тельно, компактно) и является подмножеством $\boldsymbol{A}$. Предположим, что существует точка B из $\boldsymbol{A}$, не принадлежащая $\boldsymbol{A}_1$. По теореме о строгой отделимости можно строго отделить точку B от $\boldsymbol{A}_1$ прямой $\boldsymbol{H}_1$. Снова найдем точку A_1 из $\boldsymbol{A}$, самую дальнюю от прямой $\boldsymbol{H}_1$ и лежащую в той же полуплоскости, что и B.

На прямой $\boldsymbol{H}_1'$, параллельной $\boldsymbol{H}_1$ и проходящей через точку A_1, по доказанному есть крайняя точка множества $\boldsymbol{A}$, что противоречит нашему построению (рис.7).

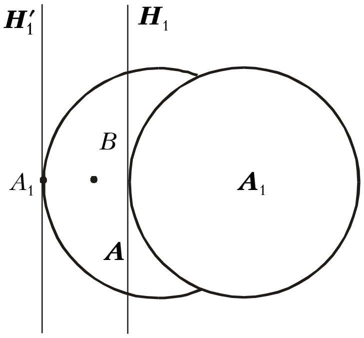

Рис.7. Теорема Крейна–Мильмана

Упражнение 3. Докажите, что выпуклая оболочка конечного числа точек является пересечением конечного числа полуплоскостей.

Теорема о крайних точках была доказана в бесконечномерном случае советскими математиками Марком Григорьевичем Крейном (1807–1989) и Давидом Пинхусовичем Мильманом (1913–1982) в 1940 году.

Теорема (Каратеодори). *Если точка принадлежит выпуклой оболочке системы из конечного числа точек, то она либо совпадает с одной из точек системы, либо принадлежит отрезку, соединяющему две точки из системы, либо принадлежит треугольнику с вершинами из той же системы.*

Иначе говоря, точка, принадлежащая выпуклой оболочке системы из конечного числа точек, является выпуклой оболочкой не более трех точек системы.

Эта теорема была доказана знаменитым немецким математиком греческого происхождения Константином Каратеодори (1873–1950).

Доказательство. Выпуклая оболочка конечного числа точек – многоугольник, крайними точками которого являются точки из данной совокупности (продумайте это). Если точка, о которой идет речь, совпадает с точкой системы или лежит на отрезке между двумя точками, то все доказано. Пусть это не так. Проведем луч через какую-то вершину A многоугольника и данную точку P. Он пересечет границу многоугольника в точке на стороне многоугольника, концами которой являются две точки B и C системы. Значит, данная точка принадлежит треугольнику с вершинами в описанных точках (рис.8).

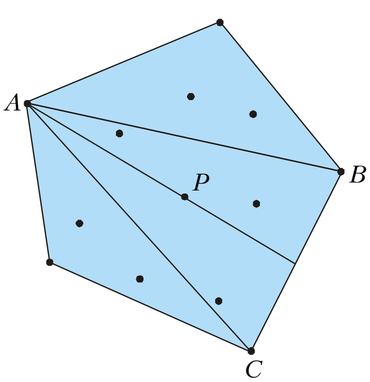

Рис.8. Теорема Каратеодори. Закрашенный многоугольник – выпуклая оболочка системы точек, показанной на рисунке

Теорема (Радон). *Любую систему, состоящую из не менее чем четырех точек, можно разбить на две подсистемы так, чтобы их выпуклые оболочки пересекались.*

Доказательство. Этот результат достаточно доказать для четырех точек. Очевидно, можно считать, что три точки не лежат на одной прямой и образуют треугольник ABC. Три прямые, проходящие через эти точки, разбивают плоскость на семь частей, и если четвертая точка попадает в одну из них, то ясно, на какие подсистемы следует разбивать систему (рис.9).

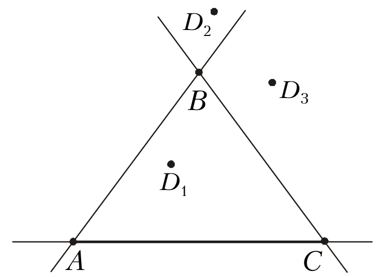

Рис.9. Теорема Радона. Разбиения: $\{A,B,C\}$ и $\{D_1\}$, $\{A,D_2,C\}$ и $\{B\}$, $\{A,D_3\}$ и $\{B,C\}$

Теорема (Хелли). *Пусть задано семейство плоских компактных выпуклых множеств, содержащее по меньшей мере три множества. Если любые три множества из семейства пересекаются, то существует точка, принадлежащая всем множествам семейства.*

Доказательство. Докажем этот результат для конечной системы множеств. Доказательство проводится индукцией по числу множеств n. Если $n = 3$, утверждение теоремы очевидно. Допустим, что для $n - 1$ множеств утверждение теоремы справедливо, и пусть задана система $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$, состоящая из n множеств. По условию теоремы, для каждого i $(1 \le i \le n)$ найдется точка B_i, принадлежащая пересечению всех множеств системы без множества $\boldsymbol{A}_i$. Так как n не меньше четырех, можно применить теорему Радона и множество точек $\boldsymbol{B} = \{B_i\}_{i=1}^{n}$ разделить на две части $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ такие, что их выпуклые оболочки имеют непустое пересечение. Пусть B лежит в этом пересечении. Тогда B, принадлежа выпуклой оболочке системы точек из $\boldsymbol{B}_1$, принадлежит пересечению множеств из $\boldsymbol{B}_2$, и аналогично, если она принадлежит выпуклой оболочке второй системы, значит, принадлежит пересечению множеств первой. Следовательно, она принадлежит всем множествам.

Упражнения

4. На плоскости задано конечное число точек, причем каждые три можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что все точки можно заключить в круг единичного радиуса.

5. На плоскости задано конечное число точек, причем расстояние между каждыми двумя из них не больше единицы. Докажите, что все эти точки можно поместить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга).

Интересна история теоремы Хелли. В 1913 году австрийский математик Эдвард Хелли (1884–1943) доказал приведенную теорему. Он рассказал о ней своему коллеге Иоганну Радону (1887–1956), известному специалисту в области анализа и теории меры. Хелли не успел опубликовать доказательство своей теоремы: началась первая мировая война, он был призван в армию, воевал на русском фронте, был ранен, захвачен в плен, лечился в госпитале в Сибири