

журнал© Квант СЕНТЯБРЬ 2007 №5 ОКТАБРЬ 2007

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна), ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Ю.А.Осипьян

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбиллин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегий*), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегий*), С.П.Коновалов, А.А.Леонovich,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уровев,
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2007, Президиум РАН,
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Современная математика, восходящая к Эйлеру. *В.Арнольд*
10 Сюрпризы зеленого стекла. *В.Фабрикант*
14 Парадокс стола на четырех ножках. *Г.Любарский*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 18 Прокоп Дивиш и Янош Сегнер. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи М2056–М2065, Ф2063–Ф2072
21 Решения задач М2036–М2040, Ф2048–Ф2057

К М Ш

- 29 Задачи
30 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
30 Три орешка путешествующего математика. *Н.Шилов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Реактивное движение

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 Практическая задача по механике. *Ю.Носов*
36 Как молекулы столкнулись. *А.Стасенко*
37 Как Студент магнитное поле измерял. *А.Стасенко*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Квантовые чудеса (продолжение). *М.Каганов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 42 Движение заряда в магнитном поле. *В.Дроздов*
45 Инвариантность и задачи с параметрами. *Г.Фалин, А.Фалин*

ОЛИМПИАДЫ

- 48 XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по математике
52 XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике
56 XIII Всероссийская заочная математическая олимпиада школьников

- 58 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (9, 28)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Арнольда*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики и математики на монетах мира*

12 июня 2007 года выдающемуся математику современности академику
Владимиру Игоревичу Арнольду исполнилось 70 лет.

На протяжении многих лет В.И.Арнольд является членом редакционного совета журнала «Квант». Он написал для нашего журнала много ярких, интересных статей. Мы желаем Владимиру Игоревичу крепкого здоровья и новых достижений во имя науки.

Современная математика, восходящая к Эйлеру

В.АРНОЛЬД

§1. Дзета-функция Эйлера и малая теорема Ферма

Дроби бывают сократимые и несократимые. Сопоставим дроби p/q точку r на плоскости с декартовыми координатами (p, q) . Если дробь сократима, то эта целая точка *делима*: на отрезке, соединяющем r с началом координат, есть и другие целые точки.

Нарисуем все неделимые целые точки в круге $p^2 + q^2 \leq 5^2$ (рис.1; начало координат будем считать делимой точкой, так как ноль делится нацело на что угодно). Неделимых точек в этом круге 48, а всего в нем 81 целая точка. Неделимые точки составляют $48/81 \approx 59\%$ от числа всех целых точек в этом круге.

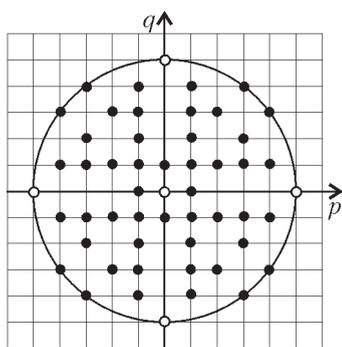


Рис.1. Неделимые целые точки в круге радиуса 5

Эйлер задал себе вопрос: а что будет, если увеличивать радиус круга? Будет ли доля неделимых целых точек стремиться при этом к какому-нибудь пределу, и к какому именно?

Он решил этот вопрос, доказав следующее:

Теорема Эйлера 1. Доля неделимых целых точек среди всех целых точек круга $p^2 + q^2 \leq R^2$ стремится при $R \rightarrow \infty$ к пределу, который равен

$$(1) \quad \frac{6}{\pi^2} \approx 0,608 \dots$$

Этот предел Эйлер выразил еще одной замечательной формулой:

$$(2) \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Заметьте, что $\pi^2/6 \approx 1,64$, так что сумма первых двух

членов (1,25) еще далека от суммы этого не так уж быстро сходящегося ряда.

Определение. Сумма ряда (сходящегося при $s > 1$)

$$(3) \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \zeta(s)$$

называется значением в точке s *дзета-функции* ζ .

Таким образом, теорема Эйлера выражает предельную долю неделимых целых точек плоскости \mathbb{R}^2 (называемую также «вероятностью несократимости дроби p/q ») формулой

$$(4) \text{ (вероятность неделимости вектора } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2) = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Его доказательство доставляет также и аналогичный результат о целых точках s -мерного пространства \mathbb{R}^s :

$$(5) \text{ (вероятность неделимости вектора } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^s) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Например, эта вероятность убывает при росте размерности s .

Доказательство приведенный выше теоремы Эйлера (и формул (2), (4), (5)) содержит ряд замечательных идей Эйлера, которые привели к созданию целых областей современной математики – вероятностной теории чисел, теории градуированных алгебр с их рядами Пуанкаре, «геометрии чисел» и т.д.

Но Эйлер начинал с совершенно понятных и элементарных рассуждений, которые я сейчас и опишу.

Лемма 1. Целочисленный вектор является делимым, если и только если существует простое число p , на которое делится каждая его компонента.

Доказательство. Делимость на произведение простых множителей вызывает делимость на каждый из них. Поэтому лемма 1 вытекает из разложимости каждого (большее 1) целого числа на простые множители.

Лемма 2. Вероятность делимости целочисленного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ на 2 равна $1/4$.

Доказательство. Для делимости вектора с компонентами u и v на 2 необходима и достаточна делимость на 2 как целого числа u , так и целого числа v . Каждое из этих событий имеет вероятность $1/2$, и они независимы. Поэтому делящиеся на 2 целочисленные векторы составляют 25% всех целочисленных векторов плоскости.

Лемма 3. Вероятность делимости целочисленного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$ на p равна $1/p^s$.

Доказательство. Вероятность делимости целого числа u на p равна $1/p$ (так как арифметическая прогрессия с разностью p составляет при большом R почти $(1/p)$ -ю часть отрезка $|u| \leq R$). Так как s компонент (u_1, \dots, u_s) вектора \mathbf{r} независимы, вероятность делимости вектора на p равна произведению вероятностей делимости на p всех s его компонент, т.е. равна $(1/p)^s$.

Лемма 4. Вероятность неделимости вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$ на p равна $1 - \frac{1}{p^s}$.

Доказательство. Вектор \mathbf{r} либо делится на p , либо не делится. Зная вероятность делимости из леммы 3, получаем для неделимости дополняющую до 1 вероятность.

Лемма 5. Делимости на разные простые числа – события независимые.

Например, доля делящихся на 3 целых чисел среди всех четных чисел такая же, как и среди всех целых чисел (или среди всех нечетных чисел), – она составляет $1/3$. Это видно из того, что среди p_2 остатков $(1p_1) \dots (p_2 p_1)$ от деления на простое число p_2 встречаются по разу все остатки $(1, \dots, p_2)$ (каково бы ни было простое число p_1). Ибо, если бы числа ip_1 и jp_1 (где $1 \leq i < j \leq p_2$) давали при делении на p_2 одинаковые остатки, то разность $(j - i)p_1$ делилась бы на p_2 , что при $0 < j - i < p_2$ невозможно.

Лемма 6. Вероятность неделимости целочисленного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$ ($s > 1$) на простые числа 2, 3, ..., p равна

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Доказательство. Вероятность одновременного наступления независимых событий равна произведению вероятностей наступления каждого из них. Поэтому лемма 6 вытекает из лемм 4 и 5.

Лемма 7. Вероятность неделимости целочисленного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$ ($s > 1$) ни на какое целое число равна бесконечному произведению по всем простым числам p

$$(6) \quad \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) := \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right].$$

Это – прямое следствие лемм 1 и 6, нужно только проверить, что указанный в формуле (6) предел существует (при $s > 1$). Эта сходимость легко выводится из сходимости при $n > 1$ ряда

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

$$\left(\text{или даже интеграла } \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}\right).$$

Детали доказательства леммы 7 я оставляю читателю.

Приведенные леммы Эйлера доставляют для вероятности несократимости выражение (6). Эйлер сумел получить для него и формулы (1), (2), (4), (5). Этот вывод основан на совершенно других идеях Эйлера (которые включены в современную математику под названием «теории рядов Пуанкаре градуированных алгебр»).

Начнем со следующих элементарных замечаний, помещенных Эйлером в его замечательном учебнике «Введение в анализ» (содержащем естественно предшествующие анализу положения, которые, к сожалению, в современных изложениях анализа обычно отсутствуют).

Степенью одночлена $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s}$ от s переменных (x_1, \dots, x_s) называется целое число $m = m_1 + \dots + m_s$.

Например, при $s = 2$ имеется 4 одночлена степени 3 (с коэффициентом единица):

$$\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$$

(если обозначать x_1 через x и x_2 через y).

Эйлер поставил вопрос: сколько существует одночленов (с коэффициентом единица) степени m от s переменных?

Эта задача элементарной комбинаторики допускает простое комбинаторное решение, но Эйлер придумал еще и другое рассуждение, доставляющее гораздо больше следствий.

Начнем с одночленов $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ от одной переменной x . В этом случае имеется ровно один (считая коэффициент одночлена равным 1) одночлен любой степени $m = 0, 1, 2, \dots$. Чтобы записать ответ: «число (каких-либо объектов, зависящих от натурального числа m) ровно p_m », Эйлер использует «производящую функцию» (сегодня называемую «рядом Пуанкаре», по следовавшему за Эйлером великому французскому математику):

$$(7) \quad P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots$$

В этих терминах предыдущий ответ на вопрос о числе одночленов от одной переменной записывается так:

Предложение 1. Ряд Пуанкаре градуированной степенью алгебры многочленов от одной переменной есть рациональная функция

$$(8) \quad P(t) = 1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}.$$

Чтобы вывести отсюда формулу для числа многочленов от двух переменных, Эйлер предложил перемножить два ряда вида (8):

$$(9) \quad P(x)P(y) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + y + y^2 + \dots) = 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + \dots$$

В стоящем в правой части формулы (9) ряду каждый

одночлен (с коэффициентом 1) от переменных x и y встречается ровно однажды. Поэтому, если заменить аргументы x и y на t , в правой части получится ряд, в котором коэффициент при t^m будет равен числу P_n одночленов степени m (с равными 1 коэффициентами) от переменных x и y .

Таким образом, мы получаем из формул (8) и (9) для ряда Пуанкаре градуированной степени алгебры многочленов от двух переменных

$$P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots$$

выражение

$$P(t) = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Совершенно так же Эйлер доказал следующее:

Предложение 2. Ряд Пуанкаре градуированной степени алгебры многочленов от s переменных является рациональной функцией

$$P(t) = \frac{1}{(1-t)^s}.$$

Явное выражение для чисел P_m (в виде чисел сочетаний) получается отсюда по формуле бинома Ньютона (с показателем $-n$).

Вдохновляясь этими результатами абстрактной алгебры, Эйлер преобразовал доказанную им формулу (6) (леммы 7)) следующим образом. Заменим множитель

$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ на обратный множитель

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

При (формальном) перемножении таких рядов, соответствующих всем простым числам p , мы получим ряд, общий член которого имеет вид

$$\frac{1}{2^{a_2 s}} \cdot \frac{1}{3^{a_3 s}} \cdot \frac{1}{5^{a_5 s}} \cdot \dots = \frac{1}{n^s}, \text{ где } n = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdot \dots$$

Тем самым доказана (для формальных рядов, по проверке сходимости при $s > 1$ несложная) замечательная формула Эйлера для ζ -функции:

Теорема Эйлера 2. Следующее произведение по простым p равно (при $s > 1$) следующей сумме по натуральным n

$$\prod_{p \geq 2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \quad (:= \zeta(s)).$$

Так Эйлер получил формулы (4) и (5).

Вычисление значений ζ -функции при фиксированном значении аргумента s не просто, но значение $\zeta(2) = \pi^2/6$ Эйлер умел получать разными способами.

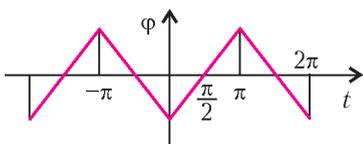


Рис.2. «Пила» f

«Пила» f задается как 2π -периодическая функция аргумента t , равная $|t| - \frac{\pi}{2}$ при $|t| \leq \pi$ (рис.2). Ищем

разложение в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt),$$

при четных k получаем $a_k = 0$, а при нечетных —

$a_k = \left(-\frac{4}{\pi}\right) \frac{1}{k^2}$. Вычисляя $f(0)$ при помощи (сходящегося) ряда Фурье, мы находим

$$-\frac{\pi}{2} = f(0) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2},$$

так что сумма обратных квадратов нечетных чисел есть

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Вводя обозначение B для

$$\zeta(2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2},$$

мы получаем $B = A + B/4$, откуда $\zeta(2) = B = \frac{4}{3}A = \frac{\pi^2}{6}$, что и доказывает теорему Эйлера 2.

Замечание: о равномерном распределении неделимых точек

Я предполагаю, что распределение неделимых целых точек на плоскости обладает некоторой асимптотической равномерностью (резко отличающей его от, например, набора целых точек полуплоскости, составляющего половину множества всех целых точек плоскости, но распределенную неравномерно).

Чтобы определить эту равномерность распределения, начнем, например, с (любой) гладкой функции $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, равной нулю всюду вне некоторого круга. Растягивая функцию h в K раз, определим новую функцию $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ соотношением $H(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = h(\mathbf{r}/K)$ для всякого $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ (где \mathbf{r}_0 — некоторый фиксированный вектор). Сравним теперь сумму значений растянутой функции H во всех целых точках плоскости, обозначим эту сумму через SH , и сумму значений той же растянутой функции H во всех неделимых целых точках плоскости, обозначим эту сумму через ΣH .

Свойство равномерной распределенности состоит в том, что при больших K вторая сумма составляет приблизительно такую долю первой, какую долю составляют изучаемые (неделимые) точки среди всех целых точек, $\lambda = 6/\pi^2 = 1/\zeta(2)$:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\Sigma H}{SH} = \lambda$$

(при любом векторе \mathbf{r}_0 , сдвигавшем функцию H).

Если бы суммирование в Σ происходило не по равномерно распределенным на плоскости неделимым точкам, а, например, по целым точкам полуплоскости, то функции h и H могли бы быть тождественно равными 0 в этой полуплоскости. Тогда $(\Sigma H)/(SH) = 0$,

хотя целые точки полуплоскости составляют долю $\lambda = 1/2$ от всех целых точек плоскости, так что целые точки полуплоскости распределены среди всех целых точек плоскости неравномерно.

Традиция приписывает изобретение дзета-функции Риману, жившему на сотню лет позже описанной выше работы Эйлера. Фурье тоже жил много позже Эйлера (но его ряды использовались задолго до него и Эйлером, и Лагранжем, и даже Ньютоном). Ньютон считал изобретение метода «параллелограмма Ньютона» (доставляющего своеобразный вариант теории преобразования Фурье, рядов Лорана и рядов Пуансо) своим самым важным вкладом в математику, позволяющим решать всевозможные уравнения: алгебраические и функциональные, дифференциальные и интегральные, обыкновенные и в частных производных.

В современном университетском образовании все эти важнейшие теории обычно не упоминаются, и даже работа Эйлера о дзета-функции незаслуженно забыта.

Сделанный Эйлером подсчет вероятности несократимости дробей доставляет также асимптотику замечательной функции Эйлера φ натурального аргумента n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Определяется значение $\varphi(n)$ так: оно равно числу тех из остатков $\{1, 2, \dots, n\}$ от деления на n , каждый из которых взаимно прост с n (так что его наибольший общий делитель с n равен 1).

Пример. Четыре взаимно простых с $n = 12$ остатка от деления на 12 – это $\{1, 5, 7, 11\}$. Для простого числа, $n = p$, имеем, очевидно,

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Для квадрата простого числа, $n = p^2$, не взаимно простых с n остатков имеется p , поэтому

$$\varphi(p^2) = p^2 - p = (p - 1)p.$$

Точно так же, для $n = p^a$ получаем

$$\varphi(p^a) = (p - 1)p^{a-1}$$

(из-за p^{a-1} делящихся на p остатков).

Если $n = ab$ – произведение двух взаимно простых чисел, то функция Эйлера, очевидно, мультипликативна,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Все это дает явную формулу для значения $\varphi(n)$, если разложение n на простые множители известно.

Но приведенная выше таблица показывает, что функция φ сильно осциллирует при изменении значения аргумента: то растет, то убывает (до малой доли значения аргумента).

Теорема Эйлера 3. Среднее арифметическое значение функции Эйлера φ ,

$$\hat{\varphi}(n) = \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)}{n},$$

ведет себя при $n \rightarrow \infty$ как cn , где постоянная c

есть

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\varphi}(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \approx 0,608 \dots$$

Этот результат вытекает из доказанной выше теоремы Эйлера 1, потому что взаимная простота остатка a с числом n эквивалентна неделимости целочисленного вектора (n, a) .

Функция Эйлера φ естественно возникла у него при попытке обобщения малой теоремы Ферма. Эта теорема Ферма состоит в сравнении по модулю простого числа p

$$a^{p-1} \equiv 1(p)$$

для любого взаимно простого с p числа a . Она означает периодичность последовательности остатков от деления членов геометрической прогрессии a, a^2, a^3, \dots на p (с периодом $T = p - 1$).

Рассмотрим, например, остатки от деления членов геометрической прогрессии $\{2^t : t = 1, 2, \dots\}$ на $p = 13$:

$$\{2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1\}.$$

Двенадцатый член прогрессии равен 1, поэтому тринадцатый равен первому и т.д. (период $T = 12$).

Эйлер поставил себе вопрос: а как ведет себя геометрическая прогрессия из остатков от деления на натуральное число n , уже не являющееся простым?

Теорема Эйлера 4. Последовательность остатков от деления на n членов геометрической прогрессии

$\{a, a^2, a^3, \dots\}$, знаменатель которой взаимно прост с n , периодична, и ее период T является делителем целого числа $\varphi(n)$:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(n), \quad \varphi(n) = T(n)N(n).$$

Пример. Остатки от деления членов геометрической прогрессии $\{2^t : t = 1, 2, \dots\}$ на $n = 15$

$$\{2, 4, 8, 1\}, \{2, 4, 8, 1\}, \dots$$

образуют последовательность периода $T = 4$. Значение функции Эйлера $\varphi(15) = \varphi(3)\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$ делится на 4.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим все $\varphi(n)$ остатков от деления на n , взаимно простых с n . Эти остатки образуют (мультипликативную) группу: если a и b взаимно просты с n , то произведение ab тоже взаимно просто с n . Произведения a на все (взаимно простое с n) остатки b различны (иначе произведение $a(b_1 - b_2)$ делилось бы на n , а так как a взаимно просто с n , то $b_1 - b_2$ делилось бы на n , будучи меньше n).

Стало быть, одно из $\varphi(n)$ произведений остатков ab равно 1 (так как эти $\varphi(n)$ различных произведений все являются взаимно простыми с n остатками от деления на n и, значит, пробегает все $\varphi(n)$ взаимно простых с n остатков, в том числе и остаток 1). Следовательно, для любого взаимно простого с n остатка a существует такой взаимно простой с n остаток b , что $ab = 1$ (так что остаток b обратен остатку a в нашей мультипликативной группе).

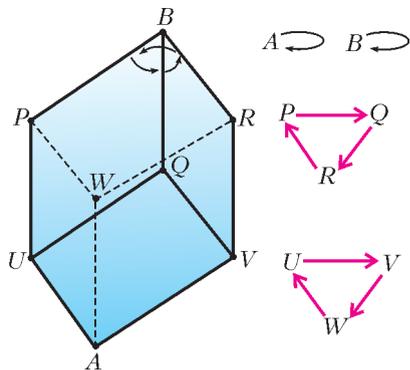


Рис.3. Вращение куба вокруг диагонали АВ

Рассмотрим теперь действие операции умножения на a на все элементы описанной группы из $\phi(n)$ взаимно простых с n остатков. Эта операция переставляет $\phi(n)$ элементов нашей группы (так как умножение на $b = a^{-1}$ действует в обратную сторону).

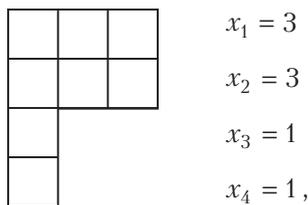
Любая перестановка элементов конечного множества разбивается на циклы. Например, поворот куба на угол 120° вокруг его главной диагонали АВ переставляет его 8 вершин. При этом две вершины (концы этой диагонали) остаются на месте, т.е. каждая из них уже является циклом, остальные же 6 вершин разбиваются на 2 цикла (рис.3).

Разбиение перестановки на циклы удобно описывать при помощи специальной картинке, называемой *диаграммой Юнга*. Диаграмма Юнга перестановки N элементов состоит из N единичных квадратиков, стоящих в столькох строках, сколько у перестановки циклов. При этом элементы каждого цикла заполняют соответствующую строку (в порядке прохождения цикла). В первой строке ставится самый длинный цикл, во второй – следующий по длине и т.д., так что длины всех y строк $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_y$ образуют разбиение

$$N = x_1 + x_2 + \dots + x_y$$

числа переставляемых элементов N .

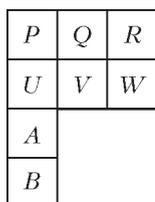
Пример. Диаграмма Юнга вращения куба (см. рис.3) имеет вид



соответствует разбиению 8 вершин куба:

$$8 = 3 + 3 + 1 + 1$$

и заполняется циклами вращения так:



Доказательство теоремы 4 основано на следующем факте:

Лемма. Диаграмма Юнга перестановки $\phi(n)$ взаимно простых с n остатков от деления на n , умножающей каждый такой остаток b на фиксированный такой остаток a , является прямоугольником (т.е. все циклы этой перестановки имеют одинаковую длину).

Доказательство. Пусть $\{ab, ab^2, \dots, a^T b = b\}$ – цикл длины T . Если c – какой-либо остаток, взаимно простой с n , то мы можем представить его в виде произведения $c = bd$, где d – взаимно простой с n остаток (а именно, $d = cb^{-1}$).

Умножая c на a много раз, мы получим

$$ac = (ab)d, \quad a^2c = (a^2b)d, \quad a^3c = (a^3b)d, \dots$$

$$\dots, \quad a^Tc = (a^Tb)d = bd = c,$$

так что T является одним из периодов и для начинающегося в c цикла.

Стало быть, наименьший период начинающегося в c цикла является делителем наименьшего периода начинающегося в b цикла. Но b и c можно поменять местами – значит, наименьшие периоды начинающихся в b и в c циклов делят друг друга, т.е. совпадают (что и доказывает лемму).

Следствие. Период T циклов перестановки умножения на a взаимно простых с n остатков от деления на n является делителем числа $\phi(n)$.

Доказательство. Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту, поэтому

$$\phi(n) = T(n)N(n),$$

где T – (наименьший) период операции умножения на a , а N – число циклов этой перестановки (всех $\phi(n)$ взаимно простых с n остатков от деления на n).

Тем самым теорема 4 доказана: ее топологический смысл выражает именно приведенная лемма о прямоугольности диаграммы Юнга операции умножения на остаток a .

Теорема 4 приводит к очень естественному (но все еще решенному не до конца) вопросу: как ведет себя наименьший период $T(a, n)$ при $n \rightarrow \infty$ (аргумент a вставлен потому, что операции умножения на разные взаимно простые с n остатки имеют, вообще говоря, разные (наименьшие) периоды)?

Пример. Для $a = 2$ нетрудно найти следующие (наименьшие) периоды операции умножения на 2 остатков от деления на n :

n	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
T	2	4	3	7	10	12	4	8	18	6

Последовательность значений $T(n)$ ведет себя на вид довольно хаотическим образом. Средние арифметические

$$\hat{T}(2k+1) = \frac{\sum_{m=1}^k T(2m+1)}{k}$$

ведут себя более регулярным образом, но и их асимптотическое поведение изучено недостаточно.

Один из естественных подходов к этому вопросу состоит в следующем. Число делителей τ большого целого числа n растет при росте n в среднем как $\ln n$. Это – только рост среднего арифметического, сама величина $\tau(n)$ может сильно уклоняться от этого среднего: например, если $n = p$ простое число, то $\tau(p) = 2$, а если $n = m!$, то величина τ (при достаточно большом m) сколь угодно велика.

Можно сосчитать и средний рост суммы делителей с ростом числа n :

$$\Sigma(n) \sim cn$$

(постоянная c здесь есть $\zeta(2)$, и это можно усмотреть из приведенных выше доказательств теоремы Эйлера о вероятности несократимости дроби).

Аналогичным образом доказывается (средняя) асимптотика суммы s -х степеней делителей числа n ,

$$\Sigma_s(n) \sim c_s n^s, \quad c_s = \zeta(s+1).$$

Исходя из этих средних асимптотик, можно было бы ожидать соответствующей асимптотики для среднего арифметического делителей числа n ,

$$D(n) = \frac{\Sigma(n)}{\tau(n)}.$$

Если бы среднее (по n) от дроби равнялось отношению среднего от числителя к среднему от знаменателя, то мы получили бы для среднего арифметического по n значения среднего делителя выражение

$$\widehat{D}(n) \sim ? \frac{cn}{\ln n}.$$

Однако эксперимент показывает, что средние арифметические средних делителей гораздо больше, и ответ на самом деле имеет вид

$$\widehat{D}(n) \sim \frac{\tilde{c}n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Возвращаясь к наименьшему периоду $T(n)$ операции умножения на a остатков от деления на n , мы хотели бы использовать теорему Эйлера о том, что число $T(n)$ является одним из делителей числа $\varphi(n)$.

Если бы выполнялись следующие предположения:

1) свойства делимости (средние асимптотики) для числа делителей $\hat{\tau}(m)$, для суммы делителей $\hat{\Sigma}(m)$ и для среднего делителя $\widehat{D}(m)$ чисел m вида $\varphi(n)$ такие же, как для обычных чисел m такого же (в среднем) порядка величины,

2) выбираемый богом в качестве наименьшего периода $T(n)$ делитель числа $\varphi(n)$ ведет себя (асимптотически в среднем) как среднее арифметическое всех делителей этого целого числа,

то из предыдущих асимптотик можно было бы вывести предположительное среднее поведение периода $T(n)$ вида

$$\widehat{T}(n) \sim \widehat{D}(\hat{\varphi}(n)) \sim \frac{\tilde{c}\hat{\varphi}(n)}{\sqrt{\ln \hat{\varphi}(n)}} \sim \frac{c'n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Но эксперименты (доведенные сейчас Ф.Аикарди до n порядка 10^{20}) указывают, по-видимому, на другое поведение средних \widehat{T} . Значит, хотя бы одно из выписанных выше предположений 1 и 2 неверно. Было бы интересно узнать, как именно нарушаются предположения 1 и 2. Это интересно не только ради исследования средних \widehat{T} , но и само по себе.

§2. Эйлера теория вращения твердого тела и эйлера гидродинамика

Моряки встретились к XVIII веку со следующей трудностью определения своего места на карте: для ориентирования измерялись координаты звезд на небесной сфере в момент измерения, и использовать эти измерения можно было, только зная точно, в какой именно момент измерения производились.

Сигналов точного времени по радио тогда еще не передавали, поэтому для определения времени приходилось пользоваться хронометрами. Но хронометр, особенно в длительном плавании, склонен начинать сильно врать. Сказываются и качка, и вращение Земли, и вариации поля тяготения, влияющие на период собственных колебаний маятника, и даже климатические условия (тропическая жара удлиняет маятник, а морозы укорачивают).

Английское адмиралтейство объявило поэтому большую премию за решение проблемы определения точного времени. Эйлер придумал остроумный путь решения этой проблемы: использовать в качестве часов Луну.

Движение четырех (открытых Галилеем) спутников Юпитера к тому времени уже пытались использовать вместо часов. Но для этого нужен, кроме хорошей теории вовсе не простого движения спутников, хороший телескоп, так как «циферблат» этих часов уж очень мал: Юпитер далеко, и спутники не всегда хорошо видны.

Луна гораздо ближе, наблюдать ее легко, так что задача была бы решена, если бы была построена достаточно точная теория малых колебаний Луны около своего центра тяжести (с учетом возмущений, вносимых прежде всего Солнцем и Землей в сложном орбитальном движении Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли).

Вот эту-то теорию Эйлер и решил создать. Его замечательная работа на эту тему была опубликована в 1765 году – он рассматривал не только Луну, но и движение любого твердого тела вокруг своего центра тяжести прежде всего по инерции, а потом и вследствие возмущающих влияний других тел.

Замечательный результат этих исследований Эйлера доставляет, прежде всего, полное решение задачи об инерциальном движении произвольного твердого тела вокруг своего центра тяжести. Эта задача оказалась «вполне интегрируемой гамильтоновой системой», и Эйлер нашел нужную полную систему первых интегралов в инволюции.

Из его результатов вытекало, например, что стационарные вращения вокруг всех трех осей эллипсоида инерции твердого тела существуют, но вращение вокруг средней оси инерции неустойчиво, в то время как

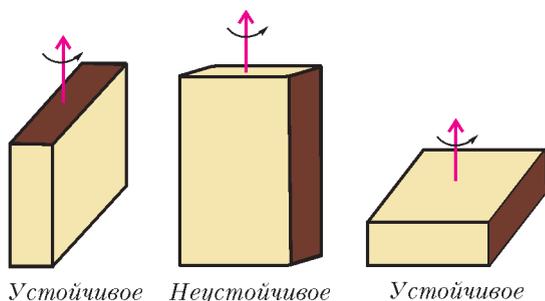


Рис.4. Устойчивое и неустойчивое вращение

и вращение вокруг большой оси инерции, и вращение вокруг малой оси инерции устойчивы (рис.4). Это значит, что, например, спичечный коробок, брошенный так, что он вращается вокруг длинной или вокруг короткой оси, так и будет вращаться, а если бросить его, закружив вокруг средней оси, то он будет кувыряться хаотически (что я не раз демонстрировал студентам на лекции – здесь лучше всего бросать упакованную книгу, а не кирпич, и шесть граней бросаемого тела лучше выкрасить по-разному, чтобы неустойчивость была сразу видна).

Топологическая причина различия состоит в разнице линий пересечения эллипсоида со сферами с центром в начале координат (рис.5).

Около конца A большой полуоси эллипсоида расстояние до центра эллипсоида максимально, и линии, где это расстояние немного меньше длины большей полуоси

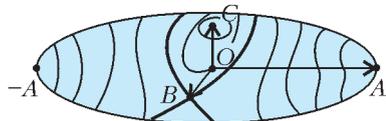


Рис.5. Линии уровня расстояний до начала координат на поверхности эллипсоида

OA , являются окружающими точку максимума A замкнутыми кривыми на поверхности эллипсоида. При малом отклонении направления оси вращения от направления OA соответствующий вектор переходит от вектора OA на одну из таких замкнутых кривых, близких к точке A , и начинает совершать вблизи OA малые колебания, так что движение, хотя и перестает быть стационарным вращением, остается к нему близким.

Точно так же, около конца C малой оси расстояние до центра O достигает минимума, и линии, где оно лишь немного превышает минимальное расстояние $|OC|$, – замкнутые кривые на поверхности эллипсоида, близкие к точке C . Соответствующее возмущенное вращение остается близким к стационарному.

Напротив того, около конца B средней оси функция расстояния до центра эллипсоида O имеет седловую точку. Линия уровня, где расстояние точно равно $|OB|$, представляет собой две (пересекающиеся в точке B) окружности, а линия уровня, близкого к $|OB|$, состоит из двух замкнутых кривых, далеко уходящих от точки B (вплоть даже до противоположного конца, $-B$, средней оси). При возмущении стационарного вращения вокруг оси OB возникает совершенно непохожее на него «кувыркание», в результате которого тело может даже перевернуться почти что вверх ногами.

Луна сейчас благополучно совершает малые колебания, будучи повернута к Земле всегда в основном одной

стороной и лишь немного колеблясь около этого «маятникового» положения. Напротив того, искусственные спутники Земли, в зависимости от того, как ими управляют, могут совершать все описанные Эйлером движения, так что теория Эйлера и сегодня является основой расчета борьбы с кувыранием спутников.

Теория Эйлера позволяет детально разобрать колебания Луны около своего обычного положения, так что, наблюдая фазу этих колебаний, можно использовать ее как стрелку часов и узнать момент наблюдения.

Адмиралтейство, однако, наградило не Эйлера, а часовщика, решившего проблему определения времени совершенно иным путем. А именно, он предложил подвешивать маятник AD трехзвенным подвесом $ABCD$ (рис.6). Стержни AB и CD имеют вдвое меньший коэффициент теплового расширения, чем соединяющий их стержень BC . В результате тепловое удлинение стержней AB и CD опускает груз на столько же, на сколько поднимает его тепловое удлинение стержня BC . Поэтому эффективная длина маятника AD при тепловом расширении стержней не меняется, а потому не меняется и период колебаний этого маятника: хронометр стал нечувствительным к изменению температуры!

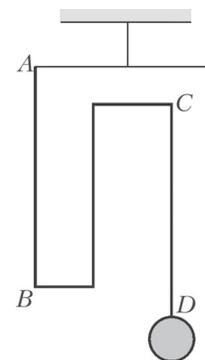


Рис.6. Компенсирующий тепловое расширение маятник

Разбирая к ее двухсотлетию статью Эйлера о вращении Луны, я заметил в 1965 году, что рассуждения Эйлера доказывают гораздо больше, чем он указал. А именно, вся теория Эйлера почти без изменений переносится на исследование геодезических линий на многообразиях групп Ли, снабженных левоинвариантной (или правоинвариантной) римановой метрикой.

Если начать с группы $SO(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства, то эти геодезические доставляют движения твердого тела относительно его центра тяжести, изученные Эйлером. Но теорию Эйлера можно применять и к другим группам, и получающиеся из его результатов заключения вовсе не очевидны.

В качестве очень простого примера можно взять двумерную группу аффинных преобразований прямой, $x \mapsto ax + b$. Считая преобразования сохраняющими ориентацию ($a > 0$), мы можем отождествить эту группу с полуплоскостью $\{a, b : a > 0\}$. В этом случае левоинвариантная метрика Эйлера доставляет в точности модель Пуанкаре геометрии Лобачевского,

$$ds^2 = \frac{da^2 + db^2}{a^2},$$

так что теория Эйлера превращается в геометрию Лобачевского. Роль стационарных вращений Эйлера играют в этом случае те прямые и окружности евклидовой полуплоскости $a > 0$ с декартовыми координатами (a, b) , которые перпендикулярны линии «абсолют», $a = 0$ (рис.7).

В качестве гораздо более богатого примера применения теории эйлера вращения твердого тела рассмот-

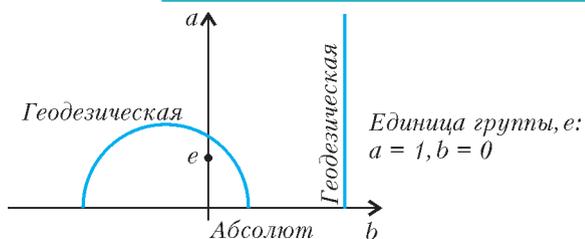


Рис.7. Геодезические модели Пуанкаре плоскости Лобачевского

рим группу $SDiff M$ «несжимаемых» диффеоморфизмов многообразия M (т.е. диффеоморфизмов $M \rightarrow M$, сохраняющих некоторый элемент объема τ на M). Геодезические правоинвариантной метрики на этой группе представляют собой (эйлеровы) течения несжимаемой жидкости вдоль многообразия M .

Эйлерова теория устойчивости стационарных движений твердого тела превращается в этом случае в обобщение теоремы Рэля об устойчивости двумерных течений несжимаемой жидкости, когда профиль скорости не имеет точек перегиба (рис.8).

Течения с точками перегиба оказываются в этом

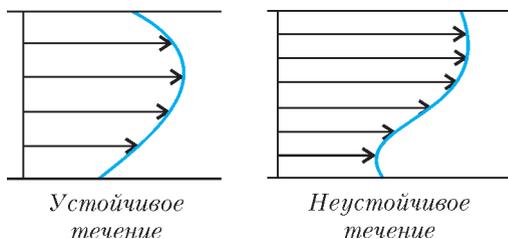


Рис.8. Теорема Рэля об устойчивости плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости

случае аналогичными стационарным вращениям твердого тела вокруг средней оси инерции – общая теорема устойчивости Эйлера применяется в обоих случаях одинаково, но при переходе от трехмерной группы $SO(3)$ к бесконечномерной группе $SDiff M$ из теоремы Эйлера получается (обобщенная) теорема Рэля.

На устойчивость геодезических многообразия оказывает большое влияние его «секционные кривизны по двумерным направлениям». А именно, отрицательность кривизны вызывает экспоненциальное с течением времени разбегание геодезических (с близкими начальными условиями). Теория Эйлера позволяет вычислить эти секционные кривизны (для групп с левоинвариантными или правоинвариантными метриками).

Применив эти вычисления к группам несжимаемых диффеоморфизмов поверхностей, я получил много двумерных направлений сильно отрицательной кривизны.

Например, применяя эти оценки к двумерной гидродинамике на поверхности тора (и к течениям пассатного типа), я убедился, что первоначально малые возмущения начального поля скоростей вырастают примерно в 10^5 раз (от километрового размера грозы до изменений погоды планетарного масштаба) за время порядка месяца. Это означает, что динамический прогноз погоды на сильно превышающее неделю время будет оставаться невозможным, как бы сильно ни будут усовершенствованы и компьютеры, и методы вычислений, и регистрирующие исходное состояние погоды датчики. Действительно, слегка изменив начальные скорости в каждом кубическом километре (даже так, чтобы средние по соседнему десятку кубических километров при этом не менялись), мы приходим к такому новому начальному условию, которое датчики не отличат от старого, но которое приведет тайфун через пару недель не в Новый Орлеан, куда он должен был попасть по старому сценарию, а, скажем, в Бомбей.

Можно только поражаться, насколько значительными оказываются приложения фундаментальных теорий и идей Эйлера даже в тех случаях, когда сам он ограничился при их изложении первым содержательным случаем (группы $SO(3)$ в нашем примере), а все далекие обобщения получены лишь недавно.

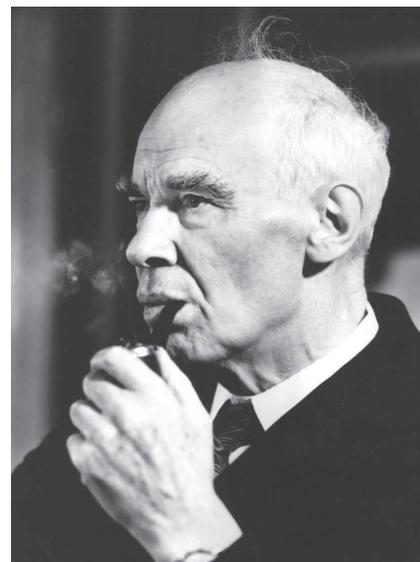
Вниманию наших читателей!

28 марта 2008 года исполняется сто лет со дня рождения выдающегося физика, академика Исаака Константиновича Кикоина. В связи с этим в нашей стране на высоком государственном уровне запланированы множественные специальные мероприятия. Для нас же Исаак Константинович Кикоин был прежде всего создателем и первым Главным редактором журнала «Квант».

Редакционная коллегия, редакционный совет и редакция журнала «Квант» объявляют ближайший год в журнале «Квант» – «годом Кикоина». И вот что под этим подразумевается.

Мы планируем в шести ближайших номерах журнала опубликовать разнообразные воспоминания об академике И.К.Кикоине, а в научных статьях и других материалах журнала уделить особое внимание тем областям физики и техники, в которых выдающимся образом раскрылся научный и организационный талант этого удивительного человека, в особенности – атомной и ядерной физике и энергетике. Нами готовится к изданию специальный, посвященный юбилею И.К.Кикоина выпуск серии «Библиотечка «Квант».

Те из нас, кто близко знали Исаака Константиновича, с благодарностью хранят в душе его незабываемый светлый образ. Мы очень хотим, чтобы этот образ был запечатлен в памяти и новых поколений наших читателей.





9 октября 2007 года исполнилось бы 100 лет известному ученому и педагогу Валентину Александровичу Фабриканту. За свою долгую творческую жизнь Валентин Александрович сумел многое – сделать замечательные открытия (он – автор работ по параметрическому усилению света, заложивших основу создания лазеров), воспитать плеяду учеников, написать прекрасные книги и статьи.

В.А.Фабрикант стоял и у истоков создания журнала «Квант». Являясь бессменным членом редакционной коллегии, он был большим другом читателей и редакции.

Мы рады предложить вашему вниманию статью В.А.Фабриканта, опубликованную в «Кванте» №7 за 1978 год и вошедшую в Приложение к журналу «Квант» №4/99, посвященное памяти Валентина Александровича.

Сюрпризы зеленого стекла

В.ФАБРИКАНТ

Какого цвета зеленое стекло?

Этот вопрос может вызвать чувство естественного недоумения. Читатель с раздражением скажет: зеленое стекло потому и называется зеленым, что оно... Однако не надо спешить со снисходительными разъяснениями. Нехитрый опыт покажет вам, что вопрос о цвете зеленого стекла совсем не так прост.

Если у вас есть кусок зеленого стекла, разбейте его осторожно на несколько не очень маленьких кусочков. Затем посмотрите сквозь один из них на нить лампы накаливания. Как вы и ожидали, нить будет казаться зеленой. Наложите на этот кусочек стекла второй и снова посмотрите на нить. Вероятно, вы не заметите изменения цвета нити, она будет зеленой по-прежнему. Но если наложить на два кусочка стекла третий и посмотреть сквозь все три кусочка на нить, вы увидите ее уже неокрашенной – белесоватого цвета. Сквозь четыре кусочка нить будет казаться красноватой, а сквозь пять кусочков – рубиново-красной!

Результат совершенно неожиданный и весьма поучительный. Оказывается, цвет стекла зависит от его толщины, и зеленое в тонком слое стекло становится красным при достаточно большой толщине слоя. Таким свойством обладает, конечно, не каждое зеленое стекло, но как раз наиболее распространенные дешевые сорта зеленых стекол.

Любопытно, что это же свойство присуще раствору самого важного красящего вещества на земле – хлорофилла. Как известно, хлорофилл окрашивает листья растений в зеленый цвет. Поместив листья в спирт, можно получить раствор хлорофилла в спирте и провести такой опыт. Поставьте на лист белой бумаги стакан и медленно наливайте в него раствор хлорофилла. Сначала дно стакана на просвет будет казаться

зеленым, а затем, при большой толщине слоя, раствор приобретет насыщенный темно-красный цвет.

Вернемся к зеленому стеклу. Можно еще сильнее запутать вопрос о цвете стекла, если после лампочки накаливания посмотреть сквозь кусочки стекла на раскаленный конец кочерги. Уже через три кусочка стекла он будет казаться рубиново-красным. Вот вам и второй неожиданный результат: видимый цвет стекла зависит не только от его толщины, но и от того, на какой светящийся предмет мы смотрим сквозь это стекло. Слой из трех кусочков стекла кажется бесцветным при наблюдении нити лампы накаливания и красным – при наблюдении конца раскаленной кочерги.

С кочергой можно сделать еще один опыт, из которого следует практически важный вывод. Вынутая из печи кочерга быстро остывает. Попробуйте проследить сквозь стекло за концом кочерги во время остывания. Как мы уже говорили, конец раскаленной кочерги виден красным сквозь три кусочка стекла. Конец несколько остывшей кочерги кажется красным уже через два кусочка. Подождя еще немного, вы увидите конец кочерги красным даже через один кусочек зеленого стекла. Из этого опыта следует, что чем выше температура раскаленного тела, тем толще должен быть слой стекла, чтобы произошло изменение его цвета. Значит, по толщине слоя стекла, необходимого для изменения цвета, можно судить о температуре раскаленного тела.

Опыты с кочергой делают понятным устройство чрезвычайно остроумного и простого прибора, служащего для определения температур раскаленных тел, – пирометрического клина. Он представляет собой действительно клин из зеленого стекла, толщина которого плавно возрастает от одного конца к другому. Клин

двигается в металлической оправке с отверстием для наблюдения раскаленного тела. По краю клина нанесена шкала температур, причем температура растет от тонкого конца клина к толстому. Наставив отверстие оправки на раскаленное тело, надо двигать клин в оправке до тех пор, пока не произойдет изменение видимого цвета тела. Тогда на шкале против указателя, соединенного с оправкой, можно прочесть температуру раскаленного тела. Пирометрическим клином особенно часто пользуются для определения температуры расплавленного металла, например в мартеновских печах. Несмотря на свое простое устройство, клин в опытных руках дает высокую точность.

Вы познакомились с принципом действия полезного прибора, использующего свойства зеленого стекла, но загадка самого стекла осталась загадкой.

Опыт, не сделанный Ньютоном, и ландшафтная живопись

Наверное, многие из вас помнят знаменитый опыт Ньютона с разложением солнечного луча в разноцветный спектр при помощи стеклянной призмы. Этот опыт показал, что солнечный свет представляет смесь лучей различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового. Ньютон почему-то не попытался несколько усложнить этот опыт: поставить на пути солнечного луча цветное стекло или сосуд с окрашенной жидкостью. Во всяком случае, в своих трудах Ньютон не описывает такого опыта.

Опыт с красным стеклом, собственно, ничего интересного и не дал бы. Вместо разноцветной полоски спектра остался бы только участок, соответствующий красным лучам. Результат можно было предсказать заранее: красное стекло потому и красное, что пропускает только красные лучи и поглощает все остальные.

Гораздо более интересен опыт с зеленым стеклом или сосудом, наполненным раствором хлорофилла. В этих случаях от спектра останутся уже не одна, а две полоски: зеленая и темно-красная. А это значит, что зеленое стекло и раствор хлорофилла пропускают не только зеленые, но и красные лучи.

По поводу хлорофилла очень интересны замечания знаменитого русского ботаника К.А.Тимирязева: «Убеждать в том, что хлорофилл пропускает красные лучи, можно очень легко: стоит на залитый ярким солнечным светом ландшафт посмотреть через особое синее стекло, которое пропускает красные и синие лучи, но задерживает зеленые, для того чтобы перед нашими изумленными взорами вся природа совершенно преобразилась – под обычным синим небом мы увидим кроваво-красную растительность <рис.1>. Не в этой ли особенности цвета хлорофилла лежат те трудности, с которыми, очевидно, приходится бороться ландшафтной живописи? На палитре живописца, по-видимому, нет тех зеленых тонов, которые представляет вблизи ярко освещенная зелень».

Оставим, однако, живопись пока в стороне и вернемся к пирометрическому клину. Несколько видоизменим описанный выше опыт. В качестве источника света

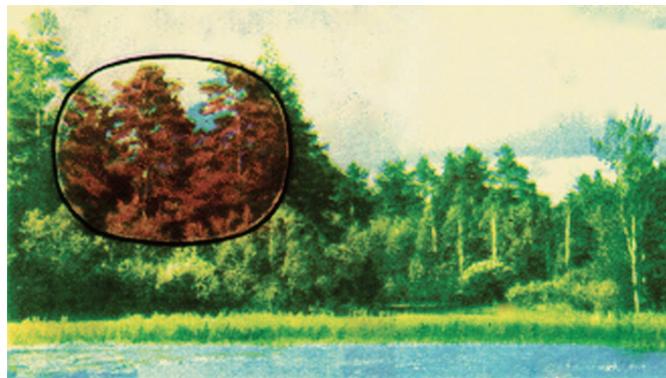


Рис. 1

используем нить лампы накаливания и между ней и призмой поместим пирометрический клин (рис.2). На стене мы опять увидим две полоски – зеленую и красную, причем соотношение яркостей этих полосок будет зависеть от толщины клина в месте прохождения светового луча. Если луч проходит сквозь тонкую часть

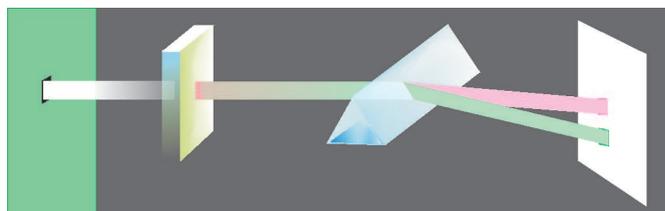


Рис. 2

клина, зеленая полоска значительно ярче, чем красная, при увеличении толщины клина яркость обеих полосок снижается, а начиная с некоторого момента красная полоска становится ярче зеленой. Когда зеленая полоска ярче красной, нить видна зеленой, при обратном соотношении яркостей полосок – красной. При равенстве яркостей полосок нить кажется бесцветной.

Как будто загадка зеленого стекла разъяснена. Однако остается еще объяснить, почему с ростом толщины стекла соотношение яркостей красной и зеленой полосок меняется на обратное. Оказывается, объяснение вытекает из важного закона оптики, открытого одним бравым моряком лет двести тому назад.

Капитан дальнего плавания и геометрическая прогрессия

Капитан дальнего плавания француз Пьер Бугер, живший в первой половине восемнадцатого столетия, не был, пожалуй, простым моряком. Им написаны объемистые трактаты по конструкции судов, по навигации и другим отраслям морского дела. Французская Академия наук присудила Бугеру три премии за работы по морскому делу и избрала его своим членом. Вкус к морской науке Бугер унаследовал от своего отца, профессора гидрологии.

Если морем Бугер занимался по наследству, то оптикой он занялся по собственному почину. Бугер первый обратил внимание на проблемы, связанные с изменениями силы света и освещенности. Он придумал первые приборы для измерения силы света и установил, что сила света Солнца в 300 тысяч раз больше

силы света Луны, а в его «Оптическом трактате» содержался очень важный закон ослабления света в поглощающих телах.

Чтобы понять смысл этого закона (его называют законом Бугера), воспользуемся не очень правдоподобной, но наглядной аналогией из области спорта. Представим себе, что мы присутствуем на плохо подготовленном массовом состязании в беге на семь километров. Слабая тренировка участников стала сказываться сразу, и болельщики быстро установили следующий любопытный закон – лишь одна треть бегунов, начавших данный километр дистанции, добегают его до конца. Старт приняли 2187 участников, к концу первого километра на дистанции остались 729, к концу второго – 243, к концу третьего – 81, четвертого – 27, пятого – 9, шестого – 3 участника. Наконец, седьмой километр заканчивает только 1 бегун, объявленный победителем. Судьям даже не пришлось воспользоваться секундомером для определения того, кто первым коснулся финишной ленточки.

Выпишем в строку числа бегунов, пробежавших различные дистанции:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

Нетрудно видеть, что эти числа образуют убывающую геометрическую прогрессию, в которой каждое последующее число в три раза меньше предыдущего, стоящего слева от него.

Вернемся от спорта к оптике. Возьмем кусок окрашенного стекла. Допустим, что он пропускает одну треть падающего на него света. Добавим второй такой же кусок. Он пропустит одну треть светового потока, прошедшего через первый кусок, т. е. одну девятую часть светового потока, падающего на первый кусок. Поставив еще один кусок, получим одну двадцать седьмую часть и так далее. Ясно, что такой же результат получился бы просто при увеличении толщины куска стекла вдвое, второе и т.д. Когда толщина стекла растет, доля пропускаемого света падает по геометрической прогрессии.

Это и есть закон, открытый Бугером. В примере с бегунами мы уже видели, как быстро уменьшаются числа в геометрической прогрессии.

Еще немного спорта

Вооруженные законом Бугера, мы можем смело броситься в атаку на загадку зеленого стекла. Однако прежде вспомним опять о спорте и представим себе такую ситуацию.

Новички, так неудачно пробежавшие дистанцию в семь километров, самоуверенно вызвали на соревнование команду опытных мастеров. Мастера приняли вызов и даже предложили весьма великодушные условия: на старт выходят все 2187 новичков и только 512 мастеров; победившей считается команда, в которой большее число бегунов добежит до конца седьмого километра.

На состязание обе команды явились в цветных майках: новички надели зеленые майки, мастера – красные. После первого километра сторонники новичков

приободрились. Из команды новичков осталось, как и в прошлый раз, 729 бегунов, а у мастеров – 256. Большой численный перевес сохранился на стороне новичков. Поклонники мастеров были несколько обескуражены тем, что в этой команде сразу вышли из строя половина бегунов. Но один из болельщиков, сделав карандашом нехитрые выкладки на папиросной коробке, уверенно заявил, что если дело пойдет так же и дальше, то выиграют наверняка мастера.

После второго километра «зеленых» осталось 243, а «красных» – 128. После третьего километра «зеленых» – 81, а «красных» – 64. Настроение сторонников новичков заметно стало падать. После четвертого километра «зеленых» – 27, а «красных» – 32. Все с почтением посмотрели на предсказателя с коробкой папирос. Оставшиеся три километра только усугубили поражение «зеленых». После пятого километра «зеленых» – 9, «красных» – 16, после шестого – 3 и 8. Наконец, к финишу в конце седьмого километра пришли один «зеленый» и четыре «красных».

Выпишем друг под другом числа бегунов в обеих командах:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1
512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4.

Во второй строке отношение последующего числа к предыдущему равно одной второй, а в первой строке, как и раньше, – одной трети. Оказалось, что эта небольшая разница в числах не только была достаточна, чтобы компенсировать большой начальный численный перевес команды «зеленых», но и привела команду «красных» к победе. Нужна была только достаточно длинная дистанция, не менее четырех километров. На более коротких дистанциях победили бы «зеленые».

В поведении зеленых и красных лучей и «зеленых» и «красных» бегунов существует полная аналогия (рис.3). Зеленое стекло лучше пропускает темно-красные лучи, чем зеленые, причем, согласно закону Бугера, различие в пропускании этих лучей быстро растет с ростом толщины слоя стекла («длинная дистанция»).

Но тогда естественно возникает вопрос: почему в тонком слое стекло кажется зеленым, если оно пропускает темно-красные лучи лучше, чем зеленые? Объясняется это спектральной характеристикой источника света, с которым проводился опыт: зеленый участок спектра гораздо ярче, чем темно-красный (команда «зеленых» многочисленнее «красных»). В тонком слое стекла («короткая дистанция») разница в поглощении

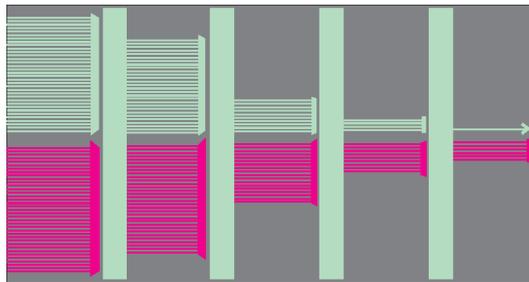


Рис. 3

темно-красных и зеленых лучей еще не настолько велика, чтобы перекрыть перевес в начальной яркости зеленых лучей. Основную роль играют зеленые лучи, что и дает соответствующую окраску. С ростом толщины стекла, согласно закону Бугера, пропускание зеленых лучей падает несравненно быстрее, чем темно-красных (числа «зеленых» и «красных» бегунов на больших дистанциях). При достаточно большой толщине разница в пропускании уже так велика, что перекрывает начальный перевес в яркости зеленых лучей, и от всего спектра практически остается только темно-красная полоска.

Осталось только объяснить, какую роль играет температура раскаленного тела, на которое мы смотрим сквозь стекло. Известно, что чем сильнее мы раскалим любой металлический предмет, тем белее даваемый им свет. Недаром говорят: «довести до белого каления». Так, при недостаточном накале лампочка накаливания дает красноватый свет, при нормальном накале – гораздо более белый. Объясняется это тем, что с ростом температуры яркость зеленых и синих лучей растет гораздо быстрее, чем красных. Значит, при более высокой температуре разница в яркостях зеленой и темно-красной частей спектра больше, и ее труднее перекрыть поглощением в стекле. Вот почему при более высоких температурах раскаленного тела для изменения цвета наблюдаемого излучения нужно более толстое стекло.

Древнерусские иконы и наблюдения Леонардо да Винчи

На некоторых древнерусских иконах бросается в глаза необычная расцветка одеяний святых. Складки изображены краской, обладающей резко отличным цветом от цвета гладких частей одеяния. Например – красные складки на зеленом плаще (рис.4) или оранжевые складки на синем одеянии. Острый глаз древнерусского богомаза заметил, что некоторые ткани обладают двухцветностью и в складках приобретают другой цвет, чем на ровной поверхности. Причина двухцветности тканей та же, что и в опыте с пирометрическим клином.

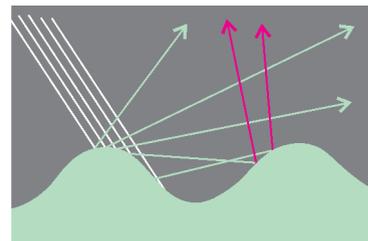
Если луч света, отраженный от двухцветной ткани, пропустить сквозь призму, то в спектре обязательно останутся две цветные полоски. Для зеленой двухцветной ткани картина будет той же, что с зеленым стеклом: останутся красная и зеленая полоски, остальные лучи поглотятся. Двухцветная зеленая ткань лучше отражает красные лучи, чем зеленые, но при однократном отражении от гладкой поверхности ткани сказывается большая яркость зеленых лучей в падающем свете. Поэтому в однократно отраженном свете все-таки преобладают зеленые лучи. В складках ткани свет испытывает по крайней мере два последовательных отражения. При втором отражении красные лучи отражаются опять сильнее, чем зеленые, и в результате двукратного



Рис. 4

отражения происходит то же, что и в зеленом стекле большой толщины: яркость красных лучей становится больше яркости зеленых лучей и ткань меняет цвет. Многократные отражения усиливают этот эффект.

Большинство обычных тканей обладает прямо противоположными свойствами. В



складках получается более насыщенный, но такой же цветовой тон, что и на ровной поверхности. Объясняется это опять-таки повторными отражениями. Свет, отраженный от таких тканей, после разложения призмой дает только одну полоску в спектре вместо двух полосок у двухцветных тканей. Например, свет, однажды отраженный от желтого бархата, дает в спектре широкую полосу с наибольшей яркостью в желтой части. Кроме желтых лучей в спектре присутствуют еще зеленые и голубые лучи. При двукратном отражении полоса в спектре становится уже, так как голубые лучи практически исчезают совсем, а зеленые сильно ослабляются. Это работает все тот же закон геометрической прогрессии. В результате желто-оранжевый отраженный свет делается более насыщенным.

Один из наиболее разносторонних гениев, живших когда-либо, – Леонардо да Винчи – не только заметил своим глазом художника эту особенность складок тканей, но и как ученый дал вполне правильное объяснение наблюдаемому явлению. В «Трактате о живописи» он пишет: «Отраженные цвета имеют гораздо большую красоту, чем природный цвет этих тел, как это видно на открывающихся складках золотых тканей... когда одна поверхность отражается от другой, стоящей напротив, а эта в ней, и так последовательно до бесконечности».

В том же «Трактате о живописи» сказано: «Рефлексы (отражения) от живого тела, получающего свет от другого живого тела, более красны и более превосходно телесного цвета, чем любая другая часть живого тела, какая только может быть у человека». Созерцая с наслаждением в залах «Эрмитажа» изумительные полотна Ван Дейка и Рубенса, нетрудно заметить, что и для этих великих мастеров эффект многократных отражений не был тайной.

Парадокс стола на четырех ножках

Г. ЛЮБАРСКИЙ

ПОЧЕМУ АВТОР ПРЕДЛАГАЕТ ЧИТАТЕЛЯМ РАССКАЗ о таком незатейливом предмете, как деревянный стол? Забыл, что живет в двадцать первом веке? Нет, не забыл. Предлагаемый рассказ действительно не содержит ничего неизвестного специалистам. Тем не менее, он весьма поучителен, так как показывает, что даже в простейшем случае при решении физической задачи неизбежно принимаемые на веру те или иные казались бы правдоподобные предположения могут привести к самым парадоксальным выводам. Это будет показано на примере простого деревянного стола.

Первая попытка выяснить, как распределяется меж-

ду ножками стола нагрузка со стороны стоящих на столе предметов, приведет нас к некоторому парадоксу. Разрешив его, мы окажемся лицом к лицу с совершенно новой для нас картиной и новыми задачами. Такой этап исследования – обнаружение парадокса в процессе теоретического исследования и поиски выхода из него – присущ многим физическим задачам, в том числе и некоторым задачам современной физики. Это и побудило автора вспомнить описанную ниже историю.

В студенческие годы я прочел воспоминания одного известного русского механика. К сожалению, прошедшие с тех пор семь десятилетий стерли в памяти имя этого ученого. Остался только один рассказанный им яркий эпизод. Автор воспоминаний обнаруживает поразительную вещь – методы статики пасуют перед такой простой задачей, как расчет усилий ножек стола, на котором покоится гиря, если у стола четыре ножки. И это при том, что задача о столе с тремя ножками решается элементарно. В чем же дело?

Не нужно думать, что математическая задача о четырехногом столе является настолько сложной, что никто не может ее решить. Наоборот, задача элементарно проста, и, как скажет любой математик, найти ее полное решение не составляет никакого труда. Однако...

Приступим к решению задачи о столе с четырьмя ножками. Помимо сил тяжести (стола и стоящей на нем гири) на стол действуют еще четыре силы, которые не дают провалиться ни одной из четырех ножек. Это реакции опоры (пола), приложенные к ножкам стола в точках их соприкосновения с полом. Все эти силы направлены вертикально. Силы трения отсутствуют, поскольку стол неподвижен и никто не старается



Иллюстрация В.Иванюка

его сдвинуть. Задача состоит в том, чтобы вычислить все четыре реакции опоры.

Применим законы статики. Для равновесия стола сумма сил реакции должна уравновесить общую силу тяжести P гири и стола:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = P.$$

Это, разумеется, еще не все условия равновесия. Силы должны быть так сбалансированы, чтобы не вызвать вращения вокруг ни одной из возможных осей. Возьмем в качестве двух осей две взаимно перпендикулярные горизонтальные прямые, соединяющие нижние концы каких-либо трех ножек стола. Воспользуемся правилом рычага, согласно которому для его равновесия сумма моментов сил, стремящихся повернуть рычаг вокруг оси в одну сторону, должна уравновешиваться суммой моментов сил, стремящихся повернуть рычаг в противоположную сторону. Это даст нам еще два уравнения. Вертикальную ось можно игнорировать, так как все приложенные силы вертикальны и потому не могут создать вращающего момента относительно этой оси. Конкретный вид уравнений мы приведем, когда он нам понадобится.

Итак, у нас есть три уравнения статики и четыре (по числу ножек) неизвестные силы. Возникшая ситуация настораживает, так как число неизвестных превышает число уравнений. Во всех подобных случаях, как правило, если существует хотя бы одно решение, то их существует бесконечно много. Более подробное исследование нашей системы трех уравнений показывает, что она всегда имеет бесконечно много решений и все они могут быть легко найдены. Одно из этих решений дает нам истинные реакции ножек стола, но, увы, статика не может однозначно указать это единственное решение. В этом и состоит неразрешимость задачи в рамках статики.

Что же дала нам статика? Очень многое. Она подсказала, что сделанная нами попытка перейти от конкретной физической задачи к задаче математической некорректна. Попросту говоря, мы оказались плохими физиками. Здесь мы подходим к самой интересной стадии исследования – поиску ошибки, или, лучше сказать, критическому анализу сделанных допущений. Ничего плохого нет в том, что, приступая к исследованию физической задачи, мы ввели ряд упрощающих предположений. Это неизбежный этап при решении всякой физической задачи, существенно отличающий ее от всякой математической задачи. Кстати сказать, это одно из обстоятельств, отличающих в общих чертах склад ума физика от склада ума математика.

Читатель, вероятно, уже догадался, в чем была наша ошибка. Мы воспользовались понятием «абсолютно твердое тело» в ситуации, когда это понятие приводит к парадоксу – невозможности вычислить реакции опоры. Конечно, ножки стола представляются очень твердыми, мысленная замена их идеализированными абсолютно твердыми кажется вполне законной, тем более что такая замена оказалась допустимой в случае стола на трех ножках и в многочисленных задачах, которые можно найти в задачниках по статике.

Парадоксальным представляется то обстоятельство, что сколь бы твердыми ни были ножки, их ни в коем случае нельзя считать абсолютно твердыми в смысле статики твердого тела. Дело в том, что под тяжестью груза ножки несколько укорачиваются, причем величины этих укорочений зависят от действующих на них сил. Для того чтобы стол опирался на плоский пол всеми четырьмя ножками, их нижние концы в нагруженном состоянии должны находиться в одной плоскости, или, как принято говорить, быть *компланарны*. Вспомним, что уравнения статики привели нас к множеству решений. Значит, из них нужно выбрать то, которое обеспечивает компланарность нижних концов ножек стола. Заранее не ясно, к чему приведет это предположение. Хорошо, если есть только одно решение, сохраняющее такое расположение концов ножек стола. Тогда парадокс неопределенности решения исчезает. А как быть, если таких решений несколько или, что еще хуже, нет ни одного?

Выходит, исследование продолжается, но объект исследования изменился. Теперь это стол, ножки которого могут укорачиваться под действием нагрузок. А столешница остается абсолютно твердой, так же как и крепления, соединяющие ее с ножками. Последнее означает, что ножки и после деформации остаются перпендикулярными плоскости столешницы. Можно подумать, что все стало только хуже – к четырем неизвестным силам добавились еще четыре неизвестные величины – длины ножек после деформации. Это верно, но легко исправимо. Нужно только иметь в виду, что, отказываясь от какой-либо идеализации, ее следует не отбрасывать, а заменять другой, более реалистичной. В нашем случае мы заменим понятие абсолютно твердого тела понятием *упругого тела, подчиняющегося закону Гука*. По отношению к стержню это означает, что изменение длины стержня под действием приложенных к нему двух равных по величине сжимающих или растягивающих сил прямо пропорционально длине стержня и величине одной из этих сил. Применяя закон Гука к каждой из четырех ножек, запишем

$$\delta z_i = \gamma_i F_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где γ_i – коэффициент пропорциональности, а δz_i – уменьшение длины ножки под действием силы реакции пола F_i и уравновешивающей ее силы давления со стороны столешницы. Заметим, что чем жестче материал, из которого сделаны ножки, тем меньше коэффициент γ . Предел $\gamma \rightarrow 0$ описывает абсолютно твердое тело.

С помощью закона Гука и можно получить недостающее четвертое уравнение. Оно выглядит особенно просто в том случае, когда точки крепления ножек к столешнице расположены в вершинах прямоугольника. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся именно этим случаем.

Пронумеруем ножки так, чтобы ножки с номерами 1 и 3 лежали на одной диагонали прямоугольника. Тогда условие компланарности будет выглядеть так:

$$\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4,$$

где λ_k — длина ножки с номером k после ее деформации:

$$\lambda_k = l - \delta z_k.$$

Последние два соотношения вместе с законом Гука дают искомое четвертое соотношение между силами:

$$F_1\gamma_1 + F_3\gamma_3 = F_2\gamma_2 + F_4\gamma_4.$$

Итак, после учета сжимаемости ножек число уравнений сравнялось с числом ножек. Парадокс исчез. Более того, оказывается, что полученная система уравнений имеет единственное решение и его легко найти. Что ж, приходится согласиться с парадоксальным утверждением: сколь бы твердым ни был материал, из которого сделаны ножки, его нельзя считать абсолютно твердым. Если все ножки сделаны из одного и того же материала, то последнее уравнение принимает вид

$$F_1 + F_3 = F_2 + F_4.$$

Однако радоваться рано. Как это часто бывает, именно после того, как решение найдено, его анализ обнаруживает неполную завершенность теории. В нашем случае решение показывает, что при некоторых положениях центра тяжести одна из четырех сил реакции пола оказывается отрицательной. Но по физическому смыслу задачи это невозможно, так как силы, действующие на ножки со стороны пола, не могут быть направлены вниз (ни одна из ножек не приклеена к полу). Мы опять пришли к парадоксу, но на этот раз легко устранимому.

Если на предыдущем этапе нам нужно было избавиться от лишних решений, то теперь у нас нет ни одного физически разумного решения. Это означает, что мы неоправданно сузили область поиска, т.е. учли не все возможные положения стола с четырьмя ножками, когда он стоит на полу. И действительно, мы проявили небрежность, не подумав, что сжимаемость ножек позволяет столу стоять и на трех ножках даже тогда, когда в ненапряженном состоянии все его четыре ноги имеют строго одинаковую длину.

Возникает вопрос: как учесть это обстоятельство? А вот как: каждый раз, решая задачу о столе, мы должны независимо рассмотреть случай, когда он стоит на всех четырех ножках, и четыре случая, когда одна из ножек не касается пола.

И еще. Сделанное предположение о равенстве длин ножек никаких существенных упрощений не вносит и в то же время является нереалистичным. Поэтому в дальнейшем мы будем считать длины ножек в ненапряженном состоянии, вообще говоря, различными.

Не приходилось ли вам подкладывать под одну из ножек стола сложенный в несколько раз лист бумаги и добиваться того, чтобы стол перестал «переступать» с ноги на ногу? Успех этой маленькой хитрости показывает, что если длины ножек хотя и не равны, но отличаются друг от друга достаточно мало (на толщину подложенной бумажки), то стол твердо стоит на всех своих четырех ножках. Однако если разности между

длинами ножек достаточно велики, то одна из ножек не касается пола, и стол оказывается трехногим. Это позволяет говорить, что у стола имеется *пять фаз* — в одной из них он стоит на всех четырех ножках, в остальных фазах одна из ножек не касается пола. Возникает вопрос об устойчивости этих фаз и прежде всего первой фазы, так как именно таким каждый хотел бы видеть свой стол.

Повседневный опыт показывает, что первая фаза может быть устойчивой — при достаточно хорошей точности изготовления ножек стол может стоять на четырех ножках. Это подтверждается и расчетом, использующим ту же систему четырех уравнений, если внести очевидную поправку: вместо одинаковой у всех четырех ножек длины l ввести четыре индивидуальные длины l_1, l_2, l_3, l_4 каждой из ножек в ненапряженном состоянии. При этом уравнение условие компланарности примет вид

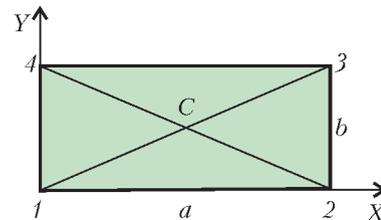
$$\Delta \equiv (l_2 + l_4) - (l_1 + l_3) = -F_1 l_1 \gamma_1 + F_2 l_2 \gamma_2 - F_3 l_3 \gamma_3 + F_4 l_4 \gamma_4.$$

Введенная величина Δ равна нулю, если в ненагруженном состоянии концы ножек компланарны. Поэтому условимся называть Δ *параметром некомпланарности*.

В отличие от полученного ранее четвертого соотношения между силами последнее уравнение не является однородным относительно коэффициентов γ_i , если $\Delta \neq 0$. Представим себе, что все четыре параметра γ_i умножены на одно и то же число. При этом смысл нашего уравнения не изменится, если $\Delta = 0$, и окажется другим в противном случае.

Как же происходит переход из одной фазы в другую и какие «фазовые переходы» возможны? Различные ситуации в нагрузке ножек названы фазами. Поэтому появился термин «фазовый переход». Единственное, что его роднит с термодинамическим фазовым переходом (без кавычек), это то, что и тот и другой происходят под влиянием внешних воздействий. Ниже мы получим довольно полную картину возможных фазовых переходов в нашем случае.

Начнем с некоторых предварительных соображений. Вообразим стол, у которого точки крепления ножек образуют прямоугольник со сторонами a и b . Его диагонали делят столешницу на четыре треугольника (см. рисунок). Пусть центр тяжести стола с



гирей находится над треугольником $12C$. В этом случае стол, очевидно, не может стоять на трех ножках с номерами $1, 3, 4$ или $2, 3, 4$. Допустимыми остаются только фазы (1234) , (123) и (124) . В какой именно из трех фаз окажется стол, зависит, конечно, от конкретного положения центра тяжести внутри рас-

смаатриваемого треугольника – условимся называть его *базовым*.

У каждой из этих фаз есть свой *ареал существования*, т.е. совокупность тех положений центра тяжести, которые допускают данную фазу. Ареал фазы (1234) обозначим символом Γ_0 . Пусть Γ_3 – это ареал фазы (123), а Γ_4 – ареал фазы (124). Воспользуемся изображенными на рисунке осями координат X и Y . Обозначим через x и y прямоугольные координаты центра тяжести системы «стол + гиря». Пусть a – абсцисса точки 2, а b – ордината точки 3. Из законов статики сразу же получаем

$$(F_3 + F_4)b = Py,$$

$$(F_2 + F_3)a = Px,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = P.$$

В действительности, из-за сжимаемости ножек, эти равенства являются приближенными. Тем не менее, ими можно пользоваться, если разности длин ножек как в ненагруженном, так и в нагруженном состоянии не превышают нескольких миллиметров, а стороны a и b прямоугольника, соединяющего точки крепления ножек стола, порядка одного метра. Так, например, если разность длин двух ножек, вызванная неточностью изготовления, составляет три миллиметра, то это изменит расстояние между их концами менее чем на одну двухсотую миллиметра. (В этом легко убедиться, воспользовавшись теоремой Пифагора.) Поэтому четырехугольник с вершинами в точках, в которых ножки касаются пола, можно с высокой степенью точности считать равным прямоугольнику 1234. Как следствие этого, отклонения ножек от вертикали оказываются порядка сотысячных долей радиана. Столь же мало и отличие полученных нами последних соотношений от точных соотношений, диктуемых механикой.

Предположение, лежащее в основе наших оценок, выполняется, если материал, из которого сделаны ножки стола, является достаточно жестким, а их длины в ненагруженном состоянии достаточно мало отличаются друг от друга. Поэтому в дальнейшем мы не будем интересоваться эффектами, связанными с изменениями расстояний между концами ножек стола.

Как найти ареалы возможных фаз? Вид законов статики не зависит от того, в какой фазе находится стол. Отличия сказываются в другом. Так, в фазе (1234) все четыре силы положительны, а в остальных фазах одна из сил равна нулю, поскольку только три ножки касаются пола. Например, в фазе (123)

$$F_i > 0 \text{ для } i = 1, 2, 3 \text{ и } F_4 = 0.$$

Другое отличие состоит в том, что для фазы (1234) условие компланарности $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4$ выполняется обязательно, а для всех остальных фаз оно заменяется неравенствами, поскольку в каждой из фаз одна из ножек находится *над* полом. Скажем, для фазы (123) справедливо неравенство $\lambda_1 + \lambda_3 > \lambda_2 + \lambda_4$. Поясним его. Неравенство можно превратить в равенство, если

мысленно *нарастить* ножку 4 так, чтобы концы всех четырех ножек оказались в одной плоскости – плоскости пола. Наше неравенство означает, следовательно, что *до* наращивания нижний конец ножки 4 находился над полом. Это условие вместе с тремя уравнениями, полученными из законов статики, и позволяет найти ареал фазы (123).

Задача о столе показала, что в процессе исследования физического объекта иногда приходится существенно модифицировать описание его свойств, отказываясь от излишне упрощенной модели в пользу более реалистичной. В рассмотренном нами случае исходная простая модель оказалась неполной – она не позволила найти единственно правильное решение.

Однако, это только одна сторона медали. Если не посмотреть на другую ее сторону, то можно прийти к глубоко ошибочному убеждению, будто упрощенные представления (модели объектов) – это ловушки для неискушенных исследователей. Размеры статьи не позволяют развить эту мысль сколько-нибудь полно, поэтому ограничимся двумя примерами, чтобы не быть уж совсем голословными.

Законы Кеплера дают нам максимально простую картину движения планет вокруг Солнца: планеты движутся по эллипсам. Наличие других планет несколько затуманивает эту картину, но это интересует только астрономов. Если хотите, законы Кеплера очень демократичны. Действительно, если бы эти законы остались в рукописях ученого как сырой материал, как первое приближение обработки результатов наблюдений, а в журналы и учебники попали только уточненные формулы, что бы знала широкая публика о нашей Солнечной системе? Да и самим ученым «пришлось бы не сладко». Вспомним, что планета Нептун была открыта благодаря наблюдаемым *отклонениям от законов Кеплера* в движении Урана, которые (отклонения) нельзя было объяснить влиянием всех остальных известных к тому времени планет.

Второй пример – это теория малых колебаний. Наука и техника обязаны ей такими фундаментальными понятиями, как собственные частоты и колебания, кратность частот и их расщепление, спектры, обертоны и т.п.. Между тем, все эти понятия невозможно или, по крайней мере, очень трудно, определить, не обращаясь к заведомо приближенной теории малых колебаний. Сама же эта теория возникла в результате линеаризации относящихся к делу систем дифференциальных уравнений, т.е. «бесцеремонного» отбрасывания квадратов, кубов и всех более высоких степеней искомого малых отклонений изучаемой системы от ее равновесного состояния.

Вывод – сознательное обращение к приближенным моделям бывает очень плодотворным.

Автор признателен профессору М.И.Каганову за оказанную помощь в процессе работы над статьей.

Прокоп Дивиш и Янош Сегнер

А. ВАСИЛЬЕВ

ВО ВСЕМ МИРЕ ИЗОБРЕТАТЕЛЕМ ГРОМООТВОДА считается американский ученый Бенджамин Франклин. И это действительно так. Однако изобретателей громоотвода было, как минимум, двое. Независимо от Франклина в 1754 году чешский священник *Прокоп Дивиш* сконструировал и установил громоотвод в монастыре Лука близ селения Приметице.

Родился будущий изобретатель неподалеку от этих мест в 1698 году, а высшее образование получил в иезуитской латинской школе в Зноймо. После принятия монашеского обета Дивиш сам преподавал философию в церковно-приходской школе, а в 1733 году защитил степень доктора теологии в Зальцбургском университете. Одно время Дивиш был настоятелем монастыря Лука, но уже с 1742 года он стал священником маленькой церкви в Приметице, где и оставался до своей кончины в 1765 году.

Обязанности деревенского священника оставляли Дивишу достаточно времени для научных занятий, которыми он интересовался еще с юношеских лет. Вначале он занялся, как говорят теперь, прикладными исследованиями и построил в своем приходе несколько водоводов. Затем его интересы обратились к конструированию музыкальных инструментов, результатом чего стало создание струнного «Денисдора», который имитировал звуки многих других инструментов.

С начала 50-х годов Дивиш начал проводить опыты по исследованию электричества. Электрические заряды он получал трением, а также с использованием лейденских банок собственной конструкции. На этом пути Дивиш изучил все основные электростатические явления и даже продемонстрировал их Имперскому двору в Вене.

Известие о гибели от электрического разряда Георга Рихмана, занимавшегося изучением молний в России, привлекло внимание Дивиша к атмосферному электричеству. Для сбора атмосферных зарядов Дивиш сконструировал «погодную машину», которая внешне больше всего напоминала современные телевизионные антенны. На высоком шесте (в последней версии — высотой 41,5 м) он установил горизонтальный металлический крест с дополнительными перекладинами, на конце каждой из которых был укреплен ящик с металлическими опилками. По задумке изобретателя, ящики должны были накапливать атмосферное электричество, однако, поскольку они были хорошо заземлены, конструкция представляла собой именно громоотвод.

В таком виде громоотвод Дивиша простоял в монастыре Лука около пяти лет, но после пожара 1759 года он, на всякий случай, был разобран на части. Новый громоотвод Дивиш воздвиг над своей церковью в Приметице лишь в 1761 году. Попытки убедить Вену в необходимости построения громоотводов по всей империи не увенчались успехом, так что Дивиш сконцентрировал свои дальнейшие исследования на изучении влияния электричества на живые тела и, в конечном счете, на электротерапии. Свои наблюдения за природой вещей Дивиш изложил в «Трактате об атмосферном электричестве», опубликованном еще при жизни ученого.

Янош Андрош Сегнер родился в 1704 году в Братиславе, хотя в те годы этот город именовался либо по-венгерски Посони, либо по-немецки Пресбург. И тот, и другой вариант в случае Сегнера оправданы тем, что в Венгрии он получил начальное образование, а в Германии сложилась его академическая карьера.

Еще в юные годы Сегнер проявил незаурядные способности к точным наукам, однако в Йенский университет в 1725 году он поступил по медицинскому отделению. По окончании университета Сегнер проработал доктором около полутора лет в Дебрецене, но его интерес к математике вновь привел его в Йену, а затем и на кафедру математики Гёттингенского университета. В течение 20 лет он был заведующим этой знаменитой кафедрой, после чего перебрался в Галле, где и оставался профессором вплоть до своего ухода из жизни в 1777 году.

И в Гёттингене, и в Галле Сегнер основал университетские астрономические обсерватории, в стенах которых он уделял много времени наблюдениям за звездным небом. Основные интересы Сегнера были связаны, однако, с земными делами и, в частности, с гидродинамикой. Опираясь на теоретические исследования Даниила Бернулли, он сконструировал горизонтальную водяную турбину. Эта турбина представляла собой наполненный водой цилиндр, в нижней части которого установлены изогнутые в одну и ту же сторону два сопла. Реакция вытекающей струи заставляет цилиндр вращаться в противоположном направлении.

Перу Сегнера принадлежат ряд превосходных учебных пособий, среди которых «Элементы арифметики и геометрии» и «Природа жидких поверхностей». Признанием заслуг Сегнера стало избрание его членом Берлинской, Гёттингенской и Петербургской академий наук, а также Лондонского Королевского общества.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2056» или «Ф2063». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2056, М2057, М2059, М2063, М2064 предлагались на IV этапе, а задачи М2060 – М2062, М2065 – на V этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2056 – М2065, Ф2063 – Ф2072

М2056. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B . Известно, что $A - B = \frac{11\dots1}{N \text{ единиц}}$.

Найдите наименьшее возможное значение N .

Н.Агаханов

М2057. 25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.

С.Волчёнков

М2058. В выпуклом четырехугольнике пять из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.

Н.Агаханов, В.Сендеров

М2059. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.

И.Богданов, В.Сендеров

М2060. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , AC , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q . Прямая l параллельна BC и проходит через A . Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересе-

кают l в точках P и R соответственно. Докажите, что $\angle PQR = \angle B_1QC_1$.

А.Полянский

М2061. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке – от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2 , посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

А.Бадзян

М2062. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полукруглость, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

А.Акопян, И.Богданов

М2063. Назовем многогранник *хорошим*, если его объем (измеренный в м^3) численно равен площади его поверхности (измеренной в м^2). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?

М.Мурашкин

М2064. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O . Пусть M и N – центры

окружностей, вписанных в треугольники ADE и ODE соответственно. Докажите, что середина меньшей дуги DE лежит на прямой MN .

М.Исаев

М2065. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n . Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

А.Голованов

Ф2063. Фигурку из металла взвешивают на очень точных весах, используя золотые гирьки, – измеренная масса составила 47,98 г. Когда воздух под колпаком весов откачали до 0,1 атмосферного давления, получилась практически точно 49 г. Определите по этим данным, из какого металла сделана фигурка.

Н.Простов

Ф2064. Длинная тонкая прозрачная трубка заполнена глицерином, посередине трубки находится маленький воздушный пузырек. Когда трубка вертикальна, пузырек всплывает практически с постоянной скоростью 1 см/с. Сделаем трубку горизонтальной, подождем достаточно долго – пока все успокоится, а пузырек перестанет двигаться. Теперь разгоним трубку вдоль ее оси до скорости 10 см/с и продолжим двигать ее с этой скоростью. Найдите смещение пузырька относительно его начального положения. Считать силу сопротивления пропорциональной скорости пузырька относительно жидкости.

А.Повторов

Ф2065. На гладком горизонтальном столе покоится клин массой M , его наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. Маленькая шайба массой m движется по столу со скоростью v_0 и «въезжает» на наклонную поверхность клина. Считая, что наклонная поверхность имеет плавное короткое сопряжение с горизонтальной, найдите время подъема шайбы до верхнего своего положения. Найдите также смещение клина к этому моменту. Трения в системе нет.

Г.Панькевич

Ф2066. Тележки с массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг связаны легким упругим шнуром длиной $L = 0,3$ м. Вначале тележки неподвижны, а шнур почти натянут. Легкой тележке ударом сообщают скорость $v_0 = 2$ м/с в направлении вдоль соединяющего их шнура (рис.1).



Рис. 1

Через какое время произойдет удар тележек друг о друга? Жесткость шнура $k = 20$ Н/м.

Р.Александров

Ф2067. Цикл тепловой машины, работающей с идеальным газом, состоит из двух изохорических участков и двух изотермических участков с отношением температур $T_1 : T_2 = 3$. Известно, что на участке изохорического нагревания газ получает столько же тепла, сколько и на участке изотермического расширения. Найдите КПД этого цикла.

С.Простов

Ф2068. Простой омметр состоит из последовательно соединенных миллиамперметра с током полного отклонения 1 мА, батарейки напряжением 1,5 В и переменного резистора (рис.2).

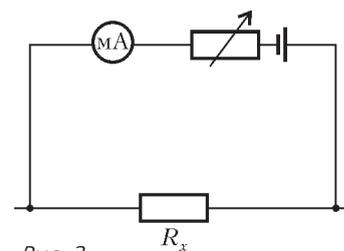


Рис. 2

Регулируя сопротивление этого резистора, мы производим «установку нуля» омметра – при замкнутых выводах омметра стрелку прибора устанавливаем в крайнее правое положение («ноль омметра»). При разомкнутых выводах ток нулевой – это соответствует «бесконечному» измеряемому сопротивлению. Можно ли при помощи этого прибора измерить сопротивления резисторов R_x порядка 1 Ом; 1кОм; 1МОм? Какое сопротивление покажет этот омметр, если к его выводам подключить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 3?

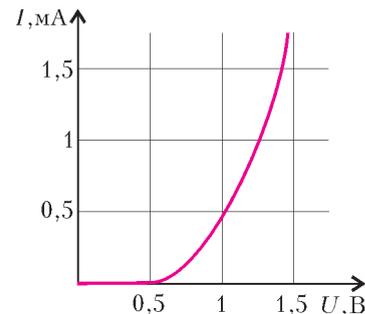


Рис. 3

А.Старов

Ф2069. В схеме на рисунке 4 «горизонтальная» батарейка имеет напряжение 1 В, три из четырех конденсаторов имеют одинаковые емкости, а последний – вдвое большую. Каким может быть напряжение второй, «вертикальной» батарейки, чтобы хотя бы один конденсатор в этой схеме остался незаряженным? До подключения батареек все конденсаторы заряжены не были.

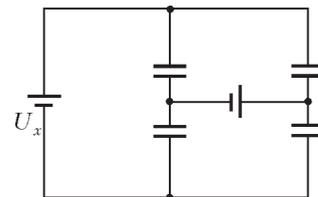


Рис. 4

З.Рафаилов

Ф2070. На одинаковые тороидальные сердечники, сделанные из материала с большой магнитной проницаемостью, намотаны тонким проводом катушки, одна из них содержит вдвое больше витков, чем другая. Катушка с меньшим числом витков имеет индуктивность 0,5 Гн. Катушки соединены параллельно, к выводам катушек присоединены конденсатор емкостью 10 мкФ и батарейка напряжением 6 В с внутренним сопротивлением 10 Ом (рис.5). Когда токи в цепи практически перестали изменяться, батарейку отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора. Какое количество теплоты выделится в каждой катушке после

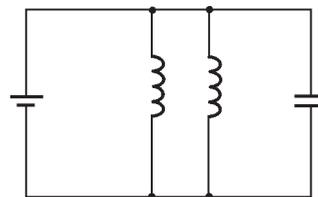


Рис. 5

отключения батарейки? Провод, которым намотаны катушки, имеет очень маленькое сопротивление.

А.Зильберман

Ф2071. На двух одинаковых легких пружинах жесткостью k , прикрепленных к потолку, висят одинаковые грузы массой M . На один из грузов аккуратно ставят грузик массой m , а после того, как колебания прекратятся, быстро переносят грузик на другой груз. Через какое время грузы поравняются? А через какое время скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону?

А.Грузов

Ф2072. Корпус светоизлучающего диода отштампован из прозрачной пластмассы (рис.6). На одном его конце

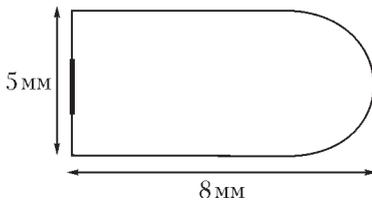


Рис. 6

сформирована линза, излучающая область представляет кружок диаметром 2 мм. Оцените диаметр светлого пятна на экране, расположенном на оси излучения на расстоянии 20 см от диода.

Отражениями света внутри пластмассового корпуса можно пренебречь.

А.Светов

Решения задач M2036 – M2040, Ф2048 – Ф2057

M2036. Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все монеты достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдает по одной монете двум другим. Через некоторое время у Андрея, Бори и Саши оказалось a , b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c) .

Ответ: 76.

Пусть в какой-то момент тройка имела вид (x, y, z) (т.е. у Андрея, Бори и Саши было x , y и $z = 20 - x - y$ монет соответственно). Среди чисел x, y, z не более одного нуля, так как после каждой операции хотя бы у двух мальчиков есть монеты. Числа x, y и z не могут давать три различных остатка при делении на 3, иначе сумма $x + y + z$ делилась бы на 3. Значит, среди чисел x, y, z два числа дают равные остатки при делении на 3; пусть для определенности это первые два числа. Будем называть тройки, удовлетворяющие этому условию, *хорошими*. После выполнения операции хорошая тройка (x, y, z) переходит в одну из троек $(x - 2, y + 1, z + 1)$, $(x + 1, y - 2, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z - 2)$, каждая из которых является хорошей. Нетрудно посчитать количество хороших троек (x, y, z) : при $x = 3k, y = 3l, 0 < k + l \leq 6$, – 27 вариантов, при $x = 3k + 1, y = 3l + 1, 0 \leq k + l \leq 6$, – 28 вариантов, при $x = 3k + 2, y = 3l + 2, 0 \leq k + l \leq 5$, – 21 вариант; всего 76 троек. Остается показать, что каждая из 76 хороших троек может быть получена из любой другой.

Если $x + y > 2$, то с хорошей тройкой (x, y, z) можно

сделать одну из операций $(x, y, z) \rightarrow (x - 2, y + 1, z + 1)$ и $(x, y, z) \rightarrow (x + 1, y - 2, z + 1)$; при этом сумма $x + y$ уменьшается. Значит, за конечное число операций мы можем прийти к хорошей тройке (x', y', z') , в которой $x' + y' \leq 2$, т.е. к тройке $(1, 1, 18)$.

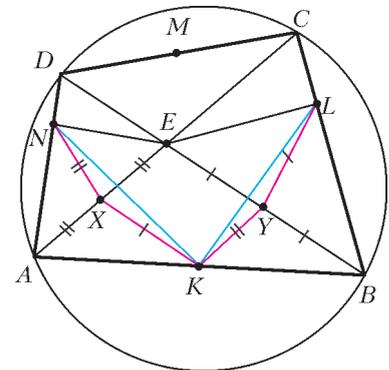
Но от тройки $(1, 1, 18)$ мы можем прийти к произвольной хорошей тройке, так как операция «обратима». Действительно, переход от тройки $(x - 2, y + 1, z + 1)$ к тройке (x, y, z) можно произвести за две операции: $(x - 2, y + 1, z + 1) \rightarrow (x - 1, y - 1, z + 2) \rightarrow (x, y, z)$, если $y > 0$, или $(x - 2, y + 1, z + 1) \rightarrow (x - 1, y + 2, z - 1) \rightarrow (x, y, z)$, если $y = 0$.

Итак, из произвольной хорошей тройки мы можем прийти к тройке $(1, 1, 18)$, а из нее – к любой другой хорошей тройке.

П.Кожевников

M2037. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E ; точки K и M – середины сторон AB и CD ; L и N – проекции точки E на стороны BC и AD .

Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.



Пусть X и Y – середины отрезков AE и BE (см. рисунок). Из прямоугольного треугольника AEN имеем $XN = AE/2$, отсюда $XN = YK$. Аналогично, $YL = XK$. Далее,

$$\begin{aligned} \angle KXN &= \angle KXE + \angle EXN = \angle BEC + 2\angle CAD = \\ &= \angle AED + 2\angle CBD = \angle KYE + \angle EYL = \angle KYL. \end{aligned}$$

Получаем равенство треугольников KXN и KYL , откуда $KN = KL$.

Аналогично доказываем, что $MN = ML$.

Треугольники KML и KMN равны по трем сторонам, значит, точки L и N симметричны относительно прямой KM , откуда $KM \perp LN$.

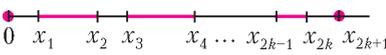
П.Кожевников

M2038. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерема. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

Отметим вначале следующее утверждение для дележа на одной тарелке. Пусть на тарелке $2k$ или $2k - 1$ кусков сыра весом $x_{2k} \geq x_{2k-1} \geq \dots \geq x_1$ (если кусков $2k - 1$, то полагаем $x_1 = 0$). Если двое делят сыр на ней, беря куски по очереди, то первый может обеспечить себе суммарный вес не менее $x_{2k} + x_{2k-2} + \dots + x_2$, а второй – не менее $x_{2k-1} + x_{2k-3} + \dots + x_1$.

И первый, и второй могут добиться желаемого «жадным» алгоритмом, беря каждым ходом наибольший из оставшихся кусков.

Перейдем к решению задачи. Пусть в куче, которую делят Фома и Ерема, $2k + 1$ кусков сыра весом $x_{2k+1} \geq x_{2k} \geq \dots \geq x_1$ (если кусков $2k$, то полагаем $x_1 = 0$). Непересекающиеся отрезки длиной $x_{2k} - x_{2k-1}, x_{2k-2} - x_{2k-3}, \dots, x_2 - x_1$ помещаются на отрезке длиной x_{2k+1} (см. рисунок), поэтому кусок весом x_{2k+1} Фома может разделить на два куска весом a и весом b с разностью весов



$$a - b = (x_{2k} - x_{2k-1}) + (x_{2k-2} - x_{2k-3}) + \dots + (x_2 - x_1),$$

положить эти два куска на первую тарелку, а остальные куски – на вторую.

Если Ерема выбирает первую тарелку, то в результате дележа на двух тарелках Фома получает (действуя «жадным» алгоритмом) не менее $b + x_{2k} + x_{2k-2} + \dots + x_2$, что равно $a + x_{2k-1} + x_{2k-3} + \dots + x_1$, т. е. составляет половину всего сыра. Если же Ерема выбирает вторую тарелку, то Фома получает не менее $a + x_{2k-1} + x_{2k-3} + \dots + x_1$.

П. Кожевников

M2039. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ найдется натуральное z , не представимое в виде $x^n - y!$, где x и y – натуральные.

Утверждение этой задачи можно существенно усилить: мы докажем, что существует бесконечно много натуральных чисел z , не представимых в виде $x^n - y!$ ни для каких натуральных x, y и $n > 2$ (идея такого усиления содержится в решениях школьников Горемыкиной Анны из Долгопрудного и Нижибицкого Евгения из Краснодара).

Положим $z = 36t + 2$, где $t = 4k^2, k = 7u + 1, u \in \mathbf{N}$.

При $y = 1$ простой множитель 3 входит в разложение числа $z + y!$ ровно в первой степени, поэтому $z + y!$ не может быть точной степенью.

При $y \geq 4$ простой множитель 2 входит в разложение числа $z + y!$ ровно в первой степени, поэтому $z + y!$ не может быть точной степенью.

Если $y = 2$, то $z + y! = 36t + 4 = 4(36k^2 + 1)$ не является точным квадратом (иначе $36k^2 + 1 = (6k)^2 + 1$ – точный квадрат) и не является точной степенью $n \geq 3$, так как простой множитель 2 входит в разложение $z + y!$ ровно во второй степени.

Если $y = 3$, то $z + y! = 36t + 8 = 8(18k^2 + 1)$ не является точным кубом (иначе $18k^2 + 1 = 18(7u + 1)^2 + 1$ – точный куб, дающий остаток 5 при делении на 7 – противоречие) и не является точной степенью $n \geq 2, n \neq 3$, так как простой множитель 2 входит в разложение $z + y!$ ровно в третьей степени.

В. Сендеров

M2040. Положительные числа x_1, x_2, \dots, x_k удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{2},$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Укажите пример таких чисел для какого-нибудь k .

в*) Найдите наименьшее k , для которого такой пример возможен.

Утверждение пункта а) следует из пункта в).

б) Возьмем $k = 2501, x_1 = 10, x_2 = x_3 = \dots = x_{2501} = 0,1$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = 100 + 25 = 125, x_1 + x_2 + \dots + x_{2501} = 10 + 250 = 260, x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3 > 1000$, и все неравенства выполнены.

в) **Ответ:** 516.

1. Пусть для некоторого k такие числа x_1, \dots, x_k существуют. Докажем, что тогда существует и набор вида $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = a < \frac{1}{4}, x_k = b > \sqrt{2}$, также удовлетворяющий условию.

Перепишем наши неравенства в виде

$$\sum_{i=1}^k (4x_i - 1)^2 < k, \quad \sum_{i=1}^k (2x_i - x_i^3) < 0.$$

Пусть $q_i = (4x_i - 1)^2$. Тогда $x_i = \frac{-\sqrt{q_i} + 1}{4}$, если $x_i \leq \frac{1}{4}$;

в противном случае $x_i = \frac{\sqrt{q_i} + 1}{4}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1, \dots, x_d \leq \frac{1}{4},$

$x_{d+1}, \dots, x_k > \frac{1}{4}$. Тогда

$$2x_i - x_i^3 = \frac{1}{64} (31 - 3q_i \mp (29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2})),$$

и наши неравенства запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^k q_i < k, \quad \sum_{i=1}^d (31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) + \sum_{i=d+1}^k (31 - 3q_i + 29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}) < 0. \quad (1)$$

Функция $f_2(x) = 31 - 3x + 29x^{1/2} - 3x^{3/2}$, очевидно, выпукла вверх на области определения (каждое слагаемое выпукло вверх). Поэтому если $d \leq n - 2$ (т.е. во второй сумме в последнем неравенстве хотя бы два слагаемых), то q_{d+1} и q_{d+2} можно заменить на $q'_{d+1} = 0, q'_{d+2} = q_{d+1} + q_{d+2}$ (соответственно изменив x_i), тем самым уменьшив левую часть второго неравенства в (1) и не изменив сумму q_i . При этом $x'_d = \frac{1}{4}$, т.е. для нового набора значение d увеличилось на 1. Так можно продолжать, пока мы не получим $d \geq k - 1$. Заметим, что случай $d = k$ невозможен, так как тогда $2x_i - x_i^3 > 0$ при всех i . Значит, в новом наборе $d =$

$= k - 1$, и он по-прежнему удовлетворяет неравенствам (1).

Теперь, положив $\bar{q} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d q_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^d (31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) \geq d(31 - 3\bar{q} - 29\bar{q}^{1/2} + 3\bar{q}^{3/2})$$

согласно неравенству Йенсена, так как функция $f_1(x) = 31 - 3x - 29x^{1/2} + 3x^{3/2}$ выпукла вниз на области определения. Таким образом, если все числа q_1, \dots, q_d заменить на \bar{q} , то неравенства (1) будут выполнены (так как их сумма не изменится). Мы получили требуемый набор с $k - 1$ одинаковым числом $a = x_1 = \dots = x_{k-1}$ и одним числом $b = x_k$. При этом, очевидно, $a \leq \frac{1}{4}$; поскольку $2b - b^3 < 0$, то получаем $b > \sqrt{2}$.

2. Таким образом, осталось выяснить, при каком минимальном k существуют такие $a \leq \frac{1}{4}$, $b > \sqrt{2}$, что (здесь $d = k - 1$)

$$da^2 + b^2 < \frac{da + b}{2}, \quad da + b < \frac{da^3 + b^3}{2}.$$

Перепишем эти неравенства в виде

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} < d < \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3}. \quad (2)$$

Из (2) и вышесказанного следуют условия

$$\frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b} > \frac{2a - a^3}{a - 2a^2}, \quad a \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \quad b > \sqrt{2}. \quad (3)$$

Оценим, какое минимальное значение может принимать выражение

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} \quad (4)$$

при условиях (3). Согласно (2), это и будет оценкой снизу для d .

Положим

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - x} = \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{1}{4} \left(2x + 1 - \frac{7}{2x - 1} \right).$$

Из последнего представления видно, что $g(x)$ возрастает на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Первое неравенство в (3) имеет вид $g(a) < g(b)$. Будем уменьшать b , пока не достигнем значения, при котором $g(b) = g(a)$. Так как $g(\sqrt{2}) = 0 < g(a)$, то новое значение будет больше $\sqrt{2}$. При этом, очевидно, (4) уменьшится.

Таким образом, мы можем считать, что

$$\frac{b^2 - 2}{2b - 1} = \frac{2 - a^2}{1 - 2a} = t.$$

Теперь a и b — два различных корня квадратного

уравнения $x^2 - 2 = t(2x - 1)$, поэтому

$$a + b = 2t \Rightarrow b = 2t - a = 2 \frac{2 - a^2}{1 - 2a} - a = \frac{4 - a}{1 - 2a}.$$

Выражение (4) принимает вид

$$h(a) = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{7(4 - a)}{a(1 - 2a)^3}.$$

Чтобы найти его минимум на отрезке $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$, найдем нули производной:

$$h'(a) = -\frac{7}{a(1 - 2a)^3} - \frac{7(4 - a)}{a^2(1 - 2a)^3} + \frac{42(4 - a)}{a(1 - 2a)^4} = \frac{14(-3a^2 + 16a - 2)}{a^2(1 - 2a)^4}.$$

На отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ получаем $a_0 = \frac{8 - \sqrt{58}}{3}$, причем это — точка минимума. Подставив ее в наше выражение, получаем

$$d > h(a_0) = 514, \dots$$

Таким образом, $d \geq 515$, а $k \geq 516$.

3. Осталось построить пример для $d = 515$. Его легко получить из следующих соображений. Положим $a = a_0$,

$b = \frac{4 - a}{1 - 2a}$. Тогда

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} = \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = 514, \dots \quad (5)$$

Начнем увеличивать значение b , оставляя a неизменным. Тогда величина $g(b) = \frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b}$, как мы выяснили, увеличивается; поэтому правое выражение становится больше, чем левое. Значит, настанет момент, когда правая часть (5) будет больше 515, а левая — по-прежнему меньше 515. Эти a и b будут удовлетворять (3), а значит, являться искомыми.

Можно предъявить и более простой пример. Возьмем $a = \frac{1}{8}$ (это число, довольно близкое к a_0). Соответствующее значение $b = \frac{4 - a}{1 - 2a} = \frac{31}{6}$, при этом

$$\frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{13888}{27} = 514 \frac{10}{27}.$$

Увеличивая значение b , как и выше, получаем требуемый пример. Так, подходит значение $b = 5,169$.

И. Богданов

Ф2048. Материальная точка движется с постоянным ускорением. Ее координаты в начальный момент $(0, 0, 0)$, через 1 секунду после начала движения $(1, 1, 2)$, еще через секунду $(2, 3, 4)$. Какой угол составляет вектор начальной скорости точки с вектором ее ускорения?

По оси x точка движется равномерно, ее скорость вдоль этой оси равна $v_x = 1$ м/с. По оси z движение тоже

равномерное, но со скоростью $v_z = 2$ м/с. По оси y – придется посчитать.

Поскольку движение точки по условию равноускоренное, можно записать

$$1 = 0 + v_y \cdot 1 + \frac{a_y \cdot 1^2}{2},$$

$$3 = 0 + v_y \cdot 2 + \frac{a_y \cdot 2^2}{2},$$

где v_y – начальная скорость по оси y , $a = a_y$ – полное ускорение точки. Отсюда получаем

$$v_y = 0,5 \text{ м/с}, \quad a_y = 1 \text{ м/с}^2.$$

Теперь найдем угол между векторами начальной скорости и ускорения. Сложим векторно скорости по осям x и z , получим вектор длиной $\sqrt{5}$ м/с, перпендикулярный оси y . Отсюда легко найти угол φ между вектором начальной скорости и осью y :

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{5}}{0,5} = 2\sqrt{5}, \text{ и } \varphi \approx 77,4^\circ.$$

А.Зильберман

Ф2049. В системе (рис.1) трения нет. Массы грузов на левом блоке M и $2M$, на правом блоке – $2M$ и $4M$. Найдите ускорение самого легкого груза при движении.

Силы натяжения кусков нитей, привязанных к грузам, одинаковы – ясно, что ускорения грузов массой $2M$ получаются одинаковыми. Направим все ускорения вверх (тогда проще написать без ошибок уравнения кинематических связей), обозначим ускорение груза массой M буквой a , грузов массой $2M$ – буквой b , груза массой $4M$ – буквой c , а натяжение кусков нитей, непосредственно привязанных к грузам, – буквой T (рис.2). Тогда

$$T - Mg = Ma,$$

$$T - 2Mg = 2Mb,$$

$$T - 4Mg = 4Mc,$$

$$a + b = -(b + c).$$

Отсюда легко найти силу натяжения нити:

$$T = \frac{16Mg}{9}$$

А.Блоков

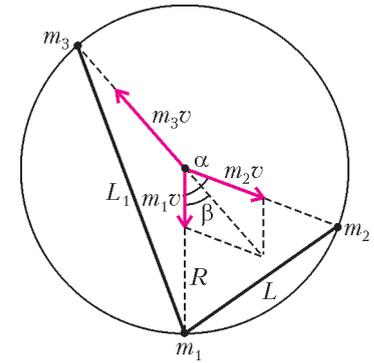
и ускорение самого легкого груза:

$$a = \frac{7g}{9}.$$

Ф2050. Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точке своей траектории, распавшись на три

осколками с массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками с массами m_1 и m_2 оказалось равным L . Чему было равно в этот момент расстояние между осколками с массами m_1 и m_3 , если ни один из осколков еще не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.

Перейдем в систему отсчета, падающую на землю с ускорением свободного падения g . В этой системе отсчета осколки после взрыва движутся в разные стороны равномерно и прямолинейно с одинаковыми скоростями, равными начальной скорости v , приобретенной в результате взрыва. Из закона сохранения импульса следует, что начальные скорости осколков лежат в одной плоскости. Следовательно, в рассматриваемой системе отсчета все осколки после взрыва снаряда в любой момент времени располагаются на окружности с центром в точке взрыва.



Изобразим эту окружность на рисунке, обозначив угол между направлениями разлета осколков с массами m_1 и m_2 через α , а осколков с массами m_1 и m_3 – через $\pi - \beta$. Рассмотрим положения осколков в момент времени, когда расстояние между первым и вторым осколками оказалось равным L . Тогда из рисунка следует, что

$$L = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad L_1 = 2R \sin \frac{\pi - \beta}{2} = 2R \cos \frac{\beta}{2},$$

где R – радиус изображенной окружности, L_1 – искомое расстояние между первым и третьим осколками.

Поскольку импульс рассматриваемой системы осколков сохраняется, из теоремы косинусов, примененной к треугольнику из векторов импульсов осколков, следует

$$(m_3v)^2 = (m_1v)^2 + (m_2v)^2 - 2m_1m_2v^2 \cos(\pi - \alpha).$$

Отсюда, с учетом заданных соотношений между m_1 , m_2 и m_3 , находим

$$\cos \alpha = \frac{m_3^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1m_2} = \frac{1}{4},$$

т.е. угол разлета первых двух осколков составляет $\alpha \approx 75,5^\circ$. Из теоремы синусов, примененной к тому же треугольнику, получаем

$$\frac{m_2v}{\sin \beta} = \frac{m_3v}{\sin(\pi - \alpha)},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{m_2}{m_3} \sin \alpha = \frac{m_2}{m_3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3\sqrt{15}}{16}, \text{ и } \cos \beta = \frac{11}{16}.$$

Используя тригонометрические формулы для половинного угла, найдем

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ и}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{L^2}{2R^2} = \frac{1}{4}, \text{ откуда } R = \sqrt{\frac{2}{3}} L.$$

Подставляя эти выражения в формулу для L_1 , получим ответ:

$$L_1 = \frac{3}{2} L.$$

А.Якута

Ф2051. По горизонтальному столу катится без проскальзывания велосипедное колесо. Его диаметр 1 м, масса 1 кг, скорость центра 1 м/с. В некоторый момент к колесу приклеился маленький кусочек жвачки массой 2 г, лежавший на столе. Скорость центра колеса теперь меняется. Оцените отличие минимальной скорости колеса от его начальной скорости.

Колесо движется без проскальзывания, следовательно, скорость нижней точки колеса нулевая. В этом случае в момент приклеивания кусочка жвачки никакого удара не происходит (диаметр колеса во много раз больше размера кусочка), механическая энергия системы остается неизменной. Минимальная скорость центра колеса получится в тот момент, когда кусочек окажется в верхней его точке. Если скорость центра колеса в этот момент v , то скорость кусочка будет $2v$. Запишем уравнение для энергии:

$$Mv_0^2 = Mv^2 + \frac{m(2v)^2}{2} + mg \cdot 2R.$$

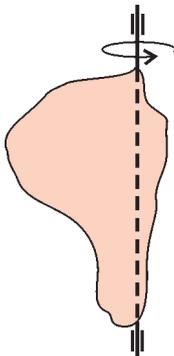
Здесь учтено, что кинетическая энергия колеса – тонкостенного цилиндра – складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и энергии вращения относительно центра масс, в сумме получается Mv_0^2 или Mv^2 . Теперь найдем минимальную скорость центра колеса:

$$v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2mgR/M}{1 + 2m/M}} \approx 0,98 v_0.$$

Отличие минимальной скорости центра колеса от начальной составляет приблизительно 0,02 м/с.

Р.Колесов

Ф2052. Однородное плоское тело вращается относительно вертикальной оси, лежащей в плоскости тела (см. рисунок). Тело раскрутили до угловой скорости ω_0 и отпустили. На тело действует сила сопротивления воздуха такая, что избыточное давление пропорционально скорости v участка поверхности с коэффициентом k (т.е. $\Delta F = k\Delta S v$). Масса тела M , его «поперечная» площадь S . Сколько оборотов совершит тело до полной остановки?



Для решения можно использовать уравнения динамики вращающегося тела

(момент сил, угловое ускорение, момент инерции), но можно обойтись энергетическими соображениями: кинетическая энергия «съедается» силами сопротивления воздуха.

Рассмотрим силу сопротивления, действующую на маленький кусочек поверхности площадью ΔS , находящийся на расстоянии r от оси вращения при угловой скорости ω :

$$\Delta F = k\omega r \Delta S.$$

За очень малый интервал времени Δt эта сила совершит работу

$$F\omega r \Delta t = k\omega^2 r^2 \Delta S \Delta t.$$

Суммарная работа всех сил сопротивления при этом составит

$$k\omega^2 \Delta t \Sigma (r_i^2 \Delta S_i).$$

За это же время угловая скорость плоского тела уменьшится на некоторую малую величину $\Delta\omega$, а кинетическая энергия этого кусочка массой $m = M \Delta S/S$ уменьшится на

$$\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{1}{2} m (\omega - \Delta\omega)^2 r^2 = m \omega r^2 \Delta\omega = (M \Delta S/S) \omega r^2 \Delta\omega$$

(мы отбросили совсем малую величину, содержащую множитель $(\Delta\omega)^2$). Запишем в виде суммы полное изменение кинетической энергии тела за этот интервал времени:

$$(M/S) \omega \Delta\omega \Sigma (r_i^2 \Delta S_i).$$

Приравняем работу сил сопротивления изменению кинетической энергии (знак изменения мы уже учли):

$$k\omega^2 \Delta t \Sigma (r_i^2 \Delta S_i) = (M/S) \omega \Delta\omega \Sigma (r_i^2 \Delta S_i).$$

Слева и справа написаны одинаковые суммы, считать их не нужно, мы их просто сократим. В итоге получим

$$k\omega^2 \Delta t = (M/S) \omega \Delta\omega, \text{ или } k\Delta\varphi = (M/S) \Delta\omega.$$

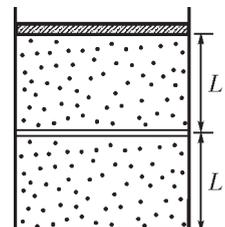
Мы видим, что угол поворота за некоторый интервал времени совсем просто связан с уменьшением угловой скорости за то же время. Тогда полный угол поворота до остановки будет $\varphi = \frac{M}{kS} \omega_0$, или в оборотах

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{M\omega_0}{2\pi kS}.$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{M\omega_0}{2\pi kS}.$$

А.Киселев

Ф2053. На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд, в который вставлены два поршня (см. рисунок). Верхний поршень – тяжелый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень – легкий и теплопроводящий, но между ним и стенками сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по ν молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту L . Потом



систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты ΔQ . На какую величину ΔT изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении силы трения F между нижним поршнем и стенками это возможно? Какова теплоемкость C системы в этом процессе? Теплоемкостью стенок сосуда и поршня пренебречь.

Обозначим через $V_1 = SL$ объем нижней части цилиндра, где S – площадь поршней, через p_0 – давление в верхней части цилиндра, через ΔV_2 – изменение объема верхней части цилиндра.

Сообщенное системе количество теплоты ΔQ идет на изменение внутренней энергии всего газа в сосуде:

$$\Delta U = 2\nu \cdot \frac{3}{2} R \Delta T$$

и на совершение работы:

$$A = p_0 \Delta V_2 = \nu R \Delta T.$$

Следовательно,

$$\Delta Q = \Delta U + A = 4\nu R \Delta T, \text{ и } \Delta T = \frac{\Delta Q}{4\nu R}.$$

Теплоемкость системы в этом процессе равна отношению сообщенного ей количества теплоты к изменению температуры:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 4\nu R.$$

Поскольку объем нижней части сосуда постоянен, изменение давления Δp там определяется из соотношения $\Delta p V_1 = \nu R \Delta T$, откуда

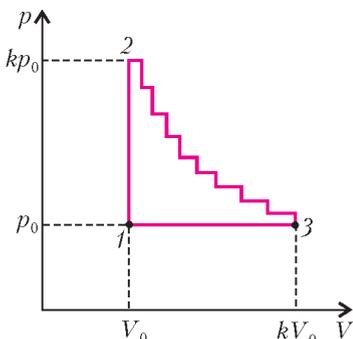
$$\Delta p = \frac{\nu R \Delta T}{V_1} = \frac{\Delta Q}{4V_1}.$$

Так как давление в верхней части сосуда постоянно и равно p_0 , а в нижней части сосуда давление вначале также было равно p_0 , то в конце нагрева разность давлений, оказываемых газами на нижний поршень, станет равной Δp . Чтобы поршень остался неподвижным, сила трения между ним и стенками сосуда должна быть не меньше

$$F = \Delta p S = \frac{\Delta Q}{4L}.$$

Д.Вагин, М.Семенов

Ф2054. Над ν молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображен на pV -диаграмме (см. рисунок). Цикл состоит из вертикального (1–2) и горизонтального (3–1) участков и «лестницы» (2–3) из n ступенек, на каждой из которых давление и объем газа изменяются в одно и то же число раз. Отношение максимального давления газа к минимальному равно k , отношение макси-



мального объема газа к минимальному также равно k . Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.

Поскольку тепловая машина совершает за цикл положительную работу, рассматриваемый цикл проходит по часовой стрелке, в направлении 1–2–3–1. КПД этой тепловой машины равен отношению совершенной работы A к количеству теплоты Q_+ , полученному от нагревателей. Обозначим через p_0 и V_0 минимальные давление и объем газа, тогда максимальные давление и объем будут равны kp_0 и kV_0 соответственно. Заметим, что на горизонтальном участке ступеньки объем возрастает в $k^{1/n}$ раз, а на вертикальном участке давление уменьшается в такое же число раз.

В данном цикле газ получает тепло на участке 1–2, а также на горизонтальных участках лестницы 2–3. Количество теплоты, полученное на участке 1–2, равно изменению внутренней энергии газа:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} kp_0 V_0 - \frac{3}{2} p_0 V_0 = \frac{3}{2} (k-1) p_0 V_0.$$

Далее, на i -м горизонтальном участке лестницы (i изменяется в пределах от 1 до n) газ расширяется от объема $V_0 k^{(i-1)/n}$ до $V_0 k^{i/n}$ при постоянном давлении $p_0 k^{1-(i-1)/n}$. При этом он совершает работу $\Delta A = kp_0 V_0 (k^{1/n} - 1)$, изменяет свою внутреннюю энергию на $\Delta U = 1,5 \Delta A$ и получает количество теплоты $\Delta Q = 2,5 \Delta A$. На вертикальных участках «лестницы» газ не совершает работы и отдает тепло. На участке 3–1 газ отдает тепло и совершает отрицательную работу $A_{31} = -(k-1) p_0 V_0$. Следовательно, суммарное количество теплоты, полученное от нагревателей, равно

$$Q_+ = Q_{12} + n \Delta Q = \frac{3}{2} (k-1) p_0 V_0 + \frac{5}{2} nk (k^{1/n} - 1) p_0 V_0,$$

а совершенная работа равна

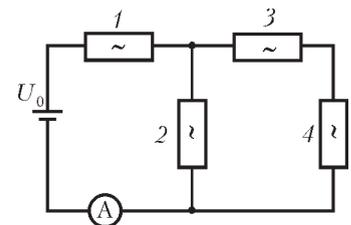
$$A = A_{31} + n \Delta A = -(k-1) p_0 V_0 + nk (k^{1/n} - 1) p_0 V_0.$$

Тогда искомым КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{nk (k^{1/n} - 1) - (k-1)}{\frac{3}{2} (k-1) + \frac{5}{2} nk (k^{1/n} - 1)}.$$

О.Шведов

Ф2055. Электрическая цепь (см. рисунок) состоит из идеальной батарейки с ЭДС U_0 , идеального амперметра и четырех одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока I и напряжения U имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток I_0 показывает амперметр?



Пронумеруем нелинейные элементы так, как показано на рисунке. Пусть U_2 – напряжение на нелинейном элементе 2, тогда на каждый из последовательно соеди-

ненных элементов 3 и 4 приходится напряжение $U_2/2$. Следовательно, сила тока, текущего через элемент 2, равна $I_2 = \alpha U_2^2$, а ток, текущий через элементы 3 и 4, равен $I_3 = \alpha U_2^2/4$. Поэтому сила тока, текущего через амперметр, батарейку и элемент 1, составляет $I_0 = I_2 + I_3 = 5\alpha U_2^2/4$. Напряжение на элементе 1 определяется из соотношения $U_1 = \sqrt{\frac{I_0}{\alpha}} = \frac{\sqrt{5}}{2} U_2$. Таким образом, напряжение на батарейке равно

$$U_0 = U_1 + U_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) U_2, \text{ М М}$$

откуда находим

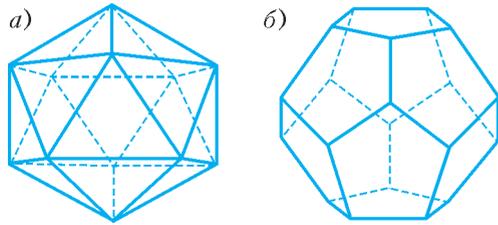
$$U_2 = \frac{U_0}{1 + \sqrt{5}/2},$$

и

$$I_0 = \alpha U_0^2 \frac{5/4}{(1 + \sqrt{5}/2)^2} = \alpha U_0^2 \frac{5}{9 + 4\sqrt{5}}.$$

Д.Харабадзе

Ф2056. Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением R каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются ребрами выпуклого правильного многогранника (см. рисунок): а) двадца-



тигранника (икосаэдра); б) двенадцатигранника (додекаэдра). Какое сопротивление будет представлять описанная выше система а) или б), если подключиться к паре ее наиболее удаленных вершин? Сколько разных значений сопротивления можно будет получить в случае а) и в случае б), если подключаться к всевозможным парам вершин этих многогранников? Справка: грани икосаэдра – это 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра – это 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника.

Рассмотрим сначала икосаэдр. Из произвольной вершины икосаэдра выходят пять ребер, заканчивающихся в пяти вершинах, которые образуют правильный пятиугольник и соединены друг с другом пятью ребрами-перемычками. Назовем этот пятиугольник ближайшим к исходной вершине слоем. Следующими по удаленности от исходной вершины идут пять вершин с пятью перемычками, также образующие правильный пятиугольник, равный предыдущему и лежащий в следующем, втором слое, параллельном первому. Из каждой вершины первого слоя выходят и в каждую вершину второго слоя входят по два ребра, соединяющих первый слой со вторым, – всего десять ребер. И,

наконец, самая дальняя вершина, равноудаленная от пяти вершин второго слоя, соединена с ними пятью ребрами. Общую систему вершин икосаэдра, таким образом, можно представить в виде двух правильных пятиугольных пирамид, высоты которых лежат на общей прямой, а основания параллельны и повернуты друг относительно друга на угол 36° . Поэтому при подключения источника питания к паре наиболее удаленных вершин пять вершин первого слоя будут электрически эквивалентны, т.е. будут иметь один и тот же потенциал, и их можно накоротко соединить друг с другом. Пять вершин второго слоя также будут иметь один и тот же потенциал, отличный от потенциала вершин первого слоя, и их тоже можно закоротить. Следовательно, эквивалентная схема в этом случае состоит из пяти соединенных параллельно резисторов, к которым присоединены последовательно сначала десять параллельных резисторов (из ребер-резисторов икосаэдра, соединяющих два слоя), а потом еще пять параллельных резисторов. Поэтому искомое сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{5} + \frac{R}{10} + \frac{R}{5} = \frac{R}{2}.$$

Теперь рассмотрим в этом же ключе додекаэдр и будем стартовать от какой-нибудь его вершины, подключив к ней один из контактов источника питания. Ближайшими соседями этой вершины окажутся три вершины первого эквипотенциального слоя, с которыми она связана напрямую тремя выходящими из нее ребрами. Из каждой вершины этого слоя выйдут по два ребра (всего в каждой вершине соединяются три ребра), попадающих в шесть вершин следующего, второго эквипотенциального слоя. Из этих шести вершин выйдут двенадцать ребер, при этом шесть идут к следующему, третьему слою, состоящему опять-таки из шести вершин, а другие шесть ребер замыкаются парами, образуя три перемычки между предыдущими шестью эквипотенциальными вершинами второго слоя. Из каждой вершины третьего слоя выйдут по два ребра, из них одно замыкается парой с ребром от соседней вершины этого слоя, а второе идет к одной из трех вершин следующего, четвертого слоя, к каждой из которых приходят по два ребра из вершин третьего слоя. Из трех вершин четвертого слоя выйдут три оставшихся ребра, которые встречаются в последней из 20 вершин – той наиболее удаленной, к которой подключается второй контакт источника. Таким образом, из условий геометрической и физической симметрии наша цепь будет эквивалентна последовательному соединению пяти пучков параллельно соединенных резисторов: сначала трех, потом шести, затем снова шести (из-за исключенных шести перемычек), потом опять шести и, наконец, трех. Отсюда получаем, что искомое сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{7}{6} R.$$

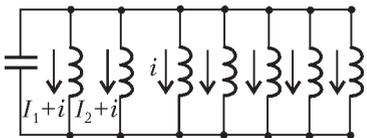
Для ответа на второй вопрос надо подсчитать, через

какое минимальное количество ребер соединяются наиболее удаленные вершины многогранников. В случае а) таких ребер, очевидно, три, и в силу симметрии возможны лишь три разных значения сопротивления: между соседними вершинами, через одну и через две (как раз между наиболее удаленными вершинами). В случае б) таких ребер пять, и возможны лишь пять разных значений сопротивления: между соседними вершинами, через одну, через две, через три и через четыре (между наиболее удаленными вершинами).

С.Кротов

Ф2057. Конденсатор емкостью C и две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. В некоторый момент конденсатор не заряжен, а токи катушек равны I и $2I$. В этот момент очень быстро параллельно подключают еще пять таких же катушек, а внешнюю цепь отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора и максимальное значение силы тока через катушку номер 7 (последняя из подключенных катушек). Элементы цепи считайте идеальными.

ЭДС индукции всех параллельно соединенных катушек одинаковы в любой момент, при одинаковых индуктивностях это приводит к тому, что все изменения токов катушек одинаковы. Условно направим все токи в одну сторону (см. рисунок), обозначим ток одной из позже подключенных катушек i , тогда ток первой катушки $I_1 + i$ а ток второй катушки $I_2 + i$. При решении придется учитывать два возможных случая – в начальный момент токи первой и второй катушек направлены в одну сторону, например вниз, как на рисунке, или направлены в



одной из позже подключенных катушек i , тогда ток первой катушки $I_1 + i$ а ток второй катушки $I_2 + i$. При решении придется учитывать

два возможных случая – в начальный момент токи первой и второй катушек направлены в одну сторону, например вниз, как на рисунке, или направлены в

разные стороны, например вверх и вниз. Удобно уже в ответе подставить в формулу выбранные значения. В тот момент, когда заряд конденсатора Q максимален, сумма токов должна обратиться в ноль:

$$(I_1 + i) + (I_2 + i) + 5i = 0, \text{ откуда } i = -\frac{I_1 + I_2}{7}.$$

Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{L(I_1 + i)^2}{2} + \frac{L(I_2 + i)^2}{2} + \frac{5Li^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}.$$

После простых преобразований получаем уравнение

$$\frac{Q^2}{LC} + 7i^2 + 2(I_1 + I_2)i = 0.$$

Рассмотрим случай однонаправленных токов. Тогда

$$i = -3I_1/7 = -3I/7, \quad I_2 = 2I_1 = 2I, \text{ и } Q = I\sqrt{\frac{9LC}{7}}.$$

(Для второго случая все делается так же, но $I_2 = -2I_1$.) Теперь найдем максимальный ток через седьмую катушку. Заряд конденсатора в этот момент равен нулю, и можно воспользоваться законом сохранения энергии для магнитных полей катушек:

$$\frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{L(I_1 + i')^2}{2} + \frac{L(I_2 + i')^2}{2} + \frac{5Li'^2}{2}$$

(тут i' не такой, как в первом случае!). Отсюда

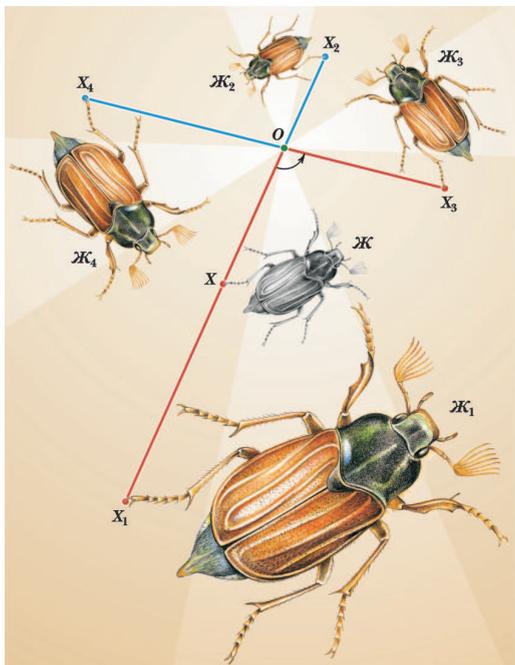
$$7i'^2 + 2(I_1 + I_2)i' = 0,$$

и для случая однонаправленных токов находим

$$i' = -\frac{6I}{7}.$$

(Впрочем, если учесть нулевой начальный ток через дополнительные катушки и характер возникающих колебаний, то этот ответ можно написать сразу.)

З.Рафаилов



Вниманию наших читателей!

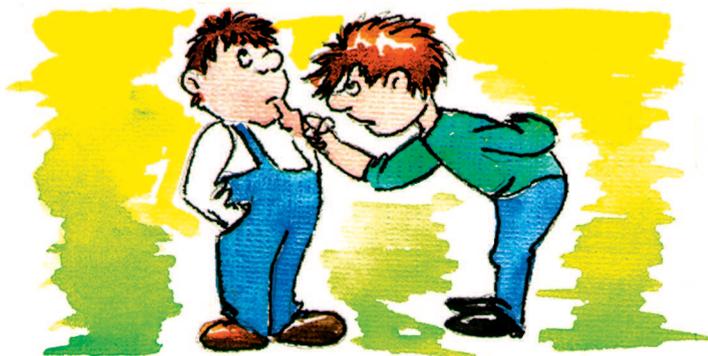
Издательство «Росмэн» выпустило в свет том «Математика. Информатика» серии «Современная иллюстрированная энциклопедия». Книга состоит примерно из 2000 статей практически по всем разделам математики и информатики. Многие статьи великолепно иллюстрированы и доступны широкому кругу читателей. Приятно отметить, что среди авторов статей есть и авторы журнала «Квант».

Изображение жука (Ж) и его образы при гомотетиях ($Ж_1, Ж_2$) и поворотных гомотетиях ($Ж_3, Ж_4$). (Поворотная гомотетия – это композиция поворота и гомотетии с общим центром O .)

Задачи

1. В Солнечном городе образованы три партии коротышек: винтиков, шпунтиков и болтиков. Оказалось, что для любых трех членов партий найдется партия, в которую входят по крайней мере двое из них. Верно ли, что все члены одной из партий являются членами какой-то из двух других партий?

Д.Калинин



2. Для любых неотрицательных чисел a, b справедливо неравенство

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2.$$

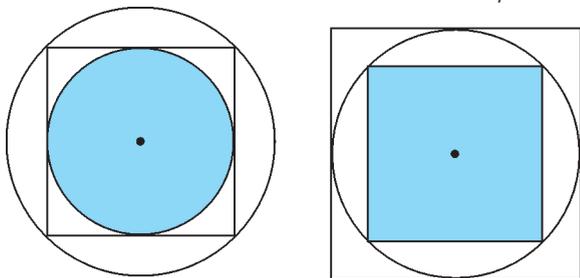
Докажите это.

В.Сендеров



3. В круг площади 1 вписали квадрат, а в него — новый круг, который закрасили в синий цвет. Затем в квадрат площади 1 вписали круг, а в него — квадрат, который закрасили в синий цвет. Чья площадь больше: синего круга или синего квадрата?

В.Произолов



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. Колонна солдат-новобранцев выстроилась несколькими одинаковыми шеренгами, составляющими прямоугольник. По команде «смирно» некоторые из солдат с перепугу сделали поворот направо, некоторые — налево, другие — кругом, а кое-кто вообще остолбенел и остался неподвижен. Далее через каждую секунду происходит следующее: каждый новобранец, оказавшийся лицом к лицу с другим солдатом, делает поворот направо.

а) Докажите, что рано или поздно такие повороты прекратятся.

б) Прекратятся ли повороты, если поворачиваются не оба солдата, оказавшиеся лицом к лицу, а только один из них?

И.Акулич



5. Числа от 1 до 9 расставьте в кружки фигуры так, чтобы сумма трех чисел, расположенных в кружках-вершинах всех белых треугольников, была одной и той же, а во всех зеленых — тоже одной и той же, но на 3 больше.

Н.Авилов

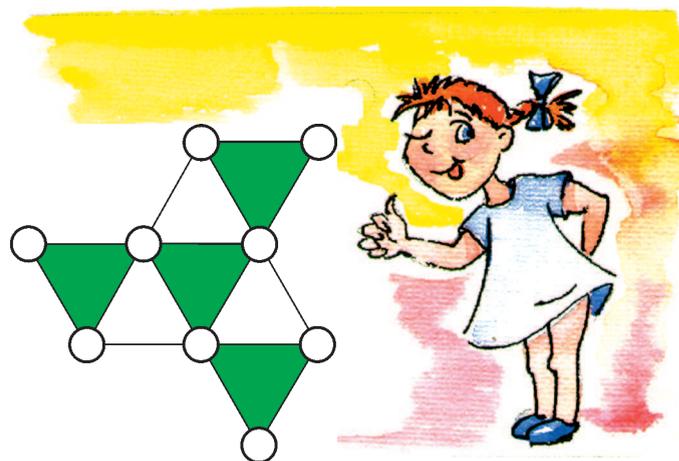


Иллюстрация Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

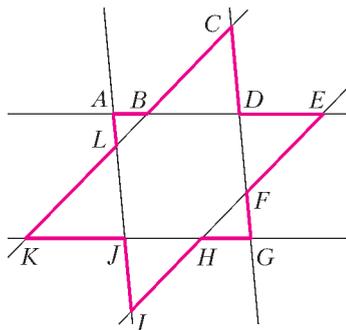
Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Взявшись за руки, 64 танцора водят 4 круговых хоровода с общим центром. В одном хороводе участвуют 16 человек – 8 мальчиков и столько же девочек. Хороводы вращаются равномерно, так что в каждый из 16 одинаковых секторов круга в такт танца попадают 4 танцора – по одному из каждого хоровода. Можно ли распределить мальчиков и девочек таким образом, что в каком бы направлении хороводы ни кружили, в любой такт танца нашелся сектор, содержащий 4 мальчика?

К.Каибханов

7. Может ли сумма квадратов трех последовательных целых чисел быть кубом целого числа?

В.Сендеров



8. Назовем полосой ширины a часть плоскости между двумя параллельными прямыми с расстоянием a между ними. Три полосы одинаковой ширины в пересечении образуют звездчатый шестиугольник $ABCDEF$. До-

кажите, что в одной точке пересекаются следующие отрезки:

- а) AG , CI и EK ;
- б) AG , BH и FL ;
- в) CI , BH и DJ ;
- г) EK , DJ и FL .

И.Акулич

9. Первые 100 натуральных чисел написаны так, что из каждой пары чисел с суммой 101 одно число написано красными чернилами, а другое – синими, при этом сумма всех красных чисел равна сумме всех синих. Весом числа любого цвета назовем количество чисел другого цвета, которые меньше этого числа. Докажите, что сумма квадратов весов красных чисел равна сумме квадратов весов синих чисел.

В.Произволов

10. В каждую клетку квадратной таблицы $n \times n$ записывают некоторое действительное число, при этом сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 отрицательная, а в любом квадрате 5×5 – положительная. Существует ли такая таблица для

- а) $n = 6$;
- б) $n = 7$?

Д.Левин, П.Самовол

Три орешка путешествующего математика

Н. ШИЛОВ

ЧЕМ ЗАНИМАЮТСЯ МАТЕМАТИКИ ВО ВРЕМЯ НАУЧНЫХ командировок? Чаще всего они знакомятся с новыми научными результатами и – что еще важнее! – с новыми методами получения новых научных результатов.

Ну, а чем занимаются математики, пока они собираются в командировку, летят в самолетах или едут в

поездах? Я, например, придумываю задачи и очень надеюсь, что кому-нибудь будет интересно их решить. Из последней поездки из Новосибирска во Франкфурт я вернулся с тремя новыми «орешками»-задачками. Попробуйте их раскусить!

Во всех задачах мы будем считать, что наша родная планета Земля – шар.

Первый орешек

На плоскости кратчайшее расстояние между двумя точками — это отрезок прямой, соединяющей эти точки, а на сфере (поверхности шара) — это отрезок дуги большого круга, соединяющей эти точки. Однако пассажирские самолеты от пункта вылета до пункта назначения летят не по дуге большого круга, а по некоторой ломаной линии. В первом приближении можно считать, что эта линия состоит из дуг окружностей, соединяющих соседние наземные диспетчерские пункты. Такие пункты находятся в крупных аэропортах. А крупные аэропорты «привязаны» к большим городам. Ну, а большие города расположены на Земле вовсе не в строгом геометрическом порядке.

Предположим, что на идеально круглой Земле диспетчерские пункты расположены очень равномерно. Например, так. Выберем 24 меридиана через 15° друг от друга. Вдоль каждого меридиана поставим диспетчерские пункты через 15° от экватора до каждого из полюсов.

Вопрос 1. Сколько диспетчерских пунктов окажется на Земле? Сколько получится участков, соединяющих соседние диспетчерские пункты вдоль параллелей и меридианов?

Второй орешек

Как только математик справится с этим заданием, он задумается над планами дальнейших путешествий. Пусть в таком идеальном мире пассажирские самолеты летают от пункта вылета до пункта назначения не «напрямик» по дуге большого круга, а только по ломаной линии, состоящей из участков (дуг окружностей), соединяющих два соседних диспетчерских пункта вдоль одной параллели или одного меридиана. Другими словами, самолет может менять направление только над диспетчерскими пунктами.

Вопрос 2. Можно ли облететь всю Землю, т.е. пролететь над всеми диспетчерскими пунктами, так, чтобы пролететь по каждому участку и только один раз? Если такое путешествие осуществимо, то имеет ли значение, откуда его начинать?

Вопрос 3. Можно ли облететь всю Землю так, чтобы пролететь над каждым диспетчерским пунктом и только один раз? Если такое путешествие осуществимо, то имеет ли значение, откуда его начинать?

Третий орешек

Пожалуй, этот орешек самый трудный, но он дает представление о тех проблемах, с которыми имеет дело современная прикладная математика.

Вопрос 4. Пусть заданы два произвольных диспетчерских пункта своими координатами, например пункт А (30° северной широты, 60° восточной долготы) и пункт Б (75° северной широты, 75° западной долготы). Как найти маршрут перелета из первого пункта во второй наименьшей длины, и какой она будет? (Считайте, что радиус Земли равен 6400 км.)

Как расщелкать первый орешек

Вдоль каждого меридиана располагается 13 диспетчерских пунктов: 2 на полюсах и еще 11 на других

широтах. Но если просто умножим это число 13 на число меридианов 24, то диспетчерские пункты на полюсах будут посчитаны 24 раза вместо одного. Поэтому надо умножить количество 11 диспетчерских пунктов на других широтах на число меридианов 24 и к результату добавить 2 диспетчерских пункта на полюсах: $11 \times 24 + 2 = 266$ диспетчерских пунктов.

Число участков, соединяющих соседние диспетчерские пункты вдоль параллелей или меридианов, можно подсчитать разными способами. Например, так. Вдоль каждого меридиана располагается 12 участков. Поэтому число участков вдоль всех меридианов равно $12 \times 24 = 288$. Вдоль каждой из параллелей располагается 24 участка. Так как таких параллелей 11, то число участков вдоль параллелей равно $11 \times 24 = 264$. Поэтому общее число участков между соседними диспетчерскими пунктами равно $288 + 264 = 552$.

Но есть и другой способ подсчитать число участков. Назовем *степенью* диспетчерского пункта число участков, которые «начинаются» в этом пункте. Тогда все 264 пункта, кроме двух полярных, имеют степень 4, а два полярных пункта имеют степень 24 каждый. Так как каждый участок между соседними пунктами вносит «вклад» по единице в степень двух пунктов, расположенных по концам участка, то можно заметить, что сумма степеней вообще всех пунктов равна удвоенному числу всех участков. Но сумму степеней всех пунктов найти легко: она равна $4 \times 264 + 24 \times 2 = 1056 + 48 = 1104$. Поэтому число участков равно $1104/2 = 552$, что совпадает с результатом непосредственного подсчета.

Как расщелкать второй орешек

Ответ на вопрос 2. Такое путешествие осуществимо, и начать его можно из любого пункта.

Но сначала разберемся с возможным маршрутом такого путешествия, начинающегося и заканчивающегося на Северном полюсе.

Если начинать путешествие на Северном полюсе, то, можно, например, «спуститься» до Южного полюса по первому меридиану, потом — «подняться» от Южного полюса к Северному полюсу по второму меридиану. Затем повторить эти спуски и подъемы на следующих меридианах вплоть до двадцать второго. Осталось пролететь только те участки, которые расположены вдоль двух последних меридианов, и все участки вдоль параллелей. Это можно сделать так, как схематично показано на рисунке 1. Таким образом на Северном полюсе будет завершён облет Земли, который прошел по всем участкам ровно один раз.

Описанный маршрут называется *циклом*, так

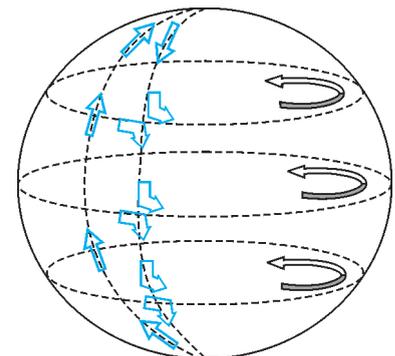


Рис. 1

(Продолжение см. на с. 34)

Изменения скоростей, происходящие также в противоположные стороны, будут обратно пропорциональны массам тел, ибо количества движения получают равные изменения.

Исаак Ньютон

...при действии сил, равнодействующая которых пропорциональна массе точки, точка переменной массы... движется так же, как движется точка постоянной массы при действии тех же сил и при тех же начальных данных.

Иван Мещерский

Я разработал некоторые стороны вопроса о поднятии в пространство с помощью реактивного прибора, подобного ракета.

Константин Циолковский

Механизм действия ракетного двигателя в точности сходен с явлением отдачи ружья; здесь не нужен воздух, чтобы отталкиваться от него.

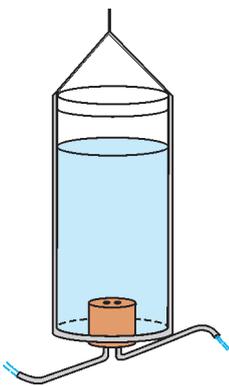
Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам реактивное движение?

Этот вопрос вполне уместен сейчас, когда отмечается 50-летие запуска первого искусственного спутника Земли – события, ознаменовавшего начало новой эры, эры освоения человеком космического пространства. Осуществление давней мечты стало возможным благодаря развитию реактивной техники. Долгая, насчитывающая тысячелетия ее история совершила необыкновенно быстрый рывок, перейдя от предсказаний и расчетов к прямой реализации идеи безпорного движения за пределами Земли. И здесь, без сомнения, можно гордиться решающим вкладом в теорию и практику космонавтики отечественных ученых, инженеров и конструкторов.

Проходит время, и казавшиеся чудом достижения – первый спутник, первый облет человеком Земли, первый выход в открытый космос – становятся рутинными, многократно повторяемыми эпизодами. Теперь на орбитальную станцию отправляются как на работу и даже... в турпоездку. Однако новые планы, связанные с межпланетными перелетами, с предупреждением астероидной опасности, со строительством индустриального пояса вокруг Земли и лунных баз, с совершенствованием спутниковых средств связи и выводом за атмосферу астрономических приборов, словно открыли второе дыхание космонавтики. И ни одно из возникающих ее направлений не обойдется без этих необычных машин – ракет.

Со многими вопросами реактивного движения можно не только познакомиться, но и всерьез разобраться, опираясь на хорошо знакомые законы механики. К чему мы вас сегодня и приглашаем.



Вопросы и задачи

1. Сможет ли вращаться в пустоте (например, в сильно разреженном воздухе под колоколом воздушного насоса) сегнерово колесо, изображенное на рисунке?

2. С площадки заднего вагона движущегося поезда человек бросает камень против движения поезда так, что камень отвесно

падает на землю. На что же была затрачена работа, совершенная человеком при броске, если в результате камень потерял кинетическую энергию, которой он обладал, двигаясь вместе с поездом?

3. По рельсам в горизонтальном направлении катится тележка с песком. Через отверстие в дне песок ссыпается между рельсами. Как изменится при этом скорость тележки?

4. Во время прыжка через болото барон Мюнхгаузен, заметив, что не допрыгнет до противоположного берега, прямо в воздухе «усилием воли» повернул обратно и вернулся на берег, с которого прыгал. Почему невозможен этот «правдивый случай»?

5. Можно ли отнести к реактивному движению: а) откат орудия при выстреле; б) подъем воздушного шара после сбрасывания балласта?

6. В каком случае орудие могло бы приобрести при выстреле большую скорость, чем вылетевший из него снаряд?

7. На железнодорожной платформе, которая может двигаться по рельсам, укреплены две одинаковые пушки, стволы которых направлены вдоль рельсов в противоположные стороны. При одновременных выстрелах оба снаряда попадают каждый в свою цель. Попадут ли снаряды в цели, если одна из пушек выстрелит немного раньше другой?

8. При пуске реактивного снаряда, установленного в хвосте самолета для защиты от нападения сзади, было обнаружено, что снаряд разворачивался и догонял самолет. Как это можно объяснить?

9. Космонавт, находясь в состоянии невесомости, «повис» внутри кабины спутника Земли. Каким образом он может развернуться вокруг своей продольной оси?

10. Космонавт находится на некотором расстоянии от космического корабля, имея при себе два одинаковых однозарядных пистолета. Он может стрелять одновременно из двух пистолетов или использовать их по очереди. Как должен поступить космонавт, чтобы быстрее вернуться на корабль?

11. Космический корабль движется вокруг Земли так, что все время находится в точке, где силы притяжения Луны и Земли компенсируют друг друга. Работают ли при этом двигатели корабля?

12. Двигатель ракеты работает в импульсном режиме, выбрасывая равными порциями с одинаковыми скоростями продукты сгорания и тем самым как бы ступеньками увеличивая скорость ракеты. Будут ли изменяться величины этих приращений скорости по мере сгорания топлива?



при этом выхлопные газы?

14. Скорость истечения газов относительно стартовой ракеты составляет не более четырех километров в секунду. Каким же образом ракета может достичь первой, а тем более второй космической скорости?

15. Можно ли превратить Землю в гигантский космический корабль, используя для этой цели современные ракетные двигатели?

Микроопыт

Сверните из очень тонкой проволоки небольшую спираль, слегка смажьте ее маслом или вазелином и аккуратно положите на воду с помощью пинцета либо обычной вилки. Затем наберите несколько капель мыльного раствора пипеткой или соломинкой для питья и роняйте по капельке раствора в центр спирали. Как станет вести себя спираль? Почему?

Любопытно, что...

...возможность использовать реактивную силу струи пара, хотя бы в виде игрушки, была открыта еще в первом веке новой эры Героном Александрийским. А в 1750 году венгерский ученый Янош Сегнер изобрел на этом принципе одну из первых реактивных гидравлических турбин — «сегнерово колесо». Его действие сегодня можно наблюдать на лужайках, орошаемых с помощью насадок, вращающихся на водопроводных колонках.

...известные в Китае еще с XI века пороховые ракеты применялись не только для фейерверков, но и в военном деле — как зажигательные и разрывные снаряды, а также как осветительные средства. Однако по-настоящему боевые реактивные снаряды были созданы в 1817 году русским ученым-артиллеристом, генералом А.Д.Засядко и успешно применены при обороне Севастополя в 1854—55 годах во время Крымской войны.

...явление отдачи, вызывавшее откатывание назад старинных пушек, со временем научились использовать для перезарядки огнестрельного оружия, например в пулеметах, автоматических пистолетах и скорострельных пушках.

...в теории многоступенчатых ракет, разработанной К.Э.Циолковским в 1926 году, было показано, что последняя ступень ракеты способна достичь первой космической скорости. Из теории следовало, что целесообразно с расходом топлива отбрасывать баки, трубопроводы и двигатели отработавших ступеней, а в идеале — непрерывно избавляться от ненужной уже массы ракеты, что пока, увы, конструктивно неосуществимо.

...гигантом среди многоступенчатых ракет и сейчас остается «Сатурн-5», который вывел на орбиту космический корабль «Аполлон-11», доставивший 20 июля 1969 года на Луну американских астронавтов.

Стартовая масса системы 2950 тонн, ее высота 111 метров.

...помимо мощных маршевых двигателей в ракетно-космической технике используется так называемая детонационная автоматика, решающая с помощью «ювелирных» по массе и габаритам зарядов взрывчатых веществ задачи мгновенного разделения элементов конструкций, разрезание электрических кабелей, отстрел парашютов и запуск различных приборов.

...погасить скорость при посадке космического аппарата на Землю помогает атмосфера: торможение в ней позволяет использовать на конечном этапе снижения парашют. Такая возможность полностью отпадает при спуске на Луну — отсутствие атмосферы на ней заставляет гасить скорость лишь реактивными импульсами, а последние метры пути аппарат садится на струе газа из сопла.

...переноситься с континента на континент со скоростью свыше десяти тысяч километров в час в разреженных слоях атмосферы, выводить на околоземную орбиту полезные грузы с обычных аэродромов должны летательные аппараты нового поколения с гиперзвуковыми воздушно-реактивными двигателями, создаваемыми сегодня зарубежными и отечественными специалистами.

...разгадкой неожиданно больших скоростей у новорожденных сверхплотных нейтронных звезд, достигающих 1500 километров в секунду, вероятно, может быть природный реактивный двигатель — излучение нейтрино, уносящих огромную энергию и способных создать необходимый импульс отдачи.

...идеальной для межзвездных полетов была бы гипотетическая ракета, роль газовой струи в которой играл бы пучок фотонов, иначе говоря, скорость истечения «струи» равнялась бы скорости света. Однако мощность подобной ракеты массой всего лишь в одну тонну при движении с ускорением, равным g , должна была бы превосходить мощность крупной электростанции типа Братской ГЭС примерно в 1000 раз.

...очередной прорыв в космос готовят в ближайшие пятнадцать лет все космические державы. Это, прежде всего, череда лунных экспедиций. Наша соседка уже рассматривается как полигон для испытания технологий, необходимых для покорения Марса, как база на пути к другим планетам, как новая астрономическая обсерватория и даже... как музей под открытым небом для посещения космическими туристами.

Что читать в «Кванте» о реактивном движении

(публикации последних лет)

1. «Почему вращается вертушка?» — 2002, Приложение №4, с. 121;
2. «Сколько стоит запуск спутника?» — 2002, №5, с. 30;
3. «Великое уравнение механики» — 2003, №5, с. 35;
4. «Опыты с пластиковыми бутылками» — 2004, №4, с. 20;
5. «Калейдоскоп» Кванта — 2004, №5, с. 32;
6. «Булава» — 2005, №1, с. 29;
7. «Почему именно ракета» — 2005, Приложение №6, с. 142;
8. «Как Студент думал Землю остановить» — 2006, №5, с. 28.

Публикацию подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

как его начало и конец совпадают. Неважно, из какого пункта маршрута «стартовать», лишь бы после старта двигаться в точности по этому маршруту: в силу цикличности маршрута, пройдешь именно этот маршрут и вернешься в пункт, откуда стартовал.

Ответ на вопрос 3. И такое путешествие осуществимо, и начать его можно тоже из любого пункта.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно составить циклический маршрут такого путешествия, начинающийся и заканчивающийся на Северном полюсе.

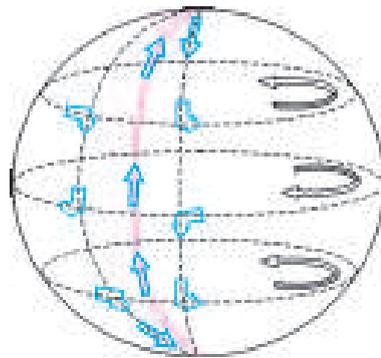


Рис. 2

Прежде чем начинать путешествие с Северного полюса, выберем (зарезервируем) меридиан, по которому вернемся на полюс. Пусть это будет первый меридиан (на рисунке 2 он выделен красным цветом.) С Северного полюса можно «спускаться» до Южного вперемежку по второму и двадцать четвертому меридианам, двигаясь от одного меридиана к другому по очередной параллели так, как это показано на рисунке 2. По достижении Южного полюса осталось вернуться на север по первому меридиану.

Как расщелкать третий орешек

Для любых двух диспетчерских пунктов А и Б существует множество вариантов перелета из одного в другой. Например, на рисунке 3 представлено три варианта перелета из пункта А (30° с.ш., 60° в.д.) в пункт Б (75° с.ш., 75° з.д.):

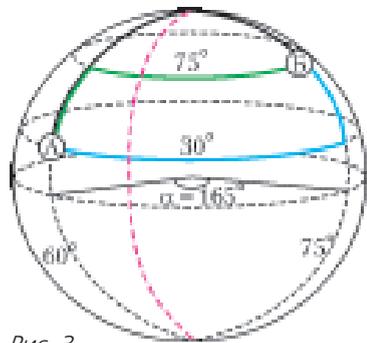


Рис. 3

«синий» — на восток, а затем на север;
«зеленый» — на север, а затем на восток;
«черный» — на север до Северного полюса, а затем на юг.

Пусть L — это длина (в километрах) дуги в 15° большого круга Земли. Если известен радиус Земли, то величину L найти нетрудно: $L = 2\pi \times 6400 \text{ км} / 24 \approx 1676 \text{ км}$. Тогда длина дуги в γ градусов любого меридиана равна $L \times (\gamma/15^\circ)$, а длина дуги параллели на широте β градусов с величиной дуги $\alpha = 165^\circ$ равна $L \times (\alpha/15^\circ) \times \cos \beta = 11 \times L \times \cos \beta$. В таком случае:

длина «синего» маршрута равна $11 \times L \times \cos 30^\circ + L \times ((75^\circ - 30^\circ)/15^\circ) \approx 15966 \text{ км} + 5028 \text{ км} \approx 20994 \text{ км}$;

длина «зеленого» маршрута равна $L \times ((75^\circ - 30^\circ)/15^\circ) + 11 \times L \times \cos 75^\circ \approx 5028 \text{ км} + 4771 \text{ км} \approx 9799 \text{ км}$;

длина «черного» маршрута равна $L \times ((90^\circ - 30^\circ)/15^\circ) + L \times ((90^\circ - 75^\circ)/15^\circ) = 5 \times L = 8380 \text{ км}$.

В данном случае самый короткий из трех рассмотренных маршрутов — это «черный» маршрут через Северный полюс. Но является ли он вообще самым коротким маршрутом из пункта А (30° с.ш., 60° в.д.) в пункт Б (75° с.ш., 75° з.д.)?

От примера перейдем к общему случаю. Пусть заданы два произвольных диспетчерских пункта А и Б.

Выберем произвольный маршрут S из А в Б (жирная черная линия на рисунке 4). Таких различных маршрутов существует необозримое количество, и перебирать их в поисках оптимального варианта — проблема не из легких. Впрочем, в тотальном переборе нет необходимости, ведь некоторые маршруты заведомо не экономичные (например, маршруты с «петлями»).

Сейчас мы предложим разумную (специалисты говорят — «жадную») схему перебора.

Рассмотрим всевозможные маршруты по долготам между диспетчерскими пунктами на меридианах, на которых расположены А и Б. Пусть В—Г — самый короткий такой маршрут, расположенный в диапазоне от самой южной точки S до самой северной точки S (дуга параллели, выделенная красным цветом на рисунке 4). Тогда протяженность маршрута А—Г—В—Б не больше, чем длина маршрута S . Поэтому маршрут из А в Б наименьшей длины надо выбирать из 13 вариантов, каждый из которых соответствует выбору широтного участка В—Г от Южного до Северного полюса на одной из 13 возможных параллелей между меридианами пунктов А и Б. Длина каждого такого маршрута А—Г—В—Б равна

(длина меридионального участка А—Г) +

+ (длина меридионального участка Б—В) +

+ (длина широтного участка В—Г).

Можно вывести аналитическую формулу для вычисления минимального значения этого выражения. Однако проще поиск минимального среди 13 возможных значений поручить программе: для человека это уже многовато, а для компьютера — пустяковое дело (если есть программа).

Кстати, какова длина минимального маршрута между пунктами А (30° с.ш., 60° в.д.) и Б (75° с.ш., 75° з.д.)?

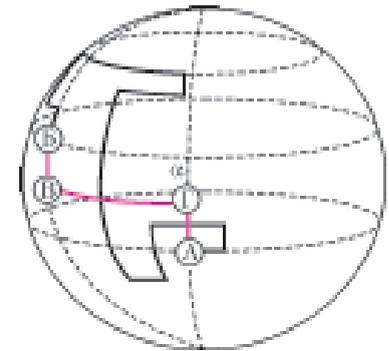


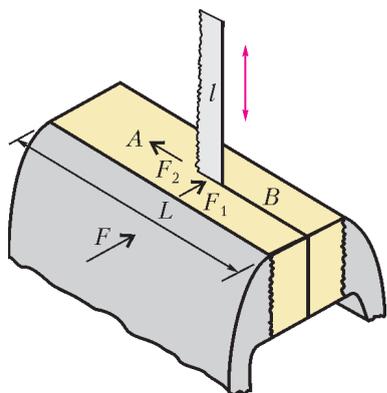
Рис. 4

Практическая задача по механике

Ю.НОСОВ

ВОЗЬМЕМ ДЕРЕВЯННЫЙ БРУСОК РАЗМЕРОМ $2 \times 3 \times 10$ СМ. Зажмем брусок в тиски, как показано на рисунке, и начнем распиливать его вдоль длинной стороны на две части. В процессе работы будем следить за тем, чтобы ножовкой не задеть винт тисков. Полностью распилим брусок от края до края, ослабим тиски и вынем два новых более тонких бруска. Подчеркнем, что вся операция производится при одном и том же исходном сжатии тисков и не делается никаких перестановок или передвижек бруска.

Как же получается, что тиски – несмотря на то, что сжимают брусок, – не мешают разрезать его на две части?



Разумеется, эта задача представляет собой практическую (лабораторную) работу по механике, для которой строгого решения дать нельзя. Но вполне можно удовлетвориться следующими качественными рассуждениями.

В нашем эксперименте удержание деревянного бруска обеспечивается силой сжатия тисков F , создаваемой винтом (см. рисунок). Чтобы сдвинуть брусок вниз, надо приложить силу $F_{\text{вниз}}$, превышающую силу трения покоя

$$F_{\text{тр}} = kF,$$

где k – коэффициент трения между губками тисков и бруском. Величина силы F столь велика, что сдвинуть брусок рукой в сжатых тисках не удастся. Почему же нам удается перемещать полотно пилы вверх – вниз при продольном разрезании бруска?

Оказывается, что для этой пары материалов (полотно пилы – дерево) сила трения покоя $F_{\text{тр1}}$ существенно меньше $F_{\text{тр}}$, и, как следствие, сила, необходимая для перемещения пилы, существенно меньше $F_{\text{вниз}}$. Для этой пары

$$F_{\text{тр1}} = k_1 F_1,$$

где k_1 – коэффициент трения между полотном пилы и бруском, F_1 – сжимающая сила.

Сила сжатия полотна пилы F_1 во столько раз меньше полной силы сжатия тисков F , во сколько раз площадь сжатого полотна пилы меньше полной площади губок тисков, т.е.

$$F_1 = \frac{l}{L} F,$$

где l – ширина полотна пилы и L – полная ширина губок тисков. Чтобы уменьшить силу F_1 , в нашем эксперименте мы применяем пилу с малой шириной полотна l , например полотно ножовки по металлу. Используя примерные размеры $l = 15$ мм и $L = 150$ мм, получим $F_1 = 0,1F$.

Коэффициент трения покоя (и скольжения) k_1 также много меньше k , так как в случае пилы в контакт с деревом вступает в основном гладкая поверхность стального полотна, а не гофрированная поверхность губок тисков.

Таким образом, в нашем опыте $F_1 \ll F$ и $k_1 \ll k$, что приводит к выводу

$$F_{\text{тр1}} \ll F_{\text{тр}}.$$

Однако в проводимом эксперименте мы не только перемещаем пилу вверх – вниз, но и разрушаем древесные волокна при распиливании. Это требует приложения дополнительной силы F_2 вдоль направления разрезания. Уменьшить величину силы F_2 можно, используя пилу с очень мелким зубом, например опять же ножовку по металлу или лобзик.

Одно замечание. На первый взгляд может показаться, что при распиливании бруска область B , где уже распил осуществлен, перестает принимать участие в удержании бруска в тисках. Это не так. В силу упругости дерева и малой толщины полотна пилы ($\sim 0,5 - 0,7$ мм) область B сжата практически с такой же силой, как и область A , где распила еще нет. Таким образом, при действии пилы брусок всегда сжат по всей ширине губок тисков.

Реальный успех в проведении обсуждаемого опыта показывает, что рука экспериментатора вполне может развить силу, превышающую $F_{\text{тр1}}$ и F_2 , и успешно провести распиливание бруска, сжатого тисками.

Хочется надеяться, что приведенное решение задачи позволит вам самостоятельно ответить (на качественном уровне) на следующие вопросы.

Как влияет на результат эксперимента: сила сжатия тисков; ширина полотна пилы; породы дерева бруска; силы, прикладываемые к пиле?

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресу:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

ceemat.ru

Как молекулы столкнулись

А. СТАСЕНКО

ПОЧЕМУ ВООБЩЕ ВОЗМОЖНА КОНДЕНСАЦИЯ – БУКВАЛЬНО «уплотнение»? Ведь при атмосферном давлении плотность жидкости на три порядка больше, чем плотность газа (или пара). Значит, что-то заставляет молекулы газа стремиться друг к другу и удерживаться рядом. А при нагревании жидкости происходит ее испарение – следовательно, что-то преодолевает удерживающие силы.

Прежде всего ясно, что молекулы должны иметь конечные размеры. Если бы это были материальные точки (такая модель тоже иногда используется), то конденсат любой ограниченной массы газа или пара имел бы нулевой объем. И на дне стакана трудно было бы разглядеть 200 граммов воды. Поэтому будем считать молекулы абсолютно жесткими шариками, имеющими диаметр d .

Далее, если молекулы притягиваются друг к другу (как, например, планеты или звезды), то должна существовать потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ их взаимодействия, зависящая от расстояния r между молекулами. В случае гравитации ньютоновская потенциальная энергия имеет вид $E_{\text{п}} \sim -\frac{1}{r}$, а для молекул потенциальная энергия притяжения еще резче зависит от расстояния: $E_{\text{п}} \sim -\frac{1}{r^6}$. Но поскольку мы решили считать молекулы жесткими шариками, они никак не могут сблизиться на расстояние (между их центрами!), меньшее d : после их соприкосновения потребовалась бы бесконечно большая сила и возникла бы бесконечно большая энергия отталкивания. В процесс сближения $E_{\text{п}}$ будет изменяться вдоль кривой ($\infty \rightarrow -\varepsilon$) на рисунке 1 – там стрелкой даже показано направление этого изменения. Понятно, что для молекул, не взаимодействующих друг с другом вплоть до соприкосновения, потенциальная энергия изменялась бы по сторонам прямого угла ($\infty \rightarrow d \rightarrow \infty$).

По сути дела, модель абсолютно жестких шариков адекватна «точечным» молекулам, у которых сила (и потенциальная энергия) отталкивания резко растут при сближении.

Итак, о чем же говорит рисунок 1? В начале координат $r = 0$ находится центр молекулы-шарика, которую мы считаем фиксированной (она заштрихована). Центр другой молекулы-шарика может находиться на любом расстоянии $d < r < \infty$. Эта другая молекула притягивается к фиксированной с силой, пропорциональной *темпу* изменения потенциальной энергии с изменением расстояния. Эту длинную

фразу физики заменяют простым соотношением: $F = -\frac{dE_{\text{п}}}{dr}$ и говорят: «сила равна минус градиенту потенциальной энергии». Отсюда видно, что склон кривой $E_{\text{п}}(r)$ должен быть направлен к началу координат, если мы хотим описать притяжение. Образно говоря, вторая молекула стремится «свалиться» в потенциальную яму глубины ε и остаться там (если уж нельзя сблизиться далее). Это и есть предпосылка для конденсации.

Но ведь молекулы сближаются не квазистатически. Как известно, они обладают средней кинетической энергией,

пропорциональной температуре:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

и если скорость второго шарика на рисунке 1 слишком велика, он упруго отразится от первого (заштрихованного) и выскочит из потенциальной ямы. А что значит «слишком»? Ясно, что нужно сравнить две энергии: потенциальную энергию притяжения ε и кинетическую энергию второго шарика, которой он обладает на большом расстоянии от первого, т.е. «на бесконечности». И теперь понятно, что конденсация возможна в случае соблюдения условия

$$\varepsilon \gtrsim \frac{mv_{\infty}^2}{2}.$$

Это значит, что кинетическая энергия хаотического теплового движения должна быть меньше глубины потенциальной ямы.

Но, как известно, при конденсации выделяется энергия. Ее характеризуют удельной теплотой испарения или конденсации. Ясно, что она имеет прямое отношение к глубине потенциальной ямы: чем больше ε , тем большую энергию надо затратить, чтобы «вытащить на бесконечность» молекулу из потенциальной ямы и тем большая энергия выделится в обратном процессе конденсации. Правда, те значения удельной теплоты испарения, которые указаны в различных справочниках, получены в условиях, когда пар (а тем более жидкость) является сплошной средой. Поэтому надо принять во внимание и работу по расширению пара после «вытаскивания» его молекул из жидкости. К тому же, испаряющуюся молекулу удерживает не одна фиксированная молекула (заштрихованная на рисунке 1), но еще и множество других, более отдаленных.

Понятно, что две отдельные молекулы никак не могли бы конденсироваться, т.е. остаться рядом в покое – кто-то должен унести лишнюю энергию. Этим «кто-то», конечно, является третья молекула. А поскольку участников процесса очень много, то «третьи» молекулы, получая избыток энергии, нагревают газ, что приводит к росту средней кинетической энергии молекул.

Но почему молекулы должны сближаться вдоль линии центров, как на рисунке 1? Рассмотрим более общий случай (рис.2): первая молекула по-прежнему фиксирована (заштрихована), а вторая «из бесконечности» движется с относительной скоростью v_{∞} , но не вдоль линии центров, а, как говорят, с прицельным расстоянием b от этой линии. Это такое расстояние, что все молекулы с центрами внутри круга площадью πb^2 непременно столкнутся с фиксированной молекулой – по крайней мере, коснутся ее, а все молекулы с центрами вне этого круга про-

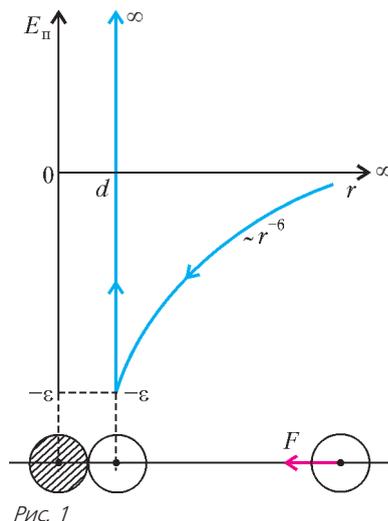


Рис. 1

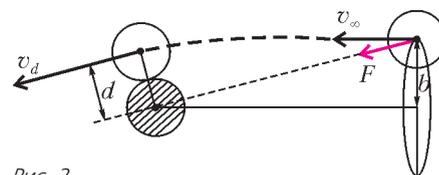


Рис. 2

летят мимо. Конечно, сила притяжения F во все время сближения двух молекул направлена вдоль линии центров, она-то и искривляет траекторию молекулы.

Запишем условие сохранения полной механической энергии второй молекулы в двух состояниях – «на бесконечности» и в момент касания первой:

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} + 0 = \frac{mv_d^2}{2} + (-\epsilon).$$

Здесь учтены те же факты, которые указаны на рисунке 1: потенциальная энергия вдали равна нулю, а при соприкосновении молекул равна $-\epsilon$.

А еще можно записать закон сохранения *момента импульса*. Это второй закон Кеплера о секториальной скорости, или о том, что радиус-вектор, проведенный из центра силового поля, заметает равные площади в равные отрезки времени. Хотя закон получен Ньютоном для гравитации, он верен для любого центрального взаимодействия (когда сила направлена строго по линии центров). Итак,

$$mv_{\infty} \cdot b = mv_d \cdot d.$$

Выразим из этого уравнения v_d и подставим в закон сохранения энергии. Получим

$$\left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1 + \frac{\epsilon}{mv_{\infty}^2/2} = 1 + \frac{\alpha}{T}.$$

Здесь α – постоянная, а в знаменателе оказалась температура. Видно, что с охлаждением любого газа, когда уменьшается средняя скорость его молекул, прицельное расстояние b растёт: молекулы «чувствуют» друг друга на все больших расстояниях, а в пределе $T \rightarrow 0$ – на бесконечно больших. Тут-то все газы и сконденсируются.

Кстати, полученный результат не зависит от конкретного вида потенциальной энергии взаимодействия, а зависит лишь от отношения потенциальной и кинетической энергий. Поэтому он применим и к кинетике небесных тел (звезд, планет, газовых туманностей, галактик...). Что же мешает им всем сконденсироваться (это было бы ужасно!)? Конечно, закон сохранения момента импульса. И слава Богу.

Как Студент магнитное поле измерял

А. СТАСЕНКО

Приступив к изучению труда Фарадея, я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов... Фарадей видел силовые линии, пронизывающие все пространство...

Дж.Максвелл

КАК-ТО НА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТ НАМОТАЛ сотни метров проволоки в виде соленоида, да такого длинного, что магнитное поле в его середине можно было считать пространственно однородным, и подключил его к источнику переменного тока с регулируемой частотой ω (рис.1). И задумался: как бы измерить индукцию магнитного поля?

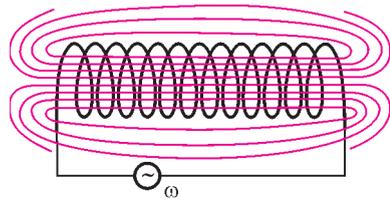


Рис. 1

Еще в позапрошлом веке было известно, что если через площадь некоторой проводящей рамки, например в виде окружности, со временем изменяется поток вектора магнитной индукции Φ , то в этой рамке возникает электродвижущая сила

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Таким образом, можно сказать, что ЭДС \mathcal{E} – это скорость изменения потока вектора магнитной индукции через рамку.

Пусть, например, кольцо радиусом r находится в магнитном поле, изменяющемся со временем по гармоническому закону

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

Тогда поток вектора магнитной индукции через площадь кольца будет изменяться по закону

$$\Phi = \pi r^2 B_0 \cos \omega t.$$

Далее, если рамка проводящая, то ЭДС \mathcal{E} вызовет в ней электрический ток. А можно сказать, что этот ток вызывается напряженностью \vec{E} электрического поля, ускоряющего заряды проводника. Но ЭДС \mathcal{E} связана с напряженностью E соотношением

$$\mathcal{E} = E \cdot 2\pi r.$$

Собирая вместе все сказанное, запишем

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{\Delta(\pi r^2 B_0 \cos \omega t)}{\Delta t}.$$

Более того, и рамка может быть не проводящей, а сделанной, например, из соломинки, через которую пьют сок, – все равно в ней возникнет индукционное электрическое поле. А значит, может и не быть никакой рамки: электрическое поле возникнет и в вакууме, и в воздухе..., которым наполнен соленоид! – догадался Студент. Это поле будет равно

$$E = -\frac{r}{2} B_0 \frac{\Delta \cos \omega t}{\Delta t} = \frac{r B_0}{2} \omega \sin \omega t,$$

причем оно тоже будет изменяться по гармоническому закону (конечно, тут Студент учел, что скорость изменения косинуса есть минус синус, умноженный на ω).

Но электрическое поле действует на электрический заряд. И тут у Студента возникла идея эксперимента: подвесить внутри соленоида заряженный шарик и измерить амплитуду его колебаний в электрическом поле \vec{E} , порожденном переменным магнитным полем \vec{B} .

Сказано – сделано. Масса шарика равнялась, конечно, m , его радиус был a , электрический заряд был равен q , а длину нити (разумеется, невесомой, нерастяжимой, бесконечно тонкой) Студент выбрал равной $r = b/2$, где b – это

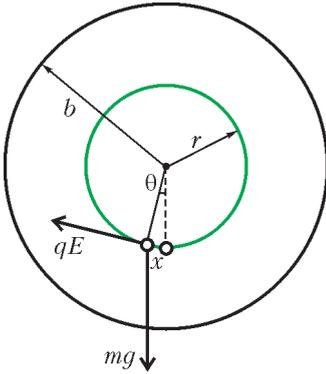


Рис. 2

внутренний радиус селеноида (рис.2). Тогда уравнение движения шарика в электрическом поле E и в поле тяготения с ускорением g приобрело вид

$$x'' = -g \sin \theta + \frac{q}{m} E .$$

Угол отклонения θ этого математического маятника от положения равновесия легко связать со смещением x по окружности: $\theta = \frac{x}{b/2}$.

Кроме того, если рассматривать малые колебания (как и положено здравомыслящему Студенту, а тем более школьнику Отличнику), то вместо синуса можно (приближенно) написать его аргумент (конечно, в радианах): $\sin \theta = \theta = \frac{2x}{b}$. Тогда уравнение колебаний будет выглядеть так:

$$x'' + \frac{2g}{b} x = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{2} \omega \sin \omega t .$$

Тут еще можно ввести привычное обозначение $\frac{2g}{b} = \omega_0^2$, где ω_0 – частота собственных колебаний шарика.

Ба! Ведь это просто уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора! – воскликнул Студент и немедленно отыскал его решение в виде $x = x_0 \sin \omega t$, т.е. тоже гармонических колебаний с частотой вынуждающей силы. Скорость изменения синуса есть косинус, умноженный на ω , а скорость изменения косинуса, как уже было сказано, это минус синус, умноженный на ω . Значит, вместо ускорения x'' появится $-x_0 \omega^2 \sin \omega t$. В результате получится уравнение для определения амплитуды x_0 смещения шарика:

$$-x_0 \omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 x_0 \sin \omega t = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t .$$

А поскольку это уравнение должно быть верно для любого момента времени, $\sin \omega t$ можно сократить, и останется

$$x_0 = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Но что это? Получилось, что при значении $\omega = \omega_0$ знаменатель обращается в ноль, а значит, амплитуда отклонения шарика устремляется в бесконечность (рис.3; сплошные кривые). Да ведь это резонанс, а с резонансом надо обращаться осторожно. Нужно учесть силу, тормозящую движение шарика, – силу сопротивления воздуха.

И Студент стал изучать эту силу, роняя мелкие шарики изпод потолка в ванну. На таком большом расстоянии шарик быстро успевал приобрести постоянную скорость $v = \frac{h}{t}$, которую легко было вычислить, зная высоту потолка h и замерив секундомером время падения t , а момент падения даже для самых мелких пылинок был легко заметен на гладкой поверхности воды. В резуль-

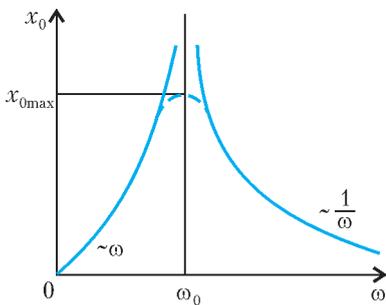


Рис. 3

тате этих измерений Студент обнаружил, что сила сопротивления воздуха для мелких шариков пропорциональна их радиусу и скорости движения:

$$F_{\text{сопр}} = \gamma a v = \gamma a x' ,$$

где γ – коэффициент пропорциональности. (Интересно, что еще древний Аристотель указывал на такую зависимость силы от скорости, а в позапрошлом веке ее точно вычислил Стокс для случая медленного, «ползущего» движения сферы в сплошной среде.) Наш Студент получил значение $\gamma = \frac{10^{-3}}{3} \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{м/с}}$ для условий, близких к «нормальным».

В итоге пришлось исправить уравнение движения шарика с учетом найденной силы сопротивления, так что оно приобрело вид

$$x'' + \omega_0^2 x + \gamma \frac{a}{m} x' = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t ,$$

или, для краткости записи,

$$x'' + \omega_0^2 x + \beta x' = A \omega \sin \omega t ,$$

где

$$\beta = \gamma \frac{a}{m} , \quad A = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} .$$

И тут кончается физика и начинается математика (которая, впрочем, тоже есть часть физики – как считают многие приличные люди). Теперь уже не годится искать решение в прежнем виде $x = x_0 \sin \omega t$, и ясно почему: тогда часть слагаемых в левой части по-прежнему будет пропорциональна $\sin \omega t$, а вот новое слагаемое, содержащее скорость смещения, будет пропорционально $\cos \omega t$, и уравнение нельзя будет сократить ни на $\sin \omega t$, ни на $\cos \omega t$. Поэтому попробуем искать решение в виде

$$x = x_0 \cos(\omega t - \varphi) ,$$

где φ – так называемый сдвиг фаз (видно, что при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получим прежнее решение).

Подставив эту функцию в наше уравнение, получим

$$x_0 \left((-\omega^2 + \omega_0^2) \cos(\omega t - \varphi) - \beta \omega \sin(\omega t - \varphi) \right) = A \omega \sin \omega t .$$

Учтем следующие тригонометрические равенства:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi ,$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi .$$

Тогда в предыдущем уравнении выделятся две группы слагаемых: одна будет содержать $\cos \omega t$, другая $\sin \omega t$. А поскольку это уравнение должно быть верным в любой момент времени, то коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ должны быть равны нулю. Так получим два уравнения для неизвестных x_0 и φ :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos \varphi + \beta \omega \sin \varphi = 0 ,$$

$$x_0 \left((-\omega^2 + \omega_0^2) \sin \varphi - \beta \omega \cos \varphi \right) = A \omega .$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\beta \omega} ,$$

$$x_0 = \frac{A \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta \omega)^2}} .$$

Видно, что теперь амплитуда отклонения шарика не обращается в бесконечность ни при каких значениях ω (см. рис.3; штриховая кривая). Но она достигает максимального

значения при $\omega = \omega_0$, и это значение равно

$$x_{0\max} = \frac{A}{\beta} = \frac{qbB_0}{4\gamma a}.$$

Результат оказался не зависящим от массы шарика.

Теперь пора приступать к измерениям. Студент выбрал шарик радиусом $a = 1$ мм. Но какой наибольший заряд можно сообщить этому шарик? Ясно, что такой, чтобы напряженность электрического поля у его поверхности не превышала предельно допустимого для воздуха значения $E_{\max} = 3 \cdot 10^6$ В/м. Отсюда

$$q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E_{\max} = \frac{10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} \text{ Кл} = \frac{10^{-9}}{3} \text{ Кл}.$$

Далее, внутренний радиус соленоида был равен $b = 0,1$ м, а наибольшая амплитуда отклонения шарика от положения равновесия (в резонансе) оказалась равной $x_{0\max} = 0,01$ мм, откуда уже легко получилось

$$B_0 = \frac{4\gamma a x_{0\max}}{b q_{\max}} = \frac{4 \cdot (10^{-3}/3) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}}{0,1(10^{-9}/3)} \text{ Тл} = 0,4 \text{ Тл}.$$

Не мало, – подумал Студент. – Но неужели так же труден путь всех великих физиков?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Квантовые чудеса

М.КАГАНОВ

УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА ДОПУСКАЕТ ПОСТАНОВКУ РАЗНЫХ задач. С некоторыми из них вы встретитесь в этой статье и сможете познакомиться с явлениями, столь разительно отличающимися от поведения классических объектов, что их вполне можно назвать квантовыми чудесами.

Нет стен, через которые нельзя пройти

Французский писатель Марсель Эме написал роман «Человек, проходивший сквозь стены». Хорошая, ироничная, умная книга. Роман был экранизирован, и фильм получился вполне неплохой. Проходить через стены человеку помогала его вера в себя. Когда он терял веру, способность исчезала. Весьма нравоучительно...

Мы точно знаем, что, не разрушив стену, ни человек, ни любое другое макроскопическое тело пройти сквозь нее не может. А микроскопическая частица? Не будем спешить с ответом.

На рисунке 5 изображена потенциальная яма. Вне области $|x| < d$ частица находится не может: при $|x| > d$ волновая функция $\psi(x, t) \equiv 0$. Это неизбежное следствие того, что $U(x) = \infty$ при $|x| > d$. По этой же причине квантовая микро-частица не может проникнуть через бесконечно высокий потенциальный барьер.

А если потенциальный барьер имеет конечную высоту?

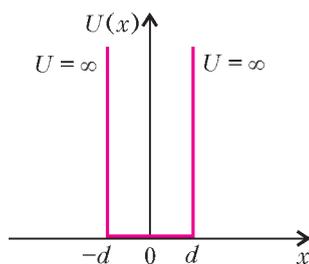


Рис. 5. Бесконечно глубокая потенциальная яма

При энергии, превышающей высоту барьера, частица *может* пролететь над ним. Но обязательно ли иметь энергию, превышающую высоту барьера? И обязательно ли частица пролетит над барьером?

Квантовая механика меняет наши обычные представления: микроскопическая частица может проникнуть через недоступную классической частице область, т.е. пройти через стену, а может отразиться от барьера даже тогда, когда ее энергия превышает высоту барьера.

Вернемся к потенциальному барьеру, изображенному на рисунке 3 (см. «Квант» №4): $U(x) = U_0 > 0$ при $|x| < d$, $U(x) = 0$ при $|x| > d$. Классическая частица с энергией $\epsilon < U_0$, долетев до барьера, отразится, а частица, имеющая энергию $\epsilon > U_0$, свободно перелетит область $|x| < d$. А как поведет себя квантовая частица?

Найдем состояния квантовой частицы (ее ψ -функцию) при различных значениях энергии ϵ . Для этого необходимо найти решение уравнения Шрёдингера. В квантовой механике, если частица движется под действием постоянной силы, имея определенную энергию, ее состояние называют *стационарным* – неважно, совершает частица финитное или инфинитное движение. Это состояние описывается стационарной волновой функцией, удовлетворяющей стационарному уравнению Шрёдингера.

В случае прямоугольного потенциального барьера это уравнение на разных участках оси имеет разный вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \epsilon\psi = 0 \text{ при } |x| > d,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (\epsilon - U_0)\psi = 0 \text{ при } |x| < d.$$

Слева и справа от барьера (при $|x| > d$) решениями уравнения являются две плоские волны $\exp(ik_e x)$ и $\exp(-ik_e x)$, волновой вектор $k_e = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$. Одна волна движется к ступеньке, а другая – от нее. При $|x| < d$ характер решения зависит от величины энергии ϵ . Если $\epsilon > U_0$, то и в этом случае решения представляют плоские волны $\exp(ik_i x)$ и $\exp(-ik_i x)$ с волновым вектором $k_i = \sqrt{2m(\epsilon - U_0)}/\hbar$. Если $\epsilon < U_0$, то решения уравнения совсем не похожи на плоские волны. Это $\exp(\pm\kappa x)$, где $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar$. Одна из функций на

расстоянии $1/\kappa$ возрастает в $e \approx 2,718281828\dots$ раз, а другая во столько же раз уменьшается.¹

Существование двух решений в каждой из областей означает, что решений бесконечно много: любая линейная комбинация двух решений также есть решение. Необходимо понять, каким образом выбрать нужное решение и как следует «сшивать» волновую функцию при $x = -d$ и при $x = d$. Ответы на поставленные вопросы дает физический смысл Ψ -функции.

Плотность вероятности $\rho = |\Psi(x)|^2$ не исчезает, а только перемещается в пространстве согласно уравнению непрерывности. Плотность потока вероятности $j(x)$ содержит производные от Ψ -функции по координате x . Плотность вероятности ρ и плотность потока j по своему смыслу должны быть непрерывными функциями координаты. Поэтому при скачкообразном изменении потенциальной энергии на волновую Ψ -функцию и на ее производную $d\Psi/dx$ надо наложить условие непрерывности. Отсутствие скачков у Ψ и у $d\Psi/dx$ и формулирует условие «сшивки» Ψ -функции на разных участках.

Теперь можно обсудить выбор решений, который существенно зависит от постановки задачи. Сначала рассмотрим самый простой случай. Перенесем правый обрыв барьера на $+\infty$, а начало координат ($x = 0$) совместим с левым обрывом. В результате потенциальная энергия $U(x)$ будет представлять собой ступеньку высотой U_0 , занимающую полуось $x > 0$ (рис.6). Наша задача – найти состояния квантовой

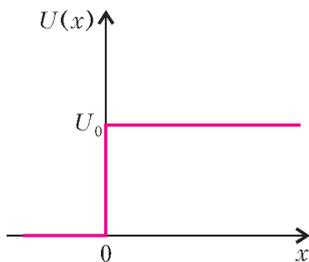


Рис. 6. Ступенька

частицы при различных значениях энергии ϵ , для чего необходимо найти решения уравнений Шрёдингера при $x > 0$ и при $x < 0$, т.е. на двух полуосях. Эти уравнения имеют тот же самый вид, как и в случае прямоугольного барьера при $|x| > d$ и $|x| < d$. Пусть $0 < \epsilon < U_0$. Слева от ступеньки (при $x < 0$) решения уравнения – это две волны $\exp(ikx)$ и $\exp(-ikx)$, волновой вектор $k = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$. Одна волна движется к ступеньке, а другая – от нее. Как ни странно, хотя энергия частицы ϵ меньше потенциальной энергии U_0 , нет формальных соображений, позволяющих считать, что $\Psi(x) \equiv 0$ при $x > 0$. Мы уже отмечали, что решения совсем не похожи на плоские волны. Это $\exp(\pm\kappa x)$, где $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar$. Решение, экспоненциально растущее с ростом координаты, заведомо, не подходит: на любом даже маленьком интервале, достаточно удаленном от ступеньки (при достаточно больших значениях координаты x , ведь $x \rightarrow \infty$), вероятность обнаружить частицу превысит единицу, чего быть не может. Годится только затухающее с ростом x решение:

$$\Psi(x) = b \exp(-\kappa x) \text{ при } x > 0 \text{ и } \epsilon < U_0.$$

Движущаяся слева к ступеньке частица описывается волновой функцией $\exp(ikx)$. Интуиция подсказывает, что частица может (скорее, даже должна) отразиться от ступеньки, ведь ее энергия по предположению меньше высоты ступеньки. Значит, Ψ -функция – сумма падающей волны и

волны отраженной, т.е.

$$\Psi(x) = \exp(ikx) + a \exp(-ikx) \text{ при } x < 0.$$

Постоянные множители a и b надо найти из условий «сшивки» (коэффициент при экспоненте у волны, падающей на ступеньку, выбран равным единице для удобства, физический смысл имеет квадрат отношения амплитуд падающей и отраженной волн). Эти условия (отсутствие скачков у Ψ и у $d\Psi/dx$ при $x = 0$) приводят к системе уравнений

$$1 + a = b, \quad ik(1 - a) = -\kappa b.$$

Отсюда

$$a = \frac{1 - i\kappa/k}{1 + i\kappa/k} = \frac{1 - i\sqrt{(U_0 - \epsilon)}/\epsilon}{1 + i\sqrt{(U_0 - \epsilon)}/\epsilon},$$

$$b = \frac{2}{1 + i\sqrt{(U_0 - \epsilon)}/\epsilon}.$$

По принятой в квантовой механике трактовке полученного результата величина $R = |a|^2$ – это коэффициент отражения, т.е. отношение плотности потока вероятности, направленного от ступеньки, к плотности потока, направленного к ступеньке. А если вспомнить, что сравнение полученных теоретических формул с экспериментом требует ансамбля тождественных частиц в одинаковых условиях, то можно считать, что коэффициент отражения R есть отношение плотности потока частиц, отраженных от ступеньки, к плотности потока частиц, двигающихся слева направо к ступеньке.

На первый взгляд получилось нечто странное. Коэффициент отражения от ступеньки $R = 1$, так как множитель a равен отношению комплексно сопряженных величин. А в то же время $b \neq 0$, значит, вероятность обнаружить частицу правее ступеньки отлична от нуля. Что-то тут не так? Нет, все правильно. Ошибки нет. Отсутствие противоречия подтверждается тем, что плотность потока вероятности $j = 0$ при $x \geq 0$. Убедитесь в этом.

Ясно, что проникновение частиц в область, где полная энергия меньше потенциальной, сугубо квантовое явление – проявление волновых свойств микроскопических частиц.

Теперь рассмотрим частицу, летящую к ступеньке по-прежнему слева, но с энергией $\epsilon > U_0$. Классическая частица, замедлив свой полет, беспрепятственно преодолит ступеньку. Посмотрим, что произойдет с квантовой частицей.

И при $x > 0$, и при $x < 0$ уравнения Шрёдингера имеют решения в виде плоских волн, правда с разными волновыми векторами. На каждой из полуосей есть по две волны, распространяющиеся в противоположные стороны. Однако нет никаких оснований считать, что справа от ступеньки есть волна, распространяющаяся справа налево. Это означало бы, что бегущая направо волна от чего-то отразилась. Не от чего. А есть ли бегущая налево волна при $x < 0$, покажет условие «сшивки».

Итак, при $\epsilon > U_0$

$$\Psi(x) = \exp(ik_1x) + a \exp(-ik_1x), \quad k_1 = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar \text{ при } x < 0,$$

$$\Psi(x) = b \exp(ik_2x), \quad k_2 = \sqrt{2m(\epsilon - U_0)}/\hbar \text{ при } x > 0.$$

Из условий «сшивки» немедленно находим значения амплитуд a и b . Да, $a \neq 0$. Значит, отличен от нуля и коэффициент отражения

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Коэффициент отражения R меньше единицы, а коэффици-

¹ Привел значение числа e с точностью до 9-го знака после запятой, чтобы поделиться с читателями мнемоническим правилом для запоминания этого числа. Число 2,7 надо знать, а дальше – дважды год рождения Льва Николаевича Толстого. Если кому-то это правило поможет запомнить год рождения Толстого – тоже неплохо.

ент прохождения равен $D = 1 - R$. Любопытно, что R не зависит от направления полета частицы. Квантовая частица с энергией $\epsilon > U_0$, откуда бы она ни летела, отражается от ступеньки с одной и той же вероятностью. Обратите внимание: $D \neq |b|^2$, и попытайтесь объяснить, почему.

С ростом энергии ϵ коэффициент отражения R уменьшается и при стремлении ϵ к бесконечности стремится к нулю. По какому закону R обращается в ноль, вы легко определите самостоятельно. При $\epsilon = U_0$ коэффициент отражения R обращается в единицу и, как мы знаем, остается равным единице при любом значении энергии $\epsilon < U_0$.

Итак, квантовая частица может проникать в область, где $\epsilon < U_0$, и отражается от ступеньки, даже если $\epsilon > U_0$. А что произойдет, если на пути частицы стена – барьер конечной высоты и конечной ширины? Для ответа на этот вопрос надо вернуться к задаче с прямоугольным потенциальным барьером.

Мы уже понимаем, что при $x < -d$ волновая функция частицы – это сумма двух волн, падающей и отраженной. Амплитуду падающей волны снова примем равной единице, а амплитуду отраженной волны по традиции обозначим буквой a . Их волновые векторы противоположны по знаку, а по модулю равны $k = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$. За барьером (при $x > d$) есть только одна волна с тем же волновым вектором:

$$\psi = f \exp(ikx) \text{ при } x > d.$$

Вне зависимости от соотношения между ϵ и U_0 нет никаких оснований в области $|x| < d$ отбрасывать ни экспоненциально возрастающее решение при $\epsilon < U_0$, ни волну, бегущую справа налево с действительным волновым вектором k_1 . Так что при $|x| < d$

$$\psi = b_1 \exp(\kappa x) + b_2 \exp(-\kappa x), \quad \kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar, \quad \epsilon < U_0,$$

$$\psi = b_1 \exp(ik_1 x) + b_2 \exp(-ik_1 x), \quad k_1 = \sqrt{2m(\epsilon - U_0)}/\hbar, \quad \epsilon > U_0.$$

Здесь b_1 , b_2 и f – амплитуды. Задача свелась к их определению. Для этого служат четыре условия «сшивки»: на каждом скачке потенциальной энергии должны быть непрерывны ψ и $d\psi/dx$.

После простого расчета (очень советую его проделать!) можно получить два выражения для коэффициента прохождения $D = |f|^2$ и коэффициента отражения $R = |a|^2 = 1 - D$: когда энергия частицы меньше высоты барьера (при $\epsilon < U_0$) и частица летит сквозь барьер и когда частица летит над барьером при энергии больше высоты барьера (при $\epsilon > U_0$). При $\epsilon = U_0$ коэффициент прохождения D обращается в единицу, что вполне естественно, так как волна беспрепятственно проходит область барьера. Заметим, что при стремлении ϵ к U_0 со стороны больших энергий коэффициент прохождения D тоже стремится к единице. Ведь при $\epsilon = U_0$ и длина волны де Бройля $2\pi/k_1 \rightarrow \infty$. Но $D = 1$ не только при $\epsilon = U_0$, когда $k_1 = 0$. Если $2k_1 d = \nu\pi$, где $\nu = 1, 2, 3$ и т.д. – целые числа, т.е. на ширине барьера $2d$ укладывается целое число полуволен, то и тогда $D = 1$. Во всех случаях, кроме перечисленных, коэффициент прохождения $D < 1$, а коэффициент отражения $R \neq 0$.

Надо отметить еще один факт. Чем энергия частицы ϵ меньше (речь идет о сравнении с U_0), тем коэффициент прохождения через барьер меньше. Если $kd \geq 1$, то коэффициент прохождения экспоненциально мал.

Таким образом, мы убедились, что непроницаемых стен нет. Чем энергия частицы больше, даже при $\epsilon < U_0$, тем коэффициент прохождения D ближе к единице, а коэффициент отражения R – к нулю. И все же, несомненно, описанные

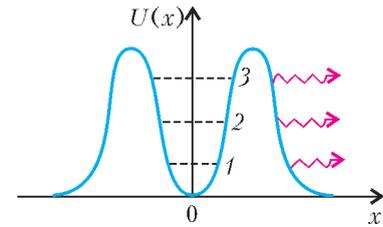
свойства можно отнести к квантовым чудесам. Хотя бы потому, что устанавливаются они при изучении движения *отдельной частицы*, так непохожей на волну. И обнаружить проницаемость барьера можно, наблюдая за одной частицей. Но для сравнения количественных предсказаний теории с экспериментом необходимо исследовать поведение *многих частиц*.

Туннель, который не надо прокладывать

Прохождение микроскопической частицей недоступной по законам классической механики области получило название *туннельного эффекта*. Туннельный эффект встречается нередко и играет важную роль. Только упомянем: радиоактивный α -распад – типичный пример туннельного эффекта, источники термоядерной энергии звезд и нашего Солнца не существовали бы, не будь туннельного эффекта; многие химические реакции, происходящие в живых организмах, могут осуществляться благодаря туннельным переходам электрона из молекулы в молекулу; наконец, некоторые современные приборы содержат туннельный диод, получивший свое название по туннельному эффекту, на котором основан.

Туннельный эффект обычно характеризуется коэффициентом прохождения недоступной для классической частицы области, но не всегда постановка задачи такая, как мы рассмотрели.

При распаде сложного образования, например атомного ядра, когда α -частица покидает ядро благодаря туннельному эффекту, задача состоит в вычислении времени жизни исходного, составного состояния – того, что было до радиоактивного распада. Обычно вычисляют время полураспада – время, за которое половина всех атомов или ядер распадется. Мы обращали внимание на то, что коэффициент прохождения D тем больше, чем ближе энергия ϵ налетающей частицы к высоте барьера U_0 . Чем больше энергия того состояния, которое занимает частица в связанном состоянии, тем время полураспада меньше (рис.7).



1, 2, 3 – уровни энергии
 $\tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ – времена полураспада
 Рис. 7. Время полураспада и энергия частицы

Приведем еще один пример проявления туннельного эффекта.

На рисунке 8 изображена довольно сложная потенциальная яма. Скорее, две ямы, разделенные между собой барьером. Если бы барьер был бесконечно высоким, то в каждой из ям была бы своя система энергетических уровней. Так как ямы одинаковы, то и системы уровней в ямах были бы тождественны. Сказав, что частица имеет такую-то энергию, мы не знали бы, в какой яме частица находится. О такой ситуации говорят, что *имеет место вырождение*: два разных состояния имеют одинаковые энергии. Одно состояние принадлежит левой яме, другое – правой. Через бесконечно высокий барьер частица перемещаться не может, но через барьер конечной высоты, благодаря туннельному эффекту, может. Если барьер не слишком узкий, то коэффициент прохождения мал. А как способность

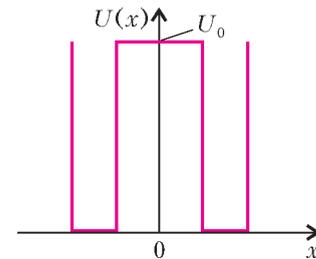


Рис. 8. Две ямы, связанные туннельным эффектом

частицы перемещаться из одной ямы в другую изменит энергетический спектр частицы в ямах? Ответ будет нетривиальным.

Мы хотим не только сформулировать ответ, но и показать, как подобная задача решается, для чего и рассмотрим две ямы прямоугольной формы, разделенные прямоугольным барьером. Как и барьеры, которые мы рассмотрели ранее, прямоугольный барьер с прямоугольными границами, без сомнения, упрощенная модель, но для описания интересующего нас явления она вполне пригодна.

Итак, мы должны найти решение стационарного уравнения Шрёдингера с потенциальной энергией $U = U(x)$, изображенной на рисунке 8. В целях простоты высота барьера приравнена глубине ям. Функция $U = U(x)$, а тем самым и уравнение Шрёдингера, обладает симметрией при замене x на $-x$. Уравнение инвариантно (неизменно) при такой замене. Симметрия уравнения Шрёдингера позволяет его решения разделить на два класса: на симметричные, для которых $\psi_s(x) = \psi_s(-x)$, и антисимметричные, для которых $\psi_a(x) = -\psi_a(-x)$.²

Уравнение Шрёдингера имеет различный вид в зависимости от того, какому интервалу принадлежит координата x . Нас будут интересовать состояния с энергией $0 < \epsilon < U_0$. На разных интервалах уравнения разные:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \epsilon\psi = 0 \quad \text{при } |a| > |x| > |b|,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - (U_0 - \epsilon)\psi = 0 \quad \text{при } |x| < |b| \text{ и } |x| > |a|.$$

² С тем что у симметричной задачи может быть антисимметричное решение, мы уже встретились при вычислении уровней энергии частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Вопрос о симметрии решений физических задач очень интересен. Вспомните, что при сферической симметрии силы всемирного притяжения все планеты движутся по эллипсам. К сожалению, вопрос этот выходит за пределы темы нашей статьи.

Как мы отметили, ψ -функция может быть либо симметричной, либо антисимметричной. Выбрав для ψ -функции s - или a -решение, достаточно выписать зависимость либо при $x > 0$, либо при $x < 0$. Ограничимся правой полуосью (значение ψ -функции на левой полуоси определяется симметрией):

$$\psi_s(x) = A \operatorname{ch} \kappa x \quad \text{при } x < b,$$

$$\psi_a(x) = A \operatorname{sh} \kappa x \quad \text{при } x < b,$$

$$\psi_{s,a}(x) = B \exp(ikx) + C \exp(-ikx) \quad \text{при } b < x < a,$$

$$\psi_{s,a}(x) = D \exp(-\kappa x) \quad \text{при } x > a.$$

Здесь $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar$, $k = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$, а $0 < \epsilon < U_0$.

Требования непрерывности ψ -функции и ее производной по координате на границах интервалов формулируют четыре уравнения для четырех неизвестных A , B , C и D , у которых мы опустили индексы s и a , хотя их значения для симметричной и антисимметричной ψ -функций различны. Условие разрешимости каждой из систем уравнений служит дисперсионное уравнение, позволяющее найти разрешенные уровни энергии. Оно выводится путем исключения всех четырех постоянных. При $U_0 \rightarrow \infty$, когда две ямы не связаны друг с другом, дисперсионные уравнения совпадают, что и соответствует вырождению: уровни энергии дважды вырождены ($\epsilon_s^0 = \epsilon_a^0$). При конечном значении U_0 энергии s - и a -уровни различаются, и вырождение ликвидируется. Если $U_0 \gg \hbar^2/(2m(a-b)^2)$, то $|\epsilon_s^0 - \epsilon_a^0| \ll \epsilon_{s,a}^0$ - уровни энергии расщепляются на близко расположенные пары (рис.9). С ростом энергии растет и расстояние между уровнями в паре.

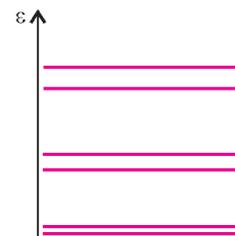


Рис. 9. Расщепление уровней энергии частицы

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Движение заряда в магнитном поле

В. ДРОЗДОВ

ВЕСЬМА ВЫСОКА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ПРИ ТОМ или ином виде конкурсного испытания абитуриент встретится с задачей, сюжетом которой будет движение точечного заряда в магнитном поле. Чтобы решить такую задачу, кроме свойств магнитного поля надо знать и динамику. А в некото-

рых задачах может дополнительно присутствовать еще и электрическое поле.

Таким образом, задачи на движение заряда охватывают обширный физический материал и являются эффективным средством проверки знаний абитуриента.

Начнем с двух задач, решение (а не ответы!) которых нужно особенно хорошо понять и запомнить.

Задача 1. В однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , частице массой m и зарядом q сообщают скорость \vec{v} , направленную перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите, как будет двигаться эта частица в магнитном поле.

На заряд действует сила Лоренца \vec{F}_L , направление которой определяем по правилу левой руки (рис.1). Она постоянна по модулю: $F_L = qvB$ и всегда перпендикулярна скорости частицы: $\vec{F}_L \perp \vec{v}$. Значит, и ускорение частицы $\vec{a} = \frac{\vec{F}_L}{m}$

тоже постоянно по модулю и в любой момент времени

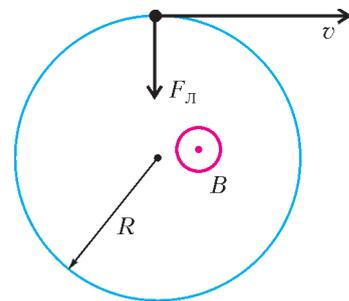


Рис. 1

движения перпендикулярно скорости. Из механики известно, что если точка движется по окружности, то именно так и будет. А верно ли обратное утверждение? Да, но доказывать его мы не будем, а к сведению примем.

Итак, частица движется по окружности, сила Лоренца сообщает частице центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

значит, искомый радиус окружности равен

$$R = \frac{mv}{qB},$$

а период обращения частицы составляет

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Важно отметить, что период T не зависит от скорости частицы v .

Задача 2. В однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} влетает со скоростью \vec{v} частица массой m и зарядом q . Угол между вектором скорости \vec{v} и вектором магнитной индукции \vec{B} равен α . Как будет двигаться частица в магнитном поле?

Рассмотрим предварительно случай $\alpha = 0$. При этом сила Лоренца равна нулю, следовательно, заряд будет двигаться прямолинейно с постоянной скоростью \vec{v} , т.е. по инерции.

Легко видеть, что вариант произвольного угла α представляет собой комбинацию двух частных случаев: $\alpha_1 = 90^\circ$ и $\alpha_2 = 0$.

Разложим вектор \vec{v} на две составляющие: $\vec{v}_1 \perp \vec{B}$ и $\vec{v}_2 \parallel \vec{B}$, при этом $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (рис.2). Интуитивно ясно, что частица будет совершать вращательное движение со скоростью v_1 по поверхности цилиндра, равномерно перемещаясь со скоростью v_2 вдоль его образующей.

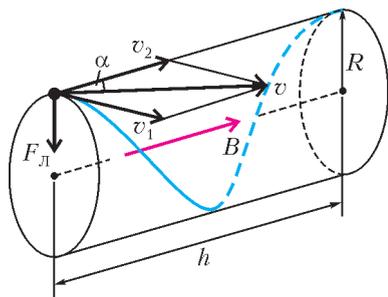


Рис. 2

Радиус цилиндра R определяется по аналогии с задачей 1 из уравнения

$$\frac{mv_1^2}{R} = qv_1B$$

(сила Лоренца действует только на составляющую скорости \vec{v}_1):

$$R = \frac{mv_1}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi m}{qB}$$

– такой же, как и в первой задаче. Он не зависит не только от модуля скорости, но и от ее направления, определяемого углом α . Траекторией заряда будет винтовая линия, «навитая» на цилиндр. Ее шаг – это расстояние, проходимое вдоль образующей за один оборот:

$$h = v_2 T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

Приведенное решение не вполне строгое, но вполне приемлемое.

Теперь решим еще несколько задач на движение заряда в магнитном поле.

Задача 3. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} . В точке A он имеет скорость \vec{v} , которая составляет с направлением поля угол α (рис.3). При каких значениях индукции магнитного поля электрон окажется в точке B ? Расстояние $AB = L$.

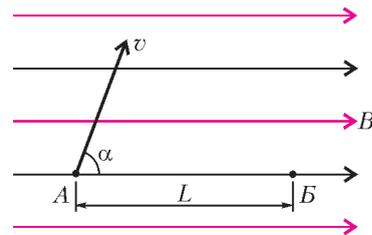


Рис. 3

Очевидно, что условие задачи будет выполнено, если на расстоянии L уложится натуральное число шагов винтовой линии. Таким образом,

$$L = nh = \left(\frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB} \right) n,$$

где m и q – масса и модуль заряда электрона соответственно. Отсюда получаем неоднозначный ответ:

$$B = \left(\frac{2\pi m v \cos \alpha}{qL} \right) n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Это решение краткое, однако на экзамене придется вывести формулу шага винта, что мы сделали в задаче 2.

Задача 4. Протон движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с радиусом R и шагом h . Индукция магнитного поля равна B . Найдите скорость частицы.

Из результата задачи 2 вытекает такая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{mv \sin \alpha}{qB} = R, \\ \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB} = h, \end{cases}$$

где m и q – масса и заряд протона соответственно. Запишем равносильную систему:

$$\begin{cases} v \sin \alpha = \frac{qBR}{m}, \\ v \cos \alpha = \frac{qBh}{2\pi m}. \end{cases}$$

Возведем обе части обоих уравнений в квадрат и сложим. Учитывая, что $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, найдем модуль скорости протона:

$$v = \frac{qB}{m} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}.$$

Легко определить и угол α между векторами \vec{B} и \vec{v} :

$$\alpha = \arctg \left(\frac{2\pi R}{h} \right).$$

Задача 5. Альфа-частица влетает по нормали в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией $B = 0,1$ Тл. Размер области $h = 0,1$ м. Найдите скорость частицы, если после прохождения магнитного поля она отклоняется на угол $\varphi = 30^\circ$ от первоначального направления. Для α -частицы отношение заряда к массе (удельный заряд) равен $q/m = 5 \cdot 10^7$ Кл/кг.

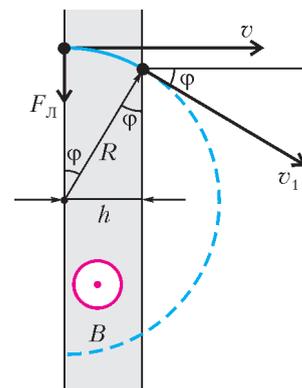


Рис. 4

Здесь мы имеем дело с локализованным в пространстве магнитным полем, поэтому траек-

торией заряженной частицы будет не вся окружность, а лишь ее дуга (рис.4). Из основного уравнения движения (встречавшегося в первой задаче)

$$\frac{mv^2}{R} = qvB$$

находим скорость частицы:

$$v = \frac{q}{m} RB.$$

Поскольку радиус дуги равен $R = \frac{h}{\sin \varphi}$, то окончательно получим

$$v = \frac{q}{m} \frac{hB}{\sin \varphi} = 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 6. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} со скоростью \vec{v} , направленной под углом φ к линиям магнитной индукции. Ширина области с полем равна l . Найдите изменение импульса электрона за время пролета через магнитное поле.

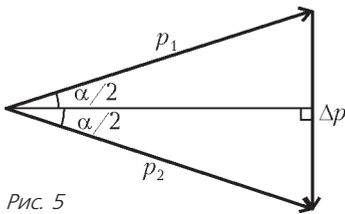


Рис. 5

Опираемся на решение второй задачи, учитывая, однако, что в данной задаче поле локализовано. Поскольку составляющая импульса электрона, параллельная вектору \vec{B} , не меняется, искомое изменение импульса равно разности составляющих импульса электрона, перпендикулярных вектору \vec{B} (рис.5):

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \text{ где } p_1 = p_2 = mv \sin \varphi.$$

Из свойств равнобедренного треугольника сразу вытекает, что

$$\Delta p = 2p_1 \sin \frac{\alpha}{2},$$

где α – угол поворота перпендикулярной составляющей импульса. Физически очевидна пропорция $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{l}{h}$, где

$h = \frac{2\pi mv \cos \varphi}{qB}$ – шаг винтовой линии, поскольку при прохождении каждого шага винта электрон совершает оборот, а при прохождении части шага – такую же часть оборота. Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{qBl}{mv \cos \varphi},$$

где m и q – масса и модуль заряда электрона соответственно. Следовательно,

$$\Delta p = 2mv \sin \varphi \sin \frac{qBl}{2mv \cos \varphi}.$$

В следующих двух задачах магнитное поле дополнится полем электрическим.

Задача 7. Однородные магнитное и электрическое поля перпендикулярны друг другу. Напряженность электрического поля \vec{E} , индукция магнитного поля \vec{B} . С какой скоростью и в каком направлении должен лететь протон, чтобы двигаться в области этих полей прямолинейно?

Интуитивно подобранная векторная конфигурация полей и сил изображена на рисунке 6. Скорость протона \vec{v} перпендикулярна обоим векторам \vec{E} и \vec{B} . Очевидно, что движение частицы может быть прямолинейным в том и

только том случае, когда сила Лоренца \vec{F}_L и кулоновская сила \vec{F}_K компенсируются:

$$\vec{F}_L + \vec{F}_K = 0.$$

Отсюда следует равенство модулей сил:

$$F_L = F_K, \text{ или } qvB = qE,$$

и получается ответ:

$$v = \frac{E}{B}.$$

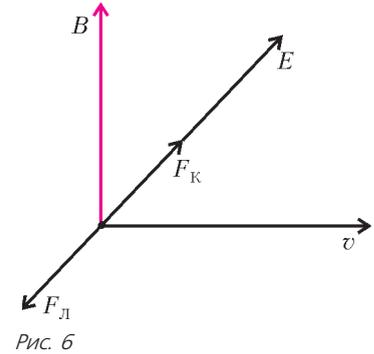


Рис. 6

При этом прямолинейное движение протона будет еще и равномерным.

Легко видеть, что при любой другой скорости (как по модулю, так и по направлению) движение частицы будет криволинейным и неравномерным.

Задача 8. Электрон движется в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях, направленных по оси Z. В начальный момент электрон пересекает начало координат, двигаясь в направлении оси X. В каких точках электрон вновь пересечет ось Z? Напряженность электрического поля E, индукция магнитного поля B, модуль заряда электрона e, его масса m.

На рисунке 7 в системе координат XYZ изображены направления полей и сил, действующих на электрон. Основываясь на предыду-

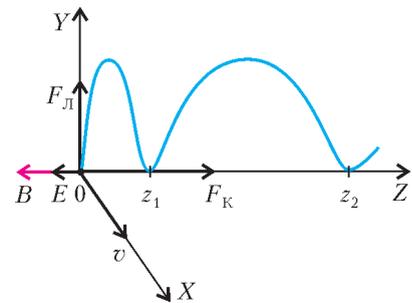


Рис. 7

щих задачах и на здравом смысле, можно сделать вывод, что электрон будет двигаться по винтовой линии, но с увеличивающимся шагом (конечно, строго это не винтовая линия) – ведь по оси Z на электрон действует кулоновская сила. Координата точки пересечения частицы с этой осью после n витков равна

$$z_n = \frac{a(nT)^2}{2},$$

где $a = \frac{eE}{m}$ – ускорение электрона, $T = \frac{2\pi m}{eB}$ – его период обращения. Отсюда имеем

$$z_n = \frac{eE}{2m} \left(\frac{2\pi mn}{eB} \right)^2 = \frac{2\pi^2 Em}{eB^2} n^2.$$

Упражнения

1. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . В начальный момент времени электрон находился в точке O и его скорость \vec{v} была перпендикулярна вектору магнитной индукции. Найдите расстояние l электрона от точки O в момент времени t . Массу электрона m и модуль его заряда q считать известными.

2. Незаряженная неподвижная частица распалась в магнитном поле с индукцией \vec{B} на две частицы с массами m_1 и m_2 и зарядами q и $-q$. Найдите время, через которое частицы могут встретиться, если пренебречь кулоновским взаимодействием осколков.

3. Протон влетает со скоростью 60 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, направления которых

совпадают, перпендикулярно этим полям. Найдите напряженность электрического поля, если индукция магнитного поля равна 0,1 Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, составляет 10^{12} м/с^2 .

4. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $\Delta\phi = 40 \text{ В}$, влетает в плоский слой однородного магнитного поля толщиной $h = 10 \text{ см}$. Скорость электрона перпендикулярна как линиям магнитной индукции поля \vec{B} , так и плоской границе слоя. При каком минимальном значении индукции B_{\min} электрон не пролетит сквозь слой? Отношение модуля заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$.

5. Электрон движется по окружности радиусом $R = 10 \text{ см}$ в

однородном магнитном поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью $E = 100 \text{ В/м}$. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

6. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $E = 6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ перпендикулярно его силовым линиям. Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля \vec{B} , которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $W = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$. Силой тяжести пренебречь.

Инвариантность и задачи с параметрами

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ ВАЖНУЮ РОЛЬ ИГРАЕТ понятие *инвариантности*, т.е. неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований.

В настоящей статье мы покажем, как свойства инвариантности позволяют решать определенный класс задач с параметрами.

Уравнения

Задача 1 (МГУ, мехмат, 1990). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0 \quad (1)$$

имеет единственное решение.

Решение. Незвестная x входит в уравнение (1) через две четные функции: $y = x^2$ и $y = \cos x$. Поэтому это уравнение инвариантно при замене x на $-x$. Значит, если какое-то число x_0 является корнем уравнения (1), то и число $(-x_0)$ также будет корнем. Отсюда следует, что уравнение (1) имеет единственный корень только в случае, когда среди корней присутствует число $x_0 = 0$. При этом не исключено наличие и других корней. Важно лишь то, что если среди корней нет числа 0, то множество M_a его корней не может быть одноэлементным (оно либо пусто, либо содержит по меньшей мере два корня вида $x_1, -x_1$).

Простая подстановка числа 0 на место неизвестной дает, что число 0 является корнем уравнения (1) для $a_1 = 0$ и $a_2 = 2 \sin 1$.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет уравнение (1) для двух «подозрительных» значений параметра $a_1 = 0$ и $a_2 = 2 \sin 1$.

1. Если $a = 0$, то уравнение (1) примет вид $x^2 = 0$, т.е. имеет единственный корень $x_0 = 0$. Поэтому значение $a = 0$ нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a = 2 \sin 1$, то уравнение (1) примет вид

$$x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x). \quad (2)$$

Левая часть этого уравнения больше или равна $4 \sin^2 1$, причем эта нижняя граница является точной – она достигается при $x = 0$. Оценить правую часть немного сложнее. Прежде всего отметим, что при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ выражение $\cos x$ меняется от -1 до $+1$. На отрезке $-1 \leq t \leq 1$ функция $\sin t$ монотонно возрастает от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Поэтому выражение $\sin(\cos x)$ меняется от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Соответственно, правая часть уравнения (2) меняется от $-4 \sin^2 1$ до $4 \sin^2 1$, причем значения правой части уравнения полностью заполняют этот отрезок. Следовательно, уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin^2 1, \\ 4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4 \sin^2 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x_0 = 0$, который удовлетворяет и второму уравнению системы. Значит, система, а вместе с ней и уравнение (2), имеет единственное решение $x = 0$. Поэтому проверяемое значение параметра $a = 2 \sin 1$ нужно включить в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = 0, a_2 = 2 \sin 1$.

Задача 2 (химический ф-т, 1999). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

Решение. В этой задаче уравнение также инвариантно при замене x на $-x$ (хотя заметить это довольно тяжело). Поэтому если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет его корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$. В противном случае множество корней либо пусто, либо бесконечно, либо конечно и содержит четное число корней.

Подставляя в исходное уравнение вместо неизвестной x число 0, мы получим простое уравнение относительно a :

$$|2a| = a^2 + 1, \text{ которое имеет два корня: } a_1 = 1, a_2 = -1.$$

Если $a = 1$, то исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = 0, \quad \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = -4.$$

Первое уравнение, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$. Второе уравнение можно привести к виду $2^x = \frac{x - 4}{x + 4}$,

после чего с помощью графиков легко показать, что оно не имеет корней.

Итак, в случае $a = 1$ исходное уравнение имеет ровно 1 корень.

Если $a = -1$, то исходное уравнение также распадается на два уравнения:

$$\frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = 0, \quad \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = 4.$$

Первое уравнение такое же, как и первое уравнение в случае $a = 1$; оно имеет единственный корень $x = 0$. Второе уравнение можно привести к виду $2^x = \frac{x+4}{x-4}$, после чего с помощью графиков легко показать, что оно имеет два корня. Точные значения этих корней нам совершенно не важны; впрочем, графики позволяют их локализовать: $-5 < x_1 < -4$, $4 < x_2 < 5$ ($x_1 = -x_2$).

Итак, в случае $a = -1$ исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

Хотя мы точно определили число корней в каждом из двух «подозрительных» случаев, для завершения решения задачи достаточно было просто выяснить, конечно или нет число корней исходного уравнения. Тогда множество корней имеет вид $\{0; x_1; -x_1; \dots; x_n; -x_n\}$, т.е. содержит нечетное число корней.

Ответ: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

В следующей задаче появится инвариантность необычного для школьной математики вида.

Задача 3 (ВМК, 1998). *Найдите все значения параметра a , при которых уравнение*

$$2^{1+x^2} + a \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \quad (3)$$

имеет единственное решение.

Решение. Нетрудно проверить, что уравнение (3) не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$. Поэтому если x_0 – решение уравнения (3), то $\frac{1}{x_0}$ – тоже решение. Следовательно, если x_0 – единственное решение, то $x_0 = \frac{1}{x_0}$, т.е. x_0 может быть только 1 или -1 .

Подставляя значение $x = 1$ в уравнение (3), получаем уравнение относительно параметра: $a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения отрицателен, так что ни при одном значении параметра a число $x = 1$ не будет корнем уравнения (3).

Подставляя теперь в уравнение (3) $x = -1$, получаем необходимое (но недостаточное (!)) условие для искомых значений параметра: $a^2 + a - \frac{3}{4} = 0$, которое имеет два корня $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{2}$.

Найдем теперь количество решений уравнения (3) для двух «подозрительных» значений параметра $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{2}$. Наличие в этом уравнении разнородных членов (показательного и тригонометрического), конечно, потребует применения графического метода или метода оценок. Чтобы упростить дальнейший анализ, применим тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $t \in (\pi; 0) \cup (0; \pi)$. Тогда (3) превратится в следующее уравнение:

$$2^{\sin t} + a \cos(2 \operatorname{ctg} t) + a^2 - \frac{5}{4} = 0. \quad (4)$$

1. Если $a = \frac{1}{2}$, то уравнение (4) примет вид

$$\cos(2 \operatorname{ctg} t) = 2 - 2^{1+\sin t}. \quad (5)$$

Функцию $y_1(t) = \cos(2 \operatorname{ctg} t)$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = \cos u$ и $u(t) = 2 \operatorname{ctg} t$. При изменении t от $-\pi$ до 0 функция $u(t)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Соответственно, функция $y_1(t)$ совершает бесконечное число колебаний от -1 до $+1$; при этом $y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Для $t \in (0; \pi)$ в силу четности функции $y_1(t)$ ситуация аналогична.

Функцию $y_2(t) = 2 - 2^{1+\sin t}$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = 2 - 2^{1+u}$ и $u(t) = \sin t$. График функции $y(u)$ получается из графика стандартной показательной функции 2^u переносом на 1 влево, осевой симметрией относительно оси Ox , переносом на 2 вверх. Поэтому при изменении переменной t от $-\pi$ до π функция $y_2(t)$

сначала возрастает от $y_2(-\pi) = 0$ до $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, затем убывает от $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ до $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, а потом опять возрастает от $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ до $y_2(\pi) = 0$.

Таким образом, уравнение (5) имеет бесконечно много корней на множестве $(-\pi; 0) \cup (0; \pi)$, так что проверяемое значение параметра не включается в ответ.

2. Если $a = -\frac{3}{2}$, то уравнение (4) примет вид

$$\cos(2 \operatorname{ctg} t) = \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t}). \quad (6)$$

При $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ функция $y = \cos(2 \operatorname{ctg} t)$ принимает значения из отрезка $[-1; 1]$, а функция $y = \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t})$ – из множества $[1; 2] \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$. Поэтому уравнение (6) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos(2 \operatorname{ctg} t) = 1, \\ \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t}) = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет единственный корень, удовлетворяющий условию $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$: $t = -\frac{\pi}{2}$. Этот корень является и корнем первого уравнения системы, так что проверяемое значение параметра включается в ответ.

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

Системы

Как и для уравнений, для систем самым распространенным случаем является инвариантность относительно изменения знака у одной или нескольких неизвестных.

Задача 4 (экономический ф-т, 1987). *Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система*

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

имеет единственное решение.

Решение. Наша система инварианта при замене x на $(-x)$. Поэтому если $(x; y)$ – решение системы (7), то и $(-x; y)$ тоже будет решением. Вследствие этого, если система (7) имеет единственное решение, то это решение имеет вид $(0; y)$.

Подставляя вместо неизвестной x число 0, мы получим, что

пара $(0; y)$ является решением системы (7) только для $a = \frac{4}{3}$ или $a = \frac{10}{3}$. В первом случае этим единственным решением может быть только пара $(x; y) = (0; 1)$, во втором – пара $(x; y) = (0; -1)$. Как обычно, нельзя исключить, что кроме отмеченного решения система имеет и другие решения.

Для завершения решения задачи нужно выяснить, сколько решений имеет исходная система (7) для двух подозрительных значений параметра $a = \frac{4}{3}$ и $a = \frac{10}{3}$.

Используя графические соображения и метод оценок, легко показать, что для $a = \frac{4}{3}$ пара $(x; y) = (0; 1)$ является единственным решением системы (7), а в случае $a = \frac{10}{3}$ система (7) имеет по меньшей мере три решения $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

Задача 5 (мехмат, 1966). Найдите все значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad (8)$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z – действительные числа).

Решение. Исходная система не меняется при одновременной перемене знаков у неизвестных x и y . Иначе говоря, она инвариантна относительно преобразования $(x; y; z) \mapsto (-x; -y; z)$. Поэтому если тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ является решением системы (8), то и тройка $(-x_0; -y_0; z_0)$ будет решением. Отсюда следует, что если $(x_0; y_0; z_0)$ – единственное решение системы, то $(x_0; y_0; z_0) = (-x_0; -y_0; z_0)$, откуда $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Прямая подстановка в (8) вместо x и y числа 0 показывает, что тройка $(0; 0; z)$ – решение системы (8) только в двух случаях:

1. В случае $a = b = 2$ единственным решением может быть только тройка $(x; y; z) = (0; 0; 2)$.

2. В случае $a = b = -2$ единственным решением может быть только тройка $(x; y; z) = (0; 0; -2)$.

Решая систему (8) для указанных конкретных значений параметров, мы получим, что для $a = b = 2$ система (8) кроме решения $(0; 0; 2)$ имеет еще четыре решения:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}; 1\right), \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}; \frac{-\sqrt{5}+1}{2}; 1\right), \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}; \frac{-\sqrt{5}-1}{2}; 1\right),$$

а для $a = b = -2$ тройка $(x; y; z) = (0; 0; -2)$ является единственным решением.

Ответ: $a = b = -2$.

В следующей задаче, в отличие от предыдущей, работает не только инвариантность относительно изменения знака у двух неизвестных, но и симметричность системы относительно входящих в нее неизвестных (в наших терминах речь идет об инвариантности относительно преобразования $(x; y) \mapsto (y; x)$). Однако эта симметрия (следовательно, и соответствующая инвариантность) «спрятана» с помощью замены неизвестных.

Задача 6 (мехмат, 2006). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases} \quad (9)$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Для новых переменных $u = x - a, v = y - \frac{a}{2}$ и $b = 3a^2 + 5a$ система (9) примет вид

$$\begin{cases} uv = 1, \\ u^2 + v^2 = b. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимно однозначное соответствие, системы (9) и (10) имеют одно и то же число решений.

Система (10) не изменится, если одновременно изменить знаки у переменных u и v , а также если их поменять местами. Поэтому если $(u_0; v_0)$ – решение системы (10), то решениями будут и пары $(-u_0; -v_0), (v_0; u_0), (-v_0; -u_0)$. В силу первого уравнения, u_0 и v_0 отличны от 0, так что из четырех указанных пар пары $(u_0; v_0)$ и $(-u_0; -v_0)$, а также пары $(v_0; u_0)$ и $(-v_0; -u_0)$ различны. Поэтому система (10) может иметь два решения только в случае $u_0 = v_0$.

Прямая подстановка в исходную систему дает, что пара $(u; u)$ будет решением тогда и только тогда, когда $b = 2$. Если $b = 2$, то система (10) легко решается и действительно имеет два решения: $(1; 1)$ и $(-1; -1)$.

Для основной переменной a условие $b = 2$ дает уравнение $3a^2 + 5a = 2$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -2$.

Упражнения

1 (ф-т почвоведения, 2001). При каких значениях параметра b уравнение $\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$ имеет ровно один корень?

2 (геологический ф-т, 2003). При каких значениях a уравнение $2\pi^2(x-1)^2 + 4a \cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственное решение?

3 (экономический ф-т, 2003). Найдите все значения параметра b , при которых уравнение

$$b^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - b\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

4 (мехмат, 1966). Найдите все значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

имеет только одно решение.

5 (МШЭ, 2005). Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + 1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6 (ВМК, 1997). При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x-y) + xy \leq 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

7 (химический ф-т, 1986). Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

ОЛИМПИАДЫ

XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Четвертый (федеральный окружной) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике прошел с 24 по 29 марта 2007 года в городах Санкт-Петербург (Северо-Западный федеральный округ), Ярославль (Центральный), Майкоп (Южный), Пенза (Приволжский), Курган (Уральский), Абакан (Сибирский) и Биробиджан (Дальневосточный).

Заключительный, пятый этап олимпиады проходил с 23 по 28 апреля 2007 года в Майкопе. Столица Адыгеи, успешно приняв за последние годы большое число математических соревнований, стала традиционным местом встреч юных математиков. В нынешней олимпиаде приняли участие 239 школьников России — дипломантов IV этапа и победителей Московской и Санкт-Петербургской олимпиад, а также команды гостей из Болгарии и Китая, участие которых во Всероссийской олимпиаде уже стало хорошей традицией. Впервые пятый этап проводился в параллели 8 класса (ранее пятый этап проводился по трем параллелям, с 9 по 11 класс).

За оригинальные решения жюри отметило специальными призами четырех участников: восьмиклассника Хомутова Никиту (станция Динская Краснодарского края) — за решение трудной комбинаторной задачи (задача 8 для 8 класса), девятиклассников Царькова Олега (Москва) и Ненашева Глеба (Санкт-Петербург) — за красивое и оригинальное решение геометрической задачи (задача 6 для 9 класса) и десятиклассника Янушевича Леонида (Москва) — за усиленные результаты задачи по теории чисел (задача 8 для 10 класса). Набрать максимальное количество баллов (56) удалось лишь выступавшему за 9 класс Линь Бо (Китай) и 11-класснику Есину Алексею (Краснодарский край).

Ниже приводятся условия задач IV и V этапов и список дипломантов V (заключительного) этапа XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Окружной этап

8 класс

1. В выпуклом четырехугольнике семь из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.

Н.Агаханов

2. Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стер некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

М.Мурашкин

3. Существуют ли такие простые числа $p_1, p_2, \dots, p_{2007}$, что $p_1^2 - 1$ делится на p_2 , $p_2^2 - 1$ делится на $p_3, \dots, p_{2007}^2 - 1$ делится на p_1 ?

В.Сендеров

4. На шахматной доске расставлены во всех клетках 32 белые и 32 черные пешки. Пешка может бить пешки проти-

воположного цвета, делая ход по диагонали на одну клетку и становясь на место взятой пешки (белые пешки могут бить только вправо-вверх и влево-вверх, а черные — только влево-вниз и вправо-вниз). Другим образом пешки ходить не могут. Какое наименьшее количество пешек может остаться на доске?

И.Богданов

5. Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

И.Рубанов

6. См. задачу M2056 «Задачника «Кванта».

7. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка M таким образом, что $\angle AMC = 2\angle ABC$. На отрезке AM нашлась такая точка K , что $\angle BKM = \angle ABC$. Докажите, что $BK = KM + MC$.

С.Берлов

8. В классе учатся 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

С.Берлов

9 класс

1. Петя придумал 1004 приведенных квадратных трехчлена f_1, \dots, f_{1004} , среди корней которых встречаются все целые числа от 0 до 2007. Вася рассматривает всевозможные уравнения $f_i = f_j$ ($i \neq j$), и за каждый найденный у них корень Петя платит Васе по рублю. Каков наименьший возможный доход Васи?

И.Рубанов

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. См. задачу M2057 «Задачника «Кванта».

4. У двух треугольников равны наибольшие стороны и равны наименьшие углы. Строится новый треугольник со сторонами, равными суммам соответствующих сторон данных треугольников (складываются наибольшие стороны двух треугольников, средние по длине стороны и наименьшие стороны). Докажите, что площадь нового треугольника не меньше удвоенной суммы площадей исходных.

Н.Агаханов

5. См. задачу 5 для 8 класса.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка D . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами K и L соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BKD и CLD вторично пересекаются на фиксированной окружности.

Л.Емельянов

7. См. задачу 2059 «Задачника «Кванта».

8. Среди натуральных чисел от 1 до 1200 выбрали 372 различных числа так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9. Докажите, что число 600 является одним из выбранных.

Д.Храмцов

10 класс

1. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом k ($1 \leq k \leq 25$) в любых k коробках лежат шарики ровно $k + 1$ различных цветов. Докажите, что шарики одного из цветов лежат во всех коробках.

С.Волчёнков

2. Для вещественных $x > y > 0$ и натуральных $n > k$ докажите неравенство $(x^k - y^k)^n < (x^n - y^n)^k$.

В.Сендеров

3. При каком наименьшем n для любого набора A из 2007 множеств найдется такой набор B из n множеств, что каждое множество набора A является пересечением двух различных множеств набора B ?

И.Богданов, Г.Челноков

4. См. задачу M2064 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу M2056 «Задачника «Кванта».

6. Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники ABD и ACD , касающихся отрезков BD и CD соответственно, также равны.

Л.Емельянов

7. Дано натуральное число $n > 6$. Рассматриваются натуральные числа, лежащие в промежутке $(n(n-1); n^2)$ и взаимно простые с $n(n-1)$. Докажите, что наибольший общий делитель всех таких чисел равен 1.

В.Астахов

8. В клетках таблицы 15×15 изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой ее столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке – по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?

М.Мурашкин

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Квадратные трехчлены $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что

$$f_1'(x) f_2'(x) \geq |f_1(x)| + |f_2(x)|$$

при всех действительных x . Докажите, что произведение $f_1(x) f_2(x)$ равно квадрату некоторого трехчлена.

Н.Агаханов

3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM , а точка пере-

сечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM . Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

А.Бадзян

4. На столе лежат купюры достоинством 1, 2, ..., 2n тугриков. Двое ходят по очереди. Каждым ходом игрок снимает со стола две купюры, большую отдает сопернику, а меньшую забирает себе. Каждый стремится получить как можно больше денег. Сколько тугриков получит начинающий при правильной игре?

Г.Челноков, И.Богданов

5. При каких натуральных n найдутся такие целые a, b, c , что их сумма равна нулю, а число $a^n + b^n + c^n$ – простое?

В.Сендеров

6. На плоскости отмечено несколько точек, каждая покрашена в синий, желтый или зеленый цвет. На любом отрезке, соединяющем одноцветные точки, нет точек этого же цвета, но есть хотя бы одна другого цвета. Каково максимально возможное число всех точек?

М.Мурашкин

7. См. задачу M2063 «Задачника «Кванта».

8. Для положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n докажите неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \dots (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq \sqrt{(n+1)^{n+1}} \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

М.Мурашкин

Заключительный этап

8 класс

1. Даны числа a, b, c . Докажите, что хотя бы одно из уравнений $x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0$, $x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$, $x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ имеет решение.

О.Подлипский

2. В клетках таблицы 10×10 произвольно расставлены натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Докажите, что за 35 ходов можно добиться того, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих в клетках с общей стороной, была составной.

Н.Агаханов

3. На стороне BC ромба $ABCD$ выбрана точка M . Прямые, проведенные через M перпендикулярно диагоналям BD и AC , пересекают прямую AD в точках P и Q соответственно. Оказалось, что прямые PB , QC и AM пересекаются в одной точке. Чему может быть равно отношение BM/MS ?

С.Берлов, Ф.Петров, А.Акопян

4. См. задачу M2062 «Задачника «Кванта».

5. От Майкопа до Белореченска 24 км. Три друга должны добраться: двое из Майкопа в Белореченск, а третий – из Белореченска в Майкоп. У них есть один велосипед, первоначально находящийся в Майкопе. Каждый из друзей может идти, со скоростью не более 6 км/ч, и ехать на велосипеде, со скоростью не более 18 км/ч. Оставлять велосипед без присмотра нельзя. Докажите, что через 2 часа 40 минут все трое друзей могут оказаться в пунктах назначения. Ехать на велосипеде вдвоем нельзя.

Фольклор

6. Через точку I пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Треугольник BMN оказался остроугольным. На стороне AC выбраны точки K и L так, что $\angle ILA = \angle IMB$, $\angle IKC = \angle INB$. Докажите, что $AM + KL + CN = AC$.

С.Берлов

7. Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (n -вопросил) произведение всех простых чисел, меньших n . Решите уравнение $n? = 2n + 16$.

В.Сендеров

8. См. задачу M2061 «Задачника «Кванта».

9 класс

1. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

С.Берлов

2. На доске написали 100 дробей, у которых в числителях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу и в знаменателях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу. Оказалось, что сумма этих дробей есть несократимая дробь со знаменателем 2. Докажите, что можно поменять местами числители двух дробей так, чтобы сумма стала несократимой дробью с нечетным знаменателем.

Н.Агаханов, И.Богданов

3. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$ -угольнике ($n > 1$). Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

К.Сухов

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1 . Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K . Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L . Докажите что точки K , L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

В.Астахов

5. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.

Ф.Петров

6. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно, точка H – основание высоты, опущенной из вершины B . Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN .

В.Филимонов

7. См. задачу 8 для 8 класса.

8. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашел числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0,00\dots0010715\dots$). Саша хочет вырезать из

153 нулей

одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша?

А.Голованов

10 класс

1. Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно.

А.Полянский

2. Дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Положим $m = \min\{a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n\}$. Докажите, что $P(x) \geq mx^n$ при $x \geq 1$.

А.Храбров

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

К.Киоп, О.Леонтьева

5. Дан набор из $n > 2$ векторов. Назовем вектор набора длинным, если его длина не меньше длины суммы остальных векторов набора. Докажите, что если каждый вектор набора – длинный, то сумма всех векторов набора равна нулю.

Н.Агаханов

6. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Пусть PQ и RS – отрезки общих внешних касательных к этим окружностям (точки P и R лежат на ω_1 , точки Q и S – на ω_2). Оказалось, что $RB \parallel PQ$. Луч RB вторично пересекает ω_2 в точке W . Найдите отношение RB/BW .

С.Берлов

7. У выпуклого многогранника одна вершина A имеет степень 5, а все остальные – степень 3 (степенью вершины называется количество выходящих из нее ребер). Назовем раскраску ребер многогранника в синий, красный и лиловый цвета хорошей, если для любой вершины степени 3 все выходящие из нее ребра покрашены в разные цвета. Оказалось, что количество хороших раскрасок не делится на 5. Докажите, что в одной из хороших раскрасок какие-то три последовательных ребра, выходящие из A , покрашены в один цвет.

Д.Карпов

8. См. задачу 8 для 9 класса.

11 класс

1. Докажите, что при $k > 10$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos 2^k x$$

можно заменить один \cos на \sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству $|f_1(x)| \leq \frac{3}{2^{k+1}}$.

Н.Агаханов

2. См. задачу M2060 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. См. задачу M2065 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Существуют ли ненулевые числа a , b , c такие, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \dots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

Н. Агаханов, И. Богданов

7. Дана треугольная пирамида. Леша хочет выбрать два ее скрещивающихся ребра и на них, как на диаметрах, построить шары. Всегда ли он может выбрать такую пару, что любая точка пирамиды лежит хотя бы в одном из этих шаров?

А. Заславский

8. В стране есть N городов. Некоторые пары из них соединены беспосадочными двусторонними авиалиниями. Оказалось, что для любого k ($2 \leq k \leq N$) при любом выборе k городов количество авиалиний между этими городами не будет превосходить $2k - 2$. Докажите, что все авиалинии можно распределить между двумя авиакомпаниями так, что не будет замкнутого авиамаршрута, в котором все авиалинии принадлежат одной компании.

И. Богданов, Г. Челноков

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Ивлев Федор – Москва, гимназия 1543,
Матдинов Марсель – Оренбург, гимназия 1;

по 9 классам –

Ерохин Станислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Брагин Владимир – Снежинск, гимназия 127;

по 10 классам –

Ардинарцев Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Горинов Евгений – Киров, ФМЛ,
Кевер Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Омельяненко Виктор – Белгород, лицей 38, 8 кл.,
Бабичев Дмитрий – Долгопрудный, школа 5,
Кудык Никита – Омск, школа 117;

по 11 классам –

Есин Алексей – Краснодарский кр., ст. Старонижестеблиевская, школа 55.

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Медведь Никита – Москва, лицей «Вторая школа»,
Мокин Василий – Саратов, ФТЛ 1,
Блинов Андрей – Москва, школа-интернат «Интеллектуал»;

по 9 классам –

Ненашев Глеб – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Погорелов Дмитрий – Нижний Новгород, лицей 165,
Гусев Даниил – Дзержинск, школа 2,
Орлов Олег – Пермь, школа 146,
Шабалин Филипп – Киров, ФМЛ,
Бочкарёв Михаил – Пермь, школа 9,
Глюз Борис – Майкоп, гимназия 22,
Нижибицкий Евгений – Краснодар, школа 73,
Русских Марианна – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Семенов Александр – Белорецк, Белорецкая компьютерная школа,
Царьков Олег – Москва, лицей «Вторая школа»,
Кондакова Елизавета – Москва, лицей «Вторая школа»,
Попов Леонид – Пермь, школа 146,
Черкашин Данила – Санкт-Петербург, лицей 533,
Кушнир Андрей – Иркутск, лицей 2, 8 кл.,
Савенков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Савчик Алексей – Москва, Московская государственная
Пятьдесят седьмая школа;

по 10 классам –

Бойкий Роман – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Янушевич Леонид – Москва, дистанционная школа «i-школа»,

Поляков Владимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бажов Иван – Екатеринбург, гимназия 9,
Андреев Михаил – Москва, Московская государственная
Пятьдесят седьмая школа;

по 11 классам –

Волков Владислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 10 кл.,
Илюхина Мария – Москва, лицей «Вторая школа»,
Матвеев Константин – Омск, лицей 66,
Дроздов Сергей – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Митрофанов Иван – Коломна, гимназия 2,
Лысов Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Сафин Станислав – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Лишанский Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Логунов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сеплярская Анна – Черноголовка, школа 82,
Ярушин Дмитрий – Челябинск, лицей 31,
Арутюнов Владимир – Москва, гимназия 1543.

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Бондаренко Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Юдин Сергей – Вологда, Вологодский многопрофильный
лицей,
Голова Анна – Краснодар, школа 74,
Исаак Евгений – Курган, школа 38,
Печина Анна – Долгопрудный, школа 5,
Пивень Никита – Майкоп, школа 8,
Беляков Сергей – Омск, лицей 64,
Кондратьев Михаил – Майкоп, гимназия 22,
Курносков Артем – Нижнекамск, лицей-интернат 24,
Сергиенко Ярослав – Краснодар, лицей «ИСТЭК», 7 кл.,
Степанов Борис – Екатеринбург, гимназия 9,
Южанин Денис – Киров, ФМЛ,
Довгалоук Екатерина – Нижний Новгород, лицей 165;

по 9 классам –

Климовицкий Иосиф – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Лукьянец Евгений – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Горбачева Ирина – Краснодар, школа 64, 8 кл.,
Гусев Антон – Омск, лицей 64,
Кузнецов Ростислав – Киров, ФМЛ,
Радонец Алексей – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Тыщук Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Устинов Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.;

по 10 классам –

Машковский Артем – Челябинск, лицей 31,

Распопов Алексей – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,
Шамшурич Алексей – Ижевск, гуманитарно-естественный
 лицей 41,
Архипов Дмитрий – Ярославль, школа 33,
Калачёв Глеб – Москва, лицей «Вторая школа»,
Семенов Иван – Долгопрудный, школа 5,
Титов Иван – Екатеринбург, гимназия 9,
Хасанов Тимур – Казань, ФМЛ 131,
Ромаскевич Елена – Москва, гимназия 1543;

по 11 классам –

Остроумова Людмила – Ярославль, школа 33,
Воробьев Сергей – Киров, ФМЛ,
Мартельянов Роман – Барнаул, школа 107,
Баранов Эдуард – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Лурье Денис – Жуковский, гимназия 1,
Михайловский Никита – Челябинск, лицей 31,
Чмутин Георгий – Москва, Московская государственная
 Пятьдесят седьмая школа,

Авилов Артем – Москва, Московская государственная Пять-
 десят седьмая школа,
Викулаев Павел – Рыбинск, лицей 2,
Малеев Андрей – Снежинск, гимназия 127,
Руденко Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Фельдман Григорий – Новосибирск, гимназия 1,
Кожин Евгений – Долгопрудный, школа 5,
Коровкин Михаил – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Руденко Наталья – Киров, ФМЛ,
Хайруллин Равиль – Челябинск, лицей 31,
Чувашов Сергей – Киров, ФМЛ,
Шмаров Владимир – Саров, лицей 15,
Погудин Глеб – Москва, СУНЦ МГУ,
Миссарова Алсу – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при
 КГУ.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов,
 П.Кожевников, О.Подлитский

XI Всероссийская олимпиада школьников по физике

В этом году Всероссийская олимпиада школьников по физике проходила в Санкт-Петербурге, точнее – в его историческом пригороде Петергофе. Все основные хлопоты по приему гостей, их размещению, организации культурной программы, проведению туров олимпиады, апелляции, церемоний открытия и закрытия легли на плечи коллектива физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Всего в олимпиаде приняли участие 215 школьников, включая призеров окружного этапа олимпиады текущего года и школьников, удостоенных дипломов I, II и III степени на прошлогодней олимпиаде.

Задачи для теоретического тура были разработаны методической комиссией при Центральном организационном комитете Всероссийских олимпиад школьников. Экспериментальные задания разрабатывали и готовили члены жюри из Санкт-Петербургского государственного университета.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура заключительного этапа и список призеров олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Шайба на льду

По гладкой горизонтальной поверхности скользит пластинка, на которой отмечены 3 точки A , B и C , лежащие в вершинах прямоугольного треугольника с углом 30° при вершине B (рис.1). Гипотенуза треугольника равна L . В некоторый момент времени скорость точки A равна по модулю v_0 и направлена под углом 30° к катету BC . Известно также, что скорость точки B в этот момент времени направлена вдоль линии a_1a_2 , параллельной катету AC . Определите: модуль и направление скорости точки B ; модуль и направление скорости точки C ; положение точки O , скорость в которой в данный момент времени равна нулю. Изобразите на чертеже векторы скоростей точек B и C , а

также положение точки O .

Фольклор

Задача 2. Случай на станции

Пассажирский поезд длиной l стоял на первом пути. В последнем вагоне сидел Дядя Федор (герой книги Э.Успенского «Каникулы в Простоквашино») и

ожидал письмо, которое ему должен был передать Шарик от кота Матроскина. В тот момент, когда поезд тронулся, на привокзальной площади, как раз напротив первого вагона, появился Шарик (рис.2). Он определил, что расстояние до последнего вагона равно L . С какой минимальной скоростью v_0 должен бежать пес, чтобы передать письмо, если поезд движется с постоянным ускорением a ?

В.Слободянин

Задача 3. Отопление дачного домика

Дачный домик отопляется с помощью электрических батарей. При температуре батарей $t_{61} = 40^\circ\text{C}$ и температуре наружного воздуха $t_1 = -10^\circ\text{C}$ в домике устанавливается температура $t = 20^\circ\text{C}$. Во сколько раз надо увеличить силу тока в батареях, чтобы прежняя температура в комнате поддерживалась в холодные дни при температуре $t_2 = -25^\circ\text{C}$? Какова при этом будет температура батарей t_{62} ? Считать электрическое сопротивление нагревательных элементов не зависящим от температуры.

М.Соболев

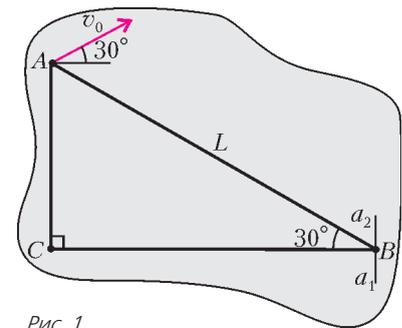


Рис. 1

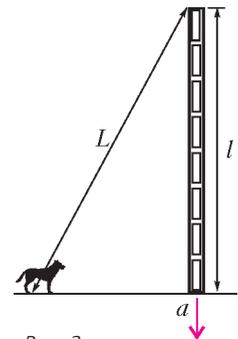


Рис. 2

Задача 4. «Черный ящик»

В «черном ящике» с тремя выводами находятся два резистора и нелинейный элемент (лампочка от карманного фонарика), вольт-амперная характеристика которого изображена на рисунке 3 (график ВАХ Л). На том же рисунке изображены вольт-амперные характеристики «черного ящика»,

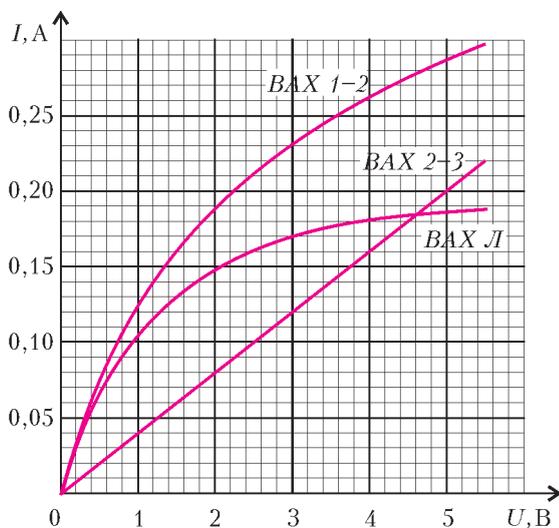


Рис. 3

снятые между выводами 2–3 и 1–2. Определите сопротивление обоих резисторов. Нарисуйте схему соединения элементов «черного ящика» и укажите на ней значения сопротивлений резисторов. Графически постройте вольт-амперную характеристику «черного ящика» между выводами 1–3. Предполагая, что лампочка рассчитана на напряжение $U_0 = 4,5$ В, определите, какое напряжение нужно создать между выводами 1 и 3, чтобы она горела полным накалом.

Примечание. Необходимые построения следует производить непосредственно на приведенном рисунке.

С.Козел

10 класс

Задача 1. Столкновение дисков

На горизонтальной плоскости находятся два одинаковых диска с гладкими боковыми поверхностями. Первый покоится, а второму сообщают скорость v . Найдите скорости дисков после их упругого соударения, используя рисунок 4, где отмечены положения центра первого диска до столкновения — точка А — и положения центров первого и второго дисков в один и тот же момент времени после столкновения — точки В и С соответственно. Трением пренебречь.

Рис. 4

И.Воробьев

Задача 2. Кривизна траектории Луны

В астрономии за единицу длины принято среднее расстояние R от Земли до Солнца, называемое астрономической единицей (1 а.е.). В гелиоцентрической системе отсчета, связанной с Землей, Луна вращается по круговой орбите радиусом $r_L = 2,57 \cdot 10^{-3}$ а.е.. В гелиоцентрической системе траектория нашего естественного спутника выглядит гораздо более сложно, поскольку Луна вращается вокруг Земли,

которая в свою очередь вращается вокруг Солнца (вращения происходят в одну сторону). Вычислите радиусы кривизны $r_{\text{ц}}$ и $r_{\text{н}}$ траектории Луны в гелиоцентрической системе отсчета во время полнолуния и новолуния. Ответ выразите в астрономических единицах. Отметьте качественно положения соответствующих центров кривизны (точки $O_{\text{ц}}$ и $O_{\text{н}}$) на

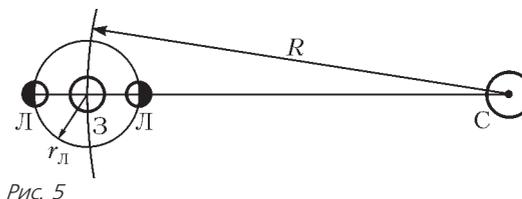


Рис. 5

рисунке 5, на котором изображены Солнце, Земля и Луна. Отношение массы Земли к массе Солнца равно $m_3/m_c = 3 \cdot 10^{-6}$.

Фольклор

Задача 3. Скорость потока воды

Для измерения скорости потока воды в отопительной системе используется устройство, изображенное на рисунке 6 (так называемый манометр Вентури).

Скорость потока измеряется в трубе с диаметром $d_1 = 2$ см, вблизи установки манометра труба сужается до диаметра $d_2 = 0,6$ см. В верхней части П-образной манометрической трубки содержится масло с плотностью $\rho_m = 0,82$ г/см³. Вертикальные колена трубки врезаны в широкую и узкую части трубы с текущей водой. Рассматривая воду как идеальную несжимаемую жидкость, определите объем воды, протекающей через трубу в 1 с, если разность уровней воды в вертикальных коленах манометрической трубки $h = 1,2$ см. Плотность воды $\rho = 1$ г/см³.

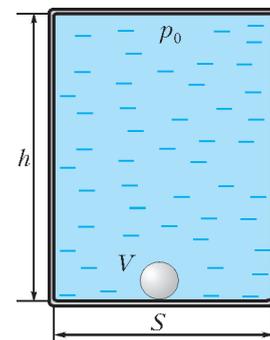
Рис. 6

С.Козел

Задача 4. Пузырек воздуха в воде

В высоком вертикально расположенном закрытом цилиндрическом сосуде сечением S и высотой h находится вода, занимающая весь объем сосуда, кроме маленького пузырька воздуха объемом V , образовавшегося у дна (рис.7). Давление воды в верхней части сосуда равно атмосферному давлению p_0 . Определите, каким будет давление воды в верхней части сосуда, после того как пузырек поднимется вверх. Процесс считать изотермическим. Модуль всестороннего сжатия жидкости равен K . Рассмотрите предельные переходы: а) $V \rightarrow 0$; б) $K \rightarrow 0$ (сильно сжимаемая жидкость); в) $K \rightarrow \infty$ (несжимаемая жидкость). Найдите численное решение для случая $h = 3$ м, $S = 10$ см², $V = 0,2$ см³, $K = 2 \cdot 10^9$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Примечание. Модуль всестороннего сжатия жидкости K определяется соотношением $\Delta p = -K \Delta V_*/V_*$, где Δp — изменение давления, $|\Delta V_*/V_*| = \epsilon$ — относительное изменение объема жидкости.



В.Плис Рис. 7

Задача 5. «Черный ящик»

Школьнику Васе Незнайкину на олимпиаде по физике предложили разгадать схему «черного ящика» с тремя выводами (рис.8), в котором по условию задачи находились два резистора и нелинейный элемент – автомобильная лампочка, рассчитанная на номинальное напряжение $U_N = 12\text{ В}$ и мощность $P_N = 6\text{ Вт}$. Были приведены две вольт-амперные характеристики (рис.9), снятые между выводами 1 и 2 (ВАХ 1–2) и выводами 2 и 3 (ВАХ 2–3). Нужно было: проанализировать возможные схемы включения элементов черного ящика,

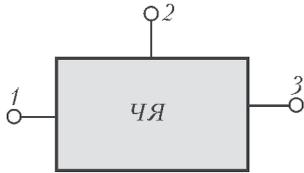


Рис. 8

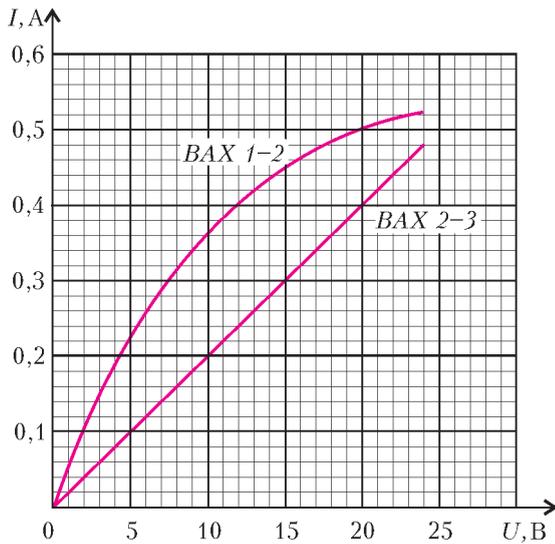


Рис. 9

совместимые с условием задачи; выбрать одну из возможных схем и определить для этой схемы сопротивления резисторов; построить вольт-амперную характеристику нелинейного элемента; построить вольт-амперную характеристику, снятую между выводами 1 и 3.

Примечание. Необходимые построения следует выполнять непосредственно на данном рисунке.

С.Козел

11 класс

Задача 1. Аннигиляция частиц

В вакууме на расстоянии $L = 10\text{ см}$ друг от друга находятся протон p^+ и антипротон p^- . Обе частицы имеют одинаковые массы $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$ и одинаковые по модулю заряды $e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ Кл}$. В первый момент частицы неподвижны. При сближении частиц до расстояния $l = 10^{-13}\text{ м}$ происходит их аннигиляция с рождением γ -квантов. Какие скорости будут иметь частицы при таком сближении? Через какое время произойдет аннигиляция частиц? Нужно ли при решении задачи учитывать гравитационные силы, действующие между частицами? Ответ поясните расчетом. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-12}\text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

С.Козел

Задача 2. Столкновение дисков

На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ находятся два одинаковых малых диска с гладкими боковыми поверхностями. Первый диск покоится, а второй налетает

на него со скоростью v в момент удара. Считая столкновение дисков упругим, но не обязательно лобовым, найдите, на каком расстоянии окажутся диски к моменту их остановки, если первый диск остановился, пройдя расстояние x_1 . Чему равны наибольшее и наименьшее возможные конечные расстояния между дисками при данных значениях модуля скорости v и коэффициента трения μ ? Размерами дисков пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

И.Воробьев

Задача 3. Теплограсса

ТЭЦ снабжает жилой район горячей водой под высоким давлением, имеющей на выходе из котельной температуру $t_0 = 120\text{ }^\circ\text{C}$. Вода течет по стальной трубе радиусом $R = 20\text{ см}$, покрытой теплоизолирующим слоем минеральной ваты толщиной $h = 4\text{ см}$ и расположенной на открытом воздухе. Расход воды $\mu = 100\text{ кг/с}$. Температура окружающего воздуха $t = -20\text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициент теплопроводности ваты $\chi = 0,08\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Коэффициент теплопроводности стали на несколько порядков больше, чем у минеральной ваты. Найдите температуру воды t_1 на конце теплограссы в двух случаях: а) длина теплограссы $L_1 = 10\text{ км}$; б) длина теплограссы $L_2 = 100\text{ км}$. Удельная теплоемкость воды $c = 4200\text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

Примечание. Количество теплоты Δq , проходящее через слой вещества площадью S и толщиной h за время Δt при разности температур Δt определяется соотношением $\Delta q = \chi(S/h)\Delta t\Delta\tau$, где χ – коэффициент теплопроводности.

В.Дельцов

Задача 4. Светодиоды

Между круглыми полюсами радиусом $R = 5\text{ см}$ большого электромагнита, создающего в зазоре однородное магнитное поле с индукцией $B = 1\text{ Тл}$, перпендикулярно линиям магнитной индукции движется с постоянной скоростью $v = 10\text{ м/с}$ металлический стержень (рис.10). Концы стержня, длина которого больше $2R$, соединены гибкими проводами со схемой, включающей батарею с ЭДС $\mathcal{E}_0 = 0,5\text{ В}$ и два светодиода C_1 и C_2 , которые горят при напряжении $U \geq 0,25\text{ В}$ и определенной полярности, указанной на рисунке. Будем считать, что в начальный момент времени стержень касается окружности (т.е. начинает пересекать при своем движении линии магнитной индукции). Определите напряжение $U(t)$ на светодиодах и найдите моменты времени их зажигания и гашения на интервале времени движения стержня в магнитном поле ($0 \leq t \leq 2R/v$). Качественно постройте график зависимости $U(t)$ и укажите на нем интервалы зажигания светодиодов.

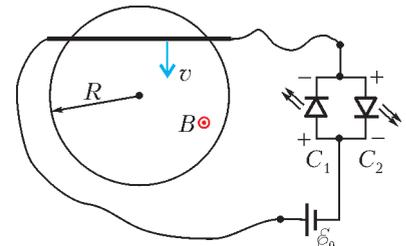


Рис. 10

А.Малеев

Задача 5. Параметрические колебания

В схеме, изображенной на рисунке 11, емкость конденсатора C периодически изменяется путем механического перемещения пластин. Допустим, что вследствие некоторого возмущения в схеме возникли малые колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе порядка нескольких милливольт. В момент времени,

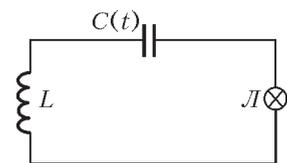


Рис. 11

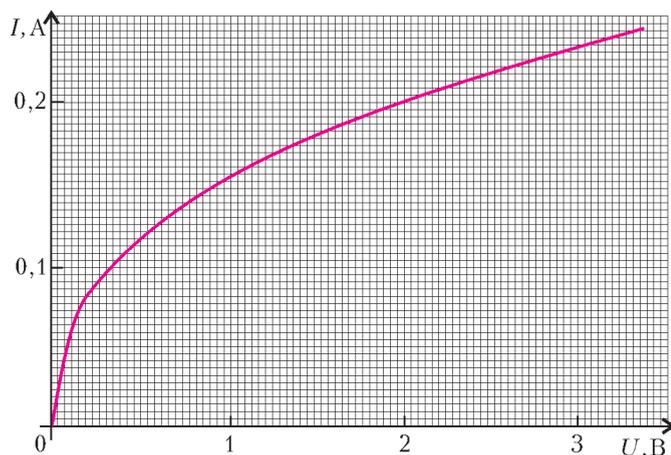


Рис. 12

когда напряжение на конденсаторе максимально, его емкость скачкообразно уменьшают на долю $\epsilon = |\Delta C|/C$. Через четверть периода $\pi\sqrt{LC}/2$ емкость скачком увеличивают до прежнего значения, еще через четверть периода емкость вновь скачкообразно уменьшают на долю ϵ и так далее. При определенных условиях в схеме могут возбудиться незатухающие электрические колебания. В схему включен нелинейный элемент (лампочка накаливания L), вольт-амперная характеристика которой представлена на рисунке 12. Найдите минимальное значение ϵ_{\min} , при котором в схеме возбуждаются незатухающие колебания, если $L = 0,1$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф. Найдите также амплитуду U_0 установившихся колебаний напряжения на лампочке, если $\epsilon = 3\%$.

Примечание. Необходимые построения следует выполнять непосредственно на данном рисунке.

С.Жак

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Соболев Антон – Санкт-Петербург,
Григорьевых Даниил – Удмуртская Республика,
Землянов Владислав – Ханты-Мансийский автономный округ,
Кравчук Петр – Санкт-Петербург,
Бычин Андрей – Алтайский край,
Бычина Ольга – Алтайский край;

по 10 классам –

Зеленев Андрей – Кировская область,
Плешаков Руслан – Приморский край,
Степанов Евгений – Москва,
Мельников Игорь – Челябинская область,
Самойлов Леонид – Саратовская область,
Сашурин Александр – Москва;

по 11 классам –

Кулиев Виталий – Кировская область,
Дроздов Илья – Санкт-Петербург,
Ефимов Сергей – Алтайский край,
Мыльников Дмитрий – Самарская область,
Пех Павел – Красноярский край.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Лисицкий Дмитрий – Республика Башкортостан,
Мосунова Дарья – Нижегородская область,
Старков Григорий – Ямало-Ненецкий автономный округ,
Либерзон Даниил – Кировская область,
Берсенов Никита – Москва,
Горностаев Дмитрий – Республика Мордовия,
Мельников Михаил – Санкт-Петербург,
Толмачев Лев – Москва,
Кузнецов Иван – Москва,
Усманова Динара – Челябинская область,
Чернышов Иван – Москва;

по 10 классам –

Матвеев Харитон – Москва,
Павлов Артем – Республика Коми,

Шалашугина Елена – Свердловская область,
Шульчевский Дмитрий – Москва,
Ларченко Илья – Брянская область,
Фейзханов Рустем – Москва,
Анисимов Кирилл – Саратовская область,
Барсков Кирилл – Омская область,
Кузьмин Александр – Новосибирская область,
Мальшев Евгений – Санкт-Петербург;

по 11 классам –

Белан Сергей – Республика Адыгея,
Бельтюков Ярослав – Санкт-Петербург,
Власов Владислав – Красноярский край,
Соловьева Ксения – Пермский край,
Будкин Григорий – Санкт-Петербург,
Пестременко Максим – Санкт-Петербург,
Поташёв Александр – Москва,
Дербышев Андрей – Ярославская область,
Котов Андрей – Москва,
Еловиков Андрей – Алтайский край,
Кострыгин Анатолий – Санкт-Петербург,
Проскурин Михаил – Ханты-Мансийский автономный округ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Кудряшова Нина – Алтайский край,
Корольков Андрей – Московская область,
Дорошенко Андрей – Омская область,
Галашин Павел – Санкт-Петербург,
Куняев Дмитрий – Московская область,
Трегубов Дмитрий – Кировская область,
Матросов Михаил – Воронежская область,
Рунов Борис – Санкт-Петербург,
Лебедев Вадим – Санкт-Петербург,
Штенников Михаил – Пермский край,
Даниленко Иван – Москва,
Захаров Дмитрий – Московская область,
Алюшин Алексей – Тамбовская область,
Булдашев Иван – Челябинская область,
Казеев Александр – Камчатская область;

по 10 классам –

Маслов Ярослав – Кемеровская область,

Тамбова Александра – Республика Башкортостан,
 Матвеев Алексей – Челябинская область,
 Шурыгин Борис – Иркутская область,
 Аютин Николай – Москва,
 Кусков Дмитрий – Владимирская область,
 Трихин Петр – Московская область,
 Шевцов Сергей – Саратовская область,
 Буслаев Павел – Санкт-Петербург,
 Дряженков Андрей – Ярославская область,
 Тамазян Ваге – Челябинская область,
 Черников Юрий – Московская область,
 Валзушев Даниил – Москва,
 Кузнецов Максим – Москва,
 Макарова Мария – Москва,
 Бурмистров Михаил – Тамбовская область,
 Демин Михаил – Тульская область,
 Фомин Александр – Москва;

по 11 классам –

Петухов Антон – Республика Татарстан,
 Андреев Андрей – Республика Чувашия,
 Кононенко Даниил – Новосибирская область,
 Сокко Анастасия – Московская область,
 Воробьев Вадим – Санкт-Петербург,
 Тихонов Юлий – Москва,
 Федоров Илья – Санкт-Петербург,
 Мандельбаум Константин – Новосибирская область,
 Михасенко Михаил – Свердловская область,
 Разуваев Антон – Московская область,
 Алексеев Дмитрий – Москва,
 Тараканов Александр – Курганская область,
 Головизин Артем – Ростовская область,
 Чертков Андрей – Воронежская область.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

XIII Всероссийская заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» при участии журнала «Квант» проводит очередную Всероссийскую заочную математическую олимпиаду для школьников 6–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь–декабрь 2007 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать по адресу: 115446 Москва, а/я 450, ОРГКОМИТЕТ, «М-КВАНТ» – номер класса.

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с надписанным домашним адресом.

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и призы получили все, приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2007/08 учебном году.

Внимание учителей математики 6–10 классов!

Пригласите к участию в олимпиаде своих учеников!

Задачи олимпиады

6 класс

1. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек, они заняли отрезок длины l . На другой прямой через

К сожалению, в нумерации предыдущих олимпиад произошел сбой.

такие же промежутки поставили 100 точек, они заняли отрезок длины L . Во сколько раз L больше l ?

2. Вот очень простая

$$Г + О = Л - О = В \times О = Л - О = М - К = А.$$

Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным – разные.

3. В классе учатся менее 50 школьников. За контрольную работу $1/7$ учеников получили пятерки, $1/3$ – четверки, $1/2$ – тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

4. На лугу растет трава. Пустили на луг 9 коров, они опустошили луг за 4 дня. Если бы на луг пустили 8 коров, то они съели бы всю траву за 6 дней. Сколько коров могут кормиться на лугу все время, пока растет трава?

5. На клетке e1 шахматной доски находится белый конь, а на клетке d8 – черный конь. Первый ход белый конь может сделать либо на d3, либо на g3, а черный конь – только на e6. Второй ход белого коня может быть сделан на любую доступную для него клетку. Какова вероятность того, что белый конь окажется под боем черного коня?

Комментарий. Вероятность $P(A)$ события A – того, что белый конь в итоге окажется под боем черного коня, равна $P(A) = n_A/N$, где n_A – общее число возможных маршрутов белого коня за два хода, приводящих к событию A , N – число всех возможных маршрутов белого коня за два хода.

7 класс

1. Последовательностью цифр

14012006140120101201

зашифровано слово следующим образом: каждой букве поставлено в соответствие двузначное число. Расшифруйте.

2. На покраску большого деревянного куба размером $2007 \times 2007 \times 2007$ ушел 1 кг краски. Однако понадобились кубики поменьше, и большой куб распилили на кубики размером $1 \times 1 \times 1$. Сколько необходимо еще краски для докраски маленьких кубиков?

3. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$

4. Существует ли треугольник, у которого все стороны меньше 0,2007 мм, а радиус описанной окружности больше 2007 км?

5. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске черного и белого королей так, чтобы они не били друг друга (не стояли на соседних клетках)?

Примечание. Расстановки, при которых черный и белый короли меняются местами, считаются разными.

8 класс

1. См. задачу 1 для 7 класса.

2. В треугольнике ABC выбрали точку P на стороне BC и провели через нее отрезки PQ и PR , параллельные сторонам AC и AB соответственно, до пересечения с этими сторонами. Известно, что площадь треугольника BQP равна S_1 , а треугольника CRP — S_2 . Найдите площадь треугольника ABC .

3. Решите уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24.$$

4. Какое из двух чисел имеет больше делителей, включая как простые, так и составные: 2007^{2007} или $2007!$?

Примечание. Для любого натурального числа n символ $n!$ (n факториал) обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n .

5. См. задачу 5 для 7 класса.

9 класс

1. См. задачу 1 для 7 класса.

2. Решите уравнение $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1 = 0$.

3. Рассмотрим точку P внутри треугольника ABC и проведем через нее три отрезка, параллельных соответствующим сторонам треугольника. Пусть S_1, S_2, S_3 — площади трех треугольников, возникающих при разбиении исходного треугольника этими отрезками. Найдите площадь треугольника ABC .

4. См. задачу 5 для 7 класса.

5. Известно, что для некоторых чисел a, b и c выполняются неравенства

$$(9a + 3b + c)(4a + 2b + c) < 0 \quad \text{и}$$

$$(16a - 4b + c)(9a - 3b + c) < 0.$$

Что можно сказать о знаке произведения $(4a - 2b + c)(a + b + c)$?

10 класс

1. Решите уравнение

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{3} + \sin^2 \frac{x}{5} = 0.$$

2. Даны два вектора \overline{AB} и \overline{AC} , имеющие общее начало — точку A . Опишите множество точек D таких, что $\overline{AD} = \alpha \overline{AB} + \beta \overline{AC}$, где α и β — положительные числа.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. Найдите сумму

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \dots + 2008 \frac{1}{10^{2007}}.$$

5. См. задачу 5 для 9 класса.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Спор головоломок в Австралии

(Начало см. на 2-й с. обложки)

Японская головоломка «Петля» покорила жюри съезда любителей головоломок тем, что проста на вид, содержит очевидную задачу, не нуждающуюся в разъяснении, демонстрирует новый вариант соединения деталей друг с другом, имеет изящный внешний вид и трудна (но не слишком) в решении.

Когда вам дают в руки эту игрушку, она уже почти собрана. Лишь косые срезы мешают соединить два полукольца, замкнуть их в одно кольцо (см. фото на обложке). Единственный выход из этого положения — разобрать кольцо, а затем попытаться собрать заново. После нескольких попыток удается решить головоломку случайно, не вникая в ее смысл. Для логической игрушки это существенный недостаток, который не учли члены жюри.

Осмысленное решение приходит тогда, когдаобразишь, что винтовое соединение может иметь два конца или, что то же самое, два начала. Раз не удастся завинтить деталь с одного из них, значит, решение состоит в том, чтобы сделать это с другого.

К сожалению, «Петлю» невозможно изготовить в домашних условиях. Поэтому вашему вниманию предлагается

другая головоломка «Собачка и мячики», тоже привезенная в Австралию из Японии. На фото (см. обложку) показано, что в головоломке требуется поменять местами красный и зеленый кружки, т.е. фишки 14 и 15 игры «15», не вынимая их из коробочки, а лишь передвигая любые фишки. В начале решения лучше убрать из коробочки желтый кружок. В этом случае задача сильно облегчается, и, самое главное, становится понятно, как нужно двигаться к решению головоломки с тремя кружочками.

По примеру игрушки «Собачка и мячики» вы можете придумать собственную головоломку типа игры «15». Например, прикрепить некоторые квадратики ко дну коробочки, склеить между собой фишки не так, как в японской головоломке, изменить размер коробочки и ее конфигурацию. Присылайте ваши изобретения в редакцию журнала.

В 2008 году съезд любителей головоломок состоится в Европе, недалеко от границ России — в столице Чехии Праге. Если вы интересуетесь головоломками, коллекционируете и решаете их, у вас есть шанс побывать на самом интересном головоломном мероприятии 2008 года. За разъяснением и помощью можно обращаться по электронному адресу 4429.g23@g23.relcom.ru.

А.Калинин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Да. Например, числа $1000000 + П(1000000)$, $1000001 + П(1000001)$, ..., $1002007 + П(1002007)$.
2. Лжецов среди аборигенов – двое. Действительно, если среди аборигенов было не более одного лжеца, то из двух высказанных утверждений хотя бы одно было правдивым (ибо их произнесли *разные* аборигены). Но, согласно любому из этих утверждений, лжецов как минимум двое. Противоречие. Если же все трое – лжецы, то обе фразы были бы правдивы и принадлежали лжецам, что тоже невозможно. Следовательно, лжецов ровно двое. Осталось привести пример, свидетельствующий о корректности ситуации. Например, Ах – правдивый, и оба утверждения принадлежат лжецам.
3. Это сделать не удастся. Обозначим d наибольший общий делитель десяти натуральных чисел x_1, x_2, \dots, x_{10} . Имеют место следующие десять неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq d, \\ x_2 &\geq d, \\ &\dots \\ x_{10} &\geq d. \end{aligned}$$

Сложив их вместе, получим $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \geq 10d$, причем равенство здесь возможно только в том случае, если все десять чисел равны d , что противоречит условию. Итак,

$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} > d$, т.е. среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел всегда больше их наибольшего общего делителя.

4. Верно. Пусть закрытая тетрадь лежит на столе. Пронумеруем ее листы сверху вниз номерами от 1 до 96. Рассмотрим листы с номерами от 1 до n включительно и подсчитаем разность между общим количеством рожниц на этих листах, смотрящих вверх и вниз. Обозначим эту разность через $\Delta(n)$. Для каждого n от 1 до 96 значение $\Delta(n)$ – это некоторое целое число (положительное, отрицательное или ноль). Доопределим «естественным образом» нашу функцию $\Delta(n)$ значением $\Delta(0) = 0$. Это вполне логично – если взять нулевое число листов, то на них нарисовано также нулевое число рожниц, смотрящих вверх и вниз, и разность между двумя нулями – тем более ноль.

Пусть всего в тетради нарисовано m рожниц, смотрящих вверх. Тогда число рожниц, смотрящих вниз, равно $96 - m$. Поэтому $\Delta(96) = m - (96 - m) = 2(m - 48)$, т.е. $\Delta(96)$ – четное число. Далее рассмотрим, как меняется величина $\Delta(n)$ с ростом n от 0 до 96 с шагом 1. Если на очередном листе нарисована рожница, смотрящая вверх, то $\Delta(n)$ увеличивается на 1, а если смотрящая вниз – то $\Delta(n)$ уменьшается на 1. Таким образом, каждое последующее значение $\Delta(n)$ отличается от предыдущего на 1. При изменении n от 0 до 96 величина $\Delta(n)$ изменилась от 0 до $2(m - 48)$, причем она обязана принять любое промежуточное значение между 0 и $2(m - 48)$, в частности – значение $(m - 48)$. Итак, пусть для некоторого k величина $\Delta(k) = m - 48$. Раскроем тетрадь между k -м и $(k + 1)$ -м листами. Тогда на первых k листах все рожницы перевернутся и будут смотреть в противоположную сторону. Поэтому на первых k листах разность между количеством рожниц, смотрящих вверх и вниз, станет равна $-(m - 48)$, а для листов с номерами от $(k + 1)$ до 96 эта разность, как легко ви-

деть, равна $(m - 48)$. Поэтому для всех 96 листов тетради указанная разность станет равна $-(m - 48) + (m - 48) = 0$, а это как раз и свидетельствует о том, что вверх и вниз смотрит одинаковое количество рожниц.

5. Сначала заметим, что показанные на рисунке 1 диагонали разбивают правильный восьмиугольник на фрагменты, площади кото-

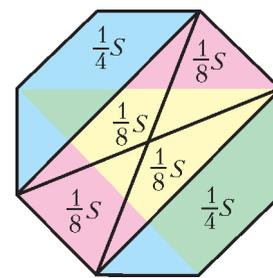


Рис. 1

рых составляют $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$ части площади S восьмиугольника.

Далее заметим, что синие куски исходного разбиения, так же, как и зеленые, складываются в указанные на рисунке 1 трапеции, площадь каждой из которых равна $\frac{1}{4}S$. Из красных кусков исходного разбиения складывается трапеция, равная желтой, площадь которой также равна $\frac{1}{4}S$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Не только сможет, но даже будет вращаться быстрее (из-за уменьшения сопротивления воздуха).
2. Работа, совершенная человеком, и кинетическая энергия, потерянная камнем, идут на увеличение энергии поезда.
3. Высыпавшийся песок не влияет на изменение скорости тележки.
4. Чтобы изменить скорость, а значит и импульс барона, на него должна подействовать внешняя сила либо он должен «поделиться» частью своей массы, отбросив ее вперед по ходу прыжка.
5. а) Да; б) если груз сбрасывается без начальной скорости, то нет.
6. Если бы масса орудия была меньше, чем масса снаряда.
7. Нет, не попадут. При одновременной стрельбе платформа остается неподвижной, что является условием попадания снарядов в цель. Если одна из пушек выстрелит раньше, ее снаряд вылетит из ствола с меньшей начальной скоростью относительно земли и не долетит до цели. Второй снаряд вылетит из уже движущейся вместе с платформой пушки и будет обладать большей начальной скоростью относительно земли, значит, он перелетит цель.
8. После пуска снаряд, разгоняясь, некоторое время движется еще в том же направлении, что и самолет, т.е. стабилизаторами вперед. Это приводит к развороту снаряда. Затем за счет реактивной силы тяги скорость снаряда увеличивается, и он догоняет самолет.
9. Для этого достаточно поднять вытянутую руку и двигать ею вокруг головы. При этом космонавт будет разворачиваться вокруг своей продольной оси в направлении, противоположном вращению руки.
10. Сначала нужно выстрелить из первого пистолета в сторону, противоположную кораблю, и бросить туда же первый пистолет. Затем то же самое и в том же порядке проделать со вторым пистолетом.
11. Да, при этом они должны выбрасывать газы в сторону Луны.
12. Если топливо расходуется частями, то в начале работы двигателя ему приходится разгонять ракету с массой еще оставшегося на данный момент топлива. Поэтому приращение скорости по мере расхода топлива будут увеличиваться.
13. В начале ускорения газы отбрасываются влево. Но когда скорость ракеты станет больше скорости истечения из нее га-

зов, они относительно наблюдателя станут двигаться также вправо, однако со скоростью, всегда меньшей скорости ракеты.

14. Масса топлива должна в несколько раз превышать массу ракеты с полезным грузом, и тогда даже при сравнительно медленном процессе сгорания топлива ракета наберет необходимую скорость.

15. Нет, нельзя. Скорость истечения газов из ракетных двигателей значительно меньше второй космической скорости у поверхности Земли, поэтому эти газы не покинут Землю и не сообщат ей движение.

Микроопыт

Спираль станет «реактивной» – начнет вращаться, причем в сторону, обратную той, куда устремится из нее мыльный раптор, пытающийся растечься по поверхности воды.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. $l = \frac{2mv}{qB} \sin \frac{qBt}{2m}$. 2. $t = \frac{2\pi m_1 m_2}{qB(m_1 + m_2)}$.
3. $E = 8 \cdot 10^3$ В/м. 4. $B_{\min} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\Delta\Phi}{\gamma}} = 2,1 \cdot 10^{-4}$ Тл.
5. $t = \frac{BR}{E} = 10^{-3}$ с.
6. Магнитная индукция перпендикулярна как напряженности электрического поля, так и начальной скорости электрона и равна $B = E \sqrt{\frac{m}{2W}} = 3,2 \cdot 10^{-3}$ Тл.

ИНВАРИАНТНОСТЬ И ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

1. $b = \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 2. $a_1 = 0, a_2 = -\frac{2}{3}$.
3. $b = 3$. 4. $a = 0, 0 < b \leq 1$. 5. $b = 2$. 6. $a = 0$.
7. $a_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = -\frac{1}{32}$.

XXXIII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

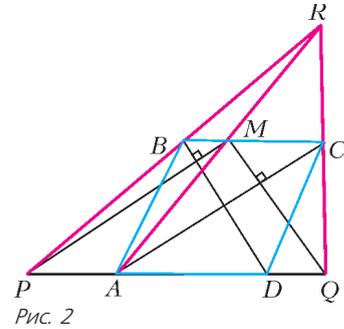
8 класс

1. Так как $(b - c) + (c - a) + (a - b) = 0$, то одно из слагаемых неположительно; пусть для определенности это $b - c$. Тогда дискриминант первого уравнения $(a - b)^2 - 4(b - c) \geq 0$, т.е. оно имеет решение.
2. Разделим таблицу вертикальной линией m пополам. В одной из половин, например в правой, окажется не более 25 четных чисел. Такое же количество нечетных чисел окажется в левой половине. Меняя местами пары таких чисел разной четности, не более чем за 25 операций можно получить таблицу, у которой в правой половине все числа – нечетные, а в левой – четные. Сумма чисел в каждой паре соседних клеток в каждой из половин – четное (и большее 2), а потому составное число. Простыми могут оказаться только суммы чисел в соседних клетках l_j и r_j из разных половин, примыкающих к линии m . Будем теперь менять местами числа только из правой половины так, чтобы суммы чисел в парах клеток (l_j, r_j) ($j = 1, 2, \dots, 10$) стали делиться на три. Это можно сделать, так как в правой половине не менее чем по 16 чисел дают остатки

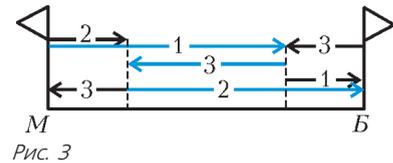
0, 1 и 2 при делении на три, а для требуемой перестановки может потребоваться не более чем по 10 чисел, дающих эти остатки. Полученная не более чем за $25 + 10 = 35$ операций таблица – искомая.

3. Ответ: $\frac{1}{2}$.

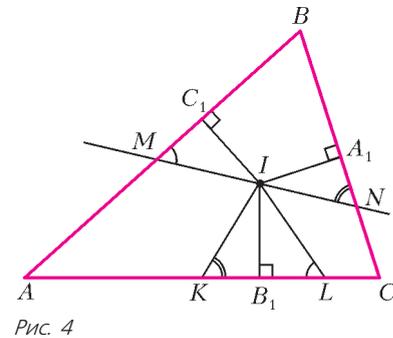
Обозначим через R точку пересечения прямых PB, QC и AM (рис.2). Заметим, что $PM \parallel AC, MQ \parallel BD$, поэтому четырехугольники $PMCA$ и $QMBD$ – параллелограммы. Значит, $MC = PA, BM = DQ$ и $PQ = PA + AD + DQ = MC + AD + BM = 2BC$. Так как $BC \parallel PQ$ и $BC = \frac{1}{2}PQ$, то BC – средняя линия треугольника PRQ . Значит, и BM – средняя линия треугольника ARP . Тогда $MC = PA = 2BM$.



5. См. рис.3. В течение $24 : (18 + 6) = 1$ часа все движутся навстречу друг другу, первый – на велосипеде, при этом первый и третий друзья встретятся и первый передаст велосипед третьему. В этот момент второй, прошедший 6 км, должен остановиться и дожидаться третьего, едущего к нему навстречу на велосипеде. Первый в это время тоже может отдохнуть. Третий через $(24 - 6 - 6) : 18 = 2/3$ часа доедет до стоящего второго и передаст ему велосипед. После этого второй доедет до Белореченска, третий дойдет до Майкопа, а первый дойдет до Белореченска за 1 час. Всего с начала движения пройдет $1 + 2/3 + 1$ часов, т.е. 2 часа 40 минут. Замечание. Можно показать, что за меньшее время все трое добраться не смогут.



6. Опустим из точки I на стороны AB, BC, CA перпендикуляры IC_1, IA_1, IB_1 соответственно (рис.4). Очевидно, эти перпендикуляры равны по длине; кроме того, $AC_1 = AB_1$ и $CA_1 = CB_1$ как отрезки касательных ко вписанной окружности, проведенных из одной точки. Тогда и прямоугольные треугольники IKB_1 и INA_1 равны по катету и противолежащему острому углу, поэтому $B_1K = A_1N$. Аналогично, $B_1L = C_1M$.



Следовательно $AM + KL + CN = AM + MC_1 + NA_1 + CN = AC_1 + CA_1 = AB_1 + CB_1 = AC$. Замечание. Утверждение задачи верно и в случае, когда треугольник BMN тупоугольный.

7. Ответ: 7. Имеем

$$n? - 32 = 2(n - 8). \quad (*)$$

Так как $n?$ не делится на 4, то из (*) следует, что $n - 8$ нечетно. Пусть $n > 9$, тогда $n - 8$ имеет нечетный простой делитель p . Так как $p < n$, то $n?$ делится на p . Значит, 32 делится на p , что невозможно. Мы получили, что $n \leq 9$ и нечетно. При $n = 9$ имеем $n? =$

$= 210 > 2 \cdot 9 + 16$. Число $n = 7$ – корень нашего уравнения, а при $n = 5$ имеем $n^2 = 6 < 16$.

9 класс

1. Если какой-то из трехчленов $f(x)$ или $g(x)$, скажем $f(x)$, не имеет корней, то $f(x) > 0$ для любого x , поэтому и $f(f(x)) > 0$ для любого x , и утверждение доказано. Пусть оба трехчлена имеют корни. Не умаляя общности можно считать, что минимальное значение $f(x)$ не превосходит минимального значения $g(x)$. Из условия на многочлен $g(f(x))$ следует, что минимальное значение $f(x)$ больше любого корня $g(x)$ (действительно, если $g(a) = 0$ и в некоторой точке $f(x_1) \leq a$, то найдется x_2 такое, что $f(x_2) = a$; тогда $g(f(x_2)) = 0$, что невозможно). Тогда и минимальное значение $g(x)$ больше любого корня $g(x)$. Поэтому уравнение $g(g(x)) = 0$ не может иметь вещественных корней.

2. Пусть вначале в сумму входила дробь $a/2$. Докажем, что в исходной сумме найдется такая дробь b/c с нечетным знаменателем c , что числа a и b имеют разную четность. Действительно, дробей с нечетными знаменателями ровно 50 и число a не является числителем ни одной из них. Поэтому среди числителей таких дробей не больше 49 имеют ту же четность, что и a .

Поменяем теперь местами числители a и b . Сделаем это в два приема: сначала поменяем числитель у дроби со знаменателем 2 (сумма изменилась на нечетное число $a - b$ половинок и, значит, превратилась в целое число), а затем – числитель дроби со знаменателем c (сумма изменилась на дробь с нечетным знаменателем, т.е. стала дробью с нечетным знаменателем).

3. Ответ: при нечетных n выигрывает второй, при четных n – первый.

Заметим, что число вершин по одну сторону от любой диагонали четно, а по другую – нечетно. Поэтому любую диагональ пересекает четное число других диагоналей $(2n + 1)$ -угольника.

Пусть в некоторый момент игры невозможно сделать ход, тогда каждая непроведенная диагональ пересекает нечетное число уже проведенных. Так как любая диагональ пересекает четное число диагоналей, то каждая непроведенная диагональ пересекает также нечетное число непроведенных диагоналей. Такая ситуация возможна только тогда, когда непроведенных диагоналей четное число. Действительно, посчитаем для каждой непроведенной диагонали число непроведенных диагоналей, пересекающих ее. В этой сумме каждая пара пересекающихся диагоналей учтена два раза, поэтому сумма четна, а все ее слагаемые нечетны. Значит, их четное число.

Таким образом, если общее количество диагоналей в n -угольнике нечетно, то выигрывает первый, а если четно – то выигрывает второй. Легко видеть, что в $(2n + 1)$ -угольнике число диагоналей нечетно при четном n (тогда выигрывает второй) и четно при нечетном n (тогда выигрывает первый).

4. Пусть S и T – основания перпендикуляров, опущенных из B_1 и B на BC и AK соответственно (рис.5). В

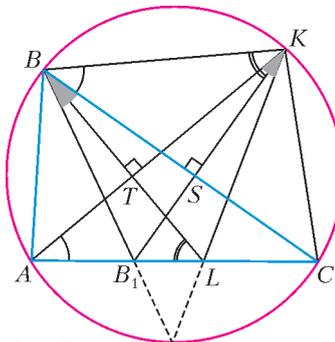


Рис. 5

прямоугольных треугольниках ALT и BSK имеем $\angle SBK = \angle LAT = \alpha$ как опирающиеся на одну дугу KC ; поэтому $\angle B_1LB = \angle ALT = 90^\circ - \alpha = \angle BKS = \angle BKB_1$, т.е. точки B, B_1, L, K лежат на одной окружности. Отсюда $\angle BB_1K = \angle BLK = \beta$, и из прямоугольных треугольников BB_1S и KLT получаем

$$\angle AKL = \angle TKL = 90^\circ - \beta = \angle B_1BS = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AKC,$$

что и означает, что KL проходит через середину дуги AC .

5. Пусть в любой вершине стоят одни и те же числа a и b ; тогда достаточно оставить в вершинах с четными номерами число a , а в вершинах с нечетными – число b . Допустим, что это не так. Тогда пронумеруем вершины по порядку от 1 до 100 так, чтобы в вершинах 1 и 100 стояли разные пары чисел.

Покрасим все поставленные числа в красный и синий цвета следующим образом. Числа в первой вершине окрасим в разные цвета. Пусть в k -й вершине числа a и b окрашены в красный и синий цвета соответственно. Тогда, как нетрудно видеть, в $(k + 1)$ -й вершине можно покрасить числа так, чтобы одноцветные числа в k -й и $(k + 1)$ -й вершинах различались. Таким образом мы покрасим все числа; при этом в любой паре соседних вершин, кроме (1, 100), одноцветные числа будут различны. Рассмотрим вершины 1 и 100. Если в них равны красные числа и равны синие числа, то в этих вершинах стоит одна и та же пара чисел, что не так. Пусть синие числа в этих вершинах различны. Тогда, стерев во всех вершинах красные числа, мы получим требуемое.

6. См. рис.6. Пусть прямая MN вторично пересекает описанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников AHN и CHM в точках D и E , а прямую PH – в точке S . Поскольку HN – медиана

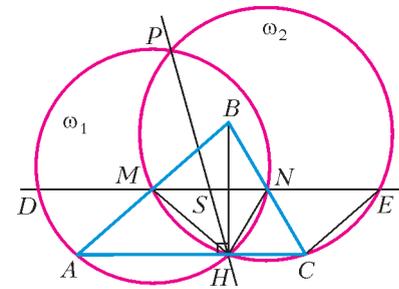


Рис. 6

прямоугольного треугольника BHC , то $HN = CN$ и $\angle NHC = \angle NCH$. Из параллельности хорд ME и HC окружности ω_2 следует, что четырехугольник $MHCE$ – равнобокая трапеция, поэтому $HM = CE$ и $\angle MHC = \angle ECH$. Следовательно, $\angle MHN = \angle MHC - \angle NHC = \angle ECH - \angle NCH = \angle ECN$. Значит, $\triangle MHN = \triangle ECN$ по двум сторонам и углу между ними, откуда $NE = MN$. Аналогично, $DM = MN$. Обозначим длину этих трех отрезков через a , а длины отрезков MS и NS через x и y . Из вписанности четырехугольников $DHNP$ и $MHEP$ получаем $MS \cdot SE = PS \cdot SH = NS \cdot SD$, откуда $x(a + y) = y(a + x)$, т.е. $ax = ay$. Таким образом, S – середина MN , что и требовалось.

Замечание. Утверждение задачи остается в силе, даже если отказаться от требования остроугольности $\triangle ABC$. Доказательство в этом случае полностью аналогично изложенному.

8. Ответ: $N = 155$.

Пусть на ленточках, на которых записаны числа $\frac{1}{k!}$ и $\frac{1}{l!}$ ($k < l$), нашлось по одинаковому куску из N подряд стоящих цифр. Домножим числа $\frac{1}{k!}$ и $\frac{1}{l!}$ на степени 10 так, чтобы одинаковые куски оказались сразу после десятичной запятой. Дробные части получившихся дробей $\frac{10^a}{k!}$ и $\frac{10^b}{l!}$ не могут совпадать. Действительно, в противном случае число $\frac{10^a}{k!} - \frac{10^b}{l!} = \frac{10^a(k+1)(k+2)\dots l - 10^b}{l!}$ целое; следовательно,

числитель последней дроби делится на l . Тогда на l делится и число 10^b . С другой стороны, ни одно число от 81 до 99 не является делителем числа вида 10^b , так как каждое из этих чисел содержит в своем разложении на множители хотя бы одно простое число, отличное от 2 и 5.

Рассматриваемые нами дробные части $\left\{\frac{10^a}{k!}\right\}$ и $\left\{\frac{10^b}{l!}\right\}$ могут быть записаны как обыкновенные дроби со знаменателями $k!$ и $l!$, а потому – и как дроби со знаменателем $99!$, который делится на все числа $80!, 81!, \dots, 99!$; следовательно, их разность есть разность двух неравных дробей со знаменателем 99 , и она не меньше $\frac{1}{99!}$.

С другой стороны, две правильные десятичные дроби, у которых совпадают первые N цифр после запятой, отличаются меньше чем на $\frac{1}{10^N}$. Таким образом, $\frac{1}{99!} < \frac{1}{10^N}$. Из условия следует, что $\frac{1}{99!} > \frac{1}{10^{156}}$, поэтому $N < 156$.

Таким образом, кусок из 156 знаков всегда достаточно для того, чтобы определить, из какой полоски он вырезан. С другой стороны, на полосках с числами $\frac{1}{98!}$ и $\frac{1}{99!}$ есть одина-

ковые куски по 155 знаков: $\frac{1}{99!} = 0,00\dots0010715\dots$, а

$$\frac{1}{98!} = \frac{99}{99!} = \frac{100}{99!} - \frac{1}{99!} = 0,00\dots0010715\dots - 0,00\dots0000107\dots = 0,00\dots00106\dots,$$

т.е. на обеих полосках есть кусок $\frac{00\dots0010}{153 \text{ нуля}}$.

10 класс

1. Покрасим клетки каждой грани куба в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. При этом каждая грань содержит 41 черную и 40 белых клеток. Заметим, что все согнутые полоски будут одноцветными, а все остальные – нет. Так как количество черных клеток на 6 больше, чем количество белых, то число черных согнутых полосок на 3 больше, чем число белых. Следовательно, эти числа разной четности, и их сумма нечетна.

2. Поскольку $a_0 + a_1 + \dots + a_k \geq m$, все суммы вида $-m + a_0 + a_1 + \dots + a_k$ неотрицательны. Поэтому при $x \geq 1$ имеем цепочку неравенств

$$P(x) - mx^n = (-m + a_0)(x^n - x^{n-1}) + (-m + a_0 + a_1)(x^{n-1} - x^{n-2}) + \dots + (-m + a_0 + \dots + a_{n-1})(x - 1) + (-m + a_0 + \dots + a_n) \geq 0,$$

так как каждое слагаемое неотрицательно.

4. Ответ: при $N = 101$.

Предположим, что при каком-то значении N фокус удастся. Тогда по каждому варианту последовательности с двумя закрытыми цифрами, пусть их количество равно k_1 , фокусник может восстановить исходную; значит, каждой последовательности с двумя закрытыми цифрами фокусник однозначно может поставить в соответствие восстановленную последовательность из N цифр, пусть их количество равно k_2 . Следовательно, $k_1 \geq k_2$. Отметим, что $k_1 = (N - 1) \cdot 10^{N-2}$ (есть $N - 1$ вариант вычеркнуть две цифры, а на остальные $N - 2$ позиции есть по 10 вариантов на каждую). Нетрудно видеть, что $k_2 = 10^N$. Тогда из $k_1 \geq k_2$ следует, что $N - 1 \geq 100$, т.е. $N \geq 101$.

Покажем, как выполнить фокус при $N = 101$. Пусть сумма всех цифр на нечетных позициях имеет остаток s от деления на 10, а сумма всех цифр на четных позициях имеет остаток t от деления на 10 (позиции нумеруются слева направо числами от 0 до 100). Положим $p = 10s + t$. Пусть помощник закроет цифры, стоящие на позициях p и $p + 1$. Увидев, какие цифры закрыты, фокусник определит p , а следовательно, определит s и t . Отметим, что одна закрытая цифра стоит на нечетной позиции, а другая – на четной. Таким образом, вычислив сумму открытых цифр на нечетных позициях и зная s , фокусник определит закрытую цифру, стоящую на нечетной позиции. Аналогично определяется закрытая цифра, стоящая на четной позиции.

5. Первое решение. Пусть сумма $\vec{\sigma}$ всех векторов отлична от нуля ($|\vec{\sigma}| = s > 0$). Введем прямоугольную систему координат Oxy , в которой ось Ox сонаправлена с $\vec{\sigma}$. Пусть \vec{a} – длинный вектор набора, т.е. он не короче, чем $\vec{b} = \vec{\sigma} - \vec{a}$. Поскольку y -координаты векторов \vec{a} и \vec{b} равны по модулю, то x -координата a_x вектора \vec{a} по модулю не меньше, чем x -координата $b_x = s - a_x$ вектора \vec{b} . Отсюда получаем, что $a_x \geq s/2$. Теперь, если все векторы набора длинные, то сумма их x -координат не меньше $ns/2 > s$, но эта сумма равна s . Противоречие.

Второе решение. Обозначим данные векторы через \vec{a}_k , а их сумму через $\vec{\sigma}$. По условию $|\vec{a}_k| \geq |\vec{\sigma} - \vec{a}_k|$. Возведем это неравенство в квадрат: $\vec{a}_k^2 \geq \vec{\sigma}^2 - 2\vec{\sigma} \cdot \vec{a}_k + \vec{a}_k^2$. Просуммировав такие неравенства по всем k от 1 до n , получаем $0 \geq n\vec{\sigma}^2 - 2\vec{\sigma}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n)$, т.е. $0 \geq (n - 2)\vec{\sigma}^2$. Значит, $\vec{\sigma} = \vec{0}$.

6. См. рис.7. Пусть X – точка пересечения прямых AB и PQ . Тогда $XP^2 = XA \cdot XB = XQ^2$, т.е. X – середина PQ . Прямые AB и PR параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны линии центров окружностей ω_1 и ω_2 . Из условия теперь получаем, что четырехугольник $PXBR$ – параллелограмм, откуда $BR = XP = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$ (последнее – из симметрии PQ и RS). Далее,

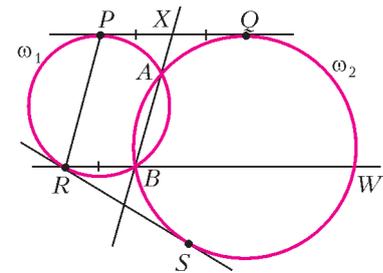


Рис. 7

так как RS – отрезок касательной к ω_2 , то $RB \cdot RW = RS^2 = (2RB)^2$, откуда $RW = 4RB$. Значит, $RB/BW = 1/3$.

7. Рассмотрим произвольную хорошую раскраску. Заметим, что общее число концов ребер каждого цвета четно; при этом в каждой вершине степени 3 количество концов каждого цвета имеет одинаковую четность (их там по одному). Поэтому и в вершине A четность их количеств также одинакова; тогда все они нечетны, и в ней сходится три ребра одного цвета и по одному ребру остальных.

Предположим, что утверждение задачи не выполнено, т.е. нет хорошей раскраски с тремя последовательными ребрами одного цвета, выходящими из одной вершины. Докажем, что количество хороших раскрасок, в которых из A выходит три синих ребра, делится на 5. Тогда, очевидно, и общее количество раскрасок будет делиться на 5, что противоречит условию.

Пусть из вершины A последовательно выходят ребра AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 и AB_5 (далее по циклу опять идет ребро AB_1). В любой раскраске красное и лиловое ребра из A идут не подряд (иначе и три синих ребра идут подряд). Следовательно, для концов красного и лилового ребер есть 5 вариантов: $(B_1, B_4), (B_2, B_5), (B_3, B_1), (B_4, B_2), (B_5, B_3)$;

обозначим соответствующие количества раскрасок через $k_{14}, k_{25}, k_{31}, k_{42}, k_{53}$. Мы докажем, что $k_{14} \leq k_{42} \leq k_{25} \leq k_{53} \leq k_{31} \leq k_{14}$, откуда будет следовать, что все 5 чисел равны, а общее количество раскрасок делится на 5.

Покажем, что $k_{25} \leq k_{53}$ (остальные неравенства аналогичны). Пусть в некоторой раскраске ребра AB_2 и AB_5 – не синие (пусть для определенности AB_2 красное). Рассмотрим граф, вершинами которого являются вершины многогранника, а ребрами – синие и красные ребра. Тогда степень вершины A равна 4, а степени остальных вершин – по 2. Отсюда сразу следует, что граф распался на несколько циклов, причем два из них пересекаются только по вершине A , а остальные не пересекаются вовсе. Рассмотрим цикл, проходящий через A и содержащий AB_2 ; тогда он содержит еще и синее ребро, выходящее из A . Перекрасим синие ребра этого цикла в красные и наоборот. Тогда мы получили другую хорошую раскраску.

При этом возможны три случая (рис.8). Если цикл содержит синее ребро AB_1 или AB_4 , то после перекраски три последовательных ребра (AB_2, AB_3, AB_4 или AB_1, AB_2, AB_3) окрашены в синий цвет; это невозможно по предположению.

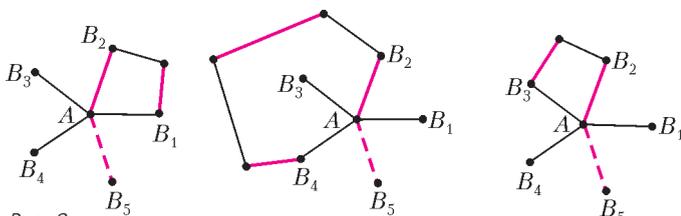


Рис. 8

Значит, в цикле есть ребро AB_3 , и после перекрашивания получилась раскраска, в которой красное и лиловое ребра – AB_3 и AB_5 . При этом из разных раскрасок после перекрашивания получались разные, так как исходная раскраска восстанавливается по новой аналогичной процедурой. Поэтому $k_{25} \leq k_{53}$, что и требовалось.

Замечание 1. Легко видеть, что мы нигде не пользовались специфическими особенностями многогранника. Зафиксировав некоторую (вообще говоря, произвольную) циклическую нумерацию B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соседей вершины A , мы доказали существование хорошей раскраски, в которой в один цвет покрашены три ребра, идущих из A к последовательным в этой нумерации вершинам.

Замечание 2. Вернемся, однако, к задаче с многогранником. Предположим, что в нашем многограннике есть хорошие раскраски, но откажемся от условия, что их количество не кратно 5. Сделаем еще более смелое предположение, что нам в таких условиях удалось доказать наличие хорошей раскраски, в которой три последовательных ребра, выходящие из A , покрашены в один и тот же цвет. Отсюда без труда выводится самое известное (без преувеличения!) утверждение в теории графов – гипотеза четырех красок.

11 класс

1. Заметим, что

$$|\sin 3x| = |3 \sin x - 4 \sin^3 x| = |3 - 4 \sin^2 x| |\sin x| \leq 3 |\sin x|.$$

Поэтому для функции f_1 , полученной из f заменой $\cos 3x$ на $\sin 3x$, выполняется неравенство

$$|f_1(x)| \leq 3 |\sin x| |\cos x| |\cos 2x| |\cos 4x| |\cos 8x| \dots |\cos 2^k x|.$$

(Мы опустили все множители $|\cos nx|$, в которых $n > 3$ и не является степенью двойки; каждый из этих множителей не превосходит 1.) Утверждение задачи теперь следует из тождества

дства

$$\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \dots \cos 2^k x = 2^{-k-1} \sin 2^{k+1} x.$$

6. *Ответ:* не существуют.

Пусть такие числа a, b, c нашлись. Тогда они целые в силу теоремы Виета; кроме того, при каждом $n > 3$ одно из чисел c или $-c$ является произведением всех корней многочлена $P_n(x)$, т.е. произведением n целых чисел. Для каждого построенного многочлена $P_n(x)$ рассмотрим все его корни, отличные от ± 1 ; их произведение равно $\pm c$. У чисел c и $-c$ конечное число разложений на множители, отличные по модулю от единицы; значит, какое-то из таких разложений встретится бесконечное число раз. Рассмотрим последовательность многочленов с таким разложением. Они различаются между собой только дополнительными корнями, равными $+1$ и -1 . Возьмем два таких многочлена $P_m(x)$ и $P_k(x)$ степеней $m > k$.

Из теоремы Виета получаем, что сумма чисел, обратных к корням каждого из этих многочленов, равна $-b/c$. Эти суммы различаются лишь наличием нескольких слагаемых вида 1 и -1 ; ясно, что у P_m по сравнению с P_k добавились равные количества таких корней, т.е.

$$P_m(x) = P_k(x)(x-1)^d(x+1)^d = P_k(x)(x^2-1)^d. \quad (*)$$

Заметим, что $(x^2-1)^d = x^{2d} - \dots + (-1)^{d-1} dx^2 + (-1)^d$. Тогда, сравнив свободные члены и коэффициенты при x^2 в левой и правой частях равенства (*), получаем $c = c \cdot (-1)^d$ (откуда d четно) и

$$a = a \cdot (1)^d + c \cdot (-1)^{d-1} d = a - cd;$$

последнее невозможно, так как $cd \neq 0$. Противоречие.

7. Пусть дана пирамида $ABCD$. Выберем пару ее скрещивающихся ребер с наибольшей суммой квадратов – пусть это AB и CD . Покажем, что шары с диаметрами AB и CD покрывают каждое ребро пирамиды. Ясно, что достаточно доказать это для ребра BC . Рассмотрим основания A_1 и D_1 перпендикуляров, опущенных соответственно из A и D на BC (рис.9). Тогда

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= AA_1^2 + BA_1^2 + DD_1^2 + CD_1^2 \geq \\ &\geq AC^2 + BD^2 = AA_1^2 + CA_1^2 + DD_1^2 + BD_1^2, \end{aligned}$$

откуда $BA_1^2 + CD_1^2 \geq CA_1^2 + BD_1^2$. Это означает, что отрезки BA_1 и CD_1 перекрываются, а значит, они покрывают весь отрезок BC . Но наши шары как раз покрывают оба этих отрезка.

Поскольку шары покрывают все ребра, то они покрывают и все грани. Пусть теперь какая-то точка X тетраэдра не покрыта шарами. Тогда из нее можно выпустить луч, не имеющий общих точек с шарами. Однако он пересечет поверхность в точке, принадлежащей одному из шаров. Противоречие.

8. *Первое решение.* Рассмотрим граф, вершины которого – это города, а ребра – авиалинии. Обобщим задачу – разрешим графу иметь кратные ребра. Тогда для любого набора, скажем из k вершин, количество ребер между ними не превосходит $2k - 2$. Требуется доказать, что можно покрасить

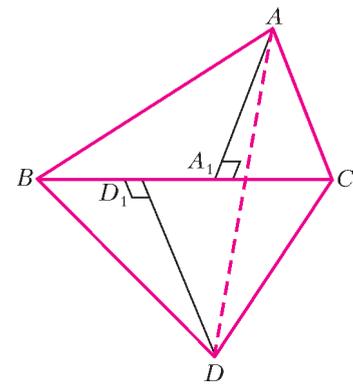


Рис. 9

ребра графа в два цвета так, чтобы не было одноцветных циклов.

Назовем непустое подмножество A вершин графа *критическим*, если количество ребер графа между вершинами множества A – ровно $2|A| - 2$.

Лемма. Если A и B – критические подмножества, причем $A \cap B \neq \emptyset$, то $A \cup B$ – тоже критическое.

Доказательство. Пусть $C = A \cap B$, $D = A \cup B$ и D – не критическое, $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|D| = d = a + b - c$. Так как количество ребер в A равно $2a - 2$, а количество ребер в D меньше $2d - 2$, то число ребер, соединяющих вершины из D , у которых не оба конца лежат в A , меньше

$(2d - 2) - (2a - 2) = 2(d - a) = 2(b - c)$. В частности, в число этих ребер входят все ребра, соединяющие вершины B , не обе из которых лежат в C . Поэтому их число также меньше $2(b - c)$, а число остальных ребер среди вершин B больше $(2b - 2) - 2(b - c) = 2c - 2$. Но это в точности ребра, соединяющие вершины множества C ; значит, C не удовлетворяет условию задачи – противоречие. Лемма доказана.

Замечание. Заметим, что в условиях леммы множество C также будет критическим.

Перейдем к решению задачи. Предположим противное. Рассмотрим граф с минимальным числом вершин n , для которого утверждение задачи не выполняется. Рассмотрим все его вершины. Число ребер между ними не больше $2n - 2$. Если степень каждой вершины не меньше 4, то общее количество ребер не меньше $4 \cdot n/2 = 2n > 2n - 2$, что невозможно. Значит, найдется вершина a степени не больше 3. Если ее степень меньше 3, то выкинем ее; ребра оставшегося графа можно покрасить требуемым образом, так как он, очевидно, удовлетворяет условию. Покрасив после этого ребра из вершины a в разные цвета, мы, очевидно, не образуем одноцветных циклов, и требуемая раскраска получена.

Итак, степень a равна 3, и она соединена с вершинами b, c, d . Все три вершины b, c, d не могут совпадать, так как иначе между двумя вершинами a и b было бы больше $2 \cdot 2 - 2$ ребер, что невозможно. Тогда среди b, c и d есть вершина, отличная от обеих остальных – пусть это вершина c .

Выбросим из графа вершину a . Если в оставшемся графе пара вершин b и c не принадлежит одновременно никакому критическому подмножеству, то после добавления «фиктивного» ребра (b, c) мы получим граф, удовлетворяющий условию задачи, число вершин в котором меньше, чем в нашем (рис.10).

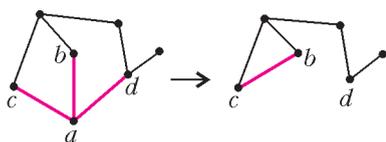


Рис. 10

Покрасим его ребра требуемым образом, потом удалим добавленное ребро, вернем вершину a и покрасим ребра (a, b) и (a, c) в цвет «фиктивного» ребра, а ребро (a, d) – в другой. Очевидно, одноцветных циклов не появится.

Аналогично можем поступить, если c и d одновременно не принадлежат критическому множеству. Если же вершины b и c принадлежат критическому множеству A_1 , а вершины c и d – критическому множеству A_2 , то $A_1 \cup A_2$ – тоже критическое (ибо $c \in A_1 \cap A_2$). Но тогда, добавив к этому множеству вершину a , мы добавим к его внутренним ребрам три ребра; следовательно, полученное множество противоречит условию задачи.

Второе решение. Покажем, как можно по-другому (без использования леммы) завершить решение задачи. Так же, как и в первом решении, рассмотрим вершину a степени 3 и критическое подмножество V , содержащее двух ее соседей, но не ее саму.

Выкинем из нашего графа G все вершины множества V и добавим новую вершину v , причем для каждого ребра, соединяющего вершину V с вершиной не из V , соединим v с этой внешней вершиной (рис.11).

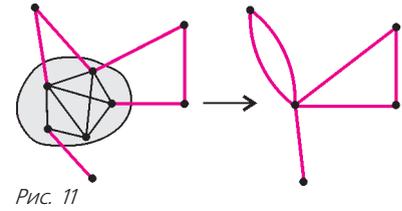


Рис. 11

(Такая операция называется стягиванием подграфа V .) Покажем, что новый граф G' также удовлетворяет условию. Рассмотрим произвольное множество D из d его вершин. Если $v \notin D$, то число ребер между ними такое же, как было в графе G , т.е. не больше $2d - 2$.

Если же $v \in D$, то рассмотрим множество $D \cup V \setminus \{v\}$ из $(d + k - 1)$ вершин графа G ; среди них не больше $2d + 2k - 4$ ребер, из них ровно $2k - 2$ ребер между вершинами V ; значит, остальных ребер не больше $2d - 2$, что и требовалось.

Ребра графа на вершинах множества V можно покрасить требуемым образом; покрасим также таким образом ребра G' (в обоих полученных графах меньше чем по n вершин!). В графе G каждое ребро соответствует ребру в одном из двух графов – G' или V . Покрасим это ребро так же, как соответствующее ему ребро в этих графах. Покажем, что не появилось одноцветных циклов. Пусть это не так. Ясно, что каждый цикл проходит как по вершинам множества V , так и по другим вершинам. Поэтому можно выйти по ребру из вершины множества V , пройти по нескольким (больше одного!) одноцветным ребрам и впервые придти снова в вершину множества V . Это опять означает наличие цикла в новом графе – противоречие.

Замечание. Заметим, что если между какими-то k вершинами число ребер больше $2k - 2$, то требуемая покраска невозможна. Таким образом, верно и утверждение, обратное утверждению задачи.

ХЛІ ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Скорость точки B направлена вертикально вниз и равна v_0 ; скорость точки C направлена вертикально вверх и равна $v_0/2$; точка O лежит на катете BC на расстоянии $L \sin 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \approx 0,3L$ от точки C .

2. $v_0 = \sqrt{a(L-l)}$.

3. $\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{t-t_2}{t-t_1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$; $t_{62} = t + \frac{(t_{01}-t)(t-t_2)}{t-t_1} = 50^\circ \text{C}$.

4. См. рис.12, на котором $R_1 = 25$ Ом и $R_2 = 50$ Ом. Вольт-амперная характеристика «черного ящика» между выводами 1–3 мало отличается от характеристики линейного резистора с сопротивлением приблизительно 33 Ом. К выводам 1–3 нужно приложить напряжение $U = 11,25$ В.

10 класс

1. Скорость первого диска равна $0,8v$ и направлена по прямой AB ; скорость второго диска равна $0,6v$ и лежит на прямой, перпендикулярной AB и проходящей через точку C .

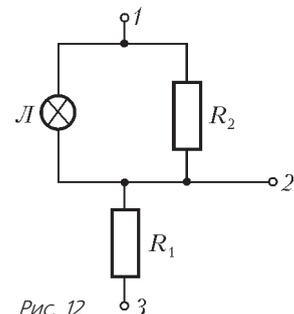


Рис. 12

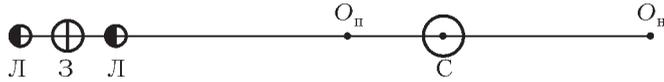


Рис. 13

2. $r_{II} \approx 0,73$ а.е., $r_{III} \approx 1,7$ а.е.; см. рис.13.

3. $V = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{gh}{2} \frac{1 - \rho_m / \rho}{d_2^4 - d_1^4}} = 5,9 \text{ см}^3/\text{с}.$

4. а) $p \rightarrow p_0$, б) $p \rightarrow p_0$, в) $p \rightarrow p_0 + \rho gh$; $p = 1,17 \cdot 10^5 \text{ Па}.$

5. См. рис.14; для схемы на рисунке 14,а $R_1 = 50 \text{ Ом}$ и

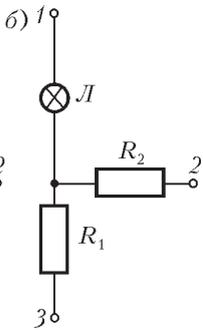
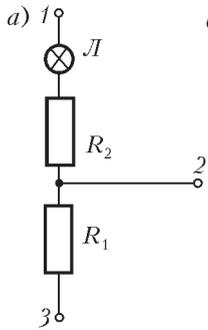


Рис. 14

$R_2 = 16 \text{ Ом}$; вольт-амперная характеристика нелинейного элемента строится путем вычитания при заданном токе напряжений, соответствующих ВАХ R_2 и ВАХ R_1 (рис.15); ВАХ 1-3 строится суммированием напряжений, соответствующих ВАХ 1-2 и ВАХ 2-3 (см. рис.15).

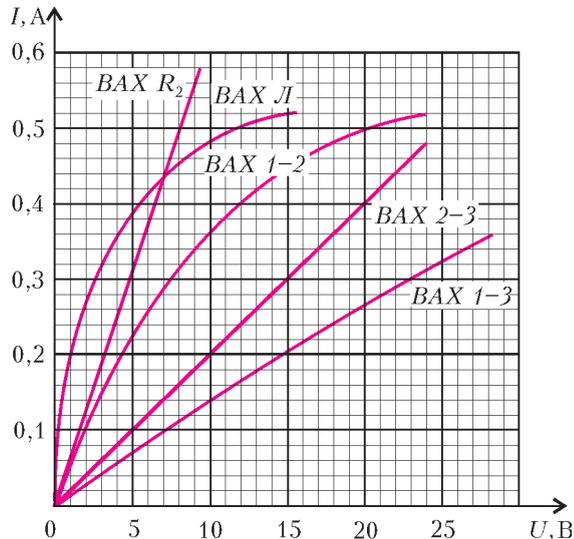


Рис. 15

11 класс

1. $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 lm}} = 1,17 \cdot 10^6 \text{ м/с} \ll c$, где c – скорость света;

$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 m (\pi L)^3}{e^2}} \approx 67 \text{ мс}$; нет, не нужно.

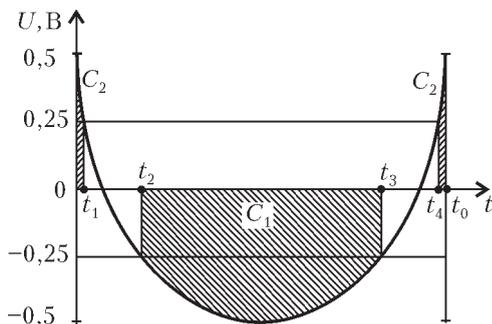


Рис. 16

2. $l = \sqrt{2x_1^2 - \frac{x_1 v^2}{\mu g} + \frac{v^4}{4\mu^2 g^2}}$; $l_{\max} = \frac{v^2}{2\mu g}$, $l_{\min} = \frac{v^2}{2\sqrt{2}\mu g}.$

3. а) $t_1 \approx 111 \text{ }^\circ\text{C}$; б) $t_2 \approx 53 \text{ }^\circ\text{C}.$

4. $U(t) = \epsilon_0 - 2Bv\sqrt{vt(2R - vt)}$; на рисунке 16 штриховкой изображены интервалы горения светодиодов, здесь $t_1 = 150 \text{ мкс}$, $t_2 = 1,8 \text{ мс}$, $t_3 = 8,3 \text{ мс}$ и $t_4 = 9,85 \text{ мс}.$

5. $\epsilon_{\min} = \pi R_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,63\%$, где $R_0 = 2 \text{ Ом}$ (см. рис.17);

$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{эфф}} \approx 2,5 \text{ В}$, где $U_{\text{эфф}} = 1,75 \text{ В}$ (см. рис.17).

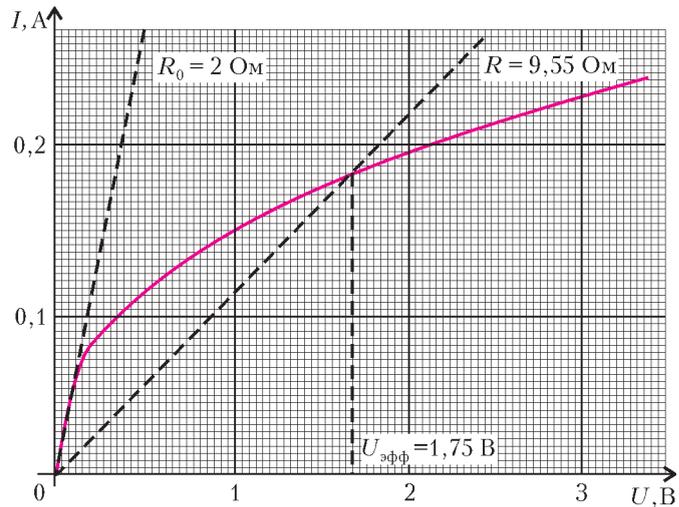


Рис. 17

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк,
А.Е.Пацхверия**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59