

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4 x + b^2 + (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2 (b + \sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

2. Решите неравенство

$$2 \cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) \leq 0.$$

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и $B_1 C_1$.

4. Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B . Велосипедист обогнал пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{13 \cos x + 98 \sin y} - \sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} = 4, \\ 2\sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} - \sqrt{70 \sin y + 8} = 2. \end{cases}$$

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D . Окружность радиуса 35, центр которой лежит на прямой BC , проходит через точки A и D . Известно, что $AB^2 - AC^2 = 216$, а площадь треугольника ABC равна $90\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Вариант 5

(физический факультет, май)

1. Решите уравнение

$$\frac{\log_2(4x - 3)}{\log_3 x} = \frac{2}{\log_3 2}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 8x \operatorname{ctg} x + 2 \sin^2 4x = \operatorname{ctg} x.$$

3. Решите уравнение

$$4 + \sqrt{x + 9} = |x + 5|.$$

4. В треугольнике ABC $AB = 14$, $BC = 6$, $AC = 10$. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O . Найдите OD .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1} \log_9 y - 2^{2x} = 2, \\ 9 \cdot 2^x \log_{27} y - \log_3^2 y = 9. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершину B треугольника ABC , касается стороны AC в ее середине D и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB : BC = 3 : 2$. Найдите отношение площади ΔAMD к площади ΔDNC .

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$(x^2 + 2x - a^2 - 4a - 3)(\sin x + 2x) > 0.$$

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SC перпендику-

лярно грани ABC , $\angle ACB$ – прямой, $AC = 1$, $BC = 2$, $SC = 4\sqrt{5}/5$. Сфера касается плоскостей SCA , SCB и ABC , причем плоскости ABC она касается в точке, лежащей на отрезке AB . Найдите:

1) радиус сферы;

2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань ASB .

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 5x - \cos 15x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} 5x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}}{3-2x} < 1.$$

3. Решите неравенство

$$15 \cdot \frac{4^{x-2}}{4^x - 3^x} > 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x.$$

4. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), площадь которой равна 48. Окружность касается сторон AB и CD в точках K и L . Найдите KL .

5. Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму числу прибавить 1, а от третьего числа отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

6. В пирамиде $SBCD$ каждое ребро равно 3. На ребре SB взята точка A так, что $SA : AB = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12) < -1$$

и найдите, при каких значениях a множество точек x , не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

8. В треугольнике KLM отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается сторон ΔKLM в точках A , B и C . Найдите отношение площади ΔKLM к площади ΔABC .

Вариант 7

(химический факультет, факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{4^x} - 5 \cdot 2^{2+\frac{1}{x}} + 64 = 0.$$

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y - 1| \leq 1, \\ |x - 2| + |y - 1| \leq 1. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{17-x^2}(56 - x^2 + 10x) \leq \frac{1}{2}(\log_{3+\sqrt{7}}(8 + 3\sqrt{7}) + \log_{3+\sqrt{7}} 2).$$

4. Решите уравнение

$$\left(63 \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 2x + \sin^2 x.$$

5. Из точки C проведены две касательные к окружности. Точки A и B – точки касания. На окружности взята произвольная точка M , отличная от A и B . Из точки M опущены перпендикуляры MN , ME , MD на стороны AB , BC , CA