задними колесами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки $A$ и $B$. Между точками $A$ и $B$ ровно 100 метров. Точка $A$ покрашена. Через точку $A$ проезжают правые колеса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки на дороге, кроме точки $A$, не окрашивают колеса. Тележка движется от точки $A$ к точке $B$. Найдите:

а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками;

б) количество окрашенных точек на отрезке $AB$.

**5.** В треугольнике $PQR$ точка $T$ лежит на стороне $PR$, $\angle QTR = \angle PQR$, $PT = 8$, $TR = 1$. Найдите:

а) сторону $QR$;

б) угол $QRP$, если радиус описанной около треугольника $PQT$ окружности равен $3\sqrt{3}$.

**6.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

*Вариант 12*

(филологический факультет)

**1.** Решите неравенство

$$\frac{\log_{x^6} \pi \cdot \arcsin \dfrac{x}{2}}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{x}} \geq 0.$$

**2.** Окружность радиуса 3 проходит через середины трех сторон треугольника $ABC$, в котором величины углов $A$ и $B$ равны 60°и 45° соответственно. Найдите площадь треугольника.

**3.** Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

**4.** Положительное число $a$ подобрано так, что меньший корень уравнения

$$x^3 + 2x = 4x^2 - 4$$

является одновременно одним из решений неравенства

$$a^{5x-4} > a^{-x^2+4x-4}.$$

Решите это неравенство.

**5.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса 6, а боковая грань составляет угол 45° с высотой пирамиды.

а) Найдите площадь основания пирамиды.

б) В данную пирамиду вписан второй шар так, что он касается всех боковых граней и первого шара; затем вписан третий шар, касающийся всех боковых граней и второго шара, и т.д. Найдите сумму объемов бесконечной системы вписанных шаров.

**6.** Словарь людоедов из племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью.

Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас, оставаясь целочисленным, стал увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу.

Какое наибольшее целое число месяцев может проучиться Эллочка в школе, чтобы словарь людоеда после одного года посещения проповедей обязательно остался богаче словаря Эллочки?

*Вариант 13*

(экономический факультет, отделение экономики)

**1.** Докажите или опровергните следующее утверждение: периметр ромба с диагоналями 1 и 3 больше длины окружности радиуса 1.

**2.** Решите неравенство

$$\left(1 - \frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

**4.** Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за 30 дней. При увеличении бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на 1 час все задание было бы закончено не ранее чем через 21 день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня.

**5.** Решите уравнение

$$\log_2\left(\cos 3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) \cdot \log_2(\cos 2x) + \log_2(\sin 5x + \sin x) = 0.$$

**6.** Найдите все значения $a$, при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2 - 6ax + 10a^2} + \sqrt[4]{3 + 6ax - x^2 - 10a^2} \geq$$
$$\geq \sqrt[4]{\sqrt{3}a + 24 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \left|y - \sqrt{2}a^2\right| + \left|y - \sqrt{3}a\right|}$$

имеет единственное решение.

**7.** Равные кубы $A$ и $B$, имеющие общую вершину, расположены так, что ребро куба $A$ лежит на диагонали куба $B$, а ребро куба $B$ лежит на диагонали куба $A$. Найдите объем общей части этих кубов, если длина их ребер равна 1.

*Вариант 14*

(факультет психологии)

**1.** Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} > x - 2.$$

**2.** Решите неравенство

$$\log_{x+1}\left(x^2 + 3x - 10\right) > 2.$$

**3.** Решите уравнение

$$2^{2^x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x - 1} = 3.$$

**4.** На катете $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону $AB$ в точке $E$. На стороне $BC$ взята точка $G$ так, что отрезок $AG$ пересекает окружность в точке $F$, причем отрезки $EF$ и $AC$ параллельны, $BG = 2GC$ и $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите $GF$.

**5.** Решите уравнение

$$\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0.$$