равенств (∗) стоят положительные числа. Следовательно, уравнения (∗) однозначно решаются относительно положительных чисел a, b, c.

6. Пусть в искомом треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан. Продлим медиану BB_1 на отрезок B_1M, равный B_1O. Тогда $AOCM$ – параллелограмм, в котором $MC = AO = \frac{2}{3}m_a$, $MO = \frac{2}{3}m_b$, $CO = \frac{2}{3}m_c$. Строим треугольник MOC по трем сторонам. Проводим в нем медиану CB_1 и продолжаем ее на отрезок $B_1A = CB_1$; продолжаем сторону MO на отрезок $OB = MO$. Вершины A, B, C искомого треугольника построены.

7. *Указание*. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}pq\sin\varphi$, с другой стороны, она равна $\frac{1}{2}pl\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}ql\sin\frac{\varphi}{2}$. Приравняв эти два выражения с учетом того, что $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, получаем требуемый результат.

Комбинированные задачи по механике

1. $s = \pi v\sqrt{3m/k}$. **2.** $\tau = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m}{M}+\frac{1}{\sin^2\alpha}}$.

3. $s = \left(\frac{9\pi^2}{4}+1\right)\frac{mg}{k}$. **4.** $N = mg$.

5. $v = c\frac{E_\gamma}{m_я c^2} = \frac{E_\gamma}{E} \approx 60$ м/с.

Московский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 2; 2/3. *Указание.* Пусть $t > 0$ – первая дробь, а $s > 0$ – вторая. Тогда $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} - 1$, а $s = kt$, где $k = 3$ или $k = \frac{1}{3}$.

2. $\{0\}\cup[1/2;1]\cup\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2;+\infty\right)$. *Указание*. После замены $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt[3]{1-2x}$ неравенство примет вид $a + b \le$ $\le \sqrt[3]{a^3+b^3}$. Равносильное ему неравенство $ab(a+b) \le 0$ решается без труда.

3. 15. *Указание*. Треугольники ADB и MCB подобны, а $BM/AB = 5/3$.

4. $[-9/10;\,0)\cup(2;\,9/4)\cup(9/4;\,19/8)$. *Указание*. Пусть $t =$ $= \lg x$, $f = \lg(a+1)$, $g = \lg(19-8a)$. Исходное уравнение приводится к виду $\frac{t^2-2ft+fg}{ft} = 0$ и имеет два различных корня t_1 и t_2 тогда и только тогда, когда $f^2 - fg > 0$, $ft \ne 0$, т.е. при $a \in (-1;\,0)\cup(2;\,9/4)\cup(9/4;\,19/8)$. При этом корни исходного уравнения $x_1 = 10^{t_1}$ и $x_2 = 10^{t_2}$ положительны и различны, а условие $x_1x_2 \ge$ $\ge 0{,}01$ равносильно тому, что $(a+1)^2 \ge 0{,}01$.

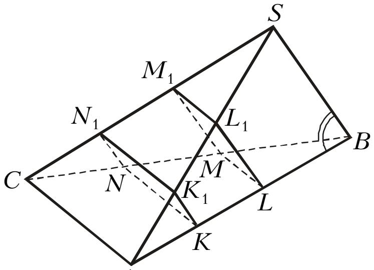

Рис. 8

5. 32/5. Сечением сферы плоскостью грани ABS (рис.8) является окружность, проходящая через точки K, L, K_1 и L_1, отрезки KL и K_1L_1 – равные хорды этой окружности, поэтому вписанный в окружность четырехугольник KLK_1L_1 является равнобокой трапецией. Из этого заключаем, что $AL = AL_1$ и $AK = AK_1$. Аналогично, $CN = CN_1$, $BL = BM$ и $SL_1 = SM_1$. Из доказанных равенств следует, что $CB + AS = AB + CS$. Наложим треугольник SBA на треугольник SBC так, чтобы отрезок SB остался общим, а луч BA наложился на луч BC (сделать это позволяет равенство углов $\angle SBA$ и $\angle SBC$). Точку, в которую при наложении попадет точка A, обозначим через A_1. Равенство $CB + A_1S = A_1B + CS$ приведет к равенству $CS = A_1S + CA_1$ в случае, если точка A_1 попадет между точек C и B, или к равенству $CS = A_1S - CA_1$ в случае, если точка C попадет между A_1 и B. Каждое из этих равенств противоречит неравенству треугольника, поэтому A_1 совпадает с C. Следовательно, $BC = BA$, $SA = CS$.

Итак, треугольники ABC и ASC равнобедренные. Плоскость, проходящая через точки B и S и середину ребра AC, содержит два перпендикуляра к AC и поэтому перпендикулярна AC. Следовательно, $SB \perp AC$.

Так как $BL = BM$, а треугольник ABC равнобедренный, то $LM \parallel AC$. Аналогично, $KN \parallel K_1N_1 \parallel L_1M_1 \parallel AC$. Поскольку $K_1N_1 \perp K_1K$ и $K_1N_1 \parallel AC$, то $AC \perp K_1K$. Если бы отрезки K_1K и SB не были параллельны, то ребро AC, будучи перпендикуляром к каждому из них, оказалось бы перпендикулярно плоскости ASB и, следовательно, ребру AB. Но это противоречит тому, что треугольник ABC равнобедренный. Поэтому $K_1K \parallel SB$. Отсюда и из равенства $AK = AK_1$ получаем, что треугольник SAB равнобедренный. Следовательно, равнобедренным является и треугольник SCB. Тогда $K_1K \parallel L_1L \parallel SB \parallel M_1M \parallel N_1N$.

Поэтому точки K, K_1, N_1, N, L, L_1, M_1 и M образуют два прямоугольника – KK_1N_1N и LL_1M_1M. Отсюда $L_1L = M_1M = 2K_1K$, и из подобия треугольников AK_1K и AL_1L получаем $AL = 2\,AK$, или $AK = KL$. Аналогично, условие $2KN = 3L_1M_1$ приводит к равенству $LB = 2KL$. Итак, $AK : KL : LB = 1 : 1 : 2$.

Отношение площади трапеции $KLMN$ к площади треугольника ABC равно 5 : 16 (треугольники LBM и KBN подобны с коэффициентом 2/3, поэтому площадь трапеции $KLMN$ составляет 5/9 площади треугольника KBN, а треугольники KBN и ABC подобны с коэффициентом 3/4 и их площади относятся как 9 : 16). Длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на плоскость ABC, относится к высоте SH пирамиды $SABC$, как 1 : 2 (это следует из того, что $CM_1 : CS =$ $= AL : AB$). Поэтому отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN равно 32 : 5.

6. 1; −1/3; −1/2; −3/4. *Указание.* Пусть $y = \frac{1-x}{1+x}$, тогда вторая дробь равна $z = -\frac{y^2+y-1}{2y^2-6y-1}$, и остается выяснить, при каких целых $y \ne -1$ будет целым число z. Заведомо не годятся значения y, при которых $\left|\frac{y^2+y-1}{2y^2-6y-1}\right| < 1$. Остальные целые значения y следует просто перебрать.

Вариант 2

1. $(0;2]$.

2. $\arccos\sqrt{2/3}$. Вторая и третья сферы касаются друг друга внешним образом, поэтому $AB = 2$. Обе сферы могут касаться первой сферы как внешним, так и внутренним образом. Невозможен случай, когда одно из этих касаний внешнее, а другое – внутреннее (тогда центры их лежали бы на одной прямой, из чего следовало бы, что точка O лежит в плоскости γ, а это противоречит условию задачи).

Возможны два случая. Первая сфера либо касается каждой из двух других внешним образом, либо касается каждой из