Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3– 2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1861» или «Ф1868». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1861—М1870, Ф1868—Ф1877

М1861. Точки в количестве $2n + 1$ разделили окружность на $2n + 1$ равных дуг, где $n > 1$. Среди этих точек $n + 1$ – красные. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с красными вершинами.

В.Произволов

М1862. Биссектрисы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что а) если $ID = IF = IE$, то треугольник ABC правильный; б) если треугольник DFE правильный, то и треугольник ABC правильный.

А.Заславский, В.Сендеров

М1863*. Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член – наименьшее натуральное число, которое еще не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.

Дж.Лагариас, И.Рейнс, Н.Слоан

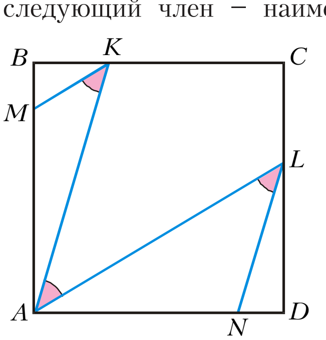

Рис.1

М1864. В квадрат $ABCD$ вписана ломаная $MKALN$ такая, что $\angle MKA = \angle KAL = \angle ALN = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что

$$MK^2 + AL^2 = AK^2 + NL^2 .$$

В.Произволов

М1865*. Для натурального числа $N = 46$ можно указать натуральное число

$$M = 460100021743857360295716,$$

обладающее следующими свойствами: 1) первые цифры числа M представляют собой число N; 2) если эти первые цифры перенести в конец числа M, то (отбросив при необходимости первые нули) получим число

$$M_1 = 10002174385736029571646,$$

которое ровно в N раз меньше числа M. Для каких еще натуральных N существует число M, обладающее такими же свойствами?

И.Акулич

М1866. Остров разделен на княжества, каждое из которых представляет собой на карте острова параллелограмм. При этом любые два параллелограмма либо не имеют общего участка границы, либо в качестве общего участка границы имеют общую сторону. Докажите, что для правильной раскраски карты острова достаточно трех красок. (Раскраска правильная, если любые два княжества, имеющие общий участок границы, закрашены в разные цвета.)

В.Произволов

М1867*. Пусть M – множество членов некоторой геометрической прогрессии. Каково наибольшее возможное число элементов в пересечении множества M с множеством а) $\left\{2^n - 1 \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{2^n + 1 \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$?

А.Голованов, В.Сендеров

М1868*. Рассмотрим множество всех квадратных таблиц $p \times p$ клеток ($p > 1$), заполненных натуральными числами 1, 2, …, p^2. Назовем правильной таблицу, в которой в первой строке (столбце) стоят по порядку