середины отрезка QM; получим точку Y. При этом образовался прямоугольник $YQHM$ со стороной $YQ = 1$. Заметим, что ломаная XMY на самом деле является отрезком.

В пятиугольнике $XPKQY$ биссектриса KM угла K разделяет его на четырехугольники, у которых равны периметры и равны площади.

Осталось заметить, что пятиугольник $XPKQY$ равен пятиугольнику $ABCDE$.

В.Произволов

М1845. *Назовем несоседние натуральные числа a и b близкими, если a^2-1 делится на b и b^2-1 делится на a.*
а) Пусть $n > 1$. Докажите, что в любом отрезке $[n; 8n-8]$ найдется пара близких чисел.
б) Постройте отрезок $[n; 8n-9]$ ($n > 1$), в котором пар близких чисел нет.

Начнем с пункта б). Непосредственно проверяем, что на отрезке $[2; 7]$ нет близких чисел.

а) В $[2; 8]$ и в $[3; 16]$ содержится пара $(3; 8)$.

Докажем, что при $n > 3$ достаточно брать отрезок $[n; 8n-17]$ (пример $[4; 14]$ показывает, что $[n; 8n-18]$ было бы недостаточно). В $[4; 15]$ лежит пара $(4; 15)$. При $5 \le n \le 8$ имеем $8n-17 \ge 23$, поэтому можно брать пару $(8; 21)$. При $9 \le n \le 21$ имеем $8n-17 \ge 55$, поэтому можно брать пару $(21; 55)$.

Пусть теперь $n > 21$. Рассмотрим $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$. Пусть a_k – наибольший член этой последовательности, меньший n. Имеем $21 \le a_k < n$, $a_{k+2} = 8a_k - 3a_{k-1} \le 8a_k - 24 < 8n - 24$.

Для завершения решения покажем, что любые два соседних члена любой последовательности, задаваемой равенствами

$$a_1 = 1,\ a_2 = m,\ a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k \qquad (*)$$

(где $m > 2$), – близкие числа.

Покажем прежде всего, что $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$. База индукции: $a_2^2 - a_1a_3 = m^2 - (m^2-1) = 1$. Пусть $a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n = 1$. Тогда

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1}(ma_n - a_{n-1}) =$$
$$= a_n^2 - ma_{n-1}a_n + (a_{n-2}a_n + 1) =$$
$$= a_n^2 + a_n(a_{n-2} - ma_{n-1}) + 1 = a_n^2 - a_n^2 + 1 = 1.$$

Значит, $a_{n+1}^2 - 1 \vdots a_n$ и $a_n^2 - 1 \vdots a_{n+1}$ при любом натуральном n; осталось доказать, что $a_{n+1} - a_n > 1$. Это тоже легко сделать при помощи индукции: если $a_n - a_{n-1} > 1$, то

$$a_{n+1} - a_n = (ma_n - a_{n-1}) - a_n =$$
$$= (m-1)a_n - a_{n-1} > a_n - a_{n-1} > 1.$$

Это и завершает решение задачи.

Из равенства $a_n^2 - a_{n-1}(ma_n - a_{n-1}) = 1$ следует, что близкие числа могут быть соседними членами лишь одной последовательности (*).

Близких чисел, не описываемых последовательностями (*), не существует: любая пара близких чисел, кроме $(1; 1)$, – пара соседних членов одной из таких последовательностей. Это можно доказать при помощи так называемого «метода спуска».

Заметим, что при $m = 2$ последовательность (*) совпадает с последовательностью натуральных чисел. Таким образом, в этом случае мы получаем множество всех пар соседних чисел. Если же $m = 3$, то для любого натурального n число a_n – это $(2n)$-й член последовательности Фибоначчи.

Отметим напоследок, что множество пар $(\varphi_{2n-1}; \varphi_{2n+1})$ чисел Фибоначчи – это множество пар $(a; b)$ таких натуральных чисел, что $a < b$, $a^2 + 1 \vdots b$, $b^2 + 1 \vdots a$. Любая такая пара – пара соседних членов последовательности $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_{k+2} = 3b_{k+1} - b_k$.

И.Богданов, В.Сендеров

Ф1853. *В большой комнате на гладком горизонтальном твердом полу стоит кровать. Одна ее ножка чуть короче других, поэтому под нее пришлось подложить гладкий брусок. Оказалось, что трение совсем мало и брусок этот легко выбить – маленький упругий шарик, который пускают по полу со скоростью больше 1 м/с, с этим справляется. Задачу злоумышленнику усложнили – он может бросать шарик с уровня пола на расстоянии 3 м от бруска, а посредине между ним и бруском поставили ширму высотой 0,5 м. С какой минимальной скоростью нужно (вернее – не нужно!) бросить шарик, чтобы выбить брусок?*

Бросим шарик под углом 45° так, чтобы он пролетел расстояние L = 3 м. Тогда максимальная высота траектории будет равна

$$H = \frac{L}{4} = \frac{3\text{ м}}{4} = 0{,}75\text{ м} > h = 0{,}5\text{ м},$$

начальная скорость будет

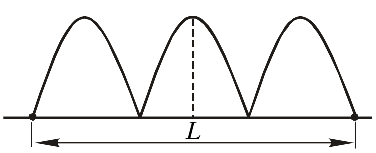
$$v = \sqrt{gL} \approx 5{,}5\text{ м/с}$$

и горизонтальная составляющая скорости составит

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 3{,}9\text{ м/с} > 1\text{ м/с}.$$

Эта траектория нам подходит.

Но можно обойтись и меньшей скоростью, если воспользоваться подсказкой о твердой поверхности пола и об упругости шарика.



Проще всего посмотреть на рисунок: в этом случае дальность полета равна $L_1 = L/3 = 1$ м, но бросить шарик под углом 45° («оптимальный» бросок) уже не выйдет – высота не подходит ($H_1 = L_1/4 = 0{,}25\text{ м} < 0{,}5\text{ м}$). Придется увеличивать вертикальную составляющую скорости до

$$v_{y_1} = \sqrt{2gh} \approx 3{,}2\text{ м/с}.$$

Тогда

$$L_1 = v_{x_1} \cdot 2\frac{v_{y_1}}{g},\ \text{и}\ v_{x_1} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{L^2 g}{2h}} \approx 1{,}6\text{ м/с} > 1\text{ м/с}.$$

Скорость шарика при этом равна

$$v_1 = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \approx 3{,}5\text{ м/с}.$$

А вот «разделить» L на 5 (или более) частей уже не получится – велика требуемая скорость (или слишком высока ширма).

П. Коренев