рая и будет предметом исследования. Назовем цепочкой Штейнера такую последовательность окружностей $C_1, C_2, \ldots$, вписанных в кольцо, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ окружность C_{n+1} касается окружности C_n и расположена относительно C_n по ходу часовой стрелки (при движении по кольцу). Ясно, что эта цепочка однозначно определена, если задана начальная окружность C_1.

Ожерелье Штейнера

Может случиться, что цепочка замкнется, т.е. для некоторого n окружность C_n коснется окружности C_1 (и, таким образом, $C_k = C_{k+n}$ для любого $k \geq 1$); будем считать, что n – наименьший номер, на котором произошло такое касание. В этом случае цепочка Штейнера превращается в ожерелье Штейнера – набор из n окружностей, вписанных в кольцо, таких, что каждая окружность касается ровно двух других окружностей этого набора. Будем записывать ожерелье в виде $C_1, \ldots, C_n$.

Основное свойство описанной конструкции заключено в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть цепочка Штейнера замкнулась при некотором выборе начальной окружности C_1 (и, таким образом, возникло ожерелье $C_1, \ldots, C_n$); тогда при любом другом выборе начальной окружности C_1' (вписанной в кольцо) соответствующая цепочка Штейнера $C_1', C_2', \ldots$ также замкнется (и, тем самым, возникнет ожерелье $C_1', \ldots, C_n'$).*

Разумеется, эта теорема – теорема Штейнера – содержательна только для того случая, когда закрепленные окружности не концентричны; в случае их концентричности утверждение теоремы очевидно.

Таким образом, если для данных закрепленных окружностей имеем некоторое ожерелье Штейнера, то это ожерелье подвижно: оно может скользить, сохраняя свое основное свойство – каждая из составляющих его окружностей касается двух других и все окружности касаются закрепленных окружностей. Конечно, в случае, когда закрепленные окружности не концентричны, окружности нашего ожерелья деформируются при упомянутом скольжении (меняются их радиусы). Если же закрепленные окружности концентричны, то деформации не происходит.

Мы приведем два доказательства теоремы Штейнера. Первое из них – классическое; оно найдено самим Якобом Штейнером, швейцарским геометром, жившим в XIX столетии. (Ему же принадлежит сама постановка задачи, а потому ожерелье носит его имя.) Оно очень короткое и почти не содержит формул. Второе доказательство, напротив, основано на достаточно длинных вычислениях.

Классическое доказательство

Это доказательство использует понятие инверсии плоскости. Читатель, возможно, уже знаком с ним – оно изложено во многих геометрических книжках. Напомним его. Зафиксируем на плоскости точку M_0 и выберем число $R > 0$. Каждой точке P, отличной от M_0, поставим в соответствие точку P', определяемую следующими условиями: 1) P' расположена на луче, который выходит из точки M_0 и проходит через точку P; 2) $|M_0P'| \cdot |M_0P| = R^2$. Получили отображение плоскости, из которой удалена точка M_0, на себя (рис.1). Это и есть инверсия. Точка M_0 называется центром инверсии, а величина R – ее радиусом.

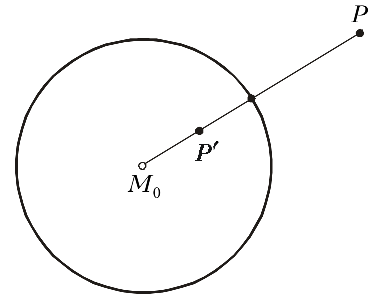

Рис.1

Для нас важно следующее замечательное свойство инверсии: она переводит любую окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность с тем же свойством. Если при этом центр инверсии лежит вне круга, ограниченного первой окружностью, то этот круг переводится нашей инверсией также в круг (ограниченный второй окружностью). Для доказательства этих утверждений следует ввести на плоскости декартовы координаты (точку M_0 следует взять в качестве начальной) и записать инверсию в координатах, т.е. записать формулы, связывающие координаты точек P и P'. После этого доказательство первого утверждения сводится к несложному преобразованию уравнения окружности посредством полученных формул. Затем отсюда выводится и второе утверждение (относительно кругов). (Надо ли говорить, что читателю полезно самому проделать все эти вычисления!)

Можно также доказать, что если даны два неконцентрических круга и точка M_0, не принадлежащая им, то существует такое $R > 0$, что инверсия с центром M_0 и радиусом R переводит эти круги в пару концентрических кругов.

Вернемся к цепочке Штейнера. Покажем, что это последнее свойство инверсии приводит к немедленному доказательству теоремы Штейнера. Действительно, пусть закрепленные окружности не концентричны. Взяв любую точку M_0 вне круга, ограниченного большей из них, совершим инверсию с центром в M_0, переводящую закрепленные окружности в концентрическую пару. Любая цепочка Штейнера, взятая в первом кольце, перейдет под действием инверсии в цепочку, вписанную во второе кольцо. Эта вторая цепочка состоит, разумеется, из окружностей одного и того же радиуса. Для такой цепочки утверждение теоремы выполнено очевидным образом (как уже отмечалось выше). Отсюда ясно (после минутного размышления), что оно выполнено и для первой цепочки.

Приведенное классическое доказательство замечательным образом использует идею преобразования геометрических объектов – одну из важнейших в математике. Оно короткое и эффектное. Словом, это – превосходное доказательство. И все же, и все же… Это доказательство напоминает игрушку, из которой, если нажать нужную кнопку, выскакивает чертик (или еще какое-либо чудо такого же рода). Обладатель игрушки