

при небольшом наклоне плоскости отскакивает от стенки. Если же наклон велик, шарик перестает отскакивать, хотя высота, с которой он спускается, увеличилась. Объясните результат эксперимента.

*Публикацию подготовили Г.Меледин, А.Ершов*

### Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

*Письменный экзамен*

*Вариант 1*

1. Для каждого натурального числа  $n > 1$  определена функция

$$f_n(x) = 0,25^{\log_n(x^2 + 2nx + 7)}.$$

- а) Найдите области определения этих функций.  
б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{f_4(x)} + 9}.$$

в) При каких  $a$  уравнение  $|g(x) - 5| = a$  имеет только два решения?

2. Решите неравенство

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} + 10x\right) > \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x.$$

3. В ромб вписана окружность радиуса  $R$ . Найдите площадь ромба, если его большая диагональ в 4 раза больше радиуса описанной окружности.

4. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна  $S$ . Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

5. Рассмотрим следующие свойства числа  $a$ : а) сумма цифр числа  $a$  делится на 3; б)  $a$  — четное число; в) остаток от деления числа  $a$  на 6 равен 1; г)  $a$  делится на 9.

1) Покажите, что никакое число не обладает одновременно свойствами а) — г).

2) Верно ли, что если число  $a$  обладает свойством в), то число  $a + 2$  обладает свойством б)?

*Вариант 2*

1. Для каждого натурального числа  $n$  определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n-x}{(6+3x)|x-2|}}.$$

- а) Найдите области определения этих функций.  
б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = |f_2^2(x) - 1|.$$

в) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(f_5(x)\sqrt{2+x}\right) > \log_{\frac{1}{3}}(5-x).$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3} - \sin 7x = 2\sqrt{3} \cos^2 2x - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

3. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

4. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб  $ABCD$  со стороной  $a$  и острым углом  $60^\circ$ . Ребро  $AA_1$  также

равно  $a$  и образует с ребрами  $AB$  и  $AD$  углы  $45^\circ$ . Определите объем параллелепипеда и площадь его полной поверхности.

5. Дана функция  $f(x) = \sqrt{a-x}$ .

а) Покажите, что при любых различных числах  $a$  и  $b$  графики функций  $f_a(x)$  и  $f_b(x)$  не пересекаются.

б) Верно ли, что если  $a > b$ , то область определения функции  $f(x)$  содержится в области определения функции  $f_b(x)$ ?

*Публикацию подготовили Н.Подходова, О.Корсакова*

### Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского

(МАТИ)

МАТЕМАТИКА

*Письменный экзамен*

*Вариант 1*

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 11x - 9} = \sqrt{8x - 5}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 3|x| + \sqrt{3} \cos 3x = \sqrt{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_5 \log_6 \frac{5x-1}{x+5} \leq 0.$$

4. Отношение суммы первых трех членов геометрической прогрессии к сумме последних трех членов равно  $1 : 5$ , а отношение суммы всех ее членов без первых трех к сумме всех членов без последних трех равно  $7 : 5$ . Найдите количество членов прогрессии.

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sqrt{x + 2a^2} (x^2 + (2-a)x - 2a) = 0$$

имеет ровно два различных корня?

6. В трапецию  $ABCD$  с острым углом  $D$  вписана окружность, точки касания которой с основанием  $AD$  и боковой стороной  $CD$  делят длину окружности на части  $1 : 2$ . На сторонах  $AD$  и  $CD$  выбраны точки  $E$  и  $T$  так, что отрезок  $ET$  касается окружности и перпендикулярен  $AD$ . Найдите отношение площадей трапеции  $ABCD$  и треугольника  $ETD$ , если  $AB = 4TE$ .

*Вариант 2*

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 3x - 8.$$

2. Решите уравнение

$$\sin(\sqrt{x} + \sqrt{7-x}) = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x+4} 3 + \log_{2x+9} 3 \leq 0.$$

4. В арифметической прогрессии четное число членов. Разность между последним и первым членами равна 153, разность между суммой четных и суммой нечетных членов равна 81, а четвертый член равен 20. Найдите сумму членов прогрессии.

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sqrt{x + 3a^2} (x^2 + 2(2-a)x - 8a) = 0$$

имеет ровно два различных корня?

6. Окружность вписана в трапецию  $ABCD$  с тупым углом