

Типовые задачи вступительных экзаменов в МФТИ

В. МОЖАЕВ

РАССМОТРИМ ТИПИЧНЫЙ ВАРИАНТ ПИСЬМЕННОЙ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ НА ВСТУПИТЕЛЬНОМ ЭКЗАМЕНЕ В МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ). Вариант включает пять задач из разных разделов физики.

Задача 1. На рисунке 1 изображена тележка, которая может двигаться прямолинейно по горизонтальной поверхности стола без трения. К тележке прикреплена горизонтальная ось O , перпендикулярная плоскости рисунка. Вокруг оси O (в плоскости, перпендикулярной ей) может вращаться небольшой шарик массой m . Шарик укреплен на конце стержня длиной L . Масса тележки, оси O и ее крепления равна $4m$. Массами стержня и колес тележки пренебречь. Вначале тележка покоилась, а стержень удерживался под углом $\beta = 30^\circ$ к вертикали. Затем стержень отпустили. Найдите: 1) скорость тележки в момент прохождения шариком нижней точки своей траектории; 2) амплитуду колебаний тележки, т.е. половину расстояния между наиболее удаленными друг от друга положениями тележки.

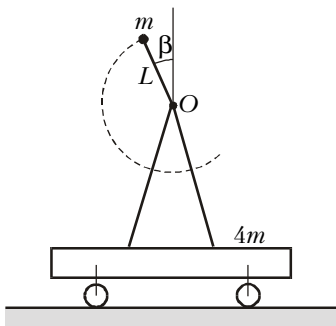


Рис. 1

1) В момент прохождения шариком нижней точки своей траектории его скорость горизонтальна и направлена слева направо. Обозначим эту скорость через v . Очевидно, что скорость тележки направлена в противоположную сторону. Обозначим ее через u . Движение шарика, как и движение тележки, мы рассматриваем в неподвижной системе координат. По закону сохранения энергии можно записать

$$mgL(1 + \cos \beta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{4mu^2}{2}.$$

Здесь потенциальная энергия шарика отсчитывается от уровня, проходящего через нижнюю точку траектории шарика, поэтому в исходном положении шарик обладает только потенциальной энергией, а в нижней точке – только кинетической. Поскольку в горизонтальном направлении сумма действующих на систему тележка – шарик сил равна нулю, в любой момент времени импульс системы в горизонтальном направлении равен нулю:

$$mv - 4mu = 0.$$

Решая совместно систему двух уравнений, получим, что искомая скорость тележки равна

$$u = \sqrt{\frac{gL(1 + \cos \beta)}{10}} = 0,43\sqrt{gL}.$$

2) Так как горизонтальный импульс системы равен нулю, во время колебательных движений центр тяжести нашей системы остается неизменным. Удаление тележки от центра тяжести будет максимальным в тот момент, когда стержень находится в горизонтальном положении. Обозначим расстояние (по горизонтали) от центра тяжести системы до центра тележки через a , тогда расстояние от шарика до центра тяжести системы будет $L - a$. По правилу моментов можно записать

$$mg(L - a) = 4ma.$$

Отсюда амплитуда колебаний тележки будет равна

$$a = \frac{L}{5}.$$

Задача 2. Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена маслом и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что масло не выливается и полностью заполняет горизонтальное колено трубки (рис. 2). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки даны на рисунке. Атмосферное давление p_0 , плотность масла ρ . Найдите: 1) давление масла в месте изгиба трубки; 2) давление масла у запаянного конца трубки.

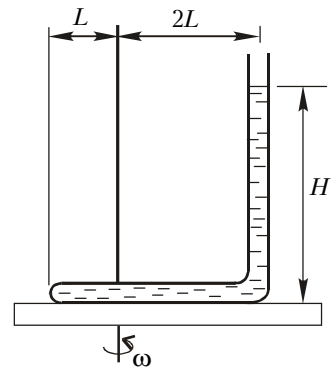


Рис. 2

1) Давление масла p_1 в месте изгиба трубки находим из условия равновесия столба масла в вертикальной части трубки:

$$p_1 = p_0 + \rho gH,$$

где g – ускорение свободного падения. Очевидно, что давление в месте изгиба не зависит от угловой скорости вращения платформы.

2) Другое дело, давление масла у запаянного конца трубки. Оно, безусловно, зависит от ω . Для нахождения этого давления выделим бесконечно малый элемент масла длиной dr , находящийся на расстоянии r от оси вращения (рис. 3). Обозначим давление в сечении трубки на расстоянии r от оси вращения через p , а давление на расстоянии $r + dr$ – через $p + dp$. Сила, равная разности давлений dp в этих двух сечениях, умноженной на площадь поперечного сечения трубки S , и направленная к

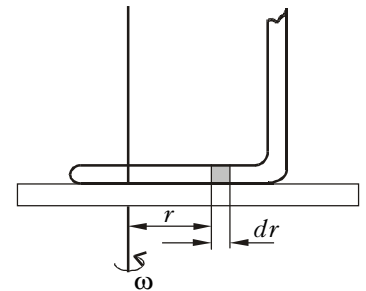


Рис. 3

оси вращения, создает в данном случае центростремительное ускорение, вынуждая элемент масла толщиной dr вращаться

(Начало см. на с. 31)

по окружности радиусом r с угловой скоростью ω . Уравнение этого вращательного движения будет иметь вид

$$\rho S dr \omega^2 r = S dp.$$

Возьмем от обеих частей этого уравнения определенные интегралы: по r от $r = -L$ до $r = 2L$, а по p от неизвестного давления у запаянного конца p_2 до давления в изгибе p_1 :

$$\rho \omega^2 \int_{-L}^{2L} r dr = \int_{p_2}^{p_1} dp.$$

Отсюда найдем

$$p_2 = p_1 - \frac{3}{2} \rho \omega^2 L^2.$$

После подстановки выражения для p_1 получим

$$p_2 = p_0 + \rho g H - \frac{3}{2} \rho \omega^2 L^2.$$

Задача 3. Между двумя неподвижными плоскопараллельными незаряженными пластинами 1 и 2 (рис. 4),

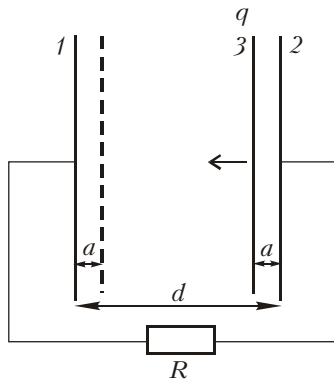


Рис. 4

закороченными через резистор сопротивлением R , помещают аналогичную проводящую пластину 3 с положительным зарядом q на расстоянии a от пластины 2, причем $a < d/2$, где d – расстояние между пластинами 1 и 2. После установления равновесного состояния пластину 3 быстро перемещают в симметричное положение (на расстоянии a от пластины 1). Полагая, что за время перемещения пластины 3 заряд на пластинах 1 и 2 не успевают измениться, определите: 1) величину и направление тока через резистор сразу после перемещения пластины 3; 2) количество теплоты, выделившееся в резисторе после перемещения пластины. Площадь каждой пластины S , расстояние между пластинами мало по сравнению с линейными размерами пластин.

1) Рассмотрим начальное равновесное состояние нашей системы, когда пластина 3 с зарядом q находится у правой пластины конденсатора. После установления стационарного состояния ток через резистор равен нулю, а пластины 1 и 2 эквипотенциальны и, следовательно, разность потенциалов между ними также равна нулю. Пусть на правой обкладке конденсатора установится заряд $-q_1$, тогда на левой будет $+q_1$. Запишем условие эквипотенциальности обкладок:

$$\frac{q_1 d}{\epsilon_0 S} + \frac{qa}{2\epsilon_0 S} - \frac{q(d-a)}{2\epsilon_0 S} = 0.$$

Отсюда находим

$$q_1 = \frac{q(d-2a)}{2d}.$$

После перемещения пластины 3 разность потенциалов между пластинами 1 и 2 уже не будет равна нулю. Определим эту

разность потенциалов:

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{q_1 d}{\epsilon_0 S} + \frac{q(d-a)}{2\epsilon_0 S} - \frac{qa}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_1 d}{\epsilon_0 S} + \frac{q(d-2a)}{2\epsilon_0 S} = \frac{q(d-2a)}{\epsilon_0 S}.$$

Возникшая разность потенциалов приведет к появлению тока через резистор:

$$I = \frac{\Delta\varphi_{12}}{R} = \frac{q(d-2a)}{\epsilon_0 SR},$$

причем ток будет течь от пластины 1 к пластине 2.

2) После перемещения пластины 3 будет происходить перезарядка пластин 1 и 2 до тех пор, пока они снова не станут эквипотенциальными. При этом в резисторе будет выделяться тепло. Поскольку начальная (до перемещения пластины 3) и конечная энергии электрического поля системы трех пластин равны, то суммарное количество теплоты, выделившееся в резисторе, будет равно работе, совершенной при перемещении пластины 3. Так как перемещение пластины 3 проводилось быстро, при сохранении зарядов на пластинах 1 и 2, можно считать, что перемещение пластины 3 происходило в постоянном электрическом поле с напряженностью

$$E = \frac{q_1}{\epsilon_0 S} = \frac{q(d-2a)}{2\epsilon_0 S d}.$$

Отсюда найдем совершенную работу, а следовательно, и выделившееся количество теплоты:

$$Q = A = qE(d-2a) = \frac{q^2(d-2a)^2}{2\epsilon_0 S d}.$$

Задача 4. Два одинаковых проводящих диска радиусами

R вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной их плоскостям (рис. 5). Центры дисков с помощью проводников присоединены к конденсатору емкостью C_1 , а ободы – через скользящие контакты к конденсатору емкостью C_2 . Найдите напряжения, которые установятся на конденсаторах.

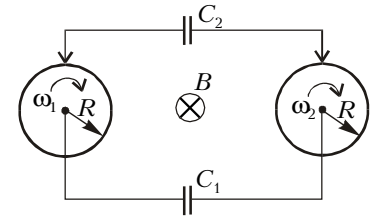


Рис. 5

Сначала рассмотрим, что происходит со свободными зарядами проводящего диска, вращающегося с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} (рис. 6). На электроны, вращающиеся вместе с диском, действует сила Лоренца. В нашем случае сила Лоренца, действующая на свободный электрон, направлена к центру диска, поэтому электроны смещаются к центру, а на периферии остаются положительно заряженные атомы (атомы без внешнего электрона). Перераспределение заряда приводит к появлению радиального электрического поля \vec{E} , направленного к центру. Устанавливается такое распределение зарядов и, соответственно, такое электрическое поле $E(r)$, что сила Лоренца, действующая на

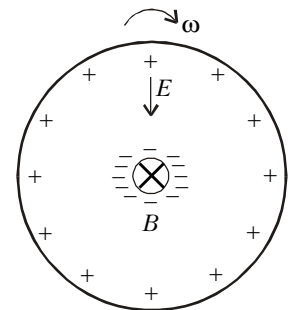


Рис. 6

электрон, уравновешивается электростатической силой:

$$e\omega rB = eE(r),$$

где e – заряд электрона. Отсюда мы получаем распределение напряженности электрического поля по r :

$$E(r) = \omega Br.$$

Теперь мы можем найти разность потенциалов между центром диска и ободом, т.е. ЭДС индукции:

$$E_i = \int_0^R E(r) dr = \omega B \int_0^R r dr = \frac{\omega BR^2}{2}.$$

В нашем случае для левого диска получим

$$E_{i1} = \frac{\omega_1 BR^2}{2},$$

а для правого –

$$E_{i2} = \frac{\omega_2 BR^2}{2}.$$

Очевидно, что установившиеся заряды на конденсаторах будут равны по величине, но противоположны по знаку. Поскольку $E_{i1} > E_{i2}$ (так как $\omega_1 > \omega_2$), то на левой пластине конденсатора емкостью C_2 будет «+», а на левой пластине конденсатора емкостью C_1 будет «-». Обозначим величину заряда на конденсаторах через q . По закону Ома для нашего замкнутого контура можно записать

$$E_{i1} - E_{i2} = \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_1}.$$

Отсюда находим

$$q = \frac{(E_{i1} - E_{i2})C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{BR^2(\omega_1 - \omega_2)C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Напряжения, которые установятся на конденсаторах, будут равны

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{BR^2(\omega_1 - \omega_2)C_2}{2(C_1 + C_2)}$$

и

$$U_2 = -\frac{q}{C_2} = \frac{BR^2(\omega_2 - \omega_1)C_1}{2(C_1 + C_2)}.$$

Задача 5. Оптическая система состоит из рассеивающей линзы L_1 и собирающей линзы L_2 , расположенных на расстоянии $L = 10$ см друг от друга (рис. 7). Главные оптические оси линз параллельны и смещены друг относительно друга на расстояние d . Параллельный пучок света, падающий перпендикулярно плоскостям линз, фокусируется системой в точке

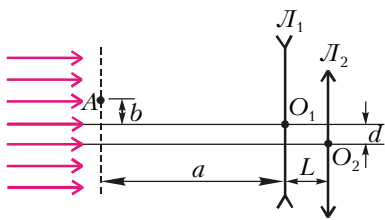


Рис. 7

А, расположенной слева от линзы L_1 на расстоянии $a = 30$ см от нее и на расстоянии $b = 1$ см от ее оптической оси. Фокусное расстояние линзы L_1 равно $F_1 = 10$ см. 1) Найдите фокусное расстояние F_2 собирающей линзы L_2 . 2) Определите расстояние d между оптическими осями линз.

1) После прохождения линзы L_1 падающий параллельный пучок света соберется слева от этой линзы на расстоянии, равном ее фокусному расстоянию F_1 . Проход через линзу L_2 дает мнимое изображение слева от этой линзы на расстоянии $L + a$. По формуле линзы (для линзы L_2) можно записать

$$\frac{1}{L + F_1} - \frac{1}{L + a} = \frac{1}{F_2}.$$

Отсюда находим фокусное расстояние собирающей линзы L_2 :

$$F_2 = \frac{(L + F_1)(L + a)}{a - F_1} = 40 \text{ см}.$$

2) Для ответа на второй вопрос рассмотрим луч, идущий вдоль главной оптической оси линзы L_1 (рис. 8). Линзу L_1 этот луч проходит без преломления, оставаясь параллельным главной оптической оси линзы L_2 . После прохождения линзы L_2 луч преломляется и идет в фокус F_2 этой линзы, а продолжение этого луча попадает в точку А. Рассмотрим два подобных треугольника AF_2C и ABD . Из их подобия следует, что

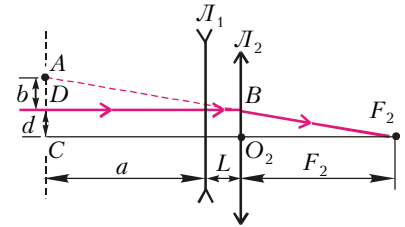


Рис. 8

$$\frac{CF_2}{DB} = \frac{AC}{AD}, \text{ или } \frac{a + L + F_2}{a + L} = \frac{b + d}{b},$$

откуда находим искомое расстояние между оптическими осями линз:

$$d = \frac{bF_2}{a + L} = 1 \text{ см}.$$

Упражнения

1. На тележке, которая может двигаться по горизонтальным рельсам прямолинейно и без трения, укреплен в горизонтальной плоскости трубка в форме кольца (рис. 9, вид сверху). Внутри трубки может двигаться без трения шарик массой m . Масса тележки с трубкой M , массой колес можно пренебречь. Шарик при неподвижной тележке сообщают в точке

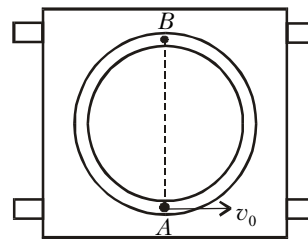


Рис. 9

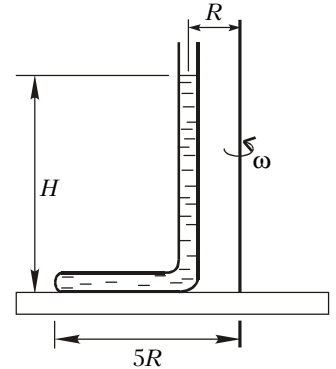


Рис. 10

А скорость \vec{v}_0 , направленную параллельно рельсам. 1) Найдите скорость тележки при прохождении шариком точки В тележки, диаметрально противоположной точке А. 2) На каком расстоянии от первоначального положения окажется тележка через время t , когда шарик совершит несколько оборотов?

2. Тонкая запаянная с одного конца трубка заполнена жидкостью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис. 10). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке. Атмосферное давление p_0 , плотность жидкости ρ . Найдите: 1) давление жидкости в месте изгиба трубки; 2) давление жидкости у запаянного конца трубки.

3. Два плоских конденсатора с пластинами площадью S и расстоянием между ними d включены в цепь через резистор сопротивлением R (рис. 11). В

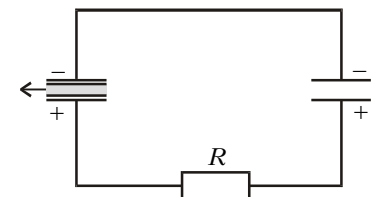


Рис. 11

левом конденсаторе расположена диэлектрическая пластина толщиной d , площадью S и проницаемостью ϵ . Конденсаторы заряжены до напряжения U . Пластину быстро выдвигают из конденсатора. Пренебрегая изменением зарядов на пластинах конденсатора за время удаления диэлектрика, определите: 1) какую работу пришлось совершить при этом; 2) чему равен и куда направлен ток через резистор сразу после удаления диэлектрика.

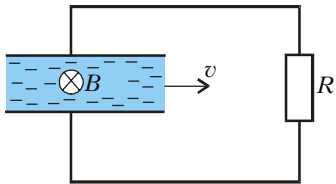


Рис. 12

4. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ , движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам (рис. 12). Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленной вдоль пластин и перпендикуляр-

но скорости жидкости. Найдите полезную мощность, которая выделяется в виде тепла на внешней нагрузке сопротивлением R .

5. Оптическая схема состоит из собирающей линзы L_1 и рассеивающей линзы L_2 (рис.13), главные оптические оси которых параллельны и смещены друг относительно друга на расстояние $d = 1$ см. На систему со стороны собирающей линзы параллельно ее главной оптической оси падает параллельный пучок света. Найдите положение фокуса F такой системы, т.е. его расстояние x до плоскости линзы L_2 и расстояние y до главной оптической оси линзы L_1 . Расстояние между линзами $a = 30$ см, фокусные расстояния линз L_1 и L_2 равны $F_1 = 10$ см и $F_2 = 10$ см.

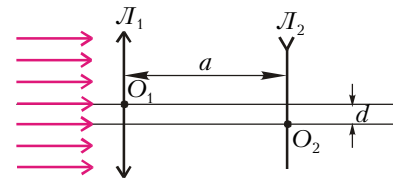


Рис. 13