

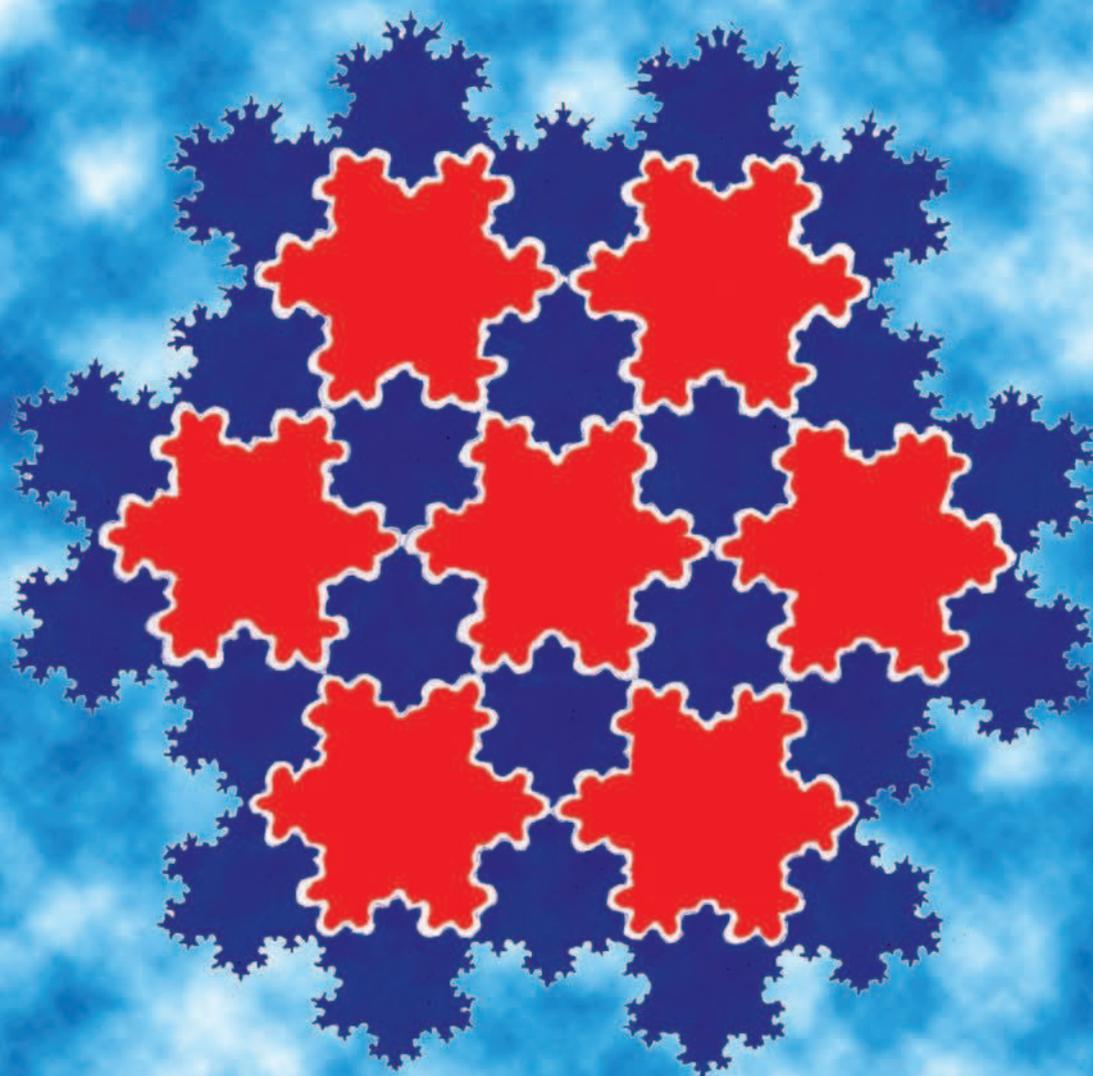
ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2008 · №1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



«Невозможные» объекты



На картине современного бельгийского художника Жоса де Мея изображен так называемый «невозможный» объект (см. статью «“Невозможные” фигуры» в «Кванте» № 6 за 2007 г.). Верх и низ арки в пространстве ориентированы по-разному — это можно заметить, закрыв ладонью сначала верх картины, а затем — низ. Другие объекты, представленные на картине, вполне реальны. Это модель срезанного куба, на котором разместилась сова — символ мудрости и теоретического знания, а также росток плюща — его изгибы подчеркивают объемность конструкции.

В. Алексеев

журнал © Квант ЯНВАРЬ 2008 № 1 ФЕВРАЛЬ 2008

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Ю.А.Осипьян

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегии*), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегии*), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уровев,
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро



Квантум

© 2008, РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- К 100-летию И.К.Кикоина
2 О Кикоине, единицах СИ и стандартах. *Ю.Брук*
3 «Вот Квант, который построил Исаак...» *А.Савин*
4 Ударные волны и детонация. *Л.Белопухов*
9 Множества Жюлиа. *Н.Долбилин*

НАШ КАЛЕНДАРЬ

- 15 Лев Давидович Ландау

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М2071–М2080, Ф2078–Ф2087
17 Решения задач М2051–М2055, Ф2063–Ф2072

К М Ш

- 25 Задачи
26 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
26 Призрак Леонардо. *А.Акулич*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 30 Три эссе на физические темы. *Р.Винокур*
34 Тема с вариациями. *В.Эпштейн*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Тепловое равновесие

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Не пренебрежем трением качения... *А.Стасенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 38 Оригами и построения. *А.Петрунин*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 40 Эта «простенькая» кинематика. *В.Трояновский*

ИНФОРМАЦИЯ

- 44 Малый мехмат МГУ

ВАРИАНТЫ

- 45 Материалы вступительных экзаменов 2007 года
53 Ответы, указания, решения
Наша обложка (14)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Н.Долбилина*
II *«Невозможные» объекты*
III *Шахматная страничка*
IV *Коллекция головоломок*



В праздновании 100-летнего юбилея академика
И.К.Кикоина финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХНАБЭКСПОРТ»

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

О Кикоине, единицах СИ и стандартах

Ю.БРУК

ИДЕЯ О ТОМ, ЧТО ВСЕ УЧЕБНИКИ ФИЗИКИ ДЛЯ школ и вузов надо писать, используя Международную систему единиц, т.е. СИ, в середине 80-х годов прошлого века стала чуть ли не государственным стандартом. Разумеется, всякие учебные пособия можно писать, используя разные системы единиц. Важно лишь, чтобы студент, школьник или уже взрослый специалист умел переводить единицы СИ, скажем, в единицы системы СГС или наоборот.

Однако стремление облегчить жизнь изучающим физику и пользоваться одной-единственной системой

единиц может довести и до абсурда. Так, для учебников физики, по которым учатся в технических вузах, единицы СИ действительно удобны, особенно если иметь в виду технические приложения (скажем, измерять ток в амперах, электрическое напряжение в вольтах, а длину в метрах). Но это, в известном смысле, дело привычки. Студенты же физических вузов (факультетов) должны ясно понимать, что в теоретической физике Международная система единиц

неудобна хотя бы потому, что размерности векторов, входящих в уравнения Максвелла – основные уравнения электродинамики, – в этой системе разные. Можно, конечно, и уравнения Максвелла записывать в единицах СИ, но удобнее писать их в системе СГС.

Вот почему попытка «узаконить» одну систему единиц и изгнать из печатных изданий другие, например систему СГС, вызывала у преподающих и изучающих физику ощущение неправильности. С другой стороны, отказ от этого приводил к конфликтам с издателями, редакторами и не очень грамотными читателями.

Исаак Константинович Кикоин (ИКК) не был, конечно, «железным сторонником» единиц СИ, но он был еще и одним из руководителей комиссии по

школьным учебникам в Министерстве просвещения СССР. А учебники полагалось, как уже говорилось, писать, используя именно эту систему единиц. Конечно, и журнал «Квант» в физических статьях перешел на единицы СИ.

Случилось так, что к 70-летию академика Я.Б.Зельдовича было решено напечатать его популярную статью о космологии. Называлась статья «Вселенная».

Яков Борисович был идеальным автором для популярного журнала. Он тщательнейшим образом сам отредактировал свою статью, она не требовала никакой

дополнительной правки. Исаак Константинович же был идеальным главным редактором – все статьи по физике, готовящиеся для публикации в «Кванте», он читал самым внимательнейшим образом. Я выступал в формальной роли редактора статьи Зельдовича. Никаких проблем со статьей вроде бы не было, но показать ее ИКК полагалось.

Договорившись о визите, я приехал в назначенное время к ИКК домой и молча сидел на диване в его кабинете,

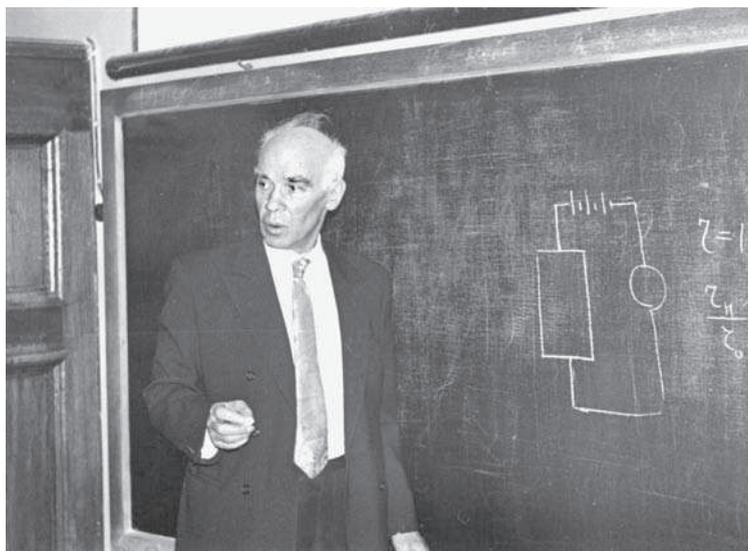
пока он читал статью. ИКК читал медленно и был как будто доволен. Но неожиданно его густые брови поползли навстречу друг другу, и на лице обозначилось состояние, которое я определил как ожидаемую бурю. Кончив читать, ИКК отодвинул текст, помолчал и сказал мне:

– Не пойдет.

– Исаак Константинович, – возразил я, – что же Вам не нравится? Статья-то очень хорошая.

– Да, – сказал ИКК, – статья хорошая, но не пойдет. Яков Борисович написал ее, используя единицы СГС, а должны быть единицы СИ.

Надо сказать, что в этом конкретном случае проблемы не было. Достаточно было заменить граммы на



килограммы, а сантиметры на метры. Третья единица, используемая в статье, была секунда, но она секунда и в СИ, и в СГС. Тем не менее, я осмелился сказать, что такая замена может не понравиться автору, потому что в космологии не принято использовать в научных текстах метры, более привычно использовать сантиметры или уж парсеки.

– Я сейчас позвоню Зельдовичу, – произнес ИКК и набрал его номер.

– Яша, – сказал ИКК в трубку, – ты написал замечательную статью, и мы ее к твоему дню рождения в «Кванте» напечатаем. Но надо единицы СГС (см, г, с) заменить на единицы СИ (м, кг, с).

Что ответил Зельдович, я не знаю, но на лице ИКК опять обозначилась буря. Положив телефонную трубку, он сидел некоторое время молча, а потом сказал мне:

– Яша говорит, что если он будет писать в единицах СИ, то над ним все смеяться будут.

– И что же будем делать? – спросил я.

– Ничего, – сказал ИКК, – оставим в статье единицы СГС. Но в скобках напишем еще и единицы СИ.

После этого он, наконец, улыбнулся, и я понял, что бури не будет.

Может быть, этот эпизод и не заслуживает столь длинного изложения. Но мне кажется важным еще раз подчеркнуть, что ИКК абсолютно все понимал. Он вовсе не был упрямым, но был дисциплинированным. То, что полагалось требовать от других, он старался выполнять и сам. И еще. Я.Б.Зельдович и К.К.Кикоин были людьми очень ответственными, они не могли отдать в печать статью, которая в каком-либо смысле выглядела бы «сырой».

Такая вот история.

«ВОТ КВАНТ, КОТОРЫЙ ПОСТРОИЛ ИСААК...»

А. САВИН

Вот Квант, который построил Исаак,
А вот ученица,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

Вот автор статьи – знаменитый ученый,
Который писал ее так увлеченно
Для этой без меры серьезной девицы,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

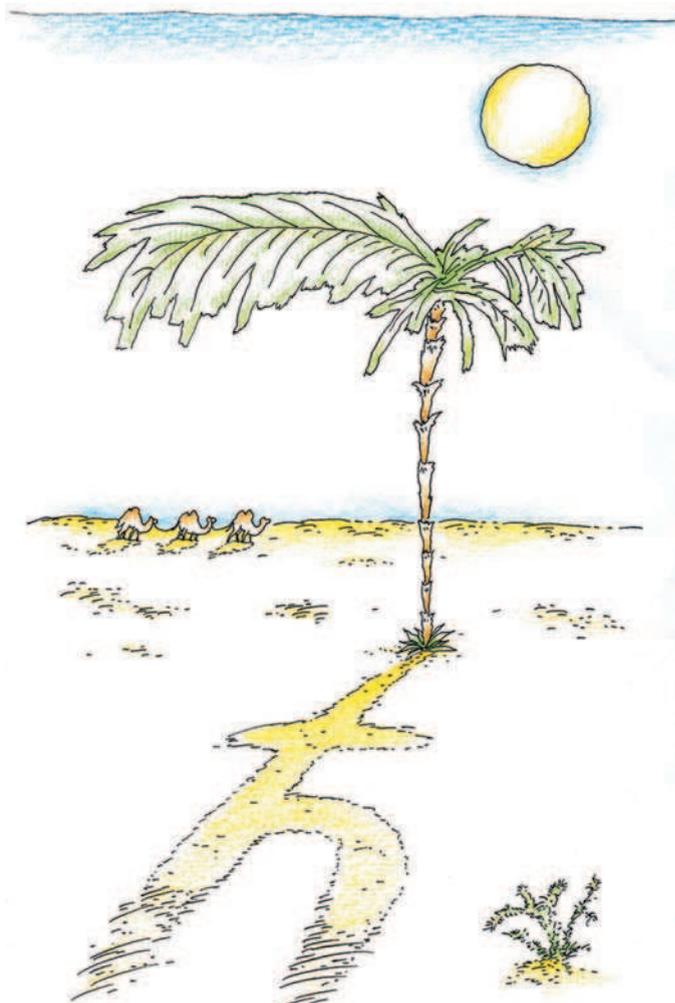
А вот рецензент – давний член редсовета,
Который прочел сочинение это,
Представив себя симпатичной девицей,
Которая тщетно мурыжит страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.

А это редактор, статью эту правивший,
Лишь автора имя на месте оставивший,
Чтоб даже тупейшая в мире девица
Смогла хоть единожды в год похвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А это художник в глубокой прострации
Пытается выдумать те иллюстрации,
Которые так очаруют девицу,
Что сходу она прочитает страницу
В Кванте, который построил Исаак.

Это стихотворение взято из специального номера журнала «Квант», выпущенного в единственном экземпляре к 75-летию И.К.Кикоина.

Вот главный редактор – большой академик,
Он правит (за это не требуя денег),
Чтоб делалось все только так и вот так,
Поскольку он есть этот самый Исаак,
Который по уши влюбился в девицу,
Которая пальчиком тычет в страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.



Ударные волны и детонация

Л. БЕЛОПУХОВ

В СТАТЬЕ «ВЗРЫВ» ГОВОРИЛОСЬ О ТОМ, ЧТО всякий взрыв обязательно сопровождается образованием ударных волн в пространстве и что ударная волна есть непреходящий элемент детонационного взрывного процесса во взрывающейся газовой (или пылевоздушной) среде и в конденсированном взрывчатом веществе.

Немного о газовой динамике

Ударные волны – это очень интересное явление природы. Их существование было предсказано многими учеными, в частности знаменитым математиком Риманом. Его имя связано прежде всего с развитием идей своего учителя Гаусса в области геометрии. В 1854 году 28-летний Риман дал общую идею математического пространства, а затем подробно разработал одну из неевклидовых геометрий, с тех пор носящую его имя. Но Риман внес вклад во многие области математики. Так, в работах по теории дифференциальных уравнений он обнаружил (на бумаге) возможность ударных волн. Именно по этому поводу возникло крылатое изречение – «явление возникло на кончике пера теоретика».

Дифференциальные уравнения, которые исследовал Риман, представляют собой математический аппарат науки, которая называется газовой динамикой. Она изучает, как следует из названия, движение воздушных масс, в частности бури и ураганы, течение газа по трубам, движение газа в турбинах и соплах ракетных двигателей и многое другое.

Основным газодинамическим уравнением является закон Ньютона, примененный к элементу газовой среды (в этом случае оно называется уравнением Эйлера). Но поскольку элемент газа при движении изменяет свою плотность, а часто и температуру, то кроме силовых необходимо использовать и энергетические (термодинамические) уравнения.

Одним из простых следствий решений системы уравнений газовой динамики является волновое уравнение, в котором скорость волны для идеального газа зависит только от температуры. Это – звуковые волны, т.е. продольные колебания элемента газа. Скорость звука равна

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где T – абсолютная температура, M – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, γ – показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей при постоянном давлении и постоянной температуре. Для воздуха при температурах меньше 1000 К показатель адиабаты равен 1,4. Скорость звука при этом равна

$$v = 20\sqrt{T} \text{ (м/с)},$$

что дает для стандартных условий 342 м/с.

Если же учитывать неидеальность газа, возможность высоких температур, при которых показатель адиабаты непостоянен и выражается сложной функцией параметров состояния, то система газотермодинамических уравнений становится довольно сложной.

Поскольку газовая динамика не интересуется отдельными атомами или молекулами, а рассматривает элемент газа, который в теории может быть бесконечно малой величиной, то в дифференциальных уравнениях газовой динамики и в их решениях все параметры состояния – непрерывные функции координат и времени. Но в 1860-е годы Риман показал, что существует особое решение системы газотермодинамических уравнений. Не общее решение, методы получения которого он разрабатывал, и не частные решения, которые вытекают из общего решения при использовании начальных и граничных условий, а именно особое решение, которое нельзя получить стандартными математическими методами. Это особое решение представляет собой разрыв функций давления, плотности и скорости движения среды, т.е. мгновенный, не имеющий ширины скачок параметров. Этот скачок и получил название ударной волны.

Слово «волна» не совсем точно передает характер явления, поскольку в обычном понимании волна характеризуется периодичностью, частотой, а скачок – это однократное резкое изменение. Правильнее было бы назвать явление ударным импульсом.

Возникновение ударной волны

Образование ударной волны проще всего представить на примере плоского движения газа в трубе, в которую вдвигается ускоряющийся поршень. Когда поршень приходит в движение и начинает перемещать и сжимать прилегающий к нему слой газа, известие об этом событии (повышении давления и плотности) распространяется в газе со скоростью звука. В газе возникает «кусочек» волны сжатия (четверть волны) с

непрерывным распределением параметров (рис.1,а). Но повышение давления и плотности соответствует повышению температуры. Это означает, что скорость звука за началом (фронтом) волны сжатия непрерывно увеличивается, достигая максимума на границе газа с

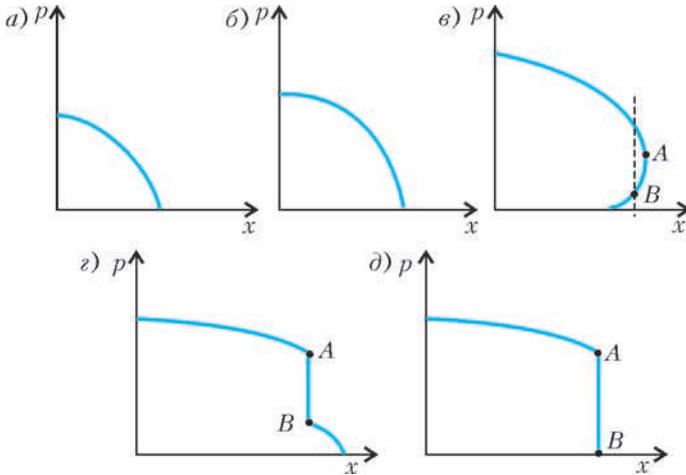


Рис.1. Профиль давления в трубе (p – давление, x – расстояние от поршня)

поршнем. Поэтому по мере движения поршня и увеличения его скорости возмущения от него с известием о возрастании давления и плотности догоняют переднюю часть волны сжатия и усиливают ее (рис.1,б).

Со временем форма волны сжатия изменяется. Это происходит по двум причинам. Во-первых, как уже говорилось, в волне непрерывно увеличивается температура, следовательно, увеличивается и «местная» скорость звука. А во-вторых, скорость звука складывается со скоростью поршня, которая также непрерывно увеличивается. Профиль волны становится совершенно непохожим на четверть синусоиды (рис.1,в). Казалось бы, участок волны с давлением p_A сможет даже перегнать участок с давлением p_B . Но эта ситуация абсурдна, ибо в одной точке x не может быть двух разных давлений.

Развитие волны сжатия будет происходить по другому сценарию. Сначала может появиться вертикальная касательная (рис.1,г), а потом и полноценный скачок – ударная волна (рис.1,д). Естественно, что скорость перемещения разрыва, т.е. скорость ударной волны, больше скорости звука в невозмущенном газе и больше скорости движения газа (но не звука) за фронтом волны.

Во времена Римана термодинамика еще только создавалась, и он изучал не конкретные уравнения, в которые входят параметры газа (например, показатель адиабаты), а математические методы нахождения решений систем уравнений, похожих на уравнения газовой динамики. И математика подсказала возможность особого решения – скачка параметров. Но ученые, развивавшие газовую динамику, не верили в то, что такие скачки могут реально существовать в природе – мало ли что могут показать математические «игры». Кажется, и сам Риман был в числе сомневающихся.

Сто лет назад проверить наличие ударных волн

экспериментом было невозможно – соответствующие приборы не имели необходимого разрешения по времени и могли зафиксировать только усредненные величины. Но внезапный и сильный звук при грозе или взрывах приводил к мысли о существовании этого явления. Выявлены были и другие скачки – например, внезапный переход некоторых магнетиков из парамагнитного состояния в ферромагнитное и иные так называемые фазовые переходы второго рода, в которых характеристики вещества меняются скачкообразно. Примером скачка может служить и резкое изменение характера излучения энергичных электронов системы, когда их концентрация достигает определенной величины (лазеры и мазеры). И все это разрешено фундаментальными законами природы.

Уравнение Гюгонио

Приведенное рассмотрение механизма образования ударных волн при всей его элементарности было сделано только в начале XX века и тогда же было найдено соотношение между параметрами состояния до и после разрыва. Для этого оказалось достаточно использовать закон Ньютона, закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) и условие отсутствия местных скоплений газа (закон непрерывности массы), или, другими словами, закон постоянства расхода газа, отнесенного к площади сечения трубы. Эти уравнения легко написать. Сделаем это.

Один и тот же элемент газа до ударной волны имеет массу $\rho_0 V_0 = \rho_0 S v_0 \Delta t$, где ρ_0 и v_0 – плотность и скорость движения этого элемента, S – сечение трубы, Δt – время прохождения элемента газа через фронт волны, а за фронтом волны его масса равна $\rho S v \Delta t$ (ρ и v – параметры газа за фронтом).

Запишем закон Ньютона в виде

$$\Delta F = \frac{mv - m_0 v_0}{\Delta t}.$$

Поскольку

$$\Delta F = \Delta p S = (p_0 - p) S,$$

имеем

$$p - p_0 = \rho_0 v_0^2 - \rho v^2.$$

Закон сохранения энергии в данном случае совпадает с законом Бернулли:

$$u_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} = u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

где u_0 и u – внутренние энергии элемента газа, в расчете на единицу массы, до и после фронта волны.

Закон непрерывности массы можно записать в виде

$$\rho_0 S v_0 \Delta t = \rho S v \Delta t, \text{ или } \rho_0 v_0 = \rho v.$$

Для идеального газа

$$u_0 = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad u = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}.$$

Из написанных уравнений несложно получить такое соотношение:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{(\gamma + 1)\rho - (\gamma - 1)\rho_0}{(\gamma + 1)\rho_0 - (\gamma - 1)\rho}.$$

Это соотношение можно упростить, если учесть, что для воздуха (двухатомный газ) $\gamma = 1,4$, и перейти от плотностей к удельным объемам:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{6 - \frac{V}{V_0}}{6 \frac{V}{V_0} - 1}.$$

Два последних выражения называют уравнением Гюгонио (в честь французского ученого, получившего их в 1903 году), а соответствующие графики – адиабатой Гюгонио.

На рисунке 2 представлены (в полулогарифмическом масштабе) три кривые: кривая 1 соответствует изотермическому процессу, кривая 2 – адиабатическому (для воздуха), кривая 3 – это адиабата Гюгонио. При не очень сильном сжатии, например в 2

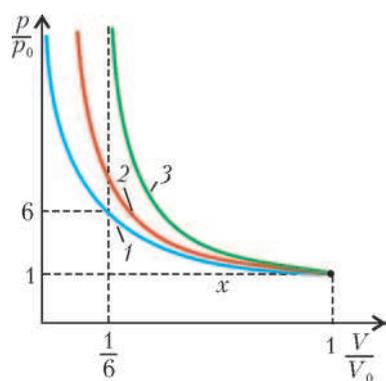


Рис.2. Изотерма (1), адиабата (2) и адиабата Гюгонио (3)

раза, соответствующие значения относительного давления немного отличаются друг от друга и составляют 2; 2, 7 и 2, 75. Но когда относительное сжатие равно 6, то соответствующие значения для относительного давления составляют 6; 12, 3 и... бесконечность. Согласно ударной адиабате, при сильном (почти шестикратном) сжатии давление в ударной волне может скачком возрасти до огромной величины. А это значит (в соответствии с уравнением состояния), что до огромной величины может подскочить и температура.

При обычном адиабатическом сжатии в 5,75 раза абсолютная температура возрастает в 2, 45 раза – по уравнению адиабаты $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}$. А по уравнению Гюгонио температура увеличивается в 23,3 раза – от 300 К до 6990 К, что выше температуры излучающего слоя Солнца (6000 К).

При ядерном взрыве образуется сильная ударная волна, в которой давление возрастает в 1000 и более раз. Температура при этом, согласно уравнению Гюгонио, возрастает в 167 раз! Правда, более точные расчеты приводят к увеличению температуры в этом случае «всего» в 47 раз, т.е. до 14000 К. Ударная волна выглядит при этом как сверхраскаленный (огненный) шар, который ярче Солнца в 1000 раз. (При этом расчете нужно учесть, что энергия излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры, а огненный шар видится на расстоянии 10 км от ядерного взрыва под углом в 5,3 раза больше, чем солнечный диск). Вот почему первая в мире популярная книга о ядерных взрывах (американского ученого Р.Юнга) имела название «Ярче тысячи солнц».

Физика ударной волны

Но есть еще одно важнейшее отличие ударного сжатия от изотермического или адиабатического. Если снять давление за фронтом ударной волны (например, тем или иным способом вернуть поршень в начальное положение), то газ после разгрузки не вернется в исходное состояние с параметрами p_0 , ρ_0 , T_0 . Ударное сжатие – процесс необратимый. При расширении сжатого в ударной волне газа не может образоваться ударная волна расширения. Давление и плотность газа и убегающего назад поршня будут уменьшаться, и информация об этом не будет накапливаться, как в случае сжатия, поскольку скорость звука теперь около поршня меньше, чем вдали от него, где температура еще не успела понизиться. Поэтому ударный фронт быстро «размоется», скачок исчезнет, и переход сжатого газа в исходное состояние будет происходить обычным адиабатическим путем. А это значит, что если плотность газа и объем вернутся к первоначальным значениям (масса газа не изменится), то давление газа будет больше исходного (рис.3). Больше будет и его температура.

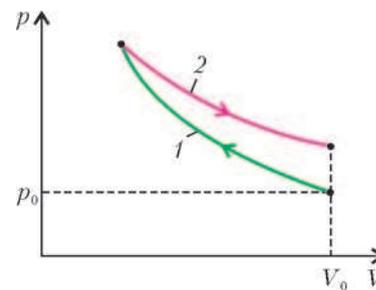


Рис.3. Адиабата Гюгонио (1) и адиабата разгрузочного процесса (2)

Таким образом, процесс «ударное сжатие – адиабатическое расширение» приводит к необратимому нагреву газа. Это означает, что работа, затраченная на ударное сжатие газа, не компенсируется работой газа при его расширении. Часть работы «застревает» в газе, как при всяком необратимом процессе. Адиабата Гюгонио не является графиком обратимого процесса, а просто отражает соотношение параметров газа до и после ударного скачка. При ударном сжатии физический смысл имеют только две точки ударной адиабаты – начальная и конечная. Можно сказать, что ударная адиабата – это геометрическое место точек на графике зависимости давления от удельного объема (или об плотности), достижимых путем ударного сжатия газа из данного начального состояния.

А как изменится газодинамическая теория, если учесть реальность молекулярной структуры газа? При этом придется учитывать передачу энергии и импульса от одних молекул к другим за фронтом волны, т.е. так называемые нестационарные явления переноса. Кроме газодинамических уравнений нужно будет учесть и уравнения нестационарной термодинамики – уравнения вязкости (передачи импульса) и теплопроводности (передачи кинетической энергии). Эта более сложная задача принципиально решается, хотя аналитическое решение возможно лишь для некоторых упрощенных случаев. В результате решения можно определить толщину ударного фронта, который уже не будет разрывом в математическом смысле. Для не очень сильных ударных волн эта толщина оказывается по-

рядка нескольких длин свободного пробега молекул в невозмущенном газе ($\sim 10^{-6}$ м), а в пределе с увеличением интенсивности волны стремится к одной длине свободного пробега ($\sim 10^{-7}$ м).

Молекулярно-кинетическая теория ударных волн вносит поправки и в адиабату Гюгонио, точнее в величину показателя адиабаты γ . С учетом колебательного движения атомов в двухатомных молекулах для воздуха $\gamma = 9/7 \approx 1,286$. Соответственно, уравнение адиабаты Гюгонио принимает вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{8 - \frac{V}{V_0}}{8 \frac{V}{V_0} - 1},$$

а предельно возможное сжатие в волне для идеального газа получается уже не 6, а 8.

Как возникают ударные волны?

Кроме разобранный примера движения поршня в трубе, удобного для теории (одномерная задача), ударные волны возникают во многих случаях сверхзвуковых движений. Например, при сверхзвуковом истечении газа из ракетного сопла внутри него, недалеко от выхода, возникает скачок давления. При сверхзвуковом движении какого-либо тела в воздухе (например, самолета) оно действует на воздух, как поршень, и в воздухе возникает коническая ударная волна, сопровождающая летящее тело. Если такая ударная волна достигает поверхности земли, то она может произвести разрушительный эффект (поломку крыши, разрушение оконных рам и стекол и т.п.). Поэтому переходить от дозвуковой скорости к сверхзвуковой (преодолевать «звуковой барьер») самолетам разрешается только на определенной высоте, когда интенсивность сопровождающей самолет ударной волны при достижении земной поверхности ослабевает до безопасной величины. Человек при этом слышит резкий звук с раскатами, очень похожий на звук при взрыве.

Самый же распространенный случай возникновения ударных волн – это взрывы. Ударные волны сопровождают все виды взрывов – подземные, подводные, приземные и воздушные, независимо от их природы. В статье «Взрыв» рассматривались взрывы различной природы – химические, ядерные, тепловые, электрические, механические. Общее для всех взрывов свойство – достаточно быстрое (внезапное) превращение части энергии, содержащейся в источнике взрыва, в кинетическую энергию продуктов взрыва.

В случае сферической симметрии источника взрыва почти при всех типах взрыва возникает сферический «поршень», представляющий собой сильно сжатый и нагретый газ, стремящийся расширяться. В окружающей среде (воздухе) образуется сферическая ударная волна. Поскольку ускоряющийся вначале газовый поршень по мере увеличения размеров замедляет свое движение (прежде всего, за счет сферичности расширения), за ударной частью волны следует волна разрежения. Мгновенный профиль давления в такой волне изображен на рисунке 4.

Было получено (в первую очередь для военных целей) выражение для давления во фронте ударной взрывной волны как функции расстояния



Рис. 4. Мгновенный профиль сферической взрывной волны (p_0 – атмосферное давление)

от точки взрыва. Из общих соображений теории подобия в механике сплошных сред это давление должно быть функцией величины $\frac{q}{r^3}$, где q – энергия взрыва, r – расстояние от точки взрыва. Для химических взрывчатых веществ, например,

$$\Delta p_{\phi} = 0,7 \frac{q}{r^3} + 0,27 \left(\frac{q}{r^3} \right)^{2/3} + 0,084 \left(\frac{q}{r^3} \right)^{1/3},$$

где Δp_{ϕ} – избыточное давление во фронте ударной волны, измеряемое в мегапаскалях, q измеряется в килограммах тротилового эквивалента, r – в метрах. Численные значения коэффициентов в этом выражении были впервые экспериментально получены в 40-х годах прошлого века М.А.Садовским, а теоретическое обоснование формулы было выполнено в то же время Л.И.Седовым в СССР и Э.Тейлором в Англии.

Воздействие ударных волн

Основным фактором воздействия ударной волны на препятствие является давление во фронте волны. Однако не представляется возможным однозначно сопоставить давление с характером воздействия волны. Кроме давления существенным оказывается и время действия волны сжатия. Так, например, разрушение рам, стекол и крыш при взрыве 1 килограмма тротила может происходить на расстоянии 10 метров от взрыва. При таком же отношении q/r^3 для ядерного взрыва, у которого q в 10^9 раз больше («мегатонная» водородная бомба), на расстоянии 1 километр действие ударной волны будет гораздо сильнее (вплоть до полного разрушения зданий), а стекла вылетят при этом на расстоянии вплоть до 20 километров. А если еще будет дуть сильный ветер, то по направлению этого ветра разрушение окон может произойти и в 50 километрах от взрыва.

Очень сложно и неоднозначно воздействие ударных волн на живой организм. При сильной контузии (близкой к летальному исходу) поражающим фактором оказывается удар по грудной клетке, в результате которого в легких происходит закупорка воздушных путей. Для килограмма тротила это возможно на расстоянии около 3 метров. При мегатонном взрыве ударная волна поражает на расстоянии до 24 километров. Легкой контузией считается поражающий удар по барабанным перепонкам. Для килограмма тротила это происходит на расстоянии около 5 метров, а для «мегатонника» – до 20 километров (без ветра).

Но при взрывах разрушающее и поражающее действие чаще всего оказывает не воздушная взрывная волна, а местное (близкое к взрыву), так называемое бризантное действие и метательное действие взрыва.

Так, для разрушения большого строения иногда достаточно небольшого заряда, заложенного непосредственно внутрь (или рядом) с опорной конструкцией. А поражение людей производится либо оболочкой взрывного устройства (граната «лимонка»), либо специально заложенными в устройство мелкими металлическими предметами.

При ядерных взрывах к действию ударной волны добавляются и такие поражающие факторы, как тепловой (излучение огненного шара) и радиационный.

Ударные волны возникают не только в воздухе. При очень больших давлениях способность твердого тела сохранять свою форму теряется, и вещество «течет» подобно газу. Но, конечно, другое соотношение между давлением и плотностью приводит к другому уравнению ударного сжатия, нежели адиабата Гюгонио для газа.

Наибольшее давление, которое может создать химический взрыв в контакте с твердым телом, порядка $3 \cdot 10^8$ Па (или 300000 атм). Если окружить твердый шар взрывчатым веществом, при его взрыве в твердом теле возникнет сферическая сходящаяся ударная волна, которая, отразившись «сама от себя», даст рекордное давление в веществе – до 10^{12} Па (или 10 млн атм). При этом, правда, возрастает и температура, что затрудняет научное исследование вещества при таких сверхвысоких параметрах.

Сжатие твердого тела сходящейся волной используется в конструкциях ядерных бомб, которые могут найти (и находят) применение в мирных целях, а не в целях уничтожения культуры.

Детонация и ее возникновение

Детонация – это особое волновое (точнее, импульсное) явление, когда химическая реакция распространяется по веществу со сверхзвуковой скоростью. Например, скорость детонационной волны в тротиле составляет 7 км/с, а в не менее печально известном в наше время гексогене – около 9 км/с. Есть взрывчатые вещества со скоростью детонации 13 км/с. А скорость звука в веществах такого типа (точнее, скорость распространения продольных упругих колебаний) – порядка 3 км/с.

Как объяснить такие большие скорости распространения химических реакций? В газовых смесях возникает быстрое горение. При этом перенос температуры от горючей смеси к еще не воспламенившейся происходит за счет теплопроводности и за счет диффузии активных центров реакции – свободных радикалов. Скорости переноса частиц и температуры много меньше скорости звука, поэтому скорость горения в газах порядка 20 м/с, а скорость горения твердых смесей (порохов) порядка 100 м/с.

Большая скорость детонации объясняется другими причинами. Детонация – явление не только химическое, но в большой степени и газодинамическое. Она объясняется распространением ударных волн. В ударной волне, где повышаются давление и температура, резко возрастает скорость химической реакции. Выделяющаяся при этом энергия (скорость движения час-

тиц) играет роль поршня, сжимающего еще не прореагировавшее вещество ударным (а не обычным адиабатическим) способом. Таким образом детонационная волна сама себя поддерживает.

Интересны процессы возникновения детонации в конденсированных средах. У многих взрывчатых веществ она начинается только при определенных и достаточно сильных воздействиях. Тротиловые шашки (кирпичики, похожие на мыло) можно поджечь, и они будут гореть, чадая, как плохие дрова (партизаны частенько использовали их для растопки в сырую погоду). Для того чтобы тротил сдетонировал, нужно применить ударное воздействие – произвести взрыв сначала в капсуле-детонаторе. Ударная волна этого «провокатора» в свою очередь заставит сдетонировать тротиловую шашку. А в капсуле-детонаторе содержится другое, гораздо более чувствительное взрывчатое вещество, которое может сдетонировать при небольшом ударе (гемучая ртуть). Сейчас чаще применяют электродетонаторы, в которых находится специальное вещество – азид свинца, легко детонирующее от нагрева (от проволоочки, по которой пропускается ток).

Очень многое в детонационных процессах еще остается загадочным и ждет своих исследователей.

Взрыв-спаситель

Ударные волны и детонационные процессы играют важную роль и при ядерных взрывах. Эти взрывные явления станут темой следующей статьи из «взрывной» серии. Я уверен, что когда-нибудь настанет пора глобализации большинства земных государств и навсегда исчезнет опасность ядерной войны, а ядерные взрывы вновь с успехом будут применяться в самых разнообразных мирных целях.

Может быть, именно ядерные взрывы спасут человечество от глобальной катастрофы – столкновения нашей планеты с астероидом или кометой. Специалисты Центра космических полетов имени Маршалла, входящего в состав NASA, уже разработали модель аппарата, предназначенного для этой цели. Корабль-перехватчик будет иметь до шести ядерных боеголовок, которые, поочередно взрываясь на поверхности астероида, придадут импульсы, переводящие его на другую траекторию, безопасную для Земли.

Одной из первых целей кораблей-перехватчиков может стать астероид Апофис, который по предварительным расчетам в 2029 году пролетит мимо Земли на расстоянии около 37000 км, что примерно соответствует высоте геостационарной орбиты. При последующем «визите» он сможет под действием земного тяготения и упасть на Землю. Диаметр этого астероида около 400 км, масса порядка $2 \cdot 10^{20}$ кг. Это больше, чем весь австралийский материк. Масштабы катастрофы невозможно даже представить – вряд ли после этого сможет сохраниться жизнь на Земле.

Так что взрыв-воитель, который бывает и взрывом-работником, может стать и взрывом-спасителем.

(Продолжение следует)

Множества Жюлиа

Н.ДОЛБИЛИН

Вместо пролога: воспоминание о давнем путешествии

В далеком 1968 году мне посчастливилось совершить путешествие в Карпаты с моим учителем, выдающимся математиком Борисом Николаевичем Делоне. В один пасмурный день во время прогулки я оказался на седле под вершиной Говерла. В спускавшемся на восток цирке, в метрах 100 ниже седла, бурлил мощный поток. Это был исток реки Прут. Склон, сбегавший на юго-запад, быстро углубляясь, переходил в ущелье, из которого вытекала речка Говерлянка. Надо мной нависал интенсивно таявший (дело было в начале мая) снежник. Часто падавшие с огромной сосульки капли образовывали почти непрерывную струйку. Сильный ветер, поднимавшийся с юго-западного цирка, сносил эту струйку на восточный склон обледелой площадки под снежником, откуда вода уходила вниз, к Пруту, впадающему в Дунай. Но как только ветер на мгновение стихал, вода вертикально падала на площадку, наклоненную к западу, и стекала в другую сторону, к Говерлянке, которая много ниже впадала в Тису, а та – в Дунай. И хотя рано или поздно эти «восточный» и «западный» потоки сливались в один (вблизи устья Дуная), достаточно было взглянуть на карту, чтобы понять, какая разная у них складывалась судьба. Особенно поражало – насколько поведение струйки, вытекавшей из снежника, радикально зависело от дуновения ветра.

Несколько слов о комплексных числах

Прежде всего нам понадобится кое-что, совсем немного, из теории комплексных чисел. Мы конспективно приведем лишь самые необходимые сведения.¹

Комплексным числом z называется произвольная пара вещественных чисел (a, b) . При этом

(а) два комплексных числа $z = (a, b)$ и $z' = (a', b')$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$;

(б) вещественное число a представляет собой частный случай комплексного числа $a = (a, 0)$;

(в) сложение и вычитание комплексных чисел определяется в точности как для векторов по формуле

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2);$$

(г) умножение комплексных чисел задается фор-

мулой

$$z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Отметим, что если оба комплексных числа являются вещественными, т.е. $b_1 = b_2 = 0$, то правило умножения (г) комплексных чисел совпадает с правилом умножения вещественных чисел.

Обычно комплексное число (a, b) записывают в виде двучлена $a + bi$, где i – так называемая *мнимая единица*, т.е. такое «новое число», не являющееся вещественным, квадрат которого по определению равен -1 . В этом случае, например, произведение двух комплексных чисел соответствует произведению соответствующих двучленов:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i. \end{aligned}$$

Комплексное число $z = a + bi$ можно представить точкой (a, b) на координатной плоскости (рис.1,а). При этом сама координатная плоскость, каждая точка (a, b) которой отождествлена с комплексным числом $z = a + bi$, называется комплексной плоскостью.

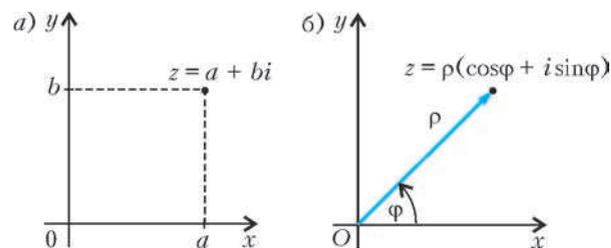


Рис. 1

Тригонометрическая форма записи комплексного числа имеет вид $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Здесь φ есть угол между осью Ox и вектором \overline{Oz} , а ρ – модуль $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ числа z , или, что то же самое, длина вектора \overline{Oz} (рис.1,б).

И, наконец, нам понадобится изящная формула Муавра:

$$z^n = (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1)$$

Корнем n -й степени из числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется комплексное число, n -я степень которого равна z . Другая формула Муавра дает представление всех корней n -й степени:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \\ k &= 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

¹ Более подробно о комплексных числах можно прочитать, например, в статьях Л.С.Понтрягина «Комплексные числа» («Квант» №3 за 1982 г.) и «Основная теорема алгебры» («Квант» №4 за 1982 г.).

Приведем также факт, вытекающий из основной теоремы алгебры: всякий многочлен n -й степени с комплексными коэффициентами (в том числе и с вещественными) имеет в области комплексных чисел ровно n корней.

Путешествие стрекозы тихим утром

В одно прекрасное летнее тихое утро попрыгунья-стрекоза, проснувшись в точке $z_0 = \rho_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, отправилась в путешествие, перелетая из одного пункта в другой. Будем полагать, что после первого перелета стрекоза оказалась в точке $z_1 = z_0^2$, после второго – в точке $z_2 = z_1^2$, после третьего – в точке ..., правильно, в точке $z_3 = z_2^2$ и так далее. И вообще, если после $(n-1)$ -го перелета стрекоза была в точке z_{n-1} , то после n -го перелета она окажется в точке $z_n = z_{n-1}^2$. Множество

$$z_0, z_1 = z_0^2, \dots, z_n = z_{n-1}^2, \dots \quad (2)$$

точек «приземления» стрекозы будем называть *орбитой*.

Рассмотрим, что представляет собой орбита. Ясно, что начальная точка $z_0 = \rho_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$ однозначно определяет орбиту. По формуле Муавра аргументы точек орбиты суть $\varphi_0, 2\varphi_0, 2^2\varphi_0, \dots, 2^n\varphi_0$ и т.д. Модули точек орбиты равны $\rho_0, \rho_0^2, \rho_0^4, \dots, \rho_0^{2^n}$ и т.д. Очевидно, что орбита лежит на быстро раскручивающейся уходящей в бесконечность спирали, если $\rho_0 > 1$ (рис.2). Если же $\rho_0 < 1$, то орбита лежит на спирали, закручивающейся к нулю. Если точка z_0 лежит на единичной окружности, т.е. если $\rho_0 = 1$, то вся орбита лежит на этой окружности.

Рис. 2

Таким образом, если $|z_0| > 1$, то орбита, задаваемая формулой $z_n = z_{n-1}^2$, убегает на бесконечность. Если же $|z_0| < 1$, то, наоборот, орбита остается *ограниченной*. Более того, в нашем случае она не покидает единичный круг и притягивается к нулю.

Это очень напоминает распределение земной суши по так называемым водным бассейнам. Из курса географии известно о бассейне реки Волга, о бассейне озера Байкал... Условная линия, разделяющая бассейны рек, скажем Волги и Дона, называется водоразделом. Эпизод, рассказанный в начале статьи, произошел на водоразделе бассейнов Прута и Тисы (впрочем, обе они впадают в Дунай).

В случае итерации $z_n = z_{n-1}^2$ все орбиты, начинающиеся внутри единичного круга, стекаются к нулю, в то время как орбиты, начинающиеся вне этого круга, стекаются к бесконечности. Единичный круг является

бассейном «океана Нуль», вся остальная часть плоскости составляет бассейн «океана Бесконечность».

Водораздел между этими океанами проходит по единичной окружности $|z| = 1$. Между точкой, лежащей внутри бассейна, и точкой, лежащей на водоразделе, имеется качественное различие. У каждой точки z_0 , лежащей внутри единичного круга, некоторая ее окрестность лежит внутри этого круга. Другими словами, орбиты, начинающиеся в точках, достаточно близких к точке z_0 , впадают в тот же океан, что и орбита точки z_0 . Совсем иначе обстоит дело на водоразделе. Произвольная, сколь угодно маленькая окрестность точки, лежащей на окружности $|z| = 1$, содержит как точки внутри, так и точки снаружи единичного круга. Таким образом, рядом с любой точкой водораздела находятся сколь угодно близко точки, чьи орбиты впадают в один океан, и тут же рядом сидят точки, из которых вытекают орбиты, впадающие в другой океан.

Именно на эту острую чувствительность поведения орбит в зависимости от выбора начальной точки при определенных условиях обратил внимание в 1918 году французский математик Жюлиа². Математик Б.Мандельброт, проявивший серьезный интерес к работам Жюлиа, назвал такие «водоразделы» в честь первоисследователя множествами Жюлиа. Справедливости ради, надо сказать, что не менее серьезный вклад в этой области был сделан также другим французским математиком П.Фату. Разумеется, вряд ли было бы оправданно как-то особо называть столь просто устроенный водораздел (имеется в виду единичная окружность), если бы все обстояло столь просто, как могло показаться на первый взгляд. Сейчас мы увидим, что это совсем не так.

И поднялся ветер...

Рассмотрим орбиту стрекозы в случае, если «дует постоянный ветер», т.е. «ветер», имеющий постоянное направление и силу. Итак, «ветер» – это вектор на плоскости, который можно задавать комплексным числом c . Конкретно, мы предполагаем, что стрекоза во время своего прыжка из точки z в точку z^2 дополнительно «сносится ветром» на вектор, задаваемый комплексным числом c (рис.3). Другими словами, орбита задается формулой

$$z_n = z_{n-1}^2 + c, \text{ где } n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Легко видеть, что «штилевая» орбита (2) есть частный случай «ветренной» орбиты (3), соответствующий

² Гастон Жюлиа (1893–1978) во время первой мировой войны получил тяжелое ранение. Свою знаменитую работу «Мемуар об итерации рациональных функций» он написал в госпитале в 1918 году в интервале между двумя болезненными операциями.

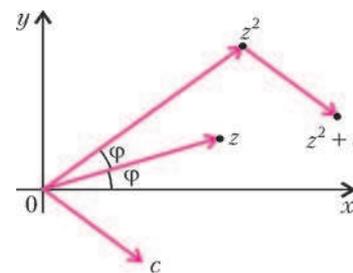
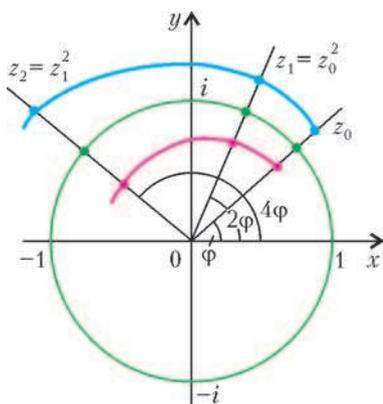


Рис. 3

значению $c = 0$. Теперь для фиксированного комплексного числа c , вообще говоря не равного нулю, рассмотрим орбиту, заданную формулой (3).

Назовем точку z_0 *беглянкой*, если начинающаяся в ней орбита (3) убегает на бесконечность. Под этим понимается следующее: какой бы большой круг $|z| \leq R$ на плоскости ни взять, существует номер k , зависящий от радиуса R ($k = k(R)$), такой, что все точки z_n в орбите (3) с номерами $n > k$ лежат вне данного круга, т.е. $|z| > R$ при $n > k(R)$. Обозначим множество всех точек-беглянок при фиксированном c через E_c (от английского *escape* – убегать). Например, в частном случае $c = 0$ множество E_0 состоит из точек, лежащих вне единичного круга.

Напротив, если орбита (3), начинающаяся в z_0 , все время остается в пределах какого-то (пусть даже очень большого) круга, то точку z_0 назовем *пленницей*. Множество всех точек-пленниц будем называть *пленным* и обозначать через P_c . Как мы уже видели, когда $c = 0$, пленное множество P_0 – это единичный круг $\{z : |z| \leq 1\}$. Все точки плоскости, лежащие вне единичного круга, являются беглянками и составляют *убегющее* множество E_0 .

Гипотетически имеется и третья возможность, когда орбита, с одной стороны, выходит за пределы любого данного круга сколь угодно много раз, а с другой, возвращается в этот круг столь же много раз. Однако в силу «теоремы о беглянке», которую мы докажем в следующем параграфе, третий случай невозможен.

Итак, для фиксированного комплексного числа c каждая точка z_0 плоскости является либо беглянкой, либо пленницей. Другими словами, вся плоскость распадается на два множества: P_c и E_c .

Из теоремы о беглянке легко следует, что если z – точка-беглянка, то ее достаточно маленькая окрестность состоит лишь из точек-беглянок.

Множество точек плоскости таких, что в каждой ее окрестности содержатся как пленницы, так и беглянки, образуют границу между множествами E_c и P_c . Это множество называется *множеством Жюлиа* J_c . Можно показать, что множество Жюлиа состоит только из пленниц.

По определению множества Жюлиа, при $c = 0$ множество J_0 есть единичная окружность, но при $c \neq 0$ характер множества J_c серьезно меняется. На рисунке 4 приведены множества Жюлиа J_c при различных

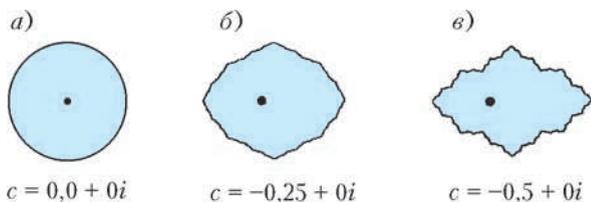


Рис. 4

значениях c . Мы видим, что с увеличением модуля $|c|$ линия «водораздела» Жюлиа становится все более сложной и изломанной.

Условие убегания орбиты

Теорема о беглянке. Пусть точка z_0 такова, что

$$|z_0| \geq |c| \text{ и } |z_0| > 2. \quad (4)$$

Тогда орбита $z_n = z_{n-1}^2 + c$, начинающаяся в точке z_0 , убегает на бесконечность, другими словами, точка z_0 является беглянкой.

Доказательство. Прежде всего заметим, что неравенства (4) не являются необходимым условием точки-беглянки. Точка z_0 может не удовлетворять условию (4), но если какая-то точка орбиты удовлетворяет этому условию, то орбита убегает на бесконечность и точка z_0 является беглянкой.

Пусть точка z удовлетворяет условию (4). Так как в (4) второе неравенство – строгое, то $|z| = 2 + \epsilon$, где ϵ – некоторое положительное число. В силу неравенства треугольника (рис.5), имеем

$$|z^2| = |z^2 + c - c| = |(z^2 + c) + (-c)| \leq |z^2 + c| + |c|. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \geq |z^2| - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + \epsilon)|z|.$$

Итак, если точка z удовлетворяет условиям (4), то $|z^2 + c| \geq (1 + \epsilon)|z|$. Поэтому, если расстояние от точки z_0 орбиты до начала 0 превосходит оба числа $|c|$ и 2: $|z_0| > \max\{|c|, 2\}$, то следующая точка z_1 орбиты отстоит еще дальше. Причем коэффициент удаления каждый раз не меньше фиксированного числа $1 + \epsilon$, строго превосходящего 1. Таким образом, если $z_0 > \max\{|c|, 2\}$, то получающаяся после k итераций точка z_k орбиты будет расположена от начала по крайней мере в $(1 + \epsilon)^k$ раз дальше. Так как $(1 + \epsilon)^k$ монотонно и неограниченно возрастает при увеличении номера k , то и точки орбиты монотонно и неограниченно удаляются от начала. Теорема доказана.

Еще раз подчеркнем, что даже если точка z_0 не удовлетворяет условию (4), но первый же возможный выход орбиты $z_n = z_{n-1}^2 + c$ за пределы круга радиуса $\max\{|c|, 2\}$ гарантирует убегание данной орбиты на бесконечность.

Упражнения

1. Докажите, что если $z \in E_c$, то у точки z существует окрестность $U(z)$, содержащаяся в E_c .
2. Докажите, что $J_c \subset P_c$.

Неподвижные точки

Мы знаем, что при итерации $z_{n+1} = z_n^2 + c$ одни орбиты убегают на бесконечность, причем такое убегание идет по раскручивающейся от начала координат спирали с постоянной поправкой на «ветер» c . Другие орбиты «гуляют» в области, которая ограничена множеством Жюлиа. Эти орбиты состоят из точек-плен-

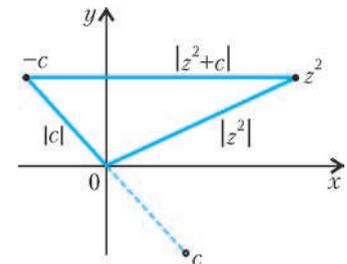


Рис. 5

ниц. Среди точек-пленниц есть особые точки. Это – так называемые *неподвижные* точки.

Точка z называется *неподвижной* для функции $f(z)$, если $z = f(z)$. При итерации $z_{n+1} = f(z_n)$ орбита неподвижной точки остается на месте: $z_n = z_0$ для любого натурального числа n . В случае квадратичной функции $f(z) = z^2 + c$ неподвижная точка z удовлетворяет уравнению $z^2 - z + c = 0$. Это уравнение имеет два решения $z^{(0)}$ и $z^{(1)}$ (здесь мы применяем верхние индексы, потому что нижние используются для нумерации точек в орбите).

Итак, орбита неподвижной точки никуда не убегает, т.е. каждая неподвижная точка действительно является пленницей. Между тем, неподвижные точки квадратичной функции существенно различаются друг от друга в том, как ведут себя орбиты, начинающиеся вблизи этих точек.

Рассмотрим опять простейший случай: $c = 0$. Из уравнения $z = z^2$ находим две неподвижные точки: $z^{(0)} = 0$, $z^{(1)} = 1$. Между ними имеется существенное различие. Неподвижная точка $z^{(0)} = 0$, как мы уже знаем, «притягивает» к себе любую орбиту, начинающуюся внутри единичного круга. В то же время если точка z достаточно близко находится к другой неподвижной точке $z^{(1)} = 1$, то расстояние между образом z^2 и неподвижной точкой 1 больше, чем между «прообразом» z и 1. Точка $z^{(1)} = 1$ при итерации $z_{n+1} = z_n^2$ как бы отталкивает от себя осмелившиеся было приблизиться к ней точки орбиты. Одни орбиты (если $|z_0| > 1$) убегают от $z^{(1)} = 1$ на бесконечность. Другие орбиты (если $|z_0| < 1$) убегают от $z^{(1)} = 1$ к другой неподвижной точке $z^{(0)} = 0$. Третьи орбиты ($|z_0| = 1$) расположены на единичной окружности.

В общем случае неподвижная точка $z^{(0)}$ квадратичной функции $f(z)$ называется *притягивающей*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что любая орбита, начинающаяся в ε -окрестности точки $z^{(0)}$, сходится к $z^{(0)}$. Притягивающую точку $z^{(0)}$ также называют еще и *устойчивой* неподвижной точкой, имея в виду, что при небольшом отклонении точки z от неподвижной точки $z^{(0)}$ ее орбита все равно стремится к неподвижной точке. Таким образом, притягивающая точка не только сама является пленницей, но и некоторая ее окрестность полностью состоит из точек-пленниц. Она лежит внутри пленного множества P_c , но не на его границе, т.е. *притягивающая точка не принадлежит множеству Жюлиа J_c* .

Неподвижная точка $z^{(1)}$ функции $f(z)$ – *отталкивающая*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки z , удаленной от $z^{(1)}$ не далее чем на ε , ее образ $f(z)$ отстоит от $z^{(1)}$ дальше чем z : $|(z^2 + c) - z^{(1)}| > |z - z^{(1)}|$. Отталкивающая точка называется также *неустойчивой*. Даже небольшое отличие начальной точки z_0 от неустойчивой точки $z^{(1)}$ приводит к серьезному отклонению соответствующей орбиты.

Пусть $z^{(0)}$ – неподвижная точка функции $f(z)$. Имеется важный критерий, выясняющий, какова эта

точка: притягивающая или отталкивающая. Мы предполагаем, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z^{(0)}$. Заметим, что производная функции от комплексного аргумента определяется аналогично тому, как это делается для вещественной функции вещественного аргумента:

$$f'(z^{(0)}) = \lim_{z \rightarrow z^{(0)}} \frac{f(z) - f(z^{(0)})}{z - z^{(0)}}.$$

Характер поведения орбиты в окрестности неподвижной точки зависит от значения производной $f'(z)$ в этой точке.

Теорема. *Неподвижная точка $z^{(0)}$ для функции $f(z)$ является притягивающей, если $|f'(z)| < 1$, и отталкивающей, если $|f'(z)| > 1$.*

Заметим, что производная квадратичной функции $f(z) = z^2 + c$ равна $f'(z) = 2z$. В соответствии с этим критерием, в хорошо знакомом нам случае $c = 0$ неподвижная точка $z^{(0)} = 0$ притягивающая, так как $|f'(0)| = 0 < 1$, а неподвижная точка $z^{(1)} = 1$ – отталкивающая, так как $|f'(1)| = 2 > 1$.

Мы не будем доказывать этот важный факт для функций комплексного переменного, но попытаемся объяснить его в случае вещественной функции $f(x)$ от вещественной переменной x . Пусть $x^{(0)}$ – неподвижная точка функции $f(x)$, т.е. $x^{(0)} = f(x^{(0)})$. Рассмотрим графики двух функций $y = x$ и $y = f(x)$ в окрестности неподвижной точки $x^{(0)}$. Пусть $|f'(x^{(0)})| < 1$, из рисун-

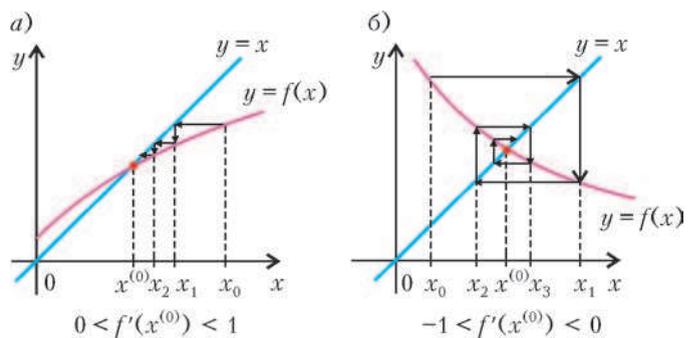


Рис. 6

ков б,а и б,б видно, что если точка x_0 расположена достаточно близко к $x^{(0)}$, то вытекающая из нее орбита $x_{n+1} = f(x_n)$ монотонно приближается к $x^{(0)}$:

$$|x_0 - x^{(0)}| > \dots > |x_n - x^{(0)}| > |x_{n+1} - x^{(0)}| > \dots$$

Условие «точка x_0 расположена достаточно близко» означает: точка x_0 расположена в той окрестности неподвижной точки, где производная удовлетворяет неравенству $|f'(x)| < 1$.

Если же $|f'(x^{(0)})| > 1$, то вытекающая из точки x_0 , расположенной в окрестности точки $x^{(0)}$, орбита $x_{n+1} = f(x_n)$ какое-то время будет удаляться от $x^{(0)}$ (рис.7,а и 7,б): $|x_0 - x^{(0)}| > |x_1 - x^{(0)}| > \dots$ Причем уда-

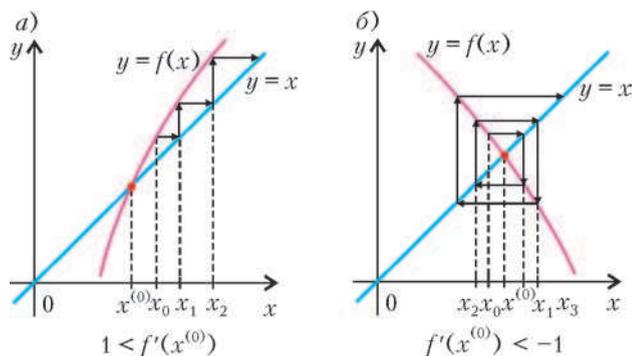


Рис. 7

ление каждой следующей точки x_{n+1} орбиты по сравнению с x_n от неподвижной точки гарантировано, пока орбита находится в окрестности неподвижной точки, где сохраняется неравенство $|f'(x)| > 1$. Но как только орбита выходит за пределы такой окрестности, ее поведение становится не столь однозначным.

Упражнение 3. Докажите, что отталкивающая неподвижная точка итератора $x_{n+1} = x_n^2 + c$ принадлежит множеству Жюлиа J_c , т.е. лежит на границе множеств P_c и E_c .

Самоподобие множества Жюлиа

Обозначим квадратичную функцию $z^2 + c$ через $f_c(z)$. Пусть U – множество точек на комплексной плоскости, через $f_c(U)$ обозначим образ этого множества при функции $f_c(z)$. Другими словами, $f_c(U)$ есть множество образов всех точек $z \in U$: $f_c(U) = \bigcup_{z \in U} f_c(z)$.

Посмотрим, что происходит со знакомыми множествами P_c, E_c, J_c . Возьмем точку $z_0 \in P_c$. Легко видеть, что точка $f_c(z_0)$ также является пленницей. Действительно, орбита точки $z_1 = f_c(z_0)$ совпадает с орбитой точки z_0 со сдвигом нумерации на единицу. Поэтому $f_c(P_c) \subseteq P_c$. Верно и обратное: $P_c \subseteq f_c(P_c)$. Таким образом, $P_c = f_c(P_c)$, т.е. под действием функции f_c множество P_c отображается на себя. Действительно, рассмотрим прообразы $u = f_c^{-1}(z_0)$ точки $z_0 = u^2 + c$. Понятно, что они оба также являются точками-пленницами. Так как каждая точка-пленница z_0 является f_c -образом точки-пленницы, то $P_c \subseteq f_c(P_c)$. В таких случаях говорят, что множество P_c инвариантно относительно отображения f_c .

По той же причине убегающее множество E_c также инвариантно относительно отображения f_c . Отсюда следует, что так как каждое из множеств E_c и P_c является инвариантным относительно отображения f_c , то и граница между ними, т.е. множество Жюлиа J_c , также инвариантна относительно f_c .

Установленная инвариантность множества Жюлиа относительно f_c порождает повторяемость, точнее схожесть, формы множества Жюлиа в целом с формами все более и более мелких его фрагментов. Например, салфетка Серпинского, описанная в статье «Игра «Хаос»

и фракталы»³, отличалась замечательным свойством: эта салфетка была подобна (даже гомотетична) любой из своих «четвертинок», каждая из которых была линейно вдвое меньше салфетки Серпинского. Четвертинка, в свою очередь, была подобна (опять с коэффициентом подобия $1/2$) «своей» четвертинке, и т.д. до бесконечности. Свойство целого быть подобным своей части называют *самоподобием*.

Возьмем на множестве Жюлиа J_c точку z и пусть $U \subset J_c$ – некоторая дуга, содержащая точку z . Так как множество Жюлиа под действием f_c отображается на себя, то дуга U переходит в другую дугу $f_c(U)$, содержащую точку $f_c(z)$. Если бы функция $f_c(z)$ была линейной относительно z , то преобразование f_c было бы преобразованием подобия, как это случилось в случае салфетки Серпинского. Однако наша функция $f_c(z)$ не линейная, а квадратичная. Поэтому соответствующие фрагменты не являются подобными друг другу. Тем не менее, они во многом очень схожи между собой.

На рисунке 8,б представлен (в том же масштабе) фрагмент множества Жюлиа, ограниченный рамкой на

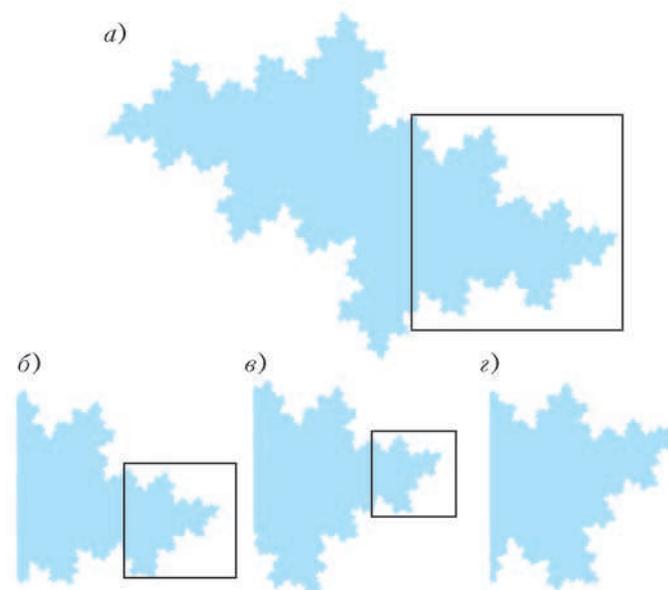


Рис. 8

рисунке 8,а. Фрагмент, выделенный рамкой на рисунке 8,б, увеличен на рисунке 8,в. В свою очередь, рисунок 8,г представляет увеличение фрагмента, указанного в рамке на рисунке 8,в.

Игра «Хаос» и множества Жюлиа

В заключение расскажем, как можно получать на мониторе компьютера изображение множества Жюлиа J_c для любого значения c . Предлагаемая процедура построения есть попросту версия игры «Хаос», которая подробно изложена для более простой ситуации в упомянутой статье «Игра «Хаос» и фракталы».

Давайте отправимся из произвольной точки-пленницы $z_0 \in P_c$ ($z_0 \neq z^{(0)}$) в путешествие по орбите «вверх»,

³ См. «Квант» №4 за 1997 год.

переходя от одного прообраза к предыдущему. У точки z_0 имеются два прообраза $\pm z_{-1}$, такие, что $f_c(\pm z_{-1}) = (\pm z_{-1})^2 + c = z_0$. Выберем один из них *случайным* образом и обозначим его через z_{-1} . У точки z_{-1} имеются опять два прообраза $\pm z_{-2}$. Выберем *случайно* один из двух прообразов и обозначим его через z_{-2} . Двигаясь таким образом по орбите вверх и делая на каждом шаге случайный выбор между двумя прообразами, получаем последовательность $z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, \dots$. Можно показать, что эта *случайная* последовательность точек, оставаясь внутри множества P_c , приближается к множеству Жюлиа J_c . Более конкретно, последовательность $\{z_{-n}\}$ сидит на сложно устроенной спирали, которая асимптотически наматывается на множество Жюлиа J_c . Подчеркнем, что в силу случайного выбора одного из двух прообразов, происходящего на каждом шаге, эта последовательность точек $\{z_{-n}\}$ будет нанизываться на *все множество Жюлиа*. Поэтому несколько тысяч первых точек последовательности $\{z_{-n}\}$, выведенные на экран компьютера, имитируют множество Жюлиа. Так как начальная точка орбиты может быть выбрана достаточно далеко от множества Жюлиа J_c да и орбита $\{z_{-n}\}$ сходится ко множеству Жюлиа не слишком быстро, то несколько первых точек орбиты следует выбросить, дабы не исказить картину. Другая неприятность – орбита распределяется вдоль множества Жюлиа не очень равномерно: некоторые участки проявляются весьма отчетливо, на других, наоборот, есть «проплешины». Чтобы заполнить эти проплешины в изображении, нужно либо позволить программе долго-долго работать, либо, учитывая самоподобие множества Жюлиа, «пересадить» на проплешины куски кривой Жюлиа с других уже проявившихся участков. Последний подход намного эффективней. Благодаря ему уже первые несколько точек орбиты дают изображение множества Жюлиа, более отчетливое, чем при стандартном подходе – сотня тысяч точек орбиты.

Преодолев эти трудности, вы будете вознаграждены:

вы сможете самостоятельно знакомиться с миром изумительных по красоте и разнообразию множеств Жюлиа. Судя по эскизам этих множеств, которые делал сам Жюлиа «от руки», автор вряд ли представлял все великолепие «царства» множеств, носящих теперь его имя, а о некоторых глубоких свойствах он даже не подозревал. Например, во второй половине XX века был обнаружен «взрывной» характер множеств Жюлиа. Давайте при заданном направлении «ветра» c будем непрерывно увеличивать силу $|c|$. Получающиеся при этом множества Жюлиа становятся все более и более сложными и ажурными. Оказывается, что при достижении некоторого значения модуля $|c|$ множество Жюлиа *взрывается*, разлетаясь при этом на *бесконечное* число отдельных кусочков (рис.9). Значение модуля $|c|$, при котором происходит взрыв, зависит от направления вектора c . Отложив на плоскости все значения c , при которых происходит взрыв множества J_c , Б.Мандельброт получил новое множество, еще

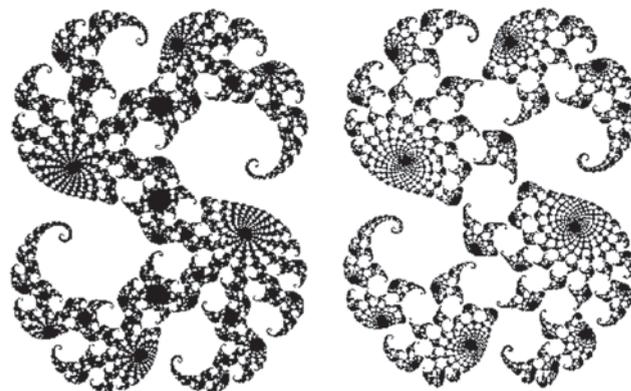


Рис. 9

более сложное и восхитительное, чем множества Жюлиа. Теперь это множество называется именем его открывателя – *множество Мандельброта*. Но это – тема другой статьи.

НАША ОБЛОЖКА

Мозаика из снежинок

НА ПЕРВОЙ СТРАНИЦЕ ОБЛОЖКИ ИЗОБРАЖЕНА мозаика из так называемых *снежинок Кох*. Снежинка Кох является одним из фракталов, о которых можно прочитать, например, в статье Н.Долбилина в этом номере журнала.

Построить снежинку можно следующим образом. Возьмем равносторонний треугольник, разделим каждую его сторону на три равных отрезка и построим на

средних отрезках правильные треугольники во внешнюю сторону от исходного. Получим фигуру, ограниченную 12 отрезками. Разделим каждый из этих отрезков на три части и вновь построим на средних отрезках правильные треугольники (рис.1).

Повторим ту же операцию с отрезками, ограничивающими полученную фигуру, и т.д. В пределе как раз получится снежинка Кох.

Отметим, что периметр снежинки бесконечен, а площадь конечна и равна $\frac{8}{5}$ площади исходного треугольника.

(Продолжение см. на с. 29)

Лев Давидович Ландау

22 января 2008 года исполнилось бы сто лет величайшему физику-теоретику XX века Льву Давидовичу Ландау.

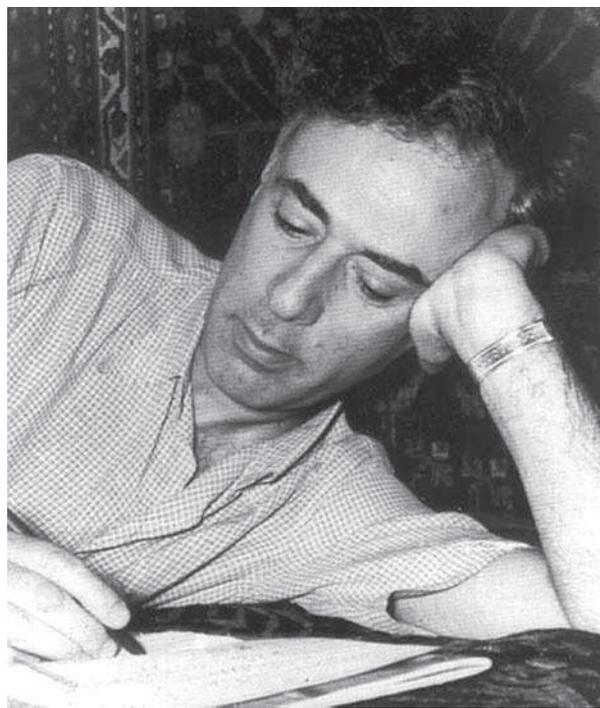
Предлагаем вниманию читателей отрывок из книги М.И.Каганова «Школа Ландау: что я о ней думаю» (книга выпущена издательством «Тривант» в 1998 году). Автор книги принимал самое непосредственное участие в жизни этой Школы.

Льва Давидовича никогда не привлекали модные увлечения читательской аудитории: снежный человек, телепатия, летающие тарелки и т.п. Большинство подобных увлечений он считал интеллигентским суеверием и остро высмеивал.

Я неоднократно рассказывал об ироническом отношении Дау к «таинственным» явлениям, и часто слушатели обижались за «таинственное» явление, высказывали удивление, иногда даже подозревали Льва Давидовича в ограниченности. Дело, конечно, не в ограниченности. Повышенный интерес к таинственным, загадочным проблемам, как правило, связан с тем, что обычные, ежедневные проблемы скучнеют, теряют свежесть что ли. В Ландау поражал неослабевающий с годами интерес к реальным (большим и малым) задачам, которые ставит и решает физика.

Он разговаривал о науке с сотнями физиков. Они рассказывали ему самые различные работы, отличающиеся по трудности, по глубине, по значительности, работы, относящиеся к самым разным объектам – к твердым телам и к элементарным частицам, к звездам и к газам. Работа выслушивалась Дау, выслушивалась и занимала место в его фантастической памяти в том и только в том случае, если она удовлетворяла простому принципу: работа должна разъяснить что-то непонятное. Бесконечно разъясняющимся и бесконечно ставящим новые загадки – таким видел и ощущал мир Дау. Острый интерес к решению реальных задач не оставлял места для задач надуманных, хотя, быть может, и весьма увлекательных. И еще: Ландау всегда требовал профессионального отношения к науке, не любил дилетантов. Его раздражали болтовня и верхоглядство, которые, как правило, сопровождали попытки решения «таинственных» проблем.

Говоря о Ландау, часто упоминают о гениальной интуиции, о «даре божьем». Дар божий, конечно, был, но была и ежедневная, нет, ежечасная титаническая работа, утомляющая, требующая отдачи всего себя. Я встречался с Дау вечерами, после рабочего дня, когда усталость, усугубленная невозможностью отключиться, была видна невооруженным глазом. Он задумывался, выпадал из разговора. Однако всегда брал себя в руки и включался в беседу. При этом очень помогали стандартные темы – о счастье, о любви, о том, каковы должны быть женские прически и женские платья.



Л.Д.Ландау за работой (1959 г.)

Я не хочу, чтобы подумали, будто разговоры о счастье, любви были для Ландау способом отвлечься от работы. Это, по-моему, совершенно не так. Он по-настоящему глубоко, я бы сказал выстраданно, интересовался «вечными темами». Его высказывания были нестандартны. Многих отпугивала «теорфизическая» ясность, с которой Дау пытался (и часто не без успеха) решать сложные задачи человеческих взаимоотношений. Он был глубоко убежден, что в большинстве случаев сложность взаимоотношений надуманна (он всегда строго различал слова «сложно» и «трудно»), и пытался добраться до материалистической сущности конфликта, если таковой был. По своему темпераменту Дау был просветителем, и не только в науке, но и в жизни. Он считал, что людей надо учить жить. И учил...

Ландау прожил трудную, но, по сути, счастливую жизнь. Он был окружен преданными учениками, признание и слава достались ему при жизни. Ему казалось естественным – человек должен быть счастливым. Если ты несчастлив, то, поняв это, тщательно проанализировав, что мешает тебе жить и, главное, получать от жизни удовольствие, ты обязан (именно обязан) добиваться своего счастья, бороться за него.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1-2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2071» или «Ф2078». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2073, М2075 и М2078 предлагались на III Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2071–М2080, Ф2078–Ф2087

М2071. Универсальным числом $U(n)$ назовем минимальное натуральное число, из которого вычеркиванием цифр можно получить любое натуральное число от 1 до n . Сколько цифр имеет число $U(2008)$?

С.Волчёнков

М2072. Найдите $(n+1)$ -ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{\underbrace{999\dots99}_{2n \text{ девяток}}}$.

Я.Алиев

М2073. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Пусть C – произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q ; точки A и B – вторые точки пересечения прямых CP и CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC .

А.Заславский

М2074. Посетитель обходит залы музея по следующему правилу. Находясь в некотором зале, он выбирает среди всех соседних залов тот, который до этого был посещен им меньшее число раз, и переходит в него (если таких соседних залов несколько, то он переходит в любой из них). Верно ли, что посетитель через некоторое время обойдет все залы? (Известно, что из любого зала музея можно пройти в любой другой зал.)

С.Волчёнков

М2075. Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

А.Заславский

М2076. Найдите все функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие при всех $x \neq 0$ и y равенству

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Э.Туркевич

М2077. Найдите наименьшее натуральное число k , обладающее следующим свойством: в любой таблице $n \times n$, заполненной действительными числами, можно увеличить не более k чисел так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах стали равными.

П.Кожевников

М2078. Точки A', B', C' – основания высот остроугольного треугольника ABC . Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L (K и A находятся по одну сторону от прямой BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO , где O – центр описанной окружности треугольника ABC .

В.Протасов

М2079. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел x, y, z , больших 10^{10} , что $x^8 + y^8 + z^8$ делится на $x^4 + y^4 + z^4$?

В.Сендеров

М2080*. Последовательность векторов $\{\vec{e}_n\}$ на плоскости задана условиями: $\vec{e}_1 = (0; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 0)$, $\vec{e}_{n+2} = \vec{e}_{n+1} + \vec{e}_n$ при $n \geq 1$. Отложим от начала координат все векторы, являющиеся суммами нескольких различных векторов из последовательности $\{\vec{e}_n\}$. Докажите, что множество концов отложенных векторов состоит из всех точек с целыми неотрицательными

координатами, лежащих внутри некоторой полосы между параллельными прямыми.

И.Пушкарев

Ф2078. Из листа фанеры вырезали кусок в форме прямоугольного треугольника с катетами 60 см и 80 см,

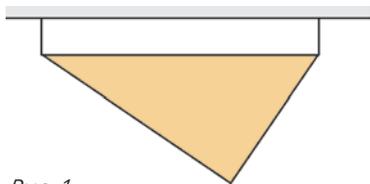


Рис. 1

масса этого куска равна 2 кг. Кусок фанеры подвесили к потолку при помощи двух одинаковых легких нитей, расстояние между точками прикрепления нитей к потолку равно 100 см (рис.1). Найдите силы натяжения нитей.

А.Простов

Ф2079. Клин массой M с углом α при основании находится на гладком горизонтальном столе. На наклонной грани клина

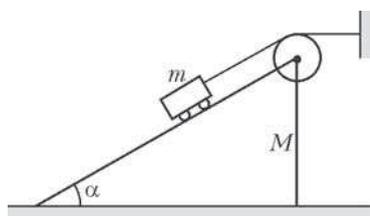


Рис. 2

стоит тележка массой m , к ней привязана легкая нить, переброшенная через блок, закрепленный осью в вершине клина (рис.2). Свободный конец нити привязан к стене. Вначале клин удерживают, затем отпускают. С каким ускорением он начнет двигаться?

Р.Клинов

Ф2080. Две большие параллельные пластины двигают навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0 . Между пластинами находится очень маленький упругий шарик. В тот момент когда одна из пластин ударяется о него, расстояние между пластинами составляет L . Считая удары абсолютно упругими, найдите скорость шарика в тот момент, когда расстояние между пластинами составит $L/5$. Действием силы тяжести пренебречь. Скорость шарика перед первым ударом равна нулю.

А.Шариков

Ф2081. В комнате, заполненной воздухом, находится пустой кубический сосуд объемом 100 л. В стенке сосуда открывается маленькое отверстие площадью 1 см^2 и через 0,001 с закрывается. Оцените количество молекул, попавших в сосуд за это время. Оцените также давление, которое установится в сосуде. Стенки сосуда тепло не проводят, теплоемкостью стенок можно пренебречь.

А.Повторов

Ф2082. Моль гелия в сосуде расширяется от начального объема $V_1 = 10$ л до конечного объема $V_2 = 50$ л, при этом давление газа в процессе меняется так, что $pV^2 = \text{const}$. Начальная температура газа $T_1 = 300$ К. Найдите конечную температуру. Найдите также работу газа в процессе (если не получится найти точно, посчитайте приближенно) и полученное в процессе количество теплоты.

Р.Газов

Ф2083. К батарее подключают амперметр (вообще говоря, так поступать не следует!) – он показывает силу тока 1 А. Параллельно подключают еще один такой же амперметр – теперь они в сумме показывают 1,2 А. Сколько в сумме покажут 2008 таких же амперметров, если их подключить к батарее параллельно?

Т.Оков

Ф2084. Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена, а вторая может свободно смещаться параллельно, оставаясь на расстоянии d от первой. Масса подвижной пластины M , площадь каждой из пластин S . Конденсатор зарядили до напряжения U_0 . Сдвинем теперь подвижную пластину относительно положения равновесия. Найдите период малых колебаний этой пластины. Зависит ли он от того, как мы сдвинули пластину? Сила тяжести отсутствует.

З.Рафаилов

Ф2085. Катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R соединены параллельно, к выводам цепочки очень давно подключен внешний источник, ток в его цепи равен I_0 . Ток в цепи источника очень быстро увеличивают в 3 раза. Какое количество теплоты выделится в резисторе после этого? Какой полный заряд протечет через резистор?

А.Зильберман

Ф2086. Две одинаковые катушки индуктивности соединены последовательно. Выводы получившейся цепочки подключены к звуковому генератору последовательно с низковольтной лампочкой для фонарика. Параллельно одной из катушек подключают конденсатор и начинают изменять в широких пределах частоту генератора. На частоте $f = 600$ Гц наблюдается четкий минимум свечения нити накала лампочки. На какой частоте (частотах) лампочка будет гореть ярче всего?

Р.Старов

Ф2087. Небольшая плосковыпуклая линза отштампована из прозрачной пластмассы. Форма выпуклой поверхности аккуратно рассчитана при помощи ЭВМ, она отличается от сферической (сферическая поверхность «собирает» лучи параллельного пучка в фокусе только приблизительно). Диаметр плоской поверхности линзы 2 см, толщина линзы 0,5 см. Найдите фокусное расстояние линзы. Коэффициент преломления пластмассы 1,5.

З.Очков

Решения задач М2051–М2055, Ф2063–Ф2072

М2051. Пусть $a, b, c > 0$; $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = abc$. Докажите, что $a = b = c$.

Положим $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = c + a - b$. Так как $x + y = 2b > 0$, $y + z = 2c > 0$, $z + x = 2a > 0$, то среди чисел x, y, z нет двух отрицательных. Кроме того, по условию $xyz = abc > 0$, значит, все три числа x, y, z положительны. Имеем:

$$xyz = \frac{z+x}{2} \frac{x+y}{2} \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{zx} \sqrt{xy} \sqrt{yz} = xyz.$$

Знак « \geq » превращается в равенство только при $x = y = z$. Отсюда $a - b = \frac{z - y}{2} = 0$ и $a - c = \frac{x - y}{2} = 0$, т.е. $a = b = c$.

П.Кожевников

M2052. а) Рассмотрим окружность и ее хорду AB . Найдите множество точек M , находящихся от прямой AB на расстоянии, равном длине касательной, проведенной из точки M к рассматриваемой окружности.

Докажите следующие утверждения

б) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в четырех точках, диагонали «параболического четырехугольника» перпендикулярны (рис.1).

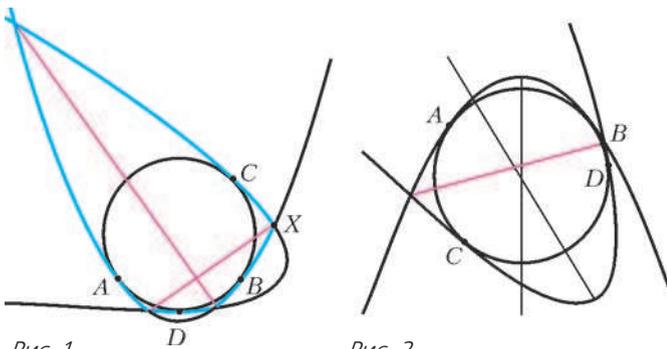


Рис. 1

Рис. 2

в) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в двух точках, оси парабол наклонены под одним и тем же углом к прямой, проходящей через точки пересечения этих парабол (рис.2).

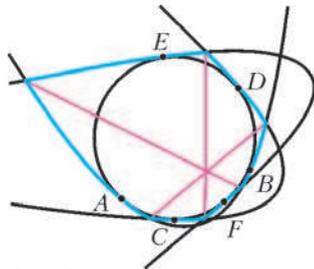


Рис. 3

г) Для любых трех парабол, описанных около одной окружности и таких, что любые две из них пересекаются в четырех точках, диагонали «параболического шестиугольника» пересекаются в одной точке (рис.3).

а) Введем систему координат так, чтобы точки A, B и центр окружности C имели координаты $(-a, 0), (a, 0), (0, c)$. Тогда радиус окружности равен $R = \sqrt{a^2 + c^2}$. Длина касательной из точки $M(x, y)$ к окружности равна $\sqrt{MC^2 - R^2} = \sqrt{x^2 + (y - c)^2 - R^2}$. Таким образом, искомое ГМТ задается уравнением $y^2 = x^2 + (y - c)^2 - R^2 \Leftrightarrow 2cy = x^2 - a^2$. При $c = 0$ (т.е. если AB – диаметр) получаем пару касательных в точках A и B . При $c \neq 0$ получается парабола, касающаяся окружности в точках A и B (это означает, что парабола и окружность имеют общую касательную в точке A и в точке B).

Нетрудно показать, что парабола, касающаяся окружности в данных точках A и B , единственна. С помощью

этого соображения и пункта а) решим остальные пункты. Обозначим точки касания парабол с окружностью A и B, C и D, E и F (см. рис.1, 2, 3).

б) Если X – точка пересечения парабол, то длина касательной из X к окружности равна, с одной стороны, расстоянию от X до AB , с другой стороны – расстоянию от X до CD , поэтому X лежит на одной из двух биссектрис углов между прямыми AB и CD . Две точки пересечения парабол лежат на одной биссектрисе и две – на другой. Остается заметить, что эти биссектрисы перпендикулярны.

в) Как и в пункте б), прямая, проходящая через точки пересечения парабол, – биссектриса угла между AB и CD . Нужное утверждение следует из того, что оси парабол перпендикулярны AB и CD соответственно.

г) Диагонали шестиугольника – биссектрисы (внутренние или внешние) треугольника, образованного прямыми AB, CD, EF . При надлежащем выборе (три внутренние биссектрисы или одна внутренняя и две внешние) диагонали будут пересекаться в одной точке.

Ф.Нилов, П.Кожевников

M2053. Пусть $n > 3$. Докажите, что существуют целые отличные от нуля числа x_1, x_2, \dots, x_n такие, что

$$x_1 x_2 \dots x_n = (x_2 + x_3 + \dots + x_n)(x_1 + x_3 + \dots + x_n) \times \dots \times (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}).$$

При четном n достаточно взять любой набор ненулевых целых чисел $A_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, сумма которых равна 0. Эта конструкция, разумеется, не единственна: например, можно положить $A_4 = (-8, -7, 1, 5)$.

Пусть n нечетно. Если существует набор $A_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условию, то существует и набор A_{n+4} . В самом деле, сумма $k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ не равна 0, и набор $A_{n+4} = (5x_1, 5x_2, \dots, 5x_n, 3k, -3k, 4k, -4k)$ с суммой $5k$ – искомый, поскольку набор $(5x_1, 5x_2, \dots, 5x_n)$ удовлетворяет условию и $3k \cdot (-3k) \cdot 4k \cdot (-4k) = (5k - 3k)(5k + 3k)(5k - 4k)(5k + 4k)$. Остается указать примеры наборов A_5 и A_7 :

$$A_5 = (-2, -2, 2, 3, 3) \text{ или } A_5 = (-6, -1, 1, 4, 4),$$

$$A_7 = (-8, -2, -2, 3, 4, 4, 7) \text{ или } A_7 = (-6, -6, -6, -1, 4, 5, 7).$$

Прийти к наборам A_5 (и сходным образом к наборам A_7) можно с помощью следующих рассуждений. Достаточно найти нужные наборы рациональных чисел (а затем домножить их на общий знаменатель). Пусть a, b, c – ненулевые рациональные числа, $s = a + b + c$, $\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{abc} = \frac{1}{k}$. Достаточно подобрать такое ненулевое рациональное x , что $\frac{1}{k} \cdot \frac{(s - x)(s + x)}{x \cdot (-x)} = 1$.

Преобразуем: $s^2 = (1 - k)x^2$. Таким образом, достаточно подобрать такие a, b, c , что $1 - k = r^2$ для ненулевого рационального r ; например, достаточно взять $k = -3$. Отсюда нетрудно прийти к наборам $(-2, 3, 3, -2, 2)$, $(2, 2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и т.п.

Авторам неизвестно, справедливо ли утверждение задачи для $n = 3$.

В. Сендеров, С. Токарев

M2054. Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$. Существуют ли натуральные числа $x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_n$ такие, что $P(x_1) = x_2^{k_2}, P(x_2) = x_3^{k_3}, \dots, P(x_n) = x_1^{k_1}$?

Решите задачу для случаев:

- а) $n = 2$;
- б) n – произвольное нечетное число;
- в) $n = 4$.

Ответ: нет во всех пунктах.

Латинскими буквами всюду ниже обозначены натуральные числа.

а) Пусть $x \geq y$,

$$x^2 + x + 1 = y^n, \tag{1}$$

$$y^2 + y + 1 = x^m. \tag{2}$$

Так как $y > 1$ и $y^3 - 1$ делится на $y^2 + y + 1$, то $x^3 \geq y^3 > y^3 - 1 \geq y^2 + y + 1 = x^m$. Следовательно, $3 > m$. Но, поскольку $y^2 < y^2 + y + 1 < (y + 1)^2$, имеем $m \neq 2$. Таким образом, $m = 1$. Подставляя x из второго равенства в первое, видим, что y делит 3. Получили $y = 3, x = 13$. Но $P(13) = 183$ не является степенью тройки.

Вот еще одно решение. Левая часть каждого из равенств (1) и (2) либо делится на 3, либо имеет вид $3k + 1$. Так как n и m нечетны, то такой же вид имеют и сами числа y и x . При этом если x делится на 3 (соответственно, имеет вид $3k + 1$), то $P(x)$, а значит и y , имеет вид $3k + 1$ (соответственно, делится на 3). Значит, одно из чисел x, y (например, x) делится на 3, другое – не делится. Но $y^2 + y + 1$ ни при каком целом y не делится на 9. Получаем $m = 1$, и, подставив x из второго равенства в первое, видим, что y делит 3. Противоречие.

Это решение можно с помощью малой теоремы Ферма и некоторых ее следствий обобщить на случай многочленов $x^{p-1} + \dots + x + 1$, где p – произвольное нечетное простое число.

б) Будем рассуждать как при втором решении пункта а). Без ограничения общности считая, что x_1 делится на 3, имеем: x_2 не делится на 3. С другой стороны, $x_3, x_5, \dots, x_n, x_2$ делятся на 3. Противоречие.

Это решение нетрудно обобщить на случай многочленов $x^{p-1} + \dots + x + 1$ для произвольного нечетного простого p .

в) **Лемма.** Пусть n – произвольное четное число. Тогда в системе равенств задачи больше половины из показателей степеней k_1, \dots, k_n равны 1.

Доказательство. Рассуждая аналогично пункту а) и без потери общности считая, что числа x_2, x_4, \dots, x_n делятся на 3, имеем: $k_1 = k_3 = \dots = k_{n-1} = 1$. Следовательно, систему можно переписать в виде

$$P(P(z_1)) = z_2^{r_1}, \dots, P(P(z_m)) = z_1^{r_m} \quad \left(\text{где } m = \frac{n}{2} \text{ и } z_1 = x_1, z_2 = x_3, \dots\right).$$

Пусть для определенности $z_2 = \max\{z_1, \dots, z_m\}$. Докажем, что $r_1 = 1$.

Предположим противное. Имеем $r_1 \neq 3$. Действитель-

но, $z_1 = 3k + 1, P(z_1) = 9k' + 3, P(P(z_1)) = 9k'' + 4$. Но число t^3 несравнимо с 4 по модулю 9 ни при каком целом t . Следовательно, $r_1 \neq 3$. Поскольку $y^2 < y^2 + y + 1 < (y + 1)^2$, четным r_1 быть не может. Значит, $r_1 \geq 5$.

Из уравнений системы следует, что $z_1, z_2, \dots > 1$. Отсюда $2z_1^2 > P(z_1)$; поскольку функция $P(t)$ на положительной полуоси возрастает, имеем $2(2z_1^2)^2 > P(2z_1^2) \geq P(P(z_1)) = z_2^{r_1} \geq z_2^5$. Получили $8z_1^4 \geq 8z_1^4 > z_2^5$, откуда $8 > z_2$. Однако z_2 (как и z_1) – нечетное число вида $3k + 1$. Следовательно, $z_2 = 7$. Но $z_1 \leq z_2$, откуда $z_1 = 7$. С другой стороны, из равенства $P(P(z_1)) = z_2^{r_1} = z_1^{r_1}$ следует, что z_1 делит 3. Полученное противоречие доказывает лемму.

В силу леммы, можно переписать систему равенств задачи при $n = 4$ в виде $P(P(P(P(x)))) = x^l$, или $x^{16} + \dots + 27 \times 21x + 183 = x^l$. Следовательно, x – делитель 183, больший 1 и не делящийся на 3 (поскольку заведомо $l > 1$). Отсюда $x = 61$. Значит, число $27 \times 21 \times 61 + 183$ должно делиться на 61^2 , или $27 \times 21 + 3 = 570$ – на 61. Противоречие.

Авторам неизвестно, справедливо ли утверждение задачи для произвольного четного n . Неизвестно также, справедливо ли в случае $n = 4$ его естественное обобщение на многочлены $x^{p-1} + \dots + 1$, где $p \geq 3$ – простое число.

Замечания.

1. При доказательстве леммы мы получили неравенство $P(P(z_1)) \neq z_2^3$. Легко показать, что оно справедливо при любых целых z_1 и z_2 ; можно также распространить его на случай произвольного простого $p > 3$.

2. Утверждение задачи нельзя распространить на случай $p = 2$: уже при $n = 2$ это показывает система равенств $2 + 1 = 3, 3 + 1 = 2^2$. «Дублированием» примера его легко распространить на случай любого четного n .

3. Может ли вообще уравнение $x^n + \dots + 1 = y^k$ иметь нетривиальные решения в натуральных числах? Ответ положителен: $3^4 + \dots + 1 = 11^2, 7^3 + \dots + 1 = 20^2$. Однако, согласно глубокой теореме Туэ, на любой неособой кривой степени ≥ 3 лежит лишь конечное число целых точек, откуда следует, что каждое из таких уравнений может иметь лишь конечное количество решений.

В. Сендеров, Б. Френкин

M2055. Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$ В некоторых клетках лежат камни. Если на i -й клетке ($i > 0$) лежит ровно i камней, то разрешается снять с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i - 1, i - 2, \dots, 0$. Леша распределил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Найдите минимальный номер клетки, на которой лежит камень.

Ответ: 2010.

Заметим сразу, что в любой момент времени на клетке

с номером $i > 0$ лежит не более i камней; в противном случае их количество на этой клетке может только возрасти, и все камни на нулевой клетке собрать не удастся.

Для произвольного натурального k рассмотрим множество клеток с номерами $0, 1, \dots, k-1$. Выясним, как изменяется общее количество камней S_k в этих клетках при наших операциях. Пусть Леша сделал операцию с i -й клеткой. Если $i < k$, то камни перекладывались только в пределах нашего множества клеток, и S_k не изменилось. Если же $i \geq k$, то по одному камню появилось во всех наших клетках, т.е. S_k увеличилось на k . Значит, остаток от деления S_k на k остается неизменным; в конце же он равен остатку от деления 2006! на k .

Заметим, что 2006! делится на все числа от 1 до 2006 (очевидно), а также на $2007 = 3 \cdot 669$, $2008 = 2 \cdot 1004$, $2009 = 7 \cdot 287$ и $2010 = 2 \cdot 1005$. Докажем индукцией по $0 \leq i \leq 2009$, что i -я клетка вначале была пуста. База при $i = 0$ выполняется по условию. Пусть все клетки от 0-й до $(i-1)$ -й были пусты. Тогда число камней на i -й клетке было равно суммарному количеству камней на клетках $0, \dots, i$, т.е. делилось на $i+1$; кроме того, оно не превосходило i . Значит, оно было нулевым, что и требовалось.

С другой стороны, 2006! не делится на 2011 (так как 2011 – число простое), поэтому общее число камней на клетках от 0 до 2010 имеет ненулевой остаток от деления на 2011; в частности, это число не равно нулю, поэтому на 2010-й клетке изначально были камни.

Замечание. Решение позволяет выяснить, каков наименьший номер занятой клетки, если изначально число камней было равно n . Именно, это наименьшее натуральное число k такое, что n не делится на $k+1$. Более того, из решения легко увидеть, как следует разложить n камней на клетках с положительными номерами так, чтобы их можно было собрать в нуле. Будем раскладывать камни в клетки по порядку. На i -ю клетку положим такое (единственное!) количество камней $a_i \leq i$, чтобы число $a_1 + \dots + a_i$ имело тот же остаток от деления на $i+1$, что и n . Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что при такой раскладке камни собрать в нуле удастся.

И. Богданов

Ф2063. Фигурку из металла взвешивают на очень точных весах, используя золотые гирьки, – измеренная масса составила 47,98 г. Когда воздух под колпачком весов откачали до 0,1 атмосферного давления, получилось практически точно 49 г. Определите по этим данным, из какого металла сделана фигурка.

Плотность воздуха при нормальных условиях равна

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 293} \text{ кг/м}^3 \approx 1,2 \text{ кг/м}^3.$$

Отношение измеренных масс гирек составляет

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_0 - 0,1\rho}{\rho_0 - \rho} = \frac{1 - 0,1 \frac{\rho}{\rho_0}}{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} = \frac{49}{47,98}.$$

Тогда для искомой плотности металла получим

$$\rho_0 = \frac{\rho}{0,023} \approx 53 \text{ кг/м}^3.$$

Металл такой плотности найти не просто... Либо фигурка пустотелая, либо в условии задачи ошибка. Разность измеренных масс для сплошной металлической фигурки должна быть совсем малой, больше 1 г разницы для 50-граммовой фигурки – это слишком много. Вот если бы данные в задаче были 47,98 г и 48 г, тогда мы получили бы

$$1 - 0,1 \frac{\rho}{\rho_0} = 1,0004 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \text{ или } \rho_0 \approx 2600 \text{ кг/м}^3.$$

Такая плотность соответствует алюминию – это решение выглядит куда лучше. Должно быть, автор задачи и в самом деле ошибся...

Кстати, вес воздуха, вытесненного гирьками, можно не учитывать – в решение входит отношение m_2/m_1 .

Н. Простов

Ф2064. Длинная тонкая прозрачная трубка заполнена глицерином, посередине трубки находится маленький воздушный пузырек. Когда трубка вертикальна, пузырек всплывает практически с постоянной скоростью 1 см/с. Сделаем трубку горизонтальной, подождем достаточно долго – пока все успокоится, а пузырек перестанет двигаться. Теперь разгоним трубку вдоль ее оси до скорости 10 см/с и продолжим двигать ее с этой скоростью. Найдите смещение пузырька относительно его начального положения. Считать силу сопротивления пропорциональной скорости пузырька относительно жидкости.

Будем считать, что диаметр пузырька во много раз меньше диаметра трубки и что при движении пузырька жидкость в трубке практически не перемешивается. Когда трубка расположена вертикально, в ней возникает распределение давлений – чем ниже, тем больше давление. При этом на пузырек действуют силы со стороны окружающей воды – распределение давлений такое, что будь на месте пузырька такая же капелька воды, сила тяжести была бы уравновешена силами со стороны окружающей воды. Так мы можем найти сумму этих сил – она равна mg , где m – масса воды в объеме нашего пузырька (просто сила Архимеда, ничего неожиданного). При движении пузырька со скоростью v_1 она уравновешена силой сопротивления: $mg = kv_1$. Если мы двигаем горизонтальную трубку вдоль ее оси с ускорением a , распределение давления получится таким, что капелька воды (вместе с окружающей водой) имеет такое же ускорение. Тогда сила со стороны окружающей воды равна ma и в каждый момент почти полностью (считаем – полностью, масса воздушного пузырька совсем мала) уравновешена силой сопротивления: $kv = kv_1 v/v_1 = mg v/v_1$. В итоге получим соотношение $a = gv/v_1$. За малый интервал времени τ получаем

$$a\tau = g \frac{v\tau}{v_1}, \text{ или } \Delta v = \frac{g}{v_1} \Delta x.$$

Суммируя изменения скорости, получим слева v_2 ,

справа суммирование дает полное смещение пузырька относительно трубки. Окончательно найдем

$$x = \frac{v_1 v_2}{g} = \frac{0,01 \cdot 0,1}{10} \text{ м} = 0,1 \text{ мм}.$$

Совсем немного ...

А.Повторов

Ф2065. На гладком горизонтальном столе покоится клин массой M , его наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. Маленькая шайба массой m движется по столу со скоростью v_0 и «въезжает» на наклонную поверхность клина. Считая, что наклонная поверхность имеет плавное короткое сопряжение с горизонталью, найдите время подъема шайбы до верхнего своего положения. Найдите также смещение клина к этому моменту. Трения в системе нет.

Попробуем решить эту задачу в «лоб», т.е. укажем все силы, действующие на шайбу и на клин в процессе их движения (до наивысшей точки), и учтем связи между ускорениями шайбы относительно плоскости и относительно клина. Будем считать, что скорость шайбы относительно клина линейно убывает со временем от v_0 до нуля, а скорость клина линейно возрастает от нуля до скорости V_c центра масс системы «шайба-клин», которую найдем из закона сохранения импульса (по горизонтали):

$$V_c = \frac{v_0 m}{m + M} = \frac{v_0}{1 + n}.$$

Как нетрудно подсчитать, ускорение шайбы относительно клина a_1 направлено вниз под углом α к горизонту и равно

$$a_1 = \frac{g(n + 1) \sin \alpha}{n + \sin^2 \alpha},$$

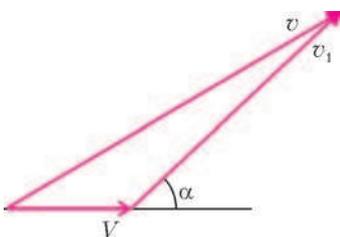
а ускорение клина относительно плоскости направлено горизонтально и равно

$$A = \frac{g \sin \alpha \cos \alpha}{n + \sin^2 \alpha}.$$

Разделив изменения скоростей на соответствующие ускорения, получим сильно различающиеся между собой искомые времена:

$$t_1 = \frac{-v_0}{-a_1}, \quad t_2 = \frac{V_c}{A}.$$

Скорее всего, неверны оба результата, и въезд шайбы на клин следует рассматривать как удар, в результате которого клин получает импульс, направленный горизонтально, а шайба и плоскость (вместе с Землей в целом) получают компенсирующие друг друга вертикальные составляющие начального импульса шайбы. Пусть сразу после въезда шайбы на клин V и v – скорости клина и шайбы, а v_1 – скорость шайбы относительно клина (см рисунок). Так как размеры плавного сопряжения клина малы, то временем его прохождения можно пренебречь. Считая малой и высоту



поднятия шайбы после въезда, запишем законы сохранения энергии и импульса (по горизонтали):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \quad mv_0 = MV + m(V + v_1 \cos \alpha),$$

или

$$v_0^2 = nV^2 + v^2, \quad v_0 = (n + 1)V + v_1 \cos \alpha.$$

Как видно из рисунка,

$$v^2 = V^2 + 2Vv_1 \cos \alpha + v_1^2.$$

Решая систему последних трех уравнений, находим

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{n}{n + \sin^2 \alpha}}, \quad V = \frac{v_0}{n + 1} \left(1 - \sqrt{\frac{n}{n + \sin^2 \alpha}} \cos \alpha \right).$$

Учтем, что относительная скорость шайбы уменьшается от v_1 до нуля с ускорением a_1 , а скорость клина увеличивается от V до V_c с ускорением A . Если временем въезда пренебречь, то для времени движения до наивысшей точки получаем

$$T_1 = \frac{-v_1}{-a_1}, \quad T_2 = \frac{V_c - V}{A}.$$

Преобразования дают, разумеется, одинаковые времена:

$$T_1 = T_2 = T = \frac{v_0}{g(n + 1) \sin \alpha} \sqrt{n(n + \sin^2 \alpha)}.$$

Центр масс системы движется с постоянной скоростью V_c , его смещение за время T получится $L = V_c T$. Но шайба относительно клина смещается по горизонтали вперед, значит, клин отстает от центра масс и это отставание нужно учесть при расчете смещения клина. Мы нашли скорость шайбы вдоль клина после въезда v_1 , ее проекция на горизонталь меняется равномерно от $v_1 \cos \alpha$ до нуля, смещение шайбы относительно клина по горизонтали составляет $s = 0,5T v_1 \cos \alpha$. Тогда смещение клина «назад» относительно центра масс равно $x = ms/(M + m)$, и полное смещение клина по горизонтали за время T будет $L - x$. Можно подставить теперь в формулу записанные выше выражения для L и x , но можно этого и не делать – все равно красивой формулы не получится...

Г.Панькевич

Ф2066. Тележки с массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг связаны легким упругим шнуром длиной $L = 0,3$ м. Вначале тележки неподвижны, а шнур почти натянут. Легкой тележке ударом сообщают скорость $v_0 = 2$ м/с в направлении соединяющего их шнура (рис.1). Через какое время произойдет удар тележек друг о друга? Жесткость шнура $k = 20$ Н/м.



Рис. 1

Центр масс тележек все время движется со скоростью

$$u_{цм} = v_0 \frac{m}{M + m}.$$

Пересядем в эту систему отсчета. Точка шнура, которая делит длину шнура в отношении $\frac{l_1}{l_2} = \frac{M}{m}$, как раз и есть

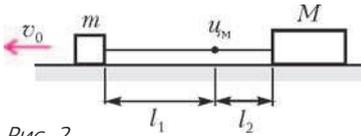


Рис. 2

центр масс, $u_{ц}$ – это ее скорость (рис.2). Жесткость куска шнура длиной l_1 равна

$$k_1 = k \frac{l_1 + l_2}{l_1} = k \left(1 + \frac{m}{M} \right),$$

и шнур останется натянутым в течение интервала времени

$$\tau_1 = \frac{1}{2} T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} = \pi \sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

После этого шнур уже не влияет на движение системы (до удара тел – уж точно!), тела едут навстречу друг друга со скоростями u_1 и u_2 , которые можно найти из уравнений (мы все еще находимся в системе, связанной с центром масс), описывающих законы сохранения импульса и энергии:

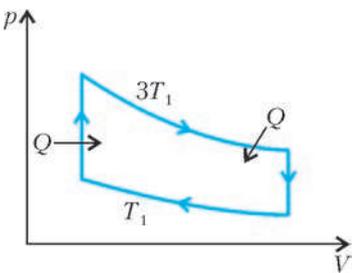
$$\begin{cases} mu_1 = Mu_2, \\ \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} = \frac{m(v_0 - u_{ц})^2}{2} + \frac{Mu_{ц}^2}{2}. \end{cases}$$

Можно, конечно, решать эту систему, но можно и вспомнить, что *относительная* скорость тел после абсолютно упругого лобового удара (а это – наш случай) остается неизменной, т.е. равной v_0 , а длина шнура в тот момент, когда он станет не натянут, равна l . Тогда полное время до удара будет равно

$$t = \tau + \frac{l}{v_0} = \pi \sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} + \frac{l}{v_0} \approx 0,7 \text{ с.}$$

Р.Александров

Ф2067. Цикл тепловой машины, работающей с идеальным газом, состоит из двух изохорических участков и двух изотермических участков с отношением температур $T_1 : T_2 = 3$. Известно, что на участке



изохорического нагревания газ получает столько же тепла, сколько на участке изотермического расширения. Найдите КПД этого цикла.

Это – совсем простая задача. Работы на изотермах (по абсолютной величине) относятся как 3:1 (для каждого малого участка ΔV давление на «верхней» изотерме в 3 раза больше (см. рисунок)).

Тогда полная работа в цикле равна $A_{ц} = Q - \frac{1}{3}Q = \frac{2}{3}Q$. Значит, термодинамический КПД равен

$$\eta = \frac{A_{ц}}{Q_{ц}} = \frac{2Q/3}{2Q} = \frac{1}{3}.$$

С.Простов

Ф2068. Простой омметр состоит из последовательно соединенных миллиамперметра с током полного отклонения 1 мА, батарейки напряжением 1,5 В и переменного резистора

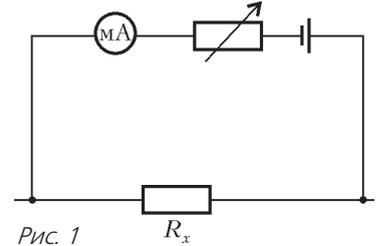


Рис. 1

Регулируя сопротивление этого резистора, мы производим «установку нуля» омметра – при замкнутых выводах омметра стрелку прибора устанавливаем в крайнее правое положение («ноль омметра»). При разомкнутых выводах ток нулевой – это соответствует «бесконечному» измеряемому сопротивлению. Можно ли при помощи этого прибора измерить сопротивление резисторов R_x порядка 1 Ом; 1 кОм; 1 МОм? Какое сопротивление покажет этот омметр, если к его выводам подключить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 2?

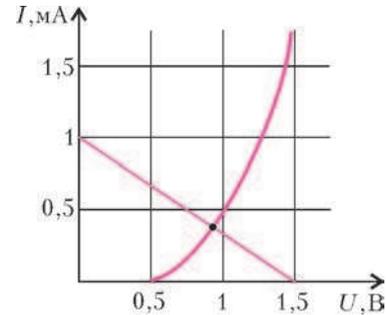


Рис. 2

Рассмотрим связь между током и напряжением, приложенным к измеряемому резистору. Впрочем,

не обязательно к резистору – к любому «устройству», подключенному к нашему омметру. Видно, что эта зависимость линейная, при $U = 0$ ток равен 1 мА (мы его установили), при $U = 1,5$ В ток обратится в ноль. Полученная прямая показана на том же рисунке, на котором приведена вольт-амперная характеристика диода. Ясно, что точка пересечения двух кривых дает нам возможность найти ответ: такой же ток через прибор, какой мы получили из графика – примерно 0,4 мА при напряжении 0,9 В, – будет течь при подключении резистора сопротивлением

$$R = \frac{0,9 \text{ В}}{0,4 \cdot 10^{-3} \text{ А}} = 2,25 \text{ кОм.}$$

А.Старов

Ф2069. В схеме на рисунке 1 «горизонтальная» батарейка имеет напряжение 1 В, три из четырех конденсаторов имеют одинаковые емкости, а последний – вдвое большую. Каким может быть напряжение второй, «вертикальной» батарейки, чтобы хотя бы один конденсатор в этой схеме остался незаряженным? До подключения батареек все конденсаторы заряжены не были.

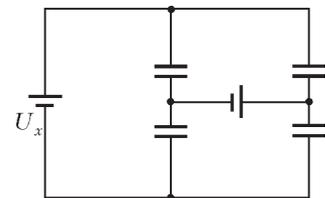


Рис. 1

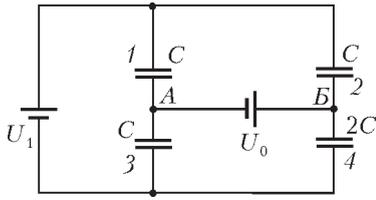


Рис. 2

Задача несложная, важно только не упустить каких-либо возможных вариантов. Можно рассматривать единственную схему (рис.2), но придется учитывать два возможных значения известного напряжения: $U_0 = 1$ В и $U_0 = -1$ В. При этом мы учтем «перестановку» конденсаторов 3 и 4; то же для 1 и 4 и 2 и 4 получится автоматически, с учетом полярности батарейки напряжением U_1 . Итак, при незаряженном конденсаторе емкостью $2C$ потенциал точки B равен нулю (примем далее за ноль потенциал «нижней» точки), $\Phi_A = -U_0$, суммарный заряд «нижних» обкладок конденсаторов 3 и 4, а также «верхних» обкладок конденсаторов 1 и 2 равен нулю:

$$CU_1 - (-U_0) + CU_1 + C(+U_0) + 0 = 0.$$

Отсюда находим $U_1 = U_0 = 1$ В. При $U_0 = -1$ В получим $U_1 = -1$ В (полярность обратная).

Запишем условие нулевого заряда конденсатора 3:

$$\Phi_A = 0, \Phi_B = U_0, CU_1 + C(U_1 - U_0) + 2C(-U_0) = 0,$$

$$U_1 = \frac{3}{2}U_0, U_1 = \pm 1,5 \text{ В.}$$

Теперь запишем условие нулевого заряда конденсатора 1:

$$\Phi_A = U_1, \Phi_B = U_1 + U_0,$$

$$CU_1 - (U_1 + U_0) + C(-U_1) + 2C(-U_1 - U_0) = 0,$$

$$-U_0 - U_1 - 2U_1 - 2U_0 = 0,$$

$$U_1 = -U_0 = -1 \text{ В (полярность обратная).}$$

И, наконец, запишем условие нулевого заряда конденсатора 2:

$$\Phi_B = U_1, \Phi_A = U_1 - U_0,$$

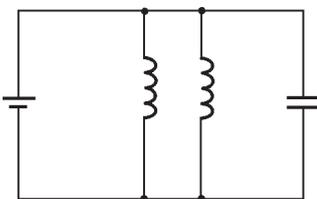
$$C(U_1 - U_1 + U_0) + C(-U_1 + U_0) + 2C(-U_1) = 0,$$

$$U_0 - U_1 + U_0 - 2U_1 = 0, 2U_0 = 3U_1, U_1 = \frac{2}{3}U_0 = \frac{2}{3} \text{ В.}$$

Итак, вот возможные напряжения «вертикальной» батарейки: $\frac{2}{3}$ В; 1 В; 1,5 В.

З.Рафаилов

Ф2070. На одинаковые тороидальные сердечники, сделанные из материала с большой магнитной проницаемостью, намотаны тонким проводом катушки, одна из них содержит вдвое больше витков, чем другая. Катушка с меньшим числом витков имеет индуктивность 0,5 Гн. Катушки соединены параллельно, к выводам катушек присоединены конденсатор емкостью 10 мкФ и батарейка напряжением 6 В с внутренним сопротивлением 10 Ом (см. рисунок). Ког-



да токи в цепи практически перестали изменяться, батарейку отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора. Какое количество теплоты выделится в каждой катушке после отключения батарейки? Провод, которым намотаны катушки, имеет очень маленькое сопротивление.

Вначале о катушках. Пусть индуктивность катушки с меньшим числом витков равна L , тогда индуктивность «двойной» катушки в 4 раза больше и составляет $4L$. Обозначим малое сопротивление куска провода, которым намотана меньшая катушка, через r , сопротивление «двойной» катушки вдвое больше и равно $2r$. После того как токи в цепи практически перестают изменяться, ЭДС самоиндукции катушек становятся нулевыми и полный ток в цепи батарейки равен $I_{\text{общ}} = 6 \text{ В}/10 \text{ Ом} = 0,6 \text{ А}$. Между катушками этот ток распределяется в отношении, определяемом сопротивлениями обмоток, т.е. через малую катушку течет вдвое больший ток, чем через «двойную». Таким образом, ток первой катушки равен $2I = 0,4 \text{ А}$, а ток «двойной» катушки равен $I = 0,2 \text{ А}$. Конденсатор при этом не заряжен (его напряжение было бы нулевым при идеальных катушках, а в нашем случае оно равно падению напряжения на сопротивлениях проводов, которыми намотаны катушки). Максимальный заряд конденсатора получится в тот момент, когда заряжающий его ток первый раз станет нулевым (для идеальных катушек такие моменты наступали бы дважды в течение каждого периода колебаний – в нашем случае колебания медленно затухают и самый большой заряд получается именно в первый такой момент). Пренебрежем затуханием за время одного периода колебаний (сопротивление проводов по условию мало), ЭДС индукции катушек все время одинаковы, изменения токов обратно пропорциональны индуктивностям катушек – ток через катушку индуктивностью L меняется в 4 раза быстрее, он сменит знак до того, как второй ток упадет до нуля. Суммарный ток станет нулевым при значении тока каждой катушки J , определяемом уравнением $4(0,2 - J) = 0,4 + J$, откуда $J = 0,08 \text{ А}$. Максимальный заряд конденсатора определим из закона сохранения энергии (выделением тепла за небольшой интервал времени пренебрегаем):

$$L \frac{(2I)^2}{2} + 4L \frac{I^2}{2} = L \frac{J^2}{2} + 4L \frac{J^2}{2} + \frac{Q_m^2}{2C},$$

откуда

$$Q_m = I\sqrt{7,2LC} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$$

Общее количество теплоты, выделившееся в системе после отключения батарейки, найти совсем просто – это суммарная энергия катушек сразу после отключения: $W_{\text{общ}} = L(2I)^2/2 + 4LI^2/2 = 0,08 \text{ Дж}$. Намного сложнее посчитать, как это тепло распределится между катушками. В схеме одновременно происходят два разных процесса – понемногу затухает «кольцевой» ток в контуре, образованном двумя катушками, и медленно затухают колебания в контуре из конденсатора и двух катушек, включенных параллельно. В «кольцевом» процессе расходуется энергия $W_1 = 5LI^2/2 =$

= 0,008 Дж, в «колебательном» – остальные $W_2 = 0,072$ Дж. В первом из процессов токи катушек одинаковы, отношение количеств теплоты определяется отношением сопротивлений катушек. Тогда в одинарной катушке выделяется $W_1/3 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ Дж, в «двойной» – примерно $6 \cdot 10^{-3}$ Дж. В колебательном процессе токи катушек определяются отношением индуктивностей, т.е. через одинарную катушку течет в каждый момент вчетверо больший ток. С учетом отношения сопротивлений проводов получится отношение 8:1 в пользу одинарной катушки, в ней выделится $8W_2/9 = 0,064$ Дж, в «двойной» катушке выделится $W_2/9 = 0,008$ Дж. Будем считать, что в одинарной катушке всего выделилось чуть меньше 0,07 Дж, а в «двойной» в сумме выделилось примерно 0,015 Дж. Конечно, это довольно грубая оценка, нельзя просто суммировать количества теплоты, выделяющиеся в каждом из процессов, но это все же лучше, чем ничего...

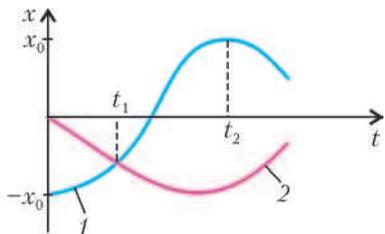
А.Зильберман

Ф2071. На двух одинаковых легких пружинах жесткостью k , прикрепленных к потолку, висят одинаковые грузы массой M . На один из грузов аккуратно ставят грузик массой m , а после того, как колебания прекратятся, быстро переносят грузик на другой груз. Через какое время грузы поравняются? А через какое время скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону?

Каждый из маятников после переноса грузика будет совершать гармонические колебания. Частоты колебаний разные:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M+m}},$$

амплитуды – одинаковые и равные $x_0 = \frac{mg}{k}$. Отсчитывая координаты от положения равновесия ненагруженного маятника, получим графики изменения координат со временем (см. рисунок). Поравняются грузы в момент t_1 , для которого $-x_0 \cos \omega_1 t_1 = -x_0 \sin \omega_2 t_1$. При этом



$\cos \omega_1 t_1 = \sin \omega_2 t_1$,

или

$$\omega_1 t_1 + \omega_2 t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = \frac{\pi}{2(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{\frac{k}{M}} + \sqrt{\frac{k}{M+m}}\right)}.$$

Скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону, как только один из них изменит направление движения. Так как $\omega_1 > \omega_2$, первым это сделает груз, с которого сняли грузик массой m , через половину периода своих колебаний. Итак,

$$t_2 = \frac{1}{2} T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{M}}} = \pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

А.Грузов

Ф2072. Корпус светодиода отштампован из прозрачной пластмассы (рис.1). На одном его конце сформирована линза, излучающая область представляет кружок диаметром 2 мм. Оцените диаметр светлого пятна на экране, расположенном на оси излучения на расстоянии 20 см от диода. Отражениями света внутри пластмассового корпуса можно пренебречь.

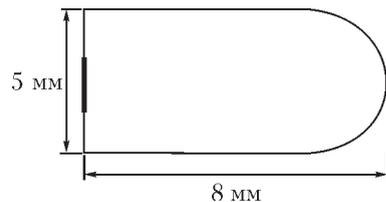


Рис. 1

При решении этой задачи нам придется сделать несколько допущений. Будем считать, что центр излучающей поверхности находится в главном фокусе линзы, т.е. $F = 8$ мм. Пусть коэффициент преломления пластмассы равен $n = 1,5$, тогда радиус кривизны сферической поверхности составляет $R = F(n - 1) = 4$ мм. Центр излучающей поверхности после преломления даст параллельный пучок света, его радиус $r_0 = 2,5$ мм. Далее проводим вычисления (рис.2). Отрезок GD имеет

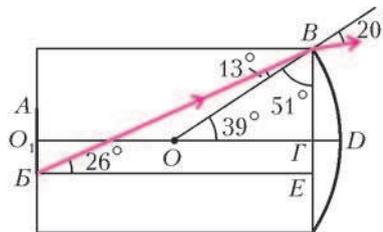


Рис. 2

длину 0,9 мм, расходимость пучка после линзы определяется ходом «самого невыгодного» луча BB' . Для угла падения его к нормали – радиусу OB – расчет дает 13° . Тогда угол преломления составит примерно 20° . При этом луч идет под углом 19° к главной оптической оси линзы и на расстоянии 20 см от нее отойдет от этой оси еще на $20 \text{ см} \cdot \text{tg } 19^\circ \approx 7 \text{ см}$. Таков и будет радиус пятна на экране. Интересно, что измеренный в прямом эксперименте со светодиодом радиус пятна был чуть больше 5 см – для такого грубого расчета совпадение хорошее.

А.Светлов

Задачи

1. Даны 6 легких и 6 тяжелых монет. По внешнему виду они неразличимы. За одно взвешивание про любое множество монет можно узнать, сколько в нем тяжелых монет. Как за два взвешивания найти две монеты, одна из которых легкая, а другая тяжелая?

А.Шоповалов



2. Вася задумал три натуральных числа. Для каждой пары чисел он нашел разность между их произведением и суммой. Оказалось, что одна из этих разностей отрицательна, а другая положительна. Каков знак третьей разности?

Б.Френкин



3. В прямоугольном треугольнике один катет вдвое длиннее другого. Разрежьте его на 5 одинаковых треугольников.

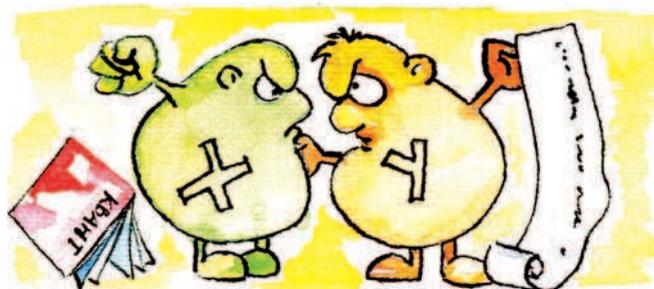
Р.Сарбаш



4. Для каких натуральных чисел x и y выполняется равенство

$$1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^x = 3^y ?$$

В.Сендеров



5. В стране, каждый житель которой либо рыцарь, либо лжец (рыцари, как известно, всегда говорят правду, а лжецы – врут), за круглым столом собралась компания из 19 аборигенов. Каждый из собравшихся заявил, что оба его соседа – лжецы. Разразился скандал, в результате которого часть компании покинула застолье.

После этого каждый из оставшихся с удовлетворением объявил, что теперь оба его соседа – рыцари.

– И в самом деле, среди вас теперь ни одного лжеца, – согласился с ними последний из покидавших компанию.

Тем временем «отщепенцы» организовали новое собрание и вновь за круглым столом. Каждый из сидящих за этим столом произнес, что среди его соседей ровно один рыцарь.

Сколько человек остались сидеть на своих местах после раскола компании?

В.Лецо

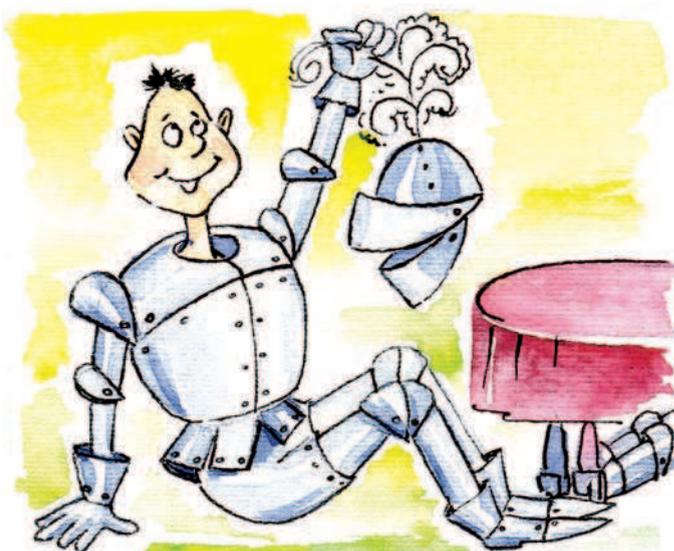


Иллюстрация Д.И. Ришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. При каких натуральных $n > 2$ можно записать в одну строку числа от 1 до n так, чтобы среди любых трех чисел, записанных подряд, одно из них было не меньше суммы двух других?

И.Акулич

17. Найдите все натуральные степени простых чисел, представимые в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

В.Сендеров

18. Точку D , лежащую внутри остроугольного треугольника ABC , отразили симметрично относительно трех его сторон AB , BC , CA . Оказалось, что соответствующие три новые точки C_1, A_1, B_1 лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC . Затем на чертеже оставили точки A_1, B_1, C_1 , а все остальное стерли. Восстановите треугольник ABC по этим трем точкам.

С.Дворянинов

19. Числовая последовательность f_0, f_1, f_2, \dots строится следующим образом:

$$f_0 = 0, \quad f_{n+1} = \frac{3f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4}}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Докажите, что все числа этой последовательности — целые.

В.Лецко

20. Натуральные числа x и y таковы, что $xy + 1$ является квадратом целого числа. Докажите, что найдется натуральное число z такое, что числа $yz + 1$, $zx + 1$, а также число $xy + yz + zx + 1$ являются квадратами целых чисел.

В.Произволов

Призрак Леонардо

И. АКУЛИЧ

Пусть тот, кто не математик, не читает меня.

Леонардо да Винчи. Научная проза

ПОЛТЫСЯЧЕЛЕТИЯ ОТДЕЛЯЕТ НАС ОТ ВЕЛИКОГО ЛЕОНАРДО да Винчи, но человечество и по сей день неустанно ищет ответ на вопрос: кто же он был такой? Художник? Изобретатель? Философ? Гений, намного опередивший свое время, или вообще посланник инопланетного разума?

Свидетельствами неувядающего интереса к этому титану эпохи Возрождения являются наделавшая много шума книга (а затем и фильм) «Код да Винчи», а также увлекательная компьютерная игра¹. Она прямо-

¹ См., например, www.1980-games.com/us/reflexion-games/reflexion-others/026.php или www.1980-games.com/us/reflexion-games/reflexion-others/debout.php

таки насыщена задачами, головоломками и прочими затруднениями, что делает ее чрезвычайно трудной, но и весьма интересной.

Одна из задач этой игры и явилась отправной точкой истории, которую мы сейчас изложим. Итак, дан клетчатый квадрат размером 5×5 клеток, каждая клетка которого может быть либо белой, либо черной (первоначально все клетки белые, хотя это и несущественно). Разрешается выбрать любую клетку и одновременно перекрасить в противоположный цвет ее саму и все клетки, имеющие с ней общую сторону (мы их будем называть соседями). Требуется за несколько таких операций перекрасить все клетки квадрата в противоположный цвет.

Трудно сказать, приложил ли руку к этой задаче сам Леонардо да Винчи, но вполне возможно, что да. Во

всяком случае, похоже на то. Уж очень... но об этом позже.

Безусловно, многие пользователи компьютерной игры решали головоломку «методом тыка», щелкая мышью по различным клеткам по велению души. Но мы постараемся подойти к делу научно.

Для начала назовем перекрашивание какой-либо клетки (и одновременно всех ее соседей по стороне) *ходом в эту клетку*. Пусть мы сделали какое-то количество ходов в какие-то клетки и добились своего, перекасив все клетки квадрата в противоположный цвет. Рассмотрим любую клетку. При каждом ходе в нее саму или в любую соседнюю с ней клетку она меняет цвет. Следовательно, если в итоге клетка получила противоположный цвет, суммарное число ходов в эту клетку и все соседние с ней клетки должно быть нечетным. При этом *очередность* ходов, очевидно, не имеет никакого значения — от перестановки слагаемых сумма (а тем более четность) не меняется.

Поразмыслив, можно сделать еще один, не менее важный вывод: если в какую-либо клетку было сделано не меньше двух ходов, то, уменьшив количество ходов в эту клетку на 2, мы приходим к такому же результату. Закон четности проявляется и здесь. Но если так, то, уменьшая число ходов в каждую клетку на 2 до тех пор, пока это возможно, мы доведем количество ходов в каждую клетку до *одного* или вообще *до ни одного*. Другими словами, если возможно с помощью некоторого набора ходов в некоторые клетки достичь желаемого результата, то того же можно добиться, сделав в каждую клетку *не более одного* хода. Такой вывод позволяет нам разделить клетки на две категории: в которые был сделан ход (единственный!) и в которые не было сделано хода. Посему давайте отметим клетки, в которые надо сделать ход, и подумаем, каким условиям должна удовлетворять полученная конфигурация.

Заметим, что с каждой *отмеченной* клеткой обязано соседствовать *четное* число отмеченных клеток (т.е. или ни одной, или две, или четыре), а с каждой *неотмеченной* клеткой — *нечетное* число отмеченных клеток (т.е. или одна, или три). Несомненно, большинство читателей согласится с этим без колебаний, а для тех, кто сомневается, поясним подробнее.

Рассмотрим любую *неотмеченную* клетку *A*. С ней соседствует нечетное число отмеченных клеток. Так как при ходе в любую такую соседнюю клетку клетка *A* поменяет цвет, то после всех ходов она поменяет цвет

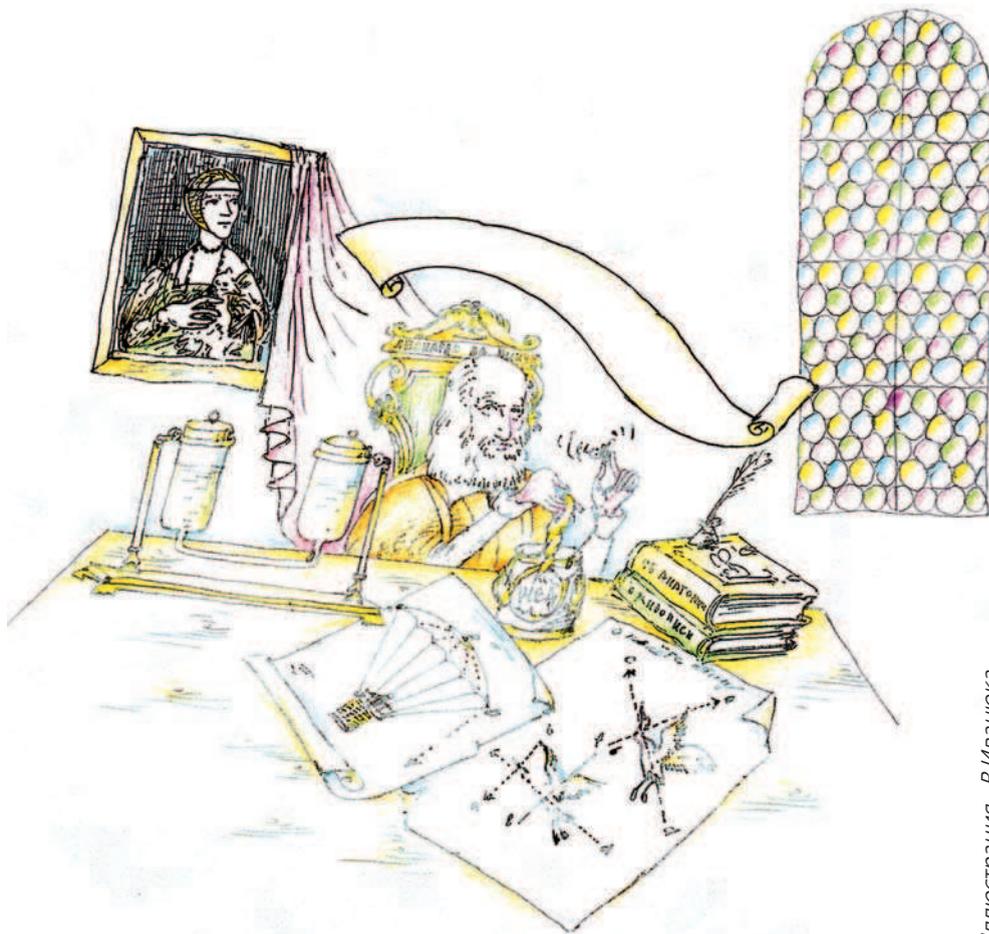


Иллюстрация В.Иванюка

нечетное число раз, и в итоге ее цвет станет противоположным исходному.

Теперь рассмотрим любую *отмеченную* клетку *B*. С ней соседствует четное число отмеченных клеток. Так как при ходе в любую такую соседнюю клетку клетка *B* поменяет цвет, то после всех ходов в соседние отмеченные клетки она поменяет цвет *четное число раз*. Плюс к тому же она один раз поменяет цвет при ходе *в саму клетку B*. Таким образом, в итоге ее цвет станет противоположным исходному.

Что ж, нам удалось преобразовать «динамическую» задачу (где клетки то и дело меняют цвет) в «статический» вариант, где нужно всего лишь отметить некоторые клетки доски определенным образом: чтобы с каждой отмеченной клеткой соседствовало четное число отмеченных клеток, а с каждой неотмеченной — нечетное число отмеченных клеток.

Приступим. Для квадрата 5×5 решение имеется (рис.1, отмеченные клетки окрашены в красный цвет). С помощью поворотов и отражений можно получить еще три решения, но самое интересное, что других решений нет! Уже это позволяет предположить, что великий Леонардо мог быть причастен к такой задаче — ведь интуитивно кажется, что решение должно быть «более симметричным», ну хотя бы относительно вертикальной и горизонтальной осей.

Разумеется, мы не станем ограничиваться квадратом 5×5 , а «потрогаем» квадраты $n \times n$ и для других n .

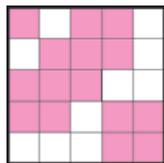


Рис. 1

При небольших n это можно сделать без особого труда. Проще всего получить ответ для $n = 1$ — это просто единственная отмеченная клетка. При $n = 2$ имеем четыре закрашенные клетки, и решение тоже единственное. Значение $n = 3$ дает красивую конфигурацию, опять-таки единственную (рис.2).

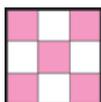


Рис. 2

Неожиданную россыпь различных конфигураций порождает $n = 4$. Существует пять принципиально различных способов отметить клетки (рис.3).

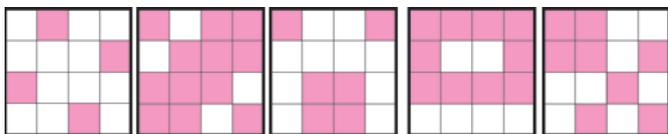


Рис. 3

Первые два из них с помощью поворотов и отражений «раздваиваются», а остальные три «расчетверяются». Итого, получается 16 способов. Весьма «выпадающий» результат на фоне остальных уже рассмотренных n .

Далее решения вплоть до $n = 8$ еще удалось подобрать вручную (отметим, кстати, что задача для квадрата 8×8 , т.е. собственно шахматной доски, была предложена в конкурсе «Математика 6–8» текущего учебного года (задача 5) — так что заодно мы решили и ее). При этом были обнаружены весьма симпатичные, обладающие высокой степенью симметрии конфигурации (рис.4).

Уже на этом этапе, несмотря на достигнутые успехи, появились смутные мрачные предчувствия. Во-первых, не удалось нащупать никаких «общих» способов отметить клетки требуемым способом. Неудачной оказались и попытки использовать найденные результаты для меньших n при поиске решений для больших n . Правда, конфигурация для $n = 8$, как легко заметить, получается как бы дополнением «каймы» к конфигу-

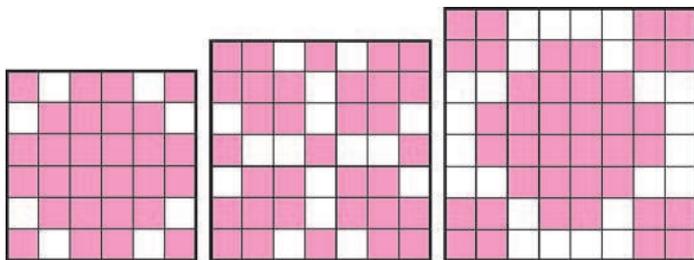


Рис. 4

рации для $n = 6$, но этот успех слишком скромен (и выявлен он был, честно сказать, задним числом).

Что делать? Пришлось поставить на службу достижения современной вычислительной техники и поручить компьютеру поискать, для каких еще n можно отметить клетки (а заодно подсчитать количество способов это сделать для каждого n). Бодро стартовав, компьютер добрался только до $n = 28$, поскольку с дальнейшим ростом n он начинает думать безбожно долго. Тем не менее, анализ результатов оказался настолько поразительным, что предположение о причастности да Винчи к рассматриваемой задаче только укрепилось. Посудите сами. Во-первых, компьютер подтвердил единственность решения для $n = 6, 7$ и 8 . Более того, выяснилось, что решение существует для всех рассмотренных n , причем для $n = 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27$ и 28 оно *единственно*. Следовательно, оно обладает симметрией относительно всех осей симметрии самой доски (иначе появились бы дополнительные решения, полученные поворотами и отражениями). Далее, для $n = 17$ (как и для известного нам $n = 5$) имеется 4 решения, для $n = 14$ и 24 имеется 16 решений, для $n = 11$ число решений достигает 64, для $n = 9$ и 16 оно равно 256. А дальше — прямо-таки потрясающий взлет: при $n = 23$ число решений резко «прыгает» до 16384, а для $n = 19$ — до 65536. Отметим, что каждое из фигурирующих здесь чисел (1, 4, 16, 64, 256, 16384 и 65536) является целой неотрицательной степенью четверки. При этом на свет уже появляются и конфигурации, не обладающие ни осевой, ни поворотной симметрией (хотя отдельные их фрагменты могут быть симметричны). Например, вот как выглядит один из возможных результатов для доски 19×19 (рис.5).

Фантазмагория какая-то! Такого рода результаты просто ошарашивают, и начинает казаться, что где-то рядом неслышной тенью проходит восставший из глубины веков призрак Леонардо. Неужели он предчувствовал нечто подобное (отсутствие компьютера гению, как известно, не помеха)? Так или иначе, но то,

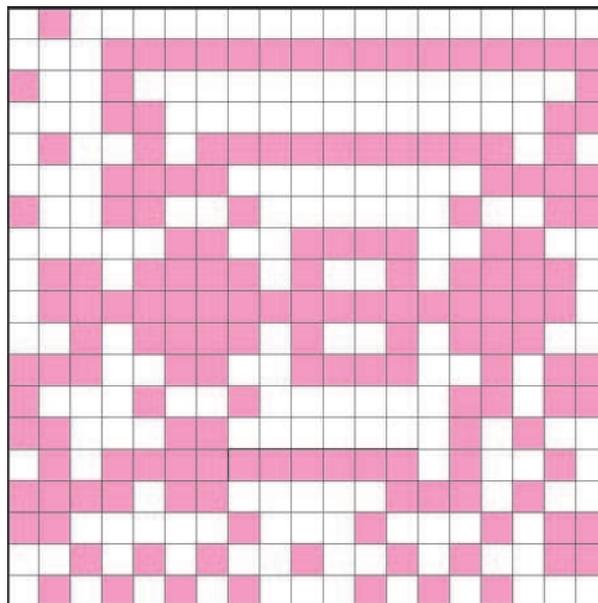


Рис. 5

что мы имеем, заставляет сформулировать два безответных пока вопроса.

Вопрос 1. Для любого ли n можно отметить требуемым образом клетки квадрата $n \times n$?

Вопрос 2. Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 4?

Что ж, «провалившись» с квадратом, попробуем поступить излюбленным методом отечественного персонажа деда Щукаря: *вильнуть куда-то в сторону*. Рассмотрим не квадрат, а прямоугольник размером $m \times n$ клеток. Что будет для него при решении той же задачи?

После запуска компьютера на всю мощь были получены результаты для всех досок размером вплоть до 20×50 (далее опять начались проблемы со временем). Результаты оказались не менее удивительны. Во-первых, по-прежнему *для всех* проверенных прямоугольников решение существует, причем для большинства из них (не менее 70%) оно *единственно*. При этом были выявлены два значения $m = 12$ и 18 , для которых решение единственно при *любом* (из рассмотренных) значении n . Ну а если количество решений не единственно, то в некоторых случаях оно уже не является степенью четверки, но является степенью двойки. Так что вопросов только добавилось.

Вопрос 3. Для любых ли m и n можно отметить требуемым образом клетки прямоугольника $m \times n$?

Вопрос 4. Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 2?

Вопрос 5. Существует ли такое m , что для любого n решение единственно?

После такого безответного удара задача перешла в стадию «разброд и шатания». Уязвленное самолюбие требовало ответных действий. Были предприняты многократные попытки исследовать не квадрат и не прямоугольник, а *любую* фигуру, которую можно вырезать из клетчатой бумаги (в том числе и с дырками), причем с единственной целью: найти *хотя бы одну* фигуру, клетки которой *нельзя* отметить требуемым образом.

Читатель наверняка уже догадался, что получилось в результате: таких фигур обнаружено не было! Любое самое заковыристое нагромождение клеток, которое только могло изобрести воспаленное воображение, позволяло после некоторых мучений добиться нужной «разметки». О количестве решений речь здесь, конечно, не шла — не до того как-то было. Остается последний вопрос.

Вопрос 6. Существует ли *хотя бы одна* фигура, которую можно вырезать из клетчатой бумаги (возможно, с дырками), клетки которой нельзя отметить требуемым образом?

Автор будет благодарен читателям, которые прояснят хотя бы часть поставленных вопросов. Но на всякий случай предупреждаем (ибо проверено на себе): не исключено, что в процессе раздумий у вас появится ощущение, что где-то совсем рядом находится призрак Леонардо да Винчи, который смотрит на вас и сочувственно улыбается. Точь-в-точь как Джоконда.

Мозаика из снежинок

(Начало см. на с. 14)

Теперь будем строить не одну, а много снежинок. Для начала замостим плоскость правильными треугольниками и шестиугольниками, как показано на рисунке 2. Затем в каждом из шестиугольников проведем три диагонали. В результате плоскость будет покрыта большими правильными треугольниками (закрасим их в красный цвет), маленькими правильными треугольниками (закрасим их в синий цвет) и равнобедренными

треугольниками с углом 120° (оставим их белыми). Начнем строить снежинки Кох из всех правильных треугольников. Как видно из рисунка 3, после первой итерации от каждого белого треугольника останутся незакрашенными 4 подобных ему втрое меньших треугольника. На второй итерации с этими ма-

ленькими треугольниками произойдет то же самое и т.д. Таким образом, красные и синие снежинки не будут

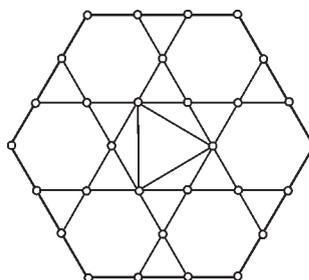


Рис. 2

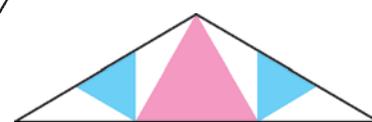


Рис. 3

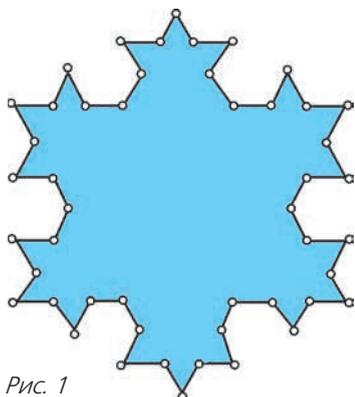


Рис. 1

пересекаться и в пределе заполнят почти всю плоскость. Последнее утверждение означает, что площадь белой части плоскости стремится к нулю, хотя существуют точки, которые никогда не будут окрашены.

Мозаика на рисунке 4 получается после трех итераций.

А.Заславский

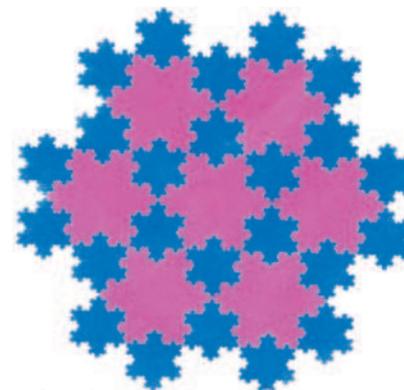


Рис. 4

Три эссе на физические темы

Р.ВИНОКУР

Трагический миг невесомости

В известном романе Жюль Верна «Из пушки на Луну» космические путешественники, летящие в огромном артиллерийском снаряде, якобы ощутили состояние невесомости в момент, когда снаряд пересекал центр притяжения между Луной и Землей. (Речь шла о точке, где силы притяжения, создаваемые Луной и Землей, одинаковы и противоположно направлены.) Известный американский физик-экспериментатор Роберт Вуд указал, что на самом деле состояние невесомости должно было установиться при выходе снаряда из атмосферы Земли. Этот же вывод сделан и в книге «Занимательная физика» замечательного популяризатора науки Якова Перельмана.

Роман Винокур был автором интересных публикаций в нашем журнале в 80-е годы прошлого века. Сейчас он живет в США, но контакта с журналом не теряет. (Прим. ред.)



Жюль Верн упустил из виду, что если тело и его опора движутся в пространстве с одинаковыми ускорениями, сообщаемыми только гравитационными силами, то давить друг на друга они не могут. (Имеется в виду ускорение во внешней системе отсчета, например относительно центра Земли или Солнца.) Поэтому как только на снаряд перестали действовать пороховые газы, выталкивающие его из орудийного ствола, и сопротивление воздуха (после выхода из земной атмосферы), все предметы внутри снаряда должны стать невесомыми. Эти негравитационные силы давления пороховых газов и сопротивления воздуха действовали только на снаряд, так что пока все они или их равнодействующая не равны нулю, ускорение снаряда отлично от ускорения находящихся в нем предметов.

Однако состояние невесомости могло возникнуть внутри снаряда еще раньше. Действительно, рассмотрим негравитационные силы, действующие на снаряд до и после его вылета из пушки. Внутри ствола на движущийся снаряд действует сила давления пороховых газов, которой противодействуют сила трения снаряда о стенки ствола и сила сопротивления воздуха. При этом сила давления пороховых газов существенно превосходит силы сопротивления воздуха, благодаря чему снаряд ускоряется в направлении движения. После вылета из ствола на снаряд действует лишь одна негравитационная сила – сила сопротивления воздуха, направленная против движения снаряда. Значит, равнодействующая негравитационных сил изменила свое направление после выхода снаряда из ствола. Поэтому в какой-то момент, когда снаряд еще находился в пушке, эта равнодействующая была равна нулю и на снаряд действовала только сила тяжести, что и соответствует условию невесомости.

К сожалению, космические путешественники не смогли бы ощутить состояние невесомости по причине гибели из-за гигантских перегрузок при разгоне снаряда в орудийном стволе...

Впрочем, по мнению поэта Игоря Северянина, творчество Жюль Верна не подлежит критическому научному анализу:

*...Он предсказал подводные суда
И корабли, плывущие в эфире.
Он фантастичней всех фантастов
в мире
И потому – вне нашего суда.*

В конце концов, никто не бывает всегда и абсолютно прав, и это можно показать на примере все той же физической задачи. Помимо гравитационных сил со стороны Солнца, Луны и других космических гигантов на снаряд и предмет внутри него действует взаимная сила притяжения, которая мала из-за сравнительно небольших масс этих тел и практически неощутима. Однако из-за этого эффекта абсолютное состояние невесомости не могло быть достигнуто.

Минус две рыбы и открытие позитрона

Нас было трое на рыбалке – Джон, Пол и я, Гаррис. Темза здесь изобилует щуками, плотвой, угрями и уклейкой. Гуляя по берегу, вы можете видеть их целые стаи, но поймать их на крючок не так просто. Время шло, а рыба не ловилась. И тогда Пол рассказал нам с Джоном об одной математической задаче, которую он решал в рож-

дественском конкурсе, организованном Кембриджским студенческим обществом:

Три рыбака улеглись спать, не поделив улова. В час ночи проснулся один из них и уехал домой, взяв с собой треть улова. При дележке на три равные части у него оказалась лишняя рыба, которую он выбросил в реку. В два часа ночи проснулся второй рыбак и, не зная, что один из его партнеров уже уехал, снова разделил улов на три равные части. У него тоже осталась лишняя рыба, которую он выбросил в реку. В три ночи проснулся третий рыбак и проделал ту же операцию, поделив улов на троих и выбросив «лишнюю» рыбу. Сколько рыб выловили рыбаки?

Мы с Джоном достали карандаш и бумагу и получили общее решение задачи: рыбаки поймали $(27N - 2)$ рыбы, где N – целое число. При $N = 1$ эта формула дает 25 рыб, а при $N = 2$ получается, что рыбаки поймали 52 рыбы. Мы решили, что 25 рыб – наиболее реальное число, но оказалось, что Пол предложил другое решение: минус две рыбы (при $N = 0$). Мы с Джоном дружно рассмеялись. В свое время смеялись и члены жюри конкурса, увидев такое необычное решение.

Между тем, мы поймали лишь одну рыбу на троих, больше клева не было, и мы разбрелись по берегу, ища хорошее место каждый в отдельности. Впрочем, удача нам не сопутствовала. Первым вернулся Джон, вспомнив, что ему надо возвращаться домой раньше других. Решив взглянуть напоследок на ранее пойманную рыбу, он вытащил ее из ведра. Неожиданно рыба вырвалась из его рук и нырнула в реку. Огорченный Джон решил возместить эту общую потерю. Он сбегал в соседний трактир, занял у трактирщика похожую рыбу из свежего улова, бросил ее в наше ведро и уехал домой не прощаясь (как истинный англичанин). Следует заметить, что трактирщик поставил условие, чтобы ему впоследствии вернули не деньги, а рыбу. Затем появился Пол, и с ним произошла такая же история – он тоже задолжал трактирщику одну рыбу. Потом это случилось со мной, когда Джон и Пол уже уехали.

Встретившись на следующий день, мы выяснили, что произошло, и долго смеялись, так как в результате мы поймали ровно минус две рыбы: одну выловили в самом начале рыбалки, а три рыбы нам предстояло поймать, чтобы вернуть долг трактирщику. Непривычное математическое решение оказалось вполне реальным...

Фамилия Пола была Дирак, а его специальностью была теоретическая физика. Однажды Дирак, решая уравнения, описывающие движение электрона, обнаружил отрицательные решения там, где обычно рассматривались только положительные значения. Вспомнив задачу «о минус двух рыбах», он не пренебрег этим случаем, а предположил, что у электрона есть двойник, во всем подобный электрону, но с положительным электрическим зарядом вместо отрицательного.

Такая элементарная частица была вскоре обнаружена экспериментально, и ее назвали позитроном. Впоследствии двойники-античастицы были открыты почти у всех элементарных частиц.

Объемный взрыв над Тунгусской тайгой

В интересной статье Льва Дыхно «Тунгусская катастрофа: новая гипотеза», напечатанной в журнале «Вестник» в 1997 году, я увидел знакомое имя – Михаил Цикулин, член комиссии по изучению Тунгусского метеорита при Академии наук СССР.

Когда-то в бывшей стране Советов наука ассоциировалась с романтикой, а физики считались весьма уважаемым сословием. Молодежь зачитывалась романом Даниила Гранина «Иду на грозу», а фотографии Эйнштейна стали обязатель-

ным атрибутом дома и на работе.

Качает, качает, качает задира ветер

фонари над головой.

Шагает, шагает, шагает веселый парень

по весенней мостовой.

Листает, листает, листает, учебник физики

листает на ходу.

Не знает, не знает, не знает, что я

по улице вслед за ним иду,

– звучала песня по радио из репродукторов...

Зимой 1969 года я, тогда третьекурсник Московского физико-технического института, попал на практику в Институт физики Земли, где Михаил Цикулин заведовал лабораторией. Я уже успел прочитать его с соавторами статью о моделировании Тунгусского взрыва. По мнению Цикулина, огромное космическое тело вошло в атмосферу Земли и, пролетая над тайгой с большой скоростью, создало ударную воздушную волну, повалившую деревья. В эксперименте, поставленном для проверки гипотезы, роль деревьев играли пластмассовые модели, воткнутые в песок, а для создания ударной волны использовался шнуровой взрывной заряд, полого натянутый над ними – вдоль предполагаемой траектории космического пришельца. В конце шнурового заряда был прикреплен небольшой сферический заряд, имитирующий взрыв метеорита в конечной точке полета. Эксперимент показал, что форма зоны, где пластмассовые модели были повалены, соответствуют реальной картине в Тунгусской тайге.

Однако сам Цикулин был не очень удовлетворен этим научным успехом. «Есть и другие гипотезы, – сказал он. – Если хотите, приходите делать диплом по этой теме. А пока читайте и думайте – может появится своя идея. Только помните принцип Оккама: чем проще гипотеза, тем она надежней. Кое-кто, например, предполагает, что в 1908 году над тайгой взорвался инопланетный космический корабль». Потом Цикулин читал нашей группе курс по теории взрыва. В июне 1969 года он попросил нашего согласия, чтобы перенести экзамен на неделю раньше. «Ради бога, извините за неудобство, – говорил он смущенно, – однако у меня действительно важная причина». Причиной оказалась трудная операция, сразу после которой Цикулин скончался. Ему было тогда 42 года.

Мы успели обсудить с ним несколько новых гипотез и остановились на идее объемного взрыва пыли в воздухе. Давно известно, что при распылении в воздухе быстро сгорающих мелких частиц – угольной пыли в шахтах, мучной пыли на мельницах, сахарной пудры на кондитерских фабриках и даже каменной пыли в каменоломнях и строящихся горных туннелях – нередко случались так называемые объемные взрывы. Физический эффект состоит в следующем.

Поскольку отношение площади поверхности к объему у пылинок намного больше, чем у того же вещества, сжатого в комок, пылинки могут быстро прогреться электрическим разрядом или вспышкой пламени до температуры воспламенения. При достаточном количестве кислорода сгорание происходит почти мгновенно и поэтому подобно взрыву. С другой стороны, благодаря большой суммарной поверхности движущаяся пыль сравнительно легко электризуется трением частиц о воздух и между собой, поэтому вероятность электрических разрядов довольно велика.

Предполагается, что Тунгусский метеорит был сравнительно малой кометой, просмотренной астрономами и состо-

(Продолжение см. на с.34)

...я исследовал остроумно найденную...формулу для количества, или градуса, теплоты в жидких смесях...

Георг Рихман

С покойным проф. Рихманом делал физико-химические опыты для исследования градуса теплоты, который на себя вода принимает от погашенных в ней минералов, прежде раскаленных.

Михаил Ломоносов

Ничего не зная о природе теплоты, можно построить полную систему термометрии, если смешивать горячую и холодную воду и в качестве термоскопа пользоваться нашими тепловыми ощущениями.

Уильям Томсон (Кельвин)

...даже без помощи термометров мы можем уловить стремление теплоты передаваться от какого-либо более горячего тела к более холодным окружающим телам до тех пор, пока она не будет распределена между ними так, что ни одно из них не будет более склонно забирать теплоту от остальных.

Джозеф Блэк

Внешнее воздействие, выводящее систему из термодинамического равновесия, вызывает в ней процессы, стремящиеся ослабить результаты этого воздействия.

Анри Ле Шателье

А так ли хорошо знакомо вам тепловое равновесие?

Разумеется, хорошо! Ведь тепловые явления начинают изучаться в школе одними из первых. И за помещенными здесь фрагментами из научных трудов сразу угадываются задачи на использование уравнения теплового баланса или лабораторные работы по нахождению температуры смешиваемых жидкостей. Да и в обиходе мы постоянно сталкиваемся либо с определением температуры нашего тела с помощью градусника, либо с приготовлением ванны комфортной температуры — для чего мешаем горячую воду с холодной, либо с добавлением в обжигающий чай или кофе молока — не дожидаясь их остывания. В общем, тепловое равновесие — это так наглядно и просто!

Однако уже в старших классах, при знакомстве с законами термодинамики, эта простота перестает казаться столь очевидной. Как вы отнесетесь, например, к идее «тепловой смерти Вселенной», к которой должно было бы привести всеобщее стремление к выравниванию температуры? Оказывается, все попытки объяснить, почему этого не произошло за невообразимо долгую историю нашего мироздания, были тщетными до создания общей теории относительности.

Еще одним примером нетривиальности понятия термодинамического равновесия и его глубокой связи с другими разделами науки служит приведенный в эпиграфе принцип Ле Шателье. С иной его формулировкой вы встретитесь, например, при изучении электромагнитной индукции или химических процессов, что подтвердит его справедливость и за рамками тепловых явлений.

Нельзя обойти вниманием и проблемы, возникшие у классической термодинамики при переходе к исследованию открытых систем и неравновесных процессов, протекающих как в живой, так и в неживой природе. Ведь возникновение разнообразнейших структур, их «самоорганизация», в конечном счете само появление жизни не согласуются с устоявшимися представлениями о разрушении всего стройного и упорядоченного при эволюции к равновесным, хаотическим состояниям.

Вот как далеко могут привести нас размышления над вроде бы нехитрыми вопросами. Поэтому, обдумывая их,

не упустите за внешней незамысловатостью глубокого их содержания.

Вопросы и задачи

1. Почему калориметры делают из металла, а не из стекла?
2. Верно ли, что при теплообмене энергия всегда переходит от тел с большей внутренней энергией к телам с меньшей внутренней энергией?
3. Нормальная температура человеческого тела около 37°C . Отчего же нам не холодно при температуре воздуха 25°C и очень жарко при 37°C ?
4. Почему в очень жаркую погоду нет смысла обмахиваться веером?
5. Как влияет ветер на показания термометра в морозный день? Рассмотрите два случая: а) термометр находится в тени; б) термометр освещен солнечными лучами.
6. Если у вас имеются два непроградуированных термометра, то как определить, какой из них нагрет больше?
7. В жаркую погоду в тени один термометр кладут в лужу, а другой кладут на скамейку и поливают водой из той же лужи. Какой из термометров показывает более высокую температуру?
8. Можно ли довести воду до кипения, подогревая ее стоградусным паром при нормальном атмосферном давлении?
9. Большой сосуд с кипяченой водой, в котором плавает стакан с сырой водой, ставят на нагреватель. Через некоторое время вода в стакане закипает раньше, чем в сосуде. Как это объяснить?
10. Можно ли вскипятить воду в бумажном стаканчике?
11. Откуда берется энергия, поддерживающая кипение воды в чайнике в течение нескольких секунд после снятия чайника с газовой плиты?
12. На одинаковые плитки поставили две одинаковые кастрюли с равными количествами воды при одной и той же температуре. Через некоторое время в первую кастрюлю долили немного воды из кипящего чайника. В какой из кастрюль вода закипит быстрее?
13. В холодную воду опускают нагретый в кипящей воде

металлический брусок. В каком случае вода нагреется больше: если брусок алюминиевый или свинцовый? Объемы брусков одинаковы.

14. Медный кубик *A* имеет температуру $200\text{ }^{\circ}\text{C}$, такие же медные кубики *B* и *C* имеют температуру $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Путем теплообмена между ними нужно охладить кубик *A* до температуры $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ и нагреть за счет этого кубики *B* и *C* до температуры $75\text{ }^{\circ}\text{C}$. Возможно ли это? Теплообменом между кубиками и воздухом пренебречь.

15. Почему лед дольше не тает, если его завернуть в мокрую газету?

16. Зачем в погребах в холодную погоду рядом с овощами ставят большие емкости с водой?

17. Если в воду при температуре $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ бросить кусок льда при температуре $-22\text{ }^{\circ}\text{C}$, произойдет заметное увеличение массы льда. Кристаллизация воды сопровождается выделением значительного количества теплоты, почему же при этом вода не нагревается?

18. При помещении в переохлажденную воду небольшого кристаллика льда вода немедленно начинает замерзать. Какую температуру должна была бы иметь переохлажденная вода, чтобы целиком превратиться в лед? Теплоемкость воды считать не зависящей от температуры.

19. В сосуде находятся в тепловом равновесии лед и вода одной и той же массы. Через сосуд пропускают пар при температуре $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ и в том же количестве. Какая установится конечная температура? Потерями тепла пренебречь.

Микроопыт

Поставьте рядом три вместительных сосуда: с горячей водой — слева, с холодной водой — справа и со смесью горячей и холодной воды — в центре. Подержав правую и левую руки в соответствующих емкостях несколько минут, одновременно опустите их в центральный сосуд. Опишите ваши ощущения и постарайтесь их объяснить.

Любопытно, что...

...теплом Платон считал то, что остается от огня в накаливаемых телах, когда пламя потушено; Бэкон полагал теплоту «расширяющимся движением»; по мнению Гассенди, тепло и холод — разные материи, причем холод состоит из «острых» атомов в форме тетраэдра; Галилей же учил, что холод не является «положительным качеством», а есть всего лишь отсутствие тепла.

...эксперимент, описанный в «Микроопыте», был проведен еще в XVII веке английским философом Джоном Локком для доказательства субъективности человеческих ощущений. Но, помимо философского значения, опыт навсегда закрыл возможность использовать наше тело в качестве термометрического прибора и дать с его помощью определение температуры.

...работа Рихмана «Размышление о количестве теплоты, которое должно получаться при смешивании жидкостей, имеющих определенные градусы теплоты», положившая начало точным количественным расчетам в области теплотехники. Хотя сам Рихман не разграничивал понятия «температура» и «теплота», ему удалось вывести формулу для определения температуры смеси однородных жидкостей и экспериментально исследовать влияние на теплообмен температуры, формы и поверхности тел, а также скорости движения охлаждающей среды.

...опыты Рихмана повторил в 1772 году шведский физик Иоганн Вильке, введший затем единицу измерения количества теплоты. Она легла в основу современного опреде-

ления калории, правда это название возникло лишь в 1852 году во Франции. С появлением джоуля калория стала вытесняться из научного употребления, однако она до сих пор в ходу, например, при оценке энергетической ценности продуктов питания.

...несмотря на долгую путаницу в определении тепловых понятий и использование мифической материальной сущности — теплорода, к XIX веку был заложен фундамент термометрии — раздела физики, изучающего способы измерения температуры, и калориметрии — суммы методов измерения различных тепловых эффектов.

...давно известные тепловые явления длительное время представляли область, совершенно обособленной от явлений механических. Неудивительно поэтому попытки ученых найти связь теплоты с механикой, трактуя, скажем, температуру как аналог давления в сплошной среде. Подобно тому как механическое равновесие в такой среде образуется при выравнивании давлений, тепловое равновесие требует равенства температур.

...понятие теплового равновесия, через которое в физике приходят к понятию температуры, можно характеризовать как динамическое равновесие, когда процессы молекулярного масштаба идут весьма интенсивно, но все макроскопические процессы прекращаются.

...первым примером процесса установления теплового равновесия, когда тепло передается от более хаотической системы к более упорядоченной, было броуновское движение. Маленькие частицы примеси в жидкости образуют систему, схожую с идеальным газом частиц, хотя и не взаимодействующих между собой, но испытывающих действие молекул жидкости, в которой они плавают.

...в нагретой плазме в одном месте могут быть две температуры. Каждая из входящих в состав плазмы систем — электроны и ионы — находится сама по себе в тепловом равновесии. Поток тепла между ионами и электронами тем не менее существует, но он очень слаб, и температуры выравниваются сравнительно медленно.

...опытная проверка первого закона термодинамики не один раз проводилась в специальных калориметрах, где измерялась теплота, выделяемая в процессах жизнедеятельности различными существами — от мыши до человека. Как оказалось, она полностью соответствовала энергии, поглощенной вместе с питательными веществами. Это отрицало идею о том, что организмы могут являться независимыми источниками какого-либо нового вида энергии, а в конечном итоге привело к представлению о живых организмах как об открытых термодинамических системах, далеких от состояния равновесия.

Что читать в «Кванте» о тепловом равновесии

(публикации последних лет)

1. «Костры в поле и русская баня» — 2002, № 1, с. 31;
2. «Тепловые свойства воды» — 2002, № 3, с. 10;
3. «Обратимые и необратимые процессы в термодинамике» — 2003, Приложение № 4, с. 44;
4. «Где найти прошлогоднюю зиму?» — 2004, Приложение № 4, с. 69;
5. «Теплоемкость равновесных тепловых процессов» — 2005, № 3, с. 44;
6. «Тепло и холод: физика и биология» — 2006, Приложение № 6, с. 100;
7. «Калейдоскоп «Кванта» — 2004, № 3, с. 32; 2007, № 1, с. 32;
8. «Работа газа при переходе из начального состояния в конечное» — 2007, № 3, с. 43;
9. «Температура» — 2007, Приложение №5.

Материал подготовил А.Леонович

$t = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$

(Начало см. на с. 30)

явшей в основном из углистого хондрита. Могло произойти вот что. Комета, с ее небольшим твердым ядром и объемистым пылевым шлейфом, полого вошла в земную атмосферу и вызвала поначалу свечение облаков в зоне длиной около тысячи километров, наблюдаемое рядом свидетелей. Облако углистой пыли, вытянувшееся вдоль траектории движения, под действием земного тяготения опускалось все ниже и ниже, пока не достигло плотных слоев атмосферы, где кислорода уже было достаточно для быстрого сгорания. Роль детонатора мог сыграть электрический разряд в атмосфере (например, молния). После взрыва остатки небесного тела упали на землю в виде черной пыли, содержащей углистый хондрит.

Тема с вариациями

В.ЭПШТЕЙН

СТРУКТУРА КУРСА ФИЗИКИ ИНОГДА НАПОМИНАЕТ МУЗЫКАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. Простые темы (народные мотивы) композитор разворачивает вариациями, и в результате получается, к примеру, оркестровая симфония. Простые школьные задачи (поучительные сами по себе) демонстрируют идеи, лежащие в основе фундаментальных физических теорий. Вот пример такого рода.

Тема – задача 35

(«Сборник задач по физике» А.П.Рымкевича, 1992 г.)

Расстояние s необходимо проехать на лодке туда и обратно один раз по реке, скорость течения которой v_p , а другой раз по озеру. Скорость лодки относительно воды оба раза v_l . Докажите, что поездка туда и обратно по реке всегда занимает больше времени, чем по озеру.

Предварительный анализ

Первая (и вполне естественная) реакция на условие задачи – времена равны: выигрыш времени при движении по течению компенсируется потерей времени на обратном пути. Более глубокий анализ (или, для физиономистов, выражение лица преподавателя) показывает, что все не так просто. Компенсация, конечно, имеется, но не полная. К этому выводу можно прийти, исходя из качественных соображений, которые стоит запомнить: их можно будет применить при решении других задач.

1) Придадим параметрам задачи допустимые значения, при которых ответ становится очевидным.

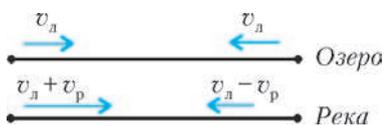


Рис. 1

В нашем случае при $v_p > v_l$ катер, движущийся по реке, никогда не вернется в исходный пункт (рис.1).

Объемная, или вакуумная, бомба давно имеется в военных арсеналах, но широко не применяется (существуют определенные международные соглашения на этот счет). При ее первичной детонации выделяется облако взрывчатого геля, затекающее в щели, окопы и убежища. Потом (секунд через двадцать) срабатывает второй детонатор, и облако взрывается по всему своему объему.

Интересно, что гипотеза Льва Дыхно по существу тоже базируется на идее объемного взрыва. Однако в его модели необходимо одновременное наличие двух редких явлений – небесного тела, принесшего космические частицы, и большого газового выброса из недр Земли. Вероятность такого совпадения крайне мала. Так что гипотеза пылевого взрыва в нижних слоях атмосферы представляется более надежной.

Можно предположить, что и при других значениях скорости время движения в реке будет больше, чем в озере.

2) Сравним времена воздействия различных факторов.

В нашей задаче время движения против течения заведомо больше, чем по течению. Таким образом, фактор, мешающий движению, действует дольше, чем фактор помогающий. Следует, очевидно, ожидать, что мешающий фактор будет превалировать над помогающим.

Решение задачи

Время движения в озере равно

$$t_1 = \frac{2s}{v_l}.$$

Время движения в реке составляет

$$t_2 = \frac{s}{v_l + v_p} + \frac{s}{v_l - v_p} = \frac{2v_l s}{v_l^2 - v_p^2} = \frac{2s}{v_l - \frac{v_p^2}{v_l}}.$$

Видно, что время движения в реке больше, так как числители обеих формул одинаковы, в то время как знаменатель второй заведомо меньше знаменателя первой.

Вариации на тему задачи 35

Рассмотрим конструкцию прибора для определения скорости движения лодки относительно воды. Прибор представляет собой жесткое основание, на котором располагаются источник звука и отражатель (рис.2). Для измерений прибор закрепляют на корпусе лодки снаружи так, чтобы во время движения прибор не увлекло воду.

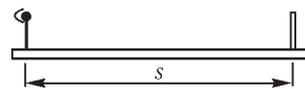


Рис. 2

Измеряется время, за которое звуковой импульс распространяется от источника до отражателя и возвращается к источнику. По этому времени легко вычисляется скорость движения лодки относительно воды. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство. Дело в том, что распространение звука имеет важную особенность: скорость звука относительно среды, в которой он распространяется, не зависит от скорости источника звука. (Этим распространение звука существенно отличается, например, от движения осколков разорвавшейся гранаты: если в момент взрыва граната двигалась, скорость осколков относительно гранаты суммируется со скоростью гранаты.) С учетом этого обстоятельства в системе отсчета, связанной с прибором, скорость

звука будет равна $v_{зв} - v_l$ ($v_{зв}$ – скорость звука относительно воды), когда звук распространяется от источника к отражателю, и $v_{зв} + v_l$ при распространении в обратном направлении. Но тогда совершенно ясно, что время между излучением и приемом звукового импульса определяется формулой для времени движения лодки в реке с заменой v_l на $v_{зв}$ и v_p на v_l :

$$t_2 = \frac{2s}{v_{зв} - \frac{v_l^2}{v_{зв}}}.$$

Зная расстояние s между источником звука и отражателем и определив время t_2 , мы легко определяем искомое значение скорости лодки:

$$v_l = \sqrt{v_{зв} \left(v_{зв} - \frac{2s}{t_2} \right)}.$$

Усложним задачу. Попробуем определить скорость лодки, если величина s не известна (или изменяется). Решение можно получить, если произвести измерение времени до того, как лодка начала двигаться. Это время определяется формулой для времени движения лодки в озере с соответствующей заменой:

$$t_1 = \frac{2s}{v_{зв}}.$$

Из двух последних формул можно исключить s и, таким образом, решить поставленную задачу:

$$v_l = v_{зв} \sqrt{1 - \frac{t_1}{t_2}}.$$

А можно ли найти скорость лодки, если измерения в условиях неподвижной лодки не проведены? Предположим также, что опустить прибор, скажем, в движущуюся вместе с лодкой ванну и определить t_2 тоже нельзя. (Например, если вода протекает сквозь лодку и ванну, как сквозь решето, – странная конструкция, не правда ли?) Оказывается, и такую задачу можно решить. Для этого необходимо развернуть прибор перпендикулярно движению лодки и произвести второе измерение времени распространения звука.

Рис. 3

Ясно, что принятый звуковой импульс распространялся вдоль равных сторон треугольника, как это показано на рисунке 3. Легко рассчитать время распространения t_3 . Как видно из рисунка,

$$\left(v_l \frac{t_3}{2} \right)^2 + s^2 = \left(v_{зв} \frac{t_3}{2} \right)^2,$$

откуда получаем

$$t_3 = \frac{2s}{\sqrt{v_{зв}^2 - v_l^2}}.$$

Сравнивая времена t_2 и t_3 , находим

$$\frac{t_2}{t_3} = \frac{v_{зв}}{\sqrt{v_{зв}^2 - v_l^2}}.$$

Отсюда и определяется скорость лодки:

$$v_l = v_{зв} \sqrt{1 - \frac{t_2^2}{t_3^2}}.$$

«Индикатором» движения, таким образом, является отношение времен t_2 и t_3 .

Вряд ли рассмотренный прибор может быть действительно использован для определения скорости корабля или самолета. Существуют более простые и надежные средства для решения той же задачи. И тем не менее, идея устройства оказывается плодотворной. Она имеет прямое отношение к революционному преобразованию классической физики – созданию теории относительности. Впрочем, речь при этом пойдет о необычной лодке, плывущей по необычному озеру.

Теория Максвелла. Плавание Земли в эфире

Во второй половине XIX века в истории науки произошло знаменательное событие. В результате создания Максвеллом теории электромагнетизма была теоретически предсказана возможность излучения электромагнитных волн, при этом были указаны их свойства и условия излучения. Также было показано, что частным случаем излучения является видимый свет. Расчеты Максвелла были подтверждены опытами Герца. В частности, выяснилось, что, в полном соответствии с общими свойствами волновых процессов, скорость распространения электромагнитной волны (света) не зависит от скорости движения источника излучения относительно среды. С другой стороны, и расчеты и эксперименты показали, что свет может распространяться в вакууме. Исходя из этого, Максвелл приходит к заключению (единственно возможному, с его точки зрения): то, что мы считаем пустотой, на самом деле упругая среда. Максвелл называет ее эфиром. Эфир заполняет всю Вселенную. Он играет для света ту же роль, что и вода для звука: звук – распространение колебаний воды, а свет – эфира.

Но почему же мы не замечаем присутствия этой среды? Ответ прост: частицы, из которых состоит эфир, настолько малы, что они свободно проходят сквозь любое тело, а следовательно, и сквозь датчик измерительного прибора. А как же тогда установить факт существования эфира? Максвелл предлагает идею, суть которой рассматривалась нами в решении задачи 35 и в вариациях на тему этой задачи. Источник звука заменяется источником света, а в качестве лодки используется наша планета Земля, которая несется по своей орбите вокруг Солнца, т.е. сквозь эфир, со скоростью 30 км/с.

Идея этого опыта была реализована Майкельсоном и Морли в 1887 году. Увы, результат эксперимента оказался отрицательным – движение Земли относительно эфира обнаружено не было ($t_3 = t_2$). Именно отрицательный результат опыта Майкельсона и Морли был одной из основных предпосылок для пересмотра основ классической механики и значительно способствовал признанию специальной теории относительности.

Впрочем, это уже совсем другая история.

Не пренебрежем трением качения...

А. СТАСЕНКО

ВТЕЧЕНИЕ ТЫСЯЧ ЛЕТ ТРЕНИЕ БЫЛО САМЫМ ЗНАКОМЫМ и вместе с тем весьма загадочным явлением. От добывания огня (желанный эффект) до замены волочения грузов (где трение выступает как вредный фактор) качением прошло, вероятно, много времени. Во всяком случае, изобретение колеса признается величайшей технической революцией человечества.

Количественное описание трения (как и все научные теории) началось приблизительно три века тому назад, пройдя путь от феноменологических соотношений до современной молекулярно-механической теории.

В 1699 году Гильом Амонтон опубликовал результаты своих экспериментов и сформулировал закон трения в виде пропорциональности между тангенциальной (F_τ) и нормальной (F_n) силами взаимодействия соприкасающихся твердых тел:

$$F_\tau = kF_n. \quad (1)$$

Прошло более восьмидесяти лет, и Шарль Кулон подтвердил (1781 г.) закон Амонтона, но ввел в него дополнительное слагаемое:

$$F_\tau = kF_n + F_a. \quad (2)$$

Это был существенный шаг в понимании явления: новое слагаемое F_a подчеркивало, что притяжение соприкасающихся тел существует даже без внешней прижимающей силы: тела как бы «прилипают» друг к другу, не будучи смазаны каким-либо клеем. Эта дополнительная сила стала называться силой адгезии (от латинского «прилипание»), а новое выражение для F_τ назвали законом Амонтона–Кулона.

Сейчас любой школьник знает этот закон, по крайней мере в виде (1), и коэффициент пропорциональности k уверенно называет «коэффициентом трения скольжения». Но опыт показывает, что нужно приложить касательную к плоскости соприкосновения силу не только для того, чтобы сдвинуть с места кирпич, лежащий на столе. Для качения цилиндра по столу тоже нужна сила – правда, существенно меньшая, чем в случае кирпича. Эту силу по аналогии назвали «силой трения качения». Кулон предложил выражение и для этой силы:

$$F_k = \frac{\lambda}{a} F_n. \quad (3)$$

Здесь a – радиус цилиндра, а коэффициент λ , аналогично случаю трения скольжения, был назван «коэффициентом трения качения». Но если k в выражениях (1) и (2) является безразмерным, то λ в выражении (3), как легко видеть, имеет ту же размерность, что и радиус a , т.е. размерность длины.

Понимание физической причины взаимодействия сопри-

касающихся тел приходило постепенно с развитием представлений о молекулярном строении вещества. Выяснилось, что потенциальная энергия притяжения двух электронейтральных молекул друг к другу растет с уменьшением расстояния между ними обратно пропорционально шестой степени этого расстояния. Значит, сила притяжения обратно пропорциональна седьмой степени этого же расстояния. Конечно, в конденсированном состоянии каждая молекула взаимодействует со многими другими, причем результирующая сила со стороны этих других молекул различна в глубине вещества и у поверхности. Интуитивно ясно, что вблизи поверхности должно существовать ненасыщенное поле притяжения – кто не наблюдал, как даже на вертикальных полированных поверхностях шкафов со временем образуется слой тонкой пыли.

Прямые измерения показали, что сила взаимодействия (притяжения) двух диэлектрических тел действительно обратно пропорциональна седьмой степени расстояния между ними. Это очень резкая зависимость: стоит уменьшить зазор между телами до размера диаметра атома, как сила притяжения уменьшится на два порядка! Иными словами, «бесконечность» наступает уже на расстоянии порядка размеров молекул.

Таким образом было понято, что и трение скольжения и трение качения имеют одну и ту же физическую природу – электромагнитное взаимодействие элементов, составляющих твердое тело. Правда, любопытно, что сопутствующие коэффициенты, несмотря на почти одинаковую словесную формулировку, имеют разные размерности.

Однако пора поговорить о физических свойствах соприкасающихся твердых тел и о физических величинах, их характеризующих. Прежде всего рассмотрим *модуль упругости*. Он определяется следующим образом. Возьмем цилиндр длиной l и площадью поперечного сечения S и растянем его (или сожмем) осевой силой F , при этом его длина увеличится (или уменьшится) на Δl . Естественно предположить, что это изменение длины пропорционально силе F и обратно пропорционально площади сечения S , а коэффициент пропорциональности и есть (обратный) модуль упругости:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}.$$

Этот модуль E ввел двести лет назад (1807 г.) английский ученый Томас Юнг. Из формулы видно, что если формально положить $\Delta l = l$, то $E = \frac{F}{S}$. Это означает, что модуль упругости есть механическое напряжение (сила на единицу площади), которое должно увеличить (уменьшить) длину стержня в два раза. Отсюда же видна и размерность модуля упругости:

$$[E] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Эксперименты со стержнями подтверждают линейную зависимость между относительной деформацией и напряжением. Но растянуть стержень вдвое не получится – разве что если он будет резиновый. Еще раньше стержень «потечет» – начнутся необратимые деформации. Соответствующее напряжение так и называется – *предел текучести* σ и, конечно, тоже измеряется в паскалях. В таблице приведены значения E и σ для нескольких металлов. Пусть вас не удивляет разброс численных значений: разные способы обработки, разные справочники... И этот разброс вполне оправдывает приближенные соотношения, к поиску которых мы и приступим.

Таблица

	$E, \text{ГПа}$	$\sigma, \text{МПа}$	$d_m/2, \text{\AA}$	γ	$\gamma_{\text{теор}}$	$\gamma_{\text{эксп}}$
Алюминий	70	21–30	1,5	0,36–0,46	0,59	1,14–1,66
Медь	112–130	33–333	1,3	0,55–1,7	0,96–1,11	1,79–1,83
Свинец	16	5–10	1,8	0,1–0,14	0,137	–
Молибден	330	330–415	1,4	2,8–3,3	2,8	–
Сталь	190–200	230–310	1,25	1,7–1,9	1,6–1,7	–
Кремний	110–166	120	1,4	1,12	1,42	1,14–1,23

Для начала обсудим такой вопрос: как оценить *поверхностную плотность энергии* адгезии γ , т.е. энергию, приходящуюся на единицу площади. Примем, что она должна как-то зависеть от коэффициента упругости E , от «коэффициента мягкости» σ (предел текучести) и от характерного расстояния порядка диаметра молекулы d_m (смещение на это расстояние всех слоев стержня и приводит к удвоению его длины). Из соображений размерности можно предложить зависимость вида

$$\gamma \sim d_m \sqrt{E\sigma}.$$

Видно, что здесь оба коэффициента E и σ представлены равноправно, через их среднее геометрическое значение.

Сравним предложенную формулу с более простой теоретической зависимостью, принятой почти полвека назад:

$$\gamma_{\text{теор}} = \frac{E}{2\lambda} \left(\frac{1,3\text{\AA}}{\pi} \right)^2 = 0,856 \cdot 10^{-11} E.$$

Здесь 2\AA – характерный период решетки твердого тела, $1,3\text{\AA}$ – характерное расстояние, на котором действуют силы притяжения, ну а число «пи» появилось, конечно, из-за того, что в рассмотренной модели молекулы считаются шариками, а где кругло, там и «пи».

В таблице даны рассчитанные по соответствующим формулам значения γ и $\gamma_{\text{теор}}$, а также экспериментально измеренные значения $\gamma_{\text{эксп}}$ (которые удалось обнаружить в литературе). Видно, что наша оценка γ довольно близка и к теоретическим и к экспериментальным значениям.

Итак, мы получили правдоподобную оценку для *поверхностной плотности энергии адгезии* γ и, следовательно, *поверхностной плотности силы адгезии* $f_a \sim \frac{\gamma}{d_m} \sim \sqrt{E\sigma}$. А каковы сами энергия и сила?

Очевидно, что для этого величины γ и f_a нужно умножить на некоторую площадь контакта соприкасающихся тел. Но как ее найти? Ведь, например, для кирпича, лежащего на столе, *видимая* площадь контакта равна произведению его длины на ширину, а на самом он соприкасается со столом всего лишь в нескольких «пятнах» (достаточно трех) – в тех местах, где были самые большие бугорки шероховатости. Эти пятна и приняли на себя всю нагрузку. И тут опять приходит на помощь предел текучести: прижимающая сила будет уравновешена силой упругости деформированных бугорков, площадь контакта s которых можно оценить из соотношения

$$F_n = mg \sim s\sigma.$$

Таким образом, энергия и сила прилипания соприкасающихся тел будут порядка

$$\gamma s \sim F_n \sqrt{\frac{E}{\sigma}} d_m \text{ и } F_a \sim F_n \sqrt{\frac{E}{\sigma}}.$$

Получается чудовищная сила, на 1–2 порядка больше прижимающей?! Но чему же тут удивляться: ведь чтобы растянуть стержень в два раза, т.е. сместить соседние слои друг относительно друга на межатомное расстояние, нужна была

бы плотность силы порядка модуля Юнга $E \sim 10^{11} \text{ Н/м}^2$. Это означает, что для удвоения длины проволоки сечением $1 \text{ мм}^2 = 10^{-6} \text{ м}^2$ потребовалась бы сила порядка $10^{11} \cdot 10^{-6} \text{ Н} = 10^5 \text{ Н}$.

Почему же возможно качение цилиндра по плоскости, с которой он, казалось бы, сросся? А все дело в *правиле рычага* – ведь ширина контактной полоски $2a_c$ (см. рисунок) много меньше радиуса цилиндра. На рисунке изображена сильно преувеличенная полоса контакта, образовавшаяся в результате деформации цилиндра под действием прижимающей силы, например его веса $F_n = mg$. Там же условно показаны пятна контакта, суммарная площадь которых много меньше видимой площади $2a_c l$, и локальные силы адгезии в этих пятнах. Под действием силы F_k , приложенной к оси цилиндра, возникает момент относительно точки A , стремящийся разорвать локальные спайки. В момент отрыва имеем

$$F_k a = F_a a_c, \text{ или } F_k = F_a \frac{a_c}{a}.$$

А поскольку $a_c/a \ll 1$, сила трения качения F_k много меньше результирующей F_a сил адгезии в локальных пятнах.

Итак, осталось оценить отношение a_c/a . Теперь у нас достаточно оснований предполагать, что здесь должны играть роль модуль Юнга E , вес цилиндра $mg = \pi a^2 \rho g$ (мы приняли его длину равной радиусу). Более того, ясно, что чем больше вес и чем меньше модуль Юнга, тем большей будет ширина видимой контактной полосы. Значит, модуль Юнга должен стоять где-то в знаменателе, а вес – в числителе:

$$a_c \sim \sqrt{\frac{\pi a^2 \rho g}{E}}.$$

Подставив выражения для F_a и a_c в формулу для F_k , из соотношения (3) найдем коэффициент трения качения:

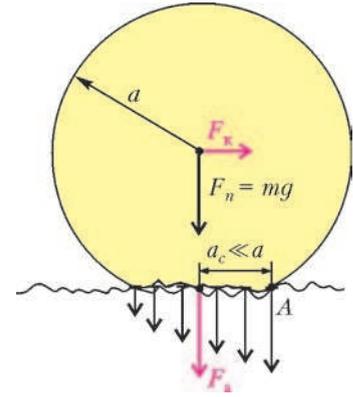
$$\lambda = \frac{F_k a}{F_n} \sim \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi a^3 \rho g}{E}} = \sqrt{\frac{\pi a^3 \rho g}{\sigma}}.$$

Примем следующие характерные значения: $\rho \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $\sigma \sim 100 \text{ МПа} = 10^8 \text{ Па}$. Для радиуса цилиндра выберем значения из «человеческой практики»: $a \sim (10^{-2} - 1) \text{ м}$. Тогда получим

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{\pi (10^{-2} - 1)^3 \cdot 10^3 \cdot 10}{10^8}} \text{ м} \sim (10^{-5} - 10^{-2}) \text{ м}.$$

В литературе указываются такие значения: для металлов (например, стальной цилиндр катится по стальной подложке) $\lambda = (1 - 2) \cdot 10^{-5} \text{ м}$; при движении автомобиля (например, со скоростью 80 км/ч) по асфальту $\lambda = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$; для дерева по дереву $\lambda = (5 - 6) \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Таким образом, наша оценочная теория не так уж плоха. Тем более что внешние условия влияют на величину трения качения ничуть не меньше, чем природа трущихся тел.



Оригами и построения

А. ПЕТРУНИН

Моему сыну Никодиму

ПРЕДСТАВЬТЕ СЕБЕ, ЧТО ВЫ СИДИТЕ НА УРОКЕ И ВАМ скучно-скучно и очень хочется заняться геометрическими построениями: начертить, например, треугольник, найти в нем центры вписанной и описанной окружностей и ортоцентр, провести прямую Эйлера и все такое. Но вот беда: циркуль и линейка оставлены дома.

Вот в такой ситуации, наверное, оказались 15 лет назад два оригамиста, итальянец Бенедетто Скимеми и японец Хамяки Худзита. (Оригамистами называют людей, увлекающихся древним японским искусством *оригами* – складыванием из листа бумаги различных зверушек, птичек, фонариков и т.д.) Вдруг их осеняет: «А ведь складка листа бумаги – это прямая». Например, если взять на листке отрезок и согнуть лист так, чтобы концы отрезка соединились, а потом разгладить лист аккуратненько на парте, то перегиб образует срединный перпендикуляр к исходному отрезку (рис.1,а). Обычное построение срединного перпендикуляра (рис.1,б) длиннее. Для него требуется и циркуль и линейка (одной

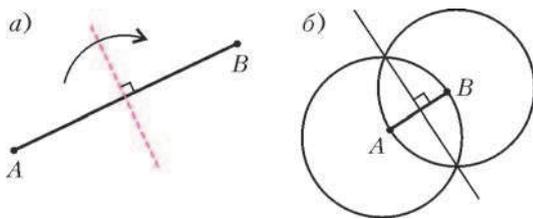


Рис. 1

линейкой не обойдешься), а тут никаких инструментов не надо.

Чтобы продолжить, им пришлось придумать набор правил для этого нового типа построений. Например, при обычных построениях с помощью циркуля и линейки разрешается делать такие операции:

1. Провести прямую через две данные точки.
2. Построить окружность с данным центром и радиусом.
3. Найти точку пересечения двух данных прямых, точку пересечения прямой с окружностью или двух окружностей.¹

Что-то подобное нужно было и Бенедетто с Хамяки. Для этого они математически описали приемы, которыми давно пользовались оригамисты. Вот эти правила.

Правила складывания

Мы будем говорить, что прямая задана, если на листе имеется соответствующая складка. На рисунках далее складки показаны пунктиром.

¹ Такие точки пересечения существуют не всегда, правило утверждает только, что если такая точка есть, то ее «можно» найти.

1. Пусть заданы две точки A и B , тогда лист можно сложить так, что данные две точки будут на складке (рис.2).

2. Пусть заданы две точки, тогда лист можно сложить так, что одна точка перейдет в другую (рис.3).

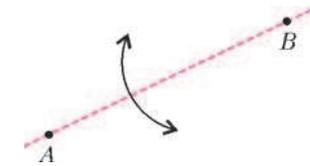


Рис. 2

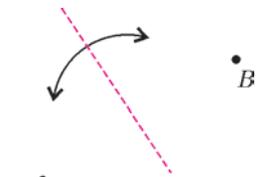


Рис. 3

3. Пусть заданы две прямые l и m , тогда лист можно сложить так, что одна прямая перейдет в другую (рис.4).

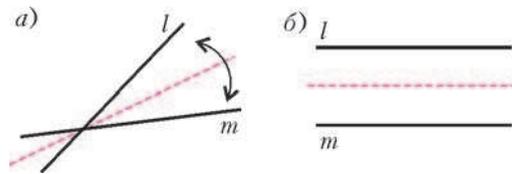


Рис. 4

4. Пусть заданы прямая l и точка A , тогда лист можно сложить так, что точка попадет на складку, а прямая перейдет в себя (т.е. линия складки будет ей перпендикулярна) (рис.5).

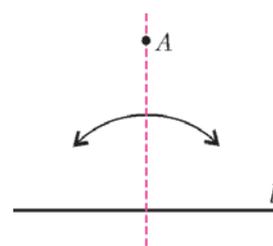


Рис. 5

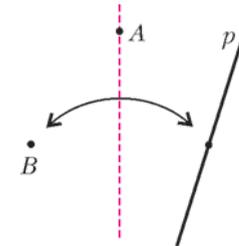


Рис. 6

5. Пусть заданы прямая p и две точки A и B , тогда лист можно² сложить так, что точка A попадет на складку, а B – на прямую p (рис.6).

6. Пусть заданы две прямые p и q и две точки A и B , тогда лист можно² сложить так, что точка A попадет на прямую p , а точка B попадет на прямую q (рис.7).

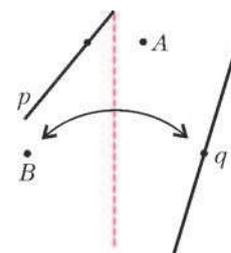


Рис. 7

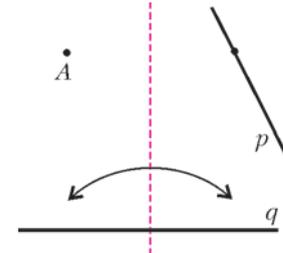


Рис. 8

7. Пусть заданы две прямые p и q и точка A , тогда лист можно сложить так, что точка A попадет на прямую p , а прямая q перейдет в себя (т.е. линия складки будет ей перпендикулярна) (рис.8).

² Такая складка существует не всегда, правило утверждает только, что если такая складка есть, то ее «можно» найти.

Последнее – седьмое – правило добавил позже другой японский оригамист Косиро Хатори, заметив, что Бенедетто с Хамяки забыли его включить. Эту последнюю складку, как и некоторые другие из этого набора, можно получить как результат последовательного применения остальных, т.е. для математика она ничего не добавляет, но оригамисты не мнут бумагу зря.

Упражнения

1. Какие построения циркулем и линейкой соответствуют складкам 1–5 и 7?
2. Через точку A вне прямой l проведите прямую l' , параллельную данной, с помощью перечисленных выше правил.
3. С помощью правил оригами постройте квадрат.
4. Разделите данный отрезок AB : а) на 2 равные части; б) на 3 равные части; в) на n равных частей.

Построение сгибанием

Теперь можно наслаждаться и заниматься любыми построениями. Например, такими:

Если задан произвольный треугольник, то его *биссектрисы*, а стало быть, и *центр его вписанной окружности* можно найти, применив правило 3 ко всем парам его сторон.

Срединные перпендикуляры и *центр описанной окружности* можно найти, применив правило 2 ко всем парам его вершин. После этого можно найти *медианы* и *центр тяжести*, применив правило 1 к каждой вершине в паре с уже найденной выше серединой противоположной стороны.

Высоты и *ортоцентр* легче всего найти, применив правило 4 к каждой вершине в паре с противоположной стороной.

Далее можно убедиться, что ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности действительно лежат на одной прямой, применив правило 1 к любой паре из этих точек. Эта прямая называется *прямой Эйлера* треугольника.

Конечно, сгибая листок, невозможно построить окружность, но, оказывается, верно следующее: любую точку, которую удастся построить с помощью циркуля и линейки, можно построить сгибаниями. Чтобы доказать это, достаточно предъявить построение двух типов точек:

- 1) Точки пересечения окружности с прямой, если про окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней.
- 2) Точки пересечения двух окружностей, если про каждую окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней.

Первое можно сделать, применив правило 5, взяв за A центр окружности, за B – точку на окружности, а за p – данную прямую. Второе сделать сложнее, короткой последовательности сгибаний мне найти не удалось. Но такую последовательность можно получить, показав, что с помощью сгибаний можно построить *инверсию* точки относительно окружности, если про окружность известно только местоположение центра и положение одной точки на ней. Потом, применив инверсию, которая переводит одну из двух данных окружностей в прямую, свести задачу к предыдущей.

Упражнение 5. Постройте инверсию точки относительно окружности, заданной местоположениями центра и одной точки на ней.

Таким образом, все построения точек циркулем и линейкой можно осуществить с помощью сгибаний. Оказывается при этом, что сгибаниями можно построить точки, которые невозможно построить с помощью циркуля и линейки. Для примера приведем две задачи на построение, которые известны уже более двух тысяч лет, но только в первой половине

XIX века была доказана невозможность решения каждой из них с помощью циркуля и линейки.

Трисекция угла

Задача 1. Разделите данный угол на три равные части. Вот решение, предложенное Хисаси Абэ.

Пусть угол задан двумя складками p и q , обозначим через A вершину угла (рис.9). Сначала проведем подготовительное построение. Нам нужно: 1) восставить перпендикуляр l к q через A (правило 4); 2) отметить на l произвольно точку B и восставить срединный перпендикуляр q' к отрезку AB (правило 2).

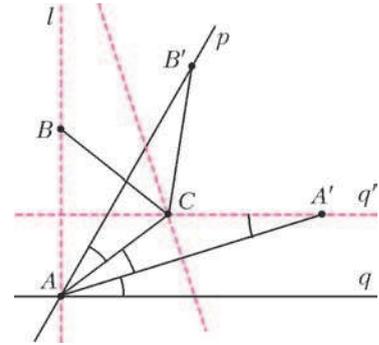


Рис. 9

Теперь все готово для главной складки. Сложим лист так, чтобы A попала на q' , а B – на p (правило 6). При этом образ A' вершины A ляжет на первую трисектрису нашего угла, а точка C на пересечении q' с новой складкой будет лежать на второй. Таким образом, лучи AA' и AC будут делить угол на три равные части.

Докажем это. По свойствам выполненных складок, $BC = AC = CA' = CB'$, а также $A'B = AA' = AB'$. Поэтому равны треугольники $AB'C$ и ACA' , но тогда равны и углы, отмеченные дужками на рисунке 9.

Удвоение куба

Мы не будем вдаваться в легендарные подробности истории этой задачи. Напомним лишь, что речь идет о построении ребра куба, объем которого вдвое больше объема данного куба с ребром a , т.е. отрезка $a\sqrt[3]{2}$.

Задача 2. Постройте два отрезка с отношением длин $\sqrt[3]{2}$.

Вот решение, которое предложил Петер Мессер.

Сначала построим квадрат $ABCD$ (рис.10), разделенный на 3 равные части складками p и q , параллельными стороне AB (см. упражнения 3 и 4). Теперь сложим лист так, чтобы точка B попала в точку B' на стороне AD , а точка X – в точку X' на отрезке EF . Возможность осуществить такую складку предусмотрена правилом 6. Тогда

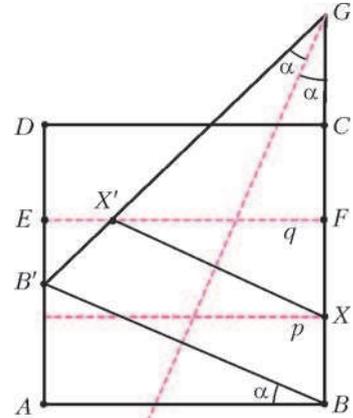


Рис. 10

$$\frac{DB'}{B'A} = \sqrt[3]{2}.$$

Действительно, пусть $\angle B'BA = \alpha$, а $BX = 1$. Тогда (поскольку $\angle AB'B = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle GB'B = \frac{\pi}{2} - \alpha$) $\angle EB'X' = 2\alpha$. Так как $q \parallel p$, а $X'X \parallel B'B$, то $\angle XX'F = \alpha$. Поэтому $EX' = \sin 2\alpha$, $FX' = \text{ctg } \alpha$. Отсюда получаем, что

$$\sin 2\alpha + \text{ctg } \alpha = EF = 3.$$

Положим $t = \text{ctg } \alpha$. Тогда $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, и мы получаем

уравнение относительно t :

$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 3,$$

откуда $t^3 - 3t^2 + 3t - 3 = 0$, $(t-1)^3 = 2$, $t = \sqrt[3]{2} + 1$. Далее, $AB' = 3t \operatorname{tg} \alpha$, $DB' = 3 - 3t \operatorname{tg} \alpha$, и

$$\frac{DB'}{AB'} = \frac{3 - 3t \operatorname{tg} \alpha}{3t \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1 = \sqrt[3]{2}.$$

На этом список «невозможных построений» не кончается. При помощи складываний можно также построить некоторые другие объекты, которые не поддаются построению циркулем и линейкой. Например, правильный семиугольник.

В чем же причина? Какое из описанных правил добавляет новые возможности? Чтобы это понять, достаточно построить складку в каждом из правил 1–7 с помощью циркуля и линейки. Решив упражнение 1, вы увидите, что довольно легко построить все прямые складок в правилах 1–5 и 7. Стало быть, дополнительные возможности скрыты в правиле номер 6. Не удивительно, что основной шаг в построениях трисекции угла и удвоении куба был сделан с применением именно этого правила.

Причина, оказывается, в следующем: чтобы найти прямую сгиба в правиле 6, требуется решить уравнение третьей степени, тогда как в каждом из построений с помощью циркуля и линейки решаются уравнения только 1 и 2 степеней. Любителям геометрии мы рекомендуем убедиться в этом.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Эта «простенькая» кинематика

В. ТРОЯНОВСКИЙ

В САМОМ ДЕЛЕ, ЕСЛИ ПОЖЕРТВОВАТЬ ОБСУЖДЕНИЕМ необходимых первоначальных понятий и результатов, то в кинематике все ясно и понятно: скорость v , время движения t и пройденный путь s связаны известным соотношением $v = s/t$. Насколько все просто, вы сможете оценить, решив для разминки такую задачу.

Задача 1. Кольцо радиусом R состоит из двух половинок, в которых скорости звука v_1 и v_2 ($v_2 < v_1$, для определенности). По одному из стыков половинок кольца ударили молоточком. Найдите время T от момента удара до момента встречи звуковых волн.

Прежде чем читать предлагаемое решение, попытайтесь решить задачу самостоятельно. В частности, подумайте, почему скорость звука в разных веществах разная, что будет с «быстрой» волной после того, как она пересечет границу половинок полукольца, где (примерно) произойдет встреча звуковых волн. В случае успешного самостоятельного решения задачи все-таки взгляните на предлагаемое решение. Возможно, обсуждение некоторых вопросов вам пригодится в будущем.

Решение. Ясно, что встреча волн произойдет где-то на той из половинок кольца, в которой скорость звука меньше. При переходе волны из одной среды в другую должна измениться скорость волны, в соответствии со свойствами новой среды (скорость распространения волны в среде – это скорость распространения упругих деформаций).

Для записи уравнений надо, прежде всего, ввести обозначения. Воспользуемся рисунком 1. Кроме скоростей на нем показаны время движения t «быстрой» волны от точки старта до середины кольца (до границы раздела сред с

разными скоростями волн), время движения T «медленной» волны до встречи волн (т.е. искомое время) и время движения $T - t$ бывшей «быстрой» волны в другой среде, куда попадает волна после пересечения границы сред.

Нередко задачу удается начать решать, делая не то, что нужно, а то, что видно сразу. Вос-

пользуемся этим способом решения. Легко найти путь «быстрой» волны от точки старта до середины кольца: длина полукольца равна πR . Просто находится и время t , затраченное на прохождение этого пути: $t = \pi R/v_1$. Для того чтобы приблизиться к ответу на вопрос задачи, надо хотя бы «вставить» искомую величину в какое-нибудь уравнение. Можно, например, записать величину пути двух волн в правом полукольце, выразив ее через скорости и времена движений каждой из волн («медленной» и бывшей «быстрой»): $\pi R = v_2 T + v_2 (T - t)$. В итоге имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$t = \frac{\pi R}{v_1}, \quad \pi R = v_2 T + v_2 (T - t).$$

Не сомневаюсь, что вы быстренько решите эту систему и получите какой-нибудь один из приведенных ответов или им подобный ответ:

$$\begin{aligned} \text{а) } T &= \frac{\pi R(v_1 + v_2)}{2v_1}; & \text{б) } T &= \frac{\pi R(v_2 - v_1)}{v_1 v_2}; \\ \text{в) } T &= \frac{\pi R(v_1 - v_2)}{4v_1 v_2}; & \text{г) } T &= \frac{\pi R(v_1 + v_2)}{v_1 v_2}. \end{aligned}$$

На экзамене ответов для самопроверки обычно не дают, поэтому надо уже при подготовке к экзамену научиться проверять себя хотя бы косвенно.

Конечно, вы знаете о том, что прежде всего ответ должен быть верен по размерности. Начинаем проверять ответы таким образом и в первом же из них (а) находим:

$$c = \frac{m \cdot m/c}{m/c} = m,$$

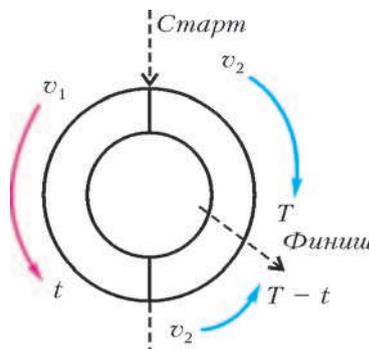


Рис. 1

чего не может быть. Верная размерность не гарантирует правильность ответа, а вот неверная размерность гарантирует неправильность ответа. Так что первый из ответов заведомо неверен.

Думаю, для вас не составит труда проверить остальные ответы и убедиться в том, что они по размерности верны. Однако никаких гарантий верности ответа вы еще не получили. Возьмем, например, второй ответ (б). Хотя он верен по размерности, но при $v_2 < v_1$ получается отрицательное время, чего быть не должно. И, пожалуйста, не надо выписывать подобный ответ по модулю, так как модуль существует не для того, чтобы съесть нежелательный минус и облагораживать кое-что неблагородное. Так что и второй ответ неверен.

Третий ответ «проходит» по размерности и по знаку, но все-таки вызывает сомнения: при равенстве скоростей время до встречи оказывается равным нулю. Ясно, что этого быть не может – волны мгновенно встретиться не смогут. Увы, и третий ответ неверен, поскольку он неверен в проверяемом частном случае. Такая проверка – для какого-либо известного частного случая – также должна быть в вашем арсенале.

Наконец, четвертый ответ верен по размерности, положителен и при равенстве скоростей дает вполне разумный ответ: $2\pi R/v$. А насколько верен этот ответ? Как легко понять, при равенстве скоростей волны должны встретиться у противоположного стыка и каждая из них пройдет до встречи путь πR со скоростью v . Такое движение требует время $\pi R/v$, что вдвое меньше получившегося. Значит, и четвертый ответ неверен (он не дает в частном случае то, что должно быть в этом случае очевидно).

Рассмотрим еще один ответ:

$$T = \frac{\pi R(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}$$

Этот ответ верен по размерности, положителен, в частном случае равенства скоростей дает правильный результат. Более того, мы можем сделать еще одну проверку: для предельного случая. Представьте, что скорость v_1 очень велика. Тогда левое полукольцо волна проскакивает мгновенно, временем t можно пренебречь, а время до встречи должно равняться $\pi R/(2v_2)$. Получится ли такой результат из последнего ответа? Проверим. Посмотрим, что происходит, когда v_1 становится много больше v_2 (т.е. $v_1 \gg v_2$):

$$T = \frac{\pi R(v_1 + v_2)}{2v_1v_2} = \frac{\pi R(1 + (v_2/v_1))}{2v_2} \approx \frac{\pi R}{2v_2},$$

как и должно быть.

Вывод, который напрашивается после всех проверок, можно сформулировать следующим образом: есть основания надеяться на то, что последний из ответов является верным.

Закончив разминку, перейдем к основной части тренировки. Рассмотрим важный вопрос – *правило сложения скоростей* и связанный с ним результативный способ решения достаточно сложных задач.

Начнем с примера, который иллюстрирует рисунок 2. На рисунке указаны скорости трех тел – девушки, юноши и вагона. Как вы думаете, относительно каких систем отсчета указана каждая из скоростей? Можете ли вы найти ско-

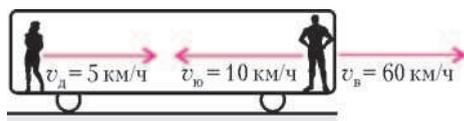


Рис. 2

рость каждого из тел относительно земли? Правильные ответы на заданные вопросы очевидны. Скорости людей заданы относительно вагона, скорость вагона указана относительно земли. Скорость девушки относительно земли равна 65 км/ч, скорость юноши составляет 50 км/ч.

Этот пример – напоминание о том, что скорости (векторные величины) складываются по правилу сложения векторов (по параллелограмму или треугольнику). В общем виде результат можно сформулировать следующим образом. Пусть есть неподвижная система отсчета, представленная на рисунке 3 системой координат без штрихов, и подвижная система, помеченная штрихами, скорость тела в подвижной системе v' , скорость тела в неподвижной системе v , скорость подвижной системы относительно неподвижной u . Правило сложения скоростей и его следствие – формула для расчета скорости тела в подвижной системе отсчета – таковы:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}', \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

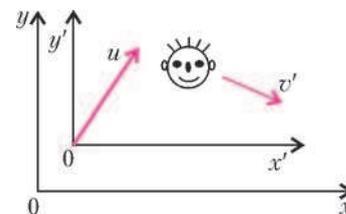


Рис. 3

Задача 2. Электричка едет прямолинейно со скоростью 0,4 м/с относительно земли. Человек идет поперек вагона со скоростью 0,3 м/с относительно вагона. Найдите скорость человека относительно земли.

Решение. Задача, конечно, «мечта двоечника», но и в ней есть подводный камень.

Рассмотрим рисунок 4 (вид вагона сверху). На этом рисунке видно, что искомая скорость является гипотенузой треугольника с катетами, один из которых это скорость человека относительно поезда $v_{чп} = v_ч = 0,3$ м/с (эта скорость играет роль скорости тела v' относительно подвижной системы отсчета), второй – скорость поезда относительно земли $v_{пз} = v_п = 0,4$ м/с (эта скорость играет роль скорости u подвижной системы относительно неподвижной системы). Таким образом, величина скорости человека относительно земли равна $v_{чз} = 0,5$ м/с (она играет роль скорости тела относительно неподвижной системы v).

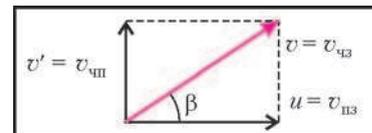


Рис. 4

Обычно абитуриенты ограничиваются нахождением величины скорости, в данном случае $v_{чз}$. Но скорость – вектор, и надо охарактеризовать направление скорости. Как правило, достаточно найти какую-либо тригонометрическую функцию одного из удобных углов. В этой задаче можно найти тангенс угла между искомой скоростью и скоростью поезда:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_ч}{v_п} = 0,75$$

Вот на этот подводный камень (направление скорости) и не надо налетать. Причем, даже если в условии задачи ничего не говорится о нахождении направления скорости (и в ответе нет этого), вам все равно надо найти эту характеристику векторной величины, так как иначе вы, как минимум, оставляете основание для придирки.

Теперь рассмотрим важную задачу, идея решения которой (как и результат решения) используется достаточно часто.

Задача 3. Мяч летит горизонтально со скоростью $v_м$ и налетает по нормали на массивную стенку, которая

движется ему навстречу со скоростью v_c . Найдите скорость мяча после отскока, если никаких потерь нет. (Траектория мяча в этой задаче считается все время прямолинейной.)

Решение. Прежде всего заметим, что встречающееся в условии задачи понятие «нормаль» означает перпендикуляр к плоскости в данной точке или перпендикуляр к касательной плоскости в данной точке поверхности. В этой задаче сказано, что стена – массивная. Это означает, что ее скорость при соударении практически не меняется. Далее. На первый взгляд, из-за встречного движения тел результирующая скорость мяча должна быть равна сумме скоростей, но это, как мы сейчас убедимся, не так. Причем это не связано с потерями (их, по условию, и нет).

Для решения задачи нужны идеи. Вы можете остановиться и подумать, прежде чем читать дальше.

Первая идея проста: целесообразно перейти в движущуюся систему координат. Мы неоднократно будем поступать таким образом, этот прием для вас должен стать стандартным. Вторая идея, которая оказывается полезной в данной задаче и благодаря которой удобно перейти в подвижную систему координат, состоит в следующем. Представьте себе, что стена неподвижна. В этом случае скорость мяча относительно стены до и после удара по величине одна и та же (векторы скоростей до и после удара отличаются лишь знаком). В отсутствие потерь не меняется по величине скорость мяча и относительно движущейся стены. Теперь надо выбрать удобную подвижную систему координат. Связывать ее с мячом не

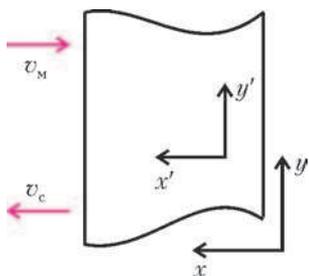


Рис. 5

стоит, так как мяч меняет направление движения, а вот связать ее со стеной, которая не меняет ни направления движения, ни величины скорости, удобно.

Рассмотрим рисунок 5 и воспользуемся двумя указанными идеями, а также правилом сложения скоростей и следствием из него. Найдем скорость мяча относительно стены (т.е. скорость в подвижной системе) до удара (начальную скорость):

$$v'_{мн} = +(-v_m) - (+v_c).$$

В этой формуле знаки в скобках связаны с ориентацией векторов относительно неподвижной системы координат, знаки перед скобками – это знаки, стоящие в используемой формуле сложения скоростей. Далее найдем скорость мяча относительно стены после удара (конечную скорость):

$$v'_{мк} = -v'_{мн} = v_m + v_c.$$

Наконец, по правилу сложения скоростей получим искомый результат, т.е. конечную скорость мяча в неподвижной системе отсчета:

$$v_{мк} = v_c + (v_m + v_c) = v_m + 2v_c.$$

Используем рассмотренные идеи на примере еще одной задачи.

Задача 4. Футболист ударил по покоившемуся мячу. Скорость ноги во время удара практически постоянна и равна v_ϕ . Найдите величину стартовой скорости мяча.

Решение. Надеюсь, вы узнали в этой задаче только что решенную задачу 3 с нулевой начальной скоростью мяча и скоростью ноги футболиста в качестве скорости стены. Пользуясь полученным ранее результатом, сразу пишем

искомый ответ:

$$v_{мк} = 0 + 2v_\phi = 2v_\phi.$$

Для того чтобы поупражняться в решении задач с использованием перехода в подвижную систему, можете найти стартовую скорость мяча «честно», не используя результат решения предыдущей задачи.

Конечно, идея перехода в подвижную систему отсчета применима не только при движении тел вдоль одной прямой, но и в более сложных случаях.

Задача 5. Точка 1 движется вдоль оси Ox к началу координат из положения $x_n = 10$ см со скоростью $v_1 = 2$ см/с. Точка 2 движется вдоль оси Oy к началу координат из положения $y_n = 5$ см со скоростью $v_2 = 4$ см/с. Встретятся ли точки? Если нет, то каково минимальное расстояние между ними?

Решение. Рассмотрим два способа решения данной задачи.

Первый способ. Каждая из точек движется строго по своей оси, поэтому встретиться они могут только в начале координат. «Встретиться» в данном случае формально означает одновременное попадание точек в начало координат. Найдем время движения каждой из точек. Для этого нам надо записать изменение во времени текущей координаты каждой из точек, а затем приравнять это значение нулю, так как в интересующий нас момент точки попадают в начало координат.

Координата первой точки (рис.6) равномерно убывает во времени от x_n до нуля, поэтому можно записать $x = x_n - v_1 t$. Используя условие $x = 0$, найдем $t_1 = 5$ с. Аналогично, из уравнения $y = y_n - v_2 t$ и условия $y = 0$ получаем $t_2 = 1,25$ с. Итак, точки движутся до начала координат разное время и встретиться не могут.

Для нахождения минимального расстояния между точками запишем значение этого расстояния в общем виде (расстояние s между точками показано на рисунке 6 пунктиром):

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_n - v_1 t)^2 + (y_n - v_2 t)^2}.$$

Минимум этого выражения можно найти, используя дифференцирование, но можно и элементарным способом, как мы и сделаем. Преобразуем выражение для расстояния следующим образом:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(x_n^2 + y_n^2) - 2t(v_1 x_n + v_2 y_n) + (v_1^2 + v_2^2)t^2} = \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{v_1^2 + v_2^2} - 2t \frac{v_1 x_n + v_2 y_n}{v_1^2 + v_2^2} + t^2}. \end{aligned}$$

Под корнем прибавим и вычтем одну и ту же величину $A = \left(\frac{v_1 x_n + v_2 y_n}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2$ и выделим полный квадрат разности двух величин (времени и вспомогательной величины A):

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{v_1^2 + v_2^2} - A + A - 2t \frac{v_1 x_n + v_2 y_n}{v_1^2 + v_2^2} + t^2} = \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{\left(t - \frac{v_1 x_n + v_2 y_n}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 - \left(\frac{v_1 x_n + v_2 y_n}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + \frac{x_n^2 + y_n^2}{v_1^2 + v_2^2}}. \end{aligned}$$

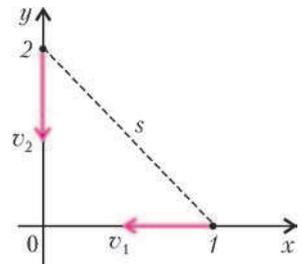


Рис. 6

Первая из скобок под большим корнем – неотрицательное выражение, все остальное – постоянные величины, поэтому минимум расстояния достигается в тот момент, когда имеет место равенство

$$t - \frac{v_1 x_H + v_2 y_H}{v_1^2 + v_2^2} = 0, \text{ т.е. } t = \frac{v_1 x_H + v_2 y_H}{v_1^2 + v_2^2}.$$

По этому времени можно непосредственно найти минимальное значение расстояния между точками. Но проще заметить, что для найденного момента последнее произведение корней дает

$$s = \sqrt{\frac{v_1^2 y_H^2 - 2v_1 v_2 x_H y_H + v_2^2 x_H^2}{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{|v_1 y_H - v_2 x_H|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \approx 6,7 \text{ см.}$$

Обратите внимание на следующее обстоятельство. Найденное минимальное расстояние между точками равно нулю только тогда, когда $v_1 y_H - v_2 x_H = 0$. В условиях задачи это не так, значит, точки не встретятся (ответ на первый вопрос задачи можно было бы получить и таким образом).

Второй способ. Выберем в качестве неподвижной системы отсчета заданную систему координат $x_0 y_0$, а в качестве подвижной системы XOY – систему, связанную с первым телом, которое движется вдоль оси Ox . В этой системе начало координат совместим с первым телом, ось Ox подвижной системы направим по скорости первого тела, т.е. навстречу оси Ox , ось Oy подвижной системы направим по оси Oy неподвижной системы (рис.7). Перейдем в систему отсчета, связанную с первым телом. В этой системе первое тело покоится, а второе тело приближается к нему со скоростями v_1 и v_2 . Искомое минимальное расстояние s – это расстояние от первого тела до точки A . Как можно увидеть на рисунке,

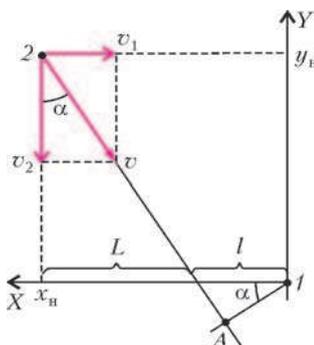


Рис. 7

$$l = \frac{s}{\cos \alpha}, \quad L = y_H \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_2}, \quad \cos \alpha = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Собираем все и находим

$$s = \frac{x_H v_2 - y_H v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

как и в предыдущем способе решения. Получающейся знак позволяет увидеть «перед» или «за» первой точкой пройдет вторая точка.

Упражнения

1. Клин с углом β у основания едет горизонтально со скоростью v_k , стержень может (свободно) перемещаться только вертикально (рис.8). Найдите скорость стержня.

2. Человек идет вдоль трамвайных путей. Каждые семь минут его обгоняет трамвай, каждые пять минут ему навстречу проходит трамвай. Найдите интервал движения между трамваями.

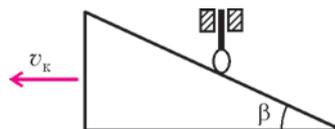


Рис. 8

3. Расстояние между гребнями волн в море $\lambda = 5$ м.

При встречном движении катера за время $\tau = 1$ с волны ударяются о корпус $k_1 = 4$ раза, а при попутном движении за то же время – $k_2 = 2$ раза. Найдите скорости катера и волн, считая их постоянными относительно берега.

4. Шарик налетает на массивную стенку со скоростью $v_{шн}$ под углом α к нормали. Стенка едет навстречу шарик со скоростью v_c . Найдите величину скорости шарика $v_{шк}$ и угол β этой скорости с нормалью к стенке после отскока. Потерь нет.

5. Торпеду, имеющую скорость $v_t = 100$ км/ч, выпускают из точки A в момент, когда корабль противника находится в точке B и движется неизменным курсом со скоростью $v_k = 50$ км/ч под углом $\beta = 30^\circ$ (рис.9). Найдите угол α , при котором торпеда поразит цель.

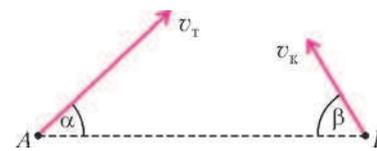


Рис. 9

Статья написана по материалам книги «Кинематика. Практическое пособие по решению задач для старшеклассников и абитуриентов». (Автор-составитель В.М.Трояновский. М.: Издательство РДЛ, 2007.)

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

Пенто-пенто-пирамида

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Головоломка «Пенто-пенто-пирамида» заключается в том, чтобы собрать пирамиду из шариков, объединенных в группы. Конечно, объединять шарики в группы можно тысячами способов, и каждый раз будет получаться новая головоломка. Но изобретатели игрушек стремятся придумывать головоломки с какими-нибудь особенностями, которые выделяли бы их из произвольно составленных вариантов.

Как раз этими качествами хорошо продуманной конструкции обладает головоломка Дианы Пасхиной, выпускницы Московского государственного института стали и сплавов. Название головоломки говорит о том, что в пирамиде должно быть пять слоев и что каждая деталь конструкции

состоит из пяти шариков. При этом детали разные и отличаются взаимным расположением шариков. Это не первая игрушка Дианы, ею придумано более десятка различных головоломок из шариков. То что она предпочитает конструкции из шариков, объясняется очень просто. Шарики можно купить готовыми, склеивать их в группы нетрудно, а игрушки получаются очень красивыми. Лучше всего для этих целей подходят шарики от пластмассовых бус, которыми украшают новогодние елки. Для семи деталей вам понадобится 35 шариков.

Головоломка «Пенто-пенто-пирамида» трудна в решении, поэтому на рисунке (см. 4-ю с. обложки) дана подсказка – отмечено расположение детали номер 7. С нее и начинайте построение пирамиды!

Желаем успеха!

А.Калинин

ИНФОРМАЦИЯ

Малый мехмат МГУ

Более 25 лет при механико-математическом факультете Московского государственного университета (МГУ) им. М.В.Ломоносова работает школа юных математиков – Малый механико-математический факультет (МММФ). Основные задачи Малого мехмата – углубление знаний по темам школьного курса и расширение математического кругозора по разделам математики, не входящим в программу средней школы.

Малый мехмат состоит из двух отделений: вечернего и заочного. На вечернем отделении работают кружки по математике для школьников 6–11 классов, а для учащихся 9–11 классов организованы еще и лекции. Занятия бесплатные и проходят по субботам, во второй половине дня. Обучение на заочном отделении осуществляется по переписке. Школьники выполняют задания по рассылаемым им методическим разработкам Малого мехмата и высылают их для проверки.

В 2008 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2008/09 учебный год в 8 и 9 классы, а также на неполный курс обучения в 10 и 11 классы. Принимаются учащиеся из России (в том числе и проживающие в Москве), стран СНГ и Прибалтики.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, осенью 2008 года. В 2007/08 учебном году плата за одно задание составляет, в зависимости от того насколько успешно была выполнена вступительная работа, 140 – 280 руб. (для «Коллективного ученика» – 280 руб), однако в 2008/09 учебном году она может быть повышена. За год учащийся выполняет 6–9 заданий.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством преподавателя и может включать в себя не более 15 учащихся из одной параллели. Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию *одну* работу и оплачивает обучение всей группы как обучение *одного* учащегося.

Школьники, прошедшие полный курс обучения (трех- или четырехлетний) и успешно закончившие обучение на заочном отделении (с итоговой оценкой «хорошо» или «отлично»), получают свидетельства об окончании Малого мехмата.

Зачисление для индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы. Желающие поступить должны *не позднее 30 апреля 2008 года* выслать в наш адрес *письмом* или *по электронной почте* решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). При отсылке по почте вступительную работу необходимо выполнить *в школьной тетради в клетку*. Записывать решения в тетрадь следует в том порядке, в котором задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

- 1) Фамилия, имя, отчество учащегося
- 2) Класс (*в 2008/09 учебном году*)
- 3) Полный домашний адрес *с указанием индекса почтового отделения*
- 4) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)
- 5) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу, необходимо лишь *не позднее 15 сентября 2008 года* выслать *письмом* или *по электронной почте* такие данные:

- 1) Фамилия, имя, отчество руководителя группы
 - 2) Фамилии, имена и отчества учащихся (не более 15 человек) в алфавитном порядке
 - 3) Класс (*в 2008/09 учебном году*)
 - 4) Полный адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) *с указанием индекса почтового отделения*
 - 5) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)
 - 6) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение.
- Наш почтовый адрес:* 119991 Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ, мехмат, МММФ
Электронные адреса:
вечернее отделение – mmmf_v@math.msu.ru
заочное отделение – zaoch@math.msu.ru
Телефон для справок: (495) 939-39-43
Наш сайт в Интернете: <http://mmmf.math.msu.ru>

Вступительная работа

1. Волк побегал за Зайцем по кольцевой дороге, увидев его на $1/3$ круга впереди себя. Скорость Зайца, который в тот же момент помчался прочь от Волка, 5 кругов в час. Скорость Волка 7 кругов в час. Через какое время после начала движения Волк догонит Зайца?

2. Докажите, что число $11\dots1 + 22\dots2 + \dots + 99\dots9$, в котором каждое слагаемое состоит из 2008 цифр, делится на 9.

3. Решите неравенство $x^2(x^2 - 1)(x^2 + 3) \geq 0$.

4. В выпуклых четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ выполняются равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $DA = D_1A_1$. Кроме того, известно, что наименьшая сторона четырехугольника $ABCD$ равна наибольшей стороне четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Верно ли, что четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны (две фигуры называются равными, если их можно совместить наложением)?

5. Переменные x_1, x_2, \dots, x_{100} могут принимать значения 0 или 1. Обозначим через S сумму $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{98}x_{99}x_{100}$ (в сумму входят по одному разу все слагаемые вида $x_i x_j x_k$, где $1 \leq i < j < k \leq 100$). Может ли S равняться 5?

6. По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке (каждая цифра встречается один раз). Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число. Чему равна сумма всех девяти таких чисел? Укажите все возможные варианты.

7. Найдите все решения ребуса, в котором одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными – разные:

$$\begin{array}{r} \text{ВАГОН} \\ + \text{ВАГОН} \\ \hline \text{СОСТАВ} \end{array}$$

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны три угла: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 120^\circ$; известно также, что стороны CD и AD равны. Докажите, что $BC + CD = AB$.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 1, \\ \frac{1}{6}(x+y) = \frac{1}{3}(x+z) = \frac{1}{2}(y+z). \end{cases}$$

10. Несколько друзей решили устроить турнир по игре в «камень-ножницы-бумагу». Каждый сыграл с каждым по одному поединку. За победу в каждом поединке игроку начислялось одно очко, за поражение одно очко вычиталось, а ничья число набранных очков не изменяла. Оказалось, что один из участников набрал +7 очков, а другой набрал -2 очка. Верно ли, что хотя бы одна игра на турнире завершилась вничью?

Материалы вступительных экзаменов 2007 года

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада «Ломоносов-2007»)

1. Вычислите $(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta)$, если $\sin(\alpha + \beta) = 0,8$ и $\cos(\alpha - \beta) = 0,3$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2^{(x^2)}} = \left(2^{\sqrt{x}}\right)^5.$$

3. Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_1 b_{50}}(b_1 b_2 \dots b_{60}),$$

где b_1, b_2, \dots – геометрическая прогрессия?

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leq 1.$$

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D , что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

6. Натуральные числа a , b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 60$ и $\text{НОК}(a, c) = 270$ ($\text{НОК}(x, y)$ – наименьшее общее кратное чисел x и y). Найдите $\text{НОК}(b, c)$.

7. Определите, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя с его осью углы в 70° и 80° , а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найдите объем части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9. Найдите все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Докажите, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное ее значение после такой замены:

- одной оценки «4»;
- всех его оценок «4».

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако

Петя по ошибке не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

2. Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \text{ и } g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

3. Решите уравнение

$$3 \cos x |3 \sin x + \cos x| = \sin x |\cos x - 3 \sin x|.$$

4. Точки A , B и C лежат на окружности радиуса 2 с центром O , а точка K – на прямой, касающейся этой окружности в точке B , причем $\angle AKC = 46^\circ$, а длины отрезков AK , BK , CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). Найдите угол AKO и расстояние между точками A и C . Какой из углов больше: ACK или AOK ?

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.

6. Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в 30° и 45° . Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найдите величину этого угла.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики,
олимпиада «Абитуриент-2007», апрель)

1. Решите уравнение

$$\frac{-4 \cos^3 x + 2 \sin 2x + \cos x}{\sin x - 1} = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x+3}{3^{5x-2}} - 4 \geq 5 \cdot 3^{5x-2}.$$

3. В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

4. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AM и медиана BN , пересекающиеся в точке K . Найдите площадь данного треугольника, если $AK = 2 + \sqrt{2}$.

5. Найдите минимальное и максимальное значения функции

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin \left(x + \frac{5\pi}{6}\right)}.$$

6. Некоторая прямая касается двух сфер, расстояние между центрами которых равно 5. Первой сферы радиуса

$\sqrt{3}$ с центром в точке O_1 эта прямая касается в точке K , а второй сферы радиуса 2 с центром в точке O_2 эта прямая касается в точке L , причем $KL = 2\sqrt{6}$. Чему равен двугранный угол, ребром которого является прямая KL , одна из граней содержит точку O_1 , а другая – точку O_2 ?

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите все решения уравнения

$$2 \sin \left(x + \frac{7\pi}{25} \right) \sin \left(3x + \frac{18\pi}{25} \right) = \cos 4x + 2^{\cos \frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5} \right]$.

2. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(2-x) \geq \frac{\log_5(2x+3) - 1}{\log_5(x+2)}.$$

3. В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC . Окружность диаметра $2\sqrt{3}$ проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD . Известно, что $AC = 4\sqrt{3}$, а величина угла ABC равна 30° . Найдите длину стороны BC .

4. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \leq -25, \\ x^2 - y \leq 8, \\ 4x + y \leq 1. \end{cases}$$

5. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$). На ребре CC_1 выбрана точка D . Сечение, проходящее через точки A , B_1 и D , делит призму на два многогранника, $ABCDB_1$ и $B_1AA_1C_1D$, отношение объемов которых равно 13:17. В каком отношении точка D делит ребро CC_1 ?

6. Какие значения может принимать $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, если при этих α, β, γ многочлен от x

$$x^4 + 2^{3 \sin \alpha} x^2 + x \sqrt{2^{1 - \sin \beta} - \cos \gamma} + \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

является квадратом некоторого многочлена относительно x ?

Вариант 5

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \sin x} = 1.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{(\sqrt{3})^{2x} + 5 \cdot 3^{2-x} - 14}{49 - 7^x} = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{3x-1}.$$

4. Окружность радиуса 2, вписанная в ΔKLM , касается стороны LM в точке N . Отрезок KN является медианой треугольника и $KN = 8$. Найдите площадь ΔKLM .

5. Решите неравенство

$$\log_4(x^2 - 4)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x^2 - 4} > 0.$$

6. В ΔKLM через точку N высоты KN проведены прямые, перпендикулярные сторонам KL и KM и пересекающие их в

точках A и B соответственно. Отрезок AB равен a , а радиус описанной около ΔKLM окружности равен R . Найдите площадь ΔKLM .

7. Для каждого значения a из промежутка $(-3; 0)$ найдите число различных решений уравнения

$$(2x^2 - 5ax + 2a^2) \sqrt{x - \frac{2}{a}} = 0.$$

8. Сфера радиуса $(1/2)\sqrt{17}$ касается всех сторон правильного ΔLMN . Точка S такова, что плоскости SLM , SMN и SNL касаются сферы. Расстояние от точки S до плоскости LMN равно 8. Найдите объем пирамиды $SLMN$.

Вариант 6

(факультеты: химический, наук о материалах, биологический, фундаментальной медицины, биоинженерии и биоинформатики, географический, психологии)

1. Решите уравнение

$$(x^2 - 7|x| + 6) \sqrt{4x + 23} = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{2x + 12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{x + 4}.$$

3. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ . Известно, что $MD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin \angle DMQ = \frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника DEF .

4. Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 6b_3, 27b_1$ – арифметическую. Найдите знаменатель прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

5. Прямая l_1 проходит через точки $(-3; 2)$ и $(1; 1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5; 4)$ и перпендикулярна прямой l_1 . Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

6. Решите уравнение

$$\log_{\cos x} (\cos^2 x + \sin^2 x) - 2 \sin^2 x + 5 \sin 2x = 0.$$

7. За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год – на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки поселка за 2006 год?

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

Вариант 7

(факультеты: географический, почвоведения и факультет глобальных процессов)

1. Решите уравнение

$$\|x - 1| - 7| = 10.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 7}} + x \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7}} + 9.$$

3. Сумма положительной бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше ее второго члена. Во сколько раз второй член меньше первого?

4. Решите уравнение

$$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$$

5. Решите неравенство

$$\log_x^3 16 + 2 \log_x^2 16^2 + 4 \log_x 16^4 \geq 0.$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (5 - 2\sqrt{6})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a - 4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 18. Через середину D основания AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K и делящая площадь треугольника ABC в отношении 5:2, при этом угол ADK равен 135° . Найдите площадь треугольника ABC .

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$|x - 12| \leq \frac{x}{12 - x}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2^{x^2-4}} - 1 (x^2 - 7x + 6) \leq 0.$$

4. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон AB и BC равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD ?

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_x \left(\log_2 \left(\frac{x^2-2x}{2x-1}\right)\right)} \leq 1.$$

6. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

7. Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

8. В каком отношении делит объем куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, плоскость, проходящая через вершину A и центры граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $B_1 C_1 D_1$?

Вариант 9

(факультеты: социологический и филологический)

1. Решите уравнение

$$-x - 3\sqrt{-x} = 10.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geq -1.$$

3. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причем каждый из рабочих

производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 1.$$

6. Периметр треугольника ABC равен 36, а площадь равна 60. Найдите стороны AB и AC , если $BC = 10$.

7. Решите неравенство

$$\log_{(x+3)^2} (2x^2 + 9x + 21) \geq \log_{(x+3)^2} (x^2 - x).$$

8. При каких значениях c уравнение

$$-\sqrt{16 - x^2} = c + x$$

имеет единственное решение?

Вариант 10

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Для каждого значения x , удовлетворяющего условию

$$x^2 - |x| - 42 = 0,$$

найдите все числа y , для которых выполнено неравенство

$$-7\sqrt{y^2 - 10y + 34} \geq 4x + 7.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\cos 3x = \sin x,$$

удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\sin x \geq 0, \quad \cos x \leq 0.$$

3. Решите неравенство

$$\left(x^2 - \log_2 \left(\frac{3^x}{5}\right) - \log_3 (5^x)\right) \log_5 (125 \cdot 25^{x-3}) < 0.$$

4. Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тысячи рублей больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму денег, если 5%-й сбор за ее банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысяч рублей.

5. Внутри треугольника ABC взята точка K так, что треугольник ABK – равносторонний. Известно, что расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC , равно 6 и величина угла ACB равна

$$\arcsin \frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

Найдите длину стороны AB .

6. Найдите все значения a , при которых функция

$$f(x) = |2 - x|x + \arcsin\left(\frac{a}{10}\right)$$

не является монотонно возрастающей на отрезке числовой оси, который соединяет корни квадратного трехчлена

$$x^2 - (a^2 - 8a + 14)x + (a^2 - 6a + 6)(8 - 2a).$$

7. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, не являющийся ромбом. Вершины A, B и C расположены на некоторой сфере так, что прямая AD проходит через

центр этой сферы. Вершина S , также лежащая на данной сфере, равноудалена от концов диагонали AC основания. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды, если $AC = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$.

Вариант 11

(Московская школа экономики)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x - 1.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{(-2\cos x)}(3 \sin x - \cos 2x) = 0.$$

3. Решите неравенство $\left| \frac{x}{10} - \frac{1}{5} \right| \geq \left| \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \right|$.

4. Решите уравнение

$$4 \cdot 25^{\sqrt{x}} - 23 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 15 = 0.$$

5. Для перевозки 90 т груза затребовали некоторое количество одинаковых грузовиков. В связи с тем что на каждую машину погрузили на 0,75 т меньше, дополнительно было затребовано еще 4 грузовика. На сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой?

6. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

7. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите периметр и площадь треугольника ABC , если $BC = CD = 6$, $AB = 7$ и $CE = 3$.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3 \cdot 2^{3x+1} + 2 \cdot 4^{x+1} - (4 - 4a) \cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня?

Вариант 12

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$|x + 3|(|x - 1| - 3) \leq 0.$$

2. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{1}{6}$ часть от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени. А еще через год в счет полного погашения кредита фермер внес в банк сумму, на 20% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 \frac{x^2 - 2x}{x + 10} \right) \geq 0.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1} + \sqrt{6x + 2y - x^2 - y^2 - 9} + \sqrt{x + y - 1} = 2\sqrt{x - y + 1} \sin z + 6 \sin^2 \frac{z}{2}.$$

5. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $AB = 3$, $AC = \sqrt{5}$, длина медианы, проведенной из вершины A к стороне BC , равна $\sqrt{6}$ и длины отрезков AP , PQ , QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ .

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из

которых множество решений неравенства

$$6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$$

содержит хотя бы одно целое число.

7. Определите, какая из двух пирамид $SABC$ или $QKNM$ имеет меньший объем, если длины ребер SA , SB , SC и QK , QN , MN равны 2, а длины ребер AB , BC , AC и KN , KM , QM равны $\sqrt{3}$.

Вариант 13

(факультет государственного управления)

1. На велотреке, имеющем форму окружности, из диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста со скоростями 775 и 800 метров в минуту соответственно. Сколько полных кругов проедет первый велосипедист к моменту, когда его догонит второй, если длина велотрека равна четверти километра?

2. Решите уравнение

$$\left| \left| \sin x - \frac{1}{4} \right| - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{3} \left(\sin x + \frac{1}{4} \right).$$

3. Диагональ разбивает выпуклый четырехугольник на два равных треугольника со сторонами длиной 5, 12 и 13. Найдите радиус наименьшего круга, в который можно поместить такой четырехугольник.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{(\log_4 x)^2 - 2} \geq \log_2 \frac{x}{4} - 1.$$

5. Город административно поделен на пять частей: западную, северную, восточную, южную и центральную. Средняя цена дизельного топлива по бензозаправочным станциям в восточном районе составляет 18 рублей за литр, в западном – 18 рублей 35 копеек, в центральном – 20 рублей с полтиной, в северном районе – 17 рублей с четвертью соответственно, в южном районе цена совпадает со средней ценой по всем бензозаправкам города. Известно, что в центральной части бензозаправочных станций в полтора раза больше, чем в западной, а на востоке – на треть больше, чем на западе. Во сколько раз бензозаправочных станций в северном районе меньше, чем на востоке, если средняя цена дизтоплива по заправочным станциям города составляет 18 рублей 60 копеек?

6. Найдите значения a и b такие, при которых система

$$\begin{cases} |bx| - |y| = 2a, \\ (x - b)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Общество рыболовов и охотников, две трети членов которого – рыболовы, а одна треть – охотники, решило переизбрать правление. Председатель общества подготовил проект состава правления из 100 человек. Какое наибольшее число охотников можно было включить в проект состава правления, чтобы за него проголосовало более половины членов общества, если известно, что за проект проголосует столько процентов рыболовов, сколько рыболовов в предложенном проекте, и столько процентов от числа охотников, сколько в нем охотников?

Вариант 14

(дополнительный набор на платные образовательные программы для абитуриентов факультетов механико-математического, вычислительной математики и кибернетики, химического, биологического, почвоведения, географического, наук о материалах, фундаментальной

медицины, психологии, биоинженерии и биоинформатики, Московской школы экономики)

1. Решите уравнение

$$\lg \sqrt{y} - \frac{1}{2} \sqrt{\lg y} = 3.$$

2. Решите уравнение

$$\cos^4 x + \sin^3 x = 1.$$

3. На координатной плоскости расположен квадрат. Две его вершины имеют координаты $(4; -5)$ и $(-6; 5)$. Найдите координаты двух других его вершин.

4. Решите неравенство

$$3^{-\frac{1}{x+2}} - 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x+1}} \leq 27^{-\frac{1}{x}}.$$

5. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна Q . Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, а ребра SB и SD наклонены к ней под углами δ и γ . Найдите объем пирамиды.

6. Решите неравенство

$$\left(\arcsin x - \frac{\pi}{6} \right) \lg \left(x^2 + \frac{9}{25} \right) > 0.$$

7. Около окружности радиуса R описана равнобочная трапеция. Площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции, равна S . Найдите площадь трапеции.

8. К десятичной записи целого числа $n \neq 0$ приписали справа какую-то цифру. К получившемуся новому числу прибавили квадрат числа n , а потом вычли 3. Получилось число $14n$. Какое число n было взято и какая цифра была приписана?

ФИЗИКА

Физический факультет

Задачи устного экзамена

1. Два тонких жестких стержня длиной L каждый вращаются вокруг неподвижных точек O_1 и O_2 в плоскости рисунка 1. Расстояние между этими точками равно h . Найдите модуль скорости движения точки C пересечения этих стержней в тот момент, когда угол между стержнями равен α , угол CO_1O_2 равен β , а скорости свободных концов стержней равны \vec{u}_1 и \vec{u}_2 .

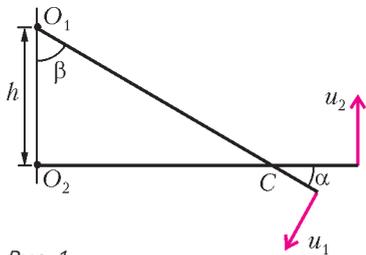


Рис. 1

2. Неподвижный клин с углом α при основании имеет гладкую нижнюю и шероховатую верхнюю части своей наклонной плоскости. На верхней части клина удерживают тонкий однородный жесткий стержень массой m , расположенный в плоскости рисунка 2. Коэффициент трения между стержнем и верхней частью клина равен μ . После того как стержень отпускают, он начинает поступательно скользить по клину. Найдите максимальное значение силы натяжения стержня в процессе его движения. Влиянием воздуха пренебречь.

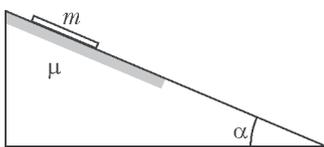


Рис. 2

другом конце которого подвешен груз, как показано на рисунке 3. Стержень удерживают в горизонтальном положении легкой жесткой проволокой, прикрепленной к нему на расстоянии $l = 30$ см от шарнира. Другой конец проволоки прикреплен к стене так, что проволока и стержень лежат в одной вертикальной плоскости. На каком расстоянии h от шарнира должна быть прикреплена к стене проволока, чтобы ее абсолютное удлинение было минимальным? Трением в шарнире пренебречь.

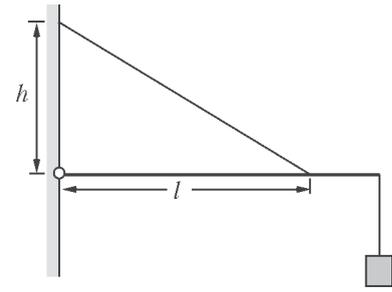


Рис. 3

4. На гладком горизонтальном столе лежат одинаковые грузы малых размеров, расположенные в вершинах правильного n -угольника. Масса каждого груза равна m . Грузы соединены между собой одинаковыми легкими пружинами жесткостью k . Грузы смещают от положений равновесия на одинаковые расстояния так, как показано на рисунке 4. После этого грузы одновременно отпускают. Определите период малых колебаний грузов. Считать, что при колебаниях оси пружин остаются прямолинейными.

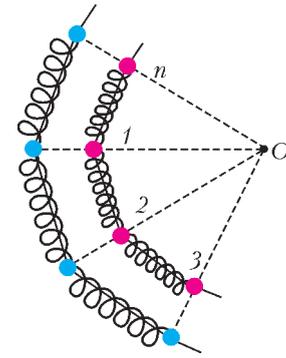


Рис. 4

5. На рисунке 5 показана зависимость внутренней энергии U идеального газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя, от количества теплоты Q , которое газ получил с момента 1 начала цикла 1-2-3-1. Найдите КПД этого цикла.

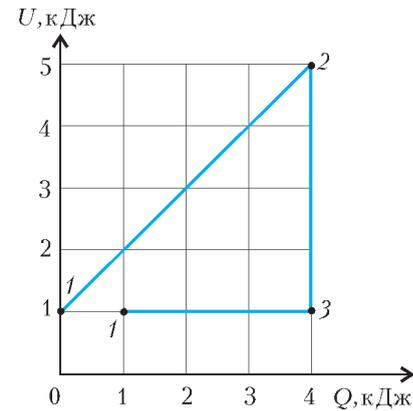


Рис. 5

6. В цилиндре под поршнем находится смесь воздуха, насыщенного водяного пара и воды в сконденсированном состоянии. Масса воды равна массе водяного пара. Если изотермически уменьшить объем смеси в $k = 2$ раза, ее давление увеличится в $n = 1,5$ раза. Во сколько раз изменится давление смеси, если ее объем не уменьшать, а увеличивать при той же температуре до тех пор, пока вся вода не испарится?

7. Четыре незаряженные одинаковые металлические пластины, площадь каждой из которых S , расположены в воздухе на малом расстоянии d параллельно друг другу так, как показано на рисунке 6. Внутренним пластинам сообщили равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. Затем внешние пластины соединили между собой через резистор, сопротивление которого R . В

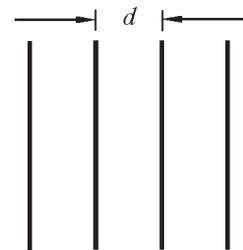


Рис. 6

результате в этом резисторе выделилось количество теплоты Q . Пренебрегая излучением, определите модуль q зарядов внутренних пластин.

8. Металлический стержень, один конец которого шарнирно закреплен в точке O , вращают с такой постоянной угловой скоростью ω , что он образует с вертикалью постоянный угол α (рис.7). Другой конец стержня касается проводящей полусферы. Центр полусферы совпадает с точкой O . Радиус полусферы R . Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого B . К полусфере подключен резистор с достаточно большим сопротивлением r . Другой конец резистора подключен к стержню в точке O . Найдите мощность P , выделяющуюся в резисторе.

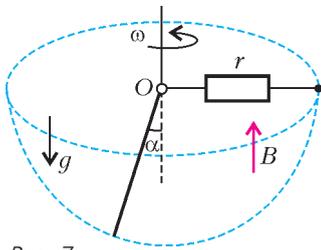


Рис. 7

9. К идеальной катушке индуктивности, зашунтированной резистором сопротивлением R , подключают на время τ источник с малым внутренним сопротивлением и ЭДС \mathcal{E} . При этом за время подключения источника и время после его отключения в резисторе выделяются одинаковые количества теплоты. Найдите индуктивность катушки L .

10. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы L с фокусным расстоянием F и плоского зеркала Z , плоскость которого перпендикулярна главной оптической оси линзы. Между линзой и зеркалом находится стержень C , расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы так, как показано на рисунке 8. Расстояние от стержня до линзы равно d , причем $d > F$. Найдите расстояние x между линзой и зеркалом, при котором отношение размеров двух действительных изображений стержня равно $k > 1$.

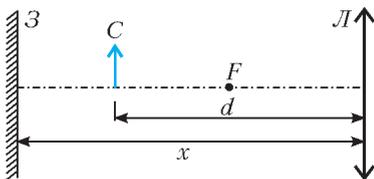


Рис. 8

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи устного экзамена

1. Тяжело нагруженную лодку подтягивают к пристани с помощью веревки, перекинутой через ролик, находящийся на высоте h над уровнем воды. По какому закону должна

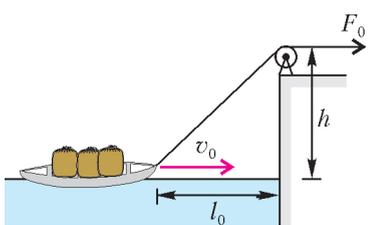


Рис. 9

меняться со временем сила $F(t)$, которую нужно прикладывать к веревке, чтобы поддерживать скорость движения лодки в воде постоянной и равной v_0 ? В момент времени $t = 0$ лодка движется со скоростью v_0 , сила, с которой тянут за веревку, равна F_0 , а расстояние от лодки до пристани составляет l_0 (рис.9). Сопротивление воды считать пропорциональным скорости лодки.

2. Правая чаша рычажных весов находится под мелким морозящим дождем, а левая укрыта от него навесом. Каждая чаша представляет собой тонкостенную цилиндрическую емкость с площадью дна $S = 0,05 \text{ м}^2$ и высотой бортика $h = 1 \text{ мм}$. Интенсивность равномерно падающего дождя такова, что дождевая вода целиком заполняет предварительно

опороженную чашу весов за время $\tau = 30 \text{ с}$. Какой массы m гирию нужно положить на левую чашу весов, чтобы уравновесить весы в случае, когда правая чаша заполнена дождевой водой до краев? Капли дождя падают вертикально со скоростью $v = 3 \text{ м/с}$. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Соударение капель с водой в чаше считать неупругим.

3. Развивая максимальную мощность двигателя, автобус движется по горизонтальному участку шоссе с постоянной скоростью v_0 . Когда автобус при неизменной мощности двигателя въезжает на подъем с углом наклона α_1 , его скорость падает до v_1 . С какой скоростью v_2 автобус будет преодолевать подъем с углом наклона $\alpha_2 < \alpha_1$ при той же мощности, развиваемой двигателем? Проскальзывание ведущих колес автобуса на всех участках шоссе отсутствует. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости автобуса.

4. Два одинаковых шарика подвешены на невесомых нерастяжимых нитях, как показано на рисунке 10. Силы натяжения верхней и средней нитей T_1 и T_2 известны. Найдите силу натяжения T_3 нижней нити, если она горизонтальна.

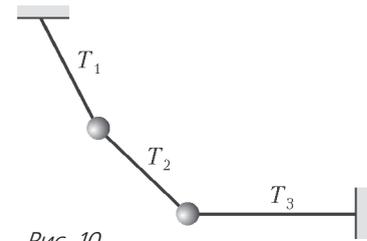


Рис. 10

5. Тонкостенный стакан вместимостью $V_0 = 200 \text{ см}^3$ и массой $m = 100 \text{ г}$ погружают в воду, держа его дном вверх. На какой глубине h предоставленный самому себе стакан перестанет всплывать? Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, температура воды не меняется с глубиной. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения, давлением паров воды, а также объемом стенок стакана пренебречь.

6. Садовый насос, расположенный в скважине на глубине h , подает воду на поверхность земли по шлангу площадью сечения S . Какую мощность N развивает насос, если известно, что он наполняет водой ведро объемом V за время τ ? Плотность воды ρ , ускорение свободного падения g .

7. К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью k подвешена гирия массой m . В некоторый момент времени лифт начинает двигаться вверх с постоянным ускорением a . Какой путь s пройдет кабина лифта к тому моменту, когда длина пружины достигнет максимального значения?

8. В космический корабль, совершающий межпланетный перелет, попал метеорит, пробивший в корпусе маленькое отверстие, через которое наружу стал выходить воздух. Объем корабля $V = 1000 \text{ м}^3$, начальное давление воздуха в нем $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, температура $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$. Через какое время τ после попадания метеорита давление воздуха в корабле уменьшится на $\Delta p = 10^3 \text{ Па}$, если площадь отверстия $S = 1 \text{ см}^2$? Молярная масса воздуха $M = 29 \text{ г/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. При решении учесть, что $\Delta p \ll p_0$; температуру воздуха внутри корабля считать постоянной, а процесс истечения воздуха – квазиравновесным.

9. В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым тонким поршнем находится один моль идеального одноатомного газа при температуре $T_0 = 300 \text{ К}$ (рис.11). В пространстве над поршнем создан ваку-

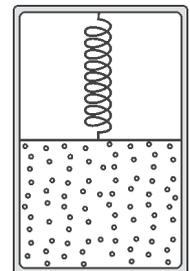


Рис. 11

ум. Поршень удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра, причем пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы его объем увеличился в $n = 1,5$ раза? Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К). Теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

10. В закрытом с одного конца цилиндрическом сосуде находятся два тонких поршня, способных перемещаться без

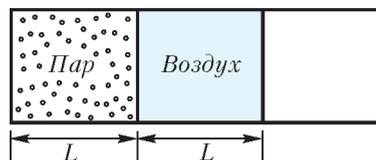


Рис. 12

трения и разделяющих пространство внутри сосуда на два отсека (рис. 12). В левом отсеке заключен водяной пар при давлении p , а в правом – воздух при том же давлении, причем длины отсеков одинаковы и равны L . Правый поршень медленно передвинули влево на расстояние l . На какое расстояние x сместится при этом левый поршень? Температуру пара и воздуха считать постоянной. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно $2p$.

11. Пластины плоского воздушного конденсатора расположены горизонтально. Верхняя пластина сделана подвижной и находится в начальном состоянии на высоте $h = 1$ мм над нижней пластиной, которая закреплена. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1000$ В, отключили от источника и освободили верхнюю пластину. Какую скорость приобретет падающая пластина к моменту соприкосновения с нижней пластиной? Масса верхней пластины $m = 4,4$ г, площадь каждой пластины $S = 0,01$ м², электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

12. Экран электронно-лучевой трубки представляет собой прямоугольник с диагональю $d = 51$ см и соотношением сторон 3:4. Сила тока в электронном луче $I = 0,5$ мА. Предположим, что все электроны луча, попавшие на экран, остаются на нем, распределяясь по его поверхности равномерно. Через какое время τ после включения устройства напряженность электрического поля вблизи поверхности экрана достигнет по величине напряженности поля на поверхности

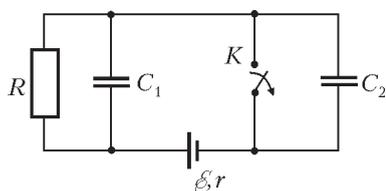


Рис. 13

удлиненного металлического шара радиусом $R = 10$ см, заряженного до потенциала $\phi = 3$ кВ? Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

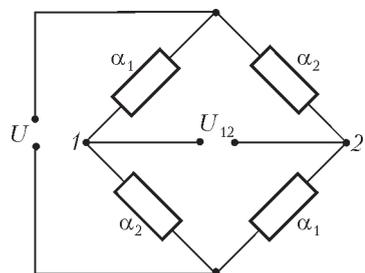


Рис. 14

удлиненного металлического шара радиусом $R = 10$ см, заряженного до потенциала $\phi = 3$ кВ? Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

13. В цепи, изображенной на рисунке 13, ключ K в течение длительного времени находился в замкнутом состоянии. В некоторый момент ключ разомкнули. Какое количество теплоты Q выделилось в схеме после этого? Емкости конденсаторов $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ, сопротивление резистора $R = 4$ Ом, ЭДС источника $\epsilon = 10$ В, его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом.

14. Для измерения температуры t собрана схема, состоящая из четырех резисторов и подключенная к источнику с ЭДС U

и малым внутренним сопротивлением (рис. 14). Температурные коэффициенты сопротивления резисторов попарно равны и составляют α_1 и α_2 соответственно, а сопротивления всех резисторов при температуре 0°C одинаковы. Как зависит напряжение U_{12} между точками 1 и 2 от температуры? Считать, что в диапазоне измеряемых температур $\alpha_1 t \ll 1$ и $\alpha_2 t \ll 1$.

15. Два параллельных металлических стержня расположены на расстоянии l друг от друга в плоскости, перпендикулярной однородному

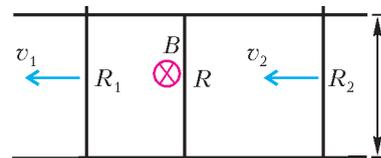


Рис. 15

магнитному полю с индукцией B (рис. 15). Стержни соединены неподвижным проводником сопротивлением R . Два других проводника сопротивлениями R_1 и R_2 находятся слева и справа от неподвижного проводника и скользят по стержням в одну и ту же сторону со скоростями v_1 и v_2 . Какой ток I течет по неподвижному проводнику? Сопротивление стержней пренебрежимо мало.

16. Цепь, изображенная на рисунке 16, состоит из конденсатора, катушки индуктивности, источника с ЭДС ϵ и пренебрежимо малым

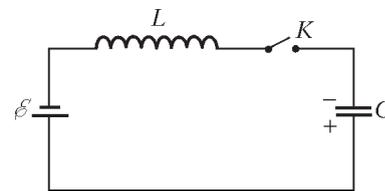


Рис. 16

внутренним сопротивлением, а также ключа K . В начальный момент времени ключ разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 с полярностью, указанной на рисунке. Какого максимального значения U_{max} может достичь напряжение на конденсаторе после замыкания ключа? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

17. Оптическая схема, изображенная на рисунке 17, состоит из непрозрачного экрана с маленьким отверстием O и двух плоских зеркал 1 и 2. Луч света проходит через отверстие O , отражается от зеркал 1 и 2 и выходит обратно через это отверстие, причем угол падения луча на зеркало 1 равен α , а после отражения от зеркала 2 луч распространяется параллельно зеркалу 1. Когда зеркало 1 сместили влево параллельно самому себе на расстояние d_1 , луч перестал попадать в отверстие O . На какое расстояние d_2 нужно сместить параллельно самому себе зеркало 2, чтобы луч снова попал в это отверстие? Размер отверстия пренебрежимо мал.

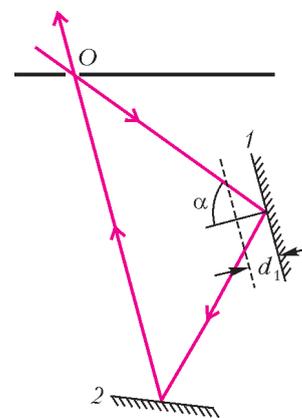


Рис. 17

18. Оптический сканер представляет собой правильную шестигранную призму с зеркальной поверхностью, вращающуюся вокруг своей оси O (рис. 18). Ширина каждой грани a . Снизу на сканер падает вертикальный световой луч, продолжение которого проходит на расстоянии $a/2$ от оси вращения сканера. Рядом со сканером вертикально расположена тонкая собирающая линза большого диаметра. Фокусное расстояние линзы равно F , а ее главная оптическая ось проходит через ось вращения сканера. В правой фокальной

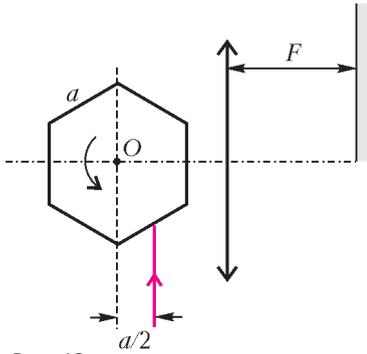


Рис. 18

плоскости линзы расположен широкий экран, нижний край которого находится на оптической оси линзы. Определите длину d отрезка, который заметает на экране световой луч, отраженный от поверхности сканера.

19. Оптическая система состоит из двух одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием F каждая. Линзы расположены на расстоянии L друг от друга ($F < L < 2F$) так, что их главные оптические оси совпадают. Слева от системы на расстоянии $2F$ от левой линзы находится точечный источник света. На какое расстояние h сместится изображение источника, даваемое этой системой, если правую линзу сдвинуть перпендикулярно ее оптической оси вниз на расстояние H ?

20. Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой. Найдите радиус r первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы $R = 10$ м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола $n = 1,5$. Свет падает по нормали к пластинке.

Химический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сформулируйте закон электролиза Фарадея.
2. Что такое система отсчета?
3. Протон движется в электрическом и магнитном полях по прямой линии. Какова скорость протона, если индукция магнитного поля $B = 50$ мТл, а напряженность электрического поля $E = 10^4$ В/м?

4. На тонкую рассеивающую линзу падает луч света 1, ход преломленного в линзе луча 2 известен (рис.19). Линзу заменили на собирающую с теми же положениями фокусов. Постройте ход луча 1 после преломления в этой линзе.

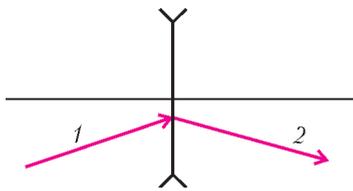


Рис. 19

5. В баллоне находится двухатомный идеальный газ. При нагревании газа его абсолютная температура увеличилась в два раза, а половина молекул диссоциировала (распалась на атомы). Во сколько раз изменилось (увеличилось или уменьшилось) давление газа в баллоне?

6. По двускатной крыше вдоль поверхности AB соскальзывает сосулька (рис.20). Какова скорость сосульки v_0 в момент отрыва от поверхности AB , если расстояние от точки B до точки соударения с поверхностью крыши BC равно l , а скорость сосульки перед соударением

Рис. 20

ем в n раз больше v_0 ? Считать угол α известным, сопротивлением воздуха пренебречь.

7. На легкой диэлектрической нити в однородном магнитном поле подвешен маленький положительно заряженный шарик (рис.21). Шарик отклонили от положения равновесия так, что нить стала горизонтальной, и отпустили. Найдите силу натяжения нити при прохождении шариком нижнего положения. Индукция магнитного поля равна B и направлена перпендикулярно плоскости движения шарика. Масса и заряд шарика m и q соответственно, длина нити l .

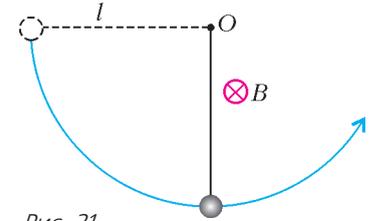


Рис. 21

8. При нормальном падении на дифракционную решетку пучка света от гелий-неонового лазера с длиной волны $\lambda = 633$ нм наблюдается всего $k = 7$ дифракционных максимумов. Каков период d данной дифракционной решетки?

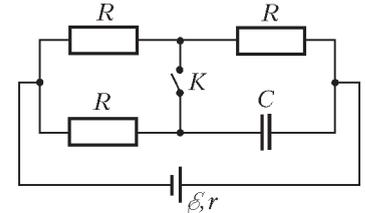


Рис. 22

9. В цепи, схема которой изображена на рисунке 22, сопротивление резисторов $R = 4$ Ом, внутреннее сопротивление источника тока $r = 2$ Ом. Во сколько раз изменится энергия электрического поля конденсатора после замыкания ключа K ?

10. На гладкой горизонтальной поверхности находится клин, имеющий массу $M = 0,64$ кг (рис.23). О гладкую наклонную поверхность клина ударяется шарик массой $m = 0,15$ кг, летевший горизонтально. Каким должен быть угол клина α , чтобы шарик отскочил вертикально вверх? Удар считать абсолютно упругим.

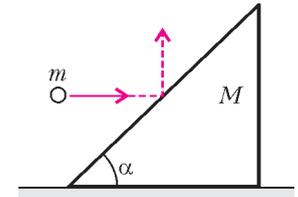


Рис. 23

Вариант 2

1. Сформулируйте законы преломления света.
2. Что такое резонанс?

3. Магнитный поток через поверхность, ограниченную проводящим контуром, меняется так, как показано на рисунке 24. Постройте график зависимости от времени ЭДС, индуцируемой в этом контуре.

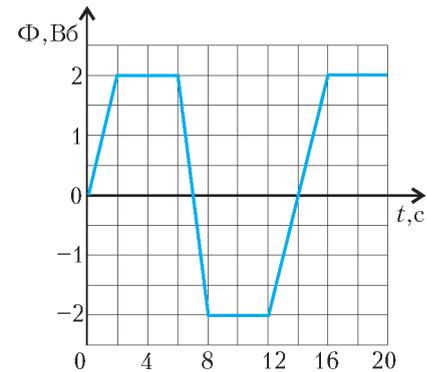


Рис. 24

4. Два одинаковых бруска находятся на наклонной плоскости на одном уровне. Брускам сообщают одинаковые начальные скорости вдоль наклонной плоскости: первому – вниз, к основанию наклонной плоскости, второму – в противоположном направлении, к вершине плоскости. Какой из брусков будет иметь большую скорость, когда они окажутся у основания наклонной плоскости? Считать, что коэффициент трения между брусками и поверхностью $\mu < \text{tg } \alpha$.

5. В середине неподвижно закрепленного горизонтального цилиндрического сосуда, открытого с одной стороны, находится тонкий поршень. В закрытой части цилиндра – воздух. Какую минимальную силу следует приложить к поршню, чтобы медленно вытянуть его из цилиндра? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Площадь поперечного сечения цилиндра $S = 4 \text{ см}^2$. Температуру считать постоянной. Трением пренебречь. Воздух можно считать идеальным газом.

6. Батарея состоит из четырех конденсаторов, соединенных так, как показано на рисунке 25. Во сколько раз изменится емкость батареи (увеличится или уменьшится) при замыкании ключа K ?

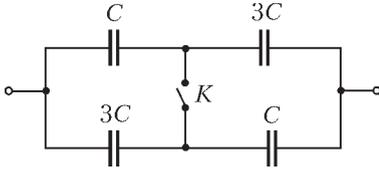


Рис. 25

7. Для размораживания водопроводной трубы, в которой замерзла вода, применили электрический нагреватель. Нагреватель подключили к источнику напряжением $U = 220$ В. Каким должно быть сопротивление нагревателя, чтобы за время $\tau = 1$ мин он растапливал $m = 1$ кг льда? Учесть, что потери тепла составляют $k = 40\%$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

8. Стержень длиной $l = 1$ м опирается на пол и на стену. Нижний конец стержня скользит по полу, удаляясь от стены, а верхний скользит по стене вниз. Найдите путь, пройденный точкой C , лежащей на середине стержня, при движении стержня от вертикального до горизонтального положения.

9. В цепи, схема которой приведена на рисунке 26, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом. Амплитуда подведенного напряжения $U_0 = 20$ В. Какое количество теплоты выделяется в цепи за время $\tau = 1$ мин? Период колебаний напряжения $T \ll \tau$. Диоды считать идеальными.

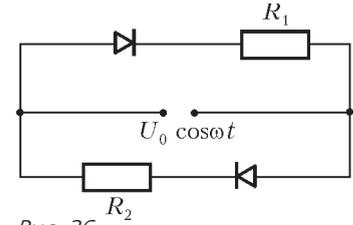


Рис. 26

10. Тонкий стержень AB расположен под углом $\alpha = 45^\circ$ к главной оптической оси собирающей линзы (рис.27). Под каким углом β к оси расположено действительное изображение стержня, даваемое линзой? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. Расстояние от нижнего конца стержня до линзы $d = 60$ см.

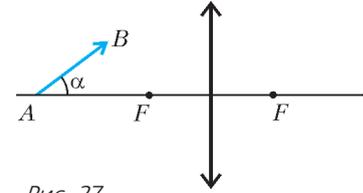


Рис. 27

Публикацию подготовили А.Безуни, С.Волошин, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, В.Королев, Т.Лукашенко, Г.Медведев, В.Панферов, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, Е.Хайлов, С.Чесноков, Е.Шикин, Б.Щедрин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2007 г.)

1. Занумеруем монеты слева направо вдоль горизонтального отрезка, на котором они лежат: 1, 2, ..., 99, 100. Сдвинем все четные монеты вниз, а потом «изогнем» два полученных горизонтальных отрезка с монетами так, чтобы верхние (нечетные) монеты расположились вдоль верхней части окружности, а нижние (четные) – вдоль нижней (рис.1). В этом случае любые две соседние монеты отличаются по весу менее, чем на 0,02 грамма.

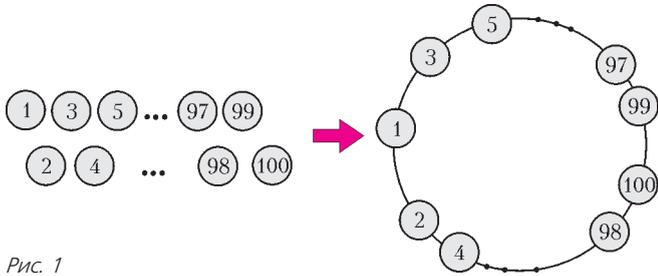


Рис. 1

2. а) См. рис.2. Несложно убедиться в том, что если при пересечении трех кругов образуются 6 областей, то найдется круг, содержащий ровно 3 области. Любая сумма, большая 15 и составленная из чисел от 1 до 6, требует наличия в каждом круге не менее 4 областей.

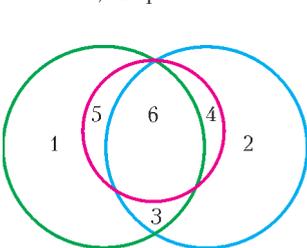


Рис. 2

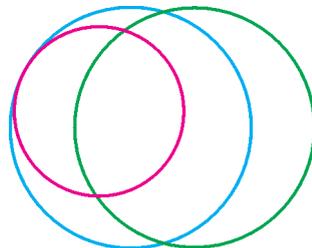


Рис. 3

б) См. рис.3 (один из кругов полностью содержится в другом).

в) См. рис.4. В многоугольниках $ACEFLGHK$, $ABDLFHK$, $BCEGLK$ сумма чисел равна 16.

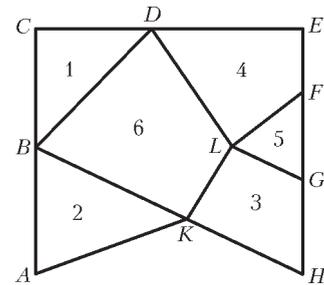


Рис. 4

3. Запишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{201}{mnpqr} \leq 2.$$

Сумма дробей в левой части максимальна лишь в том случае, когда p, q, r, m, n принимают минимально возможные значения, то есть выбираются из множества $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Тогда в левой части стоит выражение $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{201}{945} = 2 \leq 2$.

4. Традиционное решение основано на свойстве средней линии треугольника. Мы приведем другое решение, использующее идею площади. Пусть точка M делит пополам сторону AB , а точка N – сторону CD четырехугольника $ABCD$ и пусть MN делит пополам диагональ AC в точке K (рис.5). Так как в четырехугольнике

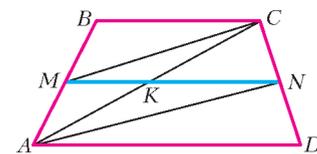


Рис. 5

$MCNA$ диагональ MN делит AC пополам, то площадь треугольника MCN равна площади треугольника NAM . Но площади треугольников MCN и MDN равны, значит, равны площади треугольников NAM и MDN , т.е. $MN \parallel AD$. Аналогично проверяем, что $MN \parallel BC$. Значит, $AD \parallel BC$.

5. Можно. Решение этой задачи изложено в статье И.Акулича «Призрак Леонардо».

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Большая теплопроводность металла способствует более быстрому выравниванию температуры; удельная теплоемкость металла меньше, чем у стекла; металл излучает наружу меньше тепла, чем стекло. Все вместе это повышает точность измерений.

2. Нет, не всегда. Энергия при теплообмене переходит от тел с более высокой температурой к телам с более низкой температурой.

3. Тело человека непрерывно выделяет тепло, которое отдается окружающему воздуху. При температуре воздуха, близкой к 37°C , процесс теплоотдачи замедляется, и в теле накапливается избыточная внутренняя энергия.

4. Если температура воздуха выше температуры нашего тела, ветер, создаваемый веером, будет ощущаться как горячее дыхание и будет не отнимать тепло, а увеличивать его передачу телу.

5. Никакого влияния на показания термометра в тени (если он сух) ветер оказать не может. Если же термометр освещен солнечными лучами, при ветре его показания уменьшаются.

6. Надо завернуть оба термометра вместе, чтобы избежать потерь тепла наружу. Более нагретым был тот из термометров, чьи показания будут уменьшаться.

7. Тот, что лежит в луже.

8. Нет, нельзя. Как только температуры воды и пара сравняются, передача тепла от пара к воде прекратится.

9. Вода в сосуде оказалась перегретой, т.е. нагретой выше температуры кипения, так как при ее предварительном кипячении из нее был изгнан воздух.

10. Да, можно, поскольку температура кипящей воды значительно ниже температуры воспламенения бумаги.

11. Дно и нижние части стенок чайника, соприкасавшиеся с пламенем горелки, имеют более высокую температуру, чем кипящая в нем вода. Поэтому передача тепла воде продолжается еще какое-то время и после снятия чайника с плиты.

12. Вода закипит практически одновременно. Точнее, если учесть, что во время переливания кипятков успеет несколько охладиться, то для доведения его снова до температуры кипения потребуются дополнительная энергия, поэтому в первой кастрюле вода закипит несколько позже.

13. Больше нагреется алюминиевый брусок, так как теплоемкость тела тем больше, чем больше произведение плотности вещества на его удельную теплоемкость (обратитесь к соответствующим таблицам).

14. Да, возможно. Приведя в контакт кубики A и B , добьемся выравнивания их температур. Получим: $A - 100^\circ\text{C}$, $B - 100^\circ\text{C}$, $C - 0^\circ\text{C}$. Поступив затем точно так же с кубиками A и C , имеем: $A - 50^\circ\text{C}$, $B - 100^\circ\text{C}$, $C - 50^\circ\text{C}$. Наконец, производя теплообмен между кубиками B и C , окончательно получим: $A - 50^\circ\text{C}$, $B - 75^\circ\text{C}$, $C - 75^\circ\text{C}$.

15. Обычно вода, образующаяся при таянии льда, сразу стекает. Когда же лед завернут в мокрую газету, тепло извне должно пройти через слой задержанной газетой воды, поэтому его поступление ко льду замедляется.

16. При образовании льда высвобождается довольно много тепла, благодаря чему задерживается дальнейшее охлаждение воздуха в погребе, а это предохраняет овощи от замерзания.

17. Выделившееся при кристаллизации воды тепло идет на нагревание льда.

18. Для составления уравнения теплового баланса вам понадобятся всего лишь табличные значения удельной теплоты кристаллизации воды и ее удельной теплоемкости. Их отношение даст искомую температуру: примерно -79°C .

19. Расчет по уравнению теплового баланса приводит к температуре, равной 100°C .

Микроопыт

Одна и та же вода представляется правой руке горячей, а левой руке – холодной! Однако через некоторое время руки привыкают к температуре воды в средней емкости, т.е. приходят в тепловое равновесие со средой, и ощущения выравниваются.

ОРИГАМИ И ПОСТРОЕНИЯ

1. Эти построения достаточно очевидны. Например, построение из правила 5 циркулем и линейкой можно осуществить так:

из точки A опустить перпендикуляр AA' на прямую p (рис.6), провести окружность радиусом AA' и затем провести касательную p' к этой окружности из точки B .

2. Из точки A опустите перпендикуляр q на прямую l (складка 4), а затем (снова складка 4) восстановьте перпендикуляр в точке A к q .

3. Возьмите произвольный отрезок AB , восставьте перпендикуляр в точке A (складка 4), затем постройте точку C (складка 3) на этом перпендикуляре. Дальнейшее очевидно.

4. а) Складка 1. б) Возьмите вне прямой AB точку P и проведите через нее прямую, параллельную AB , а затем на ней отметьте отрезок PQ и разделите его на 4 равные части (складка 1, примененная трижды).

Проведите прямые AX_1 и BP (рис.7). Прямые RX_2 и RX_3 делят отрезок AB на 3 равные части.

5. Мы приведем лишь построения, оставляя обоснование читателю.

Пусть O – центр окружности

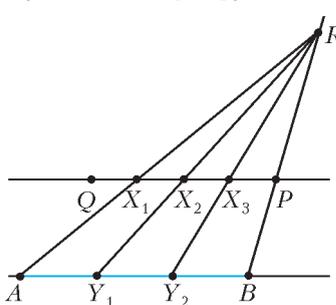


Рис. 6

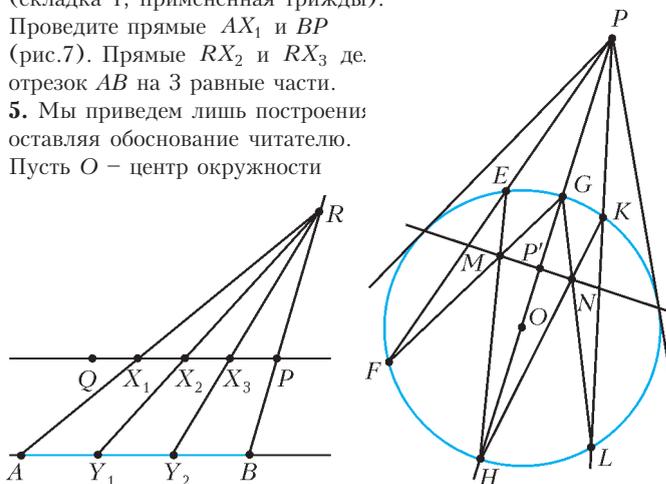


Рис. 7

(рис.8), F – точка на ней, P – точка вне окружности. Построим точку P' , инверсную точке P относительно окружности. Проводим (делая соответствующую складку) прямые PO , PF , PK и во всех случаях находим точки пересечения их с окружностью. Затем проводим прямые FG и EH , HK и GL . Пусть M и N – точки их пересечения. Прямая MN пересекает PO в точке P' . Подумайте, как это доказать.

Постройте такие точки P' для точки P , лежащей внутри окружности. Как видим, листок окажется после такого построения изрядно помятым.

Рис. 8

ЭТА «ПРОСТЕНЬКАЯ» КИНЕМАТИКА

1. $v_c = v_k \operatorname{tg} \beta$.
2. $\tau = \frac{2t_1 t_2}{t_1 + t_2} \approx 5,8 \text{ с}$.
3. $v_k = \frac{\lambda(k_1 + k_2 - 4)}{2\tau} = 5 \text{ м/с}$, $v_b = \frac{\lambda(k_1 + k_2 - 2)}{2\tau} = 10 \text{ м/с}$.
4. $v_{\text{шк}} = \sqrt{v_{\text{шн}}^2 + 4v_{\text{шн}}v_c \cos \alpha + 4v_c^2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{v_{\text{шн}} \sin \alpha}{v_{\text{шн}} \cos \alpha + 2v_c}$.
5. $\alpha = \arcsin \frac{v_k \sin \beta}{v_\tau} \approx 14,5^\circ$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -0,5.
2. 0; $\sqrt[9]{10^5}$.
3. 30.
4. $\left[-7; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Эквивалентное неравенство $\frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leq 0$ равносильно системе
$$\begin{cases} \frac{(8-x) - (x+7)}{x+7 - (2x-1)^2} \leq 0, \\ 8-x \geq 0, \\ x+7 \geq 0. \end{cases}$$

(Выражение $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ при $u \geq 0, v \geq 0$ имеет тот же знак, что и выражение $u - v$).

5. 10. *Указание.* Треугольники ABC и CBD подобны с коэффициентом подобия $3/2$.

6. 540, 108. Из равенств

$$\text{НОК}(a, b) = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \text{НОК}(a, c) = 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

следует, что число b кратно 2^2 и число c кратно 3^3 (так как a не кратно ни 2^2 , ни 3^3), а искомое число $\text{НОК}(b, c)$ делится на $2^2 \cdot 3^3$ и, в то же время, само является делителем числа $\text{НОК}(60, 270) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Поэтому оно равно либо $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$, либо $2^2 \cdot 3^3 = 108$. Первое из этих значений реализуется при $a = 1, b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, c = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$, а второе – при $a = 5, b = 2^2 \cdot 3, c = 2 \cdot 3^3$, причем оба набора удовлетворяют всем условиям задачи.

7. $\arctg \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$. Множество, заданное неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0,$$

не пересекается с вертикальной прямой $x = 0$ (иначе при некотором y выполнялось бы неравенство $y^2 + 2y + 4 < 0$).

Найдем все значения k , при каждом из которых множество пересекается с не вертикальной прямой $y = kx$: неравенство

$$0 > 14x^2 + kx^2 + k^2x^2 + 14x + 2kx + 4 = (k^2 + k + 14)x^2 + 2(k+7)x + 4$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(k+7)^2 - 4(k^2 + k + 14) > 0, \text{ т.е. при } 1 < k < \frac{7}{3}.$$

Данное множество не имеет точек в первой четверти, иначе при $x, y \geq 0$ получилось бы противоречие:

$$0 > 14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 \geq 4.$$

Значит, это множество целиком расположено в третьей четверти и пересекается в точности теми лучами, выходящими из начала координат, которые соответствуют углам

$$\varphi \in \left(\pi + \frac{\pi}{4}; \pi + \arctg \frac{7}{3} \right).$$

8. $275\pi(\operatorname{tg} 20^\circ \pm \operatorname{tg} 10^\circ)$. Пусть грани α и β двугранного угла пересекают ось цилиндра в точках A и B , а плоскость γ , проходящая через ребро угла перпендикулярно оси, пересекает ее в точке C (рис.9; вид сбоку).

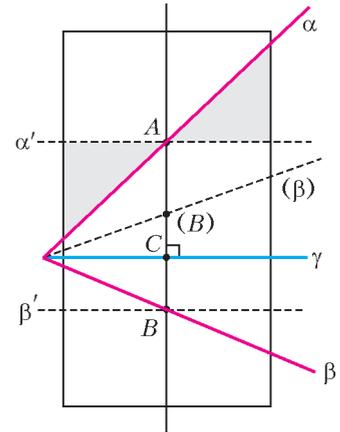


Рис. 9

Тогда если плоскости α' и β' проходят через точки A и B параллельно γ , то объем цилиндра между плоскостями α' и γ равен его объему между плоскостями α и γ : действительно, избыточная часть последнего объема над первым, находящаяся с одной стороны от плоскости α' , симметрична (относительно точки A , в силу центральной симметрии самих плоскостей α, α' и поверхности цилиндра) его недостающей части, находящейся с другой стороны от нее.

Аналогично, объем цилиндра между плоскостями β' и γ равен его объему между плоскостями β и γ .

Поэтому часть цилиндра, лежащая между плоскостями α и β , имеет тот же объем, что и прямой цилиндр с основаниями, расположенными в плоскостях α' и β' , причем высота последнего равна

$$h = AB = AC \pm BC = (11 \operatorname{ctg} 70^\circ \pm 11 \operatorname{ctg} 80^\circ) = 11(\operatorname{tg} 20^\circ \pm \operatorname{tg} 10^\circ)$$

(где знак плюс или минус зависит от того, как расположены грани α и β – по разные стороны от плоскости γ или по одну), а значит, его объем равен $5^2 \pi h = 275\pi(\operatorname{tg} 20^\circ \pm \operatorname{tg} 10^\circ)$.

9. $0 < x < \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. *Указание.* Из условия следует неравенство $\operatorname{tg} 3x \geq 0$. Кроме того, при всех допустимых x

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x.$$

Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \\ = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x + (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x), \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg} 3x \geq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \geq 0, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 3x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Осталось найти ее решение на промежутке $(0; \pi]$.

Рассмотрим два случая:

- 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = 0, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}n, n = 1, \dots, 6, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi;$
- 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} 3x > 0, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \geq 0, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 3x > 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{6}.$

10. а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$. а) Пусть исходное число оценок равно n и среднее их значение равно 3,5. Тогда $n > 1$ (иначе единственная исходная оценка оказалась бы равной «3,5») и после замены одной оценки «4» парой оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок равно

$$f(n) = \frac{3,5n + 4}{n + 1} = 3,5 + \frac{0,5}{n + 1} > 3,5,$$

причем $f(n) \leq f(2) = 3\frac{2}{3}$. Последнее значение достигается

при $n = 2$, когда исходные оценки – это «3» и «4»: тогда старое среднее значение оценок равно $\frac{3+4}{2} = 3,5$, а новое равно $\frac{3+3+5}{3} = 3\frac{2}{3}$.

б) Пусть среди исходных оценок доля оценок, отличных от «4», равна x , а среднее их значение равно $a \geq 1$. Тогда общее среднее значение всех оценок равно

$$ax + 4(1-x) = 3,5 \Rightarrow x = \frac{0,5}{4-a} > 0,$$

а после замены каждой оценки «4» парой оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок равно

$$\begin{aligned} \frac{3,5 \cdot 1 + 4(1-x)}{1+(1-x)} &= \frac{7,5-4x}{2-x} = \frac{7,5-4 \cdot \frac{0,5}{4-a}}{2-\frac{0,5}{4-a}} = \\ &= \frac{28-7,5a}{7,5-2a} = \frac{7,5}{2} - \frac{1}{8(7,5-2a)} = g(a) \leq g(1) = 3\frac{8}{11} \end{aligned}$$

(так как $7,5-2a = \frac{2-x}{4-a} > 0$). Последнее значение достигается при $a = 1$, когда исходные оценки – это «4», «4», «4», «4», «4» и «1»: тогда старое среднее значение оценок равно $\frac{1+5 \cdot 4}{6} = 3,5$, а новое равно $\frac{1+10 \cdot 4}{11} = 3\frac{8}{11}$.

Вариант 2

1. 15.

2. $y = -\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$. Указание. Если (x, y) – любая из точек пересечения данных графиков, т.е. решение системы $y = 2x^2 - 2x - 1$, $y = -5x^2 + 2x + 3$, то $5y + 2y = -6x + 1$.

3. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{3}{5} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Указание. Если $3\sin x + \cos x = 0$, то $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$. Аналогично, из равенства $\cos x - 3\sin x = 0$ следовало бы $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$, что невозможно. Из сказанного следует, что уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3\cos x (3\sin x + \cos x) = \pm \sin x (\cos x - 3\sin x), \\ \sin x \cos x \geq 0, \end{cases}$$

решая которую получаем ответ.

4. $23^\circ, 4\sin 67^\circ$; одинаковы. Из неравенств $AK < BK < CK$ следует, что отрезок KC пересекает окружность в точке A' ,

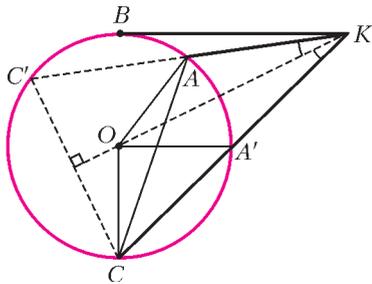


Рис. 10

а продолжение отрезка KA – в точке C' (рис.10), причем в силу теоремы о касательной и секущей, а также в силу свойства геометрической прогрессии имеем $KA' \cdot KC = KB^2 = KA \cdot KC \Rightarrow KA' = KA$.

Поэтому треугольники $КАО$ и $КА'О$ равны (по трем сторонам), а коль скоро $\angle AKC = 46^\circ \neq 0^\circ$, точки A', C' симметричны точкам A, C относительно прямой KO и

$$\angle AKO = \frac{1}{2} \angle AKC = 23^\circ.$$

Далее, $CC' \perp KO$, поэтому $\angle AC'C = \frac{\pi}{2} - \angle AKO = 67^\circ$ и по теореме синусов получаем

$$AC = 2 \cdot 2 \sin \angle AC'C = 4 \sin 67^\circ.$$

Наконец, по свойству вписанного угла имеем

$$\angle AOC = 2\angle AC'C = \pi - 2\angle AKO = \pi - \angle AKC,$$

следовательно, точки K, A, O, C лежат на одной окружности, а значит, вписанные в нее углы ACK и AOK равны.

5. 3. Указание. Перемножив подкоренные выражения, получим неравенство $-(x-1)^2(y-7)^2(y-x)^2 \geq 0$. Поэтому одна из скобок равна нулю. Осталось рассмотреть случаи $x = 1$, $y = 7$ и $x = y$.

6. $2 \arccos(\sqrt{3}-1)^{\frac{3}{2}}$. Через точку K , лежащую на общей образующей конусов и удаленную от их вершины O на расстояние 1 (рис.11), проведем перпендикуляр к этой образующей, который пересекает оси конусов в точках A и B .

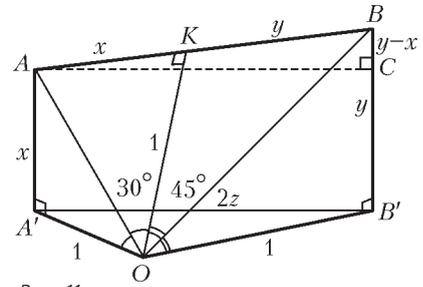


Рис. 11

Пусть A' и B' – проекции последних точек на одну из граней двугранного угла, величину которого обозначим 2φ . Тогда для пар равных прямоугольных треугольников $АОК$, $АОА'$ и $ВОК$, $ВОВ'$ имеем

$$OA' = OB' = OK = 1,$$

$$x = AA' = AK = OK \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$y = BB' = BK = OK \operatorname{tg} 45^\circ = 1,$$

а из прямоугольного треугольника ABC имеем

$$2z = A'B' = AC = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy},$$

откуда получаем

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot (x+y) \cdot 1, \quad S_{OA'B'} = \frac{1}{2} \cdot 2z \cdot \sqrt{1-z^2} = \sqrt{xy(1-xy)}.$$

Угол между плоскостями OAB и $OA'B'$ равен φ , поэтому

$$\cos \varphi = \frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \frac{2\sqrt{xy(1-xy)}}{x+y} = (\sqrt{3}-1)^{\frac{3}{2}}.$$

Вариант 3

1. $-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $(\frac{2}{5}; \frac{7}{9}]$. Указание. Поскольку $\frac{9x-7}{5x-2} = 2 - \frac{x+3}{5x-2}$, удобно выполнить замену $t = \frac{x+3}{5x-2}$.

3. В первом сосуде было 20 л спирта, во втором – 10 л.

4. $\frac{26+17\sqrt{2}}{4}$. Указание. По теореме Менелая для прямой BN и треугольника $АСМ$ получаем $\frac{AK}{KM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$,

откуда $KM = 2$.

5. $y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\max} = \sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. Указание. Ввиду периодичности функции $y = y(x)$ с периодом 2π достаточно рассмотреть ее на промежутке $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$. Поскольку $y(x) \geq 0$, функция $y(x)$ достигает минимального и максимального значений при тех же x , при которых принимает минимальное и максимальное значения соответственно функция $y^2(x)$, т.е.

$$\begin{aligned} y^2(x) &= \sin x + \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + 2\sqrt{\sin x \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)} = \\ &= 2\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) \cos \frac{5\pi}{12} + 2\sqrt{\sin^2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) - \sin^2 \frac{5\pi}{12}}. \end{aligned}$$

Далее, для любого $x \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right]$ выполняется равенство

$y^2(x) = y^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, следовательно, для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции $y^2(x)$ достаточно рассмотреть лишь $x \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right]$. На этом отрезке значения $\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ монотонно возрастают. Следовательно, монотонно возрастает и $y^2(x)$.

6. 30° . Рассмотрим две перпендикулярные прямой KL плоскости: P_1 , содержащую точку O_1 , и P_2 , проходящую через O_2 (рис.12). Поскольку K и L – точки касания, $K \in P_1$ и $L \in P_2$. Заметим, что P_1 и P_2 параллельны. Пусть O'_1 – проекция точки O_1 на P_2 , а O'_2 – проекция точки O_2 на плоскость P_1 . Тогда

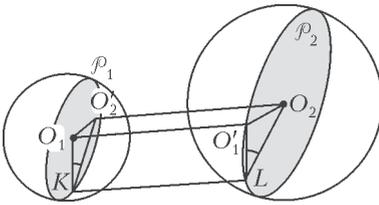


Рис. 12

$O_1O'_1 \parallel KL$, $O_2O'_2 \parallel KL$, $O_1O'_1 = O_2O'_2 = KL$. Отрезок $O_1O'_2$ лежит в плоскости P_1 , значит, $O_1O'_2 \perp KL$, поэтому $O_1O'_2 \perp O'_2O_2$, так что $O_1O'_2O_2O'_1$ – прямоугольник с диагональю O_1O_2 . Тогда из треугольника $O_1O'_2O_2$ следует $O_1O'_2 = 1$. Так как $O_1K \perp KL$, $O'_2K \perp KL$, то $\alpha = \angle O_1KO'_2$ – плоский угол двугранного угла с ребром KL , одна из граней которого содержит точку O_1 , а другая – O_2 . Теперь из треугольника $O_1KO'_2$, где $O_1K = \sqrt{3}$, $O'_2K = O_2L = 2$, по теореме косинусов получаем $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\alpha = 30^\circ$.

Вариант 4

1. $\frac{19\pi}{200}; \frac{131\pi}{200}$.
2. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.
3. $\frac{36}{\sqrt{13}}$.
4. $(-5; 20); (-5; 21)$.

5. $3 : 7$. Пусть l – длина бокового ребра призмы, k – расстояние между прямыми BB_1 и CC_1 , h – расстояние между прямой AA_1 и плоскостью CC_1BB_1 (рис.13). Тогда площадь параллелограмма CC_1BB_1 равна $S = kl$, а объем призмы

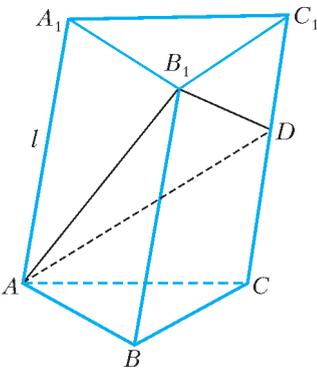


Рис. 13

$ABCA_1B_1C_1$ равен $V = \frac{1}{2}Sh$.

Если $\frac{CD}{CC_1} = \alpha$, то $CD = \alpha l$,

$DC_1 = (1 - \alpha)l$, площадь трапеции $CDBB_1$ равна

$\frac{1}{2}(\alpha l + l)k = \frac{\alpha + 1}{2}S$. Поэтому

объем пирамиды $ABCDB_1$

равен $\frac{1}{3} \frac{\alpha + 1}{2} Sh = \frac{\alpha + 1}{3} V$.

Таким образом, заданное отношение объемов равно

равно

$$\frac{\frac{\alpha + 1}{3} V}{V - \frac{\alpha + 1}{3} V} = \frac{\alpha + 1}{2 - \alpha} = \frac{13}{17}, \text{ откуда } \alpha = \frac{3}{10}, \frac{CD}{C_1D} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{3}{7}.$$

6. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Данный многочлен 4-й степени может быть квадратом только многочлена 2-й степени вида $x^2 + a$. Таким образом, согласно условию,

$$x^4 + 2^{3\sin \alpha} x^2 + x \sqrt{2^{1-\sin \beta} - \cos \gamma} + \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma \equiv x^4 + 2ax^2 + a^2,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} 2^{3\sin \alpha} = 2a, \\ \sqrt{2^{1-\sin \beta} - \cos \gamma} = 0, \\ \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma = a. \end{cases}$$

Из равенства $2^{1-\sin \beta} = \cos \gamma$ следует $2^{1-\sin \beta} \leq 1$, т.е. $\sin \beta \geq 1$. Таким образом, $\sin \beta = 1$, значит, $\cos \gamma = 1$. Поэтому из системы вытекает $a^2 = 2$, $a > 0$, так что $a = \sqrt{2}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Далее, так как $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\gamma = 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$, получаем

$$\sin\left(\alpha + \beta + \gamma\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вариант 5

1. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. $\log_3 5$.
3. 3.
4. $16\sqrt{2}$.
5. $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$.
6. aR .
7. Если $-3 < a \leq -2$, то одно решение; если $-2 < a \leq -1$, то два решения; если $-1 < a < 0$, то три решения.

Указание. Отметим, что $x = \frac{2}{a}$ – корень данного уравнения при всех $a \in (-3; 0)$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = 2a$, $x_2 = \frac{a}{2}$ должны удовлетворять условию $x \geq \frac{2}{a}$. Учитывая еще возможные совпадения ($x_1 = \frac{2}{a}$; $x_2 = 2a$), получаем ответ.

8. $32\sqrt{3}$. *Указание.* Если сфера касается сторон $\triangle LMN$ (рис.14), то ее центр находится на перпендикуляре OH к плоскости LMN , проходящем через центр H окружности, вписанной в $\triangle LMN$ (геометрическом месте точек, равноудаленных от сторон треугольника).

На этой же прямой OH по другую сторону от плоскости LMN находится такая точка S , что плоскости SLM , SMN и SNL касаются сферы.

Действительно, если плоскость SMN касается сферы, то $OD \perp MN$ и $OD \perp SD$. Если заданы $\triangle LMN$ и радиус сферы, то в прямоугольном $\triangle SOD$ известны OD и DH , значит, известна гипотенуза SO . Такая же гипотенуза SO будет и в двух других аналогичных треугольниках, связанных с плоскостями SLM и SNL .

Таким образом, пирамида $SLMN$ является правильной.

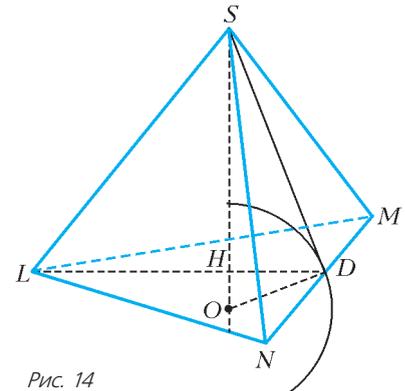


Рис. 14

Вариант 6

1. $-\frac{23}{4}; -1; 1; 6$.
2. $(-\infty; -6) \cup [-2\sqrt{5}; -4) \cup \{-2\}$.
3. 1 и 4.
4. $\sqrt{3}; 3$.
5. $\left(-\frac{91}{17}; \frac{44}{17}\right)$.
6. $\arctg 5 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -2\sin^2 x + 5\sin 2x = 0, \\ 0 < \cos x < 1. \end{cases}$$

7. 251. *Указание.* Пусть n – число книг в фонде библиотеки на начало 2005 года. Тогда к концу 2005 года число книг рав-

нялось $1,004n = \frac{251}{5^3 \cdot 2} n$, а к концу 2006 года составляло $1,008 \frac{251}{5^3 \cdot 2} n = \frac{63 \cdot 251}{5^6} n$, причем оба полученных выражения – целочисленные. Поэтому число n делится на $5^3 \cdot 2$ и на 5^6 , а значит, и на $5^6 \cdot 2 = 31250$. По условию $n \leq 50000$, так что $n = 31250$.

8. $(-1; 0] \cup \left\{ \frac{2+2\sqrt{13}}{3} \right\}$. Если $a = 0$, то $2ax^2 + (a+4)x + (a+1) = 0 \Leftrightarrow 4x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$,

поэтому $a = 0$ удовлетворяет требованию задачи. Если $a \neq 0$, то нас интересуют только три случая: 1) уравнение имеет ровно один корень, т.е.

$$D = 0 \Leftrightarrow (a+4)^2 - 4a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{3},$$

причем этот корень отрицателен, т.е.

$$-\frac{a+4}{2a} < 0 \Leftrightarrow a = \frac{2+2\sqrt{13}}{3};$$

2) уравнение имеет два корня разных знаков, т.е. свободный член приведенного квадратного уравнения отрицателен (откуда следует неравенство $D > 0$), т.е.

$$\frac{a+1}{2a} < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 0;$$

3) один корень равен нулю, т.е.

$$a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1,$$

а второй, равный при этом 3, отрицателен, что невозможно. Собирая все найденные значения a , получаем ответ.

Вариант 7

1. -16; 18. 2. $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 9]$. 3. В 2 раза.

4. $\frac{\pi}{56} + \frac{\pi n}{28}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, n, k \in \mathbf{Z}$.

5. $\left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup (1; +\infty)$. Указание. После замены $t = \log_x 16$ неравенство приводится к виду $t^3 + 8t^2 + 16t \geq 0$.

6. (1, 3), (3, 1). Указание. Заменой $u = x + y, v = xy$ система приводится к виду

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ u^2 - v = 13. \end{cases}$$

7. 2; 4. Указание. Из равенства

$$(5 - 2\sqrt{6})^x = \frac{1}{(5 + 2\sqrt{6})^x} = (5 + 2\sqrt{6})^{-x}$$

следует, что если пара $(x; y)$ удовлетворяет системе, то пара $(-x; y)$ – тоже решение системы.

Поэтому если решение единственно, то $x = 0$ и

$$\begin{cases} y - |y| + 5a - 10 = 0, \\ (a - 4)y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем два возможных значения $a = 2$ и $a = 4$. Проверка показывает, что оба значения удовлетворяют условию.

8. 12.

Вариант 8

1. [9; 12]. 2. $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3. $\{-2\} \cup [2; 6]$. 4. 4; 6.

5. $(2 - \sqrt{3}; 3 - \sqrt{7}] \cup [3 + \sqrt{7}; +\infty)$.

6. 24. Указание. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ – это число $S_{15} = 15a_8$, кратное 60.

7. $\max(x^2 + y^2) = 8$, достигается при $z = 5$.

Из данной системы следует, что числа x и $-y$ являются корнями уравнения

$$t^2 - (z-1)t + (z^2 - 7z + 14) = 0.$$

Это уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант трехчлена неотрицателен, т.е. $\frac{11}{3} \leq z \leq 5$.

Искомая сумма

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x-y)^2 + 2xy = \\ &= (z-1)^2 - 2(z^2 - 7z + 14) = \\ &= -(z-6)^2 + 9, \end{aligned}$$

при этих значениях z возрастает, так что

$$\max(x^2 + y^2) = f(5) = 8.$$

8. 1 : 2. Пусть K и L (рис.15) – центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB данного куба с ребром длины a , G – середина ребра CC_1 . Точка K принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и прямую CC_1 . Обозначим

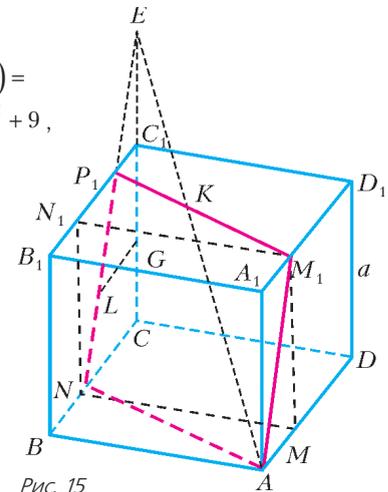


Рис. 15

через E точку пересечения

прямых AK и CC_1 . Так как $C_1K = \frac{1}{2}CA$, то $C_1E = CC_1 = a$.

Точки E и L принадлежат грани B_1C_1CB , следовательно, прямая EL пересекает ребра B_1C_1 и BC в точках, которые обозначим через P_1 и N . Из треугольников ELG и ECN находим

$$\frac{P_1C_1}{LG} = \frac{EC_1}{EG} = \frac{2}{3}, \quad CN = 2C_1P_1, \text{ так что } C_1P_1 = \frac{1}{3}a, \quad CN = \frac{2}{3}a.$$

Пусть M_1 – точка пересечения прямой P_1K с ребром A_1D_1 , тогда $A_1M_1 = \frac{1}{3}a$. Итак, сечение куба, о котором говорится в

условии задачи, – четырехугольник ANP_1M_1 . Поскольку, очевидно, $P_1N = M_1A$ и $P_1N \parallel M_1A$, то ANP_1M_1 – параллелограмм.

Обозначим через M и N_1 проекцию точки M_1 на ребро AD и проекцию N на B_1C_1 соответственно. Объем V многогранника $ABB_1A_1M_1P_1N$ равен объему прямоугольного параллелепипеда $ABB_1A_1MNN_1M_1$, поскольку получается из последнего объема вычитанием объема пирамиды M_1AMN и добавлением

равного вычтенному объема пирамиды $NM_1N_1P_1$. Значит, $V = \frac{1}{3}a^3$. Таким образом, отношение объемов, на которые делится данный куб, равно 1 : 2.

Вариант 9

1. -25. 2. $(-\infty; -8) \cup (-5; -2) \cup [0; +\infty)$.

3. 6, 7, ..., 14. 4. (1; -1), (-3; 3).

5. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, (-1)^k \arcsin \frac{3}{5} - \frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in \mathbf{Z}$. Указание. За

меной $s = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ уравнение приводим к виду

$$5(1 - 2s^2) = 4s - 1.$$

6. $AB = AC = 13$.

7. $(-\infty; -7] \cup (-4; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; +\infty)$. Указание. Так как $\lg u - \lg v$ того же знака, что и $u - v$ при $u, v > 0$, исходное

неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{(2x^2 + 9x - 21) - (x^2 - x)}{(x+3)^2 - 1} \geq 0, \\ 2x^2 + 9x + 21 > 0, \\ x^2 - x > 0, \\ (x+3)^2 > 0. \end{cases}$$

8. $c = -4\sqrt{2}$, $-4 < c \leq 4$. График левой части

$$y = -\sqrt{16 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0, \\ x^2 + y^2 = 4^2 \end{cases}$$

исходного уравнения есть нижняя полуокружность с центром в начале координат и радиусом 4 (рис.16), а график правой

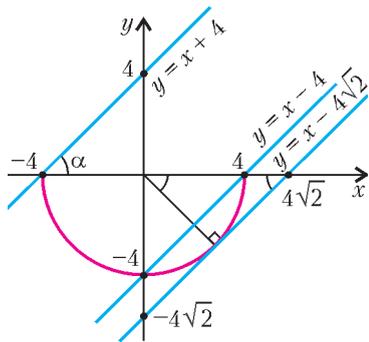


Рис. 16

части $y = x + c$ — прямая, пересекающая ось ординат в точке c под углом $\alpha = 45^\circ$. Эти графики имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда прямая $y = x + c$ либо совпадает с прямой $y = x - 4\sqrt{2}$, либо лежит между прямыми $y = x + 4$ и $y = x - 4$ (не включая последнюю), т.е. когда $c = -4\sqrt{2}$ или $-4 < c \leq 4$.

Вариант 10

1. При $x = -7$ $y = 5$.
2. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{5\pi}{8} + 2\pi k, n, k \in \mathbf{Z}$.
3. $(-\infty; \log_3 5) \cup (\frac{3}{2}; \log_2 3)$. Указание. Неравенство преобразуется к виду $(x - \log_2 3)(x - \log_3 5)(2x - 3) < 0$.
4. 27 тысяч рублей.
5. $10\sqrt{3}$.
6. $a \in (3 - \sqrt{5}; \frac{7}{5}) \cup (5; 10]$. Достаточно рассмотреть функцию $f_1(x) = x \cdot |x - 2|$ (константа $\arcsin \frac{a}{10}$ привносит лишь ограничения на множество допустимых значений параметра: $|a| \leq 10$).
Функция

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{при } x \geq 2, \\ -x^2 + 2x & \text{при } x < 2 \end{cases}$$

возрастает на каждом из множеств $(-\infty; 1]$, $[2; +\infty)$.
Корни данного в условии квадратного трехчлена с параметром равны $x_1 = a^2 - 6a + 6$, $x_2 = 8 - 2a$. Сразу же исключим ситуацию, когда отрезок с концами в x_1 и x_2 вырождается в точку:

$$a_2 - 6a + 6 = 8 - 2a \Leftrightarrow a = 2 \pm \sqrt{6}.$$

Функция $f_1(x)$ монотонно возрастает на отрезке числовой оси, соединяющем точки x_1 и x_2 , тогда и только тогда, когда указанный отрезок целиком принадлежит либо первому промежутку возрастания, либо второму, так что следует рассмотреть два случая:

- а) $\begin{cases} a^2 - 6a + 6 \leq 1, \\ 8 - 2a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{5} \leq a \leq 5;$
- б) $\begin{cases} a^2 - 6a + 6 \geq 2, \\ 8 - 2a \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 3 - \sqrt{5}.$

Для получения ответа осталось исключить из множества $|a| \leq 10$, $a \neq 2 \pm \sqrt{6}$ найденные в случаях а) и б) значения.

7. 2. Плоскость параллелограмма $ABCD$ проходит через центр O сферы, поскольку по условию точка O принадлежит прямой AD . Следовательно, в сечении сферы получается окружность радиуса R , равного радиусу сферы, с центром в той же точке. Так как диагонали параллелограмма связаны соотношением $AC > BD$, то угол ABC — тупой, значит, точка D лежит внутри окружности (рис.17).

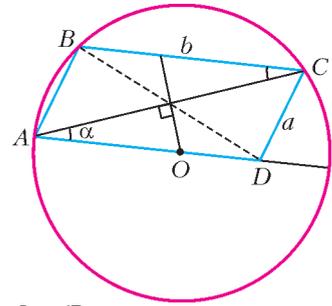


Рис. 17

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $\angle ACB = \angle CAD = \alpha$. Параллельные прямые AD и BC отсекают от окружности равные дуги, поэтому

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\pi - 4\alpha) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \quad \angle ABC = \frac{1}{2}(\pi + 2\alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

По теореме синусов для треугольника ABC получаем

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = 2R \cos 2\alpha,$$

$$AC = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = 2R \cos \alpha, \quad \text{т.е. } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{R}.$$

Тогда

$$a^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2 - 12,$$

$$b^2 = 4R^2 (2 \cos^2 \alpha - 1)^2 = 4R^2 \left(\frac{6}{R^2} - 1 \right)^2.$$

Длины сторон параллелограмма и его диагонали связаны формулой

$$2(a^2 + b^2) = AC^2 + BD^2, \quad \text{т.е. } a^2 + b^2 = 8.$$

Подставляя в это равенство выражения для a^2 и b^2 , после упрощений получаем уравнение

$$2R^4 - 17R^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = 4 \\ R^2 = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, $R = 2$ или $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Значение $R = 2$ не подходит, поскольку в этом случае $a = b = 2$, т.е. $ABCD$ — ромб, что исключено условием задачи.

Для $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$ имеем $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$. Тогда площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = ab \sin \angle ABC = ab \frac{AC}{2R} = 2\sqrt{2}.$$

Далее, вершина пирамиды S по условию равноудалена от концов диагонали AC , следовательно, S принадлежит плоскости \mathcal{P} , ортогональной к AC и проходящей через середину этого отрезка. Плоскость \mathcal{P} содержит центр сферы, кроме того она перпендикулярна плоскости параллелограмма. Стало быть, \mathcal{P} пересекает сферу по окружности радиуса R с центром в точке O . Вершина S находится на этой окружности, поэтому наибольший объем пирамиды достигается в случае, когда ее высота принимает максимально возможное значение, т.е. когда проекция точки S на плоскость $ABCD$ попадает в центр сферы. Таким образом, наибольшее значение высоты пирамиды равно R , а максимальный объем пирамиды равен

$$V_{\max} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot R = 2.$$

Вариант 11

1. $\{1\} \cup [2; +\infty)$. 2. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 3. 2. 4. 1. 5. 20%.

6. $(12; -4); (2; -4); (10; -2); (4; -2); (10; -6); (4; -6)$.

Указание. Уравнение приводится к виду

$$(x-7)^2 + 4(y+4)^2 = 25.$$

7. 25; $\frac{5}{4}\sqrt{143}$. Указание. Треугольники ABC и BEC подобны.

8. $a \in (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$. Указание. Пусть $t = 2^x$ ($t > 0$), тогда данное уравнение приводится к виду

$$t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2(a-1)t - (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 3t + t - a + 1)(t^2 - 3t - t + a - 1) = 0.$$

Таким образом, требуется найти все значения параметра a , при которых два квадратных трехчлена

$$t^2 - 2t - a + 1 \text{ и } t^2 - 4t + a - 1$$

имеют в совокупности три различных положительных корня.

Вариант 12

1. $\{-3\} \cup [-2; 4]$. 2. 20%. 3. $[-4; -2) \cup (5; 10]$.

4. $\left(4; 1; \pm \arccos \frac{1}{5} - \arctg \frac{4}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$. Указание. Из неотрицательности подкоренных выражений первых двух радикалов следует, что $x = 4, y = 1$.

5. $2\sqrt{10} - 5$. Указание. Используя формулу для медианы, найдите BC и примените теорему косинусов к треугольнику PBQ .

6. $a \in (2; 7)$. Указание. Необходимым и достаточным условием существования решений квадратного относительно a неравенства является

$$(3x-12)^2 - 4(6x^2 - 3x + 35) > 0,$$

т.е.

$$-2 - \frac{8}{\sqrt{15}} < x < -2 + \frac{8}{\sqrt{15}}.$$

Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x , для каждого из которых надо найти соответствующие значения параметра a .

7. $V_{QKMN} = \frac{\sqrt{77}}{12} < V_{SABC} = \frac{3}{4}$. Пирамида $SABC$ – правильная, так как ее основание – равносторонний треугольник ABC , а боковые ребра имеют равную длину. Легко вычисляется ее объем, он равен

$$V_{SABC} = \frac{3}{4}.$$

Для вычисления объема пирамиды $QKMN$ используем прием, связанный с достраиванием тетраэдра до параллелепипеда. Проведем через каждое ребро пирамиды плоскость параллельно противоположному ее ребру. Полученные три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед $QENFLKPM$, диагоналями граней которого являются ребра исходного тетраэдра (рис.18). С другой стороны, тетраэдр получается отсечением от параллелепипеда четырех треугольных пирамид, примыкающих к граням $QKMN$, объем каждой из которых равен одной шестой объема V параллелепипеда. Таким образом, объем исходного тетраэдра равен

$$V_{QKMN} = \frac{1}{3}V.$$

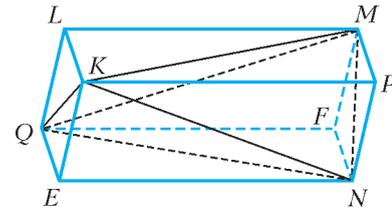


Рис. 18

Диагонали KN и QM противоположных граней параллелепипеда равны, следовательно, параллелограммы $EKPN$ и $QLMF$ – прямоугольники. Аналогично, прямоугольниками являются грани с равными диагоналями QK и MN . Третья пара граней – параллелограммы с диагоналями $QN = 2$,

$KM = \sqrt{3}$ и сторонами, длины которых обозначим через a и b . Если одну из этих граней принять за основание, то ребро, общее для смежных прямоугольных граней, – высота параллелепипеда. Обозначим его длину через c . Пусть φ – угол между диагоналями основания $EQFN$, тогда

$$V = c \cdot S_{EQFN} = \frac{c}{2} QN \cdot EF \sin \varphi = c\sqrt{3} \sin \varphi.$$

Числа a, b и c связаны уравнениями (первые два выражают теорему Пифагора, последнее – равенство параллелограмма)

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 4, \\ b^2 + c^2 = 3, \\ 2(a^2 + b^2) = 4 + 3, \end{cases} \text{ откуда } a = \frac{3}{2}, b = \frac{\sqrt{5}}{2}, c = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Из треугольника OEN , где O – точка пересечения EF и QN ,

а $EN = a$, по теореме косинусов получаем $\cos \varphi = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$,

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Итак, } V_{QKMN} = \frac{1}{3}V = \frac{c}{\sqrt{3}} \cdot \sin \varphi = \frac{\sqrt{77}}{12}.$$

Вариант 13

1. 15. 2. $(-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k, n, k \in \mathbf{Z}$.

3. $\frac{13}{2}$. Указание. Треугольник со сторонами заданной длины – прямоугольный. Поэтому возможны лишь 4 ситуации, отвечающие условиям задачи: в двух из них диагональю выпуклого четырехугольника является гипотенуза, в двух оставшихся – поочередно каждый катет.

4. $\left(0; \frac{1}{4\sqrt{2}}\right] \cup \left[4\sqrt{2}; 16 \cdot 4\sqrt{3}\right]$. Указание. Если $t = \log_4 x$, то

данное неравенство принимает вид $\sqrt{t^2 - 2} \geq 2t - 3$.

5. Количество бензозаправочных станций в северном и восточном районах одинаково.

6. $(a; b) = \left(\frac{t^2}{|t|+2}; t\right)$, где $t \neq 0$, либо $(a; b) = \left(\frac{t^2}{|t|-2}; t\right)$, где $|t| > 2$. 7. 49

Вариант 14

1. 1000000000. Указание. Выполните замену $l = \sqrt{\lg y}$.

2. $\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbf{Z}$. Легко угадываются решения

$\sin x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, и $\sin x = 0$, т.е. $x = \pi n$. Если же $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$, то $\cos^4 x + \sin^3 x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3. $(-6; -5)$ и $(4; 5)$, $(4; 15)$ и $(14; 5)$, $(-16; -5)$ и $(-6; -15)$.

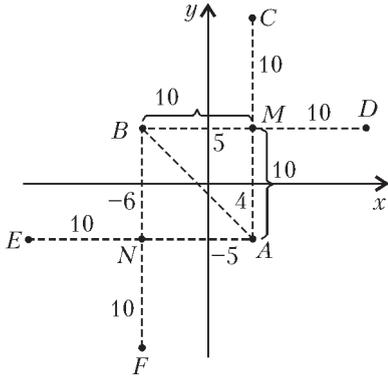


Рис. 19

Пусть $y = ax + b$ – уравнение прямой l , проходящей через данные точки A и B (рис.19). Тогда

$$\begin{cases} -5 = 4a + b, \\ 5 = -6a + b \end{cases} \Rightarrow a = -1,$$

поэтому прямая l пересекает оси координат под углом 45° .

Если A и B – концы диагонали квадрата, то его стороны параллельны осям координат, по-

этому оставшиеся вершины расположены в точках $M = (4; 5)$ и $N = (-6; -5)$. Если же A и B – соседние вершины квадрата, то диагонали квадрата параллельны осям координат и равны по 20, причем квадрат можно расположить в любой из двух полуплоскостей, на которые прямая l делит плоскость. Соответственно, получаем координаты оставшихся вершин: либо $C = (4; 15)$ и $D = (14; 5)$, либо $E = (-16; -5)$ и $F = (-6; -15)$.

4. $[-2; 0)$. 5. $\frac{1}{3} Q^2 \sqrt{\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \gamma}$.

6. $\left(-\frac{4}{5}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right]$. *Указание.* Поскольку числа $\operatorname{lg} u$ и $u - 1$, а также числа $\arcsin x - \frac{\pi}{6}$ и $x - \frac{1}{2}$ имеют одинаковые знаки, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(x^2 + \frac{9}{25} - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0, \\ |x| \leq 1. \end{cases}$$

7. $\frac{8R^4}{S}$. Прямоугольные треугольники MNK и HCD (рис.20) подобны, так как у них $\angle N = \angle C$ (углы со взаимно

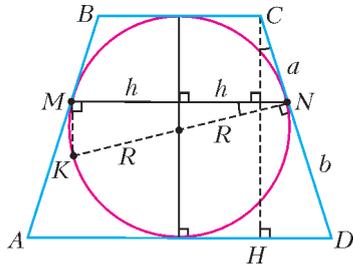


Рис. 20

перпендикулярными сторонами). Поэтому

$$\frac{2R}{2h} = \frac{a+b}{2R} \Rightarrow a+b = \frac{(2R)^2}{2h},$$

а площадь данного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot 2R \Rightarrow 2h = \frac{S}{R},$$

откуда площадь трапеции с основаниями $2a$ и $2b$ (по свойству касательных) и высотой $2R$ равна

$$2R \frac{2a+2b}{2} = 2R \frac{(2R)^2}{2h} = \frac{8R^4}{S}.$$

8. 1 и 6, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 3, -1 и 2 или -2 и 9. Обозначим приписанную цифру через k . Тогда если $n > 0$, то

$$(10n + k) + n^2 - 3 = 14n,$$

откуда $k = -n^2 + 4n + 3$ и при $n = 1, 2, 3, 4$ получаем $k = 6, 7, 6, 3$, а при $n \geq 5$ имеем $k = 7 - (n-2)^2 < 0$.

Если же $n < 0$, то

$$(10n - k) + n^2 - 3 = 14n,$$

откуда $k = n^2 - 4n - 3$ и при $n = -1, -2$ получаем $k = 2, 9$, а при $n \leq -3$ имеем $k = (n-2)^2 - 7 < 9$.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Обозначим расстояние между точками O_1 и C через x . Это расстояние должно удовлетворять соотношению

$h = x \cos \beta + x \sin \beta \operatorname{ctg}(\pi - \alpha - \beta)$, откуда

$$x = \frac{h \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

В течение малого промежутка времени τ , начиная с заданного момента, зависимость величины угла β от времени имеет вид $\beta(\tau) = \beta - u_1 \tau / L$. При этом величина угла α изменяется по закону $\alpha(\tau) = \alpha + (u_1 + u_2) \tau / L$. По определению, модуль скорости движения точки C вдоль стержня O_1C равен модулю первой производной координаты x по времени. Следовательно, модуль искомой скорости данной точки равен

$$v = x' = h \frac{|u_2 \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) - (u_1 + u_2) \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)|}{L \sin^2 \alpha}.$$

2. При решении задачи будем считать, что клин неподвижен относительно лабораторной системы отсчета, ось X которой параллельна стержню и направлена вниз по клину. В тот момент когда на гладкой поверхности клина оказывается часть стержня массой βm , где $0 \leq \beta \leq 1$, на нее вдоль оси X действует составляющая силы тяжести $\beta mg \sin \alpha$ и сила натяжения со стороны верхней части стержня, направленная противоположно оси X , и равная $T(\beta)$. Запишем уравнение движения нижней части стержня вдоль оси X :

$$\beta ma = \beta mg \sin \alpha - T(\beta),$$

где a – ускорение любой точки стержня вдоль оси X , так как стержень твердый и движется поступательно. В рассматриваемый момент на верхнюю часть стержня вдоль оси X наряду с составляющей силы тяжести $(1 - \beta) mg \sin \alpha$ со стороны клина действует направленная противоположно оси X сила сухого трения скольжения $\mu(1 - \beta) mg \cos \alpha$, а со стороны нижней части стержня действует направленная вдоль оси X сила натяжения $T(\beta)$. Уравнение движения этой части стержня в проекции на ось X имеет вид

$$(1 - \beta) ma = (1 - \beta) mg \sin \alpha + T(\beta) - \mu(1 - \beta) mg \cos \alpha.$$

Решая совместно составленные уравнения, получаем

$$T = \beta(1 - \beta) \mu mg \cos \alpha.$$

Видно, что сила натяжения стержня в сечении, которое находится на границе между гладкой и шероховатой частями клина, зависит от значения коэффициента β . Докажите самостоятельно, что она будет максимальной при $\beta = 0,5$, т.е. когда одна половина стержня окажется на гладкой нижней части клина, а другая половина – на его шероховатой верхней час-

ти. В таком случае

$$T_{\max} = 0,25\mu mg \cos \alpha .$$

3. Пусть M – масса груза, m – масса стержня, а L – его длина (рис.21). Обозначим через F силу, действующую на стержень

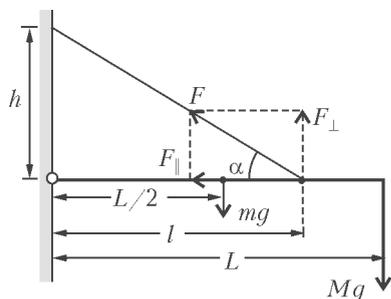


Рис. 21

зень со стороны проволоки. Запишем условие равновесия стержня:

$$F l \sin \alpha = (M + 0,5m) g L .$$

Поскольку $h = l \operatorname{tg} \alpha$, то

$$F = \frac{(M + 0,5m) g L}{h \cos \alpha} .$$

По закону Гука удлинение проволоки равно $\Delta l = Fl_0/(ES)$, где E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения, а l_0 – длина недеформированной проволоки. Согласно обозначениям на рисунке, $(l_0 + \Delta l) \sin \alpha = h$. По условию задачи проволока жесткая, следовательно, нужно считать, что $\Delta l \ll l_0$, а потому

$$\Delta l = \frac{(2M + m) g L l_0}{(l_0 + \Delta l) E S \sin 2\alpha} \approx \frac{(2M + m) g L}{E S \sin 2\alpha} .$$

Из этого выражения ясно, что минимальным удлинением жесткой проволоки будет при $\sin 2\alpha \approx 1$, т.е. при $\alpha \approx 45^\circ$. Таким образом, искомое расстояние

$$h \approx l = 30 \text{ см} .$$

4. После одновременного отпущения грузов, смещенных от положений равновесия на одинаковые расстояния, центр масс рассматриваемой системы, совпадающий с центром n -угольника, т.е. точка O на рисунке

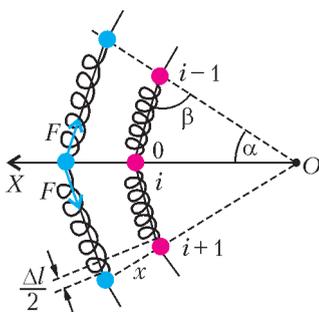


Рис. 22

закону Гука модуль силы упругости каждой пружины равен $F = k\Delta l$, где Δl – удлинение пружины. Используя обозначения на рисунке, получим, что $\Delta l = 2x \cos \beta$, причем $2\beta = \pi - \alpha$, где $\alpha = 2\pi/n$.

Равнодействующая всех сил, действующих на каждый груз, направлена вдоль прямой, соединяющей этот груз с точкой O . Модуль этой равнодействующей равен $2F \cos \beta$. Следова-

тельно, уравнение движения любого из грузов в проекции на указанную прямую, например на ось X для i -го груза, можно представить в виде

$$m\ddot{x} = -2F \cos \beta = -4kx \cos^2 \left(\frac{(n-2)\pi}{2n} \right) .$$

Решением этого уравнения, как известно, является гармоническая функция, период которой равен

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\cos \frac{(n-2)\pi}{2n} \right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

5. По условию задачи на участке 1–2 газ получил от нагревателя количество теплоты Q_{12} , равное приращению его внутренней энергии ΔU_{12} , т.е. $Q_{12} = \Delta U_{12} = 4$ кДж. Следовательно, процесс 1–2 – изохорный. На участке 2–3 газ не обменивался теплом с окружающими телами, т.е. процесс 2–3 – адиабатный. На участке 3–1 внутренняя энергия газа осталась неизменной, т.е. это изотермический процесс. На этом участке газ отдал нагревателю количество теплоты, модуль которого равен $Q_{31} = 3$ кДж. По определению КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12}} = 0,25 .$$

6. При решении задачи будем считать, что температура, при которой проводится опыт, существенно меньше критической температуры воды. Тогда плотность насыщенного пара можно считать много меньшей плотности воды в сконденсированном состоянии, а потому объемом воды по сравнению с объемом пара можно пренебречь. Будем также считать, что уравнения состояния сухого воздуха и паров воды вплоть до точки насыщения совпадают с уравнением состояния идеального газа. Если давление пара в начальном состоянии p_n , а давление воздуха $x p_n$, то начальное давление смеси в цилиндре будет $p_0 = (1+x)p_n$. После изотермического уменьшения объема согласно условию задачи давление смеси возрастает в n раз и становится равным $n p_0 = (1+kx)p_n = n(1+x)p_n$. Следовательно,

$$x = \frac{n-1}{k-n} = 1, \text{ а } p_0 = 2p_n .$$

Масса воды в начальном состоянии была равна массе пара, значит, вся вода испарится, если объем смеси увеличится в два раза. При этом конечное давление под поршнем станет равным

$$p_k = p_n + 0,5x p_n = 1,5p_n .$$

Решая совместно два последних уравнения, получаем ответ:

$$\frac{p_k}{p_0} = 0,75 .$$

7. После сообщения внутренним пластинам противоположных по знаку зарядов, модули которых равны q , при разомкнутых внешних пластинах электростатическая энергия системы станет равной

$$W_0 = \frac{q^2}{2C} ,$$

где $C = \epsilon_0 S/d$ – емкость плоского конденсатора, образованного внутренними пластинами, а ϵ_0 – электрическая постоянная. После соединения внешних пластин их потенциалы должны стать одинаковыми. При этом на обращенных друг к другу поверхностях внутренних пластин останутся равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. Пусть модуль этих зарядов равен q_1 , а модуль зарядов на внешних поверхностях этих пластин равен q_2 . Согласно закону сохранения заряда, должно выполняться соотношение $q = q_1 + q_2$. При

этом модуль разности потенциалов между внутренними пластинами станет равным $U_1 = q_1/C$, а модуль разности потенциалов между крайней и ближайшей к ней внутренней пластиной будет равен $U_2 = q_2/C$. Поскольку внешние пластины соединены между собой, разность потенциалов между ними установится равной нулю, т.е. в конечном состоянии должно выполняться соотношение $2U_2 - U_1 = 0$. Следовательно, $q_1 = 2q/3$, а $q_2 = q/3$. При этом электростатическая энергия системы будет равна

$$W_k = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{2q_2^2}{2C} = \frac{q^2}{3C}.$$

По условию задачи потерями энергии на излучение, имевшее место при перераспределении зарядов по проводникам системы, следует пренебречь. Поэтому согласно закону сохранения энергии,

$$Q = W_0 - W_k = \frac{q^2}{6C}.$$

Из этого соотношения следует, что модуль зарядов внутренних пластин равен

$$q = \sqrt{\frac{6QS\varepsilon_0}{d}}.$$

8. При вращении металлического стержня вокруг вертикальной оси на свободные носители заряда, имеющиеся в нем, со стороны магнитного поля действует магнитная составляющая силы Лоренца. Действие этой силы можно учесть, считая, что на свободные носители заряда действуют сторонние силы, ЭДС которых можно вычислить по закону электромагнитной индукции.

Для вычисления ЭДС учтем, что за малое время τ стержень «заметает» площадь $\Delta S = 0,5Rv\tau$, где $v = \omega R \sin \alpha$ – скорость движения конца стержня, касающегося полусферы. Поэтому модуль изменения магнитного потока через эту поверхность за указанное время равен

$$\Delta\Phi = B\Delta S \sin \alpha = 0,5\omega BR^2\tau \sin^2 \alpha.$$

Следовательно, модуль искомой ЭДС индукции равен

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\tau} = 0,5BR^2\omega \sin^2 \alpha.$$

Сила тока, протекающего через резистор, согласно закону Ома равна $I = \varepsilon/r$, а выделяющаяся в нем мощность по закону Джоуля–Ленца составляет

$$P = I^2 r = \frac{\varepsilon^2}{r} = \frac{0,25B^2 R^4 \omega^2 \sin^4 \alpha}{r}.$$

9. Поскольку внутренним сопротивлением источника тока по условию задачи следует пренебречь, в резисторе в течение времени τ выделится количество теплоты $Q_1 = \varepsilon^2 \tau / R$. При этом модуль скорости нарастания силы тока через катушку остается постоянным и удовлетворяет условию $\varepsilon = I'L$. Поэтому в момент отключения источника сила тока через катушку равна $I(\tau) = \varepsilon \tau / L$. После отключения источника вся энергия магнитного поля, созданного токами в катушке, преобразуется в количество теплоты $Q_2 = 0,5LI^2(\tau)$, которое выделяется в резисторе. По условию задачи $Q_1 = Q_2$, т.е.

$$\frac{\varepsilon^2 \tau}{R} = \frac{0,5\varepsilon^2 \tau^2}{L}.$$

Следовательно, искомая индуктивность катушки равна $L = 0,5R\tau$.

В заключение следует отметить, что полученный ответ не зависит от ЭДС источника.

10. На рисунке 23 показано построение двух действительных изображений стержня. Для нахождения изображения стержня

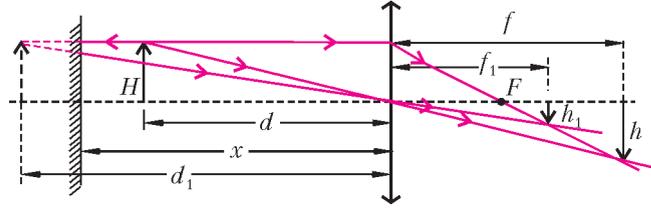


Рис. 23

в плоском зеркале мы воспользовались тем, что это изображение получается за зеркалом на расстоянии, равном расстоянию между предметом и зеркалом, а его размер равен размеру предмета. Для построения изображения h самого стержня и изображения h_1 отражения стержня в зеркале линзой мы использовали свойство лучей, проходящих вдоль побочных оптических осей тонкой линзы, и свойство луча, падающего на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси. Из рисунка следует, что

$$\frac{h}{H} = \frac{f}{d}, \quad \frac{h_1}{H} = \frac{f_1}{d_1}, \quad 2(x-d) + d = d_1$$

причем, согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}.$$

Из приведенных соотношений получается, что

$$k = \frac{h}{h_1} = \frac{d_1 f}{d f_1} = \frac{d_1 - F}{d - F} = 2 \frac{x - F}{d - F},$$

или

$$(k+1)(d-F) = 2(x-F).$$

Решая последнее уравнение, находим искомое расстояние:

$$x = 0,5((k+1)d - (k-1)F).$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

$$1. F(t) = F_0 \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + h^2}} \frac{\sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 + h^2}}{l_0 - v_0 t}.$$

$$2. m = \rho S h \left(1 + \frac{v}{g\tau}\right) = 50,5 \text{ г}.$$

$$3. v_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + 4v_0^2} - u \right), \text{ где } u = \frac{(v_0^2 - v_1^2) \sin \alpha_2}{v_1 \sin \alpha_1}.$$

$$4. T_3 = \sqrt{\frac{4T_2^2 - T_1^2}{3}}. \quad 5. h \geq \frac{p_0}{\rho g m} (\rho V_0 - m) = 10 \text{ м}.$$

$$6. N = \frac{\rho V}{\tau} \left(gh + \frac{V^2}{2S^2 \tau^2} \right). \quad 7. s = \frac{\pi^2 a m}{2k}.$$

$$8. \tau = \frac{\Delta p V}{p_0 S} \sqrt{\frac{M}{2RT}} \approx 241 \text{ с}. \quad 9. Q = 2RT_0(n^2 - 1) = 6225 \text{ Дж}.$$

$$10. x = \frac{l}{2} \text{ при } l \leq L, \quad x = l - \frac{L}{2} \text{ при } L \leq l \leq 3L/2, \quad x = L \text{ при } 2L > l > 3L/2.$$

$$11. v = \sqrt{2gh + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{mh}} \approx 0,2 \text{ м/с.}$$

$$12. \tau = \frac{24d^2 \varepsilon_0 \Phi}{25IR} \approx 133 \text{ мкс.}$$

$$13. Q = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(C_2 + C_1 \frac{R^2}{(R+r)^2} \right) = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

$$14. U_{12} \approx \frac{1}{2} U (\alpha_1 - \alpha_2) t. \quad 15. I = \frac{Bl(v_1 R_2 + v_2 R_1)}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}.$$

$$16. U_{\max} = 2\varepsilon - U_0 \text{ при } U_0 < \varepsilon, \quad U_{\max} = U_0 \text{ при } U_0 \geq \varepsilon.$$

$$17. d_2 = d_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad 18. d = F \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{F}{\sqrt{3}}.$$

$$19. h = H \frac{2F - L}{3F - L}. \quad 20. r = \sqrt{\frac{\lambda R}{n}} \approx 2 \text{ мм.}$$

Химический факультет

Вариант 1

$$3. v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^5 \text{ м/с.} \quad 4. \text{ См. рис.24.}$$

5. Давление увеличилось в 3 раза.

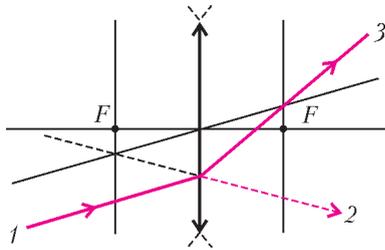


Рис. 24

$$6. v_0 = \sqrt{\frac{2gl \sin \alpha}{n^2 - 1}}. \quad 7. T = 3mg - qB\sqrt{2gl}.$$

8. $3\lambda < d < 4\lambda$, или $1,9 \text{ мкм} < d < 2,5 \text{ мкм}$ (максимальный порядок дифракции равен 3).

$$9. \frac{W_1}{W_2} = \frac{(3R + 2r)^2}{(2R + r)^2} = 2,56.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{M - m}{M}} = \frac{7}{8}.$$

Вариант 2

3. См. рис.25.

4. Большую скорость будет иметь первый брусок.

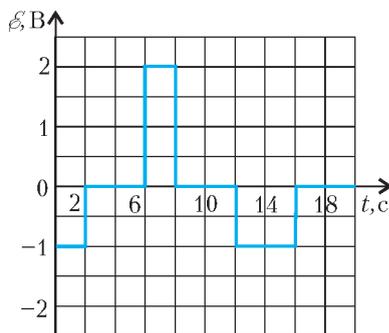


Рис. 25

$$5. F_{\min} = \frac{p_0 S}{2} = 20 \text{ Н.}$$

6. Емкость увеличится в $\frac{4}{3}$ раза.

$$7. R = \frac{(1-k)U^2 \tau}{\lambda m} \approx 5,3 \text{ Ом.}$$

$$8. s = \frac{\pi l}{4} \approx 0,8 \text{ м.}$$

$$9. Q = \frac{U_0^2 (R_1 + R_2) \tau}{4R_1 R_2} = 90 \text{ Дж.}$$

$$10. \operatorname{tg} \beta = \frac{(d-F) \operatorname{tg} \alpha}{F} = 2.$$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

seemat.ru

журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.М.Власов, В.В.Иванюк,
А.Е.Пацхверия**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,
phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

КОРОНА ОТПРАВИЛАСЬ НА РОДИНУ ШАХМАТ

В сентябре 2007 года в Мехико состоялся очередной чемпионат мира по шахматам. Как и два года назад, восемь сильнейших гроссмейстеров планеты сразились за корону в двухкруговом турнире. В итоге 15-м по счету чемпионом мира стал Вишванатан Ананд, 2-3-е места разделили Владимир Крамник, потерявший свой титул, и Борис Гельфанд.

Вот итоги турнира: **1.** В.Ананд (Индия) – 9 очков из 14, **2–3.** Б.Гельфанд (Израиль) и В.Крамник (Россия) – 8, **4.** П.Леко (Венгрия) – 7, **5.** П.Свидлер (Россия) – 6,5, **6–7.** Л.Аронян (Армения) и А.Морозевич (Россия) – 6, **8.** А.Гришук (Россия) – 5,5.

Чемпионское звание в третий раз за всю историю разыгрывалось в матч-турнире по круговой системе. Традиция определять чемпиона в матче впервые была нарушена в 1948 году, после смерти Алехина. Тогда на вершину Олимпа поднялся Ботвинник. Второй раз матч-турнир состоялся в 2005 году, когда произошло объединение шахматного мира – в течение пятнадцати лет существовали две системы, два чемпиона и т.д. Однако до конца выполнить задачу ФИДЕ не удалось – в Сан-Луисе победил Топалов, но в турнире не играл Крамник. Спустя год прошел поединок Топалов – Крамник, россиянин взял верх и стал абсолютным чемпионом мира.

Еще перед стартом в Сан-Луисе ФИДЕ приняла решение и следующий чемпионат провести по круговой системе. Вскоре было объявлено, что он пройдет в столице Мексики. В него сразу допускался чемпион мира Крамник и три гроссмейстера, лучшие в Аргентине: Ананд, Свидлер и Морозевич. Вторая четверка вышла из претендентского отбора. В нем участвовали занявшие 5–8-е места в Сан-Луисе (Леко, Адамс, Касымжанов и Юдит Полгар) и 12 победителей Кубка мира (раньше этот турнир назывался чемпионатом мира ФИДЕ). Летом 2007 года в Элисте 16 гроссмейстеров в два этапа разыграли последние четыре путевки, которые достались обладателю Кубка мира Ароняну, а также Леко, Гельфанду и Гришuku. За бортом остались многие корифеи, например – возвратившийся в шахматы Камский, чемпионы мира ФИДЕ Пономарев и Касымжанов, норвежский вундеркинд Карлсен, сильнейшая женщина в мире Полгар и др.

Итак, в матче-турнире было два круга, по семь туров в каждом. После

убедительной победы в 5-м туре единственным лидером стал Ананд. В атаке Маршалла он проявил принципиальность, забрал пешку и отбил все наскоки черных.

Ананд – Свидлер

Испанская партия

1. e4 e5 **2.** ♖ f3 ♗ c6 **3.** ♜ b5 a6 **4.** ♜ a4 ♗ f6 **5.** 0-0 ♜ e7 **6.** ♝ e1 b5 **7.** ♜ b3 0-0 **8.** c3 d5 **9.** ed ♜ :d5 **10.** ♜ :e5 ♜ :e5 **11.** ♝ :e5 c6 **12.** ♝ e1 ♜ d6 **13.** g3 ♜ f5 **14.** d4 ♗ d7 **15.** ♜ e3 ♝ fe8 **16.** ♜ d2 ♜ g4 **17.** ♗ c2 ♜ f5 **18.** ♗ c1 ♝ e7. Новинка. Ее ждали от белых, а применили черные. **19.** ♜ f3 Ананд ответил мгновенно, видно, был готов к такому повороту событий. **19...** ♜ g4 **20.** ♜ h4 ♝ ae8 **21.** ♗ d2 h6 **22.** ♗ d3 g6 **23.** ♜ d1 ♜ h3 **24.** ♜ f3 g5 **25.** ♜ g2 ♜ f5 **26.** ♗ d1 ♜ f6 **27.** a4 ♜ e4 **28.** ab ab. Линия «а» вскрыта, и тяжелые фигуры белых прорываются по ней, никакой контригры Свидлеру получить не удалось. **29.** ♝ a6 ♗ b7 **30.** ♗ a1 ♜ c8 **31.** ♝ a8 ♜ b8 **32.** ♜ c1 ♜ f6. Белый ферзь несколько отвлекся, и черные могли воспользоваться этим – 32... ♜ :f2! **33.** ♜ :f2 ♝ :e1 **34.** ♜ :e1 ♗ h3!

33. ♝ :e7 ♝ :e7 **34.** ♗ a3. Теперь Ананд прорывается на ферзевом фланге и одновременно берет на прицел неприятельского короля. **34...** ♝ d7 **35.** ♝ a5 ♜ a7 **36.** ♜ e3 ♗ c7 **37.** ♜ f5 c5 **38.** ♜ :h6+ ♜ h7 **39.** ♜ :g5. Черные сдались.

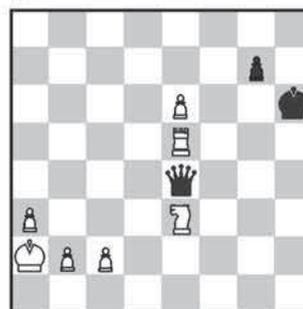
Острая схватка в 11-м туре Ананд – Морозевич привела к необычному соотношению сил: проходные пешки белых рвались вперед в центре и на ферзевом фланге, а проходные черных – на королевском. Но расчет Виши оказался глубже...

Ананд – Морозевич

Сицилианская защита

1. e4 c5 **2.** ♜ f3 d6 **3.** d4 cd **4.** ♜ :d4 ♜ f6 **5.** ♜ c3 a6 **6.** f3 e5 **7.** ♜ b3 ♜ e6 **8.** ♜ e3 ♜ bd7 **9.** g4 ♜ b6 **10.** g5 ♜ h5 **11.** ♗ d2 ♝ c8 **12.** 0-0-0 ♜ e7 **13.** ♝ g1 0-0 **14.** ♜ b1 ♗ c7 **15.** ♗ f2 ♜ c4 **16.** ♜ :c4 ♜ :c4 **17.** ♜ d5 ♜ :d5 **18.** ♜ :d5 f5 **19.** gf ♜ :f6 **20.** ♗ e2 ♜ f4 **21.** ♜ :f4 ♝ :f4 **22.** ♝ d3 ♗ d7 **23.** ♜ c1 ♝ cf8. Пока шансы сторон примерно равны. Но если коня переставить в центр доски – на d5, перевес белых будет очевиден. Так что план Ананда ясен. **24.** a3! ♜ h8 **25.** ♜ a2 ♗ h3 **26.** ♝ g3 ♗ h5 **27.** ♗ g2 ♝ h4 **28.** h3 ♗ h6. Черные грозно выстроились на королевском фланге, но как усилить позицию, не видно. Белые по сути двумя фигурами сдерживают их активность **29.** ♝ b3 b5 **30.** ♜ b4 ♝ h5 **31.** ♗ f1 ♝ h4 **32.** ♗ g2 ♝ h5 **33.** ♜ :a6 ♜ h4 **34.** ♝ g4 ♜ f6 **35.** ♗ e2

♝ :h3 **36.** ♝ :b5 ♜ d8 **37.** ♝ b8 ♗ f6. Кажется, Морозевичу удалось наладить кое-какую игру, но Ананд продолжает действовать очень энергично. **38.** ♜ b4 ♝ :f3 **39.** ♜ d5. Спустя 15 ходов замысел белых осуществился! **39...** ♗ f7 **40.** ♗ a6 h5 **41.** ♝ g2 h4 **42.** ♗ :d6 ♜ e7 **43.** ♗ :e5 ♝ :b8 **44.** ♗ :b8+ ♜ h7 **45.** ♗ c7 ♜ f8 **46.** ♗ :f7 ♝ :f7 **47.** ♝ g4. У белых два лишних пехотинца, но в таких позициях гораздо важнее, чьи пешки мчатся быстрее. **47...** ♝ f1 **48.** ♜ a2 ♝ h1 **49.** e5 ♜ c5 **50.** e6 ♜ h6 **51.** ♜ c4 h3 **52.** ♝ :c5 d2 **53.** ♜ e3 ♝ a1+ **54.** ♜ :a1 h1 ♗ + **55.** ♜ a2 ♗ e4 **56.** ♝ e5!! Черные сдались.



Ананд водрузил ладью на e5, и Морозевич остановил часы. При взятии белой ладьи следует смертельная шах-вилка с g4, а при отступлении ферзя белая пешка «е» достигает цели. Эту красивую диаграмму можно считать заключительной в чемпионате.

В 1995 году Ананд лидировал в поединке за корону с Каспаровым, и лишь в десятой партии Гарри сумел переломить ход борьбы. В 1998 году в матче на звание чемпиона мира ФИДЕ с Карповым Ананд был близок к победе, но тогда не повезло, этот титул он завоевал спустя два года. В течение десятка лет Ананд не уступал Крамнику в турнирах, в 2000 году именно ему, а не Владимиру, было сначала предложено сразиться с Каспаровым в матче за корону (условия были не очень ясные, и Виши отказался). И, наконец, справедливость восторжествовала – Ананд завоевал самую главную в своей жизни золотую медаль.

Теперь через год нас ждет новый матч за корону – между 14-м и 15-м чемпионами мира. В 2008 году должен состояться также матч между Веселином Топаловым и обладателем Кубка мира Гатой Камским – его победитель в очередном матче за корону встретится с победителем матча Ананд–Крамник. В дальнейшем титул короля вновь будет определяться в матчах. Один год – розыгрыш Кубка мира, другой – чемпион отстаивает свое звание в матче с обладателем Кубка.

Е.Гук

Пенто-пенто-пирамида

Коллекция Коллекция Коллекция
ГОЛОВОВОЛОМКА

Сложить пирамиду из обычных шариков не представляет никакого труда. Если же шарики соединить (склеить) в группы, то сборка пирамиды превращается в трудную задачу.

Автор предлагаемой вниманию читателей головоломки — москвичка Диана Пасхина. В названии ее головоломки дважды повторенное латинское слово «пенто» (пять) означает, что в пирамиде пять слоев и каждая деталь состоит из пяти шариков. Все детали разные и отличаются взаимным расположением шариков.



Поскольку головоломка довольно трудна в решении, на рисунке дана подсказка — отмечено расположение детали №7. Если начать поиск решения с нее, то дальнейшая сборка значительно облегчается.

(Продолжение — на с. 43)

