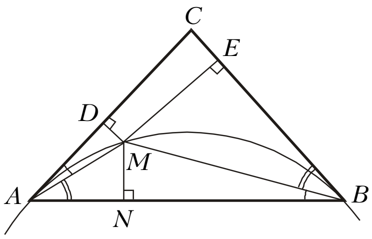

Рис. 12

как проектируется на стороны AC и BC (рис.12). Из подобия прямоугольных треугольников AMD и BNM ($\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AM} = \angle B$), а также ANM и BEM ($\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BM} = \angle B$) имеем

$$\frac{MD}{MN} = \frac{AM}{BM} = \frac{MN}{ME}, \text{ откуда } ME = \frac{MN^2}{MD} = \frac{4^2}{2} = 8 .$$

Далее находим угол M треугольника MNE:

$$\angle M = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle C\right) = 150^\circ$$

и искомую площадь.

6. 0; $\frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$. *Указание.* Положим $t = x - 1$, $b = a^3 - 3a^2 + a$ и приведем уравнение к виду $f(t) = b$. Так как функция f четная, то если уравнение имеет единственный корень t_0, то $t_0 = 0$. Отсюда

$$b = f(0) = 0.$$

Если $t \neq 0$, то $f(t) < f(0)$, так что при $b = 0$ уравнение действительно имеет ровно один корень.

Вариант 8

1. $(-\infty; 1/3)$. **2.** $\pi(2n+1)/10$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $15\sqrt{15}/32$.

4. $(-\infty; -2] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$. *Указание.* Положив $t = 2|x|$, $y = 2\log_2 t$, разложите левую часть на множители:

$$(y-2)(y+t-3) \geq 0.$$

Далее воспользуйтесь тем, что полученное неравенство равносильно неравенству

$$(t-4)(t-2) \geq 0$$

(докажите это!).

5. а) $2+\sqrt{2}$; б) $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Пусть

$$y = f(x) = x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a = (x+a)(x+a-4),$$

$$g(y) = y^2 + (a+5)y - a^2 + 8a + 2.$$

Функция $y = f(x)$ принимает в точке $x_b = 2 - a$ минимальное значение $f(2-a) = -4$, а остальные свои значения (большие, чем -4) – по 2 раза. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $g(-4) = 0$, а $y_b = -\frac{a+5}{2} \leq -4$. Два корня исходное уравнение может иметь лишь в двух случаях: если оба корня y_1 и y_2 уравнения $g(y) = 0$ удовлетворяют условию $y_1 < -4 < y_2$, т.е. при $g(-4) = 0$; если $y_1 = y_2 > -4$.

Вариант 9

1. $(3/7;\ 1)$. **2.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

3. 70. *Указание.* Воспользуйтесь формулой

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$$

при $u = \sqrt[3]{20}$, $v = \sqrt[3]{50}$.

4. $(1;\ 64)$. **5.** $-11\pi/12$, $-7\pi/12$.

6. $c \Big/ \left(2 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

7. $(1/15; 1/8) \cup (1/8; 4/15] \cup \{1/2\} \cup [1; 4)$.

Вариант 10

1. $(-\infty; 1/3] \cup (2; +\infty)$. **2.** $(1; 1/2)$. **3.** $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.

4. 2. **5.** $-\pi/2$; $\pi/2$; $5\pi/6$.

6. $\frac{9}{4}\sqrt{15}$.

7. $(-\infty; 1)$. *Указание.* Первое из неравенств системы задает часть полосы $-1 \leq x \leq 1$, ограниченную сверху полуокружностью $y = \sqrt{1-x^2}$.

Если $a \leq 0$, то второму неравенству данной системы удовлетворяют координаты любой точки плоскости. Следовательно, искомая плоская фигура – выделенное множество на рисунке 13. Эта фигура является неограниченной, ее периметр бесконечен, значит, любое $a \leq 0$ является решением задачи.

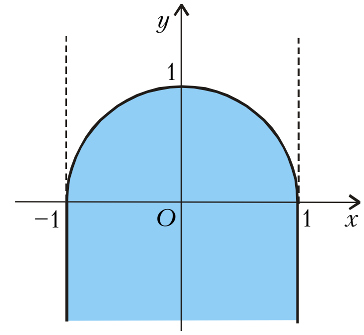

Рис. 13

Пусть $a > 0$. Заметим, что множество точек координатной плоскости, определяемое неравенством $|y| \leq \frac{1}{a}|x|$, симметрично относительно обеих координатных осей. Таким образом, искомая фигура – выделенное множество на рисунке 14.

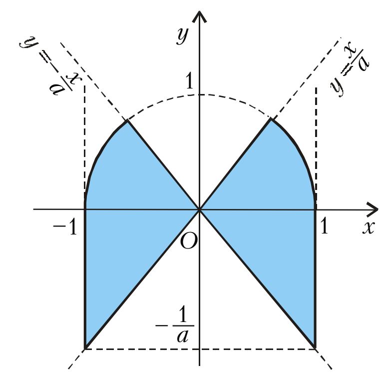

Рис. 14

Вычисляя периметр этой фигуры, получим

$$P(a) = 2 + \frac{2}{a} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}.$$

Остается решить неравенство

$$P(a) > P(1).$$

Для этого заметим, что функция $P(a)$ при $a > 0$ убывающая, т.е. решения неравенства образуют интервал $0 < a < 1$.

8. $\frac{31}{288}\sqrt{113}$. *Указание.* Сечением является пятиугольник, показанный на рисунке 15. В этом пятиугольнике

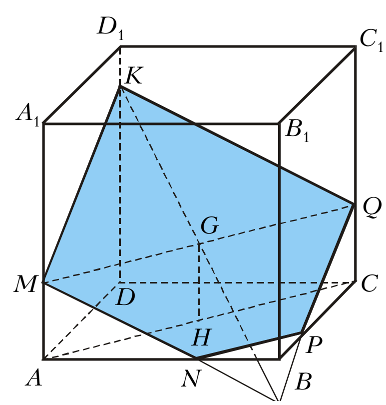

Рис. 15

$NP \parallel MQ \parallel AC$, $GH = MA = 1/3$, $MK \parallel QP$, $MN \parallel KQ$. Площадь пятиугольника равна сумме площадей равнобедренного треугольника MKQ и трапеции $MNPQ$.

Вариант 11

1. 3. **2.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $(-3;\ 9)$, $(2;\ 4)$. *Указание.* Из условия задачи следует, что корни x_1 и x_2 данного уравнения удовлетворяют системе $x_1^2 = px_2$, $x_2^2 = qx_1$, $x_1 + x_2 = 6p$, $x_1 x_2 = q$.

4. а) 10π; б) 160. *Указание.* На числовой оси AB с началом