место неравенства

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3 < \left(\frac{a}{c}\right)^2, \quad \left(\frac{b}{c}\right)^3 < \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2.$$

Но это соотношение справедливо лишь для остроугольного треугольника (из теоремы косинусов для наибольшей стороны c это означает, что косинус противолежащего ей угла положителен – этот угол, наибольший в треугольнике, острый).

Физика

1. $V_p = V \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) = 20 \text{ л.}$

2. $h \approx \frac{m}{\pi R^2 \rho} = \frac{10^4 \text{ кг}}{3,14 \cdot 25 \text{ м}^2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3} \approx 13 \text{ см}$, где h – высота цилиндрической ямы с радиусом R , равным радиусу вертолета, а m – масса вертолета.

3. Сила уменьшится в n^5 раз.

4. Вблизи поверхности Земли воздух прогревается сильнее всего в районе экватора. Восходящие потоки воздуха на большей высоте растекаются в меридианальном направлении, постепенно отдавая тепло (в основном за счет излучения). Охладившийся воздух опускается к поверхности Земли в районе 30° северной и южной широт и далее движется обратно к экватору, образуя систему постоянно дующих ветров – пассатов.

5. 60° . 6. $a = g \frac{m_2}{m_1} = 15 \text{ м/с}^2$. 7. $Q = \nu RT = 6,65 \text{ кДж}$.

8. $L = \frac{Fh}{h - nF}$. 9. $m \approx 1 \text{ кг}$; $l \approx 2 \text{ м}$.

10. $T = \frac{mg}{4} \operatorname{ctg} \alpha = 25 \text{ Н}$.

История научных идей и открытий

Математика

1. а) Очевидно, несократимых дробей ровно $\varphi(n)$.

б) Таких дробей $\varphi(d_i)$.

в) После рассмотрения пунктов а) и б) это очевидно.

2. Обозначим искомую сумму $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$ че-

рез S , а данную сумму $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ – через a . Тогда

$$S = a + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + (n-1)x^{n-1} + \dots = a + x(1 + 2x + 3x^2 + \dots) = a + Sx,$$

значит,

$$S = \frac{a}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

3. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры данных равных непересекающихся окружностей радиуса r (черные окружности на рисунке

6). Построим окружность (красную), описанную около треугольника $O_1O_2O_3$. Пусть R – ее радиус, O – центр. Тогда окружности (синие) радиусов $R - r$ и $R + r$ с центром в точке O коснутся всех данных окружностей, для первой данные окружности будут располагаться вне ее, а для второй – внутри.

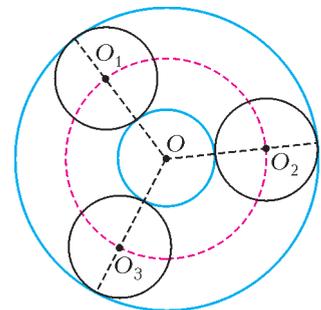


Рис. 6

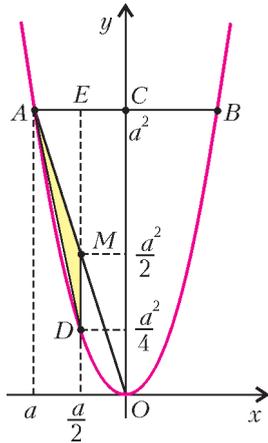


Рис. 7

Найдем площадь треугольника AMD (здесь AE – высота, опущенная на сторону DM):

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} DM \cdot AE = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) = -\frac{a^3}{16} = \frac{S}{8}.$$

5. Простое число (кроме числа 2) нечетно, поэтому его можно представить либо в виде $4n + 1$, либо в виде $4n + 3$; впрочем, нам несколько удобнее записывать такое число в виде $4n - 1$ (эта запись получается из предыдущей заменой n на $(n - 1)$, что по существу ничего не меняет. Докажем, что среди чисел вида $4n - 1$ имеется бесконечно много простых чисел (откуда и будет следовать утверждение задачи). Идея доказательства переключается со знаменитым доказательством бесконечности множества простых чисел, дошедшим к нам еще из «Начал» Евклида.

Предположим, что простых чисел вида $4n - 1$ лишь конечное число, и выпишем их все в порядке возрастания: $p_1; p_2; \dots; p_k$, (то, что такие числа вообще существуют, видно на примере чисел 3, 7, 11 и т.д.).

Рассмотрим число $a = 4p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k - 1$ и докажем, что у него имеется простой делитель такого же вида, не совпадающий, естественно, ни с одним из чисел p_1, \dots, p_k , – иначе число a тоже делилось бы на это простое число, чего, как видно из записи числа a , нет.

Действительно, если такого простого делителя у числа a нет, то все его нечетные простые делители имеют вид $4n + 1$, но тогда, как легко видеть, и их произведение тоже имеет вид $4n + 1$, что противоречит виду числа a .

Физика

- а) Альберт Майкельсон. б) Измерение скорости света в различных направлениях с помощью интерференционной картины. в) Интерферометры и дифракционные решетки. г) Кадмий. д) Бетельгейзе.
- а) Аристотель; 384–322 до н.э.; древнегреческий ученый. б) Физика – это наука о природе. Античные ученые не доверяли эксперименту, предпочитая ему логические заключения. в) Астрономия, метеорология, биология, риторика, поэтика и т.д. г) Ликей в Афинах. д) Александр Македонский. е) Геоцентрическая Вселенная, отрицание вакуума и атомизма, зависимость скорости свободно падающего тела от массы.
- Манфред фон Арденны.
- Обычная материя (4–5%), темная материя (23%) и темная энергия (73%).
- а) В процессе сверления пушечных стволов нагреваются и сверло и ствол, т.е. теплород рождается из ничего. б) Теплоемкость, поток тепла.

4. Пусть a – абсцисса точки A (рис.7). Тогда ее координаты есть $(a; a^2)$. Координаты точки M – середины отрезка OA – равны полусуммам координат его концов, т.е. $M = \left(\frac{a}{2}; \frac{a^2}{2} \right)$, а у точки D та же абсцисса и другая ордината (она лежит на параболе): $D = \left(\frac{a}{2}; \frac{a^2}{4} \right)$.
Данная площадь треугольника AOB равна (с учетом отрицательного знака числа a)

$$S = \frac{1}{2} (-a) \cdot a^2 = -\frac{a^3}{2}.$$

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

- $s = \frac{v^2 h}{gl}$ 2. $A = \frac{mv^2}{2} \left(\frac{g^2 R^2}{2v^4} + \sqrt{2} - 1 \right)$.
- $v_x = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{gR}$.
- $p = m(\sqrt{2g(l+b)} - v)$; $Q = \frac{mg(l+b)}{2} - \frac{kb^2}{2} - \frac{(M+m)v^2}{2}$.
- $v = \frac{5p}{7M}$ 6. $\eta = 1 - \frac{5}{3 + (2n \ln n)/(n-1)}$, где $n = \frac{p_1}{p_2}$.
- $\Delta F = \frac{3Q^2 r}{32\pi\epsilon_0 l^3}$ 8. $B = \sqrt{1,26 \frac{mR}{a^2 t}}$ 9. $I = \frac{I_0}{25}$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
seemat.ru

журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,
phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

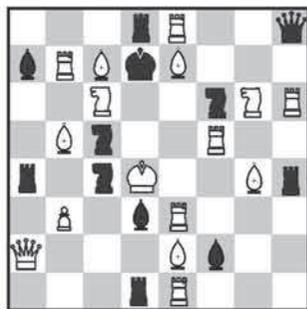
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

РЕКОРДЫ АЛЕКСЕЯ ХАНЯНА

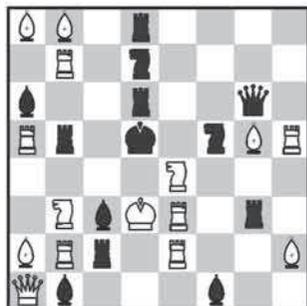
Многие читатели «Шахматной странички» присылают в «Квант» свои задачи и решения, уточнения опубликованных задач, свои находки и рекорды. Одним из самых активных читателей является Алексей Ханян. Свои интересные письма он посылал в журнал еще будучи школьником, но, и закончив мехмат МГУ, продолжает читать рубрику, попутно устанавливая разные интересные рекорды. Вот некоторые из них.

1. Еще в начале прошлого века было придумано следующее задание. Скопировать легальную позицию (превращенные фигуры допускаются), в которой обе стороны по очереди дают наибольшее число вскрытых шахов. Более 70 лет держался рекорд – 13 вскрытых шахов подряд, потом рекорд был побит на один шах. И вот за дело принялся Ханян.



В этой позиции следуют 15 вскрытых шахов: 1. ♖e5+ ♘:b7+ 2. ♘:a7+ ♙e6+ 3. ♘5d6+ ♘:e3+ 4. ba+ ♘c4+ 5. ♚:f2+ ♘:g4+ 6. ♘:h8+ ♘g6+ 7. ♘:d1+ ♘ge3+ 8. ♘:h4+.

Алексей очень гордится своей находкой, а потом взял да и улучшил рекорд сразу на два хода!



Здесь обе стороны объявляют 17 вскрытых шахов подряд, девять – белые и восемь – черные: 1. ♘bc5+ ♚b3+ 2. ♘:a6+ ♘:a5+ 3. ♚7:b3+ ♙e5+ 4. ♘:d6+ ♘:e3+ 5. ♘e4+ ♘:b8+ 6. ♘:d8+ ♘f5+ 7. ♘:g3+ ♚e2+ 8. ♚b1+ ♚b2+ 9. ♘:f1+.

Попробуйте побить этот суперрекорд.

2. Известна старинная позиция С.Лойда. Все белые фигуры стоят на исходных местах, черный король на h4. Он получает мат всего за 3 хода: 1. d4 ♘b5 2. ♙d3 и 3. ♙h3×; 1... ♙g4 2. e4+ ♘h4 3. g3×. Поле h4 – единственное поле, на котором одинокий черный король (при полном комплекте белых фигур, стоящих на исходных местах) получает мат так быстро. При симметричном расположении (черный король на a4) дело затягивается на два хода: 1. c4 ♘b4! (1... ♙a5 2. ♙b3 ♘a6 3. ♙b8 ♘a5 4. ♙b5×) 2. d4 ♘a5 3. ♙b3 ♘a6 4. ♙b8 ♘a5 5. ♙b5×.

Если король стоит на своем законном месте e8, то мат дается только на шестом ходу. А где черный король чувствует себя «надежнее» всего? Оказывается, в самом центре доски, на поле e4, здесь его можно заматовать лишь на седьмом ходу. Это доказал Ханян, вот его решение.

Сначала следует 1. d4, 2. ♙d3. Если теперь черный король на g4, то решает 3. ♙g5+ ♘h4 4. g3×. Если нет, то следует 3. ♙h7. Если король на d5, то 4. ♙d7+ ♘c4 5. b3+ ♘b4 6. ♘d2×, или 4... ♘e4 5. f3×. Если нет, то следует 4. e4 с вариантами: 4... ♘a4(a5) 5. ♙b7 ♘a5 (a4) 6. ♘b5×; 4... ♘b4 5. ♙f5 ♘a4 6. ♙b5×; 4... ♘b6 5. ♙d7 ♘a5 6. ♙b5×; 4... ♘c6 5. ♘f4 ♘b6 6. ♙c7×; 4... ♘d6 5. ♘b5 ♘e6 6. ♘g5 ♘d6 7. ♙e7×; 4... ♘e6 5. ♘g5 ♘d6 6. ♘b5 ♘e6 7. ♙d7×; 4... ♘f6 5. e5+ ♘e6 6. ♘c4×.

3. На следующей диаграмме представлена рекордная позиция – легальная, с превращенными фигурами, но без превращения пешек, – в которой у белых 50 вынужденных матов, т.е. матует лобой их ход.



4. А вот забавная разновидность последней темы. При каком наибольшем p существует позиция, где $p - 1$ ход белых ведет к мату, а после одного, единственного, хода мат дают черные?

Иными словами, ровно один из прямых матов заменен здесь на обратный. Замечательный рекорд установил Ханян – на следующей диаграмме у белых 48 ходов ($p = 48$), из которых 47

матуют, а после одного мат вынуждены объявить черные: 1. ♙e6+ ♚:e6×.



5. Сколько различных ходов существует на шахматной доске?

Ход характеризуется фигурой, которая его совершает, цветом фигуры, начальным и конечным полями, взятой фигурой (при взятии) и превращенной фигурой (при превращении). Надо учесть также рокировки. Точный анализ показывает, что всего на доске существуют 43732 разных хода. Этому вопросу можно придать шуточный характер.

Сколько ходов могут победно завершить партию?

Не надо ничего считать, таких ходов – 43732. Ведь после любого из них партнер может... немедленно сдаться!

А вот Ханян подошел к данному вопросу серьезно. Если речь идет не о сдаче партии, а о реальном мате, то приведенное число придется немного уменьшить. Дело в том, что есть ряд ходов, которые не матуют: маневр слона из угла в угол, ход короля из угла или с края доски на край. Алексей провел расчет нематующих ходов для белых.

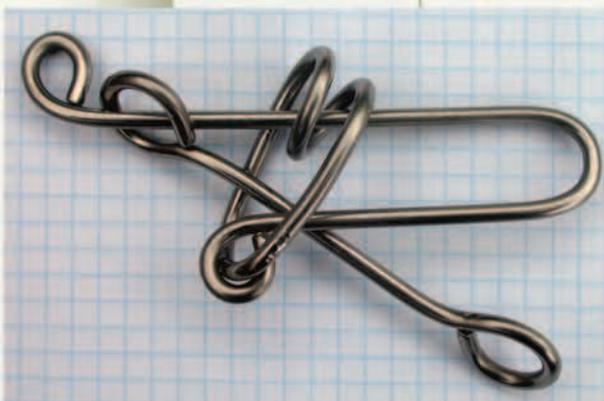
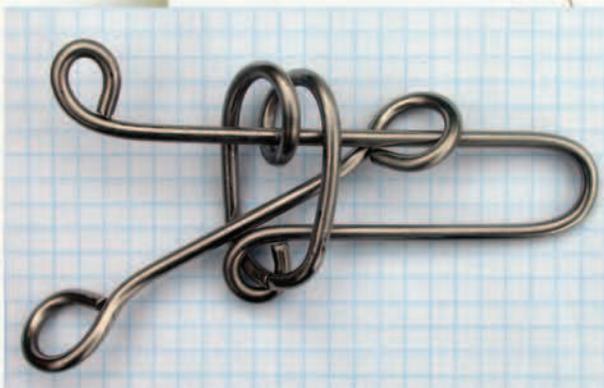
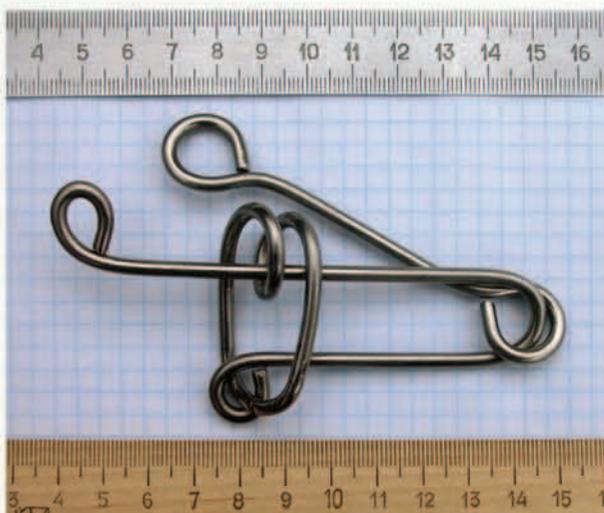
Слон из угла в угол. Углов четыре; у слона пять возможностей: ничего не брать, брать ферзя, ладью, слона или коня. Всего $4 \times 5 = 20$ ходов.

Король из угла. Таких ходов двенадцать, а взятий пять (добавляется пешка). Ход ♘a1:♠ в 1 невозможен, и таких ходов четыре. Всего $12 \times 6 - 4 = = 68$ ходов.

Король с края на край. Крайних неугловых полей 24, у каждого из них по два соседних крайних, взятий по-прежнему пять. Нельзя взять пешку, находясь на первой и последней горизонтали (таких полей двенадцать, а пешку можно поставить двумя способами), а также ходом ♘a2:♠a1 (таких ходов четыре). Всего $24 \times 2 \times 6 - - 12 \times 2 - 4 = 260$ ходов.

Итак, у белых $20 + 68 + 260 = 348$ нематующих ходов. А поэтому всего матующих ходов $43732 - 2 \times 348 = = 43036$.

Е.Гук



Психологический “Завиток”

Новая головоломка Кирилла Гребнева состоит из трех зацепленных друг за друга деталей: U-образной скобы, замкнутого завитка и ручки с двумя петлями. Задача состоит в том, чтобы отцепить ручку от скобы.

Для изготовления “Завитка” вам понадобятся три куска стальной или медной проволоки диаметром 3–4 мм и длиной 25, 22 и 14,5 см.

Головоломка изображена в натуральную величину на фоне клетчатой бумаги.

Здесь же приведены фотографии двух промежуточных этапов решения этой головоломки.

(Продолжение – на с.5 внутри журнала)

Коллекция Коллекция Коллекция
ГОЛОВОЛОМКИ

