Теорема о строгой отделимости. *Выпуклое замкнутое множество на плоскости можно строго отделить от точки, ему не принадлежащей.*

Доказательство. Пусть множество $\boldsymbol{A}$ выпукло и замкнуто и точка B ему не принадлежит. Найдем среди точек из $\boldsymbol{A}$ точку C, ближайшую к B.

Представьте себе, что граница $\boldsymbol{A}$ – это берег острова, расположенного в неподвижной глади озера, и кто-то бросил камень «в точку B». Сначала круги, расходящиеся от брошенного камня, не будут иметь общих точек с $\boldsymbol{A}$, но в некоторый момент волновой фронт впервые коснется $\boldsymbol{A}$. Точку касания мы и обозначили буквой C.

В течение очень длительного времени математики считали подобные утверждения о существовании ближайших точек очевидными и никаких доказательств не приводили. В девятнадцатом веке для доказательства таких фактов Огюстеном Коши и Карлом Вейерштрассом была подведена база. Она основывается на понятии непрерывности и компактности. Кратко расскажем об этом.

Числовая функция f на плоскости называется непрерывной в точке A_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что если расстояние от точки A до точки A_0 меньше δ, разность значений функции f в точке A и в точке A_0 по модулю меньше ε. Вейерштрасс доказал важную теорему, согласно которой непрерывная функция на компакте достигает и своего максимума и своего минимума. Применим эту теорему к нашему случаю.

Расстояние от точки B до точек плоскости – непрерывная функция на плоскости. По теореме Вейерштрасса (ибо можно ограничиться компактом, являющимся пересечением $\boldsymbol{A}$ с кругом радиуса, равного расстоянию от B до любой точки A' из $\boldsymbol{A}$ – рис.4), она достигает своего минимума на $\boldsymbol{A}$ в точке C. Продолжим доказательство.

Прямая $\boldsymbol{H}$, проходящая через C перпендикулярно прямой, проходящей через B и C, искомая. Действительно, B, очевидно, не принадлежит $\boldsymbol{H}$. Допустим теперь, что в той же (открытой) полуплоскости, что и B, лежит точка D из $\boldsymbol{A}$. Тогда угол BCD острый и для любой точки D' на отрезке CD такой, что угол $BD'C$ – тупой, расстояние от B до D' меньше, чем от B до C (против большего угла лежит большая сторона) (см. рис.4). Теорема доказана.

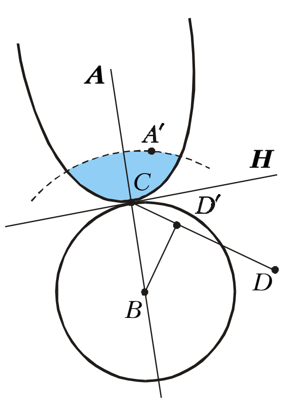

Рис.4. Теорема о строгой отделимости

Следствие (теорема Минковского). *Для того чтобы фигура на плоскости являлась пересечением полуплоскостей, необходимо и достаточно, чтобы она была выпуклой и замкнутой.*

Действительно, пересечение полуплоскостей выпукло и замкнуто. Если же допустить, что пересечению полуплоскостей $\boldsymbol{A}_1$, содержащих выпуклую и замкнутую фигуру $\boldsymbol{A}$, принадлежит точка B, не принадлежащая $\boldsymbol{A}$, то, строго отделив эту точку от $\boldsymbol{A}$, приходим к противоречию.

Теорема о строгой отделимости и следствие из нее были доказаны замечательным немецким математиком Германом Минковским (1864–1909), который явился одним из основоположников выпуклой геометрии. Теорема Минковского была перенесена польским математиком Станиславом Мазуром (1905–1981) на бесконечномерный случай. Об этом бесконечномерном случае и о теореме Мазура мы еще поговорим в конце.

Некоторые теоремы выпуклой геометрии

Точки множества, которые не являются внутренними ни для какого отрезка, расположенного в этом множестве, называются *крайними точками* этого множества. В треугольнике это его вершины, в круге – точки окружности, ограничивающей круг (рис.5).

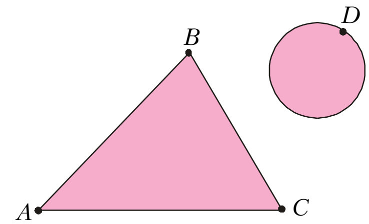

Рис.5. Крайние точки

Пересечение выпуклых замкнутых множеств, содержащих данное множество, называется его *выпуклым замыканием.*[1]

Теорема (Крейна–Мильмана). *Выпуклый компакт является выпуклым замыканием своих крайних точек.*

Доказательство. Докажем сначала, что множество крайних точек множества $\boldsymbol{A}$ непусто.

Пусть $\boldsymbol{H}_0$ – любая прямая. Возможно, что $\boldsymbol{H}_0$ имеет общие точки с $\boldsymbol{A}$, а само множество лежит по одну сторону от этой прямой (такие прямые называют опорными к $\boldsymbol{A}$). Если же прямая $\boldsymbol{H}_0$ опорной не является, начнем «двигать» прямую $\boldsymbol{H}_0$ параллельно самой себе до тех пор, пока она не станет опорной (рис.6).

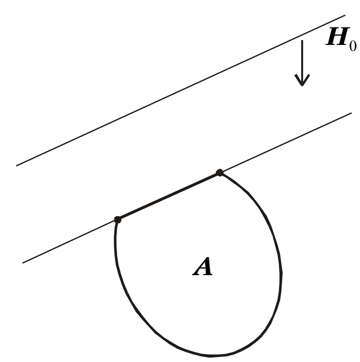

Рис.6. Существование крайних точек

И здесь поясним, как строго доказать это (наглядно очевидное) утверждение.

Рассмотрим функцию на плоскости – расстояние от точки плоскости до $\boldsymbol{H}_0$. Это непрерывная функция, и значит, по теореме Вейерштрасса она достигает максимума и минимума на $\boldsymbol{A}$. Прямые, параллельные $\boldsymbol{H}_0$, находящиеся на максимальном и минимальном расстояниях, – опорные.

Опорная прямая пересекается с $\boldsymbol{A}$ по отрезку (может быть, вырождающемуся в точку), и тогда крайняя точка этого отрезка будет крайней точкой и для $\boldsymbol{A}$. (Докажите это.)

Пусть теперь $\boldsymbol{A}_1$ – выпуклое замыкание крайних точек из $\boldsymbol{A}$. Оно ограничено и замкнуто (а следова-

[1] *Отметим, что выпуклое замыкание множества и его выпуклая оболочка могут не совпадать. Например, выпуклая оболочка открытого круга совпадает с ним самим, а его выпуклое замыкание содержит граничную окружность.*