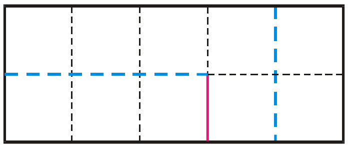

Рис. 7

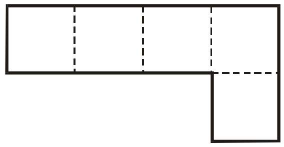

Рис. 8

линии (рис. 7), потом перегнем по пунктирным синим линиям исходный прямоугольник так, чтобы получилась двухслойная фигура из 5 квадратиков (рис.8). Из полученной фигуры легко сложить коробку.

9. Очевидно, $1+x^2 = xy+yz+zx+x^2 = (x+y)(x+z)$. Аналогично, $1+y^2 = (y+x)(y+z)$ и $1+z^2 = (z+x)(z+y)$. Следовательно, $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right) = (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$.

11. Заметим, что не меньше 24 фишек из имеющихся 25 в процессе перестановок придется поднимать на верхнюю горизонталь, а затем опускать обратно (затратив тем самым как минимум по 2 хода на каждую фишку). Поясним, почему. Если какие-то две фишки при перемещении не покинут нижнюю горизонталь, то они не смогут поменяться, тогда как каждая фишка, находившаяся первоначально слева от другой, в итоговом расположении должна оказаться справа (и наоборот). Поэтому на такие «возвратно-поступательные» вертикальные перемещения потребуется не меньше $24 \cdot 2 = 48$ ходов.

Что касается горизонтальных перемещений, то здесь оценка снизу вполне очевидна. Фишке номер 1, чтобы добраться до места номер 25, потребуется не меньше 24 ходов. То же относится и к фишке номер 25, которая пробирается к месту номер 1. Далее, фишка номер 2, чтобы дойти до 24-го места, затратит не меньше 22 ходов (и фишка номер 24 – тоже). Ну, и так далее. Поэтому всего потребуется не менее $2\cdot(24+22+\ldots+2) = 312$ ходов.

Суммарное минимальное число ходов (вертикальных и горизонтальных), таким образом, оценивается величиной 48 + + 312 = 360.

С другой стороны, можно показать, как достичь цели ровно за 360 ходов. Для этого:

1) Фишку номер 1 поднимаем в верхний ряд и переводим вправо до 25-го места, оставляя ее пока в верхнем ряду.

2) Фишку номер 2 поднимаем в верхний ряд и переводим вправо до 24-го места, оставляя ее пока в верхнем ряду.

…

12) Фишку номер 12 поднимаем в верхний ряд и переводим вправо до 14-го места, оставляя ее пока в верхнем ряду.

13) Фишку номер 13 поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

14) Фишку номер 14 переводим влево до 12-го места, а затем поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

15) Фишку номер 15 переводим влево до 11-го места, а затем поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

…

24) Фишку номер 24 переводим влево до 2-го места, а затем поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

25) Фишку номер 25 переводим влево до 1-го места и оставляем там, никуда не поднимая.

26) Все фишки с верхнего ряда опускаем в нижний ряд.

Как легко посчитать, мы управились за 360 ходов.

12. Нельзя.

13. Десятичная запись числа $a = 2^n$, где $n \in \mathbf{N}$, содержит не более n цифр. Запишем цифры числа a в обратном порядке и припишем к полученному числу b справа n нулей. Сложим полученное число $b\cdot 10^n$ с числом a. Получим палиндром $b\cdot 10^n + a$, который делится на $a = 2^n$, поскольку 10^n делится на 2^n.

14. Любое.

16. $n = 5$. При $n = 3$ достаточно рассмотреть треугольник с углами величиной 10°, 10° и 160°; при $n = 4$ – четырехугольник с углами 40°, 50°, 100° и 170°. Докажем «от противного», что в выпуклом пятиугольнике искомые три угла всегда есть. Пронумеруем величины углов пятиугольника по возрастанию: $0^\circ < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \alpha_4 \le \alpha_5 < 180^\circ$. Тогда $\alpha_3+\alpha_4 \le \alpha_5$ и $\alpha_1+\alpha_2 \le \alpha_5$, откуда

$$540^\circ = (\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)+\alpha_5 \le 3\alpha_5,$$

так что $\alpha_5 \ge 180^\circ$, что неверно.

17. Расположенный в левом верхнем углу доски квадрат размером 10×10 разобьем на 25 синих квадратов размером 2×2, а расположенный в правом нижнем – на 25 красных (рис.9). Очевидно, получили 50 квадратов, удовлетворяющих условию задачи. Для доказательства того, что больше не бывает, рассмотрим 25 клеток, помеченных на рисунке 9 звездочками. Если бы квадратов размером 2×2 было больше 50, то какая-то из помеченных клеток оказалась бы не менее чем в трех квадратах, а в таком случае хотя бы два из них пересекались по двум клеткам, а не по одной.

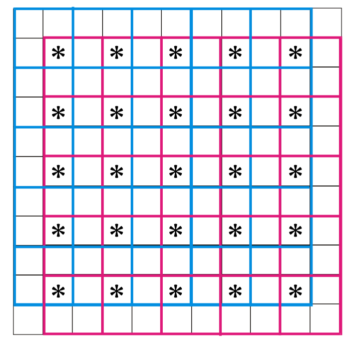

Рис. 9

18. Всего в шеренге (колонне, диагонали) может быть от $1\cdot 7 = 7$ орденов до $3\cdot 7 = 21$, т.е. всего 15 вариантов. Но шеренг, колонн и диагоналей 16, а число 16 больше, чем 15. Поэтому хотя бы одно совпадение неизбежно.

20. Данное в условии задачи неравенство равносильно неравенству

$$(a-1)\left(1-b^5\right) > 0,$$

которое равносильно неравенству

$$\left(a^7-1\right)(1-b) > 0,$$

а оно, в свою очередь, равносильно тому неравенству, которое требовалось доказать.

21. $(x;\, y;\, z) = \left(\frac{1}{2};\, \frac{1}{2};\, \frac{1}{2}\right)$ или $\left(-\frac{1}{2};\, -\frac{1}{2};\, -\frac{1}{2}\right)$. Авторский замысел решения заключался в избавлении от знаменателей и замене переменных $a = yz$, $b = xz$ и $c = xy$, приводящей к системе

$$\begin{cases} c^2+b^2 = a, \\ a^2+c^2 = b, \\ b^2+a^2 = c. \end{cases} \qquad (*)$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получаем

$$b^2-a^2 = a-b,$$

откуда $a = b$ или $a + b = 1$.

Случай $a = b$ приводит к системе

$$\begin{cases} c^2 = a-a^2, \\ 2a^2 = c, \end{cases}$$

откуда $4a^4 = a-a^2$. Поскольку ситуация $a = b = 0$ невозможна, то

$$4a^3+a-1 = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет значение $a = 1/2$. В силу те-