25. На диагоналях AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что $BN/DN = AM/CM$ и $\angle BAD = \angle BMC$. Докажите, что $\angle ANB = \angle ADC$. (10)

Ф.Бахарев

26. В стране не менее 100000 городов, из каждого города выходит ровно 2001 дорога. Верно ли, что всегда можно закрыть часть дорог (не менее одной, но не все) таким образом, чтобы после этого из всех городов выходило поровну дорог (дорога соединяет два города, любые два города соединены не более чем одной дорогой)? (10)

Д.Карпов, М.Островский

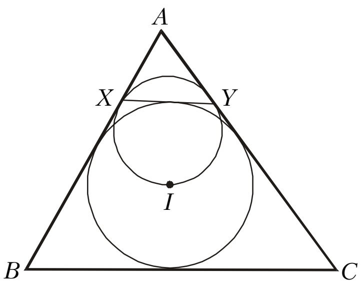


Рис. 5

27. I – центр вписанной окружности треугольника ABC (рис.5). Окружность, проходящая через I, касается сторон AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что отрезок XY касается вписанной в треугольник ABC окружности. (11)

С.Берлов

28. В зоопарке есть двое двухчашечных весов для взвешивания животных. Слон и верблюд весят целое число килограммов, и сумма их масс не превосходит 2 тонн. В зоопарк доставили набор гирь, весящих целое число килограммов, сумма масс которых равна 2 тоннам. Выяснилось, что если на одну из чашек первых весов поставить слона, а на одну из чашек вторых – верблюда, то какими бы ни были веса животных, можно распределить некоторые из гирь по всем 4 чашкам так, чтобы те и другие весы пришли в равновесие. Какое наименьшее число гирь могли привезти в зоопарк? (11)

А.Храбров

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

29. Длина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ равна сумме длин оснований AD и BC. Докажите, что биссектрисы углов A и B пересекаются на стороне CD. (9)

Ф.Бахарев

30. При каком наибольшем α любые вещественные числа

$$0 = a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{11} = 1$$

можно разбить на две группы, средние арифметические в которых отличаются не меньше чем на α? (9)

М.Лифшиц, Ю.Лифшиц, Ф.Петров

31. а) Пусть O – центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, точка C_1 симметрична C относительно O, D – середина стороны AB, K – центр описанной окружности треугольника ODC_1 (рис.6). Докажите, что точка O делит пополам отрезок прямой OK, лежащий внутри угла ACB. (9)

Р.Становевич

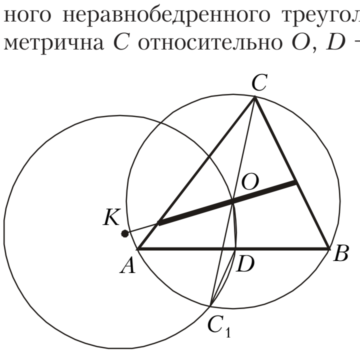


Рис. 6

б) На сторонах AB и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно так, что $XBYD$ – параллелограмм (рис.7). Точки M и N – середины диагоналей AC и BD, прямые AC и XY пересекаются в точке L. Докажите, что точки M, N, L и D лежат на одной окружности. (10)

С.Берлов, Д.Джукич, Д.Карпов, А.Пастор

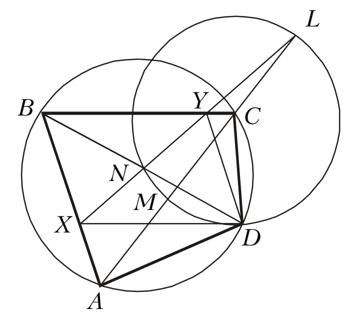
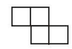


Рис. 7

32. Можно ли в прямоугольнике 17×101 расставить числа от 1 до 1717 так, чтобы в каждой фигурке вида  , целиком помещающейся в прямоугольнике, сумма чисел делилась на 17 или на 101? (9)

К.Кохась

33. Многоугольник F, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой, можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники не менее чем двумя способами. Докажите, что некоторые четыре вершины F образуют выпуклый четырехугольник, целиком лежащий в F. (9)

Ю.Лифшиц

34. Даны 64 вершины. Двое играют в следующую игру: каждым ходом первый игрок соединяет ребром две еще не соединенные вершины, а второй произвольным образом ориентирует это ребро (т.е. ставит стрелочку, задавая на этом ребре направление движения). Второй игрок выигрывает, если после 1959 ходов от любой вершины до любой другой можно будет дойти, двигаясь вдоль стрелок. Кто выигрывает при правильной игре? (10)

А.Пастор

35. Берег озера имеет вид выпуклого центрально-симметричного стоугольника $A_1A_2\ldots A_{100}$ с центром симметрии O. Внутри озера расположен остров $B_1B_2\ldots B_{100}$ такой, что B_i – середина отрезка OA_i для всех i от 1 до 100. На острове находится тюрьма с высоким забором по краям. В противоположных точках берега находятся два охранника. Докажите, что они видят весь берег озера. (10)

Ф.Петров

36. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A', B' и C' соответственно (рис.8). Через точку A' проведена прямая l, перпендикулярная отрезку AA'. Она пересекается с прямой $B'C'$ в точке X. Докажите, что прямая BC делит отрезок AX пополам. (11)

Ф.Бахарев

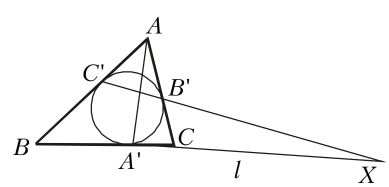


Рис. 8

37. На доске написано натуральное число. Дима с Сашей играют в следующую игру. Дима своим ходом называет некоторое натуральное число x, а Саша меняет число, записанное на доске, либо прибавляя к нему x, либо вычитая из него x (по своему выбору). Дима стремится к тому, чтобы на доске появилось число, равное какой-нибудь степени заданного натурального числа k (годится и $k^0 = 1$). При каких значениях k Дима сможет добиться этого независимо от исходного числа, записанного на доске? (11)

М.Антипов

Публикацию подготовили К.Кохась, А.Спивак